Estructuras de Datos no Lineales

1.1. Árboles binarios

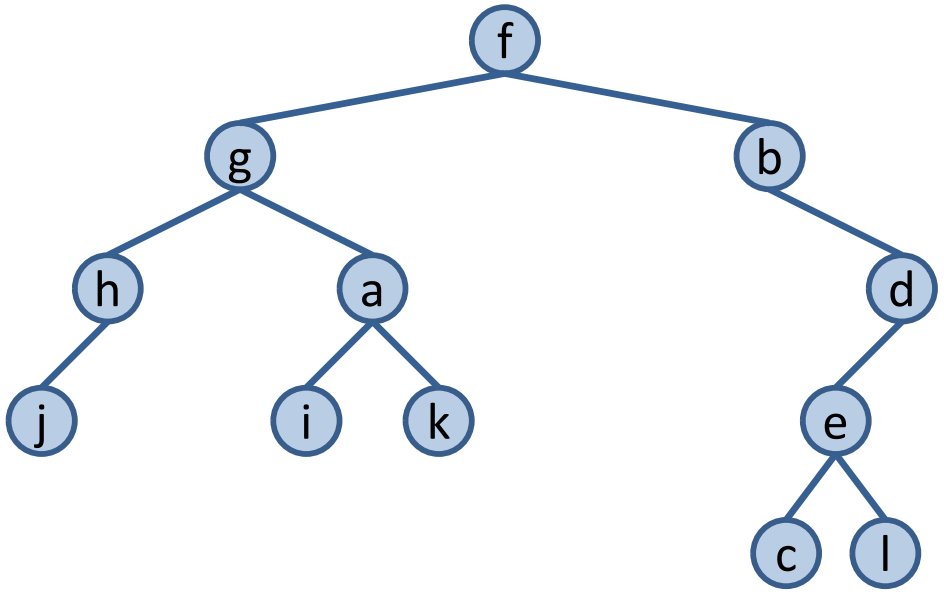
José Fidel Argudo Argudo
José Antonio Alonso de la Huerta
Mª Teresa García Horcajadas

Versión 2.2

TAD Árbol binario

Definición:

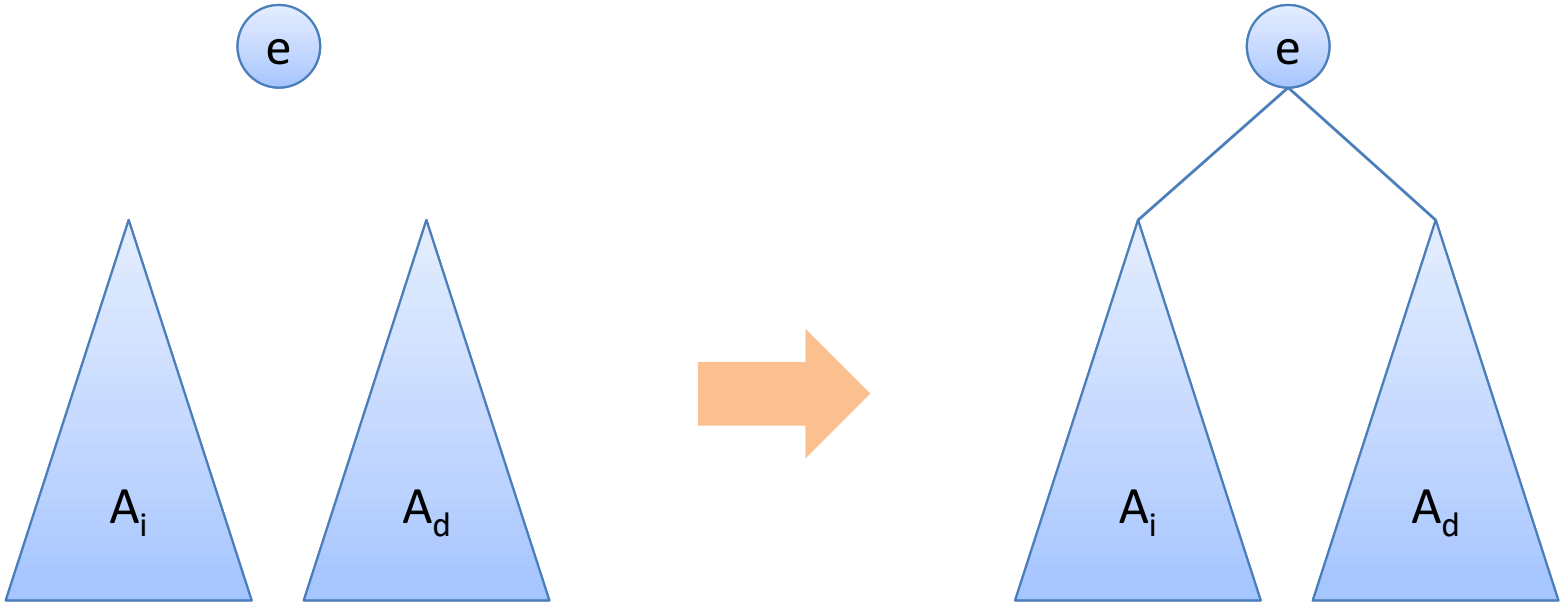
Un árbol binario se define como un árbol cuyos nodos son, a lo sumo, de grado 2, es decir, tienen 0, 1 ó 2 hijos. Éstos se llaman *hijo izquierdo* e *hijo derecho*.



Operaciones:

- Construcción
- Inserción
- Eliminación
- Recuperación
- Modificación
- Acceso
- Destrucción

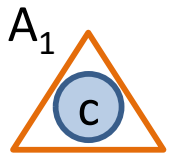
Construcción de un árbol binario (I)



Construcción a partir de los componentes de un árbol binario (un nodo y dos subárboles):

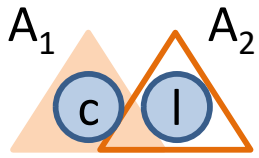
```
Abin(); // Árbol vacío.
void insertarRaiz(const T& e);
void insertarIzqdo (Abin& Ai);
void insertarDrcho(Abin& Ad);
```

Construcción de un árbol binario (I)



Abin A_1;
A_1.insertarRaiz('c');

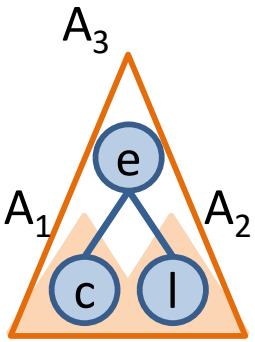
Construcción de un árbol binario (I)



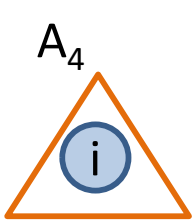
Abin A_2;
A_2.insertarRaiz('l');

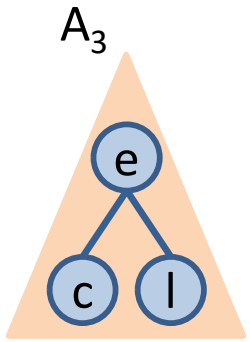
Construcción de un árbol binario (I)

Abin A_3; A_3.insertarRaiz('e');
A_3.insertarIzqdo(A_1);
A_3.insertarDrcho(A_2);



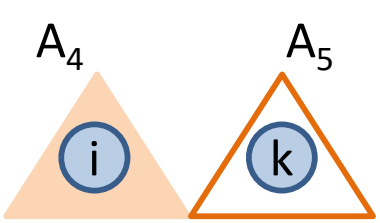
Construcción de un árbol binario (I)

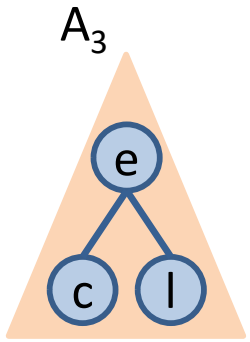




Abin A_4;
A_4.insertarRaiz('i');

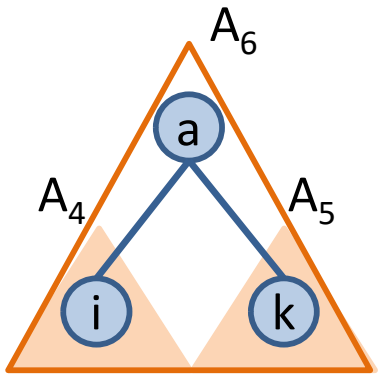
Construcción de un árbol binario (I)

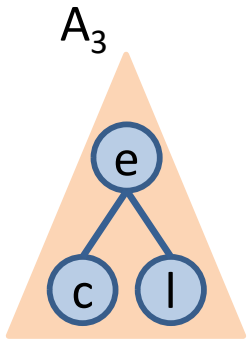




Abin A_5;
A_5.insertarRaiz('k');

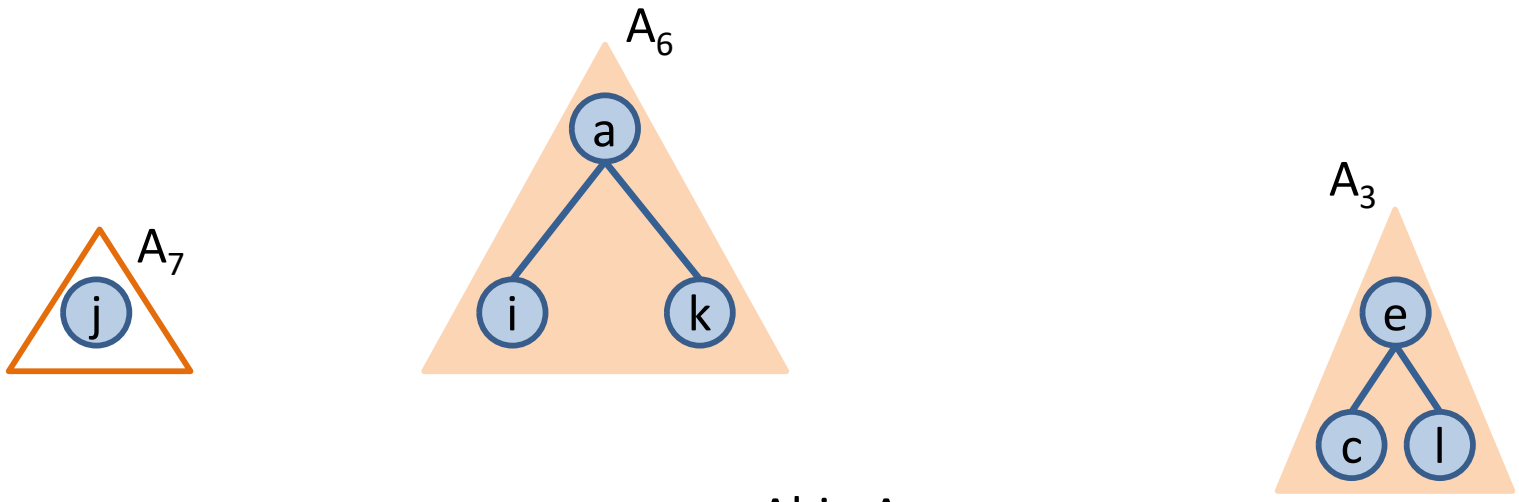
Construcción de un árbol binario (I)





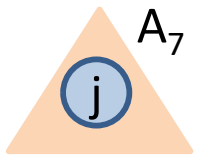
Abin A_6; A_6.insertarRaiz('a');
A_6.insertarIzqdo(A_4);
A_6.insertarDrcho(A_5);

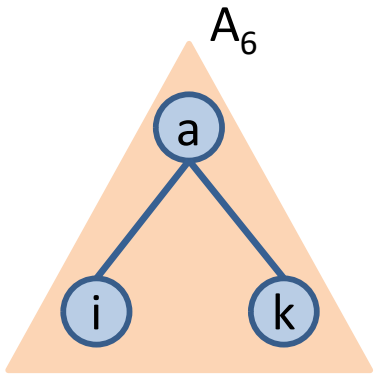
Construcción de un árbol binario (I)



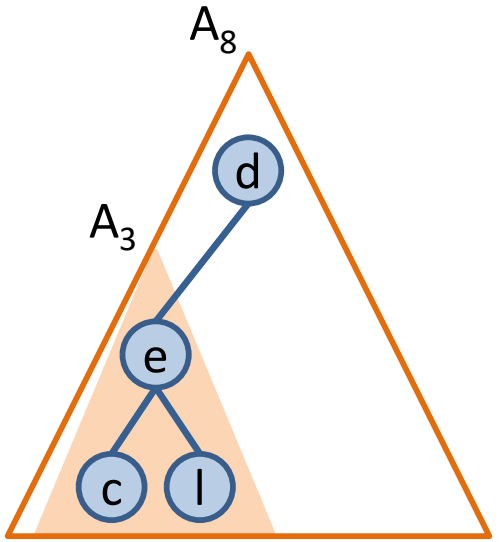
Abin A_7;
A_7.insertarRaiz('j');

Construcción de un árbol binario (I)

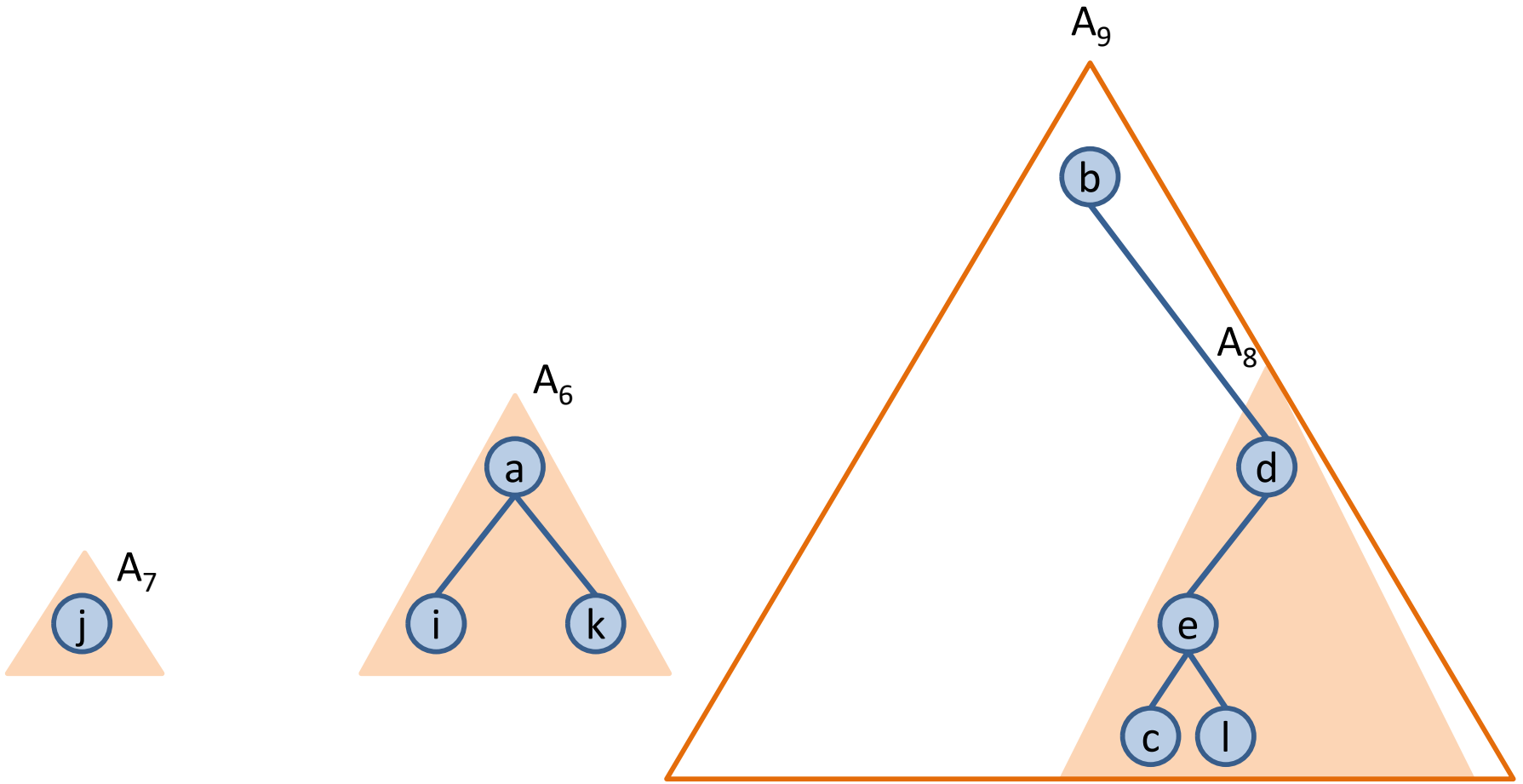




Abin A_8;
A_8.insertarRaiz('d');
A_8.insertarIzqdo(A_3);

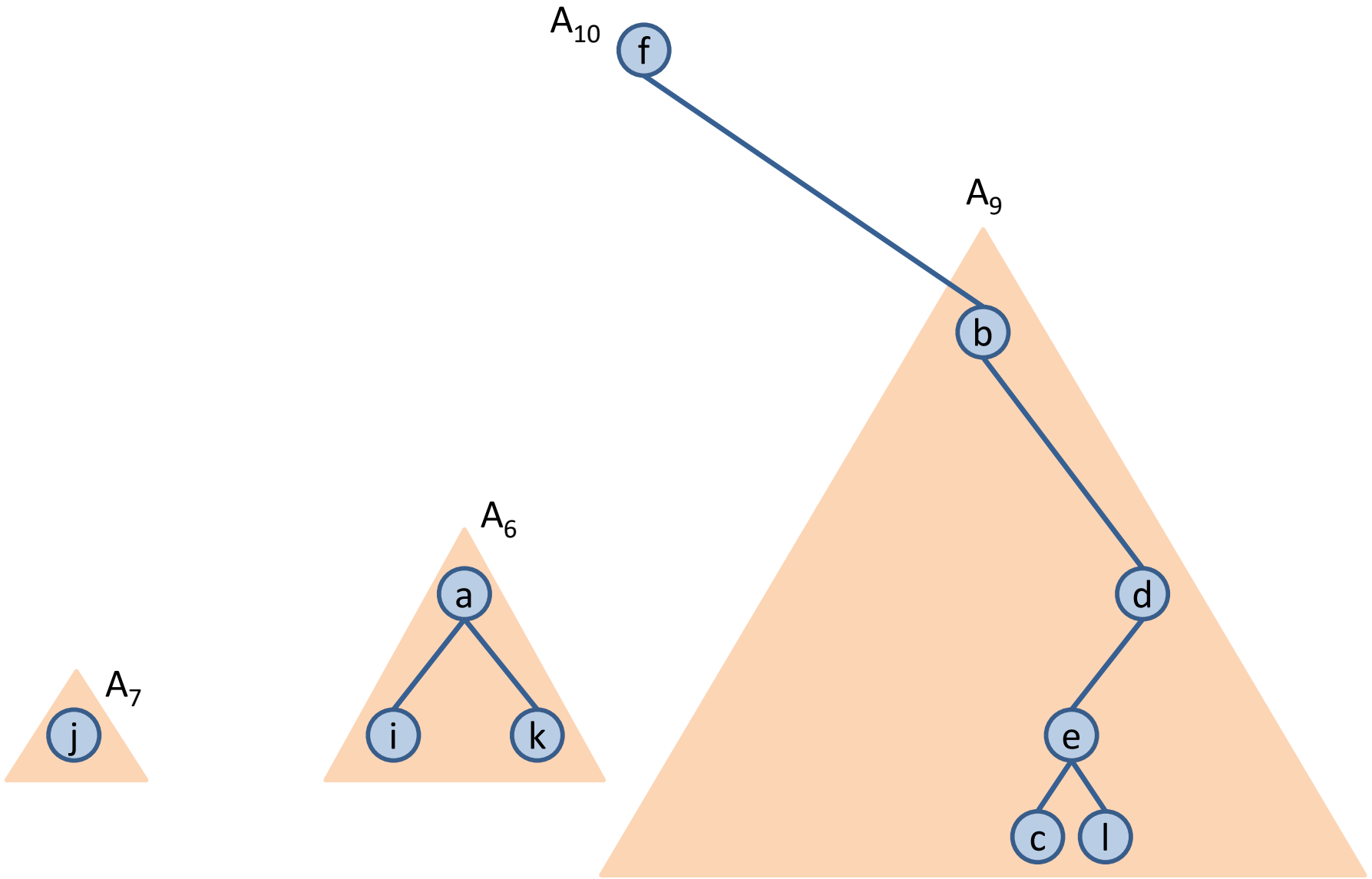


Construcción de un árbol binario (I)



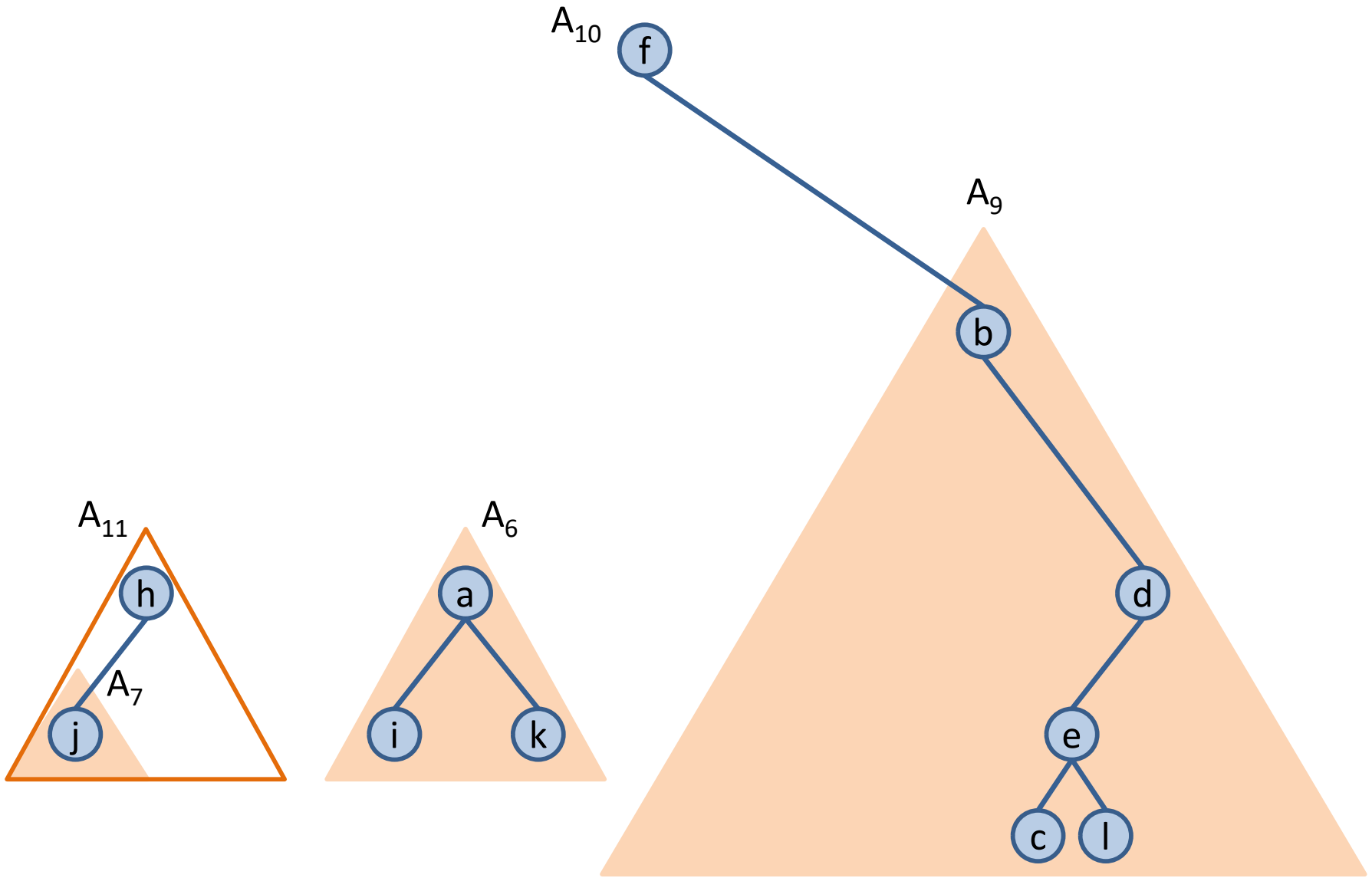
Abin A_9; A_9.insertarRaiz('b');
A_9.insertarDrcho(A_8);

Construcción de un árbol binario (I)



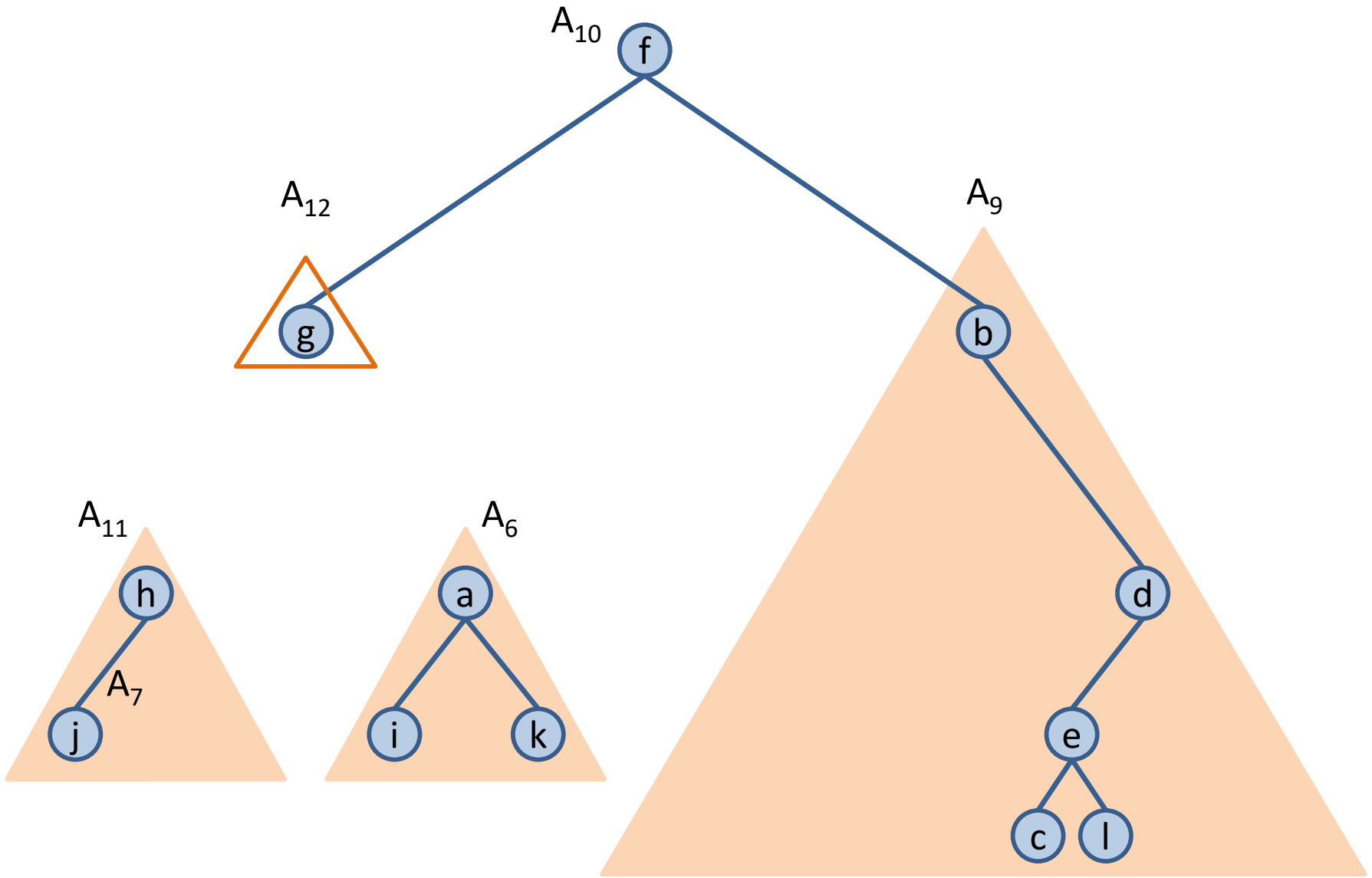
Abin A_{10}; A_{10}.insertarRaiz('f');
A_{10}.insertarDrcho(A_9);

Construcción de un árbol binario (I)



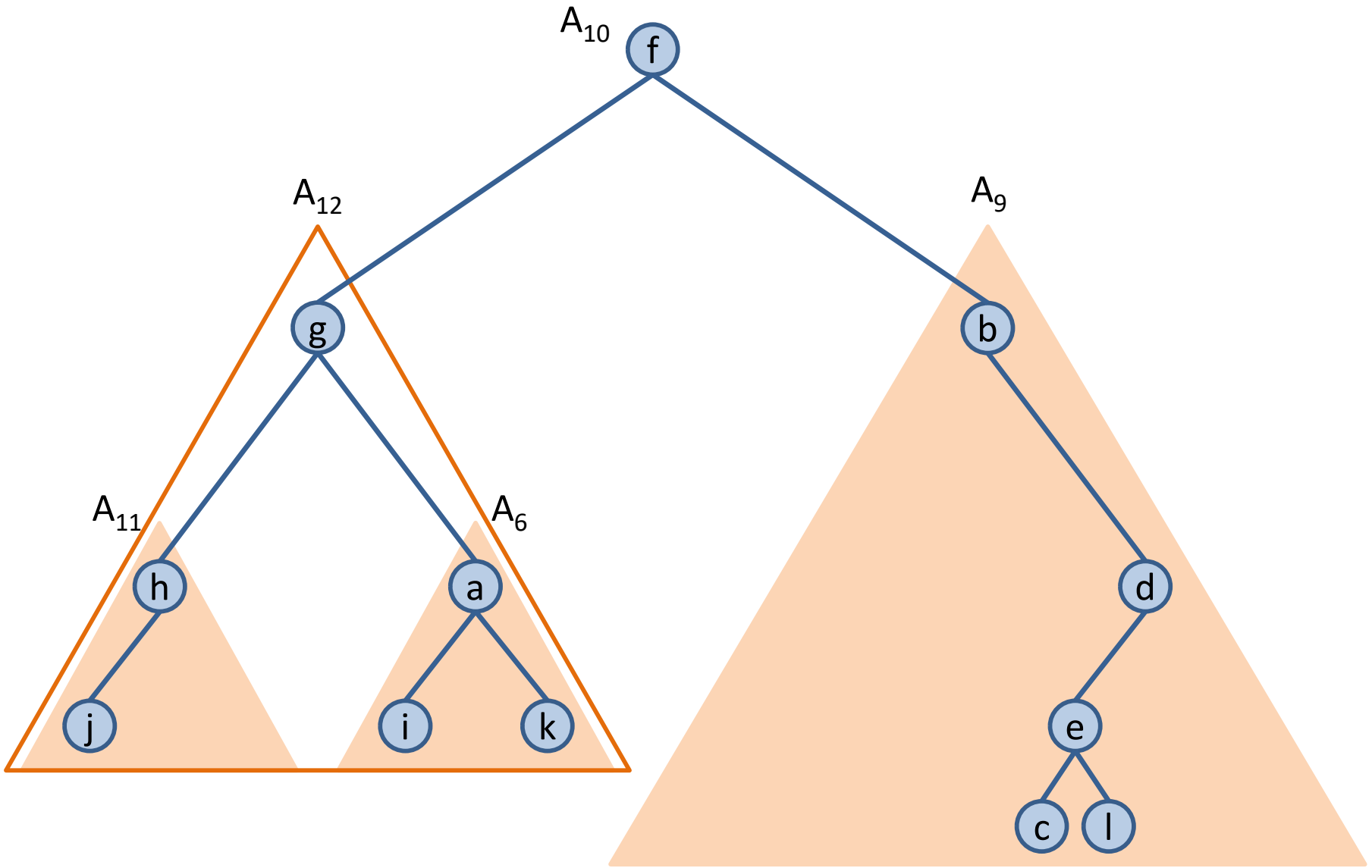
Abin A_{11}; A_{11}.insertarRaiz('h');
A_{11}.insertarIzqdo(A_7);

Construcción de un árbol binario (I)



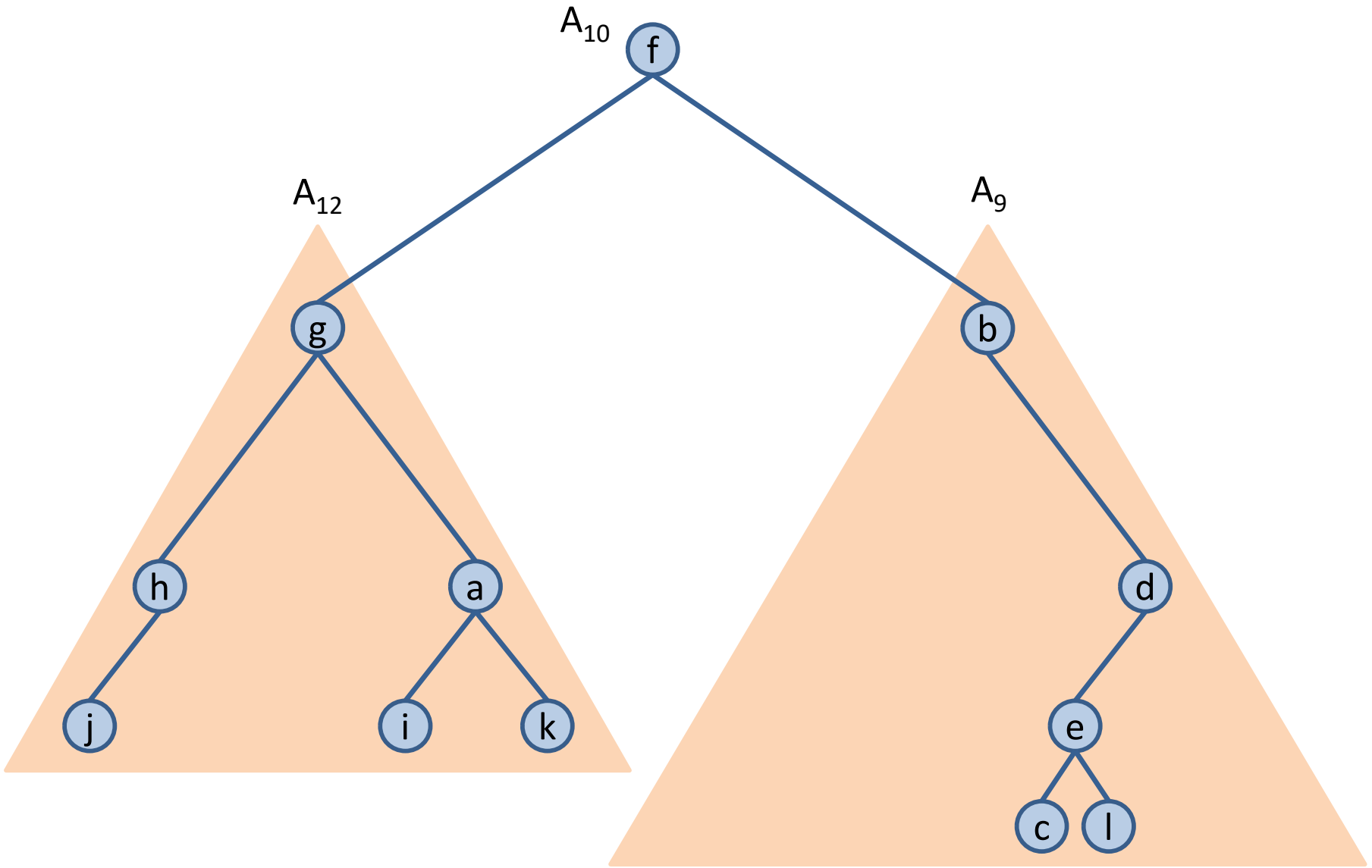
Abin A_{12}; A_{12}.insertarRaiz('g');
A_{10}.insertarIzqdo(A_{12});

Construcción de un árbol binario (I)

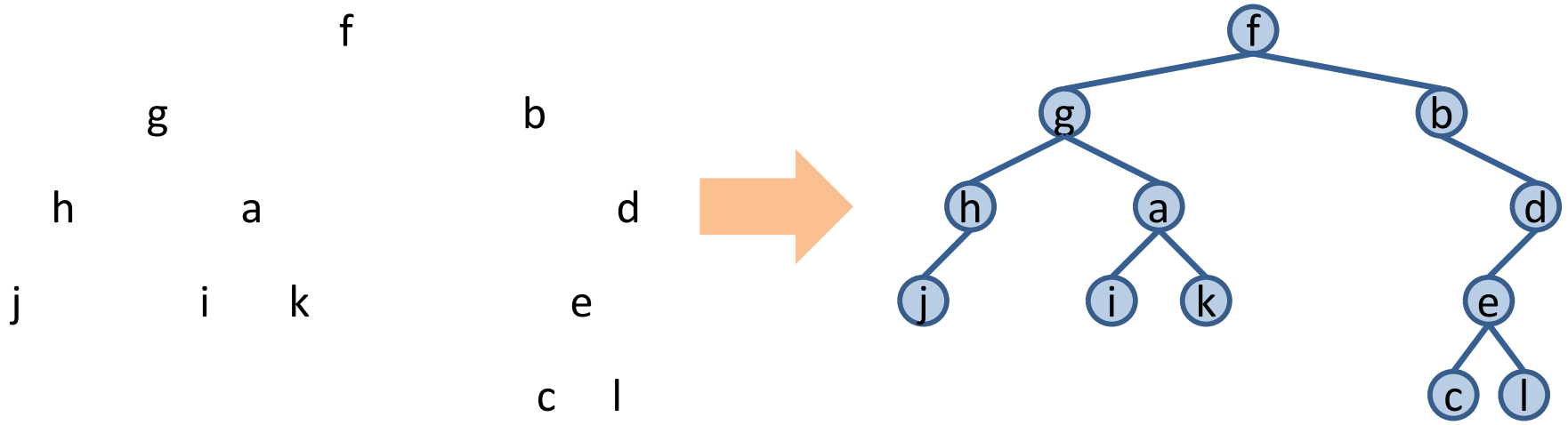


A_{12}.insertarIzqdo(A_{11});
A_{12}.insertarDrcho(A_6);

Construcción de un árbol binario (I)



Construcción de un árbol binario (II)

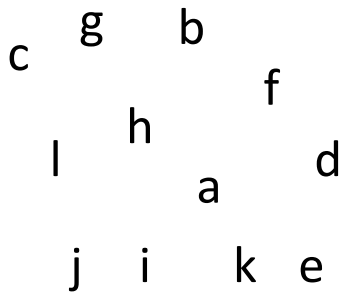


Construcción añadiendo los nodos uno a uno desde la raíz hacia las hojas:

Abin(); // Árbol vacío.
void insertarRaiz(const T& e);
void insertarHijoIzqdo(nodo n, const T& e);
void insertarHijoDrcho(nodo n, const T& e);

Construcción de un árbol binario (II)

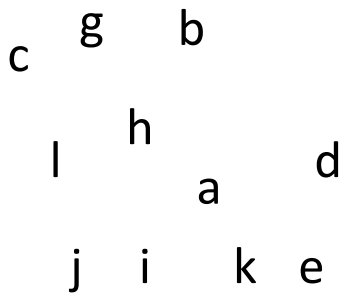
Creación del árbol binario A como un contenedor vacío.

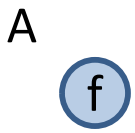


A

Abin A;

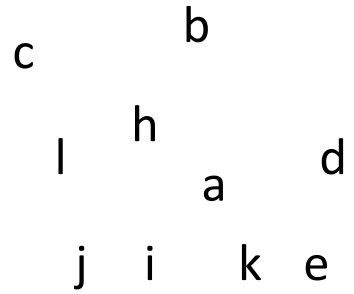
Construcción de un árbol binario (II)

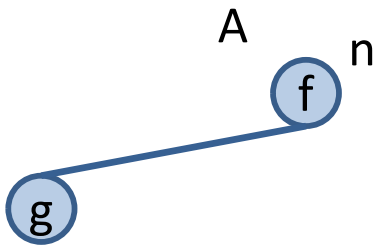




A.insertarRaiz('f');

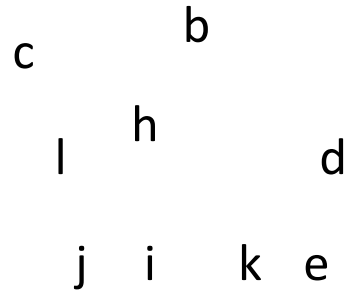
Construcción de un árbol binario (II)

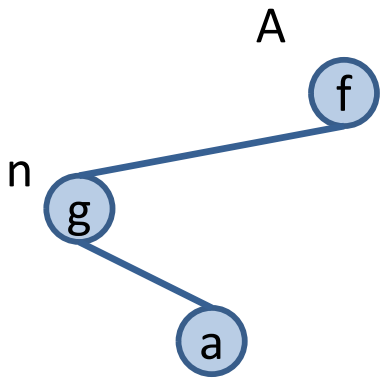




A.insertarHijoIzqdo(n, ‘g’);

Construcción de un árbol binario (II)





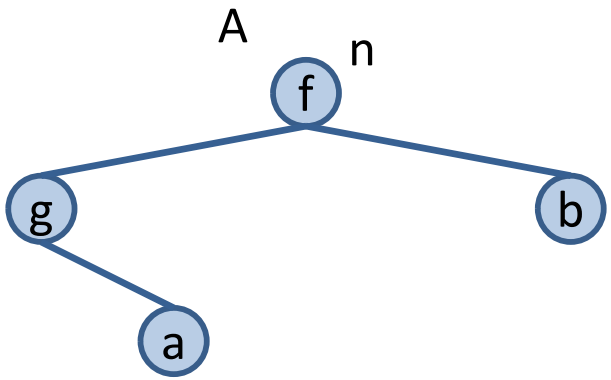
A.insertarHijoDrcho(n, ‘a’);

Construcción de un árbol binario (II)

c

l h d

j i k e



A.insertarHijoDrcho(n, ‘b’);

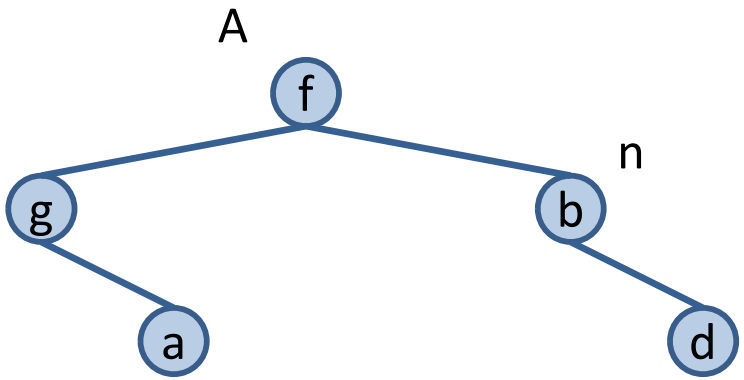
Construcción de un árbol binario (II)

c

h

l

j i k e



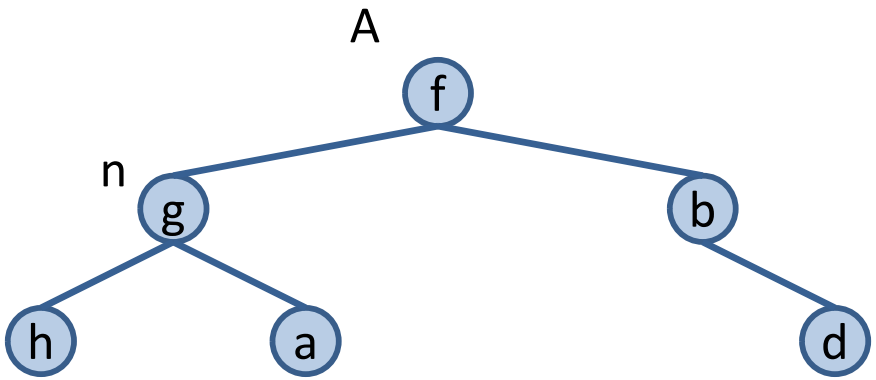
A.insertarHijoDrcho(n, ‘d’);

Construcción de un árbol binario (II)

c

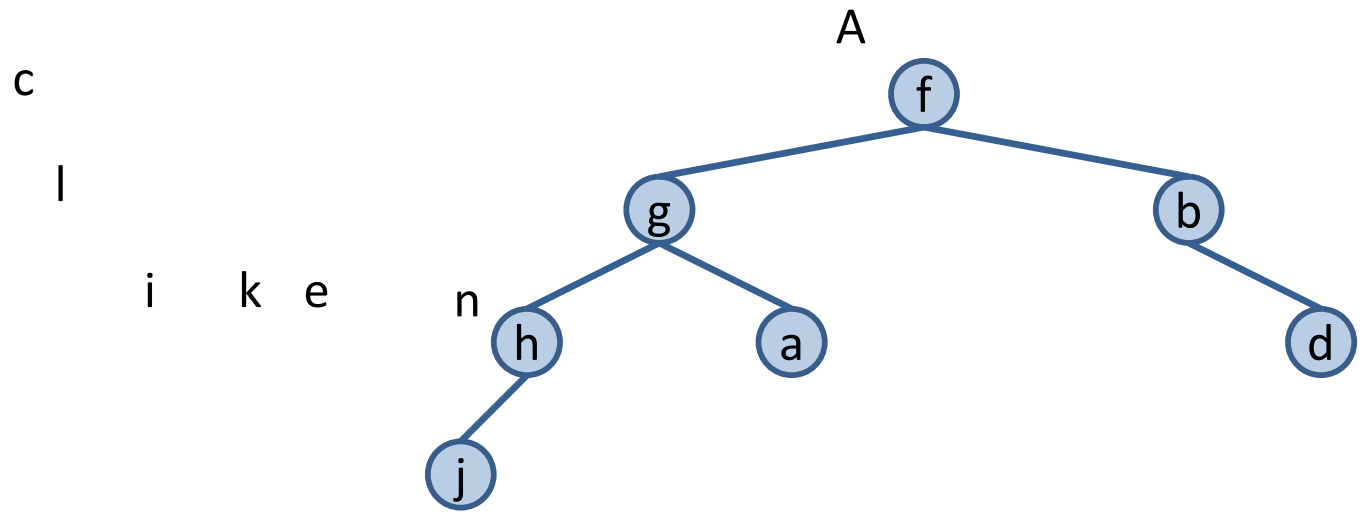
l

j i k e



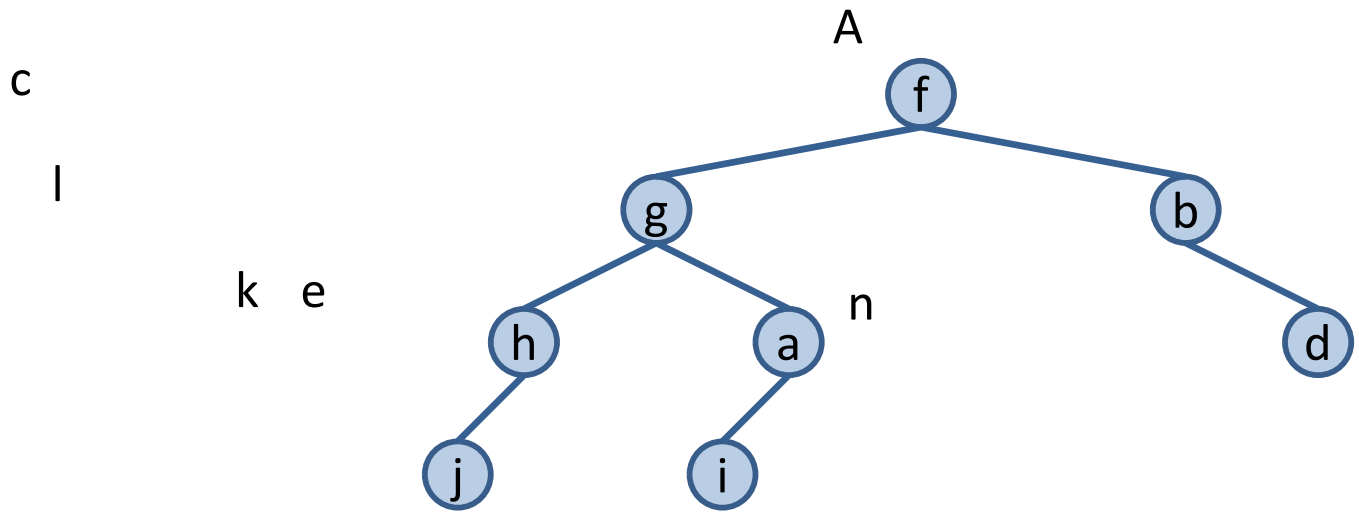
A.insertarHijoIzqdo(n, ‘h’);

Construcción de un árbol binario (II)



A.insertarHijoIzqdo(n, ‘j’);

Construcción de un árbol binario (II)



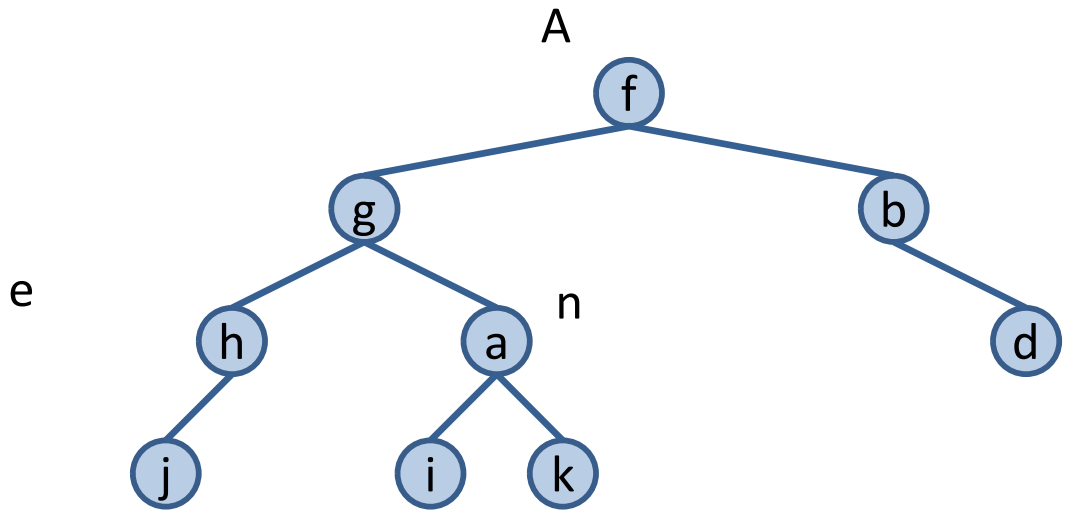
A.insertarHijoIzqdo(n, ‘i’);

Construcción de un árbol binario (II)

c

l

e

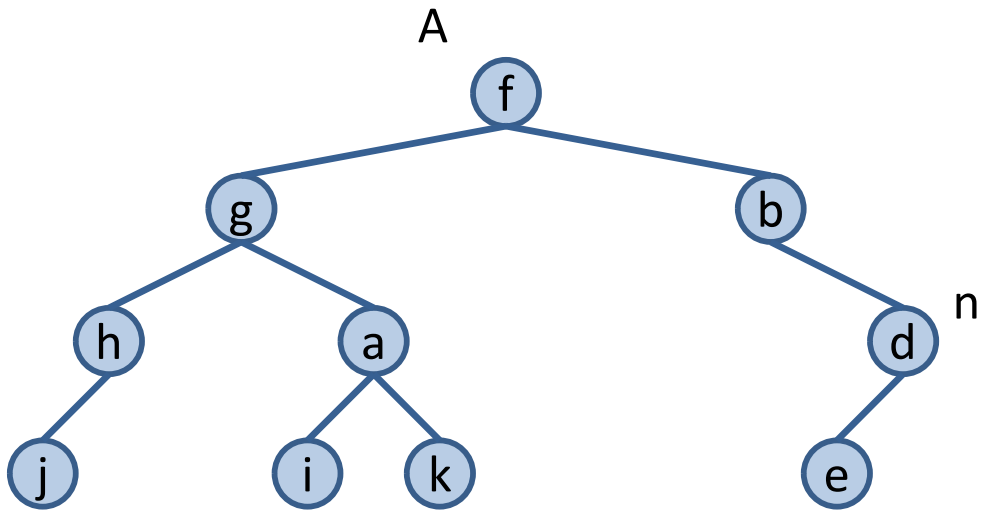


A.insertarHijoDrcho(n, ‘k’);

Construcción de un árbol binario (II)

c

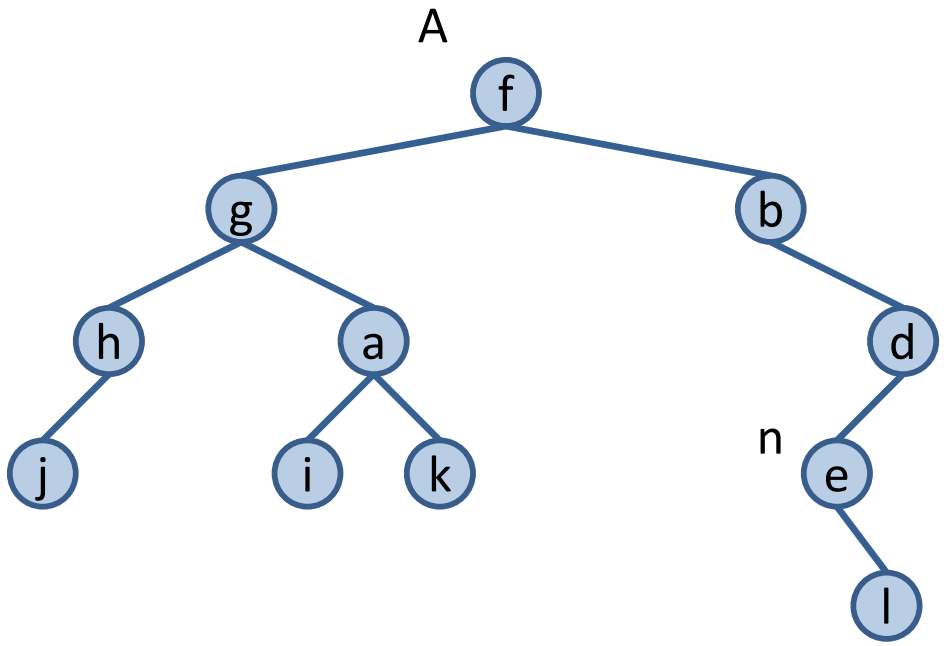
l



A.insertarHijoIzqdo(n, ‘e’);

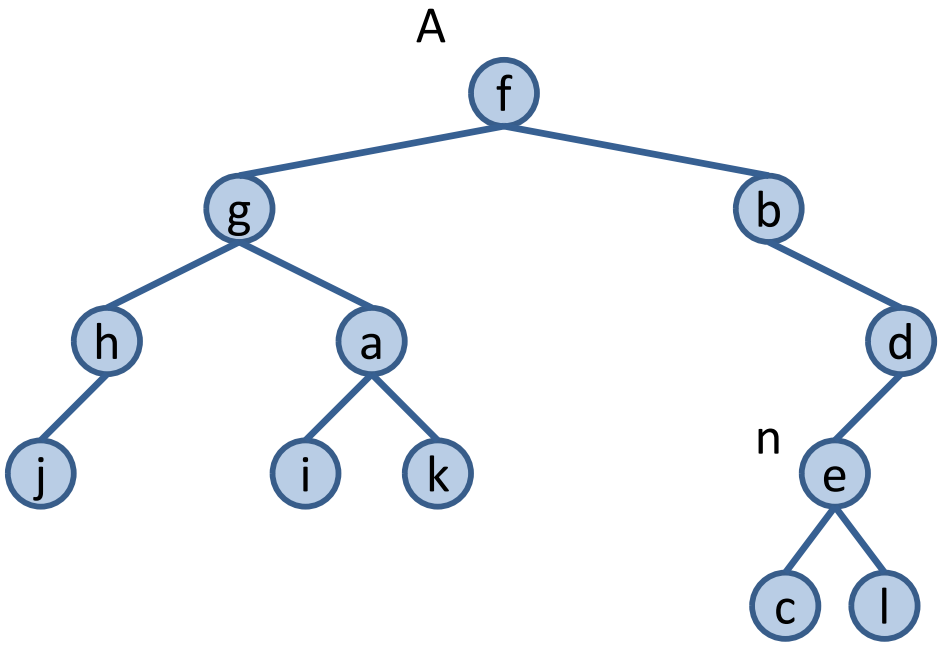
Construcción de un árbol binario (II)

c



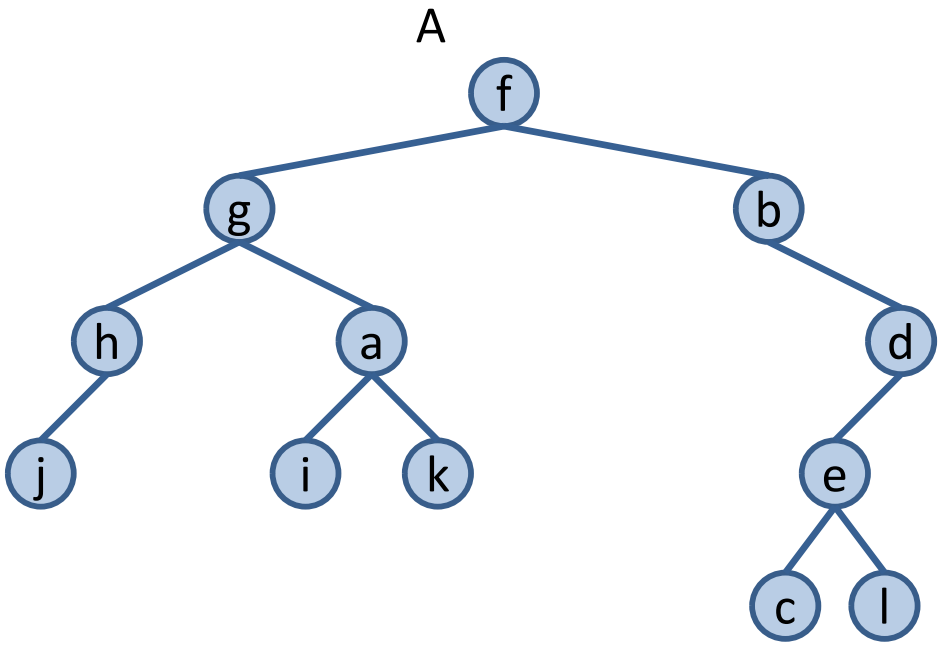
A.insertarHijoDrcho(n, ‘l’);

Construcción de un árbol binario (II)



A.insertarHijoIzqdo(n, ‘c’);

Construcción de un árbol binario (II)



Especificación de operaciones:

Abin ()

Post: Crea y devuelve un árbol vacío.

void insertarRaiz (const T& e)

Pre: El árbol está vacío.

Post: Inserta el nodo raíz cuyo contenido será *e*.

void insertarHijoIzqdo (nodo n, const T& e)

Pre: *n* es un nodo del árbol que no tiene hijo izquierdo.

Post: Inserta el elemento *e* como hijo izquierdo del nodo *n*.

void insertarHijoDrcho (nodo n, const T& e)

Pre: *n* es un nodo del árbol que no tiene hijo derecho.

Post: Inserta el elemento *e* como hijo derecho del nodo *n*.

void eliminarHijoIzqdo (nodo n)

Pre: *n* es un nodo del árbol.

Existe *hijoIzqdoB(n)* y es una hoja.

Post: Destruye el hijo izquierdo del nodo *n*.

No podemos eliminar un nodo que no es una hoja, es decir, que no tiene nodo hijo derecho, izquierdo ó ambos.
Si no hacemos eso, nos estamos saltando la Especificación del TAD cosa que no puede ser.

void eliminarHijoDrcho (nodo n)

Pre: *n* es un nodo del árbol.

Existe *hijoDrchoB(n)* y es una hoja.

Post: Destruye el hijo derecho del nodo *n*.

void eliminarRaiz ()

Pre: El árbol no está vacío y *raiz()* es una hoja.

Post: Destruye el nodo raíz. El árbol queda vacío

bool arbolVacio () const

Post: Devuelve `true` si el árbol está vacío y `false` en caso contrario.

const T& elemento(nodo n) const

T& elemento(nodo n)

Pre: *n* es un nodo del árbol.

Post: Devuelve el elemento del nodo *n*.

nodo raíz () const

Post: Devuelve el nodo raíz del árbol. Si el árbol está vacío, devuelve *NODO_NULO*.

nodo padre (nodo n) const

Pre: *n* es un nodo del árbol.

Post: Devuelve el padre del nodo *n*. Si *n* es el nodo raíz, devuelve *NODO_NULO*.

nodo hijoIzqdo (nodo n) const

Pre: *n* es un nodo del árbol.

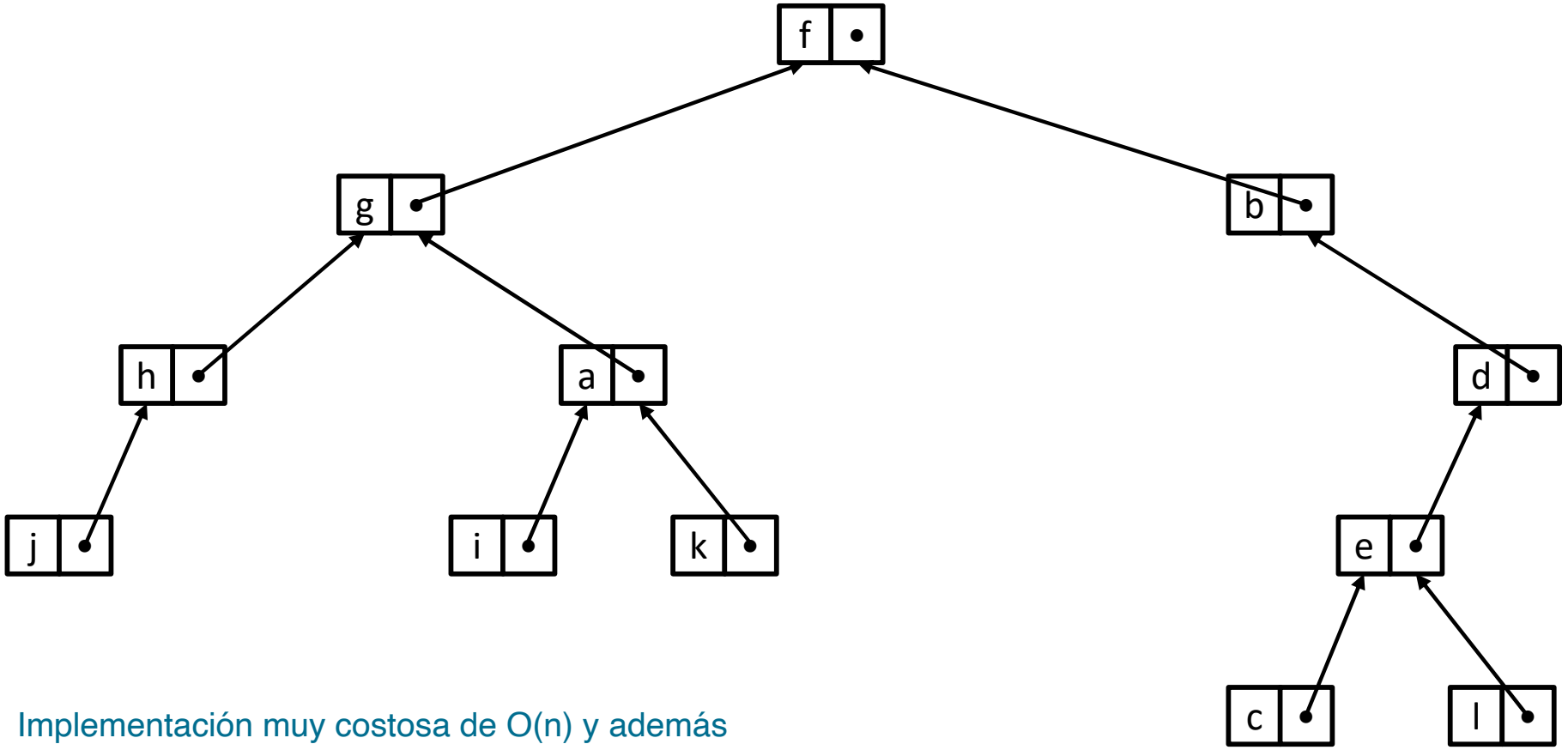
Post: Devuelve el nodo hijo izquierdo del nodo *n*. Si no existe, devuelve *NODO_NULO*.

nodo hijoDrcho (nodo n) const

Pre: *n* es un nodo de *A*.

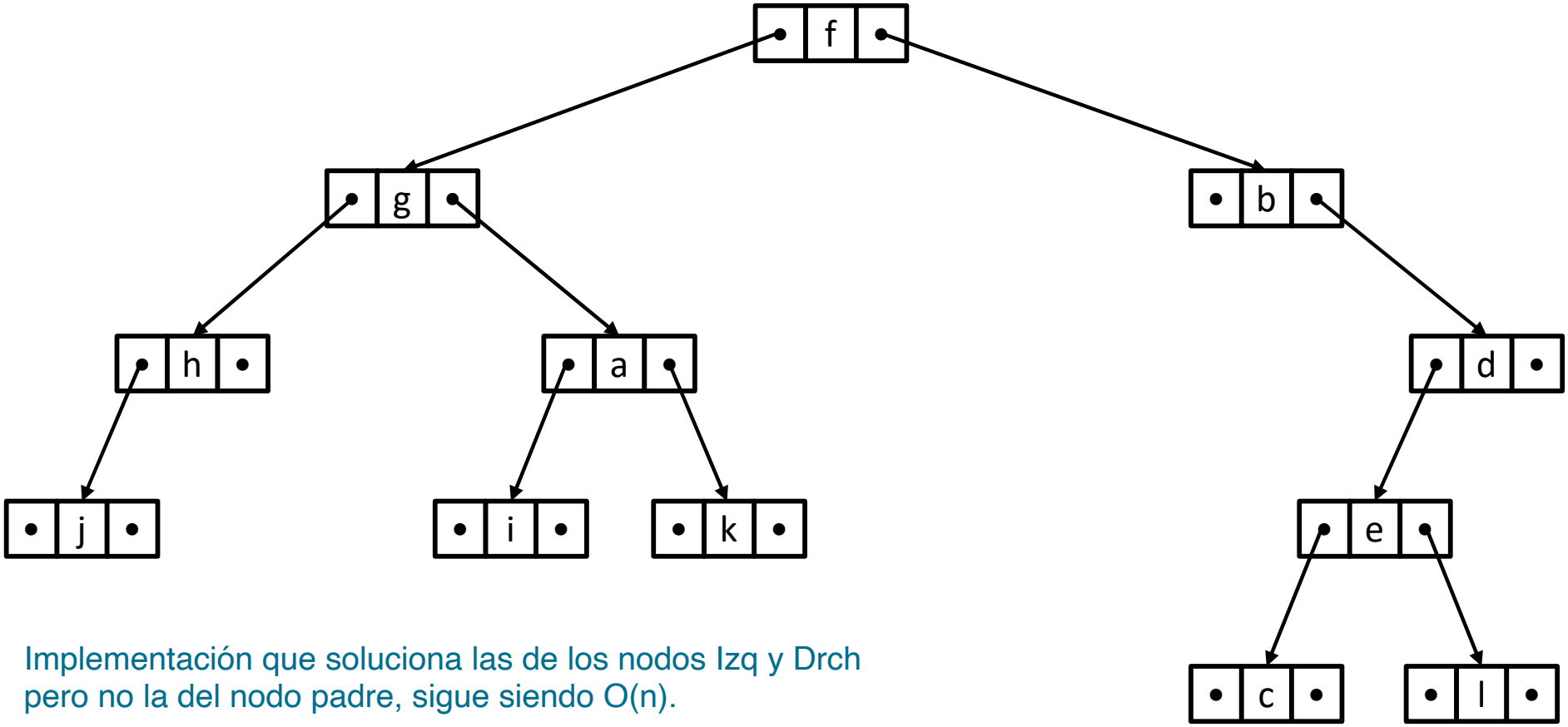
Post: Devuelve el nodo hijo derecho del nodo *n*. Si no existe, devuelve *NODO_NULO*.

Implementación de un árbol binario usando celdas enlazadas



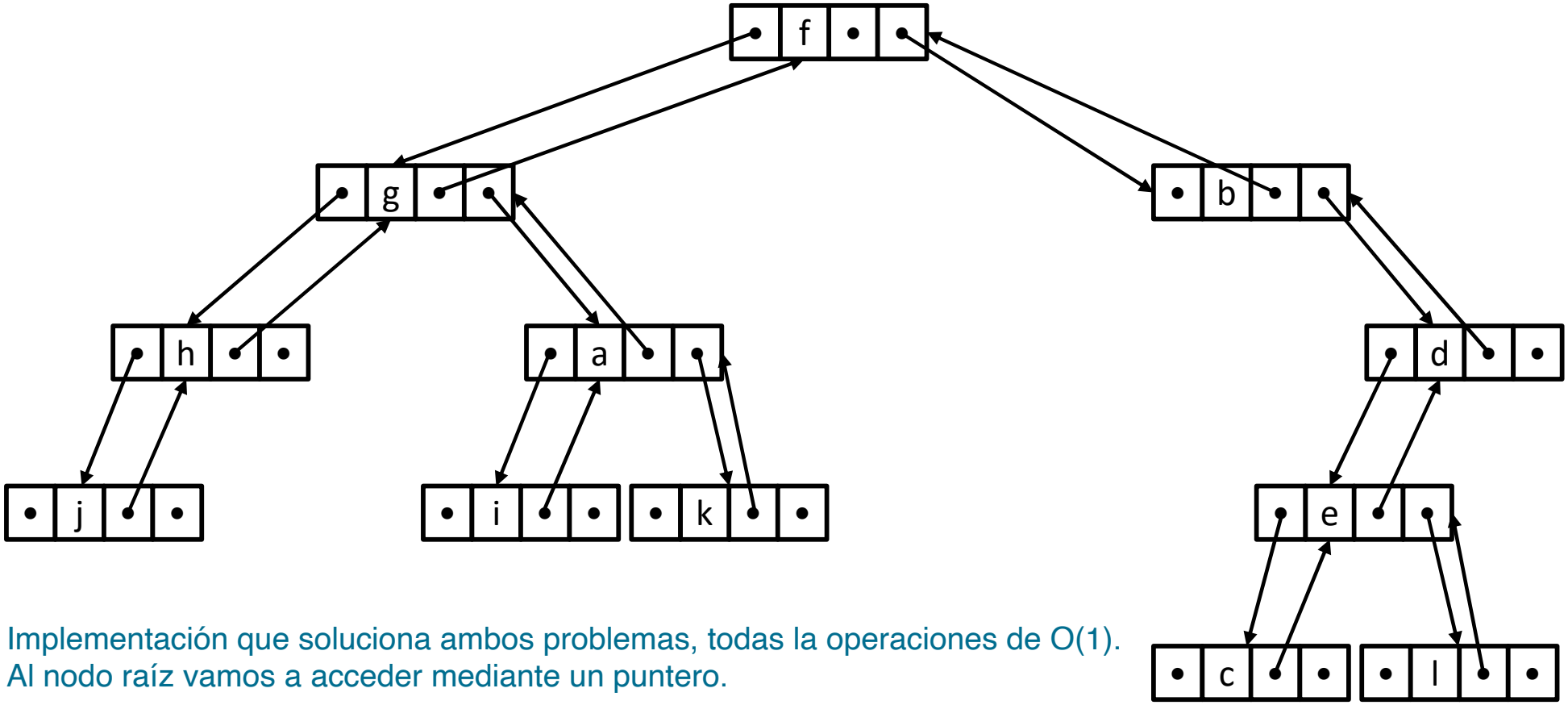
Implementación muy costosa de O(n) y además
tenemos que acceder desde las hojas cosa que es muy compleja

Implementación de un árbol binario usando celdas enlazadas



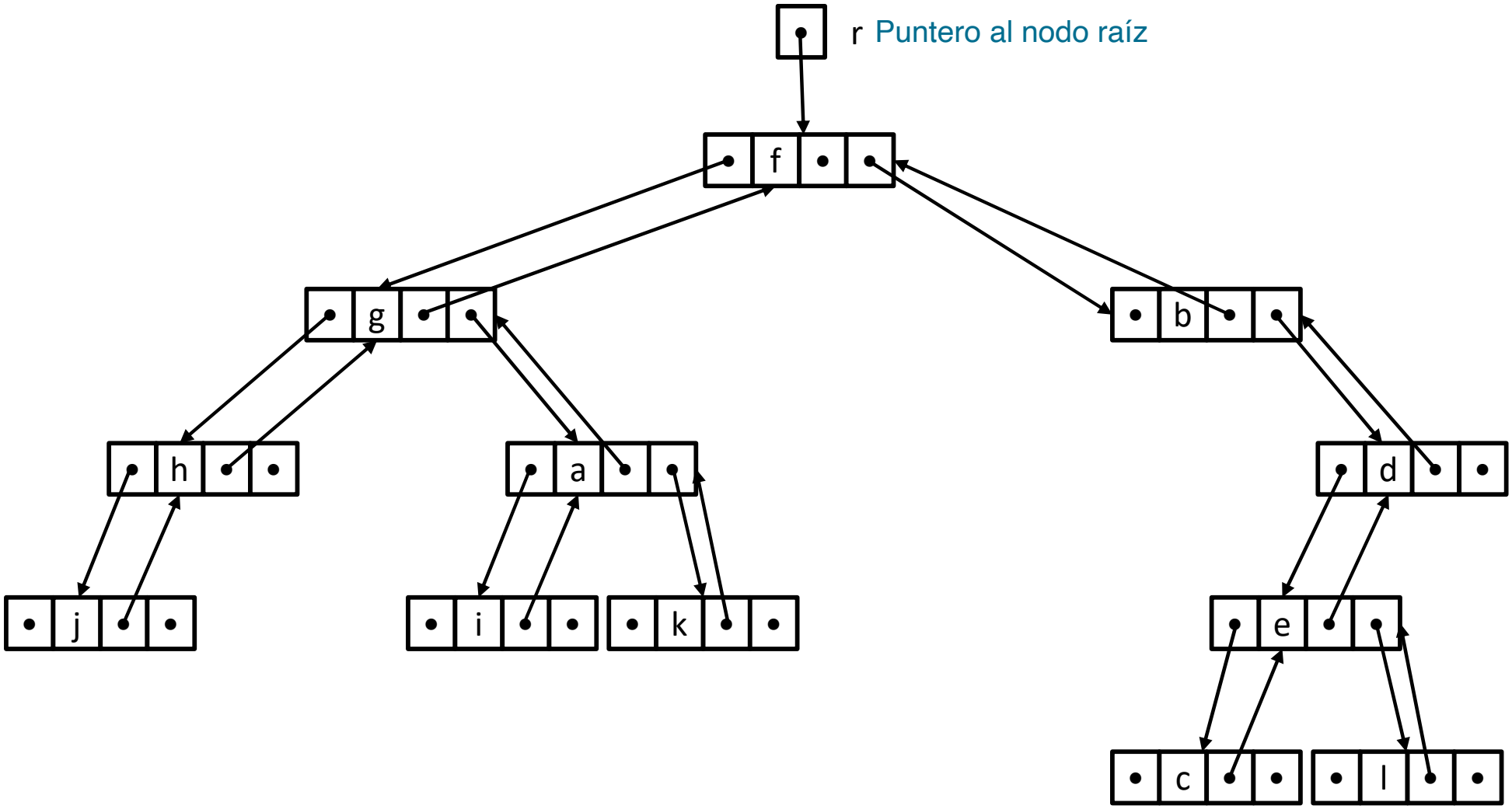
Implementación que soluciona las de los nodos Izq y Drch pero no la del nodo padre, sigue siendo O(n).

Implementación de un árbol binario usando celdas enlazadas



Implementación que soluciona ambos problemas, todas la operaciones de O(1).
Al nodo raíz vamos a acceder mediante un puntero.

Implementación de un árbol binario usando celdas enlazadas



```
#ifndef ABIN_H
#define ABIN_H
#include <cassert>

template <typename T> class Abin {
   struct celda;   // Declaración adelantada privada
public:
   typedef celda* nodo;
   static const nodo NODO_NULO; Indica que no hay un nodo

   Abin();                                    // Constructor
   void insertarRaiz(const T& e);
   void insertarHijoIzqdo(nodo n, const T& e);
   void insertarHijoDrcho(nodo n, const T& e);
   void eliminarHijoIzqdo(nodo n);
   void eliminarHijoDrcho(nodo n);
   void eliminarRaiz();
   bool arbolVacio() const;
   const T& elemento(nodo n) const; // Lec. en Abin const
   T& elemento(nodo n);       // Lec/Esc. en Abin no-const
   nodo raiz() const;
```

```
    nodo padre(nodo n) const;
    nodo hijoIzqdo(nodo n) const;
    nodo hijoDrcho(nodo n) const;
    Abin(const Abin<T>& a);                    // Ctor. de copia
    Abin<T>& operator =(const Abin<T>& A); // Asig. de árboles
    ~Abin();                                   // Destructor
private:
    struct celda {
       T elto;
       nodo padre, hizq, hder;
       celda(const T& e, nodo p = NODO_NULO): elto(e),
          padre(p), hizq(NODO_NULO), hder(NODO_NULO) {}
    };
    nodo r;   // nodo raíz del árbol
```

Un árbol en sí es un puntero a una celda

```
    void destruirNodos(nodo& n);
    nodo copiar(nodo n);};
};
/* Definición del nodo nulo */
template <typename T>
const typename Abin<T>::nodo Abin<T>::NODO_NULO(nullptr);
```

```
/*-----------------------------------------------------*/
/* Métodos públicos                                    */
/*-----------------------------------------------------*/
```

Al crearse un árbol vacío se crea un árbol vacío = nodo raiz nulo

```
template <typename T>
inline Abin<T>::Abin() : r(NODO_NULO) {}

template <typename T>
inline void Abin<T>::insertarRaiz(const T& e)
{
   assert(r == NODO_NULO);    // Árbol vacío
   r = new celda(e);
}
```

Al crearse un nodo raíz se inicializan ambos hijos (I,D) a nulo

Como el nodo raíz no tiene nodo padre, solo se le pasa el elto

```
template <typename T>
inline void Abin<T>::insertarHijoIzqdo(nodo n, const T& e)
{
   assert(n != NODO_NULO);
   assert(n->hizq == NODO_NULO);    // No existe hijo izqdo.
   n->hizq = new celda(e, n);
}
```

Nodo padre del que queremos insertar

Asumimos que n es un nodo del árbol y que hizq no exista

```
template <typename T>
inline void Abin<T>::insertarHijoDrcho(nodo n, const T& e)
{
   assert(n != NODO_NULO);
   assert(n->hder == NODO_NULO);  // No existe hijo drcho.
   n->hder = new celda(e, n);
}
```

Análogo al Izquierdo

```
template <typename T>
inline void Abin<T>::eliminarHijoIzqdo(nodo n)
{
   assert(n != NODO_NULO);
   assert(n->hizq != NODO_NULO);   // Existe hijo izqdo.
   assert(n->hizq->hizq == NODO_NULO &&   // Hijo izqdo.
          n->hizq->hder == NODO_NULO);    // es hoja.
   delete n->hizq;
   n->hizq = NODO_NULO;
}
```

Comprobamos que existe el nodo a eliminar, lo eliminamos y lo volvemos NULO, para hacer que esté en un estado válido y esa dirección de memoria se libere correctamente

Análogo al Izquierdo

```
template <typename T>
inline void Abin<T>::eliminarHijoDrcho(nodo n)
{
   assert(n != NODO_NULO);
   assert(n->hder != NODO_NULO);   // Existe hijo drcho.
   assert(n->hder->hizq == NODO_NULO &&   // Hijo drcho.
          n->hder->hder == NODO_NULO);    // es hoja
   delete n->hder;
   n->hder = NODO_NULO;
}

template <typename T>
inline void Abin<T>::eliminarRaiz()
{
   assert(r != NODO_NULO);   // Árbol no vacío.
   assert(r->hizq == NODO_NULO &&
          r->hder == NODO_NULO);   // La raíz es hoja.
   delete r;
   r = NODO_NULO;
}
```

```
template <typename T> inline bool Abin<T>::arbolVacio() const
{ return (r == NODO_NULO); }

template <typename T>
inline const T& Abin<T>::elemento(nodo n) const
{
   assert(n != NODO_NULO);
   return n->elto;
}

template <typename T>
inline T& Abin<T>::elemento(nodo n)
{
   assert(n != NODO_NULO);
   return n->elto;
}

template <typename T>
inline typename Abin<T>::nodo Abin<T>::raiz() const
{ return r; }
```

```
template <typename T> inline
typename Abin<T>::nodo Abin<T>::padre(nodo n) const
{
   assert(n != NODO_NULO);
   return n->padre;
}

template <typename T> inline
typename Abin<T>::nodo Abin<T>::hijoIzqdo(nodo n) const
{
   assert(n != NODO_NULO);
   return n->hizq;
}

template <typename T> inline
typename Abin<T>::nodo Abin<T>::hijoDrcho(nodo n) const
{
   assert(n != NODO_NULO);
   return n->hder;
}
```

```
template <typename T>
inline Abin<T>::Abin(const Abin<T>& A)
{
   r = copiar(A.r); // Copiar raíz y descendientes.
}

template <typename T>
Abin<T>& Abin<T>::operator =(const Abin<T>& A)
{
   if (this != &A)       // Evitar autoasignación.
   {
      destruirNodos(r); // Vaciar el árbol.
      r = copiar(A.r);  // Copiar raíz y descendientes.
   }
   return *this;
}
```

Los arboles ofrecen dos ventajas, representa jerarquias y permiten hacer busquedas en orden log. <- Importante.

```
template <typename T>
inline Abin<T>::~Abin()
{
   destruirNodos(r);    // Vaciar el árbol.
}

/*-------------------------------------------------------*/
/* Métodos privados                                      */
/*-------------------------------------------------------*/
// Destruye un nodo y todos sus descendientes
template <typename T>
void Abin<T>::destruirNodos(nodo& n)
{
   if (n != NODO_NULO)
   {
      destruirNodos(n->hizq);
      destruirNodos(n->hder);
      delete n;
      n = NODO_NULO;
   }
}
```

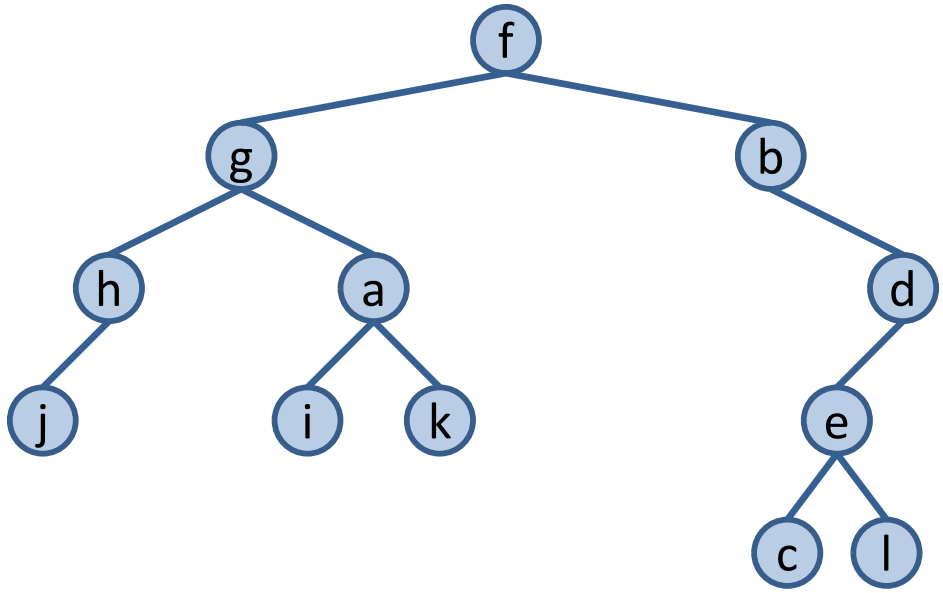
Condición de parada de la recursiva, para cuando n es NULO

Mata primero a los hijos y luego al nodo padre

```
// Devuelve una copia de un nodo y todos sus descendientes
template <typename T>
typename Abin<T>::nodo Abin<T>::copiar(nodo n)
{
   nodo m = NODO_NULO;

   if (n != NODO_NULO) {
      m = new celda(n->elto);     // Copiar n.
      m->hizq = copiar(n->hizq); // Copiar subárbol izqdo.
      if (m->hizq != NODO_NULO) m->hizq->padre = m;
      m->hder = copiar(n->hder); // Copiar subárbol drcho.
      if (m->hder != NODO_NULO) m->hder->padre = m;
   }
   return m;
}

#endif // ABIN_H
```

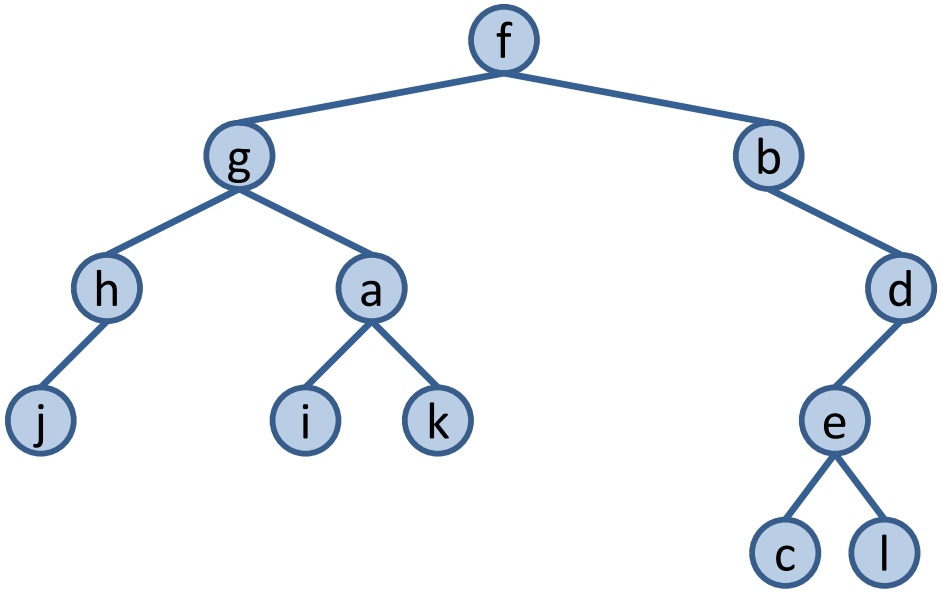
Hacerse una traza para ver como funciona la copia

Implementación vectorial de árboles binarios



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	maxNodos-1
elto	f	g	a	b	d	h	j	i	k	e	l	c			
padre	*	0	1	0	3	1	5	2	2	4	9	9			

Implementación vectorial de árboles binarios

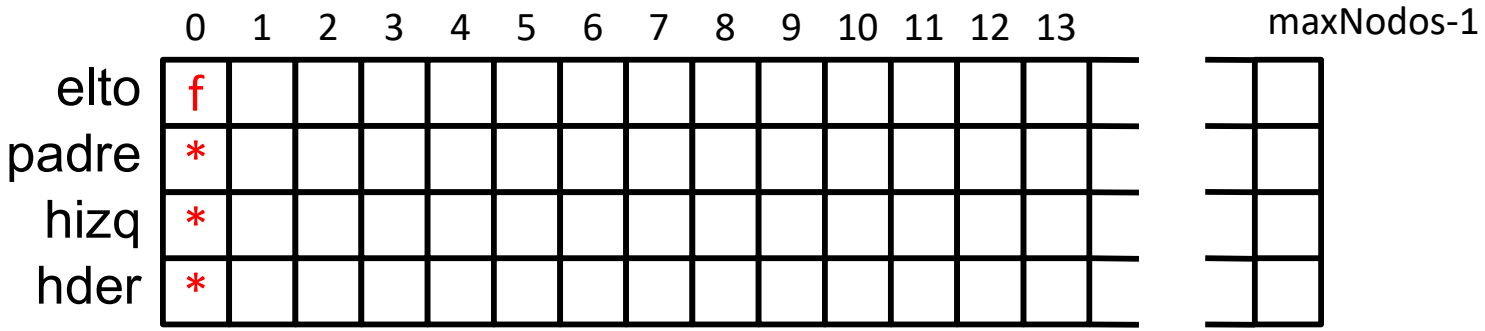


	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
elto	f	g	a	b	d	h	j	i	k	e	l	c			
padre	*	0	1	0	3	1	5	2	2	4	9	9			
hizq	1	5	7	*	9	6	*	*	*	11	*	*			
hder	3	2	8	4	*	*	*	*	*	10	*	*			

maxNodos-1

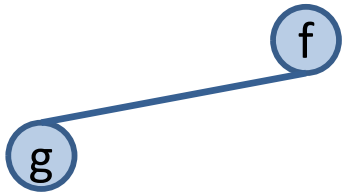
Implementación vectorial de árboles binarios

Inserción y eliminación



Implementación vectorial de árboles binarios

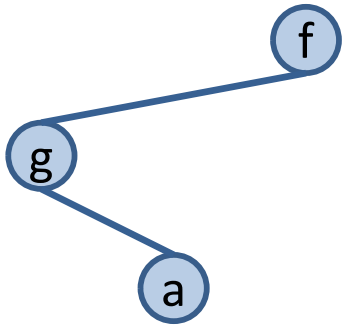
Inserción y eliminación



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	maxNodos-1
elto	f	g													
padre	*	0													
hizq	1	*													
hder	*	*													

Implementación vectorial de árboles binarios

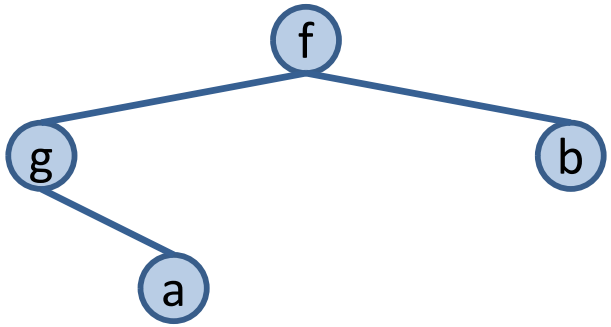
Inserción y eliminación



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	maxNodos-1
elto	f	g	a												
padre	*	0	1												
hizq	1	*	*												
hder	*	2	*												

Implementación vectorial de árboles binarios

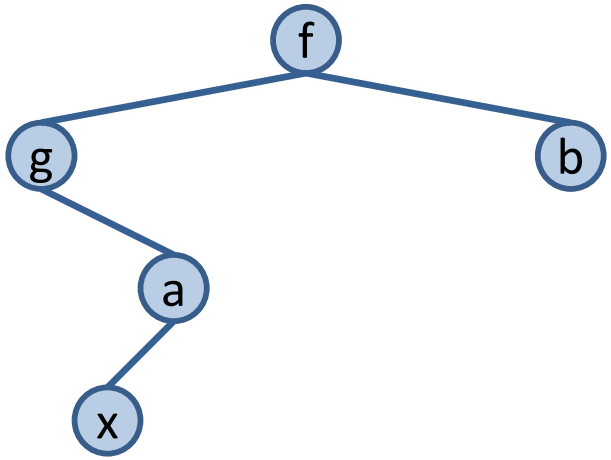
Inserción y eliminación



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	maxNodos-1
elto	f	g	a	b											
padre	*	0	1	0											
hizq	1	*	*	*											
hder	3	2	*	*											

Implementación vectorial de árboles binarios

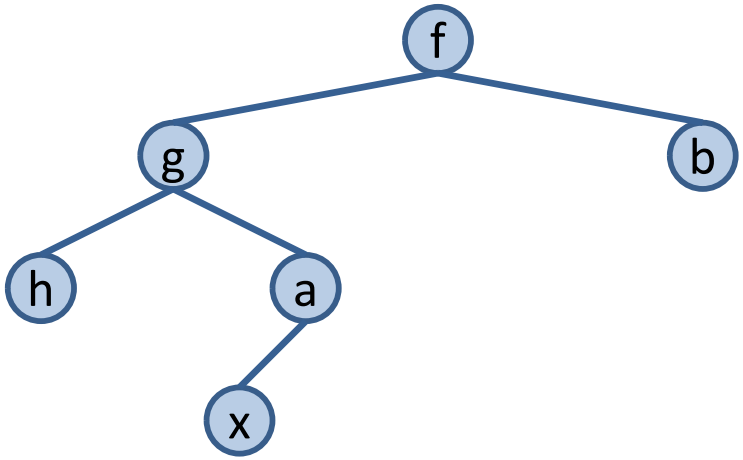
Inserción y eliminación



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	maxNodos-1
elto	f	g	a	b	x										
padre	*	0	1	0	2										
hizq	1	*	4	*	*										
hder	3	2	*	*	*										

Implementación vectorial de árboles binarios

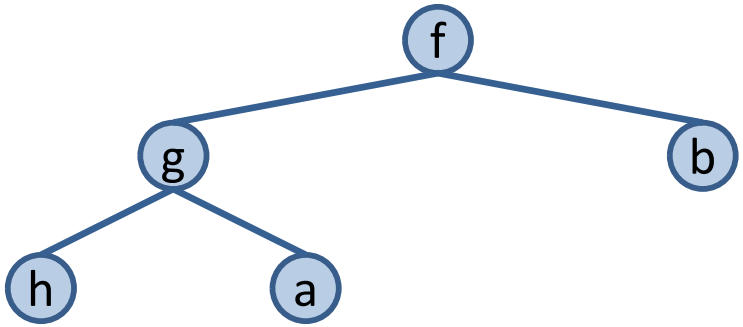
Inserción y eliminación



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	maxNodos-1
elto	f	g	a	b	x	h									
padre	*	0	1	0	2	1									
hizq	1	5	4	*	*	*									
hder	3	2	*	*	*	*									

Implementación vectorial de árboles binarios

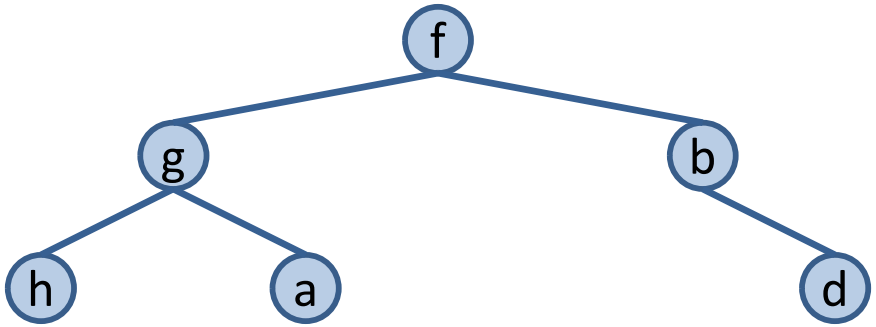
Inserción y eliminación



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	maxNodos-1
elto	f	g	a	b		h									
padre	*	0	1	0		1									
hizq	1	5	*	*		*									
hder	3	2	*	*		*									

Implementación vectorial de árboles binarios

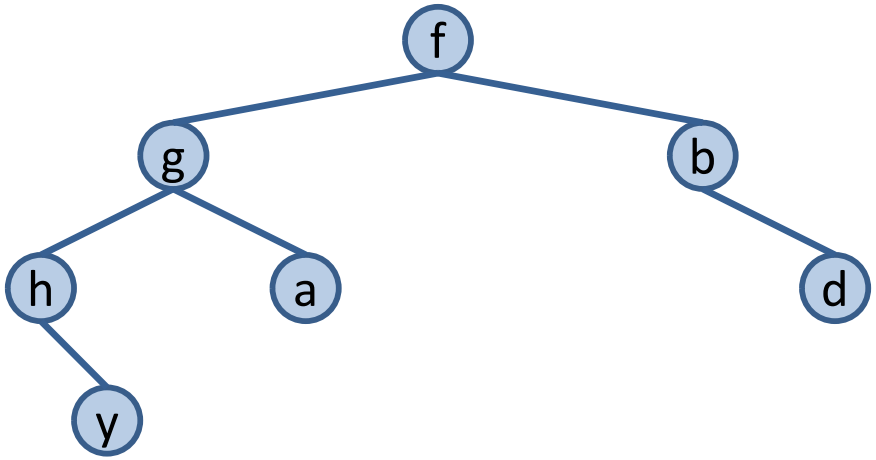
Inserción y eliminación



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	maxNodos-1
elto	f	g	a	b	d	h									
padre	*	0	1	0	3	1									
hizq	1	5	*	*	*	*									
hder	3	2	*	4	*	*									

Implementación vectorial de árboles binarios

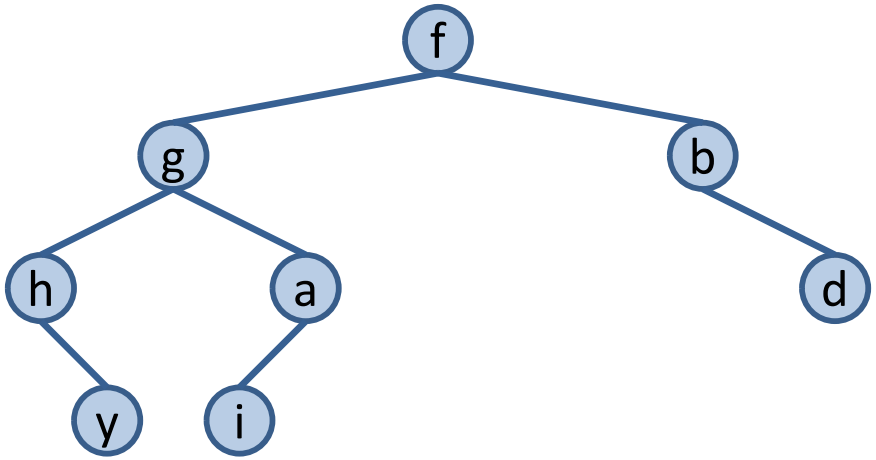
Inserción y eliminación



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	maxNodos-1
elto	f	g	a	b	d	h	y								
padre	*	0	1	0	3	1	5								
hizq	1	5	*	*	*	*	*								
hder	3	2	*	4	*	6	*								

Implementación vectorial de árboles binarios

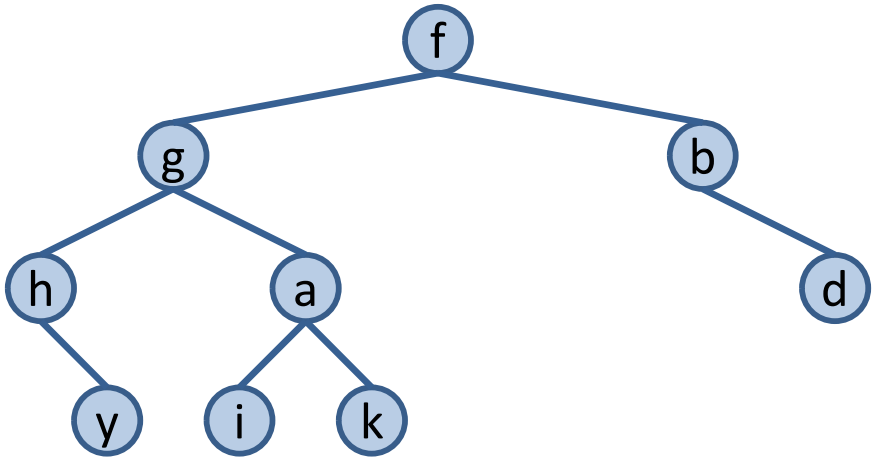
Inserción y eliminación



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	maxNodos-1
elto	f	g	a	b	d	h	y	i							
padre	*	0	1	0	3	1	5	2							
hizq	1	5	7	*	*	*	*	*							
hder	3	2	*	4	*	6	*	*							

Implementación vectorial de árboles binarios

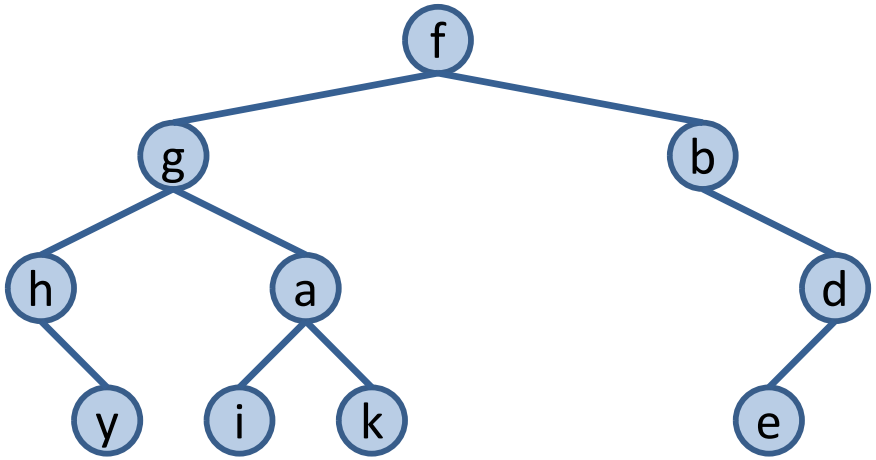
Inserción y eliminación



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	maxNodos-1
elto	f	g	a	b	d	h	y	i	k						
padre	*	0	1	0	3	1	5	2	2						
hizq	1	5	7	*	*	*	*	*	*						
hder	3	2	8	4	*	6	*	*	*						

Implementación vectorial de árboles binarios

Inserción y eliminación

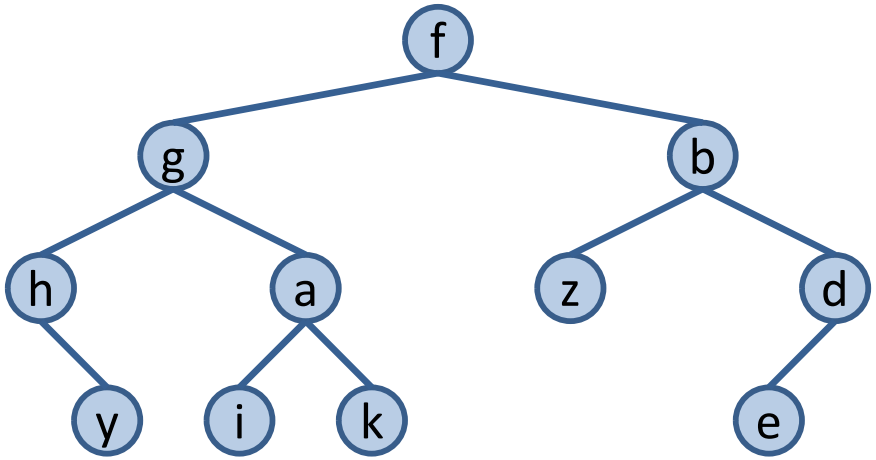


	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
elto	f	g	a	b	d	h	y	i	k	e				
padre	*	0	1	0	3	1	5	2	2	4				
hizq	1	5	7	*	9	*	*	*	*	*				
hder	3	2	8	4	*	6	*	*	*	*				

maxNodos-1

Implementación vectorial de árboles binarios

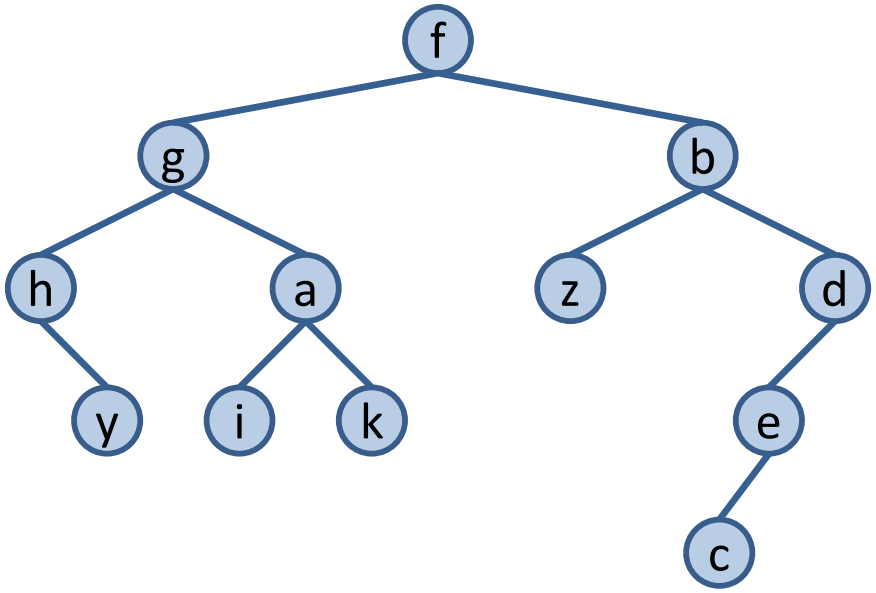
Inserción y eliminación



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	maxNodos-1
elto	f	g	a	b	d	h	y	i	k	e	z				
padre	*	0	1	0	3	1	5	2	2	4	3				
hizq	1	5	7	10	9	*	*	*	*	*	*				
hder	3	2	8	4	*	6	*	*	*	*	*				

Implementación vectorial de árboles binarios

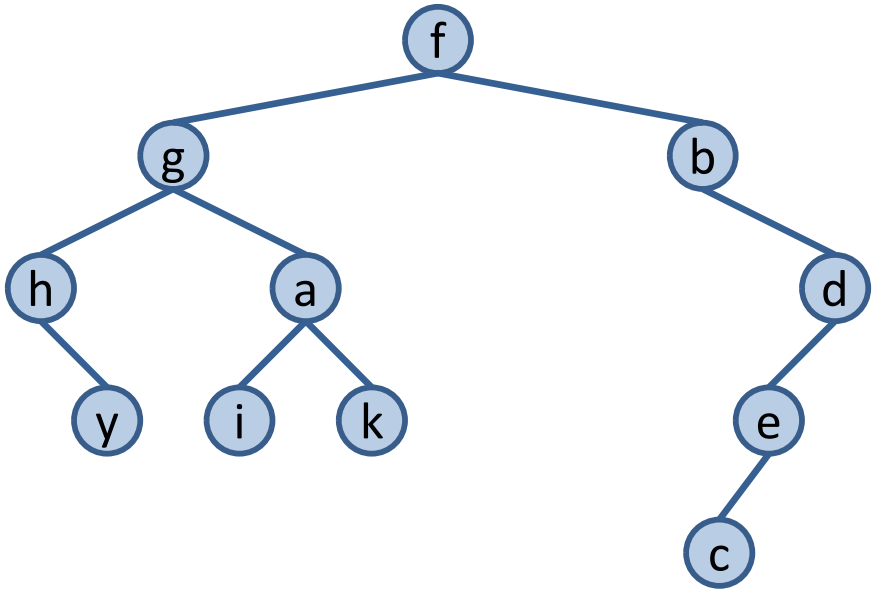
Inserción y eliminación



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	maxNodos-1
elto	f	g	a	b	d	h	y	i	k	e	z	c			
padre	*	0	1	0	3	1	5	2	2	4	3	9			
hizq	1	5	7	10	9	*	*	*	*	11	*	*			
hder	3	2	8	4	*	6	*	*	*	*	*	*			

Implementación vectorial de árboles binarios

Inserción y eliminación

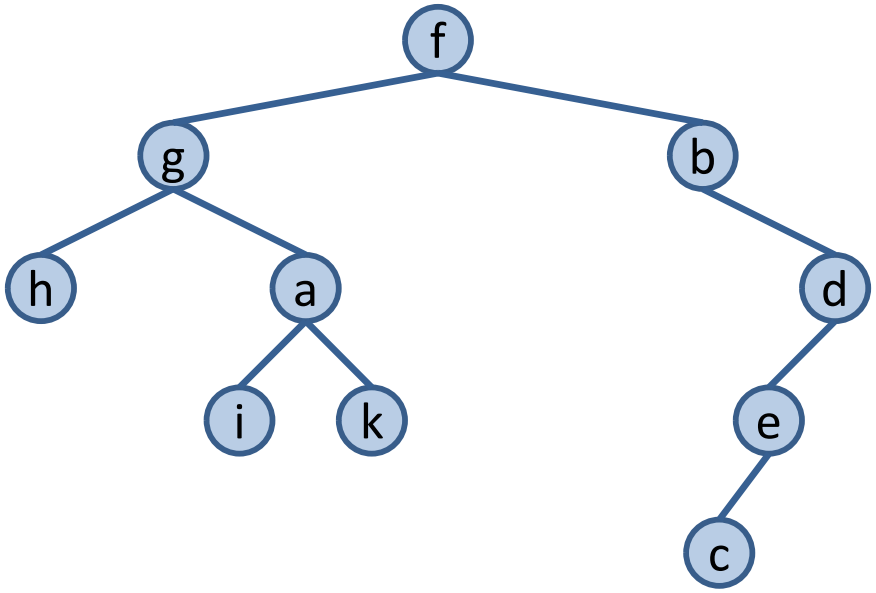


	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
elto	f	g	a	b	d	h	y	i	k	e		c			
padre	*	0	1	0	3	1	5	2	2	4		9			
hizq	1	5	7	*	9	*	*	*	*	11		*			
hder	3	2	8	4	*	6	*	*	*	*		*			

maxNodos-1

Implementación vectorial de árboles binarios

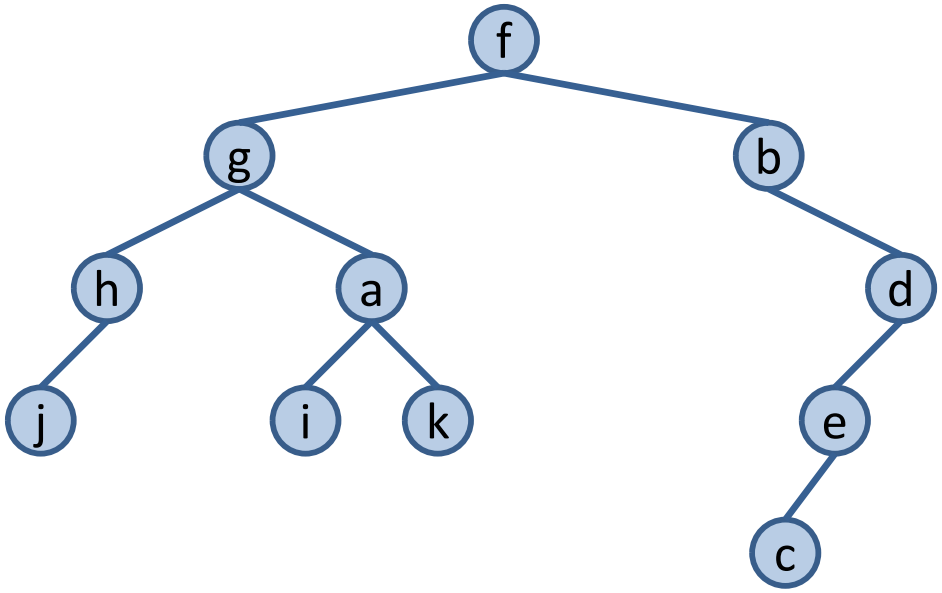
Inserción y eliminación



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	maxNodos-1
elto	f	g	a	b	d	h		i	k	e		c			
padre	*	0	1	0	3	1		2	2	4		9			
hizq	1	5	7	*	9	*		*	*	11		*			
hder	3	2	8	4	*	*		*	*	*		*			

Implementación vectorial de árboles binarios

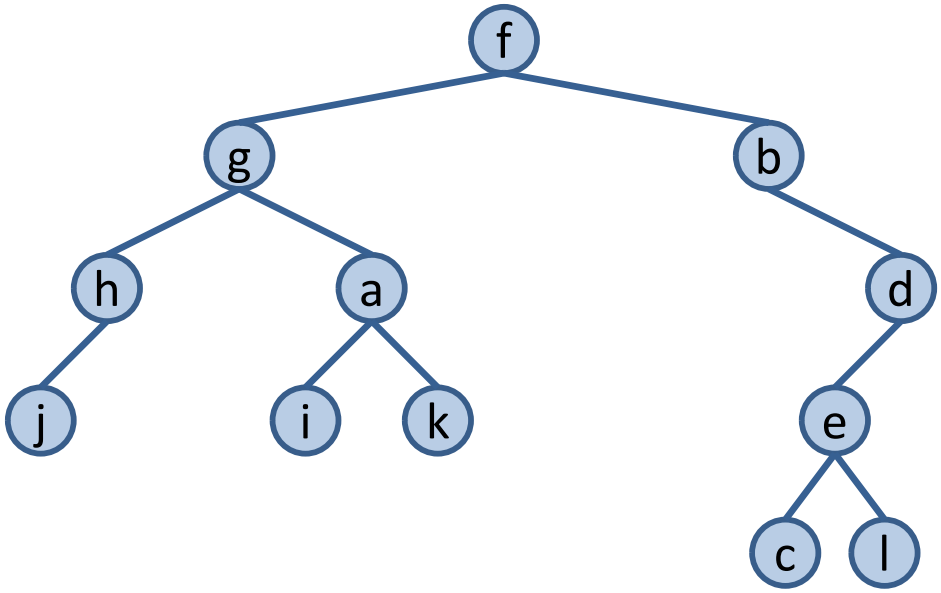
Inserción y eliminación



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	maxNodos-1
elto	f	g	a	b	d	h	j	i	k	e		c			
padre	*	0	1	0	3	1	5	2	2	4		9			
hizq	1	5	7	*	9	6	*	*	*	11		*			
hder	3	2	8	4	*	*	*	*	*	*		*			

Implementación vectorial de árboles binarios

Inserción y eliminación



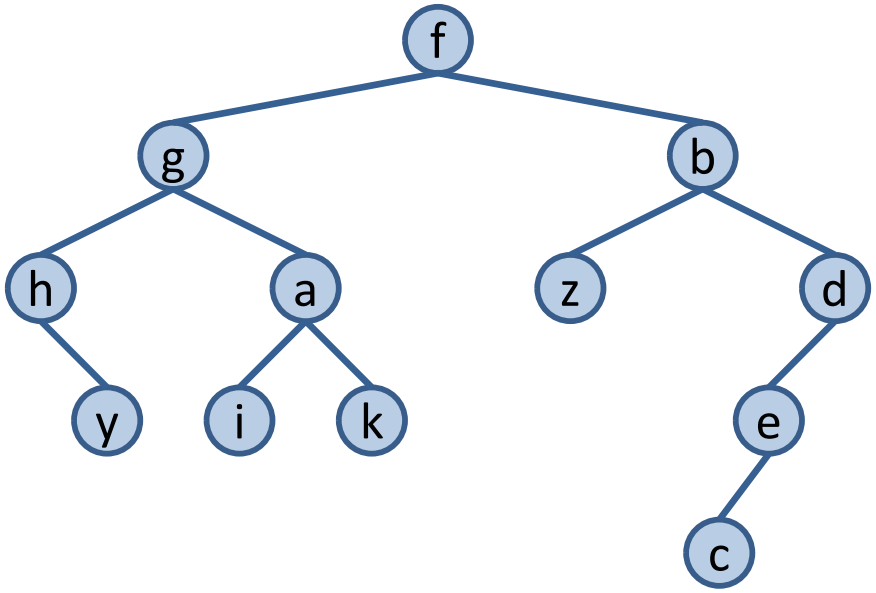
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
elto	f	g	a	b	d	h	j	i	k	e	l	c			
padre	*	0	1	0	3	1	5	2	2	4	9	9			
hizq	1	5	7	*	9	6	*	*	*	11	*	*			
hder	3	2	8	4	*	*	*	*	*	10	*	*			

maxNodos-1

Implementación vectorial de árboles binarios

Inserción y eliminación

(distinción entre celdas libres y ocupadas)



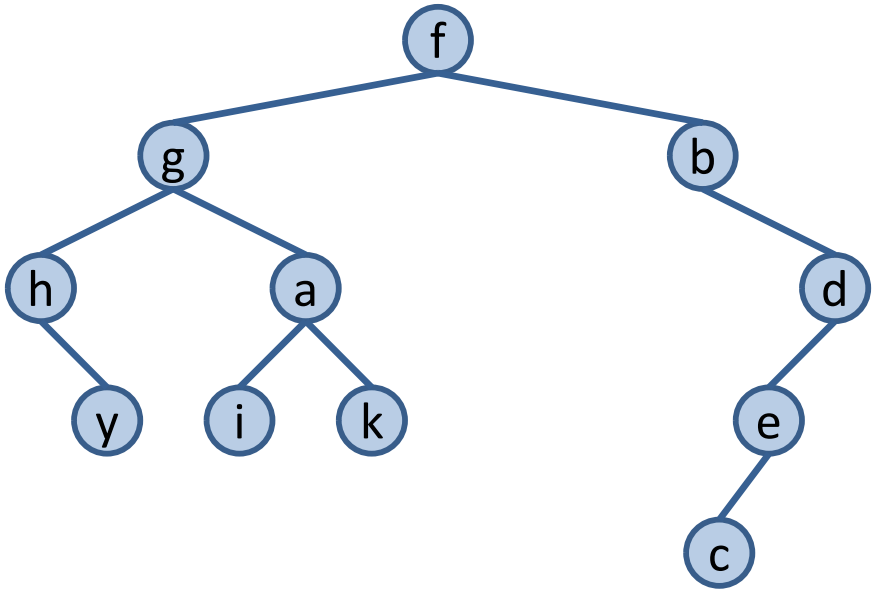
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
elto	f	g	a	b	d	h	y	i	k	e	z	c			
padre	*	0	1	0	3	1	5	2	2	4	3	9			
hizq	1	5	7	10	9	*	*	*	*	11	*	*			
hder	3	2	8	4	*	6	*	*	*	*	*	*			

maxNodos-1

Implementación vectorial de árboles binarios

Inserción y eliminación

(distinción entre celdas libres y ocupadas)



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
elto	f	g	a	b	d	h	y	i	k	e	z	c			
padre	0	0	1	0	3	1	5	2	2	4	*	9	*	*	
hizq	1	5	7	*	9	*	*	*	*	11	*	*			
hder	3	2	8	4	*	6	*	*	*	*	*	*			

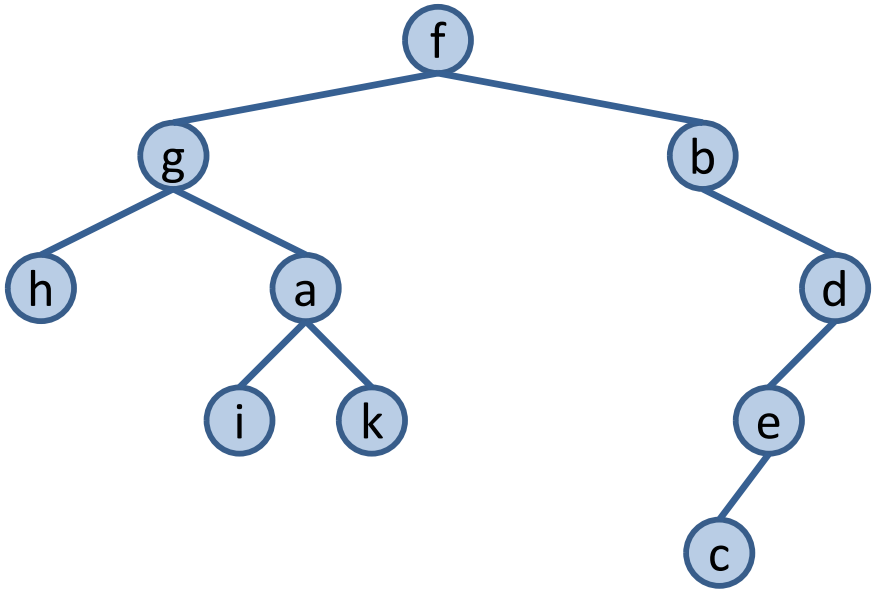
maxNodos-1

	*

Implementación vectorial de árboles binarios

Inserción y eliminación

(distinción entre celdas libres y ocupadas)



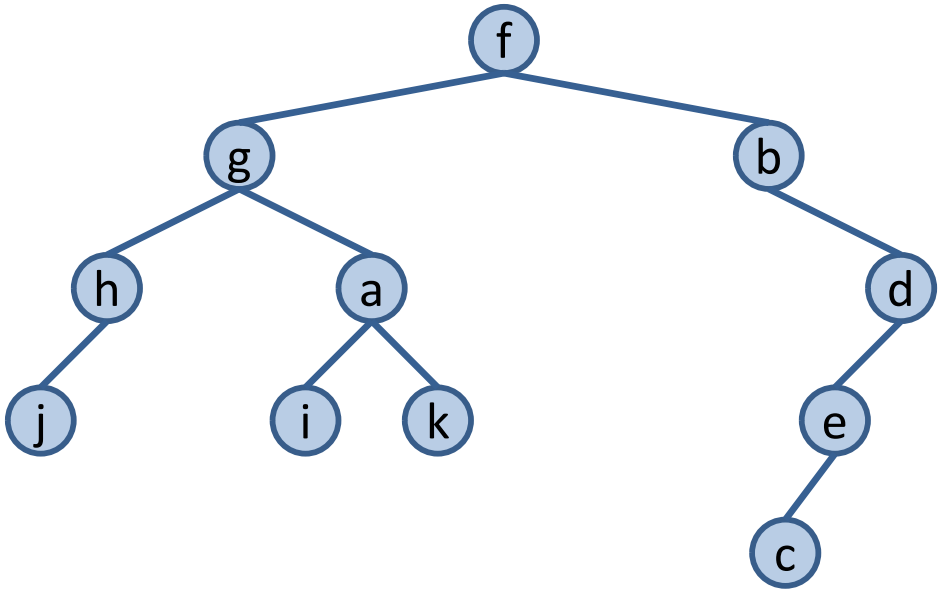
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
elto	f	g	a	b	d	h	y	i	k	e	z	c		
padre	0	0	1	0	3	1	*	2	2	4	*	9	*	*
hizq	1	5	7	*	9	*	*	*	*	11	*	*		
hder	3	2	8	4	*	*	*	*	*	*	*	*		

	maxNodos-1
	*

Implementación vectorial de árboles binarios

Inserción y eliminación

(distinción entre celdas libres y ocupadas)



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
elto	f	g	a	b	d	h	j	i	k	e	z	c			
padre	0	0	1	0	3	1	5	2	2	4	*	9	*	*	
hizq	1	5	7	*	9	6	*	*	*	11	*	*			
hder	3	2	8	4	*	*	*	*	*	*	*	*			

maxNodos-1

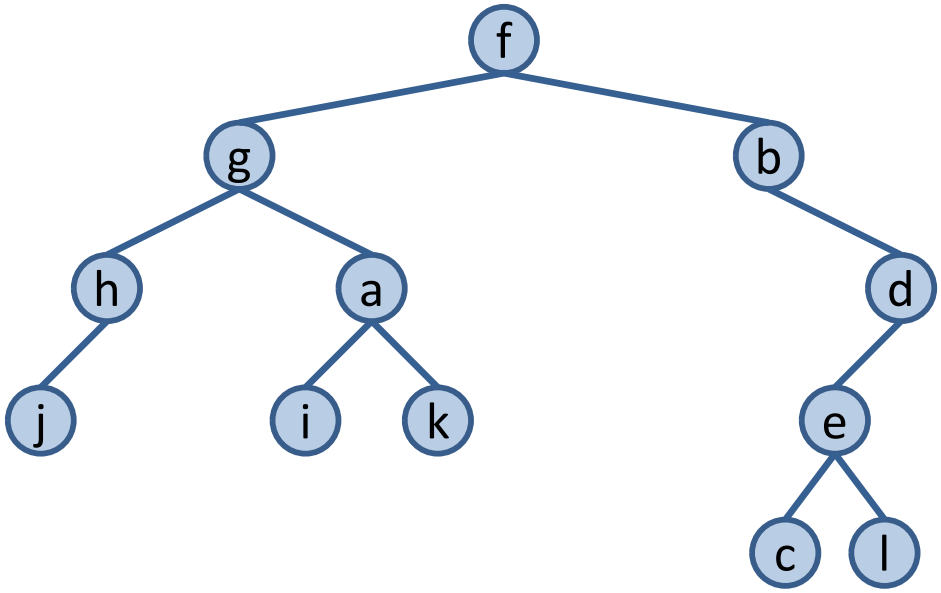
	*

Implementación vectorial de árboles binarios

Inserción y eliminación

(distinción entre celdas libres y ocupadas)

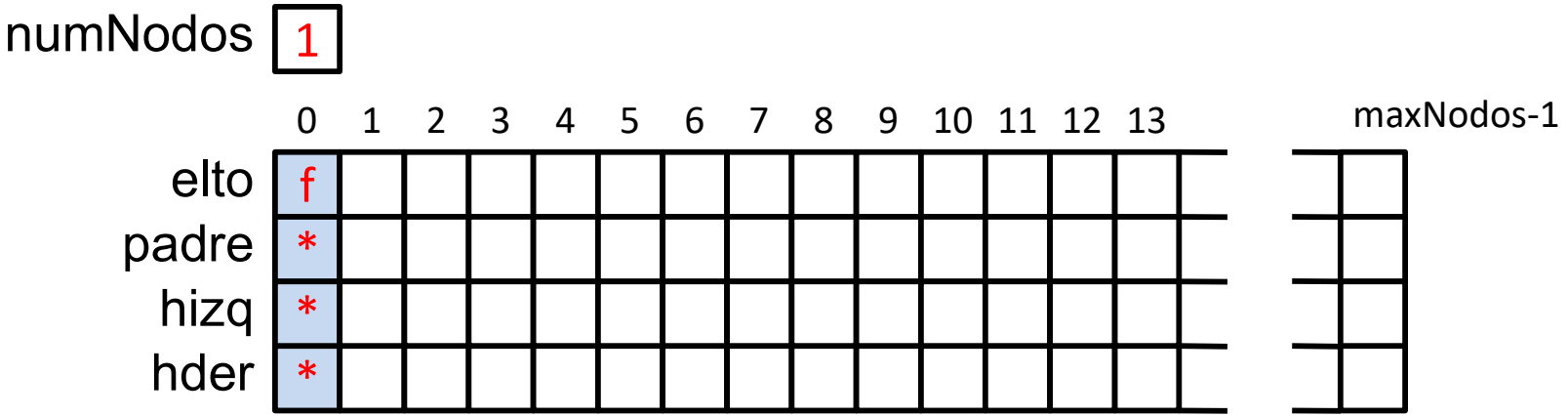
Inserción *O(n)*
Eliminación *O(1)*



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	maxNodos-1
elto	f	g	a	b	d	h	j	i	k	e	l	c			
padre	0	0	1	0	3	1	5	2	2	4	9	9	*	*	*
hizq	1	5	7	*	9	6	*	*	*	11	*	*			
hder	3	2	8	4	*	*	*	*	*	10	*	*			

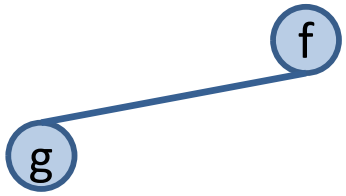
Implementación vectorial de árboles binarios

Inserción y eliminación eficientes



Implementación vectorial de árboles binarios

Inserción y eliminación eficientes

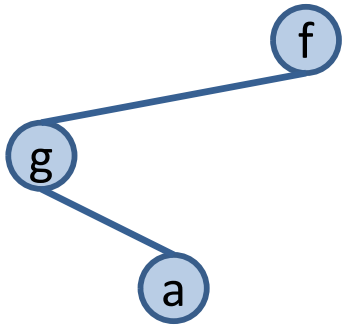


numNodos 2

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	maxNodos-1
elto	f	g													
padre	*	0													
hizq	1	*													
hder	*	*													

Implementación vectorial de árboles binarios

Inserción y eliminación eficientes

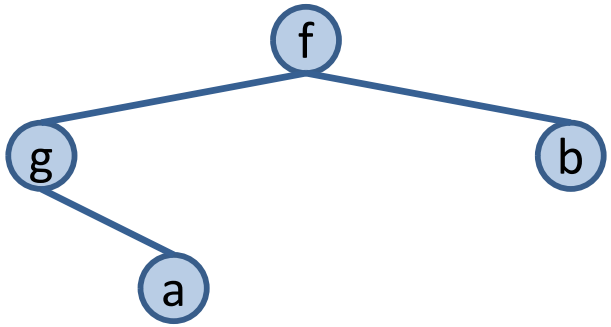


numNodos 3

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	maxNodos-1
elto	f	g	a												
padre	*	0	1												
hizq	1	*	*												
hder	*	2	*												

Implementación vectorial de árboles binarios

Inserción y eliminación eficientes

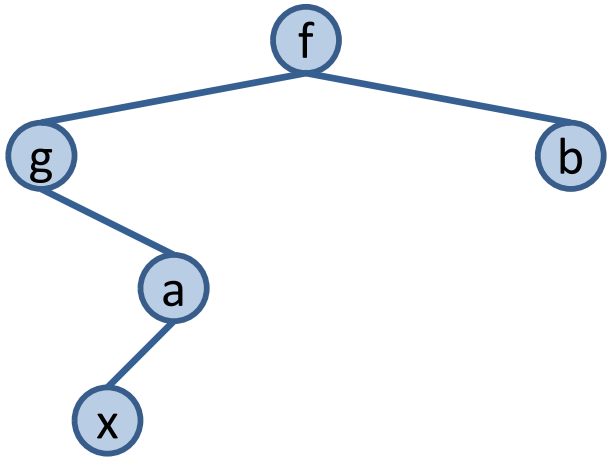


numNodos 4

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	maxNodos-1
elto	f	g	a	b											
padre	*	0	1	0											
hizq	1	*	*	*											
hder	3	2	*	*											

Implementación vectorial de árboles binarios

Inserción y eliminación eficientes

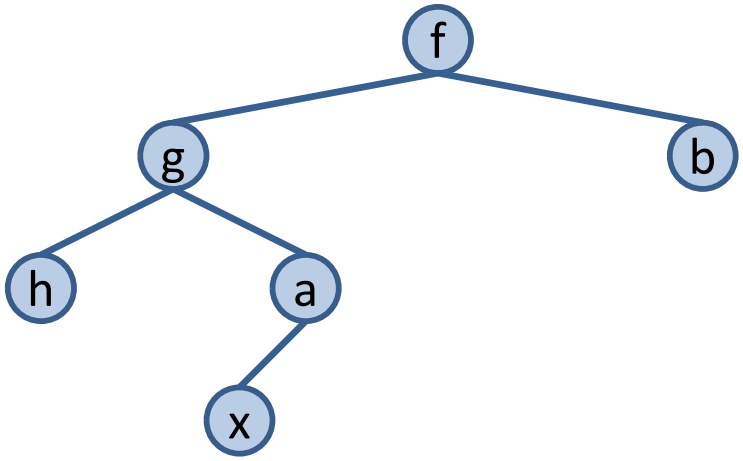


numNodos 5

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	maxNodos-1
elto	f	g	a	b	x										
padre	*	0	1	0	2										
hizq	1	*	4	*	*										
hder	3	2	*	*	*										

Implementación vectorial de árboles binarios

Inserción y eliminación eficientes

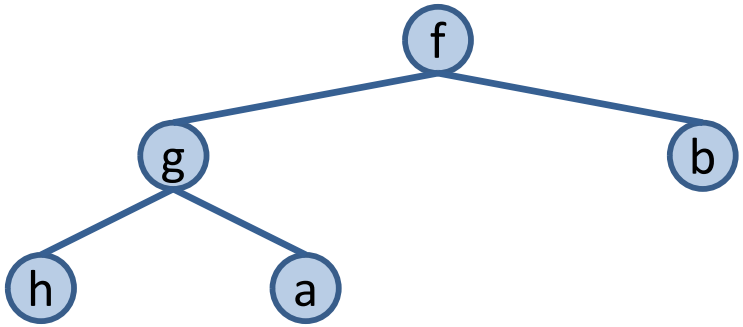


numNodos 6

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	maxNodos-1
elto	f	g	a	b	x	h									
padre	*	0	1	0	2	1									
hizq	1	5	4	*	*	*									
hder	3	2	*	*	*	*									

Implementación vectorial de árboles binarios

Inserción y eliminación eficientes

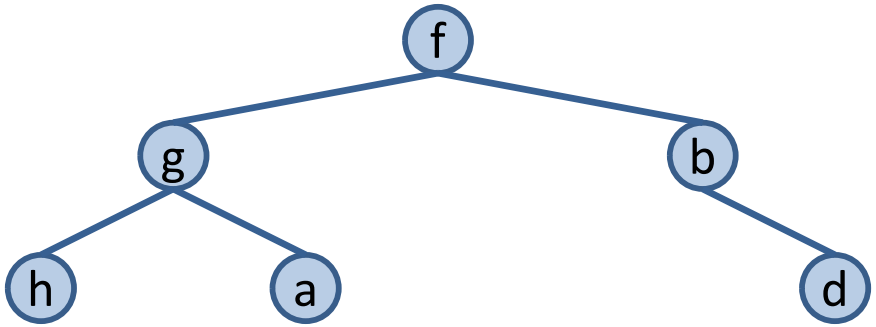


numNodos 5

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	maxNodos-1
elto	f	g	a	b	h	h									
padre	*	0	1	0	1	1									
hizq	1	4	*	*	*	*									
hder	3	2	*	*	*	*									

Implementación vectorial de árboles binarios

Inserción y eliminación eficientes

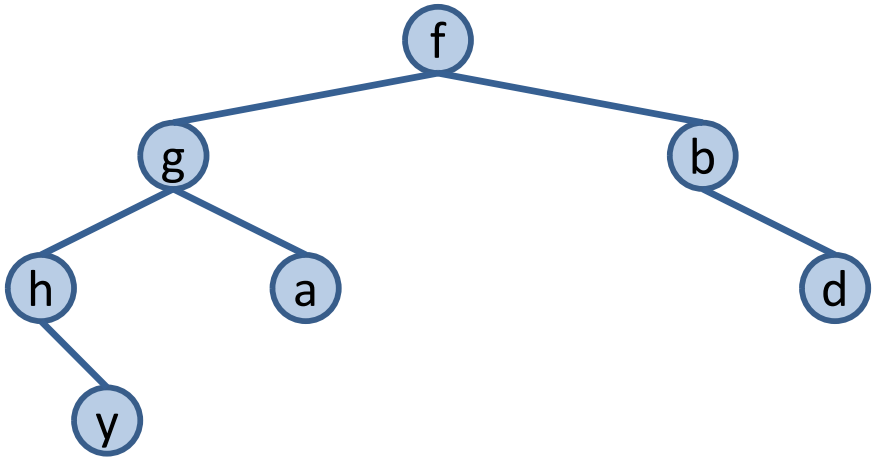


numNodos 6

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	maxNodos-1
elto	f	g	a	b	h	d									
padre	*	0	1	0	1	3									
hizq	1	4	*	*	*	*									
hder	3	2	*	5	*	*									

Implementación vectorial de árboles binarios

Inserción y eliminación eficientes

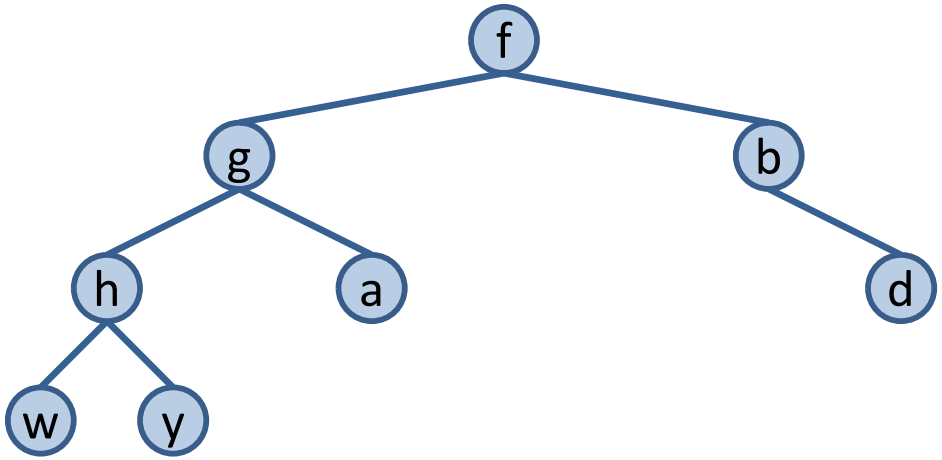


numNodos 7

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	maxNodos-1
elto	f	g	a	b	h	d	y								
padre	*	0	1	0	1	3	4								
hizq	1	4	*	*	*	*	*								
hder	3	2	*	5	6	*	*								

Implementación vectorial de árboles binarios

Inserción y eliminación eficientes

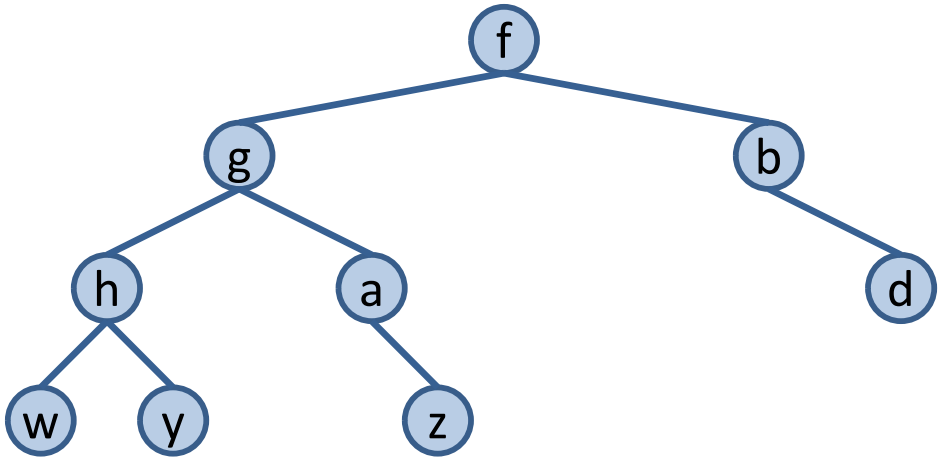


numNodos 8

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	maxNodos-1
elto	f	g	a	b	h	d	y	w							
padre	*	0	1	0	1	3	4	4							
hizq	1	4	*	*	7	*	*	*							
hder	3	2	*	5	6	*	*	*							

Implementación vectorial de árboles binarios

Inserción y eliminación eficientes

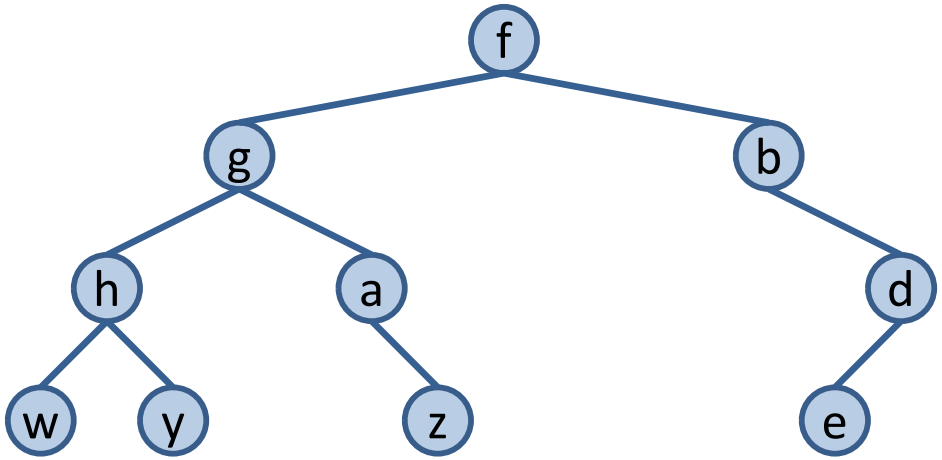


numNodos 9

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	maxNodos-1
elto	f	g	a	b	h	d	y	w	z						
padre	*	0	1	0	1	3	4	4	2						
hizq	1	4	*	*	7	*	*	*	*						
hder	3	2	8	5	6	*	*	*	*						

Implementación vectorial de árboles binarios

Inserción y eliminación eficientes

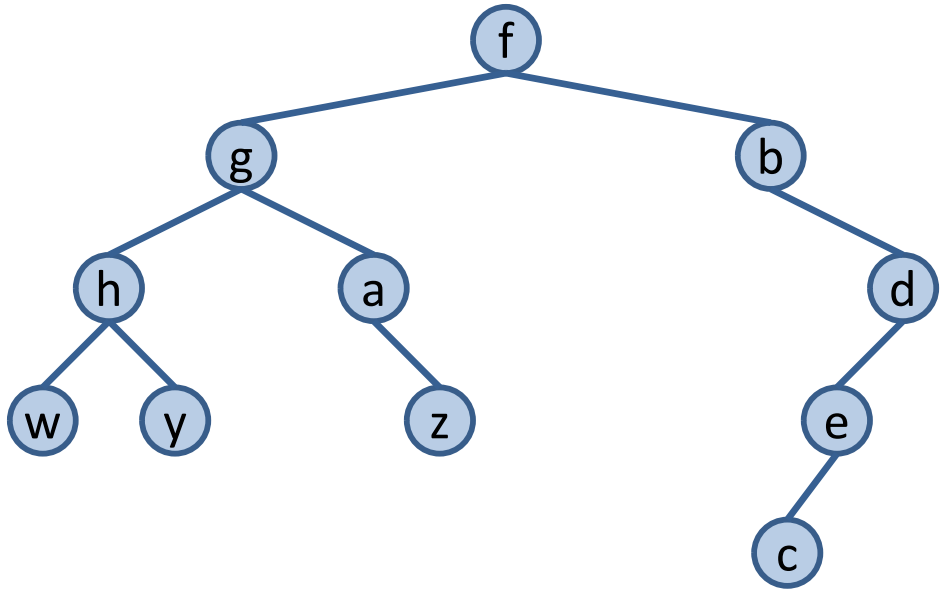


numNodos 10

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	maxNodos-1
elto	f	g	a	b	h	d	y	w	z	e					
padre	*	0	1	0	1	3	4	4	2	5					
hizq	1	4	*	*	7	9	*	*	*	*					
hder	3	2	8	5	6	*	*	*	*	*					

Implementación vectorial de árboles binarios

Inserción y eliminación eficientes



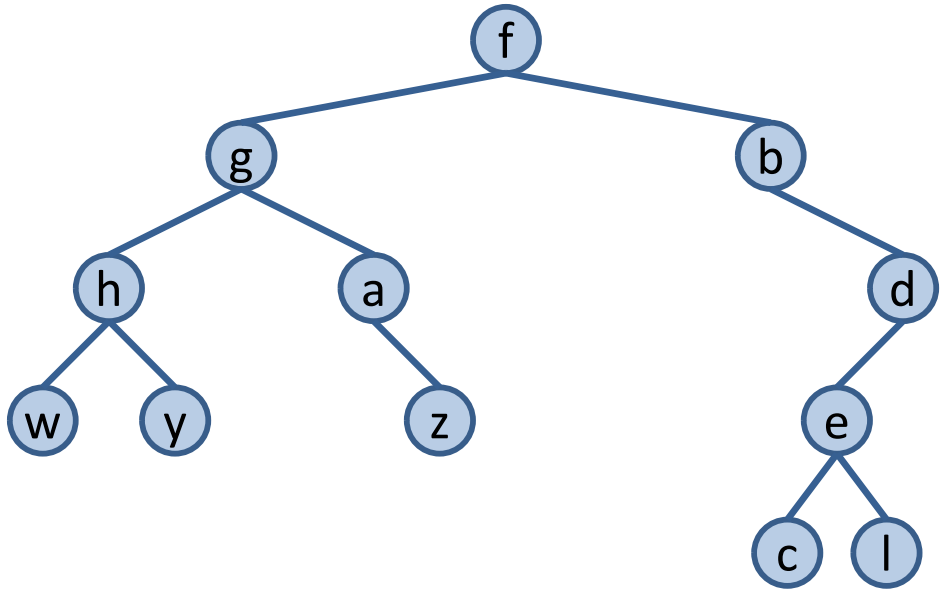
numNodos 11

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
elto	f	g	a	b	h	d	y	w	z	e	c			
padre	*	0	1	0	1	3	4	4	2	5	9			
hizq	1	4	*	*	7	9	*	*	*	10	*			
hder	3	2	8	5	6	*	*	*	*	*	*			

maxNodos-1

Implementación vectorial de árboles binarios

Inserción y eliminación eficientes

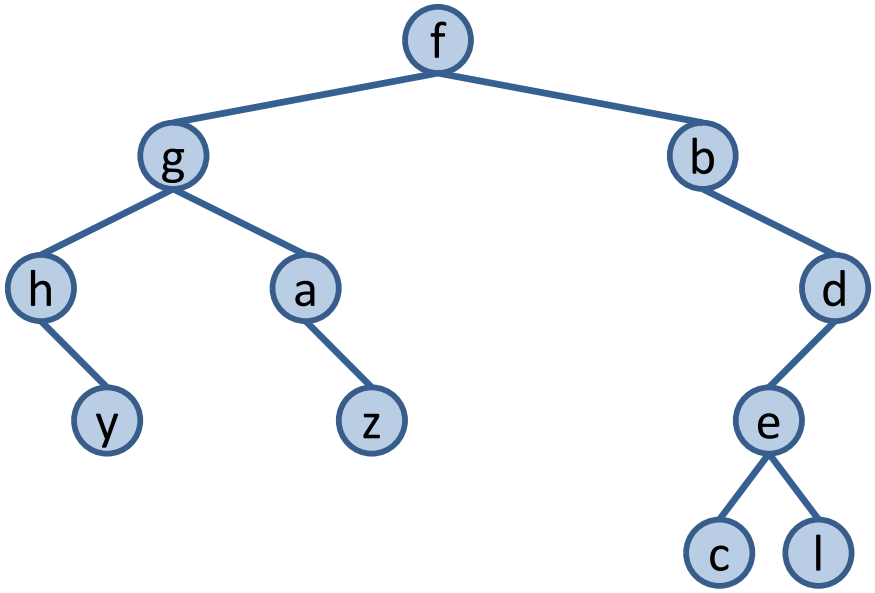


numNodos 12

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	maxNodos-1
elto	f	g	a	b	h	d	y	w	z	e	c	l			
padre	*	0	1	0	1	3	4	4	2	5	9	9			
hizq	1	4	*	*	7	9	*	*	*	10	*	*			
hder	3	2	8	5	6	*	*	*	*	11	*	*			

Implementación vectorial de árboles binarios

Inserción y eliminación eficientes

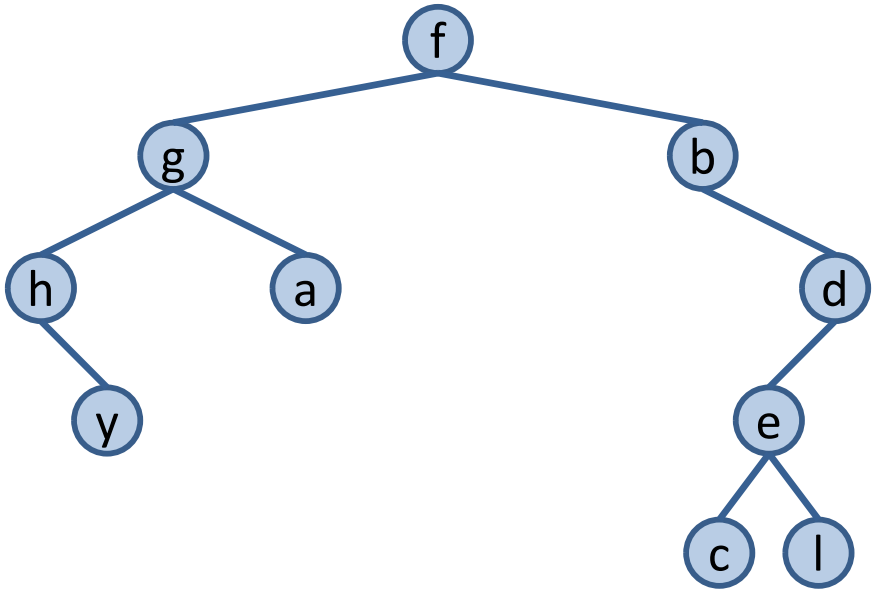


numNodos 11

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	maxNodos-1
elto	f	g	a	b	h	d	y	l	z	e	c	l			
padre	*	0	1	0	1	3	4	9	2	5	9	9			
hizq	1	4	*	*	*	9	*	*	*	10	*	*			
hder	3	2	8	5	6	*	*	*	*	7	*	*			

Implementación vectorial de árboles binarios

Inserción y eliminación eficientes

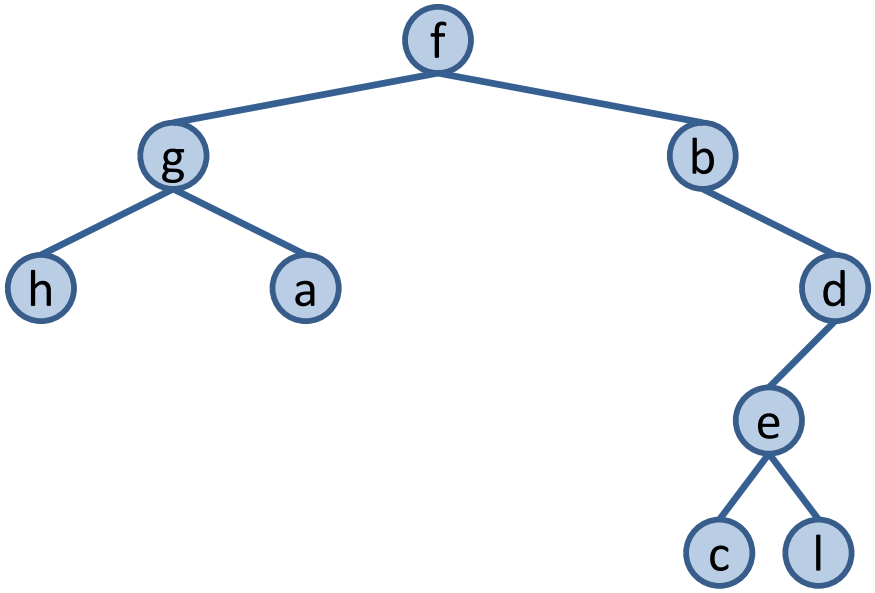


numNodos 10

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	maxNodos-1
elto	f	g	a	b	h	d	y	l	c	e	c	l			
padre	*	0	1	0	1	3	4	9	9	5	9	9			
hizq	1	4	*	*	*	9	*	*	*	8	*	*			
hder	3	2	*	5	6	*	*	*	*	7	*	*			

Implementación vectorial de árboles binarios

Inserción y eliminación eficientes

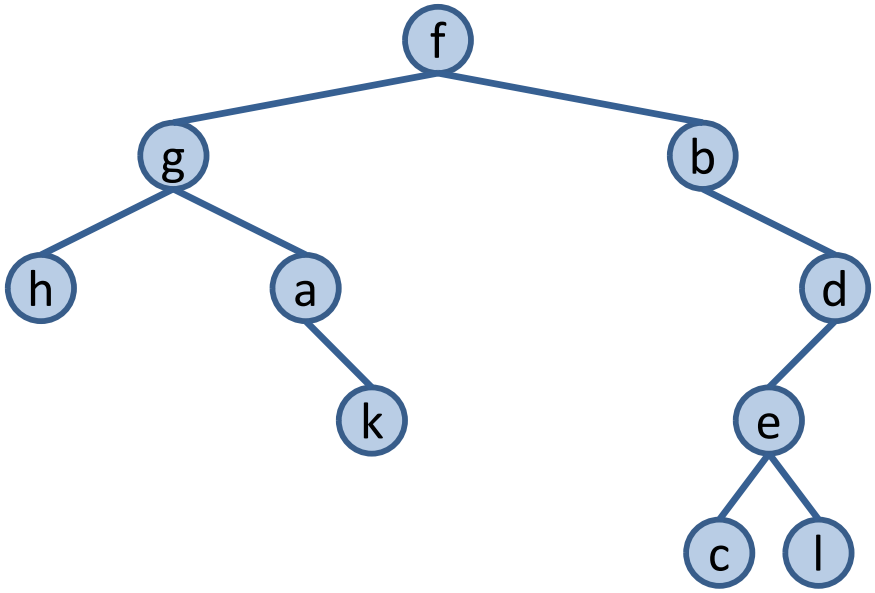


numNodos 9

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	maxNodos-1
elto	f	g	a	b	h	d	e	l	c	e	c	l			
padre	*	0	1	0	1	3	5	6	6	5	9	9			
hizq	1	4	*	*	*	6	8	*	*	8	*	*			
hder	3	2	*	5	*	*	7	*	*	7	*	*			

Implementación vectorial de árboles binarios

Inserción y eliminación eficientes

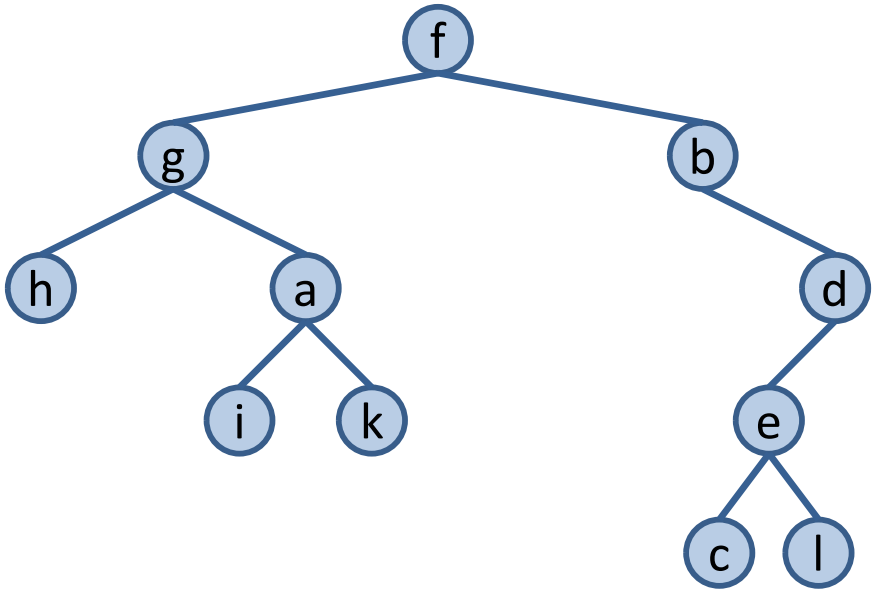


numNodos 10

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	maxNodos-1
elto	f	g	a	b	h	d	e	l	c	k	c	l			
padre	*	0	1	0	1	3	5	6	6	2	9	9			
hizq	1	4	*	*	*	6	8	*	*	*	*	*			
hder	3	2	9	5	*	*	7	*	*	*	*	*			

Implementación vectorial de árboles binarios

Inserción y eliminación eficientes



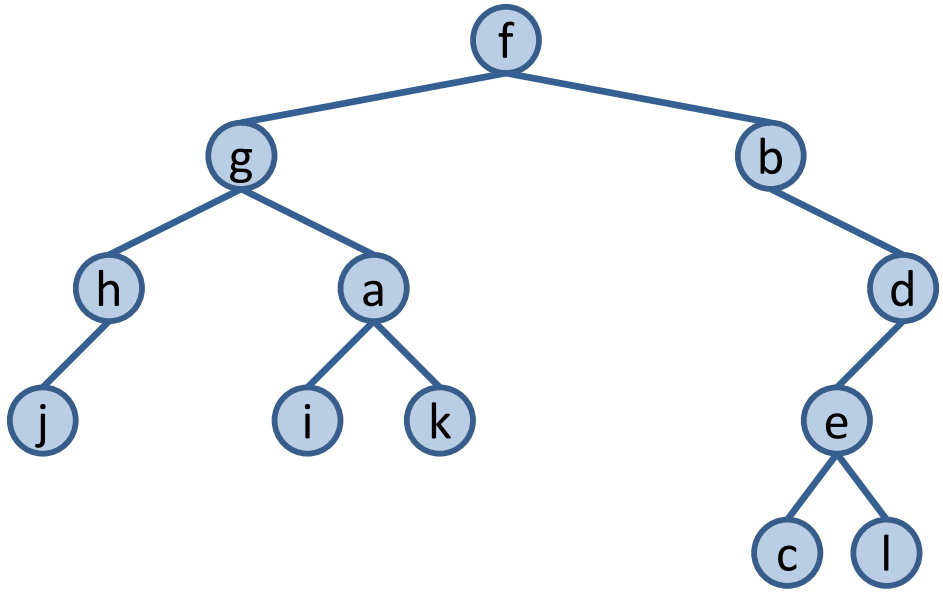
numNodos 11

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	maxNodos-1
elto	f	g	a	b	h	d	e	l	c	k	i	l			
padre	*	0	1	0	1	3	5	6	6	2	2	9			
hizq	1	4	10	*	*	6	8	*	*	*	*	*			
hder	3	2	9	5	*	*	7	*	*	*	*	*			

Implementación vectorial de árboles binarios

Inserción y eliminación eficientes

Inserción *O(1)*
Eliminación *O(1)*



numNodos 12

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	maxNodos-1
elto	f	g	a	b	h	d	e	l	c	k	i	j			
padre	*	0	1	0	1	3	5	6	6	2	2	4			
hizq	1	4	10	*	11	6	8	*	*	*	*	*			
hder	3	2	9	5	*	*	7	*	*	*	*	*			

```
#ifndef ABIN_VEC0_H
#define ABIN_VEC0_H
#include <cassert>

template <typename T> class Abin {
public:
   typedef size_t nodo; // Índice del vector entre 0 y maxNodos-1
   static const nodo NODO_NULO;

   explicit Abin(size_t maxNodos);    // Ctor., requiere ctor. T()
   void insertarRaiz(const T& e);
   void insertarHijoIzqdo(nodo n, const T& e);
   void insertarHijoDrcho(nodo n, const T& e);
   void eliminarHijoIzqdo(nodo n);
   void eliminarHijoDrcho(nodo n);
   void eliminarRaiz();
   bool arbolVacio() const;
   const T& elemento(nodo n) const; // Lec. en Abin const
   T& elemento(nodo n);       // Lec/Esc. en Abin no-const
```

```
    nodo raiz() const;
    nodo padre(nodo n) const;
    nodo hijoIzqdo(nodo n) const;
    nodo hijoDrcho(nodo n) const;
    Abin(const Abin<T>& A);                  // Ctor. copia, req ctor T()
    Abin<T>& operator =(const Abin<T>& A); // Asig. de árboles
    ~Abin();                                  // Destructor
private:
    struct celda {
       T elto;
       nodo padre, hizq, hder;
    };
    celda *nodos;       // Vector de nodos
    size_t maxNodos;    // Tamaño del vector
    size_t numNodos;    // Número de nodos del árbol
};

/* Definición del nodo nulo */
template <typename T>
const typename Abin<T>::nodo Abin<T>::NODO_NULO(SIZE_MAX);
```

```
template <typename T>
inline Abin<T>::Abin(size_t maxNodos) :
   nodos(new celda[maxNodos]),
   maxNodos(maxNodos),
   numNodos(0)
{}

template <typename T>
inline void Abin<T>::insertarRaiz(const T& e)
{
   assert(numNodos == 0);   // Árbol vacío

   numNodos = 1;
   nodos[0].elto = e;
   nodos[0].padre = NODO_NULO;
   nodos[0].hizq = NODO_NULO;
   nodos[0].hder = NODO_NULO;
}
```

```
template <typename T>
inline void Abin<T>::insertarHijoIzqdo(nodo n, const T& e)
{
   assert(n >= 0 && n < numNodos);  // Nodo válido
   assert(nodos[n].hizq == NODO_NULO); // n no tiene hijo izqdo.
   assert(numNodos < maxNodos); // Árbol no lleno

   // Añadir el nuevo nodo al final de la secuencia.
   nodos[n].hizq = numNodos;
   nodos[numNodos].elto  = e;
   nodos[numNodos].padre = n;
   nodos[numNodos].hizq  = NODO_NULO;
   nodos[numNodos].hder  = NODO_NULO;
   ++numNodos;
}
```

```
template <typename T>
inline void Abin<T>::insertarHijoDrcho(nodo n, const T& e)
{
   assert(n >= 0 && n < numNodos);  // Nodo válido
   assert(nodos[n].hder == NODO_NULO); // n no tiene hijo drcho.
   assert(numNodos < maxNodos); // Árbol no lleno

   // Añadir el nuevo nodo al final de la secuencia.
   nodos[n].hder = numNodos;
   nodos[numNodos].elto  = e;
   nodos[numNodos].padre = n;
   nodos[numNodos].hizq  = NODO_NULO;
   nodos[numNodos].hder  = NODO_NULO;
   ++numNodos;
}
```

```
template <typename T>
void Abin<T>::eliminarHijoIzqdo(nodo n)
{
   nodo hizqdo ;

   assert(n >= 0 && n < numNodos);  // Nodo válido
   hizqdo = nodos[n].hizq;
   assert(hizqdo != NODO_NULO);     // Existe hijo izqdo. de n.
   assert(nodos[hizqdo].hizq == NODO_NULO &&   // Hijo izqdo. de
          nodos[hizqdo].hder == NODO_NULO);    // n es hoja.

   if (hizqdo != numNodos-1)
   {
      // Mover el último nodo a la posición del hijo izqdo.
      nodos[hizqdo] = nodos[numNodos-1];
      // Actualizar la posición del hijo (izquierdo o derecho)
      // en el padre del nodo movido.
      if (nodos[nodos[hizqdo].padre].hizq == numNodos-1)
         nodos[nodos[hizqdo].padre].hizq = hizqdo;
      else
         nodos[nodos[hizqdo].padre].hder = hizqdo;
```

```
      // Si el nodo movido tiene hijos,
      // actualizar la posición del padre.
      if (nodos[hizqdo].hizq != NODO_NULO)
         nodos[nodos[hizqdo].hizq].padre = hizqdo;
      if (nodos[hizqdo].hder != NODO_NULO)
         nodos[nodos[hizqdo].hder].padre = hizqdo;
   }
   nodos[n].hizq = NODO_NULO;
   --numNodos;
}
```

```
template <typename T>
void Abin<T>::eliminarHijoDrcho(nodo n)
{
   nodo hdrcho;

   assert(n >= 0 && n < numNodos);  // Nodo válido
   hdrcho = nodos[n].hder;
   assert(hdrcho != NODO_NULO);     // Existe hijo drcho. de n.
   assert(nodos[hdrcho].hizq == NODO_NULO &&   // Hijo drcho. de
          nodos[hdrcho].hder == NODO_NULO);    // n es hoja.

   if (hdrcho != numNodos-1)
   {
      // Mover el último nodo a la posición del hijo drcho.
      nodos[hdrcho] = nodos[numNodos-1];
      // Actualizar la posición del hijo (izquierdo o derecho)
      // en el padre del nodo movido.
      if (nodos[nodos[hdrcho].padre].hizq == numNodos-1)
         nodos[nodos[hdrcho].padre].hizq = hdrcho;
      else
         nodos[nodos[hdrcho].padre].hder = hdrcho;
```

```
        // Si el nodo movido tiene hijos,
        // actualizar la posición del padre.
        if (nodos[hdrcho].hizq != NODO_NULO)
           nodos[nodos[hdrcho].hizq].padre = hdrcho;
        if (nodos[hdrcho].hder != NODO_NULO)
           nodos[nodos[hdrcho].hder].padre = hdrcho;
    }
    nodos[n].hder = NODO_NULO;
    --numNodos;
}

template <typename T>
inline void Abin<T>::eliminarRaiz()
{
    assert(numNodos == 1);
    numNodos = 0;
}
```

```
template <typename T>
inline bool Abin<T>::arbolVacio() const
{
   return (numNodos == 0);
}

template <typename T>
inline const T& Abin<T>::elemento(nodo n) const
{
   assert(n >= 0 && n < numNodos);
   return nodos[n].elto;
}

template <typename T>
inline T& Abin<T>::elemento(nodo n)
{
   assert(n >= 0 && n < numNodos);
   return nodos[n].elto;
}
```

```
template <typename T>
inline typename Abin<T>::nodo Abin<T>::raiz() const
{
   return (numNodos > 0) ? 0 : NODO_NULO;
}

template <typename T> inline
typename Abin<T>::nodo Abin<T>::padre(nodo n) const
{
   assert(n >= 0 && n < numNodos);
   return nodos[n].padre;
}
```

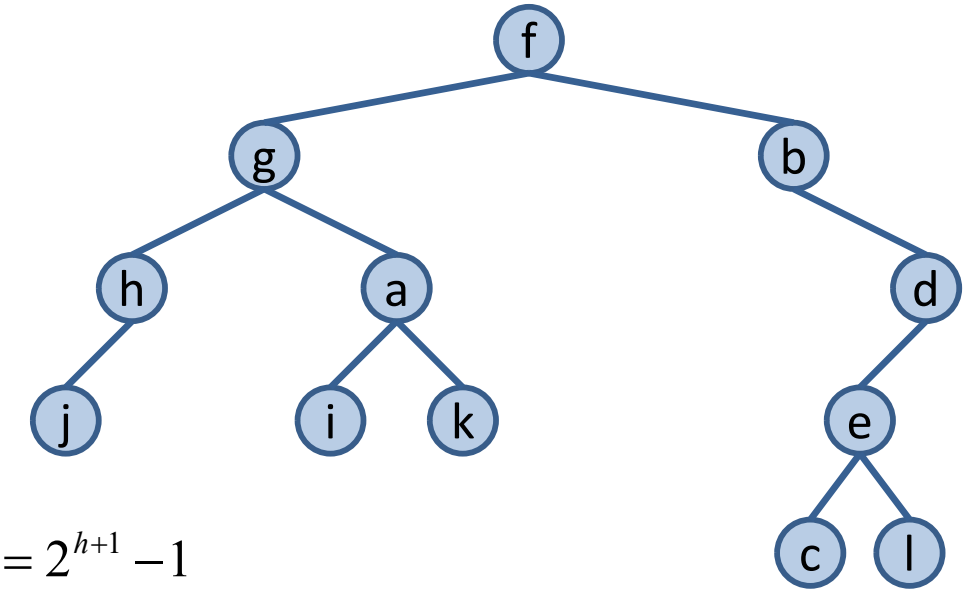
```
template <typename T> inline
typename Abin<T>::nodo Abin<T>::hijoIzqdo(nodo n) const
{
   assert(n >= 0 && n < numNodos);
   return nodos[n].hizq;
}

template <typename T> inline
typename Abin<T>::nodo Abin<T>::hijoDrcho(nodo n) const
{
   assert(n >= 0 && n < numNodos);
   return nodos[n].hder;
}
```

```
template <typename T>
Abin<T>::Abin(const Abin<T>& A) :
   nodos(new celda[A.maxNodos]),
   maxNodos(A.maxNodos),
   numNodos(A.numNodos)
{
   // Copiar el vector.
   for (nodo n = 0; n <= numNodos-1; n++)
      nodos[n] = a.nodos[n];
}

template <typename T>
inline Abin<T>::~Abin()
{
   delete[] nodos;
}
```

```
template <typename T>
Abin<T>& Abin<T>::operator =(const Abin<T>& A)
{
   if (this != &A) // Evitar autoasignación.
   {
      // Destruir el vector y crear uno nuevo si es necesario.
      if (maxNodos != A.maxNodos)
      {
         delete[] nodos;
         maxNodos = A.maxNodos;
         nodos = new celda[maxNodos];
      }
      // Copiar el vector.
      numNodos = A.numNodos;
      for (nodo n = 0; n <= numNodos-1; n++)
         nodos[n] = A.nodos[n];
   }
   return *this;
}

#endif // ABIN_VEC0_H
```

Implementación de un árbol binario mediante un vector de posiciones relativas

Mediante esta implementación no nos hará falta almacenar punteros para poder acceder a los nodos (Hijos y padre).
Es decir, podemos acceder a ellos pero sin tenerlos almacenados.



La altura 'h' es el numero de niveles -1, pero como nuestros niveles empiezan en 0, coincide con el nivel más profundo.

Cálculo de las posiciones de los nodos

hizq(i) = 2i+1
hder(i) = 2i+2
padre(i) = (i-1)/2
division entera

Altura

$$\text{maxNodos} = \sum_{i=0}^{h} 2^i = 2^{h+1} - 1$$

Ahora guardamos el vector solamente con el contenido de los nodos

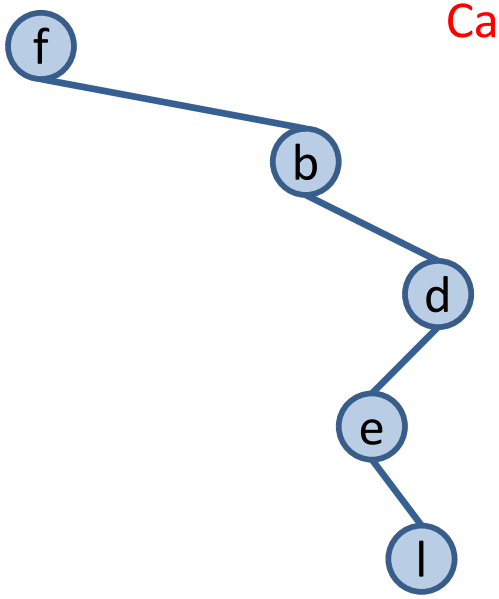
maxNodos-1

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	25	26	27	28	29	30
nodos	f	g	b	h	a		d	j		i	k			e					c	l		

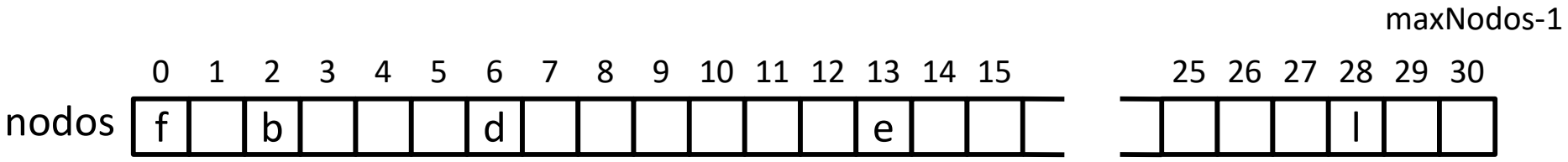
si vemos, se cumple que los hijos de a (4) son i (9) y k (10) -> 2*4+1 = 9 y 2*4+2 = 10.
Además el padre es g (1) -> (4-1)/2 = 1,5 -> parte entera = 1.

Implementación de un árbol binario mediante un vector de posiciones relativas

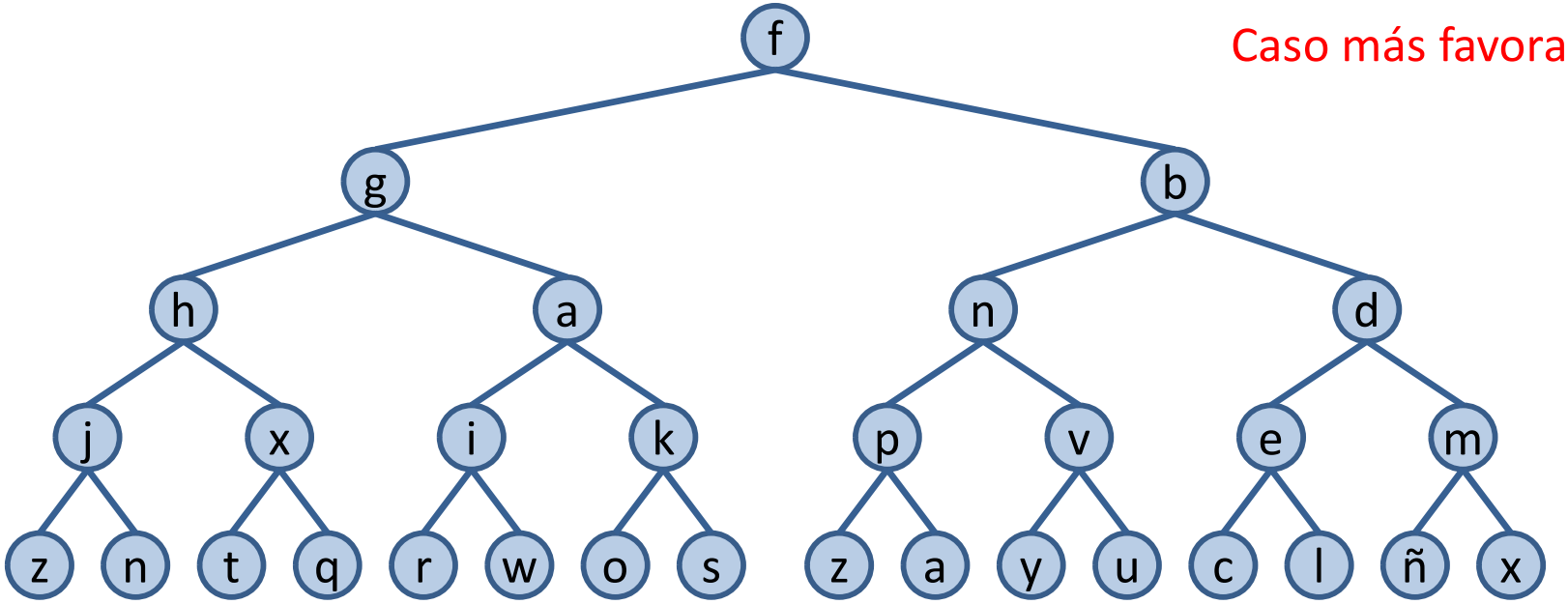
Caso más desfavorable



Sea un árbol de altura máxima *h*.
La ausencia de un nodo en el nivel $n \leq h$ provocará $2^{h-n+1}-1$ posiciones libres en el vector.



Implementación de un árbol binario mediante un vector de posiciones relativas

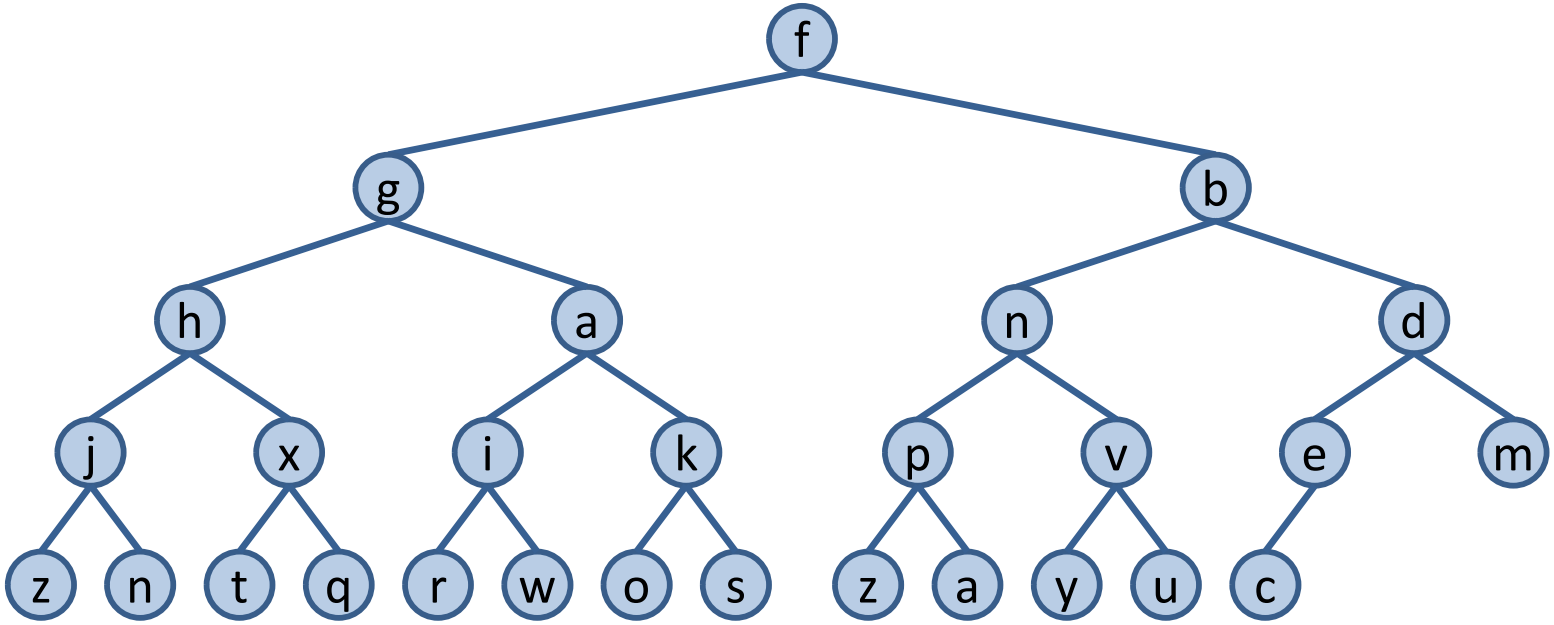


Caso más favorable

maxNodos-1

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15		25	26	27	28	29	30
nodos	f	g	b	h	a	n	d	j	x	i	k	p	v	e	m	z		y	u	c	l	ñ	x

Implementación de un árbol binario mediante un vector de posiciones relativas

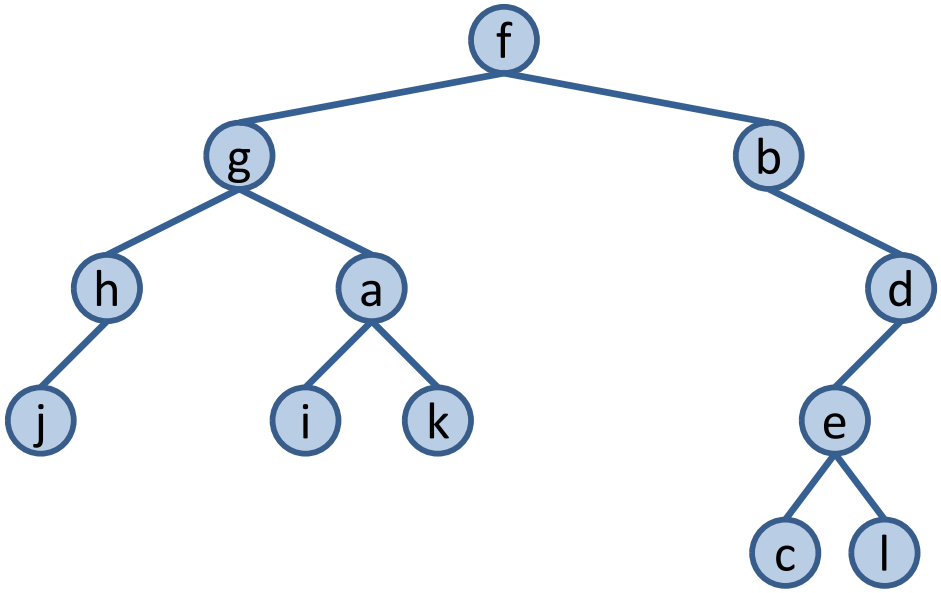


maxNodos-1

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15		25	26	27	28	29	30
nodos	f	g	b	h	a	n	d	j	x	i	k	p	v	e	m	z			y	u	c			

La eficiencia espacial será mayor cuanto más lleno esté el árbol, es decir, cuantos menos nodos falten y, por tanto, más bajos sean los niveles en que falten.

Implementación de un árbol binario mediante un vector de posiciones relativas



maxNodos-1

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15		25	26	27	28	29	30
nodos	f	g	b	h	a	@	d	j	@	i	k	@	@	e	@	@		@	@	c	l	@	@

Un valor del tipo de los elementos del árbol no significativo en la aplicación se utilizará para marcar las posiciones libres del vector.

```
#ifndef ABIN_VEC1_H
#define ABIN_VEC1_H
#include <cassert>

template <typename T> class Abin {
public:
   typedef size_t nodo; // Índice del vector,
                        // entre 0 y maxNodos-1
   static const nodo NODO_NULO;

   explicit Abin(size_t maxNodos, const T& e_nulo = T());
   void insertarRaiz(const T& e);
   void insertarHijoIzqdo(nodo n, const T& e);
   void insertarHijoDrcho(nodo n, const T& e);
   void eliminarHijoIzqdo(nodo n);
   void eliminarHijoDrcho(nodo n);
   void eliminarRaiz();
   bool arbolVacio() const;
```

Llamas al ctor del elemento nulo

```
    const T& elemento(nodo n) const; // Lec. en Abin const
    T& elemento(nodo n);       // Lec/Esc. en Abin no-const
    nodo raiz() const;
    nodo padre(nodo n) const;
    nodo hijoIzqdo(nodo n) const;
    nodo hijoDrcho(nodo n) const;
    Abin(const Abin<T>& a);                    // Ctor. de copia
    Abin<T>& operator =(const Abin<T>& a); // Asig. de árboles
    ~Abin();                                   // Destructor
private:
    T* nodos;          // Vector de nodos
    size_t maxNodos; // Tamaño del vector
    T ELTO_NULO;      // Marca celdas vacías
};


/* Definición del nodo nulo */
template <typename T>
const typename Abin<T>::nodo Abin<T>::NODO_NULO(SIZE_MAX);
```

```
template <typename T>
Abin<T>::Abin(size_t maxNodos, const T& e_nulo) :
   nodos(new T[maxNodos]),
   maxNodos(maxNodos),
   ELTO_NULO(e_nulo)
{
   // Marcar todas las celdas libres.
   for (nodo n = 0; n <= maxNodos-1; n++)
      nodos[n] = ELTO_NULO;
}
```

Inicializas el árbol con todos los elementos nulos

```
template <typename T>
inline void Abin<T>::insertarRaiz(const T& e)
{
   assert(nodos[0] == ELTO_NULO);   // Árbol vacío.

   nodos[0] = e;
}
```

```
template <typename T> inline
void Abin<T>::insertarHijoIzqdo(nodo n,const T& e)
{
   assert(n >= 0 && n <= maxNodos-1); // Nodo válido.
   assert(nodos[n] != ELTO_NULO);     // Nodo del árbol.
   assert(2*n+1 < maxNodos);   // Hijo izqdo. cabe en el árbol.
   assert(nodos[2*n+1] == ELTO_NULO); // n no tiene hijo izqdo.

   nodos[2*n+1] = e;
}
```

Nodo válido -> nodo dentro del rango 0 < nodo < maxNodos +1 y no eres elemento nulo

```
template <typename T> inline
void Abin<T>::insertarHijoDrcho(nodo n,const T& e)
{
   assert(n >= 0 && n < maxNodos-1);  // Nodo válido
   assert(nodos[n] != ELTO_NULO);     // Nodo del árbol
   assert(2*n+2 < maxNodos);   // Hijo drcho. cabe en el árbol.
   assert(nodos[2*n+2] == ELTO_NULO); // n no tiene hijo drcho.

   nodos[2*n+2] = e;
}
```

```
template <typename T> inline
void Abin<T>::eliminarHijoIzqdo(nodo n)
{
   assert(n >= 0 && n <= maxNodos-1);   // Nodo válido.
   assert(nodos[n] != ELTO_NULO);       // Nodo del árbol.
   assert(2*n+1 < maxNodos);   // Hijo izqdo. cabe en el árbol.
   assert(nodos[2*n+1] != ELTO_NULO);   // n tiene hijo izqdo.
   if (4*n+4 < maxNodos)  // Caben los hijos del hijo izqdo. de n
      assert(nodos[4*n+3] == ELTO_NULO &&   // Hijo izqdo. de
             nodos[4*n+4] == ELTO_NULO);    // n es hoja
   else if (4*n+3 < maxNodos) //Sólo cabe h. izq. de h. izq. de n
      assert(nodos[4*n+3] == ELTO_NULO); //Hijo izq. de n es hoja

   nodos[2*n+1] = ELTO_NULO;
}
```

Nodo izquierdo n -> 2n + 1
Hjo Izquierdo de n -> 4n +3
Hijo derecho de n -> 4n +4

Nodo n valido y no sea elemento nulo.
El hijo izquierdo es nodo válido y no nulo.
Que sea hoja -> hijos estén fuera de rango, que sean nulos o ambos
Nota: Los hijos son el doble +1 ó el doble +2 del nodo n .
Si no cabe uno, no cabe el otro, por eso se comprueba uno y luego si cabe se comprueba el otro.

```
template <typename T> inline
void Abin<T>::eliminarHijoDrcho(nodo n)
{
   assert(n >= 0 && n <= maxNodos-1);   // Nodo válido.
   assert(nodos[n] != ELTO_NULO);       // Nodo del árbol.
   assert(2*n+2 < maxNodos);   // Hijo drcho. cabe en el árbol.
   assert(nodos[2*n+2] != ELTO_NULO);   // n tiene hijo drcho.
   if (4*n+6 < maxNodos)  // Caben los hijos del hijo drcho. de n
      assert(nodos[4*n+5] == ELTO_NULO &&   // Hijo drcho. de
             nodos[4*n+6] == ELTO_NULO);    // n es hoja
   else if (4*n+5 < maxNodos) //Sólo cabe h. izq. de h. drch de n
      assert(nodos[4*n+5] == ELTO_NULO); //Hijo drch de n es hoja

   nodos[2*n+2] = ELTO_NULO;
}
template <typename T>
inline void Abin<T>::eliminarRaiz()
{
   assert(nodos[0] != ELTO_NULO);   // Árbol no vacío
   assert(nodos[1] == ELTO_NULO &&
          nodos[2] == ELTO_NULO);   // La raíz es hoja
   nodos[0] = ELTO_NULO;
}
```

Nodo derecho n -> 2n + 2
Hjo Izquierdo de n -> 4n +5
Hijo derecho de n -> 4n +6

```
template <typename T>
inline bool Abin<T>::arbolVacio() const
{
   return (nodos[0] == ELTO_NULO);
}

template <typename T>
inline const T& Abin<T>::elemento(nodo n) const
{
   assert(n >= 0 && n <= maxNodos-1);  // Nodo válido.
   assert(nodos[n] != ELTO_NULO);      // Nodo del árbol.
   return nodos[n];
}

template <typename T>
inline T& Abin<T>::elemento(nodo n)
{
   assert(n >= 0 && n <= maxNodos-1);  // Nodo válido.
   assert(nodos[n] != ELTO_NULO);      // Nodo del árbol.
   return nodos[n];
}
```

```
template <typename T>
inline typename Abin<T>::nodo Abin<T>::raiz() const
{
   return (nodos[0] == ELTO_NULO) ? NODO_NULO : 0;
}

template <typename T> inline
typename Abin<T>::nodo Abin<T>::padre(nodo n) const
{
   assert(n >= 0 && n <= maxNodos-1);  // Nodo válido.
   assert(nodos[n] != ELTO_NULO);      // Nodo del árbol.

   return (n == 0) ? NODO_NULO : (n-1)/2;
}
```

Si queremos delvolver el padre del raiz, se devuelve NODO NULO

```
template <typename T> inline
typename Abin<T>::nodo Abin<T>::hijoIzqdo(nodo n) const
{
   assert(n >= 0 && n <= maxNodos-1);  // Nodo válido.
   assert(nodos[n] != ELTO_NULO);      // Nodo del árbol.

   return (2*n+1 >= maxNodos || nodos[2*n+1] == ELTO_NULO) ?
             NODO_NULO : 2*n+1;
}

template <typename T> inline
typename Abin<T>::nodo Abin<T>::hijoDrcho(nodo n) const
{
   assert(n >= 0 && n <= maxNodos-1);  // Nodo válido.
   assert(nodos[n] != ELTO_NULO);      // Nodo del árbol.

   return (2*n+2 >= maxNodos || nodos[2*n+2] == ELTO_NULO) ?
             NODO_NULO : 2*n+2;
}
```

```
template <typename T>
Abin<T>::Abin(const Abin<T>& A) :
   nodos(new T[A.maxNodos]),
   maxNodos(A.maxNodos),
   ELTO_NULO(A.ELTO_NULO)
{
   // Copiar el vector
   for (nodo n = 0; n <= maxNodos-1; n++)
      nodos[n] = A.nodos[n];
}

template <typename T>
inline Abin<T>::~Abin()
{
   delete[] nodos;
}
```

```
template <typename T>
Abin<T>& Abin<T>::operator =(const Abin<T>& A)
{
   if (this != &A)   // Evitar autoasignación.
   {
      // Destruir el vector y crear uno nuevo si es necesario
      if (maxNodos != A.maxNodos)
      {
         delete[] nodos;
         maxNodos = A.maxNodos;
         nodos = new T[maxNodos];
      }
      ELTO_NULO = A.ELTO_NULO;
      // Copiar el vector.
      for (nodo n = 0; n <= maxNodos-1; n++)
         nodos[n] = A.nodos[n];
   }
   return *this;
}

#endif // ABIN_VEC1_H
```