Matrizes, Determinantes e Sistemas de Equações Lineares

Alfredo Steinbruch

Professor de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (de 1953 a 1980) e da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (de 1969 a 1978)

McGraw-Hill
São Paulo
Rua Tabapuã, 1.105, Itaim-Bibi
CEP 04533
(011) 881-8604 e (011) 881-8528

Rio de Janeiro • Lisboa • Porto • Bogotá • Buenos Aires • Guatemala • Madrid • México • New York • Panamá • San Juan • Santiago

Auckland • Hamburg • Kuala Lumpur • London • Milan • Montreal • New Delhi • Paris • Singapore • Sydney • Tokyo • Toronto

SUMÁRIO

PREFÁCIO

Este livro foi escrito com um objetivo: proporcionar a estudantes os conhecimentos mínimos de matrizes, determinantes e sistemas de equações lineares, conhecimentos que são indispensáveis para estudar e compreender os conteúdos de várias disciplinas dos Cursos de Engenharia, Administração, Economia, Matemática, Física, Computação etc.

Para cumprir com a sua finalidade, o livro "MATRIZES, DETERMINANTES e SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES" tem três características principais:

1) unidade de tratamento na solução de problemas diferentes. Assim, sem descuidar de casos particulares, o cálculo de determinantes de qualquer ordem, a inversão de matrizes e a solução de *m* equações lineares com *n* variáveis, quaisquer que sejam *m* e *n*, são feitos utilizando processos análogos;
2) linguagem simples, didática (sacrificando, muitas vezes, o rigorismo em benefício da clareza) e acessível a estudantes de qualquer Curso de nível superior;
3) ênfase na parte prática, contendo 168 problemas resolvidos e propostos, estes com respostas ou roteiros para a solução.

O autor ficará compensado do seu trabalho se este livro contribuir para facilitar a estudantes a compreensão das disciplinas do seu Curso que tenham matrizes, determinantes e sistemas de equações lineares como pré-requisito.

Críticas, sugestões para a melhoria deste livro, assim como informações sobre eventuais erros, serão bem recebidas no endereço do autor*.

Alfredo Steinbruch

* Rua Vieira de Castro, 275/601 – Fone (0512) 31-3288
90.040 – Porto Alegre – RS - BR

CAPÍTULO 1
MATRIZES

1.1 — MATRIZ DE ORDEM m POR n

Chama-se *matriz de ordem* m *por* n a um quadro de m × n elementos (em geral, números reais) dispostos em m linhas e n colunas.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

● A matriz na qual $m \neq n$ é *retangular*, se representa por $A_{(m,n)}$ e se diz de *ordem* m por n ou m x n.

● A matriz na qual $m = n$ é *quadrada*, se representa por A_n(ou $A_{(n,\ n)}$), e se diz de *ordem* n.

● Cada elemento de uma matriz A está afetado de dois índices: a_{ij}. O primeiro índice indica a linha e o segundo a coluna a que o elemento pertence.

● A matriz A pode ser representada abreviadamente por $A = [a_{ij}]$, i variando de 1 a m ($i = 1, 2, ..., m$) e j variando de 1 a n ($j = 1, 2, ..., n$). Assim, se a matriz tem 2 linhas(m = 2) e 3 colunas (n = 3), ao fixar para i o valor 1 e fazendo j variar de 1 a 3, obtém-se:

$$a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}$$

Fixando, a seguir, para i o valor 2 e fazendo j variar de 1 a 3, obtém-se:

$$a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23}$$

isto é:

$$A_{(2,3)} = A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

• A matriz de ordem m por 1 é uma *matriz-coluna* ou *vetor-coluna* e a matriz de ordem 1 por n é uma *matriz-linha* ou *vetor-linha*. Exemplos:

$$A_{(3,1)} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ -4 \end{bmatrix} \quad ; \quad A_{(1,4)} = [2 \quad 6 \quad 8 \quad -7]$$

1.2 — DIAGONAL PRINCIPAL E DIAGONAL SECUNDÁRIA

• Numa matriz quadrada $A = [a_{ij}]$, de ordem n, os elementos a_{ij}, em que $i = j$, constituem a *diagonal principal*. Assim, a diagonal formada pelos elementos $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ é a diagonal principal.

• Numa matriz quadrada $A = [a_{ij}]$, de ordem n, os elementos a_{ij}, em que $i + j = n + 1$, constituem a *diagonal secundária*. Assim, a diagonal formada pelos elementos $a_{1n}, a_{2\ n-1}, a_{3\ n-2}, ...\ a_{n1}$ $(1 + n = 2 + n\text{-}1 = 3 + n\text{-}2 = ... = n + 1)$ é a diagonal secundária.

1.3 — MATRIZ DIAGONAL E MATRIZ UNIDADE

• A matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ que tem os elementos $a_{ij} = 0$ quando $i \neq j$ é uma *matriz diagonal*:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

•A matriz diagonal que tem os elementos $a_{ij} = 1$ para $i = j$ é uma *matriz unidade*. Indica-se a matriz unidade por I_n ou simplesmente por I:

$$I_2 = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \end{bmatrix} \; ; \qquad I_3 = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.4 — MATRIZ ZERO

Uma *matriz zero* é a matriz cujos elementos são todos nulos. Indica-se a matriz zero por 0.

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \; ; \qquad 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.5 — MATRIZ OPOSTA DE UMA MATRIZ

Matriz oposta de uma matriz $A = [a_{ij}]$ é a matriz $B = [b_{ij}]$ tal que $b_{ij} = -a_{ij}$. Indica-se a matriz oposta de A por -A. Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \; ; \qquad -A = \begin{bmatrix} -7 & -4 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$$

1.6 — MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR E MATRIZ TRIANGULAR INFERIOR

A matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ que tem os elementos $a_{ij} = 0$ para $i > j$ é uma *matriz triangular superior* e a matriz quadrada $B = [b_{ij}]$ que tem os elementos $b_{ij} = 0$ para $i < j$ é uma *matriz triangular inferior*. Exemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 0 \\ -3 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

1.7 — IGUALDADE DE MATRIZES

Duas matrizes $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$, de mesma ordem, são iguais se, e somente se, $a_{ij} = b_{ij}$. Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

1.8 — ADIÇÃO DE MATRIZES

A soma de duas matrizes $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$, de mesma ordem, é uma matriz $C = [c_{ij}]$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Indica-se a soma de duas matrizes A e B por A + B. Exemplos:

1) $$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{bmatrix}$$

2) $$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 6 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 9 \end{bmatrix}$$

1.8.1 — Diferença de duas matrizes

A diferença A-B de duas matrizes, de mesma ordem, é definida por A + (–B). Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 7 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & 3 \\ -7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 9 \\ -9 & 5 \end{bmatrix}$$

1.8.2 — Propriedades da adição de matrizes

Para as matrizes A, B e C, de mesma ordem, tem-se:

I) $A + (B + C) = (A + B) + C$
II) $A + B = B + A$
III) $A + 0 = 0 + A$
IV) $A + (-A) = -A + A = 0$

1.9 — PRODUTO DE UMA MATRIZ POR UM ESCALAR

Se λ é um escalar, o produto de uma matriz $A = [a_{ij}]$ por esse escalar é uma matriz $B = [b_{ij}]$ tal que $b_{ij} = \lambda a_{ij}$. Indica-se o produto da matriz A por λ por λA. Exemplo:

$$5 \times \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \times 4 & 5 \times (-2) & 5 \times 1 \\ 5 \times 3 & 5 \times (-5) & 5 \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & -10 & 5 \\ 15 & -25 & 0 \end{bmatrix}$$

1.9.1 — Propriedades da multiplicação de uma matriz por um escalar

Para λ e μ escalares quaisquer e A e B matrizes de mesma ordem, tem-se:

I) $(\lambda\mu) A = \lambda(\mu A)$
II) $(\lambda+\mu) A = \lambda A + \mu A$
III) $(\lambda - \mu) A = \lambda A - \mu A$

IV) $\lambda (A + B) = \lambda A + \lambda B$
V) $1A = A$

1.10 — PRODUTO DE UMA MATRIZ POR OUTRA

Sejam as matrizes $A_{(1,4)}$ e $B_{(4,1)}$

$$A = [4 \quad 3 \quad 2 \quad 5] \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

O produto AB é, por definição, uma matriz $C_{(1,1)}$ tal que:

$$c_{11} = 4 \times 6 + 3 \times 4 + 2 \times 5 + 5 \times 3 = 24 + 12 + 10 + 15 = 61$$

isto é, c_{11} é a soma dos produtos, na ordem em que estão dispostos, dos elementos da matriz-linha A pelos elementos da matriz-coluna B. A matriz $C_{(1,1)} = [61]$ é o produto da matriz $A_{(1,4)}$ pela matriz $B_{(4,2)}$ O dispositivo abaixo facilita, visualmente, entender a definição do produto da matriz $A_{(1,4)}$ pela matriz $B_{(4,1)}$:

$$\begin{array}{lcccccl}
 & 4 & \times & 6 & = & 24 & \cdots [6] \\
 & 3 & \times & 4 & = & 12 & \cdots [4] \\
 & 2 & \times & 5 & = & 10 & \cdots [5] \\
 & 5 & \times & 3 & = & \underline{15} & \cdots [3] \\
 & & & & & 61 & \\
[4 \quad 3 \quad 2 \quad 5] & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & [61]
\end{array}$$

A condição para multiplicar a matriz $A_{(1,4)}$ pela matriz $B_{(4,1)}$, de acordo com a definição, é que o número de linhas de B (no caso, 4) seja igual ao número de colunas de A (no caso, também 4). Por outro lado, a ordem da matriz-produto C é dada pelo número de linhas de A (no caso, 1) e pelo número de colunas de B (no caso, também 1), isto é,

$C_{(1,1)}$. Se se escrever em seqüência a ordem da matriz A e a ordem da matriz B:

$$(1,4) \qquad (4,1)$$

0 2º e 3º números, sendo iguais, indicam que a multiplicação é possível, e o 1º e 4º números indicam a ordem da matriz-produto C:

$$A_{(1,4)} \times B_{(4,1)} = C_{(1,1)}$$

Suponha-se que se deseja multiplicar uma matriz $A_{(1,4)}$ por uma matriz $B_{(4,2)}$:

$$A_{(1,4)} \times B_{(4,2)}$$

Tendo em vista que o 2º e o 3º número são iguais, a multiplicação é possível, e a ordem da matriz-produto C será dada pelo 1º e 4º números:

$$A_{(1,4)} \times B_{(4,2)} = C_{(1,2)}$$

Sejam as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Para efetuar o produto da matriz-linha $A_{(1,4)}$ (daqui por diante chamada simplesmente linha) pela matriz $B_{(4,2)}$, considera-se cada coluna de B como uma matriz-coluna (daqui por diante chamada simplesmente coluna) e efetua-se o produto da linha A pela 1ª coluna de B, obtendo-se o 1º elemento de C; a seguir, efetua-se o produto da linha A pela 2ª coluna de B, obtendo-se o 2º elemento de C. O dispositivo a seguir facilita o entendimento do processo:

$$\begin{array}{rcl}
4 \times 6 = 24 & \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} & 4 \times 1 = 4 \\
3 \times 4 = 12 & & 3 \times 2 = 6 \\
2 \times 5 = 10 & & 2 \times 7 = 14 \\
5 \times 3 = \underline{15} & & 5 \times 4 = \underline{20} \\
61 & & 44
\end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \cdots\cdots \begin{bmatrix} 61 & 44 \end{bmatrix}$$

A matriz $C_{(1,2)} = [61\ 44]$ é o produto das matrizes $A_{(1,4)}$ e $B_{(4,2)}$.

Suponha-se, agora que se deseja multiplicar uma matriz $A_{(2,3)}$ por uma matriz $B_{(3,4)}$:

$$A_{(2,3)} \quad \times \quad B_{(3,4)}$$

Tendo em vista que A é de ordem (2,3) e que B é de ordem (3,4), o produto existe e é uma matriz $C_{(2,4)}$:

$$A_{(2,3)} \quad \times \quad B_{(3,4)} \quad = \quad C_{(2,4)}$$

Sejam as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

Para efetuar o produto das matrizes A e B, considera-se cada linha da matriz A como uma matriz-linha (chamada linha) e cada coluna de B como uma matriz-coluna (chamada coluna). A seguir, multiplica-se a 1ª linha de A sucessivamente pela 1ª, pela 2ª, pela 3ª e pela 4ª colunas de B, obtendo a primeira linha da matriz C. Em continuação, multiplica-se a 2ª linha de A sucessivamente pela 1ª linha, pela 2ª, pela 3ª e pela 4ª colunas de B, obtendo-se a 2ª linha da matriz-produto C:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 7 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 26 & 60 & 40 \\ 23 & 25 & 34 & 20 \end{bmatrix} = C_{(2,4)}$$

Conforme foi explicado antes, o elemento $c_{24} = 20$, por exemplo, foi obtido multiplicando a 2ª linha de A pela 4ª coluna de B:

$$c_{24} = 2(1) + 5(0) + 3(6) = 2 + 0 + 18 = 20$$

e os demais elementos de C, de modo análogo.

De acordo com o que foi visto até agora, pode-se dizer, por exemplo, que:

$A_{(3,5)} \times B_{(5,6)} = C_{(3,6)}$
$A_{(2,7)} \times B_{(7,4)} = C_{(2,4)}$
$A_{(5,4)} \times B_{(4,8)} = C_{(5,8)}$, etc.

1.10.1 — Cálculo de um elemento qualquer de uma matriz-produto

Sejam as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

Tendo em vista que A é de ordem (2,3) e que B é de ordem (3,3), o produto é uma matriz C, de ordem (2,3):

$$A_{(2,3)} \times B_{(3,3)} = C_{(2,3)} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}$$

O elemento c_{23}, por exemplo, obtém-se multiplicando a 2ª linha de A pela 3ª coluna de B:

$$c_{23} = a_{21}\, b_{13} + a_{22}\, b_{23} + a_{23}\, b_{33}$$

Assinalando o 2º índice de "a" e o 1º índice de "b", vê-se que, em cada parcela, eles são iguais:

$$c_{23} = a_{2①}b_{①3} + a_{2②}b_{②3} + a_{2③}b_{③3}$$

Essa expressão pode ser escrita do seguinte modo:

$$c_{23} = \sum_{k=1}^{k=3} a_{2k}\, b_{k3}$$

isto é, c_{23} é o somatório dos produtos $a_{2k}\, b_{k3}$, k variando de 1 a 3. Um elemento qualquer c_{ij} da matriz C será calculado do seguinte modo:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{k=3} a_{ik}\, b_{kj}$$

Essa expressão é que, na verdade, define o produto $C_{(2,3)} = A_{(2,3)} \times B_{(3,3)}$. Generalizando, se $A_{(m,n)} = [a_{ij}]$ e se $B_{(n,p)} = [b_{ij}]$, o produto AB é uma matriz $C_{(m,p)}$ tal que:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}\, b_{kj}$$

1.10.2 — Não comutatividade da multiplicação de duas matrizes

Em geral, a existência do produto AB não implica a existência do produto BA. Exemplo:

$$A_{(3,5)} \times B_{(5,6)} = C_{(3,6)}$$

Entretanto, o produto $B_{(5,6)} \times A_{(3,5)}$ não existe porque $6 \neq 3$, isto é, o número de colunas da 1ª matriz não coincide com o número de linhas da 2ª matriz.

Mesmo quando as multiplicações $A \times B$ e $B \times A$ são possíveis, os dois produtos são, em geral, diferentes:

$$A_{(4,3)} \times B_{(3,4)} = C_{(4,4)}$$
$$B_{(3,4)} \times A_{(4,3)} = D_{(3,3)}$$

Ainda que A e B fossem matrizes quadradas de ordem n, os produtos AB e BA seriam também matrizes quadradas de ordem n e, ainda assim, difeririam. Sejam por exemplo as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 23 \\ 39 & 53 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & 38 \\ 30 & 44 \end{bmatrix}$$

Os produtos AB e BA são diferentes, o que significa que a multiplicação de duas matrizes não é comutativa. Existem, entretanto, matrizes A e B tais que $AB = BA$, porém essa não é a regra. Há dois casos que interessam particularmente e um deles é o seguinte: $AI = IA = A$. Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$$

O outro caso será visto no item 3.1, Capítulo 3.

1.10.3 — Propriedades da multiplicação de uma matriz por outra

Admitindo que as ordens das matrizes possibilitem as operações, tem-se:

I) $(AB)\,C = A\,(BC)$
II) $(A + B)\,C = AC + BC$
III) $C\,(A + B) = CA + CB$
IV) $(\alpha A)\,B = A\,(\alpha B) = \alpha\,(AB),\ \alpha \in \mathbb{R}$
V) $AB \neq BA$, em geral
VI) Se $AB = 0$, não é necessário que $A = 0$ ou $B = 0$. Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Mas, se $AB = 0$, qualquer que seja B, então $A = 0$; do mesmo modo, se $AB = 0$, qualquer que seja A, então $B = 0$.

1.11 — MATRIZ TRANSPOSTA

A matriz transposta da matriz A, de ordem m por n, é a matriz A^t, de ordem n por m, que se obtém escrevendo ordenadamente as linhas de A como colunas. Exemplos:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \text{ e } A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \text{ e } B^t = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$$

1.11.1 — Propriedades da matriz transposta

Para λ um escalar qualquer e para A e B matrizes de mesma ordem, tem-se:

I) $(A + BB)^t = A^t + B^t$

II) $(\lambda A)^t = \lambda A^t$

III) $(A^t)^t = A$

IV) $(-A)^t = -A^t$

V) $(AB)^t = B^t A^t$

As propriedades de I a IV são imediatas. A propriedade V será verificada por meio do seguinte exemplo:

a)

$$A_{(3,2)} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } B_{(2,2)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 14 \\ 6 & 8 \\ 14 & 20 \end{bmatrix} \therefore \ (AB)^t = \begin{bmatrix} 10 & 6 & 14 \\ 14 & 8 & 20 \end{bmatrix} \quad (1)$$

b)

$$A^t_{(2,3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } B^t_{(2,2)} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B^t A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 6 & 14 \\ 14 & 8 & 20 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Comparando (1) e (2), verifica-se que $(AB)^t = B^t A^t$.

1.12 — MATRIZ SIMÉTRICA

Uma matriz quadrada $S = [a_{ij}]$ é *simétrica* se $S^t = S$. Exemplo:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 5 & 3 & 8 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}; \quad S^t = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 5 & 3 & 8 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix} = S$$

- O produto de uma matriz quadrada A pela sua transposta A^t é uma matriz simétrica. Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \\ -6 & 1 & 7 \end{bmatrix}, \quad A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & -5 & 7 \end{bmatrix}, \quad AA^t = \begin{bmatrix} 26 & -1 & 19 \\ -1 & -12 & -44 \\ 19 & -44 & 86 \end{bmatrix} = S = S^t$$

- A soma de uma matriz quadrada A com a sua transposta A^t é uma matriz simétrica. Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ -3 & -1 & 9 \\ 5 & 7 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^t = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 5 \\ 4 & -1 & 7 \\ 2 & 9 & 1 \end{bmatrix}, \quad A + A^t = \begin{bmatrix} 12 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & 16 \\ 7 & 16 & 2 \end{bmatrix} = S = S^t$$

1.12.1 — Propriedade da matriz simétrica

Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ é simétrica se, e somente se, os elementos dispostos simetricamente em relação à diagonal principal são iguais.

1.13 — MATRIZ ANTI-SIMÉTRICA

Uma matriz quadrada A é *anti-simétrica* se $A^t = -A$. Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & -6 \\ -4 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^t = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -4 \\ 3 & 0 & 6 \\ 4 & -6 & 0 \end{bmatrix} = -A$$

- A diferença $B = A - A^t$ entre uma matriz quadrada A e a sua transposta A^t é uma matriz anti-simétrica. Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 8 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 9 \end{bmatrix}, \quad A^t = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 7 & 1 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = A\text{-}A^t = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 2 \\ 6 & 0 & -5 \\ -2 & 5 & 0 \end{bmatrix}, \quad B^t = \begin{bmatrix} 0 & 6 & -2 \\ -6 & 0 & 5 \\ 2 & -5 & 0 \end{bmatrix} = -B$$

1.13.1 — Propriedade da matriz anti-simétrica

Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ é anti-simétrica se, e somente se, $a_{ij} = -a_{ji}$, isto é, se os elementos dispostos simetricamente em relação à diagonal principal são opostos e os elementos da diagonal principal são nulos.

1.14 — PROBLEMAS RESOLVIDOS

1) Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} y+4 & 2 \\ 9 & x^2+4 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 12 & 2 \\ 9 & 53 \end{bmatrix},$$

calcular y e x de modo que A seja igual a B, isto é:

$$\begin{bmatrix} y+4 & 2 \\ 9 & x^2+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 2 \\ 9 & 53 \end{bmatrix},$$

Solução:

Pela definição de igualdade de matrizes, deve-se ter:

$y + 4 = 12 \therefore y = 8$

$x^2 + 4 = 53$

$x^2 = 49$

$x = \pm 7$

Os problemas de 2 a 4 se referem às matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ -5 & 9 & -6 \\ 7 & 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 7 & 1 \\ -4 & 2 & 5 \\ 0 & 9 & 4 \end{bmatrix} \quad e \quad C = \begin{bmatrix} 7 & -8 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \\ 9 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

2) Calcular A + B

Solução:

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ -5 & 9 & -6 \\ 7 & 4 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 7 & 1 \\ -4 & 2 & 5 \\ 0 & 9 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 10 & 9 \\ -9 & 11 & -1 \\ 7 & 13 & 3 \end{bmatrix}$$

3) Calcular C – A

Solução:

$$C - A = \begin{bmatrix} 7 & -8 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \\ 9 & -5 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ -5 & 9 & -6 \\ 7 & 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -11 & -5 \\ 9 & -12 & 8 \\ 2 & -9 & 2 \end{bmatrix}$$

4) Calcular 3A – 2B + 4C

Solução:

Fazendo D = 3A – 2B + 4C, vem:

$$D = 3\begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ -5 & 9 & -6 \\ 7 & 4 & -1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -3 & 7 & 1 \\ -4 & 2 & 5 \\ 0 & 9 & 4 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 7 & -8 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \\ 9 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 24 \\ -15 & 27 & -18 \\ 21 & 12 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -14 & -2 \\ 8 & -4 & -10 \\ 0 & -18 & -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 28 & -32 & 12 \\ 16 & -12 & 8 \\ 36 & -20 & 4 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 40 & -37 & 34 \\ 9 & 11 & -20 \\ 57 & -26 & -7 \end{bmatrix}$$

5) Calcular (A + B) C

Solução:

(A + B) foi calculado no problema 2. Logo:

$$(A + B)\,C = \begin{bmatrix} -1 & 10 & 9 \\ -9 & 11 & -1 \\ 7 & 13 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \\ 9 & -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 114 & -67 & 26 \\ -28 & 45 & -6 \\ 128 & -110 & 50 \end{bmatrix}$$

Este problema poderia ser resolvido calculando AB e AC e, após, determinando Ab + AC. (Exercício a cargo do leitor).

6) Calcular o produto das matrizes:

$$A_{(2,4)} = \begin{bmatrix} -8 & 4 & -6 & 1 \\ 2 & -5 & 7 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } B_{(4,2)} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -2 \\ 1 & -5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

Solução:

$$A_{(2,4)} \times B_{(4,2)} = C_{(2,2)} = \begin{bmatrix} -8 & 4 & -6 & 1 \\ 2 & -5 & 7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -2 \\ 1 & -5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

7) Calcular o produto das matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & -4 \\ 4 & 7 & -2 \end{bmatrix} \text{ e } X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Solução:

$$A_{(3,3)} \times X_{(3,1)} = C_{(3,1)} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & -4 \\ 4 & 7 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + 3y + 4z \\ 3x + 5y - 4z \\ 4x + 7y - 2z \end{bmatrix}$$

É interessante assinalar que a matriz C tem 3 linhas e uma só coluna:

- o elemento da 1ª linha é: $2x + 3y + 4z$;
- o elemento da 2ª linha é: $3x + 5y - 4z$;
- o elemento da 3ª linha é: $4x + 7y - 2z$.

O fato de que a matriz C tem 3 linhas e uma só coluna permite escrever, sob a forma matricial, o seguinte sistema de equações, por exemplo:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = -4 \\ 3x + 5y - 4z = 25 \\ 4x + 7y - 2z = 24 \end{cases}$$

De fato, fazendo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & -4 \\ 4 & 7 & -2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ e } \quad B = \begin{bmatrix} -4 \\ 25 \\ 24 \end{bmatrix},$$

pode-se escrever que AX = B, ou:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & -4 \\ 4 & 7 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 25 \\ 24 \end{bmatrix}$$

ou, ainda:

$$\begin{bmatrix} 2x + 3y + 4z \\ 3x + 5y - 4z \\ 4x + 7y - 2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 25 \\ 24 \end{bmatrix}$$

e, de acordo com a definição de igualdade de matrizes:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = -4 \\ 3x + 5y - 4z = 25 \\ 4x + 7y - 2z = 24 \end{cases}$$

Os problemas de 8 a 12 se referem às matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 3 & -7 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 6 & -3 \\ -3 & 5 & 8 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

8) Determinar A^t

Solução:

$$A^t = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -5 & -7 & 4 \end{bmatrix}$$

9) Determinar B^t

Solução:

$$B^t = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 6 & 5 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$$

10) Calcular $(AB)^t$

Solução:

Em 1.11.1, propriedade VI, viu-se que:

$$(AB)^t = B^t A^t$$

mas B^t e A^t foram determinados nos problemas 9 e 8, respectivamente. Logo:

$$(AB)^t = B^t_{(3,2)}\, A^t_{(2,3)} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 6 & 5 \\ -3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -5 & -7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 9 & -4 \\ -1 & -17 & 8 \\ -52 & -65 & 38 \end{bmatrix}$$

Este problema poderia ser resolvido calculando, em primeiro lugar, $AB = E$ e, após, determinando E^t:

$$A_{(3,2)} \times B_{(2,3)} = E_{(3,3)} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 3 & -7 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 6 & -3 \\ -3 & 5 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -52 \\ 9 & -17 & -65 \\ -4 & 8 & 38 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^t = E^t = \begin{bmatrix} -1 & 9 & -4 \\ -1 & -17 & 8 \\ -52 & -65 & 38 \end{bmatrix}$$

11) Calcular $B^t C$

Solução:

A matriz B^t foi determinada no problema 9. Logo:

$$B^t_{(3,2)} \times C_{(2,2)} = F_{(3,2)} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 6 & 5 \\ -3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19 & 6 \\ 29 & -8 \\ -4 & 25 \end{bmatrix}$$

12) Calcular $(AB)^t D$

Solução:

$(AB)^t$ foi calculado no problema 10. Logo:

$$(AB)^t D = \begin{bmatrix} -1 & 9 & -4 \\ -1 & -17 & 8 \\ -52 & -65 & 38 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 13 \\ 7 & 13 & -34 \\ -14 & 298 & -130 \end{bmatrix}$$

13) Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -25 \\ 7 & -10 \end{bmatrix},$$

calcular $A \times A = A^2$

Solução:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 10 & -25 \\ 4 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & -25 \\ 4 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz A^2 é chamada potência 2 da matriz A. Neste problema, como $A^2 = A$, A é chamada de *matriz nihilpotente*.

14) Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -4 & 4 & -3 \end{bmatrix},$$

calcular A^2

Solução:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -4 & 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -4 & 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -4 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Tendo em vista que $A^2 = A$, A é chamada de *matriz idempotente*

1.15 — PROBLEMAS PROPOSTOS

Nos problemas 1 a 3, calcular os valores de m e n para que as matrizes A e B sejam iguais.

1)

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 15n \\ 12 + m & 3 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 8 & 75 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

2)

$$A = \begin{bmatrix} m^2 - 40 & n^2 + 4 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 41 & 13 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

3)

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 4 & x^2 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 4 & 10x - 25 \end{bmatrix}$$

Os problemas 4 a 12 se referem às matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 4 & -1 & -6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & -7 & -9 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 0 & 9 & 8 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

4) Calcular $A + B$
5) Calcular $B + C$
6) Calcular $A + C$
7) Calcular $A - B$
8) Calcular $A - C$
9) Calcular $B - C$
10) Calcular $X = 4A - 3B + 5C$
11) Calcular $X = 2B - 3A - 6C$
12) Calcular $X = 4C + 2A - 6B$

Nos problemas 13 a 15, efetuar a multiplicação das matrizes A e X.

13)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

14)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -5 & 7 \\ 3 & 9 & -8 \end{bmatrix} \text{ e } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

15)

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & -6 \\ -2 & 4 & 5 & -7 \\ 9 & -9 & -8 & 6 \end{bmatrix} \text{ e } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Os problemas 16 a 21 se referem às matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ 7 & -4 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & -7 \\ 6 & 2 & -8 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 & -8 \\ -3 & -1 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & 9 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

16) Calcular AB
17) Calcular (AB)D
18) Calcular A(BD)
19) Calcular BA
20) Calcular (BA)C
21) Calcular B(AC)

22) Determinar a matriz A^t transposta da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & -5 \\ 1 & -7 & 0 & -2 \\ 8 & -9 & 6 & -4 \end{bmatrix}$$

Os problemas 23 a 27 se referem às matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 6 \\ -8 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & 7 \\ 1 & -1 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 4 \\ 7 & 8 & 5 & 9 \\ 0 & 6 & 3 & -8 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -8 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 & 2 \\ -8 & 1 & -2 & 4 \\ -3 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

23) Calcular $(AB)^t$
24) Calcular $(AB)D^t$
25) Calcular $A(BD^t)$
26) Calcular $B^t C$
27) Calcular $2\,(A^tB^t) + 3\,C^t$

Nos problemas 28 a 31, dada uma matriz A em cada um deles, calcular A^2 e classificar A.

28)
$$A = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$$

29)
$$A = \begin{bmatrix} 12 & 16 \\ -9 & -12 \end{bmatrix}$$

30)
$$A = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

31)
$$A = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$$

1.15.1 — Respostas ou roteiros para os problemas propostos

1) $n = 5$ e $m = -6$
2) $m = \pm 9$ e $n = \pm 3$
3) $x = 5$

4 a 6) Roteiro: Esses problemas são resolvidos de modo análogo ao do problema 2 do item 1.14.

7 a 9) Roteiro: Esses problemas são resolvidos de modo análogo ao do problema 3 do item 1.14.

10 a 12) Roteiro: Esses problemas são resolvidos de modo análogo ao do problema 4 do item 1.14.

3 a 15) Roteiro: Esses problemas são resolvidos de modo análogo ao do problema 7 do item 1.14.

16) Roteiro: Esse problema é resolvido de modo análogo ao do problema 6 do item 1.14.

17) Roteiro: 1º) Calcular $E_{(4,4)} = A_{(4,2)} \times B_{(2,4)}$ (já calculado no problema 16)
2º) Calcular $F_{(4,4)} = E_{(4,4)} \times D_{(4,4)}$

18) Roteiro: 1º) Calcular $G_{(2,4)} = B_{(2,4)} \times D_{(4,4)}$
2º) Calcular $H_{(4,4)} = A_{(4,2)} \times G_{(2,4)}$

19) Roteiro: Esse problema é resolvido de modo análogo ao do problema 6 do item 1.14.

20) Roteiro: 1º) Calcular $J_{(2,2)} = B_{(2,4)} \times A_{(4,2)}$ (já calculado no problema 19)
2º) Calcular $L_{(2,2)} = J_{(2,2)} \times C_{(2,2)}$

21) Roteiro: 1º) Calcular $M_{(4,2)} = A_{(4,2)} \times C_{(2,2)}$
2º) Calcular $N_{(2,2)} = B_{(2,4)} \times M_{(4,2)}$

22) Roteiro: Esse problema é resolvido de modo análogo ao do problema 8 do item 1.14.

23) Roteiro: 1º) Calcular $E_{(4,4)} = A_{(4,3)} \times B_{(3,4)}$
2º) Determinar $E^t = (AB)^t$

ou:
1º) Determinar $A^t_{(3,4)}$
2º) Determinar $B^t_{(4,3)}$
3º) Calcular $B^t A^t = (AB)^t$ – Proriedade V da matriz transposta, item 1.11.1).

Esse 2º roteiro é conveniente quando se conhecem as transpostas de A e de B.

24) Roteiro: 1º) Calcular AB = E (já calculado no problema 23)
2º) Determinar D^t
3º) Calcular $ED^t = F$

25) Roteiro: 1º) Determinar D^t (já determinado na problema 24)
2º) Calcular $BD^t = G$
3º) Calcular AG = H

26) Roteiro: 1º) Determinar B^t
2º) Calcular $B^t C = J$

27) Roteiro: 1º) Determinar A^t
2º) Determinar B^t (já determinado no problema 26)
3º) Calcular $A^t B^t = K$

4º) Calcular 2 K
5º) Determinar C^t
6º) Calcular 3 C^t = L
7º) Somar 2 K + L

28) A é nihilpotente
29) A é nihilpotente
30) A é idempotente
31) A é idempotente

CAPÍTULO 2
DETERMINANTES

2.1 — CLASSE DE UMA PERMUTAÇÃO

Considere o leitor uma permutação

a c b

dos três elementos a, b, c e seja

a b c,

na qual os elementos estão na ordem alfabética, a permutação principal. Diz-se que dois elementos de uma permutação formam uma *inversão* se estão em ordem inversa à da permutação principal.

Assim, na permutação dada acb, os elementos c e b formam uma inversão.

Uma permutação é de *classe par* ou de *classe ímpar*, conforme apresente um número par ou ímpar de inversões.

A permutação acb é de classe ímpar.

2.2 — TERMO PRINCIPAL E TERMO SECUNDÁRIO

Dada uma matriz quadrada A, de ordem n, ao produto dos elementos da diagonal principal dá-se o nome de *termo principal*, e ao produto dos elementos da diagonal secundária dá-se o nome de *termo secundário*.

- Termo principal: $a_{11} \cdot a_{12} \cdot a_{13} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$
- Termo secundário: $a_{1n} \cdot a_{2\ n-1} \cdot a_{3\ n-2} \cdot \ldots \cdot a_{n1}$

2.3 — DETERMINANTE DE UMA MATRIZ

Chama-se *determinante* de uma matriz quadrada à soma algébrica dos produtos que se obtém efetuando todas as permutações dos segundos índices do termo principal, fixados os primeiros índices, e fazendo-se preceder os produtos do sinal + ou –, conforme a permutação dos segundos índices seja de classe par ou de classe ímpar.

- A utilização da definição e o cálculo de determinantes serão feitos logo após serem dadas algumas informações necessárias para a melhor compreensão do assunto.

- Chama-se *ordem de um determinante* a ordem da matriz a que o mesmo corresponde. Se a matriz é de ordem 3, por exemplo, o determinante será de ordem 3.

- A representação do determinante de uma matriz A, que será designado por det A, faz-se de maneira análoga à da matriz, colocada entre dois traços verticais:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- Apesar de o determinante de uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$, de ordem n, ser um número real, costuma-se, por comodidade, uma vez que aquele número é calculado a partir dos elementos das linhas e das colunas da matriz, falar nas *linhas* e nas *colunas do determinante*.

2.4 — PRELIMINARES PARA O CÁLCULO DOS DETERMINANTES DE 2ª E DE 3ª ORDEM

Para a correta aplicação da definição de determinante de uma matriz, considerem-se as tabelas constantes dos itens 2.4.1 e 2.4.2.

2.4.1 — Tabela referente às permutações dos números 1 e 2

O total de permutações dos números 1 e 2 é: $P_2 = 2\,! = 1 \times 2 = 2$.

Permutação principal	**Permutação**	**Número de inversões**	**Classe da permutação**	**Sinal que precede o produto**
12	12	0	par	+
12	21	1	ímpar	−

2.4.2 — Tabela referente às permutações dos números 1, 2 e 3

O total de permutações dos números 1, 2 e 3 é: $P_3 = 3\,! = 1 \times 2 \times 3 = 6$.

Permutação principal	**Permutação**	**Número de inversões**	**Classe da permutação**	**Sinal que precede o produto**
1 2 3	1 2 3	0	par	+
1 2 3	1 3 2	1	ímpar	−
1 2 3	3 1 2	2	par	+
1 2 3	2 1 3	1	ímpar	−
1 2 3	2 3 1	2	par	+
1 2 3	3 2 1	3	ímpar	−

2.5 — CÁLCULO DO DETERMINANTE DE 2.ª ORDEM

O determinante de 2ª ordem é o que corresponde à matriz de ordem 2:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

O termo principal é $a_{11}\,a_{12}$ e os segundos índices são 1 e 2. O conjunto $\{1, 2\}$ admite 2 permutações: 12 e 21, a primeira de classe par e a segunda de classe ímpar. (Ver Tabela, item 2.4.1.) De acordo com a definição de determinante, pode-se escrever:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}$$

Por comodidade, costuma-se dizer que o determinante de 2ª ordem é igual ao termo principal menos o termo secundário. Exemplos:

1)

$$\det A = \begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 7(-1) - (-5)(2) = -7 + 10 = 3$$

2)

$$\det I = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1(1) - 0(0) = 1 - 0 = 1$$

2.6 — CÁLCULO DO DETERMINANTE DE 3.ª ORDEM

O determinante de 3ª ordem é o que corresponde à matriz de ordem 3:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

O termo principal é $a_{11}\, a_{22}\, a_{33}$ e os segundos índices são 1, 2 e 3. O conjunto $\{1, 2, 3\}$ admite seis permutações: 123, 312, 231, 132, 213 e 321, as três primeiras de classe par e as três últimas de classe ímpar. (Ver Tabela, item 2.4.1) De acordo com a definição de determinante, pode-se escrever:

$$\det A = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33} - a_{13}\, a_{22}\, a_{31}$$

Na prática, obtém-se essa fórmula de dois modos que serão vistos a seguir.

2.6.1 — Desenvolvimento do determinante por uma linha

A fórmula de 2.6 pode ser transformada na seguinte:

$$\det A = a_{11}\,(a_{22}\, a_{33} - a_{23}\, a_{32}) - a_{12}\,(a_{21}\, a_{33} - a_{23}\, a_{31}) + a_{13}\,(a_{21}\, a_{32} - a_{22}\, a_{31})$$

ou:

$$\det A = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

isto é, o determinante da matriz A, de ordem 3, é igual à soma algébrica dos produtos de cada elemento da 1ª linha pelo determinante menor que se obtém suprimindo a 1ª linha e a coluna correspondente ao respectivo elemento dessa linha, fazendo-se preceder esses produtos, alternadamente, pelos sinais + e –, iniciando pelo sinal +. Essa maneira de escrever a fórmula de 2.6 para calcular um determinante de 3ª ordem é denominada *desenvolvimento do determinante pela 1ª linha*. Exemplo:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \\ 6 & 8 & 2 \end{vmatrix} = +2 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\det A = 2\,(2 - 32) - 5\,(6 - 24) + 7\,(24 - 6) = 2\,(-30) - 5\,(-18) + 7(18)$$

$$\det A = -60 + 90 + 126 = 156$$

• Um determinante pode ser calculado por qualquer linha (ou por qualquer coluna), cuidando-se da alternância dos sinais + e – que precedem os produtos. No caso do determinante de ordem 3, a alternância dos sinais + e –, por linha e por coluna, é a seguinte:

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{array}$$

Exemplo: Calcular o mesmo determinante, desenvolvendo-o pela 2ª coluna:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \\ 6 & 8 & 2 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\det A = -5\,(6 - 24) + 1\,(4 - 42) - 8\,(8 - 21) = -5\,(-18) + 1\,(-38) - 8\,(-13)$$

$$\det A = 90 - 38 + 104 = 156$$

2.6.2 — Regra de Sarrus

A fórmula de 2.6 também pode ser obtida pela *Regra de Sarrus*, que consiste no seguinte:

1º) repetem-se as duas primeiras colunas à direita do quadro dos elementos da matriz A;

2º) multiplicam-se os três elementos da diagonal principal bem como os três elementos de cada paralela a essa diagonal, fazendo-se preceder os produtos do sinal +;

3º) multiplicam-se os três elementos da diagonal secundária bem como os três elementos de cada paralela a essa diagonal, fazendo-se preceder os produtos do sinal –. Assim:

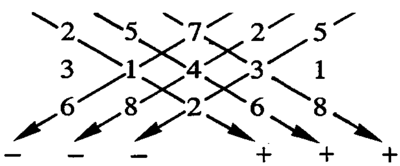
$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & + & + \quad + \end{array}$$

$$\det A = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31}$$

Exemplo: Calcular

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \\ 6 & 8 & 2 \end{vmatrix}$$

Solução:



$$\det A = +\,4 + 120 + 168 - 30 - 64 - 42 = 156$$

2.7 — DESENVOLVIMENTO DE UM DETERMINANTE DE ORDEM n POR UMA LINHA OU POR UMA COLUNA

Se se repetir o raciocínio e o roteiro do cálculo de um determinante de 3ª ordem para um determinante de 4ª ordem, por exemplo, se chegará à conclusão de que esse determinante poderá ser calculado desenvolvendo-o por qualquer linha ou por qualquer coluna, devendo-se ter cuidado com a alternância dos sinais + e – que precedem os produtos, alternância essa que, para o determinante de 4ª ordem, é a seguinte:

$$\begin{matrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{matrix}$$

Exemplo: Calcular, desenvolvendo pela 1ª linha:

$$\det A = \begin{vmatrix} -2 & -3 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & -4 & 1 \\ -2 & 2 & -3 & -1 \end{vmatrix}$$

Solução:

$$\det A = +(-2)\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & -4 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -3 & -4 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -4 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\det A = -2\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & -4 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -3 & -4 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -4 \\ -2 & 2 & -3 \end{vmatrix} \quad (1)$$

Fazendo:

$$\det B = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & -4 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = +0\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\det B = 0(4+3) - 1(1-2) - 2(3+8) = 0(7) - 1(-1) - 2(11)$$

$$\det B = 0 + 1 - 22 = -21$$

$$\det C = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -3 & -4 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = +(-1)\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\det C = -1\,(4+3) - 1\,(3+2) - 2\,(9-8) = -1(7) - 1(5) - 2(1)$$

$$\det C = -7 - 5 - 2 = -14$$

$$\det D = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = +(-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\det D = -1\,(1-2) - 0\,(3+2) - 2\,(-6-2) = -1\,(-1) - 0\,(5) - 2\,(-8)$$

$\det D = 1 - 0 + 16 = 17$

$$\det E = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -4 \\ -2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = +(-1)\begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$\det E = -1\,(3 + 8) - 0\,(9 - 8) + 1\,(-6 -2) = -1(11) - 0(1) + 1(-8)$

$\det E = -11 - 0 - 8 = -19$

Substituindo det B, det C, det D e det E em (1), vem:

$\det A = -2(-21) + 3(-14) - 1(17) + 2(-19) = 42 - 42 - 17 - 38$

$\det A = -55$

- Igualmente se pode calcular um determinante de ordem $n = 5, 6, 7, 8, 10, 50$, etc., desenvolvendo-o por uma linha ou por uma coluna, pelo mesmo processo por meio do qual se calcula um determinante de 4ª ordem. Entretanto, esse processo, por envolver um número excessivamente elevado de operações, torna-se quase impraticável. Por isso, no item 2.9 será visto um processo em que, apesar de conter ainda um número elevado de operações, esse número é sensivelmente menor do que o do desenvolvimento do determinante por uma linha ou por uma coluna.

- Para se ter uma idéia do número elevado de operações que devem ser feitas no cálculo de um determinante de ordem $n \geqslant 3$ pelo processo de desenvolvê-lo por uma linha ou por uma coluna, basta considerar o número de determinantes de ordem 2 que devem ser calculados nesse processo. Assim, o cálculo de um determinante:

a) de ordem 3, implica calcular 3 determinantes de ordem 2;

b) de ordem 4, implica calcular $4 \times 3 = 12$ determinantes de ordem 2;

c) de ordem 5, implica calcular $5 \times 4 \times 3 = 60$ determinantes de ordem 2:

d) de ordem 6, implica calcular $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$ determinantes de ordem 2;

e) de ordem 10, implica calcular $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 1.814.400$ determinantes de ordem 2.

- Quando $n \geqslant 4$, é muito natural que enganos sejam cometidos e que, portanto, o cálculo feito não corresponda ao valor do determinante. Por essa razão (e mesmo que o processo a ser visto em 2.9 seja menos trabalhoso), atualmente se calcula um determinante por computador, por meio de um PROGRAMA adequado previamente elaborado.

2.8 — PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES

Dentre as diversas propriedades dos determinantes serão relacionadas, a seguir, aquelas que, de uma forma ou de outra, dizem mais de perto com o cálculo dos determinantes de qualquer ordem ou com as propriedades dos vetores. Essas propriedades não serão demonstradas mas tão-somente verificadas por meio de exemplos; por outra parte, sempre que for necessário calcular um determinante desenvolvendo-o por uma linha, isso será feito, por comodidade, pela 1ª linha, salvo menção expressa em contrário.

I) O determinante de uma matriz A é igual ao determinante da sua transposta A^t, isto é, det A = A^t. Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 2(3) - 5(7) = 6 - 35 = -29$$

• Como conseqüência dessa propriedade, tudo que for válido para as linhas de um determinante é válido para as colunas e reciprocamente.

II) Se a matriz A possui uma linha (ou coluna) constituída de elementos todos nulos, o determinante é nulo. Exemplo:

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

III) Se a matriz A tem duas linhas (ou colunas) iguais, o determinante é nulo. Exemplo:

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 6 \end{vmatrix} = +5 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\det A = 5\,(18-4) - 5\,(18-4) + 2\,(12-12) = 5(14) - 5(14) + 2(0)$$

$$\det A = 70 - 70 + 0 = 0$$

IV) Se na matriz A duas linhas têm seus elementos correspondentes proporcionais, o determinante é nulo. (Numa matriz A, dois elementos são correspondentes quando, situados em colunas diferentes, estão na mesma linha ou quando, situados em linhas diferentes, estão na mesma coluna. Exemplo:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 2(9) - 6(3) = 18 - 18 = 0$$

Nesse determinante, os elementos correspondentes das duas colunas são proporcionais:

$$\frac{6}{2} = \frac{9}{3} = 3$$

V) O determinante de uma matriz diagonal A (superior ou inferior) é igual ao termo principal, isto é, é igual ao produto dos elementos da diagonal principal. Exemplo:

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = +4\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Os dois últimos determinantes, por terem uma coluna com elementos todos nulos, são nulos (II propriedade); logo:

$$\det A = 4\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4((1)(2) - 3(0)) = 4(1)(2) - 0$$

$$\det A = 4 \times 1 \times 2$$

- Como conseqüência dessa propriedade:

a) o determinante de uma matriz diagonal (por ser ao mesmo tempo diagonal superior e inferior) é igual ao produto dos elementos da diagonal principal;

b) o determinante de uma matriz unidade I, de qualquer ordem (por ser uma matriz diagonal e todos os elementos dessa diagonal serem iguais a 1), é igual a 1. Exemplos:

$$\det D = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 5 \times 2 \times 7; \quad \det I_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times \dots \times 1 = 1$$

VI) Trocando-se entre si duas linhas (ou colunas) de uma matriz A, o determinante muda de sinal, isto é, fica multiplicado por -1. Exemplo:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 12 \end{vmatrix} = +\ 1 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 12 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\det A = 1(0-8) - 3(0) + 5(0) = -8 - 0 + 0 = -8$$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 4 \times 2 = 8$$

de acordo com a propriedade V.

Como se vê, ao serem trocadas entre si, a 2ª linha pela 3ª da matriz A, o det A ficou multiplicado por -1, isto é, seu valor foi alterado. Para que se mantenha o valor do det A, no caso de haver necessidade de trocar entre si duas linhas (ou colunas), se procederá do seguinte modo:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 12 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Na realidade, tendo em vista que o det A foi multiplicado por -1, ele, para manter seu valor, deveria ser dividido por -1 (ou multiplicado pelo inverso de -1, no caso $-\frac{1}{1}$). Como o resultado seria o mesmo, se optou pela situação mais simples.

• Quando se desejar trocar, por exemplo, a 2ª linha pela 3ª de uma matriz A para facilitar o cálculo de seu determinante, se escreverá assim:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 12 \end{vmatrix} \rightarrow L_{23}: \qquad \det A = -1 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Essa operação será utilizada no cálculo de um determinante de qualquer ordem, quando, como aconteceu no presente caso, num determinado estágio do processo do cálculo, não for conveniente haver o número zero na diagonal principal: a troca da 2ª linha pela 3ª tirou o zero da diagonal principal e colocou em seu lugar o número 4.

VII) Quando se multiplicam por um número real todos os elementos de uma linha (ou coluna) de uma matriz A, o determinante fica multiplicado por esse número. Exemplo:

Na propriedade VI viu-se que:

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8$$

Suponha o leitor que se deseje multiplicar a 2ª linha por $\frac{1}{4}$ (o que é o mesmo que dividir os elementos da linha por 4) e calcular o valor do det A_2 obtido:

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\det A_2 = 1(2-0) - 3(0) + 5(0) = 2 - 0 + 0$$

$$\det A_2 = 2$$

• Como se vê, o det A_1 ficou multiplicado por $\frac{1}{4}$ ao se multiplicar os elementos da 2ª linha por $\frac{1}{4}$, uma vez que:

$$\det A_2 = 2 = (\det A_1) \times \frac{1}{4} = 8 \times \frac{1}{4},$$

isto é, o valor de det A_1, foi alterado. Para que se mantenha o valor do det A_1, no caso de haver necessidade de multiplicar a 2ª linha por $\frac{1}{4}$, se procederá do seguinte modo:

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Repetindo o que já foi dito, multiplicar os elementos de uma linha por $\frac{1}{4}$ é o mesmo que dividir os elementos da linha por 4 (ou, o mesmo que dividir o determinante por 4). Daí, porque, para compensar, isto é, para que o determinante mantenha seu valor, é necessário multiplicá-lo pelo inverso de $\frac{1}{4}$, ou seja, por 4.

• Quando se desejar multiplicar, por exemplo, a 2ª linha de uma matriz A por $\frac{1}{4}$ para facilitar o cálculo de seu determinante se escreverá assim:

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \rightarrow \frac{1}{4} L_2: \qquad \det A_1 = 4 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Essa operação será utilizada no cálculo de um determinante de qualquer ordem, quando, como aconteceu no presente caso, num determinado estágio do processo do cálculo, se desejar obter o número 1 como um dos elementos da diagonal principal: a multiplicação do número 4, que estava na 2ª linha como elemento da diagonal principal, por $\frac{1}{4}$, colocou o número 1 no seu lugar.

Se se desejar obter o número 1 em lugar do número 2 no det A_2, basta multiplicar a 3ª linha por $\frac{1}{2}$ e fazer a respectiva compensação multiplicando det A_2 pelo inverso de $\frac{1}{2}$, isto é, por 2:

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \to \frac{1}{2}L_3: \qquad \det A_2 = 2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

- Recapitulando todas as operações feitas até agora com o det A da propriedade VI, tem-se:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 12 \end{vmatrix} \to L_{23}: \qquad \det A = -1\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \to \frac{1}{4}L_2:$$

$$\det A = -1 \times 4\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \to \frac{1}{2}L_3: \qquad \det A = -1 \times 4 \times 2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Tendo em vista que, pela propriedade V, o determinante de uma matriz triangular superior é igual ao termo principal e, como no último determinante, o termo principal é igual a 1 ($T = 1 \times 1 \times 1$), vem:

$$\det A = -1 \times 4 \times 2 \times 1 = -8$$

valor esse que já foi encontrado ao calcular det A no exemplo da propriedade VI.

VIII) Um determinante não se altera quando se somam aos elementos de uma linha (coluna) de uma matriz A os elementos correspondentes de outra linha (coluna) previamente multiplicados por um número real diferente de zero. Exemplo:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 10 & 12 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix} = +1\begin{vmatrix} 10 & 12 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\det A = 1\,(90 - 84) - 2\,(36 - 60) + 4\,(28 - 50) = 1(6) - 2(-24) + 4(-22)$$

$$\det A = 6 + 48 - 88 = -34$$

Pretende-se, agora, substituir a 2ª linha do det A pela soma de seus elementos com os elementos correspondentes da 1ª linha previamente multiplicados por - 4:

2ª linha:				4	10	12
1ª linha:	1	2	4			
Multiplicador:			-4	-4	-8	-16
Nova 2ª linha				0	2	-4

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\det A_1 = 1\,(18 + 28) - 2\,(0 + 20) + 4\,(0 - 10) = 1(46) - 2(20) + 4(-10)$$

$$\det A_1 = 46 - 40 - 40 = -34$$

- Como se vê, det A_1 = de A, isto é, a utilização da propriedade VIII não altera o valor do determinante de uma matriz.

- Quando se desejar somar, por exemplo, os elementos da 2ª linha com os correspondentes elementos da 1ª linha, previamente multiplicados por -4, se escreverá assim:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 10 & 12 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix} \rightarrow L_2 - 4\,L_1: \qquad \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix}$$

Essa operação será utilizada no cálculo de um determinante de qualquer ordem, quando, como aconteceu agora, num determinado estágio do processo do cálculo, se desejar o número "zero" para formar uma matriz triangular. Para facilitar a obtenção do zero é que se utiliza a propriedade VII, isto é, se faz a operação adequada para substituir o número que está na diagonal principal pelo número 1; e é isso que se verá no próximo item.

2.9 — CÁLCULO DE UM DETERMINANTE DE QUALQUER ORDEM

Para calcular o determinante de uma matriz quadrada A, de ordem n (para $n \geq 2$, isto é, n = 5, 6, 10, 20, 50, 100, etc.) será utilizado o processo de triangulação.

Dada uma matriz quadrada A, de ordem n, se procederão com as linhas (colunas) de seu determinante as operações adequadas para transformar a matriz A numa matriz triangular superior (inferior), ao mesmo tempo que se efetuarão com o det A as necessárias compensações, quando for o caso, para manter inalterado seu valor, tudo de acordo com as propriedades dos determinantes já vistas e verificadas.

Antes de dar um exemplo, uma explicação se faz necessária ao leitor: o ideal seria calcular um determinante de ordem elevada, mas, no caso, o cálculo se tornaria demorado e repetitivo, porque, como já se teve oportunidade de verificar, o processo para obter o número zero é sempre o mesmo, assim como o processo para se obter o número 1, na diagonal principal, também é sempre o mesmo. Por isso, o exemplo a ser dado será o de um determinante de 4ª ordem, embora, repetindo, o processo de triangulação seja válido para o cálculo de um determinante de qualquer ordem. Por outro lado, é preciso declarar que o cálculo de determinantes de ordem muito grande só foi possível a partir do uso dos computadores que, em geral, com algumas variações, utilizam o processo de triangulação. Dada a explicação ao leitor, convém ainda dizer que, por comodidade, facilidade nos cálculos e por ser bastante prático, para executar o processo de triangulação procura-se colocar, por meio das operações adequadas (e das respectivas compensações quando for o caso), como elementos da diagonal principal, exceto o último, o número 1.

Obtido o número 1 na 1ª linha e 1ª coluna, isto é, $a_{11} = 1$, substituem-se por meio das operações competentes todos os demais elementos da 1ª coluna por zeros; da mesma forma, depois de obter $a_{22} = 1$, substituem-se os demais elementos da 2ª coluna, situados abaixo (acima) de a_{22} por zeros, e assim por diante. Quanto a cada um dos elementos da diagonal principal da matriz A, três hipóteses podem ocorrer:

1ª) o elemento é igual a zero. Nesse caso, deve-se proceder à operação de troca de linhas e multiplicar o det A por -1, como compensação, isto é, para que det A conserve seu valor;

2ª) o elemento é igual a k. Nesse caso, deve-se multiplicar todos os elementos da linha por $\frac{1}{k}$, com o que se obtém o número 1 como elemento da diagonal principal dessa linha. Por outro lado, para compensar, isto é, para que det A mantenha seu valor, deve-se multiplicá-lo pelo inverso de $\frac{1}{k}$, ou seja, por k;

3ª) o elemento é igual a 1. Nesse caso, nada a fazer no que diz respeito à diagonal principal.

Exemplo: Calcular pelo processo de triangulação:

$$\det A = \begin{vmatrix} -2 & -3 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & -4 & 1 \\ -2 & 2 & -3 & -1 \end{vmatrix}$$

Solução:

$$\det A = \begin{vmatrix} -2 & -3 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & -4 & 1 \\ -2 & 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \to -\frac{1}{2} L_1: \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\det A = -2 \begin{vmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & -4 & 1 \\ -2 & 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \to L_2 + L_1: \\ \to L_3 + 3L_1: \\ \to L_4 + 2L_1: \end{matrix}$$

$$\det A = -2 \begin{vmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} & 4 \\ 0 & 5 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \to \frac{2}{3} L_2: \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\det A = -2 \left(\frac{3}{2}\right) \begin{vmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} & 4 \\ 0 & 5 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \to L_3 - \frac{7}{2} L_2: \\ \to L_4 - 5 L_2: \end{matrix}$$

$$\det A = -2\left(\frac{3}{2}\right)\begin{vmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -6 & \frac{19}{3} \\ 0 & 0 & -7 & \frac{13}{3} \end{vmatrix} \rightarrow \frac{1}{6}L_3: \qquad \det A = -2\left(\frac{3}{2}\right)(-6)\begin{vmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{19}{18} \\ 0 & 0 & -7 & \frac{13}{3} \end{vmatrix} \rightarrow L_4 + 7L_3:$$

$$\det A = -2\left(\frac{3}{2}\right)(-6)\begin{vmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{19}{18} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{55}{18} \end{vmatrix}$$

mas o determinante de uma matriz triangular superior é igual ao termo principal:

$$T_j = 1 \times 1 \times 1\left(-\frac{55}{18}\right) = -\frac{55}{18}$$

logo:

$$\det A = -2\left(\frac{3}{2}\right)(-6)\left(-\frac{55}{18}\right) = 18\left(-\frac{55}{18}\right) = -55$$

Esse determinante já foi calculado no exemplo do item 2.7 e, como era de esperar, o resultado foi o mesmo.

2.10 — PROBLEMAS RESOLVIDOS

Assim como foi feito em 2.8, sempre que for necessário calcular um determinante desenvolvendo-o por uma linha, isso será feito, por comodidade, pela 1ª linha.

Nos problemas 1 a 4, resolver as equações:

1)

$$\begin{vmatrix} x-2 & x+3 & 3-1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 60$$

Solução:

$$+(x-2)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (x+3)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (x-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 60$$

$$(x-2)(1-6) - (x+3)(2-9) + (x-1)(4-3) = 60$$

$$(x-2)(-5) - (x+3)(-7) + (x-1)(1) = 60$$

$$-5x + 10 + 7x + 21 + x - 1 = 60$$

$$3x = 60 - 10 - 21 + 1$$

$$3x = 30$$

$$x = \frac{30}{3} = 10$$

2)

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & x \\ 1 & -2 & x \\ 2 & -1 & x \end{vmatrix} = 8$$

Solução:

$$+3\begin{vmatrix} -2 & x \\ -1 & x \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & x \\ 2 & x \end{vmatrix} + x\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 8$$

$3\,(-2x + x) - 2\,(x - 2x) + x\,(-1 + 4) = 8$

$3\,(-x) - 2\,(-x) + x(3) = 8$

$-3x + 2\,x + 3x = 8$

$2x = 8$

$x = \dfrac{8}{2} = 4$

3)

$$\begin{vmatrix} 8 - x & 10 \\ 2 & 7 - x \end{vmatrix} = 0$$

Solução:

$(8 - x)\,(7 - x) - 10\,(2) = 0$

$56 - 8x - 7x + x^2 - 20 = 0$

$x^2 - 15x + 36 = 0,$

equação cujas raízes são $x_1 = 12$ e $x_2 = 3$

4)

$$\begin{vmatrix} 3 - x & -1 & 1 \\ -1 & 5 - x & -1 \\ 1 & -1 & 3 - x \end{vmatrix} = 0$$

Solução:

$$(3 - x)\begin{vmatrix} 5 - x & -1 \\ -1 & 3 - x \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 - x \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & 5 - x \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$(3 - x)\,(15 - 8x + x^2 - 1) + 1\,(-3 + x + 1) + 1\,(1 - 5 + x) = 0$

$45 - 24x + 3x^2 - 3 - 15x + 8x^2 - x^3 + x - 3 + x + 1 + 1 - 5 + x = 0$

$-x^3 + 11x^2 - 36x + 36 = 0$

$x^3 - 11x^2 + 36x - 36 = 0$

Na equação do 3º grau, as soluções inteiras, caso existam, são divisoras do termo independente -36. Com as devidas substituições na equação acima, verifica-se que

$x = 2$ é uma delas. Conseqüentemente, $x - 2$ é um fator do polinômio $x^3 - 11x^2 + 36x - 36$. Dividindo o polinômio por $(x - 2)$ a equação poderá ser representada assim:

$$(x - 2)(x^2 - 9x + 18) = 0$$

$$(x - 2)(x - 3)(x - 6) = 0$$

As raízes dessa equação são: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ e $x_3 = 6$.

2.11 — PROBLEMAS PROPOSTOS

Dadas as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -5 & -2 & -9 \\ 7 & 8 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & -4 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 3 & 9 & 12 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix},$$

calcular, pelo processo de triangulação ou pelo desenvolvimento por uma linha (ou coluna):

1) det A
2) det B
3) det C
4) det (A +B)
5) det (A – B)
6) det (2A – 3b + 4C)
7) det (BC)
8) det (AC^t)
9) det (CB)A
10) det C(BA)
11) det B(CA)
12) Verificar se det (A +B) = det A + det B
13) Verificar se det (AB) = det A × det B

14) Calcular o determinante da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Desenvolvendo-o pela 2ª linha.

b) Pelo processo de triangulação.

Nos problemas 15 a 24, resolver as equações dadas.

15) $\begin{vmatrix} 4 & 6 & x \\ 5 & 2 & -x \\ -7 & 4 & 2x \end{vmatrix} = -128$

16) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2x & x & 3x \\ 4 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 39$

17) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 3x & 0 & 1 \\ 7x & 2 & 1 \end{vmatrix} = 100$

18) $\begin{vmatrix} x+3 & x+1 & x+4 \\ 4 & 5 & 3 \\ 9 & 10 & 7 \end{vmatrix} = -7$

19) $\begin{vmatrix} 12-x & 1 & 1 \\ 18-2x & 3 & 2 \\ 15-2x & 0 & 1 \end{vmatrix} = 10$

20) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & x-1 \\ 1 & 1 & x-2 \\ 2 & 1 & x-4 \end{vmatrix} = 0$

21) $\begin{vmatrix} 2 & x & 2 \\ 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -3$

22) $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 4 & x & 2 \\ 2x & 8 & 4 \end{vmatrix} = 0$

23) $\begin{vmatrix} 10-x & 4 \\ 10 & 13-x \end{vmatrix} = 0$

24) $\begin{vmatrix} 7-x & -2 & 0 \\ -2 & 6-x & -2 \\ 0 & -2 & 5-x \end{vmatrix} = 0$

2.11.1 — Respostas ou roteiros para os problemas propostos

1 a 3) Roteiro: Esses problemas são resolvidos de modo análogo ao dos exemplos do item 2.6.1 ou do exemplo do item 2.9.

4) Roteiro: 1º) Calcular $A + B = E$
2º) Calcular det E

5) Roteiro: 1º) Calcular $A - B = F$
2º) Calcular det F

6) Roteiro: 1º) Fazer $G = 2A - 3B + 4C$
2º) Calcular G
3º) Calcular det G

7) Roteiro: 1º) Calcular $BC = H$
2º) Calcular det H

8) Roteiro: 1º) Determinar C^t
2º) Calcular $AC^t = J$
3º) Calcular det J

9) Roteiro: 1º) Calcular $CB = L$
2º) Calcular $LA = M$
3º) Calcular det M

10) Roteiro: 1º) Calcular $BA = N$
2º) Calcular $CN = M$
3º) Calcular det M

11) Roteiro: 1º) Calcular $CA = P$
2º) Calcular $BP = Q$
3º) Calcular det Q

12) Roteiro: 1º) Calcular det A
2º) Calcular det B
3º) Calcular A + B
4º) Calcular det (A + B)
5º) Calcular det A + det B
6º) Comparar det (A + B) com det A + det B

13) Roteiro: 1º) Calcular det A
2º) Calcular det B
3º) Calcular AB
4º) Calcular det (AB)
5º) Calcular det A × det B
6º) Comparar det (AB) com det A × det B

14) Roteiro: As alíneas a) e b) desse problema são resolvidas de modo análogo ao dos exemplos dos itens 2.7 e 2.9 respectivamente.

15) $x = 2$

16) $x = 3$

17) $x = 5$

18) $x = 1$

19) $x = 7$

20) $x = -1$

21) $x = 5$ e $x = 3$

22) $x = 4$

23) $x = 18$ e $x = 5$

24) $x = 3$, $x = 6$ e $x = 9$

CAPÍTULO 3
INVERSÃO DE MATRIZES

3.1 — MATRIZ INVERSA DE UMA MATRIZ

Dada uma matriz quadrada A, de ordem n, se existir uma matriz quadrada B, de mesma ordem, que satisfaça à condição:

$$AB = BA = I$$

diz-se que B é *inversa* de A e se representa por A^{-1}:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

• Quando uma matriz quadrada A tem inversa, diz-se que A é *inversível*. Exemplo: dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 11 & 7 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -11 & 8 \end{bmatrix},$$

A é inversa de B (ou B é inversa de A). De fato:

$$\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 11 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -11 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -11 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 11 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.2 — MATRIZ SINGULAR

Uma matriz quadrada A cujo determinante é nulo é uma *matriz singular.* Exemplo: a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

é singular porque det A = 0:

$$\det A = +\ 1 \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = 1\ (45 - 48) - 4\ (18 - 24) + 7\ (12 - 15)$$

$$\det A = 1\ (-3) - 4\ (-6) + 7\ (-3) = -3 \times 24 - 21 = 0$$

- A matriz singular *não tem inversa.*

3.3 — MATRIZ NÃO-SINGULAR

Uma matriz quadrada A cujo determinante é diferente de zero é uma matriz *não-singular* ou *regular*. Exemplo: a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

é não singular porque det A $\neq$ 0:

$$\det A = +\ 2 \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = 2\ (6 - 2) - 3\ (15 - 6) + 1\ (5 - 6)$$

$$\det A = 2(4) - 3(9) + 1\ (-1) = 8 - 27 - 1 = -20$$

- A matriz não-singular *sempre tem inversa.*

3.4 — PROPRIEDADES DA MATRIZ INVERSA

I) $(A^{-1})^{-1} = A$.

II) A matriz unidade é a sua própria inversa: $I = I^{-1}$.

III) $(\lambda A)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda} A^{-1}, \lambda \in \mathbb{R}$

Se A e B são matrizes quadradas, de mesma ordem, tem-se:

IV) $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.

V) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Esta propriedade será verificada por meio do seguinte exemplo:

a) Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 8 \end{bmatrix},$$

a matriz C é inversa de A:

$$AC = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

isto é, $A^{-1} = C$.

b) Dadas as matrizes

$$B = \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } F = \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ -5 & 9 \end{bmatrix},$$

a matriz F é inversa de B:

$$BF = \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -7 \\ -5 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

isto é, $B^{-1} = F$.

c) O produto das matrizes A e B é:

$$AB = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 97 & 76 \\ 37 & 29 \end{bmatrix}$$

d) O produto das matrizes B^{-1} e A^{-1} é:

$$B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ -5 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 & -76 \\ -37 & 97 \end{bmatrix}$$

e) O produto das matrizes AB e $B^{-1}A^{-1}$ é:

$$(AB) \times (B^{-1}A^{-1}) = \begin{bmatrix} 97 & 76 \\ 37 & 29 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 29 & -76 \\ -37 & 97 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tendo em vista que o produto das matrizes AB e $B^{-1}A^{-1}$ é igual a I, a matriz $B^{-1}A^{-1}$ é inversa da matriz AB:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

3.5 — OPERAÇÕES ELEMENTARES

Denominam-se operações elementares de uma matriz as seguintes:

I) Permutação de duas linhas (colunas).

II) Multiplicação de todos os elementos de uma linha (coluna) por um número real diferente de zero.

III) Substituição dos elementos de uma linha (coluna) pela soma deles com os elementos correspondentes de outra linha (coluna) previamente multiplicados por um número real diferente de zero.

3.6 — EQUIVALÊNCIA DE MATRIZES

Dada uma matriz A, diz-se que uma matriz B, de mesma ordem, é *equivalente* à matriz A, e se representa por $B \sim A$, se for possível transformar A em B por meio de uma sucessão finita de operações elementares.

Com relação às operações elementares para transformar uma matriz em outra equivalente a ela, convém ter presente o seguinte:

a) Quando se desejar permutar, por exemplo, a 2ª linha pela 3ª de uma matriz A, se procederá assim:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 15 \end{bmatrix} \rightarrow L_{23}: \qquad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 15 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

b) Quando se desejar multiplicar todos os elementos da 2ª linha, por exemplo, da matriz A_1 por $\frac{1}{4}$, se escreverá assim:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \frac{1}{4}L_2: \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

c) Quando se desejar substituir os elementos da 1ª linha, por exemplo, da matriz A_2, pela soma deles com os elementos correspondentes da 2ª linha previamente multiplicados por -3, se escreve assim:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow L_1 - 3L_2: \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- Recapitulando as operações elementares que foram efetuadas com a matriz A até obter a matriz equivalente A_3, verifica-se que:

I) A operação L_{23} foi realizada para tirar um zero da diagonal principal e poder colocar em seu lugar, após adequada operação, o número 1.

II) A operação $\frac{1}{4} L_2$ foi efetuada para, em lugar do número 4 na diagonal principal, se obter o número 1.

III) A operação $L_1 - 3L_2$ foi efetuada para, em lugar do número 3, situado acima do número 1 da diagonal principal, se obter um zero.

Como se vê, com as operações elementares se obtêm os mesmos resultados já alcançados com as propriedades VI, VII e VIII dos determinantes: é que aquelas propriedades eram, na realidade, operações elementares. No caso, entretanto, dos determinantes, a VI e a VII propriedades, quando aplicadas, alteram seu valor, daí a necessidade de efetuar compensações, isto é, realizar operações que anulem tais alterações e mantenham o valor do determinante. Não é o caso, porém, das matrizes: as operações elementares têm por objetivo transformar uma matriz A em uma matriz B, equivalente a ela.

3.6.1 — Transformação de uma matriz na matriz unidade

Qualquer matriz quadrada A, de ordem n, não-singular, pode ser transformada na matriz equivalente I, de mesma ordem, por meio de uma sucessão finita de operações elementares.

Antes de dar um exemplo, duas informações ao leitor:

1ª) em vez de transformar uma matriz quadrada de ordem elevada na matriz I, de mesma ordem, será utilizada uma matriz de ordem 3, por comodidade tão-somente, para não ser repetitivo, por ser prático, uma vez que o processo é o mesmo para uma matriz de ordem n qualquer (n = 2, 3, 4, 5, 6, 10, 20, 50, 100, etc.);

2ª) ao mesmo tempo em que se transforma a matriz A na matriz equivalente I, pode-se calcular o det A; por essa razão, será colocado um asterisco ao lado de cada operação que altera o valor do determinante e, ao final, feitas as compensações, quando for o caso, para manter o valor do determinante, se fará seu cálculo.

Exemplo: transformar a matriz quadrada

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

na matriz equivalente I.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \frac{1}{2}L_1^*: \qquad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \rightarrow L_2 - 4\,L_1: \\ \rightarrow L_3 - 2\,L_1: \end{matrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow L_{23}^*: \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \frac{1}{4}L_2^*:$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow L_1 - \frac{1}{2}L_2: \qquad A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow -\frac{1}{4}L_3^*:$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow L_1 - \frac{3}{2}L_3: \qquad A_7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como se vê, a matriz A, por meio de uma sucessão finita de operações elementares, foi transformada na matriz equivalente I.

- Tendo em vista que det A_7 = det I = 1 e que as operações realizadas com as matrizes A, A_2, A_3 e A_5 alteraram o det A, as operações a seguir anularão as alterações e permitirão calcular o det A:

$$\det A = 2\,(-1)\,(4)\,(-4)\,(1) = 32$$

Conferindo:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = +\;2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\det A = 2\,(6 - 10) - 1\,(12 - 4) + 3\,(20 - 4) = 2\,(-4) - 1\,(8) + 3\,(16)$$

$$\det A = -8 - 8 + 48 = 32$$

3.7 — INVERSÃO DE UMA MATRIZ POR MEIO DE OPERAÇÕES ELEMENTARES

A mesma sucessão finita de operações elementares, que transforma a matriz quadrada A na matriz unidade I, transforma uma matriz I, de mesma ordem, na matriz A^{-1}, inversa de A.

Para determinar, pois, a matriz inversa de A:

a) coloca-se, ao lado da matriz A, uma matriz I, separada por um traço vertical;

b) transforma-se, por meio de operações elementares, a matriz A numa matriz I, aplicando-se simultaneamente, à matriz I, colocada ao lado de A, as mesmas operações elementares.

Exemplo: determinar a inversa da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Solução

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \rightarrow \frac{1}{2} L_1^*: \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \rightarrow L_2 - 1\, L_1: \\ \rightarrow L_3 - 5\, L_1: \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{27}{2} & -\frac{5}{2} & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \rightarrow \frac{2}{5} L_2^*: \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{6}{10} & -\frac{2}{10} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{27}{2} & -\frac{5}{2} & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \rightarrow L_1 - \frac{1}{2} L_2: \\ \\ \rightarrow L_3 - \frac{1}{2} L_2: \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{38}{10} & \frac{6}{10} & -\frac{2}{10} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{6}{10} & -\frac{2}{10} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{132}{10} & -\frac{24}{10} & -\frac{1}{5} & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \to -\frac{10}{132} L_3^{*}: \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{38}{10} & \frac{6}{10} & -\frac{2}{10} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{6}{10} & -\frac{2}{10} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{24}{132} & \frac{2}{132} & -\frac{10}{132} \end{array}\right] \begin{array}{l} \to L_1 - \frac{38}{10} L_3: \\ \to L_2 + \frac{6}{10} L_3 \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{12}{132} & -\frac{34}{132} & \frac{38}{132} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{12}{132} & \frac{54}{132} & -\frac{6}{132} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{24}{132} & \frac{2}{132} & -\frac{10}{132} \end{array}\right]$$

Uma vez que a matriz A foi transformada na matriz I, a matriz

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{12}{132} & -\frac{34}{132} & \frac{38}{132} \\ -\frac{12}{132} & \frac{54}{132} & -\frac{6}{132} \\ \frac{24}{132} & \frac{2}{132} & -\frac{10}{132} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{6}{66} & -\frac{17}{66} & \frac{19}{66} \\ -\frac{6}{66} & \frac{27}{66} & -\frac{3}{66} \\ \frac{12}{66} & \frac{1}{66} & -\frac{5}{66} \end{bmatrix}$$

é a matriz A^{-1}, inversa de A.

O leitor pode fazer a verificação efetuando o produto AB, cujo resultado deve ser I.

• O det A, considerando as alterações assinaladas com asteriscos e feitas as devidas compensações, é:

$$\det A = 2\left(\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{132}{10}\right) \times 1 = -66$$

3.7.1 — Inversão de uma matriz de ordem 2

Determinar a inversa da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Solução:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \frac{1}{a} L_1: \qquad \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow L_2 + (-c)\, L_1:$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & d - \frac{bc}{a} & -\frac{c}{a} & 1 \end{array}\right]$$

$$d - \frac{bc}{a} = \frac{ad - bc}{a} \tag{1}$$

mas:

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Fazendo:

$$ad - bc = n \tag{2}$$

e substituindo (2) em (1), vem:

$$d - \frac{bc}{a} = \frac{n}{a} \text{, então:}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{n}{a} & -\frac{c}{a} & 1 \end{array}\right] \rightarrow \frac{a}{n} L_2: \qquad \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & Q \\ 0 & 1 & -\frac{c}{n} & \frac{a}{n} \end{array}\right] \rightarrow L_1 - \frac{b}{a} L_2:$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{a}+\frac{bc}{an} & -\frac{b}{n} \\ 0 & 1 & -\frac{c}{n} & \frac{a}{n} \end{array}\right]$$

$$\frac{1}{a}+\frac{bc}{an}=\frac{n+bc}{an}=\frac{ad-bc+bc}{an}=\frac{ad}{an}=\frac{d}{n}\text{, então:}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{d}{n} & -\frac{b}{n} \\ 0 & 1 & -\frac{c}{n} & \frac{a}{n} \end{array}\right]$$

Uma vez que a matriz A foi transformada na matriz I, a matriz

$$B = \begin{bmatrix} \frac{d}{n} & -\frac{b}{n} \\ -\frac{c}{n} & \frac{a}{n} \end{bmatrix}$$

é a matriz A^{-1} inversa de A.

3.7.1.1 – Regra prática

Examinando o resultado do item anterior, verifica-se que se pode obter a matriz A^{-1}, inversa da matriz A, de ordem 2, *permutando os dois elementos da diagonal principal, trocando os sinais dos dois elementos da diagonal secundária e dividindo os quatro elementos de A por* det A = n (se n = 0, A não tem inversa).

Exemplos: determinar a matriz inversa de cada uma das seguintes matrizes

$$L = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},\quad M = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},\quad N = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} \cos\Theta & -\operatorname{sen}\Theta \\ \operatorname{sen}\Theta & \cos\Theta \end{bmatrix}$$

Solução:

1)

$$\det L = \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 28 - 18 = 10 \quad \text{e} \quad L^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{10} & -\frac{6}{10} \\ -\frac{3}{10} & \frac{7}{10} \end{bmatrix}$$

2)

$$\det M = \begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 20 = 0 \quad \text{e} \quad M \text{ não tem inversa}$$

3)

$$\det N = \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 16 - 15 = 1 \quad \text{e} \quad N^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$$

4)

$$\det A = \begin{vmatrix} \cos\Theta & -\text{sen}\,\Theta \\ \text{sen}\,\Theta & \cos\Theta \end{vmatrix} = \cos^2\Theta + \text{sen}^2\Theta = 1 \quad \text{e} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\Theta & \text{sen}\,\Theta \\ -\text{sen}\,\Theta & \cos\Theta \end{bmatrix}$$

3.8 — MATRIZ ORTOGONAL

Matriz *ortogonal* é a matriz quadrada A cuja transposta A^t coincide com a inversa A^{-1}. A matriz A do exemplo 4, item 3.7.1 é ortogonal. De fato:

$$A = \begin{bmatrix} \cos\Theta & -\text{sen}\,\Theta \\ \text{sen}\,\Theta & \cos\Theta \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A^t = \begin{bmatrix} \cos\Theta & \text{sen}\,\Theta \\ -\text{sen}\,\Theta & \cos\Theta \end{bmatrix} = A^{-1}$$

3.9 — PROBLEMAS RESOLVIDOS

Nos problemas 1 a 3, determinar por meio da regra prática (item 3.7.1.1) a matriz inversa de cada uma das matrizes dadas

1)

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 7 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Solução:

$$\det A = \begin{vmatrix} 12 & 7 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 36 - 35 = 1 \quad e \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -5 & 12 \end{bmatrix}$$

2)

$$B = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -6 & -8 \end{bmatrix}$$

Solução:

$$\det B = \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -6 & -8 \end{vmatrix} = 32 - 12 = 20 \quad e \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-8}{20} & \frac{2}{20} \\ \frac{6}{20} & -\frac{4}{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-4}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{3}{10} & -\frac{2}{10} \end{bmatrix}$$

3)

$$C = \begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Solução:

$$\det C = \begin{vmatrix} 10 & 17 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 50 - 51 = -1 \quad e \quad C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{-1} & \frac{-17}{-1} \\ \frac{-3}{-1} & \frac{10}{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 17 \\ 3 & -10 \end{bmatrix}$$

4) Calcular, por operações elementares, a matriz inversa da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 12 \\ 3 & 8 & 16 \end{bmatrix}$$

Solução:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 12 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & 16 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \rightarrow \frac{1}{2} L_2^*: \\ \\ \\ \end{array} \qquad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 12 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & 16 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \rightarrow L_2 - 2\,L_1: \\ \rightarrow L_3 - 3\,L_2: \end{array}$$

Solução:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \rightarrow \frac{1}{2} L_2^*: \\ \\ \end{array} \qquad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \rightarrow L_1 - 2\,L_2: \\ \\ \rightarrow L_3 - 2\,L_2: \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Tendo em vista que a matriz A não pode ser transformada na matriz I, ela não tem inversa, isto é, A é uma matriz singular.

- A matriz A foi transformada numa matriz triangular superior cujos elementos da diagonal principal são 1, 1 e 0 e, portanto, o termo principal $T_p = 1 \times 1 \times 0 = 0$, o que significa que det A = 0. Por outro lado, se se considerasse as alterações assinaladas com asteriscos e feitas as devidas compensações, se teria:

det $A = 2 \times 2 \times 0 = 0$.

Nos problemas 5 a 8, dadas as matrizes a seguir, verificar se cada uma delas é ortogonal:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Soluções:

5)

$$AA^t = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O fato de ser $AA^t = I$ implica ser $A^t = A^{-1}$ e, portanto, A é ortogonal.

6)

$$BB^t = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Tendo em vista que $BB^t \neq I$, B não é ortogonal.

7)

$$CC^t = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O fato de ser $CC^t = I$ implica ser $C^t = C^{-1}$ e, por conseguinte, C é ortogonal.

8)

$$DD^t = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O fato de ser $DD^t = I$ implica ser $D^t = D^{-1}$ e, por conseguinte, D é ortogonal.

9) Supondo as matrizes A e C quadradas, de mesma ordem e inversíveis, resolver a equação matricial na qual X é a variável.

$CAX^t = C$

Solução:

a) Pré-multiplicando ambos os membros por C^{-1}, vem:

$C^{-1}(CAX^t) = C^{-1}C$

$(C^{-1}C)AX^t = C^{-1}C$

$C^{-1}C = I$

$IAX^t = I$

$IA = A$

$AX^t = I$

b) Pré-multiplicando ambos os membros por A^{-1}, vem:

$A^{-1}(AX^t) = A^{-1}I$

$(A^{-1}A)X^t = A^{-1}I$

$A^{-1}A = I$

$A^{-1}I = A^{-1}$

$IX^t = A^{-1}$

$IX = X$

$X^t = A^{-1}$

$X = (A^{-1})^t$

3.10 — PROBLEMAS PROPOSTOS

Nos problemas 1 e 2, transformar na matriz unidade as matrizes dadas.

1) $$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

2) $$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Nos problemas 3 a 6, determinar, pela regra prática (item 3.7.1.1), a matriz inversa de cada uma das matrizes dadas.

3) $A = \begin{bmatrix} 6 & -12 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}$

4) $B = \begin{bmatrix} 3 & 11 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

5) $C = \begin{bmatrix} -7 & 9 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$

6) $D = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Nos problemas 7 a 10, verificar se a matriz de cada um deles é ortogonal.

7) $A = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

8) $B = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

9) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

10) $D = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Nos problemas 11 a 26, calcular a matriz inversa de cada uma das matrizes dadas.

11) $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -5 & 4 \end{bmatrix}$

12) $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 7 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

13) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

14) $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

15) $E = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -10 \\ -2 & -4 & -4 \\ 2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$

16) $F = \begin{bmatrix} -3 & -6 & -12 \\ 0 & 3 & -3 \\ -6 & -9 & -24 \end{bmatrix}$

17) $G = \begin{bmatrix} -1 & 10 & -7 \\ -1 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

18) $H = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

19) $J = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -2 & -4 & -5 \\ -3 & -5 & -6 \end{bmatrix}$

20) $L = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -3 \\ 2 & -4 & -1 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$

21) $M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

22) $N = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

23) $P = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ -1 & -7 & 3 \end{bmatrix}$

24) $Q = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -3 & -3 & -4 \\ -3 & -4 & -3 \end{bmatrix}$

25) $R = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

26) $S = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & -8 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

27) Calcular o valor de k para que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & k \end{bmatrix}$$

não tenha inversa.

Nos problemas 28 a 31, supondo as matrizes A, B, C e D quadradas, de mesma ordem e inversíveis, resolver as equações matriciais nas quais X é a variável.

28) $ADX = ABC$

29) $DX^t = DC$

30) $ABCX^2D^2 = ABCXD$

31) $D^{-1}XD = AC$

3.10.1 — Respostas ou roteiros para os problemas propostos

1 e 2) Roteiro: Esses problemas são resolvidos de modo análogo ao do exemplo do item 3.6.1.

3 a 6) Roteiro: Esses problemas são resolvidos de modo análogo ao dos problemas 1 a 3 do item 3.9.

7 a 10) Roteiro: Esses problemas são resolvidos de modo análogo ao dos problemas 5 a 8 do item 3.9.

11) $$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{14}{3} & -\frac{9}{3} & -\frac{13}{3} \\ -2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

12) B não tem inversa

13) $$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

14) $$D^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

15) $$E^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & \frac{5}{2} & -5 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

16) $$F^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{11}{3} & \frac{4}{3} & -2 \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

17) $$G^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{3}{2} & -2 & -\frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

18) H não tem inversa

19) $J^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

20) $L^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -11 \\ 5 & 3 & -9 \\ -8 & -5 & 14 \end{bmatrix}$

21) $M^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

22) $N^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -10 & -8 \\ -4 & 7 & 6 \\ 3 & -6 & -5 \end{bmatrix}$

23) $P^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -3 & -2 & -2 \end{bmatrix}$

24) $Q^{-1} = \begin{bmatrix} -7 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

25) $R^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$

26) $S^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

27) Roteiro: Resolver a equação

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & k \end{vmatrix} = 0$$

pois a matriz cujo determinante é nulo não tem inversa.

28) $X = D^{-1}BC$

29) $X = C^t$

30) $X = D^{-1}$

31) $X = DACD^{-1}$

CAPÍTULO 4
SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

4.1 — EQUAÇÃO LINEAR

Equação linear é uma equação da forma:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n = b$$

na qual x_1, x_2, ..., x_n são as variáveis; a_1 a_2, ..., a_n são os respectivos coeficientes das variáveis e b é o termo independente.

• Os valores das variáveis que transformam uma equação linear em identidade, isto é, que satisfazem a equação, constituem sua solução. Esses valores são denominados *raízes* da equação linear. Exemplo: a equação

$$2x + y = 10$$

admite, entre outras, as raízes $x = 3$ e $y = 4$, pois: $2 \times 3 + 4 = 10$.

4.2 — SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

A um conjunto de equações lineares se dá o nome de *sistema de equações lineares:*

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \ldots + a_{mn}\,x_m = bm \end{cases}$$

- Os valores das variáveis que transformam simultaneamente as equações de um sistema linear em identidade, isto é, que satisfazem a todas as equações do sistema, constituem sua solução. Esses valores são denominados *raízes* do sistema de equações lineares.

4.2.1 — Sistema compatível

Diz-se que um sistema de equações lineares é *compatível* quando admite solução, isto é, quando tem raízes. Um sistema compatível pode ser *determinado* ou *indeterminado*:

- o sistema é *determinado* quando admite uma única solução. Exemplo: o sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y = 18 \\ 3x + 4y = 25 \end{cases}$$

é determinado, pois tem como raízes unicamente $x = 3$ e $y = 4$.

- o sistema é *indeterminado* quando admite mais de uma solução (na verdade, admite infinitas soluções). Exemplo: o sistema

$$\begin{cases} 4x + 2y = 100 \\ 8x + 4y = 200 \end{cases}$$

é indeterminado, pois admite infinitas soluções:

x	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	...
y	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	...

4.2.2 — Sistema incompatível

Diz-se que um sistema de equações lineares é *incompatível* quando não admite solução. Exemplo: o sistema

$$\begin{cases} 3x + 9y = 12 \\ 3x + 9y = 15 \end{cases}$$

é incompatível, pois a expressão $3x + 9y$ não pode ser simultaneamente igual a 12 e igual a 15 para mesmos valores de x e y.

4.2.3 — Sistema linear homogêneo

Quando num sistema de equações lineares os termos independentes são todos nulos, o sistema é chamado *homogêneo*. Exemplo: é homogêneo o sistema

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 = 0 \\ 12x_1 + 24x_2 = 0 \end{cases}$$

- Todo sistema linear homogêneo tem, pelo menos, uma solução, denominada *solução trivial*: $x_i = 0$ (no caso, $i = 1, 2$), isto é, $x_1 = x_2 = 0$. Além da solução trivial, o sistema homogêneo pode ter, não necessariamente, outras soluções, denominadas *soluções próprias*. No exemplo dado, as soluções próprias são:

$$x_1 = -2x_2$$

isto é, a cada valor arbitrário atribuído a x_2 se obtém um valor para x_1, e cada conjunto desses dois valores satisfaz o sistema.

4.3 — SISTEMAS EQUIVALENTES

Diz-se que dois sistemas de equações lineares são equivalentes quando admitem a mesma solução. Exemplo: os sistemas

$$\begin{cases} 3x + 6y = 42 \\ 2x - 4y = 12 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x + 2y = 14 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$$

são equivalentes porque admitem a mesma solução: $x = 10$ e $y = 22$.

4.3.1 — Operações Elementares e Sistemas Equivalentes

Um sistema de equações lineares se transforma num sistema equivalente quando se efetuam operações elementares sobre suas equações:

I) Permutação de duas equações.

II) Multiplicação de uma equação por um número real diferente de zero.

III) Substituição de uma equação por sua soma com outra equação previamente multiplicada por um número real diferente de zero.

● As operações elementares aplicadas a um sistema de equações lineares serão indicadas do mesmo modo que na inversão de matrizes.

4.4 — ESTUDO E SOLUÇÃO DOS SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Por razões de ordem didática, o estudo e a solução dos sistemas de equações lineares será feito, separadamente, nos dois casos em que podem se apresentar:

1º) Sistema de n equações lineares com igual número de variáveis.

2º) Sistema de m equações lineares em n variáveis ($m \neq n$).

4.4.1 — Sistema de n equações lineares com n variáveis

Para resolver um sistema de n equações lineares com n variáveis serão apresentados três métodos: o de Gauss-Jordan, o da matriz inversa e o da regra de Cramer. Em 4.4.1.4, alíneas *a*), *b*) e *c*), se informará em que casos é conveniente utilizar cada método.

- O método de Gauss-Jordan e o da matriz inversa exigem que a matriz dos coeficientes das variáveis possa ser transformada na matriz I. Em 4.4.2.5, exemplos 1 e 2, são tratados casos em que a referida matriz não pode ser transformada na matriz unidade, ao mesmo tempo em que se indica a maneira de obter a solução dos sistemas correspondentes.

4.4.1.1 – Método de Gauss-Jordan

Considere o leitor, inicialmente, o seguinte sistema de equações lineares e sua transformação em sistemas equivalentes, até obter a sua solução:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 22 \rightarrow \frac{1}{2}L_1: \\ 5x - 15y = -20 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1x + 2y = 11 \\ 5x - 15y = -20 \rightarrow L_2 - 5L_1: \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1x + 2y = 11 \\ 0x - 25y = -75 \rightarrow -\frac{1}{25}L_2: \end{cases} \qquad \begin{cases} 1x + 2y = 11 \rightarrow L_1 - 2L_2: \\ 0x + 1y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1x + 0y = 5 \\ 0x + 1y = 3 \end{cases} \qquad \text{ou:} \quad \begin{cases} 1x = 5 \\ 1y = 3 \end{cases}$$

isto é, $x = 5$ e $y = 3$.

O leitor atento terá verificado que:

a) a matriz dos coeficientes das variáveis foi transformada, por meio de operações adequadas, na matriz unidade; ao mesmo tempo, submetida às mesmas operações, a matriz-coluna dos termos independentes foi transformada nas raízes das equações, isto é, na solução do sistema;

b) as variáveis x e y, durante as operações realizadas, praticamente não participaram do processo, a não ser por sua presença ao lado dos coeficientes.

Diante dessas duas constatações, é fácil explicar e entender o método de Gauss-Jordan que, por sua vez, é muito simples:

1º) coloca-se ao lado da matriz dos coeficientes das variáveis, separada por um traço vertical, a matriz-coluna dos termos independentes:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 22 \\ 5 & -15 & -20 \end{array}\right]$$

Essa matriz, associada ao sistema de equações lineares, é chamada *matriz ampliada do sistema*. Cada linha dessa matriz é uma representação abreviada da equação correspondente no sistema. O traço vertical é dispensável, mas é colocado para facilitar a visualização da matriz dos coeficientes das variáveis e da matriz-coluna dos termos independentes;

2º) transforma-se, por meio de operações adequadas, a matriz dos coeficientes das variáveis na matriz unidade, aplicando-se simultaneamente à matriz-coluna, colocada ao lado da matriz dos coeficientes das variáveis, as mesmas operações;

3º) transformada a matriz dos coeficientes das variáveis na matriz unidade, a matriz dos termos independentes ficará transformada, ao final, na solução do sistema. Exemplo: resolver o sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 1x_2 + 3x_3 = 8 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = -12 \end{cases}$$

Solução:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 8 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & -12 \end{array}\right] \begin{array}{l} \rightarrow \frac{1}{2}L_1: \\ \\ \\ \end{array} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & -12 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \rightarrow L_2 - 4L_1: \\ \rightarrow L_3 - 2L_1: \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \\ 0 & 4 & 0 & -20 \end{array}\right] \to L_{23}: \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 4 \\ 0 & 4 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{array}\right] \to \frac{1}{4}L_2:$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{array}\right] \to L_1 - \frac{1}{2} L_2: \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{13}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{array}\right] \to -\frac{1}{4}L_3:$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{13}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \to L_1 - \frac{3}{2} L_2: \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

De acordo com o que ficou explicado, o sistema inicial de equação lineares se transformou no sistema equivalente:

$$\begin{cases} 1x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 2 \\ 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 = -5 \\ 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 3, \end{cases}$$

isto é, $x_1 = 2$, $x_2 = -5$ e $x_3 = 3$.

4.4.1.2 – Método da matriz inversa

Seja o sistema:

$$\begin{cases} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots + a_{1n}\, x_n = b_1 \\ a_{21}\, x_2 + a_{22}\, x_2 + \ldots + a_{2n}\, x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ an_1\, x_1 + an_2\, x_2 + \ldots + a_{nn}\, x_n = b_n \end{cases}$$

Fazendo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ e } \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

o sistema pode ser escrito sob a forma matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

ou, utilizando a notação abreviada:

$$AX = B$$

Admitindo a existência da matriz A^{-1}, isto é, admitindo que a matriz dos coeficientes das variáveis pode ser transformada na matriz I, e pré-multiplicando ambos os membros da igualdade por A^{-1}, vem:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B$$

$$A^{-1}A = I$$

$$IX = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B \tag{1}$$

A solução do sistema é bastante simples: basta multiplicar a matriz A^{-1}, inversa da matriz A dos coeficientes das variáveis, pela matriz-coluna B dos termos independentes. Exemplo: resolver o sistema:

$$\begin{cases} 6x + 2y = -6 \\ 10x + 5y = -5 \end{cases}$$

Solução:

Fazendo:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} -6 \\ -5 \end{bmatrix},$$

o sistema se transforma em:

$$AX = B$$

e a solução é dada pela fórmula (1):

$$X = A^{-1}B$$

mas:

$$\det A = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 10 & 5 \end{vmatrix} = 6(5) - 2(10) = 30 - 20 = 10 \quad e \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{10} & -\frac{2}{10} \\ -\frac{10}{10} & \frac{6}{10} \end{bmatrix}$$

logo:

$$X = \begin{bmatrix} \frac{5}{10} & -\frac{2}{10} \\ -\frac{10}{10} & \frac{6}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

isto é: $x_1 = -2$ e $x_2 = 3$.

4.4.1.3 – Regra de Cramer

A regra de Cramer, que não utiliza as operações elementares, é de uso muito restrito e não será demonstrada (mas verificada por meio de exemplos), consiste no seguinte:

1º) calcula-se o determinante D da matriz dos coeficientes das variáveis x_i;

2º) calcula-se o determinante D_i da matriz que se obtém da matriz dos coeficientes das variáveis, substituindo a coluna dos coeficientes da variável x_i pela coluna dos termos independentes;

3º) calcula-se x_i pela fórmula:

$$x_i = \frac{D_i}{D}$$

No caso de um sistema de 2 equações lineares com 2 variáveis, i varia de 1 a 2; se se tratar de um sistema de 3 equações lineares com 3 variáveis, i varia de 1 a 3. Exemplos:

1) Resolver o sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 22 \\ 5x_1 - 15x_2 = -20 \end{cases}$$

Solução:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -15 \end{vmatrix} = -30 - 20 = -50$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 22 & 4 \\ -20 & -15 \end{vmatrix} = -330 + 80 = -250$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 22 \\ 5 & -20 \end{vmatrix} = -40 - 110 = -150$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-250}{-50} = 5$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-150}{-50} = 3$$

Este problema foi resolvido em 4.4.1.1, com as variáveis designadas por x e y, como introdução à solução de um sistema de n equações lineares com n variáveis pelo método de Gauss-Jordan.

2) Resolver o sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 1x_2 + 3x_2 = 8 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = -12 \end{cases}$$

Solução:

O cálculo dos determinantes, quer pela regra de Sarrus, quer desenvolvendo-o por uma linha (coluna), fica a cargo do leitor.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 32 \qquad D_1 = \begin{vmatrix} 8 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ -12 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 64$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & -12 & 3 \end{vmatrix} = -160 \qquad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 4 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & -12 \end{vmatrix} = 96$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{64}{32} = 2$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-160}{32} = -5$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{96}{32} = 3$$

Este problema foi resolvido em 4.4.1 – Exemplo, pelo método de Gauss-Jordan. O leitor, após calcular D, D_1, D_2 e D_3, poderá comparar as duas maneiras de encontrar as soluções e decidir qual delas julga a mais conveniente.

4.4.1.4 – Conveniência da utilização dos métodos de Gauss-Jordan, da matriz inversa e da regra de Cramer

a) É conveniente empregar o método de Gauss-Jordan para resolver sistemas de n equações lineares com n variáveis nos dois seguintes casos:

1º) quando se tem para resolver um único sistema;

2º) quando se tem para resolver um conjunto de sistemas de n equações (e igual número de variáveis), tais que as matrizes dos coeficientes das variáveis de cada sistema sejam diferentes umas das outras.

- Dentre as inúmeras aplicações do método de Gauss-Jordan, é de se destacar a que, embora não explicitamente, contribui para a solução de problemas de *Programação Linear*.

- De outra parte, deve-se salientar que o método citado é particularmente indicado quando o número n de equações for relativamente grande.

b) É conveniente empregar o método da matriz inversa no caso em que se tem para resolver conjuntos de sistemas, todos com n equações (e igual número de variáveis), tais que as matrizes dos coeficientes das variáveis de cada sistema sejam todas iguais, variando somente os termos independentes. Nesse caso, basta calcular somente a inversa de uma única matriz, com a qual, por meio da fórmula (1) de 4.4.1.2, se resolverão todos os sistemas. Exemplo: resolver os seguintes sistemas de equações lineares:

$$\begin{cases} 2x_1 + 1x_2 + 7x_3 = b_1 \\ 1x_1 + 3x_2 + 2x_3 = b_2 \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = b_3 \end{cases}$$

1) para $b_1 = 16$, $b_2 = -5$, $b_3 = 11$

2) para $b_1 = 25$, $b_2 = -11$, $b_3 = 5$

3) para $b_1 = 3$, $b_2 = 5$, $b_3 = -5$

Solução:

Fazendo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ -5 \\ 11 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ -11 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ e } B_3 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix},$$

os três sistemas se transformam em:

1) $AX = B_1$

2) $AX = B_2$

3) $AX = B_3$

e a solução é dada pela fórmula (1) de 4.4.1.2:

1) $X = A^{-1}B_1$

2) $X = A^{-1}B_2$

3) $X = A^{-1}B_3$

A inversa da matriz A, conforme foi visto no exemplo de 3.7 é:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{6}{66} & -\frac{17}{66} & \frac{19}{66} \\ -\frac{6}{66} & \frac{27}{66} & -\frac{3}{66} \\ \frac{12}{66} & \frac{1}{66} & -\frac{5}{66} \end{bmatrix},$$

por conseguinte:

1)

$$X = \begin{bmatrix} -\frac{6}{66} & -\frac{17}{66} & \frac{19}{66} \\ -\frac{6}{66} & \frac{27}{66} & -\frac{3}{66} \\ \frac{12}{66} & \frac{1}{66} & -\frac{5}{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 \\ -5 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

isto é, $x_1 = 3$, $x_2 = -4$ $x_3 = 2$.

2)

$$X = \begin{bmatrix} -\frac{6}{66} & -\frac{17}{66} & \frac{19}{66} \\ -\frac{6}{66} & \frac{27}{66} & -\frac{3}{66} \\ \frac{12}{66} & \frac{1}{66} & -\frac{5}{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 \\ -11 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

isto é, $x_1 = 2$, $x_2 = -7$ e $x_3 = 4$.

3)

$$X = \begin{bmatrix} -\frac{6}{66} & -\frac{17}{66} & \frac{19}{66} \\ -\frac{6}{66} & \frac{27}{66} & -\frac{3}{66} \\ \frac{12}{66} & \frac{1}{66} & -\frac{5}{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

isto é, $x_1 = -3$, $x_2 = 2$ e $x_3 = 1$.

• Conjuntos de sistemas desse último tipo se encontram em *Macroeconomia*, como, por exemplo, no *Quadro de Insumo-Produto de Leontieff – Fluxo de Bens e Serviços*. Países altamente desenvolvidos obtêm desse Quadro conjuntos de sistemas de dezenas ou centenas de equações lineares (e igual número de variáveis), cada sistema com a mesma matriz dos coeficientes das variáveis, mudando somente as matrizes-coluna dos termos independentes. A solução desses sistemas (que implica a inversão de uma única matriz) permite calcular a produção que deve ter cada setor em que a Economia Nacional foi dividida, a fim de atender às exigências diretas e indiretas para as utilizações intermediárias (setor produtivo) e final.

A inversão de uma dessas matrizes só foi possível com o advento dos computadores.

c) A regra de Cramer, de uso restrito como já foi dito, é utilizada, em geral, somente para resolver sistemas de 2 equações lineares com 2 variáveis ou, mesmo, de 3 equações com 3 variáveis. Para sistemas de mais de 3 equações lineares (e igual número de variáveis) a regra é praticamente inaplicável em virtude do elevado número de determinantes a calcular.

4.4.2 — Sistema de m equações lineares com n variáveis ($m \neq n$)

O método para resolver um sistema de m equações lineares com n variáveis é semelhante ao método de Gauss-Jordan, visto em 4.4.1.1, com a diferença de que a matriz dos coeficientes das variáveis não pode ser transformada na matriz unidade, porque ela é uma matriz retangular. Entretanto, o procedimento inicial é o mesmo: transforma-se no número 1, por meio de operações adequadas, cada elemento a_{ij}, no qual $i = j$, e em zeros os demais elementos das colunas em que se situam esses a_{ij}. Depois, feitas algumas considerações, se encontrará a solução do sistema. A seguir serão dados três exemplos que facilitarão a compreensão do método.

1) Resolver o sistema de 3 equações com 2 variáveis:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 16 \\ 5x_1 - 2x_2 = 4 \\ 10x_1 - 4x_2 = 3 \end{cases}$$

Solução:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 16 \\ 5 & -2 & 4 \\ 10 & -4 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \rightarrow \frac{1}{2} L_1: \\ \\ \\ \end{array} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 8 \\ 5 & -2 & 4 \\ 10 & -4 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \rightarrow L_2 - 5L_1: \\ \rightarrow L_3 - 10L_1: \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 8 \\ 0 & -12 & -36 \\ 0 & -24 & -77 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \rightarrow -\frac{1}{12} L_2: \\ \\ \end{array} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -24 & -77 \end{array}\right] \begin{array}{l} \rightarrow L_1 - 2L_2: \\ \\ \rightarrow L_3 + 24L_2: \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \end{array}\right]$$ Esta matriz corresponde ao sistema: $$\begin{cases} 1x_1 + 0x_2 = 2 \\ 0x_1 + 1x_2 = 3 \\ 0x_1 + 0x_2 = -5 \end{cases}$$

que é equivalente ao sistema dado. Ora, como não existem valores de x_1 e x_2 que satisfazem a 3ª equação ($0x_1 + 0x_2 = -5$), o sistema é incompatível.

2) Resolver o sistema de 4 equações com 2 variáveis:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 16 \\ 5x_1 - 2x_2 = 4 \\ 3x_1 + 1x_2 = 9 \\ 4x_1 - 5x_2 = -7 \end{cases}$$

Solução:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 16 \\ 5 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 9 \\ 4 & -5 & -7 \end{array}\right] \begin{array}{l} \rightarrow \frac{1}{2} L_1: \\ \\ \\ \\ \end{array} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 8 \\ 5 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 9 \\ 4 & -5 & -7 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \rightarrow L_2 -5\,L_1: \\ \rightarrow L_3 -3\,L_1: \\ \rightarrow L_4 -4\,L_1: \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 8 \\ 0 & -12 & -36 \\ 0 & -5 & -15 \\ 0 & -13 & -39 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \rightarrow -\frac{1}{12} L_2: \\ \\ \\ \end{array} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & -15 \\ 0 & -13 & -39 \end{array}\right] \begin{array}{l} \rightarrow L_1 -2\,L_2: \\ \\ \rightarrow L_3 + 5\,L_2: \\ \rightarrow L_4 + 13\,L_2: \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$ Esta matriz corresponde ao sistema: $$\begin{cases} 1x_1 + 0x_2 = 2 \\ 0x_1 + 1x_2 = 3 \\ 0x_1 + 0x_2 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 = 0 \end{cases}$$

que é equivalente ao sistema dado. As 3ª e 4ª equações não estabelecem nenhuma condição para x_1 e x_2. Portanto, a solução do sistema será dada pelas duas primeiras equações:

$$\begin{cases} 1x_1 + 0x_2 = 2 \\ 0x_1 + 1x_2 = 3, \end{cases}$$

isto é, $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$.

3) Resolva o sistema de 2 equações com 4 variáveis:

$$\begin{cases} 2x_1 - 8x_2 + 24x_3 + 18x_4 = 84 \\ 4x_1 - 14x_2 + 52x_3 + 42x_4 = 190 \end{cases}$$

Solução:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -8 & 24 & 18 & 84 \\ 4 & -14 & 52 & 42 & 190 \end{array}\right] \rightarrow \frac{1}{2}L_1: \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 12 & 9 & 42 \\ 4 & -14 & 52 & 42 & 190 \end{array}\right] \rightarrow L_2 - 4L_1:$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 12 & 9 & 42 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 22 \end{array}\right] \rightarrow \frac{1}{2}L_2: \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 12 & 9 & 42 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 11 \end{array}\right] \rightarrow L_1 + 4L_2:$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 20 & 21 & 86 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 11 \end{array}\right] \quad \text{Esta matriz corresponde ao sistema: } \begin{cases} x_1 = 86 - 20x_3 - 21x_4 \\ x_2 = 11 - 2x_3 - 3x_4, \end{cases}$$

isto é, o sistema é compatível e indeterminado, pois admite infinitas soluções. Os valores de x_1 e x_2 se obtém atribuindo valores arbitrários a x_3 e x_4:

arbitrários	x_3	3	1	0	5	2	4	.	.	.
	x_4	1	2	0	3	5	4	.	.	.
calculados	x_1	5	24	86	-77	-59	-78	.	.	.
	x_2	2	3	11	-13	-8	-9	.	.	.

4.4.2.1 – *Características de uma matriz*

Quando se dispõe de uma matriz ampliada de um sistema de m equações lineares com n variáveis e se utiliza o método exposto no item anterior para a solução do sistema, isto é, quando se transforma, enquanto for possível, no número 1, por meio de operações adequadas, cada elemento a_{ij}, para $i = j$ (a_{11}, a_{22},...), e em zeros os demais elementos das colunas em que se situam esses elementos a_{ij}, diz-se que a matriz inicial foi transformada numa *matriz em forma de escada*.

- A matriz ampliada do sistema será designada por A e a matriz em forma de escada por B.

• Nos três exemplos dados no item anterior, obtiveram-se as seguintes matrizes em forma de escada:

a) no exemplo 1:

$$B = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \end{array}\right]$$

• A denominação *matriz em forma de escada* se deve ao modo como está disposto o número 1 em cada coluna:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \end{array}\right]$$

b) no exemplo 2:

$$B = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

c) no exemplo 3:

$$B = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 20 & 21 & 86 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 11 \end{array}\right]$$

Nesses exemplos, cada matriz B, equivalente à correspondente matriz A, contém, à esquerda do traço vertical, a matriz V dos coeficientes das variáveis. São, portanto, três as matrizes a considerar. Assim, usando como referência o exemplo 1:

I) Matriz ampliada do sistema (Matriz A)

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 16 \\ 5 & -2 & 4 \\ 10 & -4 & 3 \end{array}\right]$$

II) Matriz B em forma de escada

$$B = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \end{array}\right]$$

III) Matriz V dos coeficientes das variáveis

$$V = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}\right]$$

- Examinando as matrizes B e V, verifica-se que:

a) a matriz B tem 3 linhas com elementos não todos nulos;

b) a matriz V, contida em B, tem 2 linhas com elementos não todos nulos.

Chama-se *característica* de A (da matriz ampliada de sistema), e se representa por Ca, o número de linhas com elementos não todos nulos de B (matriz em forma de escada equivalente à matriz A).

No exemplo 1, Ca =3 porque a matriz B tem 3 linhas com elementos não todos nulos.

Chama-se *característica* de V (da matriz dos coeficientes das variáveis contida em B), e se representa por Cv, o número de linhas com elementos não todos nulos de V.

No exemplo 1, Cv = 2 porque a matriz V tem 2 linhas com elementos não todos nulos.

Como se vê, nesse exemplo 1, B representa um sistema de 3 equações (m = 3) com duas variáveis (n = 2) e Ca > Cv. Nesse caso, *o sistema é incompatível*: a última linha de B representa a equação linear $0x_1 + 0x_2 = -5$ que não é satisfeita para nenhum valor de x_1 e de x_2.

- No exemplo 2, tem-se:

$$B = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{e} \quad V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nesse exemplo, B representa um sistema de 4 equações (m = 4) com 2 variáveis (n = 2) e Ca = Cv = 2 porque tanto a matriz B como a matriz V têm duas linhas com elementos não todos nulos. Nesse caso, o sistema é compatível e as duas primeiras linhas de B informam que $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$.

- No exemplo 3, tem-se:

$$B = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 20 & 21 & 86 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 11 \end{array}\right] \quad \text{e} \quad V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 20 & 21 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Nesse exemplo, B representa um sistema de 2 equações (m = 2) com 4 variáveis (n = 4) e Ca = Cv = 2. O sistema é compatível: a primeira linha de B informa que

$x_1 = 86 - 20x_3 - 21x_4$, enquanto a segunda linha informa ser $x_2 = 11 - 2x_2 - 3x_4$; os valores de x_1 e x_2 se obtém atribuindo valores arbitrários a x_2 e x_4.

- Quando Ca = Cv se dirá que a *característica* de B (matriz em forma de escada é C:

Ca = Cv = C

- As definições permitem concluir que:

Ca $\geqslant$ Cv

De fato: em virtude de V estar contida em B, as linhas de V com elementos não todos nulos estão contidas em mesmas linhas de B com elementos não todos nulos, o que implica ser, no mínimo, Ca = Cv.

Por outro lado, em virtude de B conter V, as linhas de B com elementos não todos nulos podem, eventualmente, ser em maior número do que as linhas de V com elementos não todos nulos, o que implica a possibilidade de ser Ca > Cv.
(Os exemplos 1, 2 e 3 são bastante esclarecedores.

4.4.2.2 – Característica e número de variáveis

Neste item se tratará somente do caso em que Ca = Cv = C, isto é, em que *o sistema é compatível* e se examinará a relação entre característica e número de variáveis.

1º) A característica C não pode ser maior do que o número de variáveis. Para que a característica C fosse maior do que o número de variáveis, se deveria ter uma matriz reduzida à forma de escada do seguinte tipo, por exemplo:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 4 & r \end{array}\right]$$

sendo r um número real. Nesse caso, a característica C seria 3 e o número de variáveis seria 2. Entretanto, a matriz dada não é uma matriz reduzida à forma de escada: o número 4 que aparece na 3ª linha pode ser transformado em zero por adequada operação, enquanto o número r também deverá ser transformado em zero pela mesma operação (se r fosse transformado num número diferente de zero, se estaria fora da hipótese, pois que, no caso, Ca seria maior do que Cv, e a hipótese em que se está trabalhando é que o sistema é compatível, isto é, que Ca = Cv = C). Assim, na verdade, a matriz antes citada é:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

e a característica C = 2 é igual ao número de variáveis n = 2.

2º) Quando a característica C é igual ao número de variáveis, *o sistema é compatível e determinado*. É o que acontece com o exemplo 2, citado anteriormente. A matriz reduzida à forma de escada:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

representa um sistema que tem m = 4, n = 2, C = n = 2, e a solução, como já foi visto, é: $x_1 = 2$ e $x_3 = 3$.

3º) Quando a característica C é menor do que o número de variáveis, o *sistema é compatível e indeterminado*. É o que acontece com o exemplo 3 citado anteriormente. A matriz reduzida à forma de escada

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 20 & 21 & 86 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 11 \end{array}\right]$$

representa um sistema que tem m = 2, n = 4, C = 2, C < n e a solução, como já foi visto, é: $x_1 = 86 - 20x_3 - 21x_4$ e $x_2 = 11 - 2x_3 - 3x_4$, sendo os valores de x_1 e x_2 obtidos atribuindo-se valores arbitrários a x_3 e x_4.

4.4.2.3 – Grau de liberdade de um sistema

Chama-se *grau de liberdade* de um sistema de equações lineares à diferença g = n – C. No já tantas vezes citado exemplo 3, o grau de liberdade do sistema é

$$g = 4 - 2 = 2,$$

uma vez que, naquele sistema, n = 4 e C = 2.

O significado do grau de liberdade de um sistema de equações lineares, o leitor certamente já percebeu: informa o número de variáveis às quais devem ser atribuídos valores arbitrários para calcular cada uma das variáveis restantes.

4.4.2.4 – Características, número de variáveis e soluções

O que foi dito e explicado nos três itens anteriores pode ser assim resumido:

1) A característica Ca de uma matriz ampliada A, que representa um sistema de m equações lineares com n variáveis, não pode ser menor do que a característica Cv da matriz V dos coeficientes das variáveis contida na matriz B reduzida à forma de escada.

2) Quando Ca > Cv, o sistema é incompatível.

3) Quando Ca = Cv = C, C é a característica da matriz B reduzida à forma de escada.

4) C não pode ser maior do que n, isto é, $C \leqslant n$.

   4.1) Quando C = n, o sistema é compatível e determinado.

   4.2) Quando C < n, o sistema é compatível e indeterminado.

5) Grau de liberdade de um sistema é a diferença $g = n - C$.

4.4.2.5 – Matriz quadrada dos coeficientes das variáveis e matriz unidade

Em 4.4.1 foi dito que, num sistema de n equações lineares com n variáveis, nem sempre a matriz dos coeficientes das variáveis poderia ser transformada na matriz unidade e os casos em que isso ocorresse seriam aqui tratados. Dois exemplos esclarecerão o problema e indicarão a maneira de obter a solução desses sistemas.

1) Resolver o sistema de 2 equações com 2 variáveis:

$$\begin{cases} 3x + 9y = 12 \\ 3x + 9y = 15 \end{cases}$$

Solução:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 9 & 12 \\ 3 & 9 & 15 \end{array}\right] \to \frac{1}{3}L_1: \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 9 & 15 \end{array}\right] \to L_2 - 3\,L_1: \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

Tendo em vista que Ca = 2 e que Cv = 1, isto é, que Ca > Cv, o sistema é incompatível.

2) Resolver o sistema de 2 equações com 2 variáveis:

$$\begin{cases} 4x + 2y = 100 \\ 8x + 4y = 200 \end{cases}$$

Solução:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 100 \\ 8 & 4 & 200 \end{array}\right] \rightarrow \frac{1}{4}L_1: \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & 25 \\ 8 & 4 & 200 \end{array}\right] \rightarrow L_2 - 8\,L_1: \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & 25 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Tendo em vista que Ca = Cv = C = 1 e que n = 2, isto é, C < n, o sistema é compatível e indeterminado. A primeira linha da matriz reduzida à forma de escada representa a equação 1x = 25 – 0,5y, isto é, os valores de x são obtidos ao se atribuir valores arbitrários à variável y (O grau de liberdade g = n – C = 2 – 1 = 1 já podia indicar que os valores de x dependiam de uma única variável).

- Os dois exemplos já foram mencionados em 4.2.1 e 4.2.2.

- Quando num sistema de n equações com n variáveis a matriz dos coeficientes das variáveis não puder ser transformada, por operações elementares, na matriz unidade (caso dos exemplos 1 e 2), a solução dirá necessariamente que o sistema é incompatível ou compatível e indeterminado.

Ao contrário, quando a matriz dos coeficientes das variáveis pode ser transformada na matriz unidade (caso dos exemplos resolvidos pelo método de Gauss-Jordan item 4.4.1.1, e pelo método da matriz inversa, item 4.4.1.2), a solução é sempre compatível e determinada.

4.4.3 — Permutação de linhas e de colunas na solução de sistemas de m equações lineares com n variáveis

Durante a execução das operações para transformar a matriz ampliada de um sistema na matriz em forma de escada, podem ocorrer os seguintes casos particulares:

1º) Numa linha, um zero no local onde se pretente obter o número 1; nesse caso, efetua-se a troca dessa linha pela seguinte ou por uma outra das seguintes, se for o caso, prosseguindo-se, após, normalmente. Exemplo:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 15 \\ 0 & 0 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 9 & 18 \\ 0 & 2 & 3 & 14 \end{array}\right] \to L_{24}: \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 15 \\ 0 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 0 & 9 & 18 \\ 0 & 0 & 6 & 12 \end{array}\right]$$

Em virtude de não resolver trocar a 2ª linha pela 3ª, a solução foi trocar a 2ª linha pela 4ª: agora, em lugar de um zero se tem em a_{22} o número 2 que, por adequada operação, pode ser transformado no número 1.

2º) Ainda, numa linha, um zero no local onde se pretende obter o número 1 sem possibilidade de trocar a linha por qualquer uma das seguintes em virtude de, na coluna correspondente, somente haver elementos nulos abaixo do citado zero. Exemplo:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 5 & 21 \\ 0 & 0 & 4 & -8 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 31 \end{array}\right]$$

Nesse caso, de nada adianta trocar a linha 2 pela linha 3. Sabendo, entretanto, que essa matriz representa o sistema:

$$\begin{cases} 1x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 21 \\ 0x_1 + 0x_2 + 4x_3 - 8x_4 = -20 \\ 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 7x_4 = 31, \end{cases}$$

pode-se fazer a troca de duas colunas: a coluna da variável x_2 pela da variável x_3, troca que se indicará por C (x_2, x_3)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 5 & 21 \\ 0 & 0 & 4 & -8 & -20 \\ 3 & 0 & 1 & 7 & 31 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 5 & 21 \\ 0 & 4 & 0 & -8 & -20 \\ 3 & 1 & 0 & 7 & 31 \end{array}\right]$$

$\downarrow$

$C(x_2, x_3)$

Com essa operação, em lugar de um zero em a_{22} se obtém o número 4 que, por adequada operação, pode ser transformado no número 1.

• A hipótese de haver uma coluna com elementos todos nulos não deverá ocorrer: seria o mesmo se a variável não fizesse parte do sistema. Assim, o sistema:

$$\begin{cases} 4x_1 + 0x_2 + 2x_3 = 12 \\ 3x_1 + 0x_2 + 5x_3 = 16 \end{cases} \quad \text{é, na verdade:} \quad \begin{cases} 4x_1 + 2x_3 = 12 \\ 3x_1 + 5x_3 = 16 \end{cases}$$

• Em 4.5, na solução do problema 10, aparecem os casos de troca de linhas e de troca de colunas.

4.5 — PROBLEMAS RESOLVIDOS

Antes de iniciar a solução de problemas, convém esclarecer que:

I) Para classificar qualquer sistema de equações lineares ($m = n$, $m \neq n$, homogêneo ou não), será usada sempre a mesma notação e utilizado sempre o mesmo critério. Assim:

a) A é a matriz ampliada do sistema (contém a matriz dos coeficientes das variáveis e a matriz-coluna dos termos independentes, ambas separadas por um traço vertical);

b) B é a matriz ampliada reduzida à forma de escada;

c) Ca é a característica da matriz ampliada A (número de linhas com elementos não todos nulos de B);

d) Cv é a característica da matriz V, contida em B, dos coeficientes das variáveis (número de linhas com elementos não todos nulos de V);

e) C (quando Ca = Cv = C, o que nem sempre ocorre, pois Ca pode ser maior do que Cv) é a característica da matriz B reduzida à forma de escada;

f) m é o número de equações;

g) n é o número de variáveis;

h) $g = n - C$ é o grau de liberdade do sistema.

Por outro lado:

i) Se Ca > Cv, o sistema é incompatível;

j) Se Ca = Cv = C, o sistema é compatível. Nesse caso:

j_1) se C = n, o sistema é determinado;

j_2) se C < n, o sistema é indeterminado.

II) Por razões de ordem didática, o estudo da solução de sistemas de equações lineares foi feito, separadamente, nos dois casos em que podem se apresentar, nos itens 4.4.1 e 4.4.2 (m = n e m ≠ n.) Entretanto daqui por diante, até o final do Capítulo, salvo menção expressa em contrário, será utilizado para a solução de qualquer sistema de equações lineares o método geral da transformação da matriz ampliada A do sistema na *matriz equivalente* B reduzida à forma de escada.

Nos problemas 1 a 6, classificar e resolver os sistemas:

1)

$$\begin{cases} 2x + 4y + 6z = -6 \\ 3x - 2y - 4z = -38 \\ 1x + 2y + 3z = -3 \end{cases}$$

Este sistema é representado pela matriz:

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & -6 \\ 3 & -2 & -4 & -38 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \end{array}\right]$$

Solução:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & -6 \\ 3 & -2 & -4 & -38 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \to \frac{1}{2}L_1: \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 3 & -2 & -4 & -38 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \to L_2 - 3\,L_1: \\ \to L_3 - 1\,L_1: \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & -8 & -13 & -29 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \to -\frac{1}{8}L_2: \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{13}{8} & \frac{29}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \to L_1 - 2\,L_2: \\ \\ \\ \end{array}$$

$$B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{41}{4} \\ 0 & 1 & \frac{13}{8} & \frac{29}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Esta matriz corresponde ao sistema:

$$\begin{cases} 1x + 0y - \frac{1}{4}z = -\frac{41}{4} \\ 0x + 1y + \frac{13}{8}z = \frac{29}{8} \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases}$$

Examinando a matriz B, verifica-se que Ca = Cv = C =2; logo, o sistema é compatível. Mas n = 3, isto é, C < n, o que significa ser o sistema indeterminado e seu grau de liberdade: g = n – C = 3 – 2 = 1.

De outra parte, examinando o sistema a que corresponde a matriz B, verifica-se que a 3ª equação não estabelece nenhuma condição para x, y e z; por isso, a solução do sistema é dada pelas duas primeiras equações:

$$x = \frac{-41 + z}{4} \quad \text{e} \quad y = \frac{29 - 13z}{8}$$

Os valores de x e y são obtidos atribuindo valores arbitrários para z. Assim, se z = 1, por exemplo, vem:

$$x = \frac{-41 + 1}{4} = \frac{-40}{4} = -10 \quad \text{e} \quad y = \frac{29 - 13}{8} = \frac{16}{8} = 2$$

Para outros valores de z, são obtidas outras soluções.

2)

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ 4x - 4y - 2z = 0 \end{cases}$$

Este sistema é representado pela matriz:

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

Solução trivial: x = y = z = 0. Soluções próprias:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & -2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \to L_2 - 2\,L_1: \\ \to L_3 - 4\,L_1: \end{array} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 2 & 0 \end{array}\right] \to -\frac{1}{5}L_2:$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & -8 & 2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \to L_1 - 1\,L_2: \\ \\ \to L_3 + 8\,L_2: \end{array} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{14}{5} & 0 \end{array}\right] \to -\frac{5}{14}L_3:$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \rightarrow L_1 + \frac{2}{5}L_3: \\ \rightarrow L_2 + \frac{3}{5}L_3: \\ \end{array} \qquad B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Examinando a matriz B, verifica-se que Ca = Cv = C = 3 = n; logo, o sistema é compatível e determinado. Tendo em vista que o sistema inicial é homogêneo e que é compatível e determinado, não possui soluções próprias, ou seja, só admite a solução trivial: $x = y = z = 0$.

3)

$$\begin{cases} 3x + 2y - 5z = 8 \\ 2x - 4y - 2z = -4 \\ 1x - 2y - 3z = -4 \end{cases}$$

Este sistema é representado pela matriz:

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & 8 \\ 2 & -4 & -2 & -4 \\ 1 & -2 & -4 & -4 \end{array}\right]$$

Solução:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & 8 \\ 2 & -4 & -2 & -4 \\ 1 & -2 & -3 & -4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \rightarrow \frac{1}{3}L_1: \\ \\ \end{array} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{8}{3} \\ 2 & -4 & -2 & -4 \\ 1 & -2 & -3 & -4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \rightarrow L_2 - 2\,L_1: \\ \rightarrow L_3 - 1\,L_1: \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & -\frac{16}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{28}{3} \\ 0 & -\frac{8}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{20}{3} \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \rightarrow -\frac{3}{16}\,L_2: \\ \end{array} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & -\frac{8}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{20}{3} \end{array}\right] \begin{array}{l} \rightarrow L_1 - \frac{2}{3}\,L_2: \\ \\ \rightarrow L_3 + \frac{8}{3}L_2: \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \rightarrow -\frac{1}{2}L_3: \end{array} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \rightarrow L_1 + \frac{3}{2}L_3: \\ \rightarrow L_2 + \frac{1}{4}L_3: \\ \end{array}$$

$$B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$ Ésta matriz corresponde ao sistema: $$\begin{cases} 1x + 0y + 0z = 3 \\ 0x + 1y + 0z = 2 \\ 0x + 0y + 1z = 1 \end{cases}$$

Examinando a matriz B, verifica-se que Ca = Cv = C = n; logo, o sistema é compatível e determinado.

De outra parte, examinando o sistema a que corresponde a matriz B, verifica-se que: $x = 3$, $y = 2$ e $z = 1$.

4)

$$\begin{cases} 3x + 6y = 0 \\ 12x + 24\,y = 0 \\ \frac{3}{2}x + 3y = 0 \\ \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}y = 0 \end{cases}$$ Este sistema é representado pela matriz: $$A = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 0 \\ 12 & 24 & 0 \\ \frac{3}{2} & 3 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{2} & 0 \end{array}\right]$$

Solução trivial: $x = y = 0$. Soluções próprias:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 0 \\ 12 & 24 & 0 \\ \frac{3}{2} & 3 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{2} & 0 \end{array}\right] \rightarrow \frac{1}{3}L_1: \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 12 & 24 & 0 \\ \frac{3}{2} & 3 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{2} & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \rightarrow L_2 - 12\,L_1: \\ \rightarrow L_3 - \frac{3}{2}L_1: \\ \rightarrow L_4 - \frac{3}{4}L_1: \end{array}$$

$$B = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$ Esta matriz corresponde ao sistema: $$\begin{cases} 1x + 2y = 0 \\ 0x + 0y = 0 \\ 0x + 0y = 0 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}$$

Examinando a matriz B, verifica-se que Ca = Cv = C = 1; logo, o sistema é compatível.

Mas $n = 2$, isto é, $C < n$, o que significa ser o sistema indeterminado e seu grau de liberdade é: $g = n - C = 2 - 1 = 1$.

De outra parte, examinando o sistema a que corresponde a matriz B, verifica-se que as três últimas equações não estabelecem nenhuma condição para x e y; por isso, as soluções próprias do sistema são dadas pela 1ª equação:

$$x = -2y$$

Os valores de x são obtidos atribuindo-se valores arbitrários a y.

5)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ -3x_1 + 4x_2 = 3 \\ 2x_1 - x_2 = -6 \end{cases}$$

Este sistema é representado pela matriz:

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -6 \end{array}\right]$$

Solução

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -6 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \to L_2 + 3\,L_1: \\ \to L_3 - 2\,L_1: \end{array} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 10 & 15 \\ 0 & 5 & -14 \end{array}\right] \to \frac{1}{10} L_2:$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1{,}5 \\ 0 & -5 & -14 \end{array}\right] \begin{array}{l} \to L_1 - 2\,L_2: \\ \\ \to L_3 + 5\,L_2: \end{array} \qquad B = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1{,}5 \\ 0 & 0 & -6{,}5 \end{array}\right]$$

Examinando a matriz B, verifica-se que $Ca = 3$ e $Cv = 2$, isto é, $Ca > Cv$, o que significa ser incompatível o sistema.

6)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -4 \\ -3x_1 + 4x_2 = -18 \\ 2x_1 - x_2 = 7 \end{cases}$$

Este sistema é representado pela matriz:

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -18 \\ 2 & -1 & 7 \end{array}\right]$$

Solução:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -18 \\ 2 & -1 & 7 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \to L_2 + 3L_1: \\ \to L_3 - 2L_1: \end{array} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 10 & -30 \\ 0 & -5 & 15 \end{array}\right] \to \frac{1}{10} L_2:$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -5 & 15 \end{array}\right] \begin{array}{l} \to L_1 - 2L_2: \\ \\ \to L_3 + 5L_2: \end{array} \qquad B = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

A matriz B corresponde ao sistema: $\begin{cases} 1x_1 + 0x_2 = 2 \\ 0x_1 + 1x_2 = -3 \\ 0x_1 + 0x_2 = 0 \end{cases}$

Examinando a matriz B, verifica-se que Ca = Cv = C = n; logo, o sistema é compatível e determinado.

De outra parte, examinando o sistema a que corresponde a matriz B, verifica-se que a última equação não estabelece nenhuma condição para x e y; por isso, a solução do sistema é dada pelas duas primeiras equações: $x_1 = 2$ e $x_2 = -3$.

7) Estabelecer a condição que deve ser satisfeita pelos termos independentes a, b e c para que seja compatível o sistema:

$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = a \\ -3x_1 + 4x_2 = b \\ 2x_1 - x_2 = c \end{cases}$ Este sistema é representado pela matriz: $A = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ -3 & 4 & b \\ -2 & -1 & c \end{array}\right]$

Solução:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ -3 & 4 & b \\ 2 & -1 & c \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \to L_2 + 3L_1: \\ \to L_3 - 2L_1: \end{array} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & 10 & b + 3a \\ 0 & -5 & c - 2a \end{array}\right] \to \frac{1}{10} L_2:$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & \dfrac{b+3a}{10} \\ 0 & -5 & c-2a \end{array}\right] \rightarrow L_3 + 5\,L_2: \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & \dfrac{b+3a}{10} \\ 0 & 0 & c-2a+\dfrac{b+3a}{2} \end{array}\right]$$

Se $c - 2a + \dfrac{b+3a}{2}$ fosse diferente de zero, se teria Ca = 3 e Cv = 2, isto é, Ca > Cv e o sistema seria incompatível. Portanto, para que o sistema seja compatível, é necessário que:

$$c - 2a + \frac{b+3a}{2} = 0$$

ou

$$2c - 4a + b + 3a = 0$$

$$-a + b + 2c = 0$$

$$a = b + 2c$$

- Comparando os sistemas dos problemas 5, 6 e 7, verifica-se que todos têm a mesma matriz dos coeficientes das variáveis:

a) o 1º é incompatível:

b) o 2º é compatível;

c) o 3º estabelece a condição que deve ser satisfeita pelos termos independentes para que o sistema seja compatível. Essa condição exige que:

$$a = b + 2c$$

Ora, na 1ª equação, $a = 4$, $b = 3$ e $c = -6$ isto é:

$$4 \neq 3 + 2\,(-6)$$

$$4 \neq 3 - 12$$

$$4 \neq -9$$

A condição de compatibilidade não foi satisfeita e o sistema se mostrou incompatível.

Já na 2ª equação, a = -4, b = -18 e c = 7, isto é:

$$-4 = -18 + 2(7)$$
$$-4 = -18 + 14$$
$$-4 = -4$$

o que tornou compatível o sistema.

● Nos problemas sobre sistemas, nos quais se solicita que alguma condição seja estabelecida para que sejam compatíveis ou admitam solução não-trivial, etc., quer nos termos independentes, quer em coeficientes das variáveis, embora se inicie transformando a matriz ampliada inicial na matriz reduzida à forma de escada, geralmente não é necessário chegar ao final: quase sempre, um simples raciocínio, no decorrer da execução do processo, resolve o problema.

8) Calcular o valor de k para que seja compatível o sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -1 \\ -3x_1 + 4x_2 = k \\ 2x_1 - x_2 = -7 \end{cases}$$

Este sistema é representado pela matriz:

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & k \\ 2 & -1 & -7 \end{array}\right]$$

Solução:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & k \\ 2 & -1 & -7 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \to L_2 + 3\,L_1: \\ \to L_3 -2\,L_1: \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 10 & k-3 \\ 0 & -5 & -5 \end{array}\right] \to \frac{1}{10}L_2:$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & \dfrac{k-3}{10} \\ 0 & -5 & -5 \end{array}\right] \to L_3 + 5\,L_2:$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & \dfrac{k-3}{10} \\ 0 & 0 & -5 + \dfrac{k-3}{2} \end{array}\right]$$

Se $-5 + \dfrac{k-3}{2}$ fosse diferente de zero, se teria Ca = 3 e Cv = 2, isto é, Ca > Cv e o sistema seria incompatível. Portanto, para que o sistema seja compatível é necessário que:

$$-5 + \frac{k-3}{2} = 0$$

ou

$$-10 + k - 3 = 0$$
$$k = 13$$

• Esse sistema tem a mesma matriz dos coeficientes das variáveis do problema 7. Ali foi estabelecido que, para ser compatível, os termos independentes a, b e c do sistema deveriam satisfazer à condição:

$$a = b + 2c$$

Ora, nesse sistema, $a = -1$, $b = k = 13$ e $c = -7$, isto é:

$$-1 = 13 + 2(-7)$$
$$-1 = 13 - 14$$
$$-1 = -1,$$

o que tornou compatível o sistema.

9) Determinar o valor de k para que admita solução não-trivial o sistema:

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - 2y - 2z = 0 \\ 2x + ky + z = 0 \end{cases}$$

Este sistema é representado pela matriz:

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & k & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Solução:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & k & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \to L_2 - 1\,L_1: \\ \to L_3 - 2\,L_1: \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & k+2 & 3 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \to -1\,L_2: \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & k+2 & 3 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \to L_3 + (-k-2)\,L_2: \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -k+1 & 0 \end{array}\right]$$

Se $-k+1$ fosse igual a 1, isto é, se $k = 0$, a última matriz ficaria assim:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

e a matriz dos coeficientes das variáveis poderia ser transformada na matriz unidade, do que resultaria Ca = Cv = C = 3 = n e o sistema seria compatível e determinado, isto é, admitiria somente a solução trivial: x = y = z = 0.

Portanto, para que o sistema admita solução não-trivial, é necessário que -k + 1 = 0, isto é, k = 1. Nesse caso, como os elementos da 3ª linha seriam todos nulos, a matriz inicial teria, ao final, Ca = Cv = C = 2; mas n = 3 e C < n, o que significaria ser o sistema, para k = 1, compatível e indeterminado.

10) Classificar e resolver o sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 8x_3 + 16x_4 = 32 \\ 3x_1 + 6x_2 - 12x_3 + 24x_4 = 48 \\ \quad\quad 2x_2 + 2x_3 + 10x_4 = 16 \\ 3x_1 + 8x_2 - 10x_3 + 30x_4 = 40 \end{cases}$$

Este sistema é representado pela matriz:

$$A = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & -8 & 16 & 32 \\ 3 & 6 & -12 & 24 & 48 \\ 0 & 2 & 2 & 10 & 16 \\ 3 & 8 & -10 & 30 & 40 \end{array}\right]$$

Solução:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & -8 & 16 & 32 \\ 3 & 6 & -12 & 24 & 48 \\ 0 & 2 & 2 & 10 & 16 \\ 3 & 8 & -10 & 30 & 40 \end{array}\right] \begin{array}{l} \to \frac{1}{2}L_1: \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -4 & 8 & 16 \\ 3 & 6 & -12 & 24 & 48 \\ 0 & 2 & 2 & 10 & 16 \\ 3 & 8 & -10 & 30 & 40 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \to L_2 - 3L_1: \\ \\ \to L_4 - 3L_1: \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -4 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 10 & 16 \\ 0 & 2 & 2 & 6 & -8 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \to L_{24}: \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -4 & 8 & 16 \\ 0 & 2 & 2 & 6 & -8 \\ 0 & 2 & 2 & 10 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \to \frac{1}{2}L_2: \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -4 & 8 & 16 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & 10 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \to L_1 - 2L_2: \\ \\ \to L_3 - 2L_2: \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -6 & 2 & 24 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\downarrow$$

$C(x_3, x_4)$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -6 & 24 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \to \frac{1}{4}L_3: \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -6 & 24 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \to L_1 - 2L_3: \\ \to L_2 - 3L_3: \\ \\ \\ \end{array}$$

$$B = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -6 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -22 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$ Esta matriz corresponde ao sistema: $$\begin{cases} 1x_1 + 0x_2 + 0x_4 - 6x_3 = 12 \\ 0x_1 + 1x_2 + 0x_4 + 1x_3 = -22 \\ 0x_1 + 0x_2 + 1x_4 + 0x_3 = 6 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_4 + 0x_3 = 0 \end{cases}$$

(Não esquecer que a coluna dos coeficientes da variável x_3 foi trocada pela coluna dos coeficientes da variável x_4).

Examinando a matriz B, verifica-se que Ca = Cv = C = 3; logo o sistema é compatível. Mas n = 4, isto é, C < n, o que significa ser o sistema indeterminado e seu grau de liberdade: $g = n - C = 4 - 3 = 1$.

De outra parte, examinando o sistema a que corresponde a matriz B, verifica-se que a última equação não estabelece nenhuma condição para x_1, x_2, x_3 e x_4; por isso, a solução do sistema é dada pelas três primeiras equações:

$$x_1 = 12 + 6\,x_3$$
$$x_2 = -22 - x_3$$
$$x_4 = 6$$

Os valores de x_1 e x_2 são obtidos atribuindo-se valores arbitrários a x_3.

4.6 — PROBLEMAS PROPOSTOS

Nos problemas 1 a 23, classificar e resolver os sistemas:

1) $\begin{cases} 5x + 8y = 34 \\ 10x + 16y = 50 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4x - y - 3z = 15 \\ 3x - 2y + 5z = -7 \\ 2x + 3y + 4z = 7 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 2 \\ 3x - 5y + 4z = 5 \\ x - 2y - 7z = -24 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x + 4y + 6z = 0 \\ -\frac{3}{2}x - 6y - 9z = 0 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 10 \\ 3x + 4y + 6z = 23 \\ 3x + 2y + 3z = 10 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 5x - 3y - 7z = -5 \\ 4x - y - z = 2 \\ -2x + 4y + 8z = 10 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 3x - 8y - 9z = 14 \\ 7x + 3y + 2z = -12 \\ -8x - 9y + 6z = 11 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 4x - 3y = -18 \\ 2y + 5z = -8 \\ x - 2y - 3z = 0 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 2x - 5y - z = -8 \\ 3x - 2y - 4z = -11 \\ -5x + y + z = -9 \end{cases}$

10) $\begin{cases} 3x + 9y + 12z = 24 \\ 4x + 16y + 26z = 46 \\ x + 7y + 14z = 20 \end{cases}$

11) $\begin{cases} 5x + y + z = 7 \\ 6x - y - z = 4 \\ 7x + 2y + 2z = 11 \end{cases}$

12) $\begin{cases} 6x + 2y + 4z = 0 \\ -9x - 3y - 6z = 0 \end{cases}$

13) $\begin{cases} -8x + 3y + 2z = 16 \\ 4x - 2z = 0 \\ 3y + 4z = -32 \end{cases}$

14) $\begin{cases} 3x + 2y - 3z = 18 \\ 2x - 4y + 4z = 12 \\ -4x + 3y - 5z = -24 \end{cases}$

15) $\begin{cases} x + 4y + 6z = 11 \\ 2x + 3y + 4z = 9 \\ 3x + 2y + 2z = 7 \end{cases}$

16) $\begin{cases} 2x + 2y + 4z = 0 \\ 3x + 5y + 8z = 0 \\ 5x + 25y + 20z = 0 \end{cases}$

17) $\begin{cases} x - 3y - 7z = 1 \\ -x - 2y - 4z = -2 \\ -2x - 4y - 5z = -1 \end{cases}$

18) $\begin{cases} 10x + 8y - 7z = 1 \\ 5x + 3y - 8z = 19 \\ 7x - 9y + 4z = -15 \end{cases}$

19) $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2y + 4z = 6 \\ x + y + 4z = 6 \end{cases}$

20) $\begin{cases} 6x - 9y - 5z = -35 \\ 2x + 3y + 4z = 29 \\ 5x - 2y - 1z = 0 \end{cases}$

21) $\begin{cases} 4x + 8y + 12z = 24 \\ x - z = 0 \\ -5x - 8y - 11z = -24 \end{cases}$

22) $\begin{cases} 7x - 2y + 4z = -15 \\ 9x + 3y - 3z = 0 \\ x - 4y - z = -8 \end{cases}$

23) $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 53 \\ 3x + 5y - 4z = 2 \\ 4x + 7y - 2z = 31 \end{cases}$

Nos problemas 24 a 27, estabelecer a condição que deve ser satisfeita pelos termos independentes para que sejam compatíveis os sistemas:

24) $\begin{cases} 4x + 12y + 8z = a \\ 2x + 5y + 3z = b \\ -4y - 4z = c \end{cases}$

25) $\begin{cases} 2x + 4y + 2z = a \\ 3x + 8y + 5z = b \\ -3x - 4y - z = c \end{cases}$

26) $\begin{cases} 2x + 2y + 4z = a \\ 6x + 11y + 8x = b \\ 2x + 7y = c \end{cases}$

27) $\begin{cases} x + y - z = a \\ -x + 2z = b \\ y + z = c \end{cases}$

28) Calcular o valor de k para que admita solução não-trivial o sistema:

$$\begin{cases} 2x + 6y = 0 \\ 4x + ky = 0 \end{cases}$$

Nos problemas 29 a 33, resolver os sistemas pelo método matricial:

$$\begin{cases} -2x + 3y - z = b_1 \\ x - 3y + z = b_2 \\ -x + 2y - z = b_3 \end{cases}$$

29) Para $b_1 = 2$, $b_2 = 5$ e $b_3 = 7$

30) Para $b_1 = 1$, $b_2 = 6$ e $b_3 = 0$

31) Para $b_1 = 2$, $b_2 = -8$ e $b_3 = 9$

32) Para $b_1 = -4$, $b_2 = -3$ e $b_3 = -2$

33) Para $b_1 = 4$, $b_2 = 7$ e $b_3 = 9$

Nos problemas 34 a 37, resolver os sistemas pelo método matricial:

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + 2x_4 = b_1 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = b_2 \\ -4x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = b_3 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = b_4 \end{cases}$$

34) Para $b_1 = 5$, $b_2 = 3$, $b_3 = 12$ e $b_4 = 10$

35) Para $b_1 = -8$, $b_2 = -4$, $b_3 = -9$ e $b_4 = 8$

36) Para $b_1 = 4$, $b_2 = 0$, $b_3 = -2$ e $b_4 = 3$

37) Para $b_1 = -9$, $b_2 = 6$, $b_3 = 3$ e $b_4 = 1$

Nos problemas 38 a 43, resolver os sistemas pela regra de Cramer.

38) $\begin{cases} 8x_1 + 5x_2 = 63 \\ 7x_1 - 5x_2 = 27 \end{cases}$

39) $\begin{cases} 9x_1 - 2x_2 = 31 \\ 7x_1 + 6x_2 = 77 \end{cases}$

40) $\begin{cases} 21x_1 - 11x_2 = 52 \\ 7x_1 + 5x_2 = 26 \end{cases}$

41) $\begin{cases} 6x + 2y = 12 \\ 3x - 3y = 6 \end{cases}$

42) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 22 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 25 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 25 \end{cases}$

43) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 14 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 24 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 10 \end{cases}$

Nos problemas 44 e 45, resolver os sistemas pelo método da matriz inversa (utilizando a regra prática do item 3.7.1.1):

44) $\begin{cases} 7x + 4y = 36 \\ 5x + 3y = 26 \end{cases}$

45) $\begin{cases} 11x_1 + 5x_2 = 21 \\ -4x_1 - 2x_2 = -8 \end{cases}$

4.6.1 — Respostas dos problemas propostos

1) Incompatível

2) Compatível e determinado:
$x = 3, \quad y = 3 \quad e \quad z = -2$

3) Compatível e determinado:
$x = 1, \quad y = 2 \quad e \quad z = 3$

4) Compatível e indeterminado:
a) Grau de liberdade: $g = 2$
b) Solução trivial: $x = y = z = 0$
c) Soluções próprias: $x = -4y - 6z$

5) Incompatível

6) Compatível e determinado:
$x = y = z = 1$

7) Compatível e determinado:
$x = y = z = -1$

8) Compatível e determinado:
$x = 0, \quad y = 6, \quad z = -4$

9) Compatível e determinado:
$x = 3, \quad y = 2 \quad e \quad z = 4$

10) Incompatível

11) Compatível e determinado:
$x = 1, \quad y = 7 \quad e \quad z = -5$

12) Compatível e indeterminado:
a) Grau de liberdade: $g = 2$
b) Solução trivial: $x = y = z = 0$
c) Soluções próprias: $x = \dfrac{-y - 2z}{3}$

13) Compatível e determinado:
$x = -4, \quad y = 0 \quad e \quad z = -8$

14) Compatível e determinado:
$x = 6, \quad y = z = 0$

15) Compatível e indeterminado:
a) Grau de liberdade: $g = 1$
b) $x = \dfrac{3 + 2z}{5}$ e $y = \dfrac{13 - 8z}{5}$

16) Compatível e determinado. O sistema admite somente a solução trivial:
$x = y = z = 0$

17) Compatível e determinado:
$x = 2, \quad y = -2 \quad e \quad z = 1$

18) Compatível e determinado:
$x = 1, \quad y = 2 \quad e \quad z = -1$

19) Compatível e indeterminado:
a) Grau de liberdade: $g = 1$
b) $x = y = 3 - 2z$

20) Compatível e determinado:
$x = 2, \quad y = 3 \quad e \quad z = 4$

21) Compatível e indeterminado:
a) Grau de liberdade: $g = 1$
b) $x = z$ e $y = 3 - 2z$

22) Compatível e determinado:
$x = -1, \quad y = 2 \quad e \quad z = 1$

23) Compatível e determinado:
$x = 3, \quad y = 5 \quad e \quad z = 8$

24) $2a - 4b + c = 0$

25) $3a - b + C = 0$

26) $2a - b + c = 0$

27) $a + b - c = 0$

28) $k = 12$

29) $x = -7, \quad y = -12, \quad z = -24$

30) $x = -7, \quad y = -6, \quad z = -5$

31) $x = 6, \quad y = -1, \quad z = -17$

32) $x = 7, \quad y = 5, \quad z = 5$

33) $x = -11, \quad y = -16, \quad z = -30$

34) $x_1 = 22, \quad x_2 = 25, \quad x_3 = 7, \quad x_4 = 37$

35) $x_1 = 12; \quad x_2 = -18, \quad x_3 = 12$ e $x_4 = -1$

36) $x_1 = 10, \quad x_2 = -8, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = 8$

37) $x_1 = -13, \quad x_2 = 27, \quad x_3 = -5$ e $x_4 = -4$

38) $x_1 = 6$ e $x_2 = 3$

39) $x_1 = 5$ e $x_2 = 7$

40) $x_1 = 3$ e $x_2 = 1$

41) $x = 2$ e $y = 0$

42) $x_1 = 5, \quad x_2 = 4$ e $x_3 = 3$

43) $x_1 = 6, \quad x_2 = 4$ e $x_3 = 2$

44) $x = 4$ e $y = 2$

45) $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$