IDM Domácí úkol 2021

Fakulta informačních technologií Vysokého učení technického v Brně
Skupina č. 6

Zbývající členové:
Kuchař Josef - xkucha28
Vlna Josef - xvlnaj00
Ušák Jan - xusakj00

Příklad 1

Najděte všechna $x \in \mathbb{R}$ pro která platí

$$\forall z \in \mathbb{R} \colon z \notin \left(-\infty, \frac{1}{x}\right\rangle \cap \left(\frac{x-6}{8}, -\frac{2}{3}\right).$$

1. Podmínka

$$\frac{x-6}{8} < -\frac{2}{3}$$
$$3(x-6) < -2 \cdot 8$$
$$3x - 18 < -16$$
$$3x < 2$$
$$x < \frac{2}{3}$$

2. Podmínka

$$\frac{1}{x} \leq \frac{x-6}{8}$$
$$\frac{1}{x} - \frac{x-6}{8} \leq 0$$
$$\frac{8 \cdot 1 - x(x-6)}{8x} \leq 0$$
$$\frac{-x^2 + 6x + 8}{8x} \leq 0$$
$$D = b^2 - 4ac$$
$$D = 6^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 8 = 68$$
$$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$
$$x_{12} = \frac{-6 \pm \sqrt{68}}{2 \cdot (-1)}$$
$$\rightarrow x_1 = 3 - \sqrt{17}, x_2 = 3 + \sqrt{17}$$

Tabulka řešení pro 2. podmínku

	$(-\infty; 3-\sqrt{17})$	$3-\sqrt{17}$	$(3-\sqrt{17}; 0)$	0	$(0; 3+\sqrt{17})$	$3+\sqrt{17}$	$(3+\sqrt{17}; \infty)$
$-x^2+6x+8$	$-$	0	$+$	$\times$	$+$	0	$-$
$8x$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{-x^2+6x+8}{8x}$	$+$	0	$-$	$\times$	$+$	0	$-$

Výsledek

$$x \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cap \left(\left(3-\sqrt{17}; 0\right) \cup \left(3+\sqrt{17}; \infty\right)\right)$$
$$x \in \left(3-\sqrt{17}; 0\right)$$

Příklad 2

Určete, pro která přirozená čísla platí následující nerovnost. Dokažte matematickou indukcí.

$$1+3+5+\ldots+(2n-1) \leq 2n^2-2.$$

První krok

pro n = 1

$$1 \nleq 2 \cdot 1^2 - 2$$
$$1 \nleq 0$$

pro n = 2

$$1+3 \leq 2 \cdot 2^2 - 2$$
$$4 \leq 6$$

Druhý krok

Předpokládáme: n = k

$$1+3+5+\ldots+(2k-1) \leq 2k^2-2$$

Dokazujeme: n = k + 1

$$\begin{aligned}
1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2\,(k+1)-1) &\leq 2(k+1)^2-2 \\
1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1) &\leq 2k^2+4k \\
1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1) &\leq 2k^2-2+(2k+1) \leq 2k^2+4k \\
2k^2-2+(2k+1) &\leq 2k^2+4k \\
2k^2+2k-1 &\leq 2k^2+4k \\
2k-1 &\leq 4k \\
-1 &\leq 2k
\end{aligned}$$

Nerovnost platí pro $n \geq 2, n \in \mathbb{Z}$.

Příklad 3

Kolika způsoby lze seřadit písmena A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, R, S, T, U, V, X, Y, Z tak, že po vynechání některých písmen nevznikne ani jedno ze slov OLYMP, LUMP?

Celkem 24 písmen

$24! - \frac{24!}{5!} - \frac{24!}{4!} + 2 \cdot \frac{24!}{6!}$

Příklad 4

Zjistěte, zda pro libovolné množiny A, B platí

$$B \setminus (A \cup B) = \emptyset$$

Svoje tvrzení řádně zdůvodněte.

$\emptyset \subseteq B \setminus (A \cup B)$ platí vždy
$B \setminus (A \cup B) \subseteq \emptyset \implies x \in B \wedge x \notin (A \cup B) \implies x \in B \wedge x \notin A \wedge x \notin B \implies x \in \emptyset$
Tvrzení v zadání platí.

Příklad 5

Login studentů FITu je sled znaků, např. xabcde00, první znak je vždy písmeno x, potom následuje pět písmen a poslední dva znaky jsou číslice. M je množina všech přípustných loginů. Login Li je v relaci R s loginem Lj , právě když mají shodné alespoň první tři znaky. Zjistěte, zda R je relace ekvivalence nebo uspořádání (případně ani jedno) na množině M. **Svoje tvrzení zdůvodněte.**

Reflexivnost relace R
Libovolný login L má sám se sebou shodné všechny znaky
$\implies$ má shodné první tři znaky
$\implies$ relace R je reflexivní
Symetrie relace R
Když máme login Li, který je v relaci s loginem Lj, tak mají shodné alespoň první 3 znaky a to platí i naopak $\implies$ Relace R je symetrická
Tranzitivnost relace R
Když máme login Li, který je v relaci s loginem Lj a zároveň pokud je login Lj v relaci s Lk, tak Li a Lk mají shodné alespoň první 3 znaky $\implies$ Relace R je tranzitivní

Relace R je reflexivní, symetrická, tranzitivní $\implies$ Relace R je relace ekvivalence