

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE  
FAKULTA STROJNÍ  
Ústav mechaniky tekutin a termodynamiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Zlepšení termodynamických vlastností vysokorychlostní  
DRTA sondy pomocí numerických simulací

MASTER THESIS

Improvement of thermodynamic properties of a high-speed  
DRTA probe by numerical simulations

Autor práce: Bc. Josef Krubner

Vedoucí práce: Ing. Michal Schmirler, Ph.D.

Konzultant: doc. Ing. Jan Halama, Ph.D.

Akademický rok 2021/2022

## I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Krubner**

Jméno: **Josef**

Osobní číslo: **473541**

Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**

Zadávací katedra/ústav: **Ústav mechaniky tekutin a termodynamiky**

Studijní program: **Aplikované vědy ve strojním inženýrství**

Specializace: **Matematické modelování v technice**

## II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

**Zlepšení termodynamických vlastností vysokorychlostní DRTA sondy pomocí numerických simulací**

Název diplomové práce anglicky:

**Improvement of thermodynamic properties of a high-speed DRTA probe by numerical simulations**

Pokyny pro vypracování:

- 1) Popište problematiku měření teplot plynů proudících při vysokých podzvukových rychlostech, tedy s uvažováním jejich stlačitelnosti.
- 2) Popište princip fungování v názvu zmiňované DRTA sondy. Představte geometrii sondy, která bude výchozí pro další kroky v rámci návrhu zlepšení jejích termodynamických vlastností.
- 3) Popište CFD model, který budete pro simulaci termodynamických vlastností sondy používat (fyzikální model, okrajové podmínky, numerické schéma, způsoby diskretizace atd.).
- 4) Proveďte simulace vlivu jednotlivých vybraných konstrukčních úprav na termodynamické parametry sondy (hodnoty restitučních faktorů v závislosti na rychlosti nabíhajícího proudu, směrová citlivost, rozložení proudového a teplotního pole atd.).
- 5) Na základě výsledků provedených numerických simulací vyberte nejvhodnější geometrii sondy a vyhodnoťte její termodynamické vlastnosti.

Seznam doporučené literatury:

Dle pokynů vedoucího práce či konzultanta.

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:

**Ing. Michal Schmirler, Ph.D. ústav mechaniky tekutin a termodynamiky FS**

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:

**doc. Ing. Jan Halama, Ph.D. ústav technické matematiky FS**

Datum zadání diplomové práce: **25.04.2022**

Termín odevzdání diplomové práce: **29.07.2022**

Platnost zadání diplomové práce: \_\_\_\_\_

Ing. Michal Schmirler, Ph.D.  
podpis vedoucí(ho) práce

Ing. Michal Schmirler, Ph.D.  
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

doc. Ing. Miroslav Španiel, CSc.  
podpis děkana(ky)

## III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.

\_\_\_\_\_  
Datum převzetí zadání

\_\_\_\_\_  
Podpis studenta

## Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma „Zlepšení termodynamických vlastností vysokorychlostní DRTA sondy pomocí numerických simulací“ vypracoval samostatně. Veškerá použitá literatura a podkladové materiály jsou uvedeny v příloženém seznamu literatury.

V Praze, dne .....

.....  
Josef Krubner

## Poděkování

Tímto bych chtěl poděkovat Ing. Michalu Schmirlerovi, Ph.D. a doc. Ing. Janu Halamovi, Ph.D. za cenné rady a připomínky, které mi byly nápomocny při vypracování této diplomové práce. Dále bych rád poděkoval své rodině a své přítelkyni za podporu při studiu.

## Anotační list

Název práce:	Zlepšení termodynamických vlastností vysokorychlostní DRTA sondy pomocí numerických simulací
Title:	Improvement of thermodynamic properties of a high-speed DRTA probe by numerical simulations
Autor:	Bc. Josef Krubner
Studijní program:	Aplikované vědy ve strojním inženýrství
Druh práce:	Diplomová
Vedoucí práce	Ing. Michal Schmirler, Ph.D.
Konzultant	doc. Ing. Jan Halama, Ph.D.
Abstrakt:	TODO
Abstract:	TODO
Klíčová slova:	návrh sondy pro měření rychlosti, měření rychlosti plynů, podzvukové proudění, restituční faktor, restituční teplota, CFD simulace
Keywords:	velocimetry probe design, gas velocimetry, subsonic flow, recovery factor, recovery temperature, CFD simulation

# Obsah

<b>Seznam použitých symbolů a zkratek</b>	<b>8</b>
Seznam symbolů . . . . .	8
Seznam zkratek . . . . .	8
Seznam použitých indexů . . . . .	9
<b>Seznam obrázků</b>	<b>9</b>
<b>Úvod</b>	<b>10</b>
<b>1 Měření teplot při vysokých podzvukových rychlostech</b>	<b>11</b>
1.0.1 Dynamický ohřev . . . . .	11
1.0.2 Restituční faktor . . . . .	11
1.1 Dynamická teplota . . . . .	11
<b>2 DRTA sonda</b>	<b>12</b>
2.1 Princip fungování . . . . .	12
2.2 Výchozí geometrie . . . . .	12
2.3 Cíle numerických simulací . . . . .	12
<b>3 CFD model</b>	<b>14</b>
3.1 Základní systém rovnic . . . . .	14
3.1.1 Rovnice kontinuity . . . . .	14
3.1.2 Pohybová rovnice . . . . .	14
3.1.3 Energetická rovnice . . . . .	14
3.1.4 Konstitutivní vztahy . . . . .	14
3.2 Model turbulence . . . . .	16
3.3 Výpočetní geometrie . . . . .	18
3.3.1 Výpočetní oblast . . . . .	18
3.3.2 Využití symetrie . . . . .	19
3.3.3 Materiály . . . . .	20
3.4 Okrajové podmínky . . . . .	21
3.4.1 Hranice výpočetní oblasti . . . . .	21
3.4.2 Stěny . . . . .	21
3.5 Výpočetní síť . . . . .	22
3.5.1 Povrchová síť . . . . .	22
3.5.2 Zjemnění v mezní vrstvě . . . . .	22
3.5.3 Objemová síť . . . . .	23
3.6 Numerický řešič . . . . .	24
3.6.1 Odhad gradientu . . . . .	24

3.6.2	Aproximace hodnot na stěnách . . . . .	25
3.6.3	Numerické schéma . . . . .	26
3.6.4	Inicializace výpočtu . . . . .	26
3.6.5	Určení restitučních faktorů . . . . .	26

# Seznam použitých symbolů a zkratek

## Seznam symbolů

$a$	$ms^{-1}$	Rychlost zvuku
$c_p$	$Jkg^{-1}K^{-1}$	Měrná tepelná kapacita za konstantního tlaku
$E$	1	Korekční koeficient
$h$	$Jkg^{-1}$	Měrná entalpie
$I$	1	Intenzita turbulence
$K$	1	Korekční součinitel
$\kappa$	1	Poissonova konstanta
$Ma$	1	Machovo číslo
$\mu$	$Pa\cdot s$	Dynamická viskozita
$\nu$	$m^2s^{-1}$	Kinematická viskozita
$p_c$	$Pa$	Celkový tlak
$Pr$	1	Prandtlovo číslo
$p_s$	$Pa$	Statický tlak
$q$	$Jkg^{-1}$	Měrné teplo
$q_{dyn}$	$Pa$	Dynamický tlak
$q_{kin}$	$Pa$	Kinetický tlak
$r$	$Jkg^{-1}K^{-1}$	Měrná plynová konstanta
$r/r^*$	1	Recovery faktor
$Re$	1	Reynoldsovo číslo
$\rho$	$kgm^{-3}$	Hustota
$T$	$K$	Termodynamická teplota
$T_{kal}$	$K$	Teplota podle kalibračního polynomu
$T_r$	$K$	Recovery teplota
$u$	$ms^{-1}$	Rychlost proudění
$U$	$V$	Elektrické napětí

## Seznam zkratek

CCD	Charge-Coupled Device
EFV	Elastic Filament Velocimetry
Holo-PIV	Holographic Particle Image Velocimetry
HWA	Hot Wire Anemometry
ICCD	Intensified Charge-Coupled Device
LDD	Laser Doppler Detection
LPT	Lagrangian Particle Tracking
OTV	Ozone Tagging Velocimetry
PIV	Particle Image Velocimetry
Scan-PIV	Scanning Particle Image Velocimetry
Tomo-PIV	Tomographic Particle Image Velocimetry



## Seznam indexů

$A$	Sonda A
$B$	Sonda B
$i$	Stupeň iterace
$\infty$	Nabíhající proud vzduchu
0	Stagnační
1	Před dýzou
2	Za dýzou

## Seznam obrázků

2.2.1 Výchozí geometrie DRTA sondy. . . . .	13
3.3.1 Výpočetní oblast s vyznačením souřadného systému a polohy měřených geometrií. . . . .	18
3.3.2 Výpočetní oblast pro řešení symetrických úloh. . . . .	19
3.4.1 Části hranice pro aplikování okrajových podmínek (v jednotlivých ob- rázcích označeny žlutou barvou). . . . .	21
3.5.1 Graf četností hodnot bezrozměrné vzdálenosti od stěny čidla A pro úlohu z Kapitoly ?? . Průměrná hodnota byla pro tento případ rovna 0.945. . . . .	23
3.5.2 Pohled na výpočetní síť z Kapitoly ?? ze strany symetrie. . . . .	24
3.6.1 Schéma pro určení gradientu pomocí metody nejmenších čtverců. . . . .	25
3.6.2 Schéma s vyznačením oblasti odečtu teploty pro určení restitučního fak- toru. . . . .	26

# Úvod

Problematika měření rychlosti proudění tekutin je velice rozsáhlým vědním oborem a můžeme zde nalézt mnoho postupů a metodik, které se postupně vyvíjejí.

# 1 Měření teplot při vysokých podzvukových rychlostech

## 1.0.1 Dynamický ohřev

## 1.0.2 Restituční faktor

## 1.1 Dynamická teplota

## 2 DRTA sonda

### 2.1 Princip fungování

Princip měření rychlosti pomocí DRTA sondy (DRTA = „*Double Recovery Temperature Anemometry*“) spočívá ve využití dvou teplotních čidel, v tomto návrhu bylo pracováno s odporovými teplotními snímači Pt100. Komplikaci při použití jediného snímače pro určení rychlosti proudění představuje nutná znalost statické teploty. Ta lze jednoduše eliminovat přidáním druhého snímače s rozdílným restitučním faktorem:

$$T_{rA} = T + f_A \frac{u^2}{2c_p} \quad (2.1.1)$$

$$T_{rB} = T + f_B \frac{u^2}{2c_p} \quad (2.1.2)$$

$$T_{rA} - T_{rB} = (f_A - f_B) \frac{u^2}{2c_p} \quad (2.1.3)$$

$$u = \sqrt{\frac{2c_p (T_{rA} - T_{rB})}{(f_A - f_B)}} \quad (2.1.4)$$

kde indexy  $A$ , respektive  $B$  odpovídají jednotlivým čidlům. Podobným způsobem lze sestavit vztah pro určení Machova čísla:

$$T_{rA} = T + f_A \frac{u^2}{2c_p} \frac{a^2}{a^2} = T \left( 1 + f_A \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2 \right) \quad (2.1.5)$$

$$T_{rB} = T \left( 1 + f_B \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2 \right) \quad (2.1.6)$$

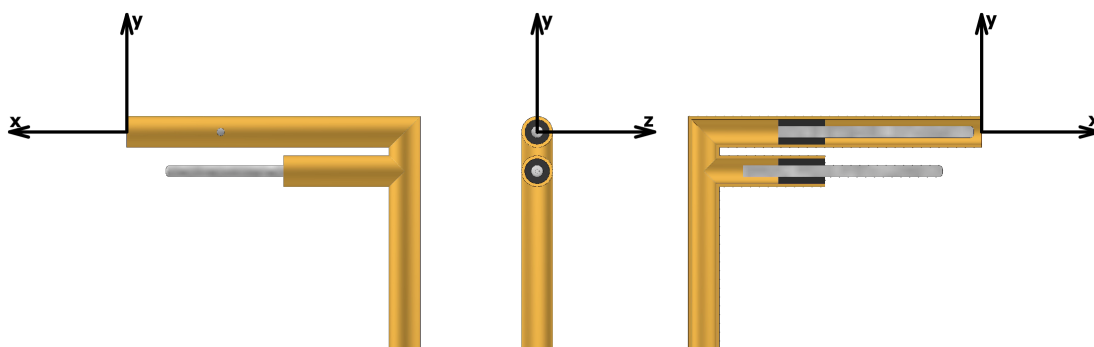
$$\frac{T_{rA}}{T_{rB}} = \frac{1 + f_A \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2}{1 + f_B \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2} \quad (2.1.7)$$

$$Ma = \sqrt{\frac{2}{\kappa - 1} \frac{T_{rA} - T_{rB}}{T_{rB} f_A - T_{rA} f_B}} \quad (2.1.8)$$

### 2.2 Výchozí geometrie

Zkoumaná sonda se skládá z dvou odporových teplotních čidel Pt100 (model *1PT100K2515*) o průměru  $1.5 [mm]$  a délce  $25 [mm]$ . Ty jsou umístěny rovnoběžně ve směru proudění pomocí těsnění na jejich koncích, ukotveného v mosazné trubici o průměru  $4 mm$  a tloušťce  $0.4 mm$ , která je využita zároveň k dosažení rozdílu restitučních faktorů jednotlivých čidel. Prostorové uspořádání sestavy je patrné z obrázku 2.2.1. Vyšším restitučním faktorem disponuje čidlo umístěné uvnitř trubice a dále v práci o něm bude hovořeno jako o čidlu  $A$ . Proudění stíněním čidla  $A$  umožňují dva odvětrávací otvory umístěné  $12 mm$  od vstupu do trubice. Čidlo umístěné volně v proudícím médiu vykazuje nižší restituční faktor a bude dále značeno jako čidlo  $B$ .

### 2.3 Cíle numerických simulací



Obrázek 2.2.1: Výchozí geometrie DRTA sondy.

## 3 CFD model

Během výpočtů byl použit předpoklad stacionárního vazkého proudění ideálního plynu, od čehož se odvíjí i forma níže uvedených rovnic.

### 3.1 Základní systém rovnic

#### 3.1.1 Rovnice kontinuity

Zákon zachování hmotnosti je pro stlačitelné stacionární proudění popsán následující rovnicí:

$$\nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (3.1.1)$$

kde  $\rho \left[ \frac{kg}{m^3} \right]$  je hustota a  $\vec{u} \left[ \frac{m}{s} \right]$  je rychlost proudění.

#### 3.1.2 Pohybová rovnice

Přenos hybnosti je popsán Navier-Stokesovými rovnicemi pro stacionární proudění:

$$\nabla \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot \vec{\tau} \quad (3.1.2)$$

kde  $p [Pa]$  je statický tlak a  $\vec{\tau} \left[ \frac{N}{m^2} \right]$  je tenzor vazkých napětí daný následujícím vztahem:

$$\vec{\tau} = \mu \left[ \nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{u}) \vec{I} \right] \quad (3.1.3)$$

kde  $\mu [Pa \cdot s]$  je dynamická viskozita a  $\vec{I} [1]$  je jednotková matice.

#### 3.1.3 Energetická rovnice

Řešení stlačitelného proudění vyžaduje doplnění energetické rovnice, kterou lze zapsat následovně:

$$\nabla \cdot (\rho \vec{u} H + \vec{q} - \vec{\tau} \cdot \vec{u}) = 0 \quad (3.1.4)$$

kde  $H \left[ \frac{J}{kg} \right]$  je celková měrná entalpie a  $\vec{q} \left[ \frac{W}{m^2} \right]$  je vektor tepelného toku.

#### 3.1.4 Konstitutivní vztahy

##### Stavová rovnice ideálního plynu

Rovnice popisuje vazbu mezi stavovými veličinami tekutiny:

$$\frac{p}{\rho} = rT \quad (3.1.5)$$

kde  $T [K]$  je termodynamická teplota a  $r \left[ \frac{J}{kgK} \right]$  je měrná plynová konstanta, pro vzduch rovna  $287.2 \frac{J}{kgK}$ .

### Celková měrná entalpie

Měrnou entalpii proudění  $h \left[ \frac{J}{kg} \right]$  lze určit ze vztahu:

$$h = c_p T = e + \frac{p}{\rho} = c_v T + \frac{p}{\rho} \quad (3.1.6)$$

kde  $c_p$ ,  $c_v \left[ \frac{J}{kgK} \right]$  jsou měrné tepelné kapacity za konstantního tlaku, resp. konstantního objemu a  $e \left[ \frac{J}{kg} \right]$  je měrná energie. Přičtením měrné kinetické energie proudění dostáváme celkovou měrnou entalpii  $H$ :

$$H = h + \frac{\|\vec{u}\|^2}{2} \quad (3.1.7)$$

### 3.2 Model turbulence

Vzhledem k povaze řešených úloh byl zvolen dvourovnicový RANS (*Reynolds Averaged Navier Stokes*) model turbulence  $k - \omega$  SST (*Shear Stress Transport*, viz Menter [Menter1993, Menter1994]), který kombinuje výhody modelu  $k - \varepsilon$  ve volném proudu a modelu  $k - \omega$  ve vazké podvrstvě. Transportní rovnice pro  $k - \omega$  SST mají následující tvar:

$$\nabla \cdot (\rho k \vec{u}) = P_k - \beta^* \rho \omega k + \nabla \cdot [(\mu + \sigma_k \mu_t) \nabla k] \quad (3.2.1)$$

$$\nabla \cdot (\rho \omega \vec{u}) = \frac{\gamma}{\nu_t} P_k - \beta \rho \omega^2 + \nabla \cdot [(\mu + \sigma_\omega \mu_t) \nabla \omega] + 2(1 - F_1) \frac{\rho \sigma_{\omega 2}}{\omega} \nabla k \cdot \nabla \omega \quad (3.2.2)$$

kde  $k \left[ \frac{m^2}{s^2} \right]$  je turbulentní kinetická energie,  $\omega \left[ \frac{1}{s} \right]$  je specifická rychlost disipace,  $\mu [Pas]$  je dynamická viskozita a  $\beta, \beta^*, \gamma, \sigma_k, \sigma_\omega, \sigma_{\omega 2}$  jsou konstanty.  $P_k$  představuje produkci turbulentní kinetické energie, která je s využitím limiteru dána vztahem:

$$P_k = \min \left( \vec{\tau} : \nabla \vec{u}, 20\beta^* \rho \omega k \right) \quad (3.2.3)$$

kde  $\vec{\tau}$  je tenzor turbulentního napětí určený vztahem:

$$\vec{\tau} = \mu_t \left( \nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^T - \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{u} \vec{I} \right) - \frac{2}{3} \rho k \vec{I} \quad (3.2.4)$$

Poslední člen rovnice 3.2.2 představuje příčnou difuzi, zajišťující přechod mezi modely  $k - \omega$  a  $k - \varepsilon$ . Ten je zprostředkovaný funkcí  $F_1$ :

$$F_1 = \tanh \left\{ \min \left[ \max \left( \frac{\sqrt{k}}{0.09\omega y}, \frac{500\nu}{y^2\omega}, \frac{4\rho\sigma_{\omega 2}k}{CD_{k\omega}y^2} \right) \right] \right\}^4 \quad (3.2.5)$$

kde  $y [m]$  je vzdálenost od nejbližší stěny a  $CD_{k\omega}$  odpovídá kladné části příčné difuze definované následujícím vztahem:

$$CD_{k\omega} = \max \left( 2\rho\sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \nabla k \cdot \nabla \omega, 10^{-20} \right) \quad (3.2.6)$$

Turbulentní vazkost  $\nu_t$ , respektive  $\mu_t$ , je definována jako:

$$\nu_t = \frac{a_1 k}{\max(a_1 \omega, \Omega F_2)} \quad \text{resp.} \quad \mu_t = \frac{\rho a_1 k}{\max(a_1 \omega, \Omega F_2)} \quad (3.2.7)$$

kde  $\Omega$  představuje absolutní hodnotu vířivosti a  $F_2$  je funkce daná vztahem:

$$F_2 = \tanh \left[ \max \left( 2 \frac{\sqrt{k}}{0.09\omega y}, \frac{500\nu}{y^2\omega} \right) \right]^2 \quad (3.2.8)$$



Konstanty  $\beta, \gamma, \sigma_k$  a  $\sigma_\omega$  jsou s ohledem na polohu (stěna/volný proud) definovány pomocí funkce  $F_1$ :

$$\Phi = F_1 \Phi_1 + (1 - F_1) \Phi_2 \quad (3.2.9)$$

kde  $\Phi$  představuje libovolnou z konstant. Pro úplnou reprezentaci modelu je tak třeba definovat pro všechny konstanty jejich hodnotu pro model  $k - \omega$  (index 1) a pro model  $k - \varepsilon$  (index 2):

Tabulka 3.2.1: Konstanty modelu k- $\omega$  SST [**Ansys2020Theory**].

$\sigma_{k1}$	$\sigma_{\omega1}$	$\beta_1$	$\sigma_{k2}$	$\sigma_{\omega2}$	$\beta_2$	$\beta^*$	$\chi$	$a_1$
1.176	2	0.075	1	1.168	0.0828	0.09	0.41	0.31

Konstanty  $\gamma_1$  a  $\gamma_2$  jsou definovány následujícími vztahy:

$$\gamma_1 = \frac{\beta_1}{\beta^*} - \frac{\sigma_{\omega1} \chi^2}{\sqrt{\beta^*}} \quad (3.2.10)$$

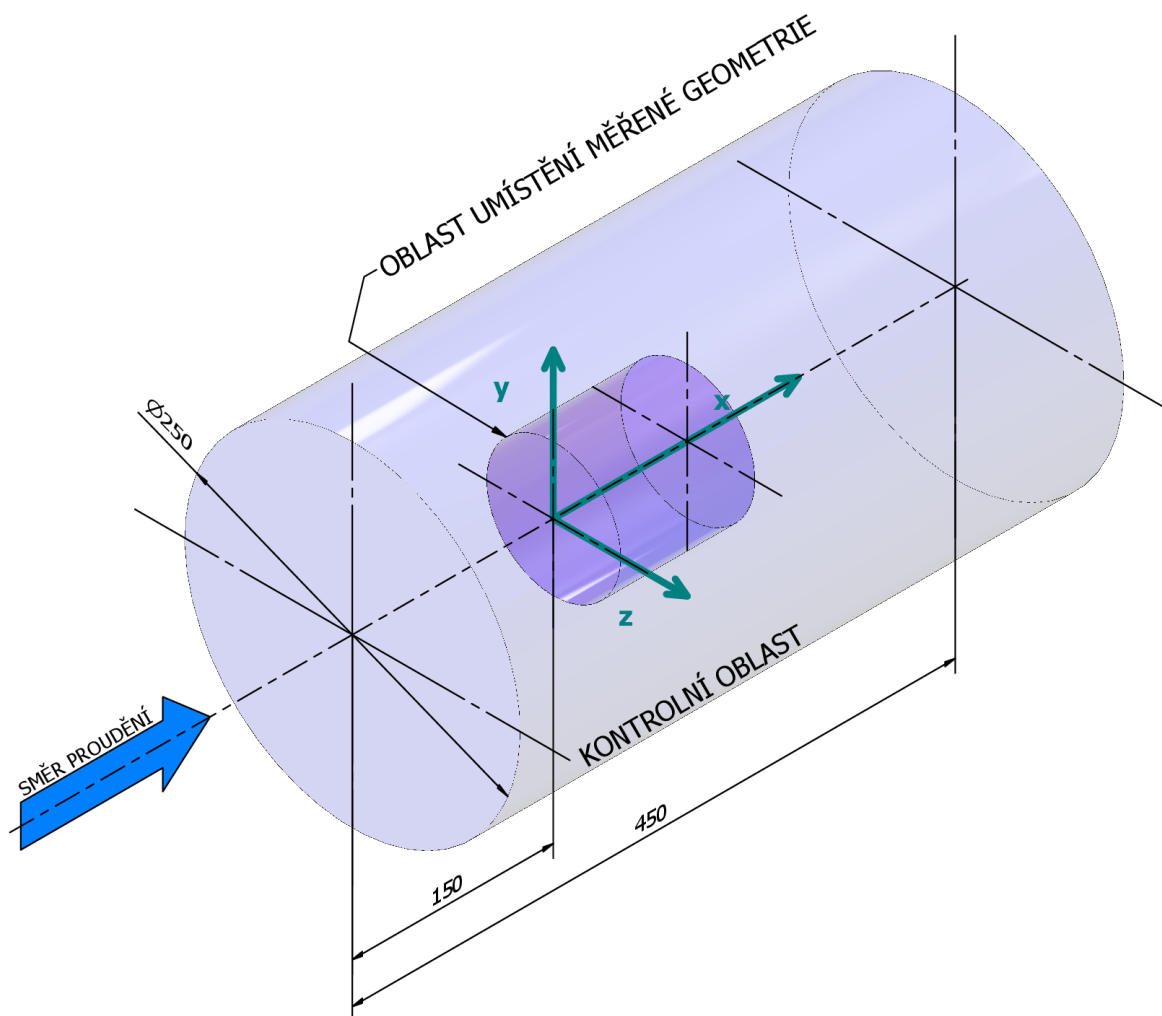
$$\gamma_2 = \frac{\beta_2}{\beta^*} - \frac{\sigma_{\omega2} \chi^2}{\sqrt{\beta^*}} \quad (3.2.11)$$

### 3.3 Výpočetní geometrie

Vzhledem k charakteru řešeného problému byla geometrie proměnlivá. Jednotícím prvkem byla přítomnost alespoň jednoho ze dvou teplotních čidel, jehož restituční faktor byl zkoumán. Podle aktuální simulace se však měnilo uspořádání a přítomnost dalších geometrických prvků, jako například stínění.

#### 3.3.1 Výpočetní oblast

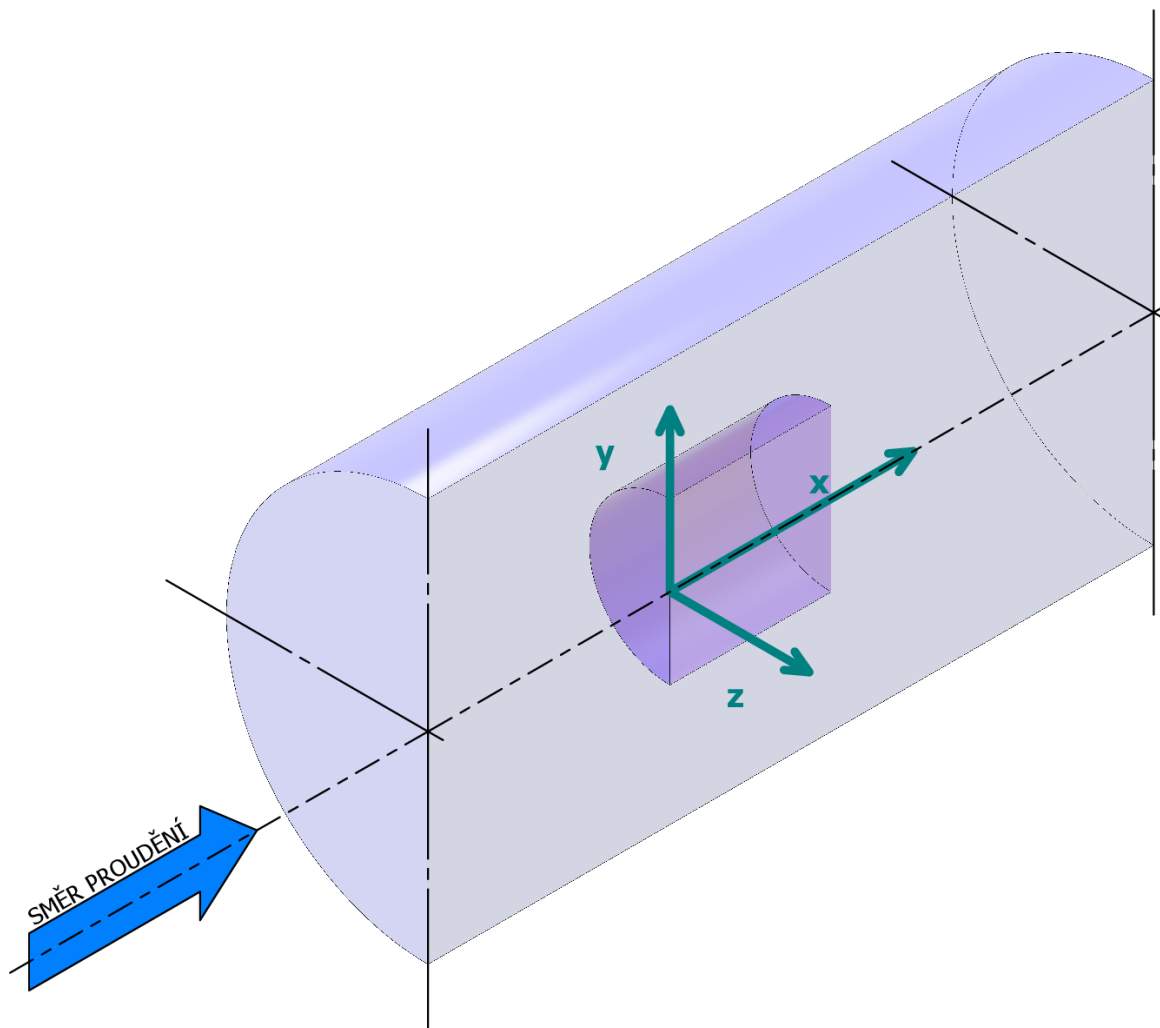
Výpočty byly prováděny na geometrii umístěné v kontrolní oblasti tvaru válce o průměru  $250\text{ mm}$  a délce  $450\text{ mm}$ . Vzhledem k rozměrům čidel, respektive celkové konstrukce, se jednalo o dostatečně velký kontrolní objem, který neměl ovlivňovat proudění okolo sondy. Veškeré měřené geometrie byly ve válci umístěné  $150\text{ mm}$  od vstupní oblasti, viz Obrázek 3.3.1, ze kterého je patrné i umístění souřadného systému, na který bude dále v práci odkazováno.



Obrázek 3.3.1: Výpočetní oblast s vyznačením souřadného systému a polohy měřených geometrií.

### 3.3.2 Využití symetrie

U všech zkoumaných geometrií se nacházela alespoň jedna rovina symetrie – bylo tedy možné využít této výhody pro úsporu výpočetního výkonu. Veškeré simulace uvedené v Kapitolách ?? a ?? s výjimkou analýzy směrové citlivosti v rovině  $XZ$  byly provedeny s využitím symetrie výpočetního modelu, viz Obrázek 3.3.2.



Obrázek 3.3.2: Výpočetní oblast pro řešení symetrických úloh.

### 3.3.3 Materiály

Během výpočtů byly uvažovány celkem tři materiály, ze kterých se skládala geometrie – trubice byla tvořena mosazí, čidla byla uvažována jako homogenní tělesa z keramiky  $Al_2O_3$  a těsnění bylo reprezentováno pryží. Použité fyzikální vlastnosti jednotlivých materiálů jsou uvedeny v Tabulce 3.3.1.

Tabulka 3.3.1: Fyzikální vlastnosti použitých materiálů.

	Mosaz	Pryž	Keramika
Hustota $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$	8730	1100	3500
Měrná tepelná kapacita $\left[\frac{J}{kgK}\right]$	400	1300	700
Tepelná vodivost $\left[\frac{W}{mK}\right]$	96	0.09	30

Jako proudící médium byl uvažován vzduch splňující stavovou rovnici ideálního plynu (viz Vztah 3.1.5) s následujícími vlastnostmi:

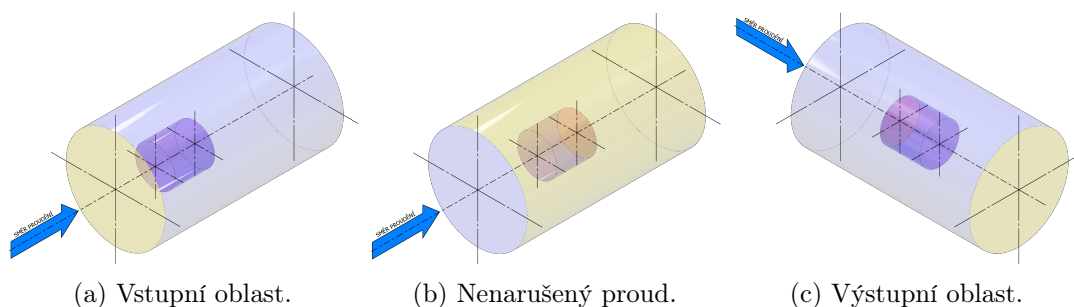
Tabulka 3.3.2: Fyzikální vlastnosti vzduchu.

Měrná plynová konstanta $\left[\frac{J}{kgK}\right]$	Poissonovo číslo [1]
287	1.4
Tepelná vodivost $\left[\frac{W}{mK}\right]$	Dynamická viskozita $[Pa \cdot s]$
$2.42 \cdot 10^{-2}$	$1.7894 \cdot 10^{-5}$

## 3.4 Okrajové podmínky

### 3.4.1 Hranice výpočetní oblasti

Hranice válcové kontrolní oblasti byla rozdělena na tři části s odlišnými okrajovými podmínkami – podstavy válce představovaly vstup a výstup a jeho plášť poté nenarušený proud (viz Obrázek 3.4.1). Ve všech oblastech byly předepsány hodnoty uvedené v Tabulce 3.4.1. Ve vstupní oblasti byla dále zadávána rychlost proudění, respektive velikost vektoru rychlosti a jeho směrové cosiny (využito při analýze směrové citlivosti). Hranice nenarušeného proudu měla předepisovanou hodnotu Machova čísla a směr proudění (opět ve formě směrových cosinů vektoru rychlosti).



Obrázek 3.4.1: Části hranice pro aplikování okrajových podmínek (v jednotlivých obrázcích označeny žlutou barvou).

Tabulka 3.4.1: Hodnoty předepisované na hranici kontrolní oblasti.

Statický tlak [ $Pa$ ]	Statická teplota [ $K$ ]
$10^5$	300
Intenzita turbulence [%]	Směšovací délka [ $m$ ]
2.5	0.01

Výchozí rychlostí použitou pro testování bylo  $250 \frac{m}{s}$ , tomu odpovídá při teplotě  $300 K$  Machovo číslo 0.72. Nebude-li dále uvedeno jinak, pak byly pro výpočet použity právě tyto hodnoty.

### 3.4.2 Stěny

Při numerických simulacích bylo pro vyhodnocení restitučních faktorů třeba počítat s přestupem tepla do pevných látek a s jeho šířením objemem. V místech kontaktu proudícího média se stěnami geometrie byla proto použita podmínka sdílené teploty – teplota na hranici tekutiny byla přenesena na hranici tělesa.

### 3.5 Výpočetní síť

Vytváření modelů probíhalo v prostředí software Autodesk Inventor (verze 2021 a 2022), odkud byly následně vyexportovány ve formátu *.dwg*. K přípravě pro síťování byl následně použit software Ansys SpaceClaim (verze 2020b-2021b), jehož účel spočíval primárně ve sdílení topologie modelu, vytváření jmenných sekcí a exportu do optimalizovaného formátu *.pmdb*. Samotné síťování poté probíhalo v software Ansys Fluent (verze 2020b-2021b).

#### 3.5.1 Povrchová síť

Prvním krokem při vytváření výpočetní sítě pro řešič bylo importování geometrie (soubor *.pmdb*) a vysíťování jejích ploch pomocí triangulace. Zde bylo použito následující nastavení:

Tabulka 3.5.1: Předepisované hodnoty při vytváření povrchové sítě.

$\frac{\text{Minimální}}{\text{Maximální}}$ velikost elementů [mm]	Poměrný růst velikosti elementů [1]
$\frac{0.1}{15}$	1.2
Maximální úhel překlenutí [deg]	Minimální dělení hran [1]
10	3

Kvalita povrchové sítě byla následně kontrolována, aby šikmost žádného elementu nepřesáhla 0.5. Šikmost představuje odchylku geometrie buňky od optimálního tvaru (v případě triangulace se jedná o rovnostranný trojúhelník). Její hodnota se pohybuje mezi  $0 \div 1$ , kde 0 odpovídá nejlepší kvalitě. Pro správný průběh a konvergenci výpočtů je doporučeno, aby maximální šikmost nepřesahovala 0.95 a aby se průměrná šikmost pohybovala nejvýše okolo hodnoty 0.33 [Ansys2020User]. Tato doporučení platí pro konečnou objemovou síť, která se používá během výpočtů, nicméně počáteční kvalita povrchové sítě má zásadní vliv na jakost následujícího síťování.

#### 3.5.2 Zjemnění v mezní vrstvě

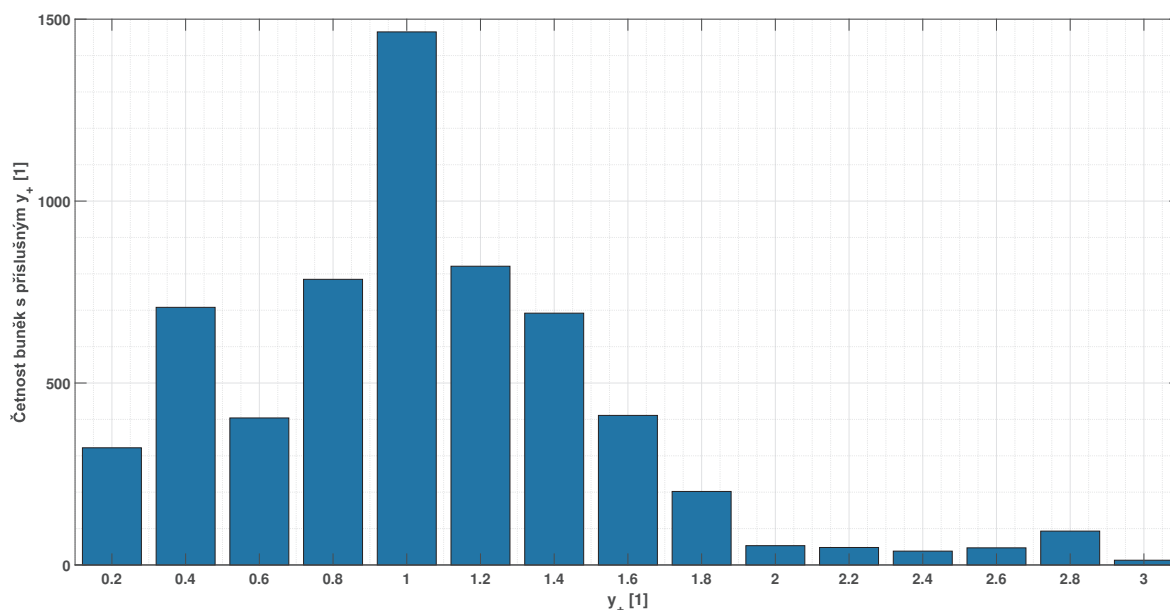
Pro dosažení přijatelné přesnosti výpočtu přestupu tepla ze vzduchu do těles bylo třeba, s ohledem na použitý model turbulence, vytvořit dostatečně jemnou síť v oblasti mezní vrstvy tak, aby se bezrozměrná vzdálenost od stěny  $y_+$  ( $y_+ = \frac{u_\tau y}{\nu}$ , kde  $u_\tau$  [ $\frac{m}{s}$ ] je třecí rychlost) pohybovala v oblasti vazké podvrstvy. K tomu byly využity prismatické buňky v místech kontaktu tekutiny s měřenou geometrií. Cílem bylo dosažení průměrné  $y_+$  co nejblíže 1. Toho bylo docíleno pomocí nastavení uvedeného v Tabulce 3.5.2. Příklad rozložení  $y_+$  podél povrchu teplotního čidla je uveden na Obrázku 3.5.1.

Míra natažení prvního elementu (aspect ratio) [1]

6.2

Poměrný růst velikosti elementů [1]	Počet prismatických vrstev [1]
1.2	10

Tabulka 3.5.2: Předepisované hodnoty při vytváření prismatických buněk.



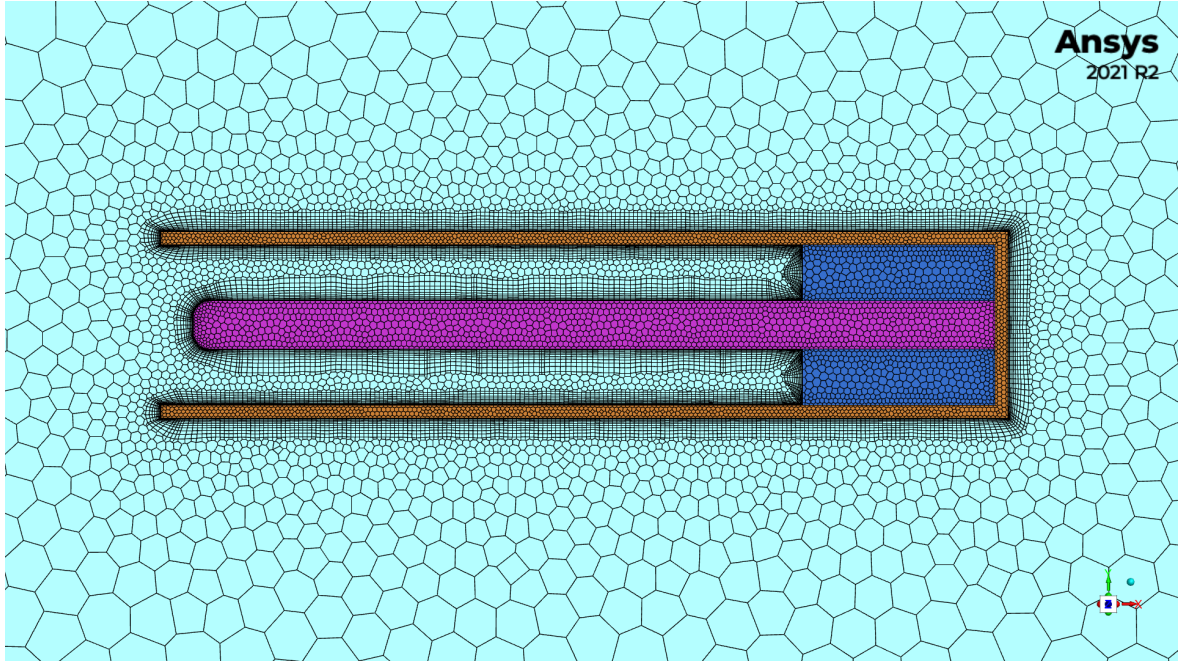
Obrázek 3.5.1: Graf četností hodnot bezrozměrné vzdálenosti od stěny čidla A pro úlohu z Kapitoly ?? . Průměrná hodnota byla pro tento případ rovna 0.945.

### 3.5.3 Objemová síť

Při vytváření objemové sítě byly zvoleny polyhedrální buňky, které umožňují dosahovat přesnějších řešení oproti starším typům elementů při shodných počtech buněk. Umožňují navíc lepší odhad gradientu díky vyššímu počtu stěn a obecně lze s jejich použitím dosahovat lepší kvality sítě [Sosnowski2018]. Postup generování objemové sítě byl následující:

1. Konverze povrchové triangulace na polygonální síť
2. Vygenerování vrstev prismatických buněk
3. Iterační generování polyhedrální objemové sítě ve zbytku objemu

Maximální šikmost hotové sítě se vždy pohybovala pod hodnotou 0.85. Počty buněk se pohybovaly v rozmezí  $450 \div 550$  tisíc pro symetrické úlohy a  $850 \div 950$  tisíc pro úlohy bez využití symetrie. Příklad výpočetní sítě je uveden na obrázku 3.5.2.



Obrázek 3.5.2: Pohled na výpočetní síť z Kapitoly ?? ze strany symetrie.

### 3.6 Numerický řešič

Veškeré výpočty byly provedeny v prostředí výpočetního software Ansys Fluent (verze 2020b-2021b). Ten využívá k řešení problémů metodu konečných objemů, která je pro úlohy počítačové dynamiky tekutin typická. Metoda spočívá v rozdělení kontrolní oblasti na vzájemně disjunktní kontrolní objemy, které ji kompletně pokrývají. Řešené rovnice jsou následně integrovány právě přes dané objemy a poté prostřednictvím diskretizace převedeny na soustavu lineárních rovnic. Způsoby diskretizace a odhadů popsané níže vycházejí z programové dokumentace pro Ansys Fluent 2020 [Ansys2020Theory].

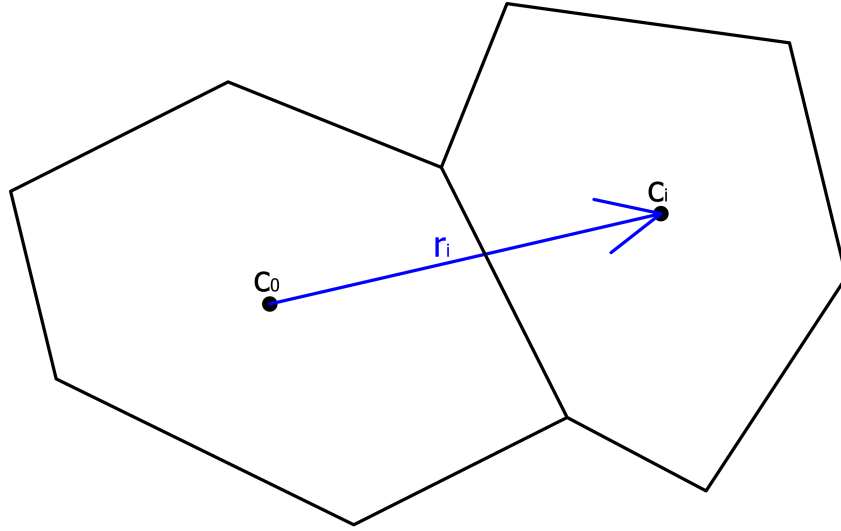
#### 3.6.1 Odhad gradientu

Pro určení gradientu ve středu buněk byla zvolena, s ohledem na použití polyhedrální sítě, metoda konečných čtverců. Ta spočívá v hledání váhové funkce mezi dílčími gradienty  $(\nabla\varphi)_{c0,i}$ :

$$(\nabla\varphi)_{c0,i} \cdot \vec{r}_i = \varphi_{ci} - \varphi_{c0} = (\Delta\varphi)_i \quad (3.6.1)$$

kde  $\vec{r}_i$  je vektor spojující středy buněk  $c_0$  a  $c_i$  a  $\varphi_{c0}$ , respektive  $\varphi_{ci}$  jsou jim odpovídající hodnoty libovolné veličiny (viz Obrázek 3.6.1). Počet takto vzniklých gradientů je roven počtu sousedních buněk  $c_i$ , je tak třeba najít váhovou funkci  $\vec{W}$ , jejíž aplikací na





Obrázek 3.6.1: Schéma pro určení gradientu pomocí metody nejmenších čtverců.

soustavu rozdílů  $\Delta\vec{\varphi}$  získáme konečný gradient  $(\nabla\varphi)_{c0}$ , tedy:

$$(\nabla\varphi)_{c0} = \begin{pmatrix} (\nabla\varphi)_{c0}^x \\ (\nabla\varphi)_{c0}^y \\ (\nabla\varphi)_{c0}^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{x1} & W_{x2} & \cdots & W_{xn} \\ W_{y1} & W_{y2} & \cdots & W_{yn} \\ W_{z1} & W_{z2} & \cdots & W_{zn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\Delta\varphi)_1 \\ (\Delta\varphi)_2 \\ \vdots \\ (\Delta\varphi)_n \end{pmatrix} = \vec{W}\Delta\vec{\varphi} \quad (3.6.2)$$

### 3.6.2 Aproximace hodnot na stěnách

Ansys Fluent využívá při výpočtech tzv. cell-centered formulaci metody konečných objemů – všechny veličiny jsou definovány ve středech buněk. Pro výpočet toků konečnými objemy je ale nutné znát také hodnoty veličin na jejich stěnách. K tomu byla zvolena metoda upwind druhého řádu přesnosti (*linear upwind*). Její princip je založen na určení buňky „proti proudu“  $c_U$ , obvykle s využitím vnější normály stěny, a následné extrapolaci hodnot z jejího středu do středu příslušné stěny:

$$\varphi_f = \varphi_U + (\nabla\varphi)_U \cdot \vec{r}_f \quad (3.6.3)$$

kde  $\varphi_f$  je hodnota libovolné veličiny ve středu stěny,  $\varphi_U$  je hodnota ve středu buňky proti proudu,  $(\nabla\varphi)_U$  je gradient buňky proti proudu (viz Kapitola 3.6.1) a  $\vec{r}_f$  je vektor spojující střed buňky proti proudu a střed stěny.

Určení tlaku na stěnách buněk se liší od všech ostatních veličin. V tomto případě byla namísto metody upwind použita centrální náhrada druhého řádu přesnosti:

$$p_f = \frac{p_{ci} + p_{c0}}{2} + \frac{(\nabla p)_{ci} + (\nabla p)_{c0}}{2} \quad (3.6.4)$$

### 3.6.3 Numerické schéma

Pro řešení bilančních rovnic bylo zvoleno sdružené schéma – narozdíl od sekvenčních algoritmů (například SIMPLE, PISO, ...), které řeší postupně rovnice pro rychlost a následně pro tlak, sdružený algoritmus sestavuje soustavu rovnic řešící zároveň rychlostní i tlakové pole. Ta je poté řešena buď pomocí Gaus-Seidelovy iterační metody nebo pomocí metod založených na LU dekompozici [Ansys2020Theory].

Výhoda sdruženého algoritmu spočívá u stacionárních úloh zejména v rychlosti konvergence [Ansys2020User] – při testování vhodného schématu pro výpočty prezentované v této práci bylo s využitím sdruženého schématu dosaženo konvergence po přibližně  $10\times$  méně iteracích, než tomu bylo u schématu SIMPLE.

### 3.6.4 Inicializace výpočtu

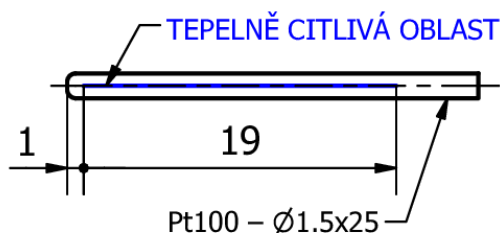
Iterační proces řešení vyžaduje počáteční vyplnění hodnot v kontrolních objemech. K tomu lze přistoupit několika způsoby, zde byla zvolena takzvaná hybridní inicializace. Ta spočívá v řešení Laplaceovy rovnice pro rychlostní potenciál  $\varphi$  a pro tlak  $p$  (viz Rovnice 3.6.5) se zjednodušenými okrajovými podmínkami. Ostatní veličiny (teplota, turbulentní parametry, ...) jsou v celém objemu voleny jako konstantní.

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= 0 \\ \Delta p &= 0\end{aligned}\tag{3.6.5}$$

Využití hybridní inicializace, podobně jako použití sdruženého algoritmu, vedlo během výpočtů k jejich rychlejší konvergenci a bylo tak preferováno.

### 3.6.5 Určení restitučních faktorů

Vnitřní geometrie teplotních čidel byla během výpočtů idealizována (uvažovány byly jako homogenní tělesa z keramiky, viz Kapitola 3.3.3), nicméně pro stanovení restitučních faktorů bylo třeba zvolit postup, který co nejvíce respektuje skutečnou stavbu snímačů. Tepelně citlivé součásti jsou u použitého modelu Pt100 navinuty po většině jeho délky – u výpočetního modelu byly reprezentovány úsečkou délky  $19\text{ mm}$ , viz Obrázek 3.6.2.



Obrázek 3.6.2: Schéma s vyznačením oblasti odečtu teploty pro určení restitučního faktoru.

Rovnovážná teplota  $T_r$  čidla byla určena jako průměr hodnot teploty v buňkách, které úsečka protínala. Následně byl určen restituční faktor čidla s využitím Vztahu 2.1.4:

$$f = 2c_p \frac{T_r - T}{u^2}\tag{3.6.6}$$

kde  $T$  [K] je statická teplota nabíhajícího proudu a  $u$  [ $\frac{m}{s}$ ] je jeho rychlost.