Álgebra Linear – AL

Luiza Amalia Pinto Cantão

Depto. de Engenharia Ambiental

Universidade Estadual Paulista – UNESP

luiza@sorocaba.unesp.br

Matrizes Inversas

Matriz Inversa

Definição: Uma matriz A $n \times n$ é chamada **invertível** ou **não-singular** se existir uma matriz B $n \times n$ tal que

$$AB = BA = I_n$$

A matriz B é chamada a **inversa** de A. Se essa matriz B não existir, então A é chamda **singular** ou **não-invertível**.

Observação: Se $AB = BA = I_n$ então A é também uma inversa de B.

Exemplo (1) Sejam $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Verifique que:

$$AB = BA = I_2$$

Neste caso, B é a inversa de A e A é uma matriz invertível.

Matriz Inversa: Teorema

Teorema (1) Uma inversa de uma matriz, se existir, é unica.

Demonstração Sejam B e C inversas de A. Então $BA = AC = I_n$.
Portanto:

$$B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C.$$

Notação Denotamos a inversa de A, se existir, por A^{-1}.

Exemplo (2) Encontre A^{-1} de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Sabemos que $AA^{-1} = I_n$, então:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo (3) Encontre A^{-1} de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, se existir.

Propriedades da Inversa (a)

Teorema (2a) Se A é uma matriz invertível, então A^{-1} é invertível e

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$$

Demonstração A^{-1} é invertível se podemos encontrar uma matriz B tal que

$$A^{-1}B = BA^{-1} = I_n.$$

Como A é invertível,

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I_n.$$

Como $B = A$ é uma inversa de A^{-1}, e como as inversas são únicas, conclímos que

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A.$$

Assim, a inversa da inversa da matriz invertível A é A.

Propriedades da Inversa (b)

Teorema (2b) Se A e B são matrizes invertíveis, então AB é invertível e

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Demonstração Temos

$$(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) = A\left(BB^{-1}\right)A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

e

$$\left(B^{-1}A^{-1}\right)(AB) = B^{-1}\left(A^{-1}A\right)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$$

Portanto, AB é invertível. Como a inversa de uma matriz é única:

$$\left(BA^{-1}\right) = B^{-1}A^{-1}.$$

Assim, a inversa de um produto de duas matrizes invertíveis é o produto de suas inversas na ordem contrária.

Propriedades da Inversa (c)

Teorema (2c) Se A é uma matriz invertível, então

$$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T.$$

Demonstração Temos

$$AA^{-1} = I_n \quad \text{e} \quad A^{-1}A = I_n$$

Transpondo as matrizes, obtemos

$$\left(AA^{-1}\right)^T = I_n^T = I_n \quad \text{e} \quad \left(A^{-1}A\right)^T = I_n^T = I_n.$$

Então

$$\left(A^{-1}\right)^T A^T = I_n \quad \text{e} \quad A^T\left(A^{-1}\right)^T = I_n.$$

Estas equações implicam que

$$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T.$$

Propriedades das Inversas: Continuação

Exemplo (4) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Determine A^{-1}, $(A^{-1})^T$, A^T e $(A^T)^{-1}$.

Teorema (3) Suponha que A e B sejam matriz $n \times n$.

(a) Se $AB = I_n$, então $BA = I_n$.

(b) Se $BA = I_n$, então $AB = I_n$.

Cálculo da matriz inversa por meio de operações elementares

Idéia Se A é uma matriz $n \times n$ dada, procuramos uma matriz B $n \times n$ tal que

$$AB = BA = I_n.$$

Passo 1 Forme a matriz $[A|I_n]$ $n \times 2n$ obtida juntando-se a matriz identidade I_n e a matriz A.

Passo 2 Calcule a forma escalonada reduzida da matriz obtida no **Passo 1** utilizando operações elementares nas linhas. **Lembre-se** de que o que fizer em uma linha de A também deverá fazer na linha correspondente de I_n.

Passo 3 Suponha que o **Passo 2** produziu a matriz $[C|D]$ na forma escalonada reduzida.

1. Se $C = I_n$, então $D = A^{-1}$;
2. Se $C \neq I_n$, então C tem uma linha nula. Neste caso, A é singular e A^{-1} não existe.

Cálculo da matriz inversa por meio de operações elementares: Exemplo

Exemplo (5) Encontre as inversas das matrizes abaixo, se existir.

(a) $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \end{bmatrix}$.

Passo 1

(a) $[A_1|I_3] = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ – Lousa!

(b) $[A_2|I_3] = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ – Lousa!

Matriz Adjunta

Definição Seja A uma matriz $n \times n$. Definimos a matriz **adjunta (clássica)** de A, denotada por $adj(A)$, como a transposta da matriz formada pelos cofatores de A, ou seja,

$$adj(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

onde $A_{ij} = (-1)^{i+j}\, det\,(A_{ij})$ é o cofator do elemento a_{ij}, para $i, j = 1 : n$.

Exemplo (6) Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$. Calcule $adj(A)$. – Lousa.

Matriz Adjunta: Teorema

Teorema (4) Se A é uma matriz $n \times n$, então

$$A(adj\, A) = (adj\, A)A = det(A)I_n.$$

Demonstração Temos

$$A(adj\, A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{j1} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{j2} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{jn} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

O i, j-ésimo elemento na matriz produto $A(adj\, A)$ é

$$\begin{array}{lcll} a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} & = & det(A) & \text{se } i = j \\ a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} & = & 0 & \text{se } i \neq j \end{array}$$

Matriz Adjunta: Demonstração – continuação

Demonstração – cont. Isto significa que

$$A(adj\,A) = \begin{bmatrix} det(A) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & det(A) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & det(A) \end{bmatrix} = det(A)I_n.$$

O i, j-ésimo elemento na matriz produto $(adj\,A)A$ é

$$\begin{array}{lcll} a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} & = & det(A) & \text{se } i = j \\ a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} & = & 0 & \text{se } i \neq j \end{array}$$

Assim, $(adj\,A)A = det(A)I_n$.

Exemplo (7) Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$. Verifique $A\,adj(A) = adj(A)\,A = det(A)\,I_n$. – Lousa!

Matriz Adjunta: Corolário

Corolário Se A é uma matriz $n \times n$ e $det(A) \neq 0$, então:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}(adj\ A) = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{det(A)} & \frac{A_{12}}{det(A)} & \cdots & \frac{A_{1n}}{det(A)} \\ \frac{A_{12}}{det(A)} & \frac{A_{22}}{det(A)} & \cdots & \frac{A_{n2}}{det(A)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{A_{1n}}{det(A)} & \frac{A_{2n}}{det(A)} & \cdots & \frac{A_{nn}}{det(A)} \end{bmatrix}$$

Demonstração Do teorema anterior, temos que $A(adj\,A) = (adj\,A)A = det(A)I_n$. Se $det(A) \neq 0$, então:

$$A\frac{1}{det(A)}(adj\ A) = \frac{1}{det(A)}\left[A(adj\ A)\right] = \frac{1}{det(A)}\left(det(A)I_n\right) = I_n.$$

Portanto $A^{-1} = \dfrac{1}{det(A)}(adj\ A)$.

Matriz Adjunta e Inversa: Exemplo e mais Teorema!

Exemplo (8) Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$. Calcule a sua inversa usando

$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}(adj\ A)$. – Lousa !

Teorema Uma matriz A é invertível se e somente se $det(A) \neq 0$.

Demonstração Como A é invertível, $AA^{-1} = I_n$ então:

$$det(AA^{-1}) = det(A)det(A^{-1}) = det(I_n) = I_n,$$

implica que $det(A) \neq 0$.

Corolário Para uma matriz A $n \times n$, o sistema linear homogêneo $Ax = \mathbf{0}$ tem apenas uma solução trivial se e somente se $det(A) \neq 0$.

Regra de Cramer

Sistema linear com n equações e n incógnitas, na forma matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{B}$$

Suponha que $det(A) \neq 0$ e assim, A seja inversível. Então

$$\begin{aligned} AX &= B \\ A^{-1}(AX) &= A^{-1}B \\ (A^{-1}A)X &= A^{-1}B \\ I_n X &= A^{-1}B \\ X &= A^{-1}B \end{aligned}$$

Regra de Cramer (2)

Matricialmente Lembrando que $A^{-1} = \dfrac{1}{det(A)}(adj\ A)$, temos que:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\frac{1}{det(A)} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}}_{A^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{B}$$

Então:

$$x_1 = \frac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \cdots + A_{nn}b_n}{det(A)}.$$

Note que:

$$x_1 = \frac{1}{det(A)} \cdot det \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \frac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \cdots + A_{nn}b_n}{det(A)}.$$

Analogamente

$$x_i = \frac{1}{det(A)} \cdot det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \frac{A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \dots + A_{ni}b_n}{det(A)}$$

$$= \frac{det(A_i)}{det(A)}$$

Passo 1 Calcule $det(A)$. Se $det(A) = 0$, a regra de Cramer não é aplicável. Caso contrário, vá ao *Passo 2*.

Passo 2 Se $det(A) \neq 0$, para cada i,

$$x_i = \frac{det(A_i)}{det(A)},$$

onde A_i é a matriz obtida de A substituindo-se a i-ésima coluna de A pelo vetor B.

Regra de Cramer (4): Exemplo

Exemplo (9) Resolva os sistemas lineares abaixo usando a Regra de Cramer.

(a) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 4 \\ -2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & -3 \end{array}\right.$

(b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & + & 7x_3 & = & 1 \\ x_1 & & & + & 3x_3 & = & 5 \\ & & 2x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array}\right.$