ILG Domácí úkol 2021

Fakulta informačních technologií Vysokého učení technického v Brně
Skupina č. 4

Zbývající členové:
Kuchař Josef - xkucha28
Kaska Karel - xkaska02
Fazekas Tomáš - xfazek02

Příklad 1

Je dána soustava rovnic s parametrem $c \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcrcl} cx & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & 3y & + & cz & = & 0 \\ 3cx & - & cy & & & = & 0 \end{array}$$

Najděte všechny hodnoty parametru c, pro které soustava
a) má právě jedno řešení
b) má nekonečně mnoho řešení
c) nemá žádné řešení
d) má právě dvě řešení
e) má alespoň dvě řešení
Řešení vyjadřovat nemusíte, pouze rozhodněte o jeho existenci a počtu!

Řešení:

$$\begin{vmatrix} c & 1 & 1 \\ 1 & 3 & c \\ 3c & -c & 0 \end{vmatrix} = 0 - c + 3c^2 - 9c + c^3 - 0 = c^3 + 3c^2 - 10c = c\left(c^2 + 3c - 10\right) = c(c-2)(c+5)$$

a) $c \in \mathbb{R} \setminus \{-5, 0, 2\}$
b) $c \in \{-5, 0, 2\}$
c) Není možné, vždy bude mít při nulové pravé straně alespoň jedno řešení
d) Při lineární soustavě právě dvě řešení nejsou možná
e) Stejné jako b) $\implies c \in \{-5, 0, 2\}$

Příklad 2

Určete všechna $c \in \mathbb{R}$ tak, aby:

$$\begin{vmatrix} c & 0 & 1 & 0 \\ 1 & c & 2 & 1 \\ 2 & 1 & c & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

$$1 \cdot \begin{vmatrix} c & 0 & 1 \\ 2 & 1 & c \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} c & 0 & 1 \\ 1 & c & 2 \\ 2 & 1 & c \end{vmatrix} = 4$$

$$1 \cdot (c + 4 + 0 - 1 - 2c^2 - 0) + 1 \cdot (c^3 + 1 + 0 - 2c - 2c - 0) = 4$$

$$c^3 - 2c^2 - 3c + 4 = 4$$

$$c^3 - 2c^2 - 3c = 0$$

$$c(c^2 - 2c - 3) = 0$$

$$c(c-3)(c+1) = 0$$

$$c \in \{-1, 0, 3\}$$

Příklad 3

Nechť $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : (x - y = y + z) \wedge (z = 2x)\}$. Zjistěte, jestli $M(\mathbb{R})$ je podprostor $V_3(\mathbb{R})$. Svoje tvrzení zdůvodněte.

V M leží například $\overline{r} = [6, -3, 12]$, $\overline{s} = [8, -4, 16] \implies M \neq \emptyset$

$$\overline{r} + \overline{s} = [14, -7, 28], \overline{r} + \overline{s} \in M$$

$$2 \cdot \overline{r} = [12, -6, 18], 2 \cdot \overline{r} \in M$$

Na konkrétním případu to fungovalo, takže můžeme začít ověřovat obecně

$$\overline{u} = [u_1, u_2, u_3], \overline{v} = [v_1, v_2, v_3]$$

$$\overline{u}, \overline{v} \in M$$

$$u_2 = -\frac{u_1}{2}, v_2 = -\frac{v_1}{2}, u_3 = 2u_1, v_3 = 2v_1$$

$$\overline{u} = \left[u_1, -\frac{u_1}{2}, 2u_1\right], \overline{v} = \left[v_1, -\frac{v_1}{2}, 2v_1\right]$$

$$\overline{u} + \overline{v} = \left[u_1 + v_1, \frac{-u_1 - v_1}{2}, 2(u_1 + v_1)\right] \implies \overline{u} + \overline{v} \in M$$

$$r\overline{u} = \left[r \cdot u_1, -\frac{r \cdot u_1}{2}, 2r \cdot u_1\right] \implies r\overline{u} \in M$$

$M(\mathbb{R})$ je podprostor $V_3(\mathbb{R})$.

Příklad 4

Najděte LU rozklad matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & -12 \end{pmatrix}$$

Pak pomocí nalezeného LU rozkladu najděte řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x - \ \ y + \ \ 3z &= 5 \\ 2x \qquad + \ \ \ z &= 1 \\ -x + 5y - 12z &= -22 \end{aligned}$$

K nalezení LU rozkladu použijeme metodu úpravy matice na trojúhelníkový tvar, přidáme si druhou matici, ze které vznikne L matice.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & -12 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ . & 1 & 0 \\ . & . & 1 \end{pmatrix}$$

K "vynulování" a_{21} přičteme vynásobíme první řádek čísem (-2) a přičteme k druhému. Do naší vedlejší matice si na pozici l_{21} zapíšeme číslo opačné tedy 2

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -5 \\ -1 & 5 & -12 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ . & . & 1 \end{pmatrix}$$

Nyní pro prvek a_{31}, k 3 řádku přičteme $1\times$ první

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 4 & -9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & . & 1 \end{pmatrix}$$

Poslední zbývá prvek a_{32}, k 3 řádku přičteme $(-2)\times$ druhý

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Nyní máme obě matice,

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

K řešení soustavy využijeme asociativitu násobení matic.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -22 \end{pmatrix}$$

Máme soustavu ve tvaru $L \cdot U \cdot \bar{x} = \bar{b}$
Nejprve položíme $U \cdot \bar{x} = \bar{y}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

Nyní vyřešíme $L \cdot \bar{y} = \bar{b}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -22 \end{pmatrix}$$

Přepíšeme do soustavy

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad &= 5 \\ 2x_1 + \; y_1 \qquad &= 1 \\ -x_1 + 2y_1 - z_1 &= -22 \end{aligned}$$

$$2 \cdot 5 + y_1 = 1 \implies y_1 = -9$$

$$-(5) + 2 \cdot (-9) + z_1 = -22 \implies z_1 = 1$$

Nyní vyřešíme $U \cdot \bar{x} = \bar{y}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Přepíšeme do soustavy

$$\begin{aligned} x - \; y + 3z &= 5 \\ 2y - 5z &= -9 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

$$2y - 5 \cdot 1 = -9 \implies y = -2$$

$$x - 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 = 5 \implies x = 0$$

Řešením soustavy je uspořádaná trojice $[0, -2, 1]$.

Příklad 5

Pomocí Gram-Schmimdtova ortogonalizačního procesu najděte ortogonální a pak i ortonormální bázi prostoru generovaného vektory

Výpočet ortogonální báze

$$\overline{a_1} = [1, 2, -3, 1], \overline{a_2} = [2, 3, -2, 1], \overline{a_3} = [1, -1, 9, -2]$$

Výpočet $\overline{b_1}$

$$\overline{b_1} = \overline{a_1} = [1, 2, -3, 1]$$

Výpočet $\overline{b_2}$

$$\begin{aligned}
\overline{b_2} &= \overline{a_2} + r\overline{b_1} \\
\overline{b_1} \cdot \overline{b_2} &= \overline{b_1} \cdot \overline{a_2} + r\overline{b_1} \cdot \overline{b_1} \\
r &= -\frac{\overline{b_1} \cdot \overline{a_2}}{\overline{b_1} \cdot \overline{b_1}} = -\frac{[1, 2, -3, 1] \cdot [2, 3, -2, 1]}{[1, 2, -3, 1] \cdot [1, 2, -3, 1]} = -\frac{2 + 6 + 6 + 1}{1 + 4 + 9 + 1} = -\frac{15}{15} = -1 \\
\overline{b_2} &= \overline{a_2} + r\overline{b_1} = [2, 3, -2, 1] - 1[1, 2, -3, 1] = [1, 1, 1, 0] \\
\overline{b_1} \cdot \overline{b_2} &= [1, 2, -3, 1] \cdot [1, 1, 1, 0] = 0
\end{aligned}$$

Výpočet $\overline{b_3}$

$$\begin{aligned}
\overline{b_3} &= \overline{a_3} + s\overline{b_1} + u\overline{b_2} \\
\overline{b_1} \cdot \overline{b_3} &= \overline{b_1} \cdot \overline{a_3} + s\overline{b_1} \cdot \overline{b_1} + u\overline{b_1} \cdot \overline{b_2} \\
s &= -\frac{\overline{b_1} \cdot \overline{a_3}}{\overline{b_1} \cdot \overline{b_1}} = -\frac{[1, 2, -3, 1] \cdot [1, -1, 9, -2]}{[1, 2, -3, 1] \cdot [1, 2, -3, 1]} = -\frac{1 - 2 - 27 - 2}{1 + 4 + 9 + 1} = -\frac{-30}{15} = 2 \\
\overline{b_2} \cdot \overline{b_3} &= \overline{b_2} \cdot \overline{a_3} + s\overline{b_2} \cdot \overline{b_1} + u\overline{b_2} \cdot \overline{b_2} \\
u &= -\frac{\overline{b_2} \cdot \overline{a_3}}{\overline{b_2} \cdot \overline{b_2}} = -\frac{[1, 1, 1, 0] \cdot [1, -1, 9, -2]}{[1, 1, 1, 0] \cdot [1, 1, 1, 0]} = -\frac{1 - 1 + 9 + 0}{1 + 1 + 1 + 0} = -\frac{9}{3} = -3 \\
\overline{b_3} &= \overline{a_3} + s\overline{b_1} + u\overline{b_2} = [1, -1, 9, -2] + 2 \cdot [1, 2, -3, 1] - 3 \cdot [1, 1, 1, 0] = [0, 0, 0, 0]
\end{aligned}$$

Poslední vektor vyšel nulový, což znamená, že vektory $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$ jsou lineárně závislé

Ortogonální báze

$$\overline{b_1} = [1, 2, -3, 1], \overline{b_2} = [1, 1, 1, 0]$$

Výpočet ortonormální báze

$$\overline{c_1} = \frac{\overline{b_1}}{||\overline{b_1}||} = \frac{[1, 2, -3, 1]}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2 + 1^2}} = \left[\frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{2}{\sqrt{15}}, \frac{-3}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}\right] = \left[\frac{\sqrt{15}}{15}, \frac{2\sqrt{15}}{15}, \frac{-\sqrt{15}}{5}, \frac{\sqrt{15}}{15}\right]$$

$$\overline{c_2} = \frac{\overline{b_2}}{||\overline{b_2}||} = \frac{[1, 1, 1, 0]}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2}} = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right] = \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right]$$

Ortonormální báze

$$\overline{c_1} = \left[\frac{\sqrt{15}}{15}, \frac{2\sqrt{15}}{15}, \frac{-\sqrt{15}}{5}, \frac{\sqrt{15}}{15}\right], \overline{c_2} = \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right]$$