# 5. DETERMINANTES

## 5.1. Definição e Propriedades

**Definição 1** *O* ***determinante*** *de uma matriz quadrada A* ***de ordem 2*** *é por definição a aplicação*

$$\det : M_{2\times 2}(IR) \quad \to \quad IR$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \to \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

**Exemplo 1:** $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 3\times(-1) - (-2)\times 5 = 7$

**Definição 2** *O* ***determinante*** *de uma matriz quadrada A* ***de ordem 3*** *é por definição a aplicação*

$$\det : \quad M_{3\times 3}(IR) \quad \to \quad IR$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \to \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= +a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= +a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det(A_{12}) + a_{13}\det(A_{13})$$

*onde* $A_{ij}$ *é a matriz obtida de A por eliminação da linha i e coluna j.*

**Exemplo 2:** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} =$

$$= 2(5-8) - (5+12) = -23$$

**Definição 3** *O* ***determinante*** *de uma matriz quadrada A* ***de ordem n*** *é por definição a aplicação*

$$\det : M_{n\times n}(IR) \rightarrow IR$$

$$A \rightarrow \det(A) = a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det(A_{12}) + \cdots + (-1)^{n+1} a_{1n}\det(A_{1n})$$

*onde $A_{ij}$ é a matriz obtida de A por eliminação da linha i e coluna j.*

**Exemplo 3:**

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -1\times 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 1\times 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 1\times\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -(4-0) - (3-2) - (0-1) = -4 - 1 + 1 = -4$$

**Exercício 2:** Calcule $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$.

**Propriedades dos Determinantes:**

- Se $A$ é uma matriz quadrada com pelo menos uma coluna ou uma linha nulas, então $\det(A) = 0$.
- Para qualquer matriz quadrada *A*, temos que $\det(A) = \det(A^T)$.
- O determinante de uma matriz triangular (inferior ou superior) é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.
- O determinante da matriz identidade é igual a um.
- Se $B$ é uma matriz quadrada obtida de $A$ por meio de troca de duas linhas (ou duas colunas) entre si, então $\det(B) = -\det(A)$.
- Se $B$ é a matriz quadrada que se obtém de $A$ multiplicando-se uma sua linha (ou coluna) por $\alpha \in IR$, então $\det(B) = \alpha \det(A)$.
- Se $B$ é a matriz quadrada que se obtém de $A$ substituindo-se uma sua linha (ou coluna) pela que dela se obtém adicionando-lhe um múltiplo escalar de outra, então $\det(B) = \det(A)$.
- Se $B$ é a matriz quadrada que se obtém da soma da linha $i$ (coluna $j$) da matriz $A'$ com a linha $i$ (coluna $j$) da matriz $A''$, sendo as restantes linhas (colunas) das matrizes $A'$, $A''$ e $B$ iguais, então $\det(B) = \det(A') + \det(A'')$.

**Nota:** Em geral, para $A, B \in M_{n \times n}(IR)$, temos:

- $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$.
- $\det(\alpha A) \neq \alpha \det(A)$; de facto, $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$.

**Exercício 3:** Calcule os seguintes determinantes, utilizando apenas as propriedades:

**3.1:** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$  **3.2:** $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & -b & -c & -d \\ a & b & -c & -d \\ a & b & c & -d \end{vmatrix}$

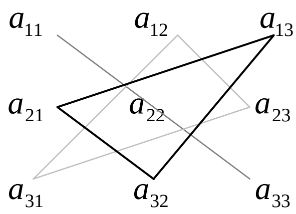
**Exercício 4:** Sem calcular o valor dos determinantes, demonstre a igualdade: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 8 & 15 \\ 3 & 9 & 27 & 40 \\ 4 & 16 & 64 & 85 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 1 \\ 3 & 9 & 27 & 1 \\ 4 & 16 & 64 & 1 \end{vmatrix}$.

## 5.2. Técnicas Para o Cálculo de Determinantes

### 5.2.1. Regra de Sarrus

O determinante de uma matriz de terceira ordem pode ser calculado utilizando uma regra conhecida por **Regra de Sarrus**.

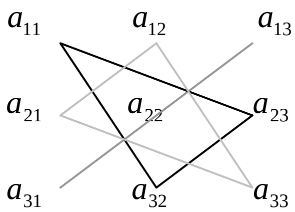
Os "termos positivos" de uma matriz $A$ de terceira ordem obtêm-se multiplicando os elementos da diagonal principal e multiplicando os vértices dos triângulos que se podem construir de base paralela à diagonal principal:




Assim, segundo o esquema de cima, os "termos positivos" são:

$$a_{11}a_{22}a_{33},\ a_{12}a_{23}a_{31},\ a_{21}a_{13}a_{32}.$$

Os "termos negativos" da matriz $A$ obtêm-se multiplicando os elementos da diagonal secundária e multiplicando os vértices dos triângulos que se podem construir de base paralela à diagonal secundária:




Assim, segundo o esquema de cima, os "termos negativos" são:

$$a_{13}a_{22}a_{31},\ a_{21}a_{12}a_{33},\ a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Subtraindo a soma dos “termos negativos” à soma dos “termos positivos”, obtemos o valor do determinante de $A$.

Ou seja,

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{13}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

**Exemplo 4:** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (0+1+2)-(0-2-1)=6$

**Exercício 5:** Calcule os seguintes determinantes, usando a regra de Sarrus:

**5.1:** $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$ **5.2:** $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$

### 5.2.2. Eliminação de Gauss

Consiste em transformar uma matriz quadrada de ordem *n* numa matriz triangular aplicando algumas das propriedades enunciadas anteriormente.

**Exemplo 5:**

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1/3 & 2/3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{=} -\begin{vmatrix} 1/3 & 2/3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} \underset{L_3-4L_1}{=}$$

$$= -\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \end{vmatrix} \underset{L_3+\frac{3}{2}L_2}{=} -\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3/2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}\times 1\times 2\times\left(-\frac{3}{2}\right)=1$$

**Exercício 6:** Calcule $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ usando a eliminação de Gauss.

### 5.2.3. Fórmula de Laplace

Por definição o determinante é calculado usando o desenvolvimento segundo a primeira linha. Este, no entanto, pode ser calculado usando o desenvolvimento segundo qualquer linha $i$ ou qualquer coluna $j$ do seguinte modo:

**Fórmula de Laplace segundo a linha *i*:**

$$\det(A) = (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A_{i1}) + (-1)^{i+2} a_{i2} \det(A_{i2}) + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} \det(A_{in})$$

**Fórmula de Laplace segundo a coluna *j*:**

$$\det(A) = (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j}) + (-1)^{2+j} a_{2j} \det(A_{2j}) + \cdots + (-1)^{n+j} a_{nj} \det(A_{nj})$$

onde $A_{ij}$ é a matriz de ordem $n-1$ obtida de $A$ por eliminação da linha $i$ e da coluna $j$ e os sinais $(-1)^{i+j}$ podem ser obtidos da seguinte matriz de sinais:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}.$$

**Exercício 7:** Calcule o valor do $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

**7.1:** segundo a 4ª linha;

**7.2:** segundo a 2ª coluna.

## 5.3. Menores, Menores Complementares e Complementos Algébricos

**Definição 4** *Dada uma matriz A, quadrada de ordem n, chama-se* ***submatriz*** *quadrada de A de ordem m à matriz formada pelos elementos comuns a m linhas e m colunas* $(m \leq n)$.

*Chama-se* ***menor*** *de ordem m ao determinante de uma submatriz de ordem m.*

*Dois menores dizem-se* ***complementares*** *sempre que em cada um deles estão representadas as linhas e as colunas que não figuram no outro.*

*Chama-se* ***complemento algébrico*** *de um menor ao produto do seu menor complementar por* $(-1)^s$ *onde s é a soma das ordens das linhas e das colunas envolvidas no menor complementar.*

*Um* ***menor*** *de A diz-se* ***principal*** *se a sua diagonal é totalmente constituída por elementos da diagonal principal de A.*

**Nota:** Para a formação do expoente *s* podemos usar as colunas e as linhas envolvidas no menor em vez do menor complementar.

**Exemplo 6:** Para $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$ temos

- Menor: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix}$;

  Menor complementar: $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{32} & a_{34} \end{vmatrix}$;

  Complemento algébrico: $(-1)^{2+3+2+4} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{32} & a_{34} \end{vmatrix}$.

- Menor: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$;

  Menor complementar: $\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$;

  Complemento algébrico: $(-1)^{3+4+3+4} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$.

- Menor: $|a_{32}|$;

  Menor complementar: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$;

  Complemento algébrico: $(-1)^{15} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$.

## 5.4. Inversa de uma Matriz

### 5.4.1: Definição e propriedades

**Definição 5** *Uma matriz quadrada A de ordem n, diz-se* ***invertível****, se existir uma matriz B de ordem n tal que* $AB = BA = I$.

*A matriz B chama-se inversa de A e representa-se por* $A^{-1}$, *isto é,* $B = A^{-1}$.

**Exemplo 7:** Calcule a inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ usando a definição

**Resolução:**

$$AX = I \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{11} + 2x_{21} = 1 \\ x_{12} + 2x_{22} = 0 \\ 3x_{11} + 4x_{21} = 0 \\ 3x_{12} + 4x_{22} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Então, usando o algoritmo de Gauss, vem:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right] \underset{L_3 - 3L_1}{\rightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right] \underset{L_4 - 3L_2}{\rightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

Logo $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

**Exemplo 8:** $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ não é invertível, pois não é possível resolver o sistema $AX = I$.

**Teorema 1** *Seja A uma matriz quadrada de ordem n, então A é invertível sse* $car(A) = n$ *(sse A é não singular), isto é, após a eliminação de Gauss, a matriz em escada de linhas não tem nenhum zero na diagonal principal.*

**Propriedades:** Sejam *A* e *B* matrizes não singulares de ordem *n*. Então

- $A^{-1}$ é única.
- $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.
- $\left(A^{T}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{T}$.
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- Se $A$ e $B$ são matrizes quadradas tais que $AB = I$, então também $BA = I$ e, consequentemente, $B = A^{-1}$.
- Se $A$ e $B$ são duas matrizes quadradas, então $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ e consequentemente, se $A$ é invertível, $\det\left(A^{-1}\right) = (\det(A))^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}$.
- Uma matriz quadrada $A$ de ordem $n$ é invertível sse $A$ é não singular sse $car(A) = n$ sse $\det(A) \neq 0$.

**Exercício 8:** Suponha que $B = P^{-1}AP$ sendo $A$, $B$ e $P$ matrizes quadradas de ordem $n$. Prove que $B^m = P^{-1}A^m P, \quad \forall m \in Z$.

**Exercício 9:** Sejam $A$ e $B$ matrizes de ordem $n$ invertíveis. Mostre que $A^{-1} + B^{-1} = A^{-1}(A+B)B^{-1}$.

### 5.4.2: Método da Adjunta para o cálculo da matriz inversa

**Definição 6** *Chama-se* ***adjunta de A****, à matriz que se obtém de* $A^T$ *por substituição de cada elemento, pelo respectivo complemento algébrico. A adjunta de A denota-se por* $Adj(A)$.

**Exercício 10:** Calcule a matriz adjunta das matrizes seguintes

**10.1:** $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ **10.2:** $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

Esta definição permite o cálculo da inversa de uma matriz do seguinte modo:

$$A \longrightarrow A^T \longrightarrow Adj(A) \longrightarrow A^{-1} = \frac{Adj(A)}{\det(A)}$$

**Nota:** Só podemos calcular a inversa de $A$ se $\det(A) \neq 0$.

**Exercício 11:** Calcule inversa de cada uma das matrizes usando a matriz adjunta.

**11.1:** $A=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ **11.2:** $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ -2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$

## 5.5. Resolução de Sistemas de Equações Lineares: Regra de Cramer

Consideremos o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow Ax = b$$

Suponhamos que $\det(A) \neq 0$, então existe a inversa $A^{-1}$ de *A*, logo

$$Ax = b \Leftrightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}b \Leftrightarrow Ix = A^{-1}b \Leftrightarrow x = A^{-1}b \Leftrightarrow x = \frac{1}{\det(A)}Adj(A)b$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} +\det(A_{11}) & -\det(A_{21}) & +\det(A_{31}) \\ -\det(A_{12}) & +\det(A_{22}) & -\det(A_{32}) \\ +\det(A_{13}) & -\det(A_{23}) & +\det(A_{33}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{\det(A_{11})b_1 - \det(A_{21})b_2 + \det(A_{31})b_3}{\det(A)} \\[2ex] x_2 = \dfrac{-\det(A_{12})b_1 + \det(A_{22})b_2 - \det(A_{32})b_3}{\det(A)} \\[2ex] x_3 = \dfrac{\det(A_{13})b_1 - \det(A_{23})b_2 + \det(A_{33})b_3}{\det(A)} \end{cases}$$

onde $A_{ij}$ é a matriz obtida de *A* por eliminação da linha *i* e coluna *j*.

Daqui resulta:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\det(A)} \quad ; \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\det(A)} \quad ; \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\det(A)}.$$

Esta propriedade pode ser generalizada através da seguinte regra:

**Regra de Cramer :** Seja *A* uma matriz quadrada de ordem *n* não singular, então o sistema $Ax = b$ tem uma única solução dada por $x_j = \dfrac{\det(C_j)}{\det(A)}$ onde $C_j$ é a matriz que se obtém de *A* substituindo a coluna *j* pela matriz coluna *b*.

**Exercício 12:** Use a regra de Cramer para resolver os sistemas:

**12.1:** $\begin{cases} 2x + y = 8 \\ -x + 2y = 7 \end{cases}$ **12.2:** $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ -x + 5y - 4z = 0 \\ 3x - y + 2z = 2 \end{cases}$

### 5.6 Exercícios

1. Calcule os seguintes determinantes:

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}; \quad \text{(b)} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}; \quad \text{(c)} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}.$$

2. Calcule os seguintes determinantes, usando a regra de Sarrus:

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}; \quad \text{(b)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{(c)} \begin{vmatrix} 0 & -\sqrt{2} & 5 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 2 \\ 1 & 2 & -\sqrt{2} \end{vmatrix}.$$

3. Calcule o seguinte determinante, usando a eliminação de Gauss $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

4. Calcule os seguinte determinantes,

   ($i$) usando a eliminação de Gauss;

   ($ii$) usando a fórmula de Laplace.

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{(b)} \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{(c)} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix};$$

$$\text{(d)} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{(e)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}.$$

5. Calcule, da forma que achar mais conveniente (pode evidentemente misturar as técnicas aprendidas) os seguinte determinantes:

(a) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$; (b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$;

(c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$; (d) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}$.

6. Sendo $A$ $n \times n$, qual é a relação com $detA$ de :

(a) $det(2A)$ ? (b) $det(-A)$ ? (c) $det(A^2)$ ?

7. Se $A$ é uma matriz invertível de ordem $n$, mostre que $det(A^{-1}) = \dfrac{1}{det(A)}$.

8. Relativamente a cada uma das matrizes seguintes, use determinantes para encontrar os valores dos parâmetros para os quais a matriz é invertível.

(a) $\begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ 1 & \alpha & \beta \\ \beta & 0 & 0 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & \alpha & \alpha^2+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 1 & \alpha & \beta \\ 1 & \alpha & \alpha^2+\beta & \alpha+\alpha\beta \end{bmatrix}$.

9. Duas matrizes $A$ e $B$ dizem-se <u>semelhantes</u> se existir $T$ invertível tal que $A = TBT^{-1}$. Prove que se $A$ e $B$ forem semelhantes então $det\ A = det\ B$.

10. Calcule o determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 6 \end{vmatrix}$.

11. Mostre que a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & -1 \\ 3a-4 & 0 & a+1 \end{bmatrix}$ é não singular, independentemente do valor de $a$.

12. considere a função $f(x) = det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & x \\ a^2 & b^2 & x^2 \end{bmatrix}$, com $a$ e $b$ números reais distintos.

    (a) Mostre que $f(x)$ é uma função quadrática, isto é, é dada por um polinómio de grau 2 em $x$.

    (b) Explique porque é que $f(a) = f(b) = 0$. Conclua que $f(x) = k(x-a)(x-b)$ para uma certa constante $k$. Calcule $k$.

    (c) Para que valores de $x$ é que esta matriz é invertível?

13. A matriz $B$ foi obtida a partir da matriz $A$ (4X4), através das seguintes operações elementares: $2L_1$, $L_2 \leftrightarrow L_3$ e $L_4 = L_4 + 2L_1$.

    (a) Sabendo que $det(A) = 1$, calcule $det(B)$.

    (b) Se $C = \begin{bmatrix} 3 & 10 & 13 & \pi \\ 0 & -1 & \frac{1}{10} & -5 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, calcule $det(BC^{-1}B^T)$.

14. Resolva as seguintes equações:

    (a) $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} = 0$ (b) $\begin{vmatrix} x & -4 & 0 \\ 1 & -x & 1 \\ 2 & x & 5 \end{vmatrix} = 2$ (c) $\begin{vmatrix} x+a & b & c \\ c & x+b & a \\ a & b & x+c \end{vmatrix} = 0$

15. Calcule a matriz adjunta de:

    (a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

16. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$.

   (a) Mostre que $Adj(A) = 3A^T$.

   (b) Verifique que $Adj(B) = B$.

17. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

   (a) Determine a adjunta de cada uma das matrizes.

   (b) Calcule o determinante de cada uma das matrizes e a sua inversa.

18. Considere a equação matricial $AXB^{-1} = (\frac{1}{4}I)^{-1}$, onde $A$ e $B$ representam matrizes invertíveis e $I$ representa a matriz identidade.

   (a) Explicite $X$.

   (b) Sabendo que $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, calcule:

      i. $Adj(A)$.

      ii. $X$.

19. Resolva os seguintes sistemas usando a regra de Cramer:

   (a) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 = 6 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 7 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 3 \\ 3x_1 - 4x_2 - 6x_3 = 5 \end{cases}$

20. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 2 & \alpha & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} \beta \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, com $\alpha, \beta \in IR$.

(a) Discuta o sistema $Ax = b$ em função dos parâmetros $\alpha$ e $\beta$.

(b) Determine os valores do parâmetro $\alpha$ para os quais a matriz é invertível.

(c) Considere $\alpha = -2$ e $\beta = 2$.

i. Determine, usando o método da adjunta, a matriz inversa de $A$.

ii. Calcule, usando as propriedades dos determinantes, $det\left(\frac{(A^{-1})^2 A^T}{2}\right)$.

iii. Resolva o sistema $Ax = b$, usando a regra de Cramer.