

Universidade Federal de Alfenas

Thomás Francisco de Abreu

Elementos de Geometria Hiperbólica em Sistemas de
Comunicação

Alfenas - MG

2018

Thomás Francisco de Abreu

Elementos de Geometria Hiperbólica em Sistemas de Comunicação

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal de Alfenas como parte dos requisitos para obtenção da Licenciatura em Matemática. Área de concentração: Matemática Aplicada. Orientadora: Prof. Dr. Cátia Regina de Oliveira Quilles Queiroz. Coorientador: Prof. Dr. Anderson José de Oliveira.

Alfenas - MG

2018

“A verdadeira violência, a violência que percebi que era indesculpável, é a violência que fazemos com nós mesmos quando temos medo de ser quem realmente somos.”

(The Wachowskis)

Agradecimentos

Não poderia escrever meus agradecimentos sem começar por meus pais, Selma e Manoel, os principais responsáveis pela entrega deste trabalho. Vocês me apoiam, me ensinam... me inspiram. Agradeço à luta que enfrentam todos os dias para que me vejam continuar com os estudos. Vocês são meus heróis. À vocês, toda minha gratidão.

À minha irmã, Thauana, que sempre desempenhou dois papéis fundamentais: irmã e (segunda) mãe. Você esteve comigo durante todos os acontecimentos importantes, me apoiando e torcendo por mim. Você, ao lado da nossa mãe, é a mulher mais forte que já conheci. À você, toda minha admiração.

À meus orientadores, Cátia e Anderson, por me ensinarem e apoiarem durante todo o processo. À vocês, todo o meu respeito.

Em particular, gostaria de agradecer ao Anderson. Você se tornou um grande amigo. Admiro esse sorriso com poder de cativar todos ao seu lado e sua capacidade de fazer com que todos se sintam acolhidos. Agradeço por ter me adotado no início de 2017, quando ainda nem sabia o que é Matemática Aplicada, sempre respeitando minhas limitações e caminhando comigo na aventura que foi a construção deste trabalho. Com você, aprendi sobre a vida e como ser uma pessoa melhor. À você, minha eterna gratidão.

À meus amigos, tanto os que conheci em Alfenas, quanto os que carreguei comigo de Mogi-Guaçu. Em especial à Maricely, Jenifer e Guilherme, essas pessoas maravilhosas que caminharam comigo durante toda minha fase de descoberta e aceitação. Vocês fazem parte dos momentos mais bonitos da minha caminhada e não poderia ser mais grato à vocês. Agradeço, também, à Ludmila e Marina, duas meninas que me encantam e me apoiam em todos os obstáculos, por mais que sejam minúsculos (ou muito brancos). Com vocês ao meu lado, a graduação e minha estadia em Alfenas se tornaram mais simples, ainda, pude descobrir que existe amor na “Matemática”. À todos vocês, todo meu carinho.

À meus professores da graduação, por todos os ensinamentos. À vocês, minha eterna admiração.

Por último, agradeço à Jorge. Esta pessoa maravilhosa que entrou na minha vida após um passeio de bicicleta no dia de finados, o que acho contraditório, sendo que você foi o principal responsável a dar vida para este Thomás, do qual, hoje, me orgulho tanto. Você me ensinou tantos aspectos da vida, ampliando minha visão sobre o mundo e permitindo que me tornasse uma pessoa melhor. À você, todo meu amor.

Resumo

A Geometria Hiperbólica, considerada como uma Geometria não-Euclidiana, surgiu das tentativas de demonstrações para o quinto postulado de Euclides ao longo do tempo. Este trabalho busca compreender o surgimento da Geometria Hiperbólica, assim como seus principais elementos, a fim de aplicá-los no processo de caracterização de um Sistema de Comunicação. Para a construção deste trabalho, foi desenvolvida uma pesquisa bibliográfica que possibilitou o estudo da Geometria Hiperbólica e de suas aplicações em Sistemas de Comunicação. Este trabalho caracteriza canais de transmissão com duas entradas e duas saídas, e os canais com duas entradas e quatro saídas, além de uma visão geral do problema de empacotamento esférico, via elementos de Geometria Hiperbólica. Desse modo, alguns elementos de Geometria Hiperbólica podem ser associada a Sistemas de Comunicação, objetivando a caracterização de um canal de transmissão de informação, buscando formas de enviar e receber informações de maneira mais confiável.

Palavras-chave: Matemática Aplicada. Superfícies. Canal de Comunicação. Geometria não-Euclidiana.

Abstract

Hyperbolic Geometry, considered a non-Euclidean Geometry, emerged from attempts to prove the Euclidean's fifth postulate over the years. This work seeks to understand the emergence of Hyperbolic Geometry, as well as its main elements, in order to apply them in the characterization process of a communication system. For the construction of this work, it was made a bibliographical research that allowed the study of Hyperbolic Geometry and its applications in communication systems. This work characterizes transmission channels with two inputs and two outputs, and channels with two inputs and four outputs, as well as an overview of the spherical packaging problem, via Hyperbolic Geometry's elements. Thus, some elements of Hyperbolic Geometry can be associated to communication systems in order to characterize an information transmission channel, looking for ways to send and receive information in the most reliable way as possible.

Keywords: Applied Mathematics. Surfaces. Communication Channel. non-Euclidean Geometry.

Sumário

1	Introdução	9
2	Elementos de Geometria Hiperbólica	11
2.1	Breve Histórico da Geometria Hiperbólica	11
2.2	Modelo do Disco de Poincaré	14
2.2.1	Retas e Semiplanos	15
2.2.2	Distância	16
2.3	Modelo do Semiplano Superior	17
2.3.1	Retas e Semiplanos	17
2.3.2	Distância	18
2.4	Transformações de Möbius	19
2.4.1	Ângulos	20
2.4.2	Área	21
2.4.3	Pontos fixos das transformações de Möbius	21
2.4.4	Representação por matriz	22
2.4.5	Conjugação das transformações de Möbius	23
2.4.6	Traço de uma transformação de Möbius	23
2.4.7	Transformações Elípticas	24
2.4.8	Transformações Parabólicas	24
2.4.9	Transformações Hiperbólicas	24
2.5	Geradores de Grupos Fuchsianos	25
2.6	Tesselações Hiperbólicas	26
2.7	Transformações de Emparelhamento de Lados	28
2.8	Gênero de Superfícies	31
3	Sistemas de Comunicação	32
3.1	Principais Elementos	32
3.2	Canais Discretos sem Memória	35
3.3	Empacotamento Esférico	36
4	Caracterização Algébrica e Geométrica de Sistemas de Comunicação via Elementos de Geometria Hiperbólica	40

4.1	Canais de Comunicação	40
4.1.1	Canal $C_{2,2}$	40
4.1.2	Canal $C_{2,4}$	45
4.2	Empacotamento Hiperbólico	47
5	Considerações Finais	49

1 Introdução

Acredita-se que a Geometria originou-se no Egito antigo com a demarcação de terras nas fronteiras do rio Nilo. Em 300 a.C., Euclides escreveu o livro “Os Elementos”, no qual compila todo o conhecimento da Geometria Grega da época a partir de cinco postulados. Devido a popularidade do livro “Os Elementos”, a Geometria Plana e Espacial passou a ser conhecida por Geometria Euclidiana.

A Geometria Hiperbólica, um tipo de Geometria não-Euclidiana, satisfaz os quatro primeiros postulados da Geometria Euclidiana, mas não satisfaz o quinto. Portanto, a Geometria Hiperbólica surge com a negação do quinto postulado da Geometria Euclidiana, cujo enunciado foi substituído por John Playfair para melhor entendimento: *“Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada”*. Esse resultado da Geometria Euclidiana permite definir que a soma dos ângulos internos de todo triângulo é igual a 180° . Como, na Geometria Hiperbólica, o quinto postulado não é válido, temos que o principal resultado da Geometria Hiperbólica é que a soma dos ângulos internos é menor que 180° .

Sistemas de Comunicação Padrão são compostos por três elementos principais: fonte, canal e receptor. A fonte é responsável por enviar a informação. O canal é o caminho por onde esta informação passa até chegar ao receptor, que receberá essa informação. Nestes canais de comunicação podem ocorrer ruídos, obstáculos que prejudicam a confiabilidade da informação.

Podemos associar alguns elementos da Geometria Hiperbólica a fim de caracterizar Sistemas de Comunicação. Assim, o objetivo deste trabalho é compreender o surgimento da própria Geometria Hiperbólica, suas diferenças e similaridades com a Geometria Euclidiana, os principais modelos utilizados, os resultados e a aplicação destes em Sistemas de Comunicação Padrão.

Este trabalho consiste em uma pesquisa bibliográfica conforme a definição de [1], pois baseia-se em consultas a dissertações, teses e artigos científicos previamente selecionados, no intuito de compreender aspectos da Geometria Hiperbólica e Sistemas de Comunicação. Os principais materiais utilizados neste estudo foram: [2], para o estudo da origem da Geometria Hiperbólica; [3] para a compreensão dos elementos de Geometria Hiperbólica; e, [4] para um melhor entendimento de Sistemas de Comunicação.

Para a construção deste trabalho estudou-se o surgimento da Geometria Hiperbólica,

utilizou-se os dois principais modelos estudados em Geometria Hiperbólica: o modelo do Semiplano Superior e o modelo do disco de Poincaré. As transformações de Möbius foram utilizadas para a geração de superfícies e para a obtenção dos correspondentes geradores dos Grupos Fuchsianos; e, por último, relacionou-se os conceitos associados à Geometria Hiperbólica no processo de transmissão de informação em um Sistema de Comunicação.

Este trabalho está estruturado da seguinte maneira: no Capítulo 2 são apresentados elementos de Geometria Hiperbólica, no Capítulo 3 são descritos os principais elementos de Sistemas de Comunicação, no Capítulo 4 é feita uma caracterização algébrica e geométrica de Sistemas de Comunicação via elementos de Geometria Hiperbólica e, para finalizar, no Capítulo 5 são feitas as considerações finais do trabalho.

2 Elementos de Geometria Hiperbólica

Este Capítulo detalha os elementos de Geometria Hiperbólica necessários para a construção deste trabalho. Dessa forma, ele está subdividido em oito Seções, sendo elas: 2.1 Breve Histórico da Geometria Hiperbólica, 2.2 Modelo do disco de Poincaré, 2.3 Modelo do Semiplano Superior, 2.4 Transformações de Möbius, 2.5 Geradores de Grupos Fuchsianos, 2.6 Transformações de Emparelhamento de Lados, 2.7 Gênero de Superfícies e, por último, 2.8 Tesselações Hiperbólicas. As referências utilizadas foram: [2], [3], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11] e [12].

2.1 Breve Histórico da Geometria Hiperbólica

Acredita-se que as primeiras práticas relacionadas ao plantio, construções e astrologia surgiram no antigo Egito e na Babilônia, por volta do século XX a.C. Devido aos transbordamentos do rio Nilo, todos os anos eram necessárias novas demarcações de terras, portanto os Faraós decidiram nomear pessoas, os agrimensores, para que demarcassem o território novamente, uma vez que a invasão do território vizinho era tratado como uma ofensa, gerando conflitos e punições.

Por volta de 500 a.C., as primeiras academias foram fundadas na Grécia e a busca por conhecimentos sobre Geometria aumentava. A partir de Tales de Mileto (600 a.C., aproximadamente), surgem as primeiras tentativas de deduzir os fatos geométricos. Porém, foi com Euclides que a Geometria desenvolveu-se como Ciência dedutiva, por volta de 300 a.C., devido à publicação de seu livro, intitulado “Os Elementos”, uma compilação de todo o conhecimento de Geometria que existia na época.

Euclides foi o primeiro a apresentar a Matemática como ciência dedutiva, sendo que cada afirmação deveria ser deduzida a partir de outras mais simples de maneira lógica e sucessiva. Para Euclides, a Geometria operava a partir de certas hipóteses básicas, chamadas axiomas, que foram organizados em dois grupos: as noções comuns e os cinco postulados. Ao escrever “Os Elementos”, Euclides introduziu os postulados um a um e juntamente com suas definições e axiomas, deduziu 465 proposições. Porém, o quinto postulado de Euclides, foi alvo de crítica por outros matemáticos, pois acreditavam que ele era um Teorema, ou seja, deveria ser demonstrado. A seguir é apresentado o enunciado do quinto postulado de Euclides: “Se uma reta, interceptando duas outras, forma ângulos

internos de um mesmo lado cuja soma é menor que dois retos, então estas duas retas, se prolongadas indefinidamente, se encontram naquele lado cuja soma dos ângulos internos é menor que dois retos”. A fim de facilitar a compreensão deste enunciado, John Playfair sugere um substitutivo: “Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada”.

A seguir, serão apresentados alguns matemáticos que tentaram demonstrar o quinto postulado de Euclides.

O primeiro deles é Ptolomeu I, que apresentou uma prova do quinto postulado, contudo, esta continha um erro, pois assumia que paralelismo acarreta na congruência de duas figuras. O principal argumento de Ptolomeu era que se uma reta intercepta uma segunda, ela interceptará todas as retas paralelas a esta segunda reta. A afirmação é válida somente para a Geometria Euclidiana.

Proclus assume, em sua demonstração, que retas paralelas são equidistantes, mas isto era apenas um equivalente ao quinto postulado de Euclides.

Nasir Eddin All Tusin foi um astrônomo e matemático que traduziu “Os Elementos” de Euclides para o árabe. Ao demonstrar o quinto postulado, ele constrói um retângulo e o divide, provando que existem dois triângulos de 180° , sendo um equivalente ao quinto postulado.

Girolamo Saccheri publicou seu trabalho em um livro chamado “Euclides ab omni naevo vindicatus”, traduzido para o português como “Euclides, sem qualquer falha”. Nele fez uso do método de demonstração de redução ao absurdo. A figura fundamental em seu trabalho é chamada de quadrilátero de Saccheri, que consiste em um quadrilátero ABCD em que os ângulos da base, ângulo A e ângulo B, são retos e o lado \overline{AC} é congruente ao lado \overline{BD} .

Seu trabalho consistia em três passos:

- (i) Provar que os ângulos C e D são congruentes;
- (ii) Provar que o quinto postulado equivale com a hipótese do ângulo reto;
- (iii) Provar que o fato dos ângulos C e D serem agudos ou obtusos entra em contradição com uma das 28 primeiras proposições de “Os Elementos” de Euclides.

Ao procurar uma contradição para a hipótese do ângulo agudo, provou uma série de resultados coerentes com todos os postulados da Geometria Euclidiana, exceto o quinto.

Johann Lambert deu continuidade ao trabalho de Saccheri, na tentativa de também encontrar uma contradição para a hipótese do ângulo agudo e chamou a atenção para a teoria das paralelas. Ele considerou um quadrilátero com três ângulos retos e supôs três hipóteses para o quarto ângulo:

- (i) Hipótese do ângulo reto, equivalente ao quinto postulado de Euclides;
- (ii) Hipótese do ângulo obtuso;
- (iii) Hipótese do ângulo agudo.

Porém, assim como Saccheri, não chegou em contradição ao tentar demonstrar a hipótese do ângulo agudo.

Carl Friedrich Gauss foi o primeiro a designar a nova Geometria como não-Euclidiana. Ele tentou provar o quinto postulado usando o método de redução ao absurdo, como fizera antes Saccheri e Lambert. Mas na segunda década do século XIX, Gauss começou a deduzir uma nova Geometria, formulando ideias e teoremas.

Gauss provou que a diferença entre dois ângulos retos e a soma dos ângulos internos de um triângulo traçado numa superfície de curvatura negativa constante é proporcional à área do triângulo. Esse trabalho coincidia com o trabalho de Lambert e indicava a existência de uma Geometria onde não era válido o postulado das paralelas.

Wolfgang Boylai trocava correspondências com Gauss sobre a teoria das paralelas. Ele apresentou seu trabalho a Gauss, em 1804, acreditando ter resolvido o problema, mas Gauss apontou o erro da prova. Quatro anos depois, Gauss recebeu uma prova suplementando a demonstração anterior, mas nunca o respondeu.

Johann Boylai, filho de Wolfgang Boylai, tentou negar o quinto postulado de Euclides e resultados interessantes começaram a aparecer.

Ele acreditou na possibilidade da existência de uma Geometria geral, na qual a Geometria Euclidiana seria um caso particular. Negando o quinto postulado, havia duas possibilidades:

- (i) Não existe qualquer reta paralela a uma reta dada passando por um ponto fora desta reta.
- (ii) Existe mais de uma reta paralela a uma reta dada passando por um ponto.

Porém, é consequência dos quatro primeiros postulados a existência de retas paralelas, eliminando, assim, a hipótese (i).

Nicolai Ivanovich Lobachevsky afirmou que por um ponto exterior a uma reta passa mais do que uma paralela. Ele foi o primeiro a comunicar suas descobertas, porém, seus trabalhos foram reconhecidos após a sua morte.

Com as contribuições destes autores, surge, então, a Geometria Hiperbólica, tendo este nome atribuído por Beltrami Klein em 1871. Em 1868, Beltrami provou definitivamente que não era possível demonstrar o quinto postulado, mostrando que a Geometria Hiperbólica é tão consistente quanto a Geometria Euclidiana.

Conclui-se, então, que a Geometria Hiperbólica possui como principal característica a negação do quinto postulado de Euclides, ou seja: “Por um ponto fora de uma reta, podem ser traçadas pelo menos duas retas paralelas à reta dada”. Esta negação gera quatro consequências imediatas:

- (i) A soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que 180° ;
- (ii) Triângulos semelhantes não existem;
- (iii) Se dois triângulos têm os ângulos iguais, então eles são congruentes;
- (iv) A soma dos ângulos internos de um triângulo é menor do que 180° , então a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é menor do que 360° .

No fim do século XIX, a Geometria Hiperbólica já era aceita e a Geometria Euclidiana perdeu o status de verdade inquestionável. A nova Geometria rompe as fronteiras da Matemática e Albert Einstein utiliza o espaço curvo na Teoria da Relatividade, que diz que a presença de matéria pode “encurvar” o espaço e modificar o tempo, provando que a nova Geometria tinha aplicação prática. A Geometria Hiperbólica, afetou o pensamento matemático tanto quanto as demonstrações. A partir de agora, todas as teorias deveriam ser cuidadosamente analisadas e explicitadas, tendo a necessidade do rigor matemático.

2.2 Modelo do Disco de Poincaré

Seja \mathbb{E} o plano euclidiano. Fixado um ponto O e um valor real r positivo, o disco de Poincaré é o conjunto de todos os pontos pertencentes ao plano euclidiano que são interiores (sem a fronteira) à circunferência de centro O e raio r , ou seja,

$$D_P = \{X \in \mathbb{E} | d(X, O) < r\}, \quad (1)$$

sendo d a distância euclidiana.

A Figura 1 ilustra um triângulo no modelo do disco de Poincaré.

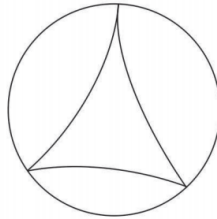


Figura 1: Triângulo no modelo do disco de Poincaré.

Fonte: [6].

2.2.1 Retas e Semiplanos

No disco de Poincaré são definidos dois tipos de retas:

Definição 1 *Dados os pontos A , B e O pertencentes a D_P .*

- (i) *Se A , B e O forem colineares (no sentido euclidiano), a reta hiperbólica (de primeiro tipo) que passa por A e B será o diâmetro (aberto) da circunferência;*
- (ii) *Se A , B e O não forem colineares, a reta hiperbólica (de segundo tipo) será a interseção do disco D_P com a circunferência que passa por A e B e intercepta a fronteira do disco de Poincaré ortogonalmente.*

Os *pontos ideias* são definidos como os pontos que estão na interseção de uma reta hiperbólica com a fronteira do disco de Poincaré.

Pode-se dividir o disco de Poincaré em *Semiplanos* a partir dessas duas retas hiperbólicas:

Definição 2 *Os semiplanos do disco de Poincaré são:*

- (i) *A reta m determina uma reta l no modelo euclidiano que passa através do centro do disco. Os semiplanos no disco de Poincaré determinados por m , são definidos pela interseção dos semiplanos euclidianos definidos por l com o interior do disco.*

- (ii) Seja m uma reta hiperbólica, do segundo tipo, ou seja, a reta determinada pelo arco de circunferência dado pela interseção da circunferência euclidiana com o interior do disco de Poincaré. Os semiplanos determinados por m são as interseções do interior e exterior da circunferência euclidiana com o interior do disco.

2.2.2 Distância

A distância no disco de Poincaré é definida a partir dos dois tipos de retas hiperbólicas:

Definição 3 *Sejam A e $B \in D_P$. A distância entre os pontos A e B é definida por*

$$d(A, B) = \left| \ln \frac{(AP)(BQ)}{(AQ)(BP)} \right|,$$

sendo P e Q os pontos ideais da reta hiperbólica que passa por A e B , AP , AQ , BP e BQ são as medidas euclidianas (comprimentos) dos respectivos segmentos de reta euclidianos.

Proposição 1 *Sejam A e $B \in D_P$. A distância entre os pontos A e B satisfaz as seguintes propriedades:*

- (i) $d(A, B) \geq 0$ e $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$.
- (ii) $d(A, B) = d(B, A)$.
- (iii) $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$, $\forall A, B, C \in D_P$.

Demonstração:

Devido a definição, o item (i) é resultado imediato. O item (ii) é consequência de:

$$\begin{aligned} d(B, A) &= \left| \ln \frac{(BP)(AQ)}{(BQ)(AP)} \right| \\ &= \left| \ln \left(\frac{(BQ)(AP)}{(BP)(AQ)} \right)^{-1} \right| \\ &= \left| (-1) \ln \frac{(BQ)(AP)}{(BP)(AQ)} \right| \\ &= d(A, B). \end{aligned}$$

■

As geodésicas no modelo do disco de Poincaré são os arcos dos círculos e diâmetros em \mathbb{D} que encontram $\partial\mathbb{D}$ ortogonalmente.

2.3 Modelo do Semiplano Superior

Seja \mathbb{E} o plano euclidiano e fixada uma reta que define dois semiplanos. O plano superior S_p , é denominado *Semiplano Superior* ou *Modelo do Semiplano de Poincaré*.

2.3.1 Retas e Semiplanos

Assim como no modelo do disco de Poincaré, no Semiplano Superior estão definidos dois tipos de retas.

Definição 4 *Dados dois pontos A e B pertencentes a S_p .*

- (i) *Se a reta euclidiana \overleftrightarrow{AB} determinada por A e B for perpendicular (no sentido euclidiano) à reta que definiu S_p , então a reta hiperbólica (de primeiro tipo) que passa por A e B será interseção de \overleftrightarrow{AB} e S_p ;*
- (ii) *caso contrário, a reta hiperbólica (de segundo tipo) será a semicircunferência que passa por A e B e tem centro na reta que definiu S_p .*

A partir dos dois tipos de retas, é possível definir dois semiplanos em S_p .

Definição 5 *Seja m uma reta hiperbólica em S_p :*

- (i) *Se m é uma reta hiperbólica do primeiro tipo, m foi determinada a partir de uma reta euclidiana que, por sua vez, determina dois semiplanos euclidianos H^+ e H^- . Os semiplanos definidos por m serão $H_m^+ = H^+ \cap S_p$ e $H_m^- = H^- \cap S_p$.*
- (ii) *Se m é uma reta hiperbólica do segundo tipo, m será uma semicircunferência no plano euclidiano. A circunferência que deu origem à reta hiperbólica m determina duas regiões no plano euclidiano, a saber, a região interna à circunferência e a região externa à circunferência, ambas excluindo a fronteira. Os semiplanos determinados por m serão as interseções do interior e exterior da circunferência euclidiana com o Semiplano de Poincaré.*

A Figura 2 ilustra um triângulo hiperbólico no modelo do Semiplano Superior.

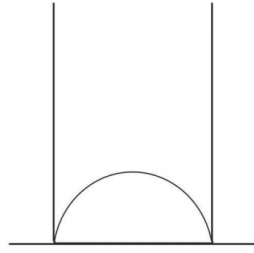


Figura 2: Triângulo hiperbólico no modelo do Semiplano Superior.
Fonte: [6].

2.3.2 Distância

A distância entre pontos no Semiplano Superior é diferente para os dois tipos de retas.

Definição 6 *Sejam A e $B \in S_P$. A distância entre os pontos A e B é definida por:*

$$d(A, B) = \left| \ln \frac{(AM)}{(BM)} \right|,$$

sendo M o ponto ideal da reta hiperbólica de primeiro tipo e AM e BM as medidas euclidianas (comprimentos) dos segmentos AM e BM , respectivamente.

Definição 7 *Sejam A e $B \in S_P$. A distância entre os pontos A e B é definida por*

$$d(A, B) = \left| \ln \frac{(AM)(BN)}{(AN)(BM)} \right|,$$

sendo M e N os pontos ideais da reta hiperbólica de segundo tipo e AM , AN , BM e BN as medidas euclidianas (comprimentos) dos segmentos AM , AN , BM e BN , respectivamente.

Definição 8 *Sejam A e $B \in S_P$. A distância entre os pontos A e B satisfaz as seguintes propriedades:*

- (i) $d(A, B) > 0$ e $d(A, B) = 0$ se, e somente se, $A = B$.
- (ii) $d(A, B) = d(B, A)$.
- (iii) $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$, $\forall A, B, C \in S_P$.

Demonstração:

Devido a definição, o item (i) é resultado imediato. O item (ii) é consequência de:

$$\begin{aligned}
d(B, A) &= \left| \ln \frac{(BM)(AN)}{(BN)(AM)} \right| \\
&= \left| \ln \left(\frac{(AM)(BN)}{(AN)(BM)} \right)^{-1} \right| \\
&= \left| (-1) \ln \frac{(AM)(BN)}{(AN)(BM)} \right| \\
&= d(A, B).
\end{aligned}$$

O raciocínio é análogo para a reta hiperbólica do tipo 1. ■

As coordenadas dos vértices de um polígono no modelo do Semiplano Superior não são as mesmas no modelo do disco de Poincaré, para isso, faz-se necessária a Observação 1.

Observação 1: *Para levar os vértices de um polígono representado no modelo do Semiplano Superior para o disco de Poincaré, aplicamos a transformação conforme:*

$$\bar{\tau} = i \cdot \frac{\tau - 1 - i}{\tau - 1 + i}, \quad (2)$$

onde τ é o vértice no Semiplano Superior e $\bar{\tau}$ é o vértice do disco de Poincaré.

2.4 Transformações de Möbius

Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, tal que $ad - bc > 0$. O mapeamento:

$$\gamma(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (3)$$

é chamado de transformação de Möbius em \mathbb{H} (modelo hiperbólico). Um grupo de transformações de Möbius será denotado por $\text{Möb}(\mathbb{H})$.

Proposição 2 *Seja γ uma transformação de Möbius de \mathbb{H} e $z, z' \in \mathbb{H}$. Então,*

$$d_{\mathbb{H}}(\gamma(z), \gamma(z')) = d_{\mathbb{H}}(z, z'). \quad (4)$$

Demonstração:

Seja σ a distância de z a z' , então $\gamma \circ \sigma$ é a distância de $\gamma(z)$ até $\gamma(z')$. Basta provar que $d_{\mathbb{H}}(\gamma \circ \sigma) = d_{\mathbb{H}}(\sigma)$.

Para todo $z \in \mathbb{H}$ tem-se:

$$|\gamma'(z)| = \frac{ad - bc}{|cz + d|^2},$$

e

$$\operatorname{Im}(\gamma(z)) = \frac{(ad - bc)}{|cz + d|^2} \operatorname{Im}(z).$$

Pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}}(\gamma \circ \sigma) &= \int \frac{|(\gamma \circ \sigma)'(t)|}{\operatorname{Im}(\gamma \circ \sigma)(t)} dt, \\ &= \int \frac{|\gamma'(\sigma(t))| |\sigma'(t)|}{\operatorname{Im}(\gamma \circ \sigma)} dt, \\ &= \int \frac{ad - bc}{|c\sigma(t) + d|^2} |\sigma'(t)| \frac{|c\sigma(t) + d|^2}{ad - bc} \frac{1}{\operatorname{Im}(\sigma(t))} dt, \\ &= \int \frac{|\sigma'(t)|}{\operatorname{Im}(\sigma(t))} dt, \\ &= d_{\mathbb{H}}(\sigma). \end{aligned}$$

■

2.4.1 Ângulos

Suponha que existam dois caminhos, σ_1 e σ_2 que se interceptam no ponto $z \in \mathbb{H}$. Escolhendo a parametrização apropriada dos caminhos e assumindo que $z = \sigma_1(0) = \sigma_2(0)$, o ângulo entre σ_1 e σ_2 em z é definido pelo ângulo entre as tangentes dos vetores no ponto de interseção e é denotado por $\angle \sigma'_1(0), \sigma'_2(0)$. A Figura 3 representa o ângulo formado entre dois vetores (i) e o ângulo formado por dois caminhos em um ponto de interseção (ii).

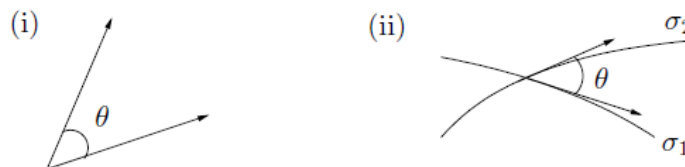


Figura 3: (i) ângulo entre dois vetores, (ii) ângulo entre dois caminhos em um ponto de interseção.

Fonte: [3].

Observação 2 *As transformações de Möbius preservam os ângulos. Se a transformação preserva os ângulos, então é chamada de conforme.*

Proposição 3 *Seja $\gamma \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ uma transformação de Möbius de \mathbb{H} . Então γ é conforme.*

2.4.2 Área

Seja $A \subset \mathbb{H}$ um subconjunto do Semiplano Superior. A área hiperbólica de A é definida pela integral dupla:

$$\text{Área}_{\mathbb{H}} = \iint_A \frac{1}{y^2} dx dy = \iint_A \frac{1}{\text{Im}(z)^2} dz. \quad (5)$$

Observação 3 *As transformações de Möbius preservam a área.*

Proposição 4 *Seja $A \subset \mathbb{H}$ e $\gamma \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ uma transformação de Möbius de \mathbb{H} . Então,*

$$\text{Área}_{\mathbb{H}}(\gamma(A)) = \text{Área}_{\mathbb{H}}(A). \quad (6)$$

2.4.3 Pontos fixos das transformações de Möbius

Seja γ uma transformação de Möbius de \mathbb{H} e $\partial\mathbb{H}$ o círculo no infinito. Diz-se que o ponto $z_0 \in \mathbb{H} \cup \partial\mathbb{H}$ é um ponto fixo de γ se:

$$\gamma(z_0) = \frac{az_0 + b}{cz_0 + d} = z_0. \quad (7)$$

A classificação inicial para as transformações de Möbius é baseada em quantos pontos fixos uma dada transformação de Möbius possui, e onde elas se encontram em \mathbb{H} ou no círculo no infinito $\partial\mathbb{H}$.

Proposição 5 *Seja γ uma transformação de Möbius de \mathbb{H} e suponha que γ não seja a identidade. Então γ possui:*

- (i) *dois pontos fixos em $\partial\mathbb{H}$ e nenhum em \mathbb{H} .*
- (ii) *um ponto fixo em $\partial\mathbb{H}$ e nenhum em \mathbb{H} .*
- (iii) *nenhum ponto fixo em $\partial\mathbb{H}$ e um em \mathbb{H} .*

Corolário 1 *Suponha que γ é uma transformação de Möbius de \mathbb{H} com três ou mais pontos fixos. Então γ é a identidade (e então fixa todos os pontos).*

Definição 9 *Seja γ uma transformação de Möbius de \mathbb{H} . Diz-se que:*

- (i) γ é hiperbólica se possui dois pontos fixos em $\partial\mathbb{H}$ e nenhum em \mathbb{H} ;
- (ii) γ é parabólica se possui um ponto fixo em $\partial\mathbb{H}$ e nenhum em \mathbb{H} ;
- (iii) γ é elíptica se possui um ponto fixo em \mathbb{H} e nenhum em $\partial\mathbb{H}$.

2.4.4 Representação por matriz

Sejam γ_1 e γ_2 transformações de Möbius de \mathbb{H} tais que:

$$\gamma_1(z) = \frac{a_1z + b_1}{c_1z + d_1}, \quad (8)$$

$$\gamma_2(z) = \frac{a_2z + b_2}{c_2z + d_2}. \quad (9)$$

Então, a composição é uma transformação de Möbius da forma:

$$\gamma_1\gamma_2(z) = \frac{(a_2a_1 + b_2c_1)z + (a_2b_1 + b_2d_1)}{(c_2a_1 + d_2c_1)z + (c_2b_1 + d_2d_1)}. \quad (10)$$

Observe a conexão entre os coeficientes e a matriz do produto:

$$\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_2c_1 & a_2b_1 + b_2d_1 \\ c_2a_1 + d_2c_1 & c_2b_1 + d_2d_1 \end{pmatrix}.$$

Note que:

$$\gamma(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (11)$$

é uma transformação de Möbius de \mathbb{H} , então:

$$z \mapsto \frac{\lambda az + \lambda b}{\lambda cz + \lambda d}, \quad (12)$$

fornece a mesma transformação de Möbius de \mathbb{H} ($\lambda \neq 0$). Assim, tomando $\lambda = 1/\sqrt{(ad - bc)}$ pode-se assumir, sempre, que $ad - bc = 1$.

Definição 10 *A transformação de Möbius $\gamma(z) = (az + b)/(cz + d)$ de \mathbb{H} está em sua forma normalizada se $ad - bc = 1$.*

Definição 11 *As matrizes da forma:*

$$SL(2, \mathbb{Z}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}; ad - bc = 1 \right\},$$

são chamadas de grupo linear especial de \mathbb{R}^2 .

2.4.5 Conjugação das transformações de Möbius

Definição 12 *Sejam $\gamma_1, \gamma_2 \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ duas transformações de Möbius de \mathbb{H} . Diz-se que γ_1 e γ_2 são conjugadas se existir outra transformação de Möbius $g \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ tal que $\gamma_1 = g^{-1} \circ \gamma_2 \circ g$.*

2.4.6 Traço de uma transformação de Möbius

Seja $\gamma_z = (az + b)/(cz + d)$ uma transformação de Möbius de \mathbb{H} , com $ad - bc > 0$. Dividindo os coeficientes a, b, c, d por $\sqrt{ad - bc}$ tem-se γ em sua forma normalizada. Então, pode-se associar a γ a matriz $A = (a, b; c, d)$. Como $ad - bc = 1$, nota-se que $A \in SL(2, \mathbb{R})$. Ao invés disso, pode-se, também, associá-la a matriz $-A$. Assim, define-se a função como:

$$t(\gamma) = (\text{Tr}(A))^2 = (\text{Tr}(-A))^2. \quad (13)$$

Definição 13 *Seja $\gamma \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ uma transformação de Möbius de \mathbb{H} com $\gamma_z = (az + b)/(cz + d)$, onde $ad - bc = 1$. Então, $t(\gamma) = |(a + d)^2|$ é chamado de traço de γ .*

Proposição 6 *Sejam γ_1 e γ_2 conjugados das transformações de Möbius de \mathbb{H} . Então $t(\gamma_1) = t(\gamma_2)$.*

Proposição 7 *Seja $\gamma \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ uma transformação de Möbius de H e suponha que γ não é a identidade. Então,*

- (i) γ é parabólica se, e somente se, $t(\gamma) = 4$;
- (ii) γ é elíptica se, e somente se, $t(\gamma) \in [0, 4)$;
- (iii) γ é hiperbólica se, e somente se, $t(\gamma) \in (4, \infty]$.

2.4.7 Transformações Elípticas

Para entender as isometrias elípticas é mais fácil trabalhar com o disco de Poincaré \mathbb{D} . Lembrando que a transformação de Möbius de \mathbb{D} tem a forma:

$$\gamma(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\bar{\beta} z + \bar{\alpha}}, \quad (14)$$

na qual $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ e $|\alpha|^2 - |\beta|^2 > 0$. Agora, pode-se normalizar $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$.

Proposição 8 *Seja $\gamma \in \text{Möb}(\mathbb{D})$ uma transformação de Möbius de \mathbb{D} . São equivalentes:*

- (i) γ é elíptica;
- (ii) $t(\gamma) \in [0, 4)$;
- (iii) γ é o conjugado da rotação $z \mapsto e^{i\theta} z$.

2.4.8 Transformações Parabólicas

Uma transformação de Möbius $\gamma \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ é dita parabólica se possui um ponto fixo e este ponto fixo se encontra no $\partial\mathbb{H}$. Por exemplo, a transformação de Möbius de \mathbb{H} dada por:

$$\gamma(z) = z + 1, \quad (15)$$

é parabólica.

Em geral, uma transformação de Möbius de \mathbb{H} na forma $z \mapsto z + b$ é chamada de translação.

2.4.9 Transformações Hiperbólicas

Uma transformação de Möbius de \mathbb{H} é hiperbólica se ela possui exatamente dois pontos fixos em $\partial\mathbb{H}$. Por exemplo, seja $k > 0$ e suponha que $k \neq 1$. Então a transformação de Möbius $\gamma(z) = kz$ de \mathbb{H} é hiperbólica. Os dois pontos fixos são o 0 e o ∞ . Em geral, uma transformação de Möbius da forma $z \mapsto kz$ onde $k \neq 1$ é chamada de dilatação.

Proposição 9 *Seja $\gamma \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ uma transformação de Möbius de \mathbb{H} . São equivalentes:*

- (i) γ é hiperbólica;
- (ii) $t(\gamma) > 4$;

(iii) γ é o conjugado da dilatação, portanto γ é o conjugado da transformação de Möbius de \mathbb{H} da forma $z \mapsto kz$, para algum $k > 0$.

2.5 Geradores de Grupos Fuchsianos

Um conjunto de transformações de Möbius pertencentes a $\text{Möb}(\mathbb{H})$ formam um grupo, denominado *Grupo Fuchsiano*.

Definição 14 *Um Grupo Fuchsiano é um subgrupo discreto de $\text{Möb}(\mathbb{H})$, as transformações de Möbius de \mathbb{H} .*

Proposição 10 *Seja Γ um subgrupo de $\text{Möb}(\mathbb{H})$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) Γ é um subgrupo discreto de $\text{Möb}(\mathbb{H})$, isto é, um Grupo Fuchsiano;
- (ii) o elemento identidade de Γ é isolado.

Definição 15 *Seja $z \in \mathbb{H}$. A órbita $\Gamma(z)$ de z sobre Γ é o conjunto de todos os pontos de \mathbb{H} que pode-se chegar, aplicando elementos de Γ para z :*

$$\Gamma(z) = \{\gamma(z) | \gamma \in \Gamma\}. \quad (16)$$

Proposição 11 *Seja Γ um subgrupo de $\text{Möb}(\mathbb{H})$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) Γ é um Grupo Fuchsiano.
- (ii) Para cada $z \in \mathbb{H}$, a órbita $\Gamma(z)$ é um subconjunto discreto de \mathbb{H} .

Definição 16 *Sejam $z, w \in \mathbb{H} \cup \partial\mathbb{H}$. Então existe uma única geodésica que passa por z e w . Denotamos por $[z, w]$ a parte desta geodésica que conecta z e w . Chamamos $[z, w]$ o segmento ou arco da geodésica entre z e w .*

Definição 17 *Sejam $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{H} \cup \partial\mathbb{H}$. Então, o polígono hiperbólico P com vértices em z_1, \dots, z_n é a região de \mathbb{H} limitada pelos segmentos geodésicos:*

$$[z_1, z_2], \dots, [z_{n-1}, z_n], [z_n, z_1]. \quad (17)$$

2.6 Tesselações Hiperbólicas

Uma tesselação é o preenchimento do plano por figuras ou polígonos, sem que haja sobreposições e nem espaços vazios entre eles. Em uma tesselação, pode-se chamar de nós todos os vértices dos polígonos utilizados e de arestas os segmentos de retas ligadas por dois nós consecutivos de um mesmo lado do polígono.

Definição 18 *Um polígono hiperbólico P' , de lados p , é um conjunto convexo fechado contendo p segmentos de geodésicas hiperbólicas. Seus vértices são as interseções de suas geodésicas.*

Observação 4 *Consequentemente, um polígono regular é um polígono hiperbólico cujos lados têm o mesmo comprimento e os ângulos internos têm a mesma medida.*

Dessa forma, pode-se definir diversas tesselações hiperbólicas. Em particular, destaca-se três tipos de tesselações hiperbólicas a partir de polígonos hiperbólicos:

- Semirregulares: utilizam dois ou mais polígonos regulares.
- Irregulares: utilizam polígonos irregulares.
- Regulares: utilizam apenas um polígono regular.

As Figuras 4 e 5 apresentam exemplos de tesselações regulares e semirregulares, respectivamente.

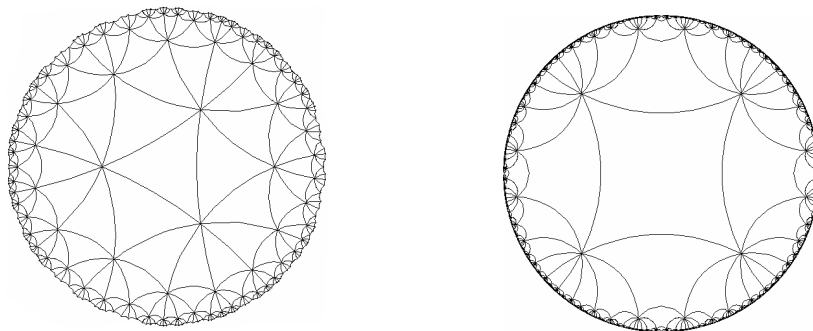


Figura 4: Exemplos de tesselações regulares.

Fonte: <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/poincare/tilingsAp.html>.

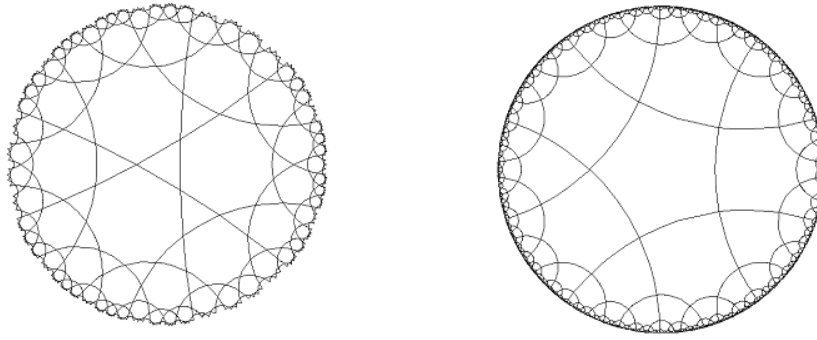


Figura 5: Exemplos de tesselações semiregulares.
 Fonte: <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/poincare/tilingsAp.html>.

Em particular, nesse trabalho serão abordadas as tesselações regulares, uma vez que possibilitam a criação de reticulados hiperbólicos, usados no processo de construção de constelações de sinais. No plano euclidiano, as tesselações regulares são apenas três, sendo elas formadas por triângulos equiláteros, quadrados e hexágonos. Desse modo, o estudo das tesselações hiperbólicas é justificado, pois no plano hiperbólico existem infinitas tesselações regulares.

Definição 19 *Uma tesselação regular no plano hiperbólico é uma partição deste plano por polígonos regulares não sobrepostos, todos congruentes, sujeitos à restrição de se interceptarem somente em suas arestas ou vértices, de modo a termos o mesmo número de polígonos partilhando um mesmo vértice, independente do vértice.*

Uma tesselação em \mathbb{H}^2 é denotada por $\{p, q\}$, na qual p é o número de lados dos polígonos que a compõem e q é o número de vértices. Caso $p = q$, a tesselação é chamada de auto-dual.

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo hiperbólico é menor do que π temos que $\{p, q\}$ é uma tesselação regular de \mathbb{H}^2 se, e somente se,

$$\frac{2\pi}{p} + \frac{2\pi}{q} < \pi, \quad (18)$$

ou ainda, se, e somente se:

$$(p - 2) \cdot (q - 2) > 4. \quad (19)$$

Dessa forma, existem infinitas tesselações regulares em \mathbb{H}^2 , ao contrário de \mathbb{R}^2 que possui apenas três tesselações regulares.

2.7 Transformações de Emparelhamento de Lados

Um subconjunto $F \subset \mathbb{H}$ é um domínio fundamental se as imagens $\gamma(F)$ de F sobre as transformações de Möbius $\gamma \in \Gamma$ tessalam o Semiplano Superior \mathbb{H} .

O domínio fundamental para este caso é o chamado polígono de Dirichlet.

Seja D um polígono hiperbólico. Um lado $s \subset \mathbb{H}$ de D é uma fronteira de D em \mathbb{H} equipada com uma orientação, ou seja, um lado de D é uma fronteira que começa em um dos vértices e acaba em outro.

Seja Γ um Grupo Fuchsiano e seja $D(p)$ um polígono Dirichlet de Γ . Assumindo que $D(p)$ possui infinitos lados e que s é um lado de D , suponha que para algum $\gamma \in \Gamma/\{Id\}$, tem-se que $\gamma(s)$ é um lado de $D(p)$. É possível observar que $\gamma^{-1} \in \Gamma/\{Id\}$ mapeia o lado $\gamma(s)$ até o lado s . A Figura 6 apresenta um exemplo de uma transformação γ associada ao lado s de $D(p)$.

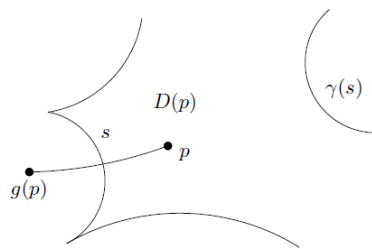


Figura 6: Transformação $\gamma = g^{-1}$ associada ao lado s de $D(p)$.
Fonte: [3].

Definição 20 *Seja $\Gamma = \{\gamma_n | \gamma_n(z) = z + n, n \in \mathbb{Z}\}$ um Grupo Fuchsiano de transformações inteiras. Se $p = i$ então $D(p) = \{z \in \mathbb{H} | -1/2 < \text{Re}(z) < 1/2\}$ é um polígono Dirichlet de Γ .*

Definição 21 *Seja um lado $s = \{z \in \mathbb{H} | \text{Re}(z) = -1/2\}$. Então s é a perpendicular de $[p, p-1] = [p, g(p)]$. Consequentemente, $\gamma_s(z) = g^{-1}(z) = z + 1$, então $\gamma_s(z) = s'$, onde o lado $s' = \{z \in \mathbb{H} | \text{Re}(z) = 1/2\}$.*

As Figuras 7 e 8 apresentam exemplos de emparelhamento de lados.

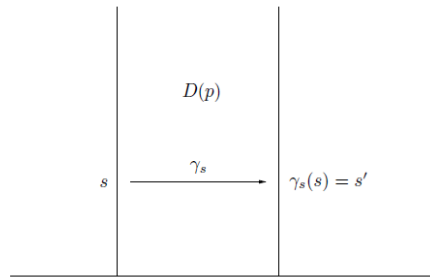


Figura 7: Mapeamento de emparelhamento de lados para $\Gamma = \gamma_n | \gamma_n(z) = z + n$.
Fonte: [3].

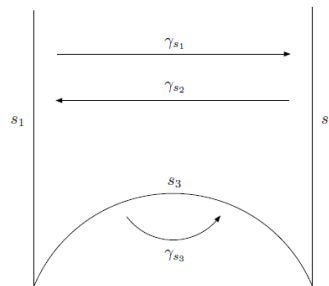


Figura 8: Transformações emparelhando lados para um grupo modular: s_1 é emparelhado com s_2 e s_3 é emparelhado com ele mesmo.
Fonte: [3].

Para indicar quais lados de $D(p)$ são emparelhados e como são definidas as transformações, usa-se um diagrama como o da Figura 9. Os lados com número iguais de flechas estão emparelhados e o emparelhamento preserva a direção das flechas denotando a orientação dos lados.

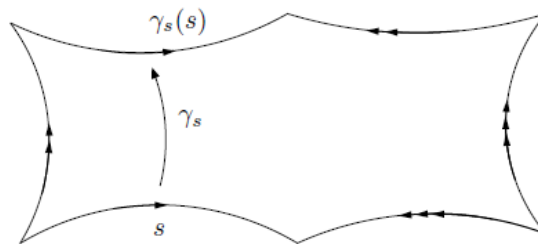


Figura 9: O lado s' é mapeado com o lado s por γ_s . Os lados com um número igual de flechas estão emparelhados.

Fonte: [3].

Definição 22 A sequência de vértices $\varepsilon = v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_{n-1}$ é chamada de ciclo elíptico. A transformação $\gamma_n \gamma_{n-1} \dots \gamma_2 \gamma_1$ é chamada de transformação ciclo elíptica.

Um exemplo é apresentado na Figura 10.

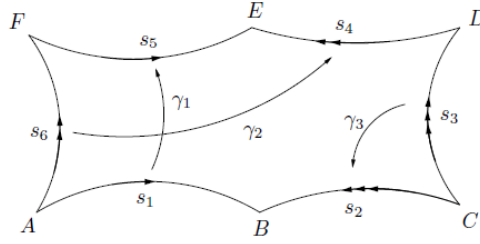


Figura 10: Polígonos com lados, vértices e transformações de emparelhamento de lados.
Fonte: [3].

Definição 23 *Seja v um vértice de um polígono hiperbólico D . Denota-se a transformação ciclo elíptica associada ao vértice v e o lado s , por $\gamma_{v,s}$.*

Definição 24 *Se uma transformação ciclo elíptica é a identidade, então ela é denominada de ciclo accidental.*

Definição 25 *Seja $\gamma \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ uma transformação de Möbius, γ tem ordem infinita, se existir um $m > 0$ tal que $\gamma^m = \text{Id}$. O inteiro $m > 0$ é denominado ordem de γ .*

Proposição 12 *Seja Γ um Grupo Fuchsiano e seja $\gamma \in \Gamma$ um elemento elíptico. Então existe um inteiro $m \geq 1$ tal que $\gamma^m = \text{Id}$.*

Demonstração: Seja uma rotação de ângulo $2\pi\theta$ na qual $\theta \in [0, 1]$.

Considere os elementos $\gamma^n \in \Gamma$, estes são conjugados com as rotações através do ângulo $2\pi n\theta \bmod 1$.

A proposição segue do fato que a sequência $n\theta \bmod 1$ é um subconjunto discreto de $[0,1]$ se, e somente se, θ é um racional, denominado $\theta = k/m$.

Como Γ é um Grupo Fuchsiano, o subgrupo $\gamma^n | n \in \mathbb{Z}$ é também um Grupo Fuchsiano, e, ainda, discreto.

Consequentemente, γ é conjugado com uma rotação de $2k\pi/m$. E, portanto, γ^m é conjugado com uma rotação através de $2k\pi$, sendo γ^m a identidade. ■

Proposição 13 *Seja $\angle v$ denotando o ângulo interno de D até o vértice v . Considere o ciclo elíptico $v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_{n-1}$ do vértice $v = v_0$. Definimos a soma do ângulo como*

$$\text{sum}(\varepsilon) = \angle v_0 + \dots + \angle v_{n-1}. \quad (20)$$

A soma do ângulo de um ciclo elíptico não depende de um vértice para começar.

Proposição 14 *Seja Γ um Grupo Fuchsiano com um polígono Dirichlet D com vértices em \mathbb{H} e seja ε um ciclo elíptico. Então existe um inteiro $m_\varepsilon \geq 1$ tal que:*

$$m_\varepsilon \text{sum}(\varepsilon) = 2\pi, \quad (21)$$

além disso, m_ε é a ordem de ε .

2.8 Gênero de Superfícies

Em topologia, o gênero de uma superfície é o número de “buracos” desta. Para a identificação do gênero de uma superfície, pode-se utilizar a característica de Euler, definida por:

Definição 26 *Seja X um espaço bidimensional e uma superfície de Riemann compacta. Para calcularmos o gênero dessa superfície, utilizamos a característica de Euler, dada por:*

$$\chi = 2 - 2g = V - A + F,$$

na qual:

- χ é a característica de Euler,
- g é o gênero da superfície,
- V é o número de vértices,
- A é o número de arestas,
- F é o número de faces.

Quando o gênero da superfície é igual a 0, obtemos a esfera, representada pela Figura 11.

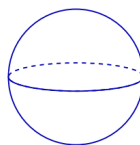


Figura 11: Esfera, gênero 0.
Fonte: [15].

Quando o gênero da superfície é igual a 1, obtemos o toro, representado pela Figura 12.

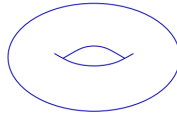


Figura 12: Toro, gênero 1.
Fonte: [15].

Quando o gênero da superfície é igual a 2, obtemos o bitoro, representado pela Figura 13.

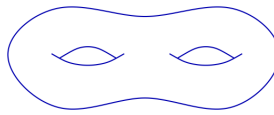


Figura 13: Bitoro, gênero 2.
Fonte: [15].

E assim por diante.

3 Sistemas de Comunicação

A fim de relacionar elementos de Geometria Hiperbólica a Sistemas de Comunicação, este Capítulo tem como objetivo apresentar as principais características de um Sistema de Comunicação, sendo subdividido em três Seções: 3.1 Principais Elementos, 3.2 Canais Discretos sem Memória, 3.3 Empacotamento Esférico. As referências utilizadas foram [13], [4], [14] e [8].

3.1 Principais Elementos

Um Sistema de Comunicação é um conjunto de equipamentos, cujo objetivo é o de transmitir uma informação da maneira mais confiável possível. Cada Sistema de Comunicação possui um canal de transmissão, composto por uma fonte e um destinatário. Os principais Sistemas de Comunicação são:

- Sistemas analógicos - São aqueles que conservam a forma dos sinais desde a fonte ao destinatário e variam com o tempo de forma contínua.

- Sistemas digitais - São aqueles em que a forma do sinal transmitido pode ser diferente do sinal original, por exemplo: a forma do sinal pode variar em amplitude ou fase ou frequência em intervalos fixos de tempo.

Um Sistema de Comunicação é composto dos seguintes elementos: a fonte, gerando símbolos a serem transmitidos, pertencentes a um alfabeto finito, que na maioria dos casos é binário, o emissor possuindo o papel de converter esses dados em sinais adequados, por meio de processos de modulação e codificação, para o sistema de transmissão, presente entre a fonte e o destinatário, que por sua vez transforma os dados em sinais, transportando-os para o receptor, que transforma os sinais novamente em dados, que chegam ao destino que consome os dados.

Durante essa transmissão, temos o canal atuando como um filtro, fazendo com que o sinal seja transmitido de forma correta, distorcendo sua forma de onda. Todavia, pode-se ocorrer no processo de transmissão de sinal, efeitos indesejáveis que afetam o mesmo, por meio de interferências, ruídos e distorções, que impedem a passagem dos sinais para o receptor fazendo com que eles cheguem de modo indesejado.

A distorção é a resposta imperfeita do sistema ao sinal utilizado e desaparece quando o mesmo é desligado. A interferência é uma contaminação do sinal que ocorre devido a fontes humanas, que podem ser linhas cruzadas, que vem atrapalhar a transmissão dos sinais, os ruídos são sinais aleatórios que podem afetar de tal forma a transmissão que pode ocorrer a perda total dos sinais.

O modelo do Sistema de Comunicação Digital é constituído pela inserção do Codificador de Fonte, Codificador de Canal, Modulador, Demodulador, Decodificador de Canal e Decodificador de Fonte, sendo representado através de um diagrama de blocos, conforme apresenta a Figura 14.

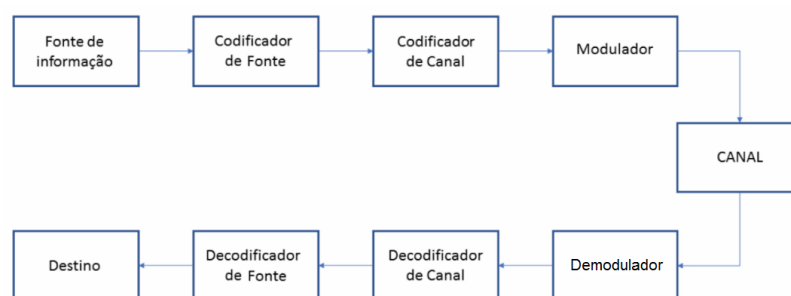


Figura 14: Modelo de um Sistema de Comunicação Digital.
Fonte: O autor (2018).

A seguir, são descritos alguns elementos básicos de um Sistema de Comunicação:

- Fonte: o que, ou quem, emite uma informação a ser transmitida, pode-se gerar uma sequência de símbolos discretos ou um sinal;
- Codificador de Fonte: converte o sinal, emitido pela fonte, em uma sequência de dígitos;
- Codificador de Canal: transforma a sequência “X” da saída do Codificador de Fonte em uma (palavra-código) pela adição de redundâncias, cujo objetivo é combater os efeitos do ruído introduzido através do canal. Cada símbolo, da sequência codificada (palavra-código) é representado por dígitos binários na sinalização binária. Em contrapartida, no uso de mais do que dois sinais (por exemplo x sinais), não temos bits, e sim dígitos de um alfabeto x -ário;
- Modulador: tem a função de converter os símbolos digitais da saída do Codificador de Canal em forma de ondas analógicas para a transmissão;
- Canal: é o meio físico que conecta o transmissor ao receptor. O sinal modulado a ser transmitido através do canal pode ou não sofrer a ação do ruído;
- Demodulador: com a recepção do sinal vindo do Canal, o Demodulador converte a sequência da forma de ondas corrompidas pelo ruído em uma sequência de símbolos para o Decodificador de Canal;
- Decodificador de Canal: decodifica a sequência produzida pelo Demodulador de maneira mais confiável (com a menor probabilidade de erro, se houver), produzindo uma estimativa dos dígitos na saída do Decodificador de Fonte;
- Decodificador de Fonte: transforma a sequência estimada na saída do Decodificador de Canal em uma estimativa na saída da fonte, reproduzindo os dados emitidos pela fonte de informação;
- Destinatário: é o receptor da informação transmitida (ser humano, máquina ou até mesmo um organismo).

Existem vários tipos de moduladores, sendo dois deles o tipo PSK e o tipo QAM. No PSK (Phase Shift Keying), o sinal digital altera a fase portadora, enquanto que no QAM

(Quadrature Amplitude Modulation), a fase e a amplitude da portadora são modificadas. Considera-se a QAM melhor do que a PSK, devido a maior possibilidade de taxas de transmissão.

Uma alternativa para representar um Sistema de Comunicação são os grafos, cuja definição é dada por:

Definição 27 Um grafo G é uma tripla ordenada $G = (V, E, \psi)$, onde V é um conjunto finito e não vazio de vértices, E é um conjunto finito de arestas e $\psi : E \rightarrow V \times V$ é uma função de incidência que associa a cada aresta e de G um par de vértices u e v .

O grafo será denotado por $C_{m,n}$, onde m é o número de entradas e n é o número de saídas de um canal de comunicação.

3.2 Canais Discretos sem Memória

Um canal discreto sem memória é um modelo estatístico. Nele, existe um alfabeto de entrada, representado pela variável X , e a saída, representada pela variável Y . Estes elementos correspondem entre si, através de uma lei de transição, como apresentado na Figura 15.

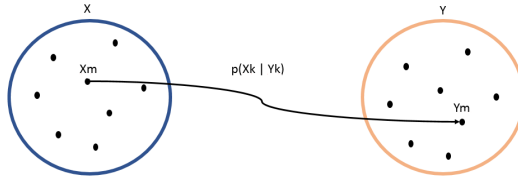


Figura 15: Modelo de um canal discreto.
Fonte: O autor (2018).

Definição 28 Um canal discreto sem memória é determinado pelo mecanismo estatístico que descreve o transporte de informação entre a fonte e o destinatário e que se define pelo conjunto de probabilidades condicionais.

$$p(y_k | x_m), m = 1, 2, \dots, M; k = 1, 2, \dots, K. \quad (22)$$

Percebe-se que cada símbolo de saída depende de um símbolo de entrada, não de uma sequência. Em geral,

$$\forall m = 1, 2, \dots, M : p(y_k | x_m) \neq 0, k \neq m,$$

assim, o processo de transmissão está sujeito a erros. A ocorrência de erros de transmissão decorre do fato de o canal ser ruidoso. A emissão do símbolo particular x_m pode corresponder a recepção de qualquer um dos símbolos do alfabeto de saída e, portanto,

$$\sum_k K k = 1 p(y_k | X_m) = 1, m = 1, 2, \dots, M. \quad (23)$$

Exemplo: [Canal Binário Simétrico] Considere o caso do canal binário simétrico, de grande interesse teórico e importância prática. Neste caso $K = M = 2$, o alfabeto de entrada é $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$, e o de saída é $y_0 = 0$ e $y_1 = 1$. O canal é designado como simétrico porque a probabilidade p de receber 1 supondo ter sido transmitido 0 é igual à probabilidade de receber 0 supondo ter sido transmitido 1, como se ilustra no diagrama da Figura 16, independentemente da distribuição a priori, $P_e = p$.

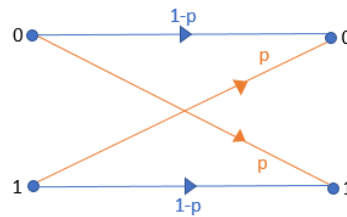


Figura 16: Exemplo de um canal binário simétrico.
Fonte: O autor (2018).

3.3 Empacotamento Esférico

Um dos objetivos da teoria de códigos corretores de erros é que a comunicação possa ser feita sem erros, ou com a menor probabilidade de erros possível. Para isso, a transmissão de sinais deve ser realizada da melhor maneira possível.

Uma das formas de pensar neste sinal é através das “esferas de erro”. Por exemplo, se as “esferas de erro” se sobrepõem, Figura 17, a decodificação do sinal pode ficar confusa.

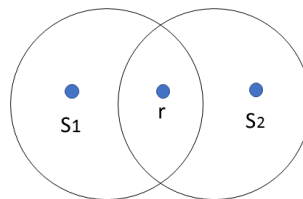


Figura 17: Esferas de erro sobrepostas.
Fonte: o autor (2018).

Mas se as esferas se tangenciam, Figura 18, o sinal chega a apenas uma das esferas.

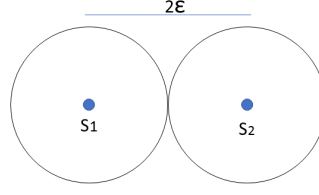


Figura 18: Esferas de erro se tangenciando.
Fonte: o autor (2018).

A partir dessas esferas de erros, são produzidas tesselações que vão cobrir o plano e representar geometricamente as regiões de decisão dos códigos corretores de erros.

Definição 29 *Sejam \mathbb{K} um corpo, $R \subseteq \mathbb{K}$ um anel, V um espaço vetorial de dimensão finita n sobre \mathbb{K} e $\{v_1, \dots, v_m\}$ vetores linearmente independentes sobre \mathbb{K} , com $m \leq n$.*

O conjunto dos elementos de V da forma:

$$\left\{ x = \sum_{i=1}^m a_i v_i, \text{ com } a_i \in R \right\}, \quad (24)$$

é chamado reticulado com base $\beta = \{v_1, \dots, v_m\}$ e será denotado por Λ_β .

Definição 30 *Um empacotamento esférico, ou simplesmente um empacotamento no \mathbb{R}^n , é uma distribuição de esferas de mesmo raio na forma de que a interseção de quaisquer duas esferas em \mathbb{R}^n tenha no máximo um ponto. Pode-se descrever um empacotamento indicando apenas o conjunto dos centros das esferas e o raio.*

O volume em \mathbb{R}^n é transferido para o \mathbb{R} -espaço V através do isomorfismo natural entre \mathbb{R}^n e V , e definido por meio de uma base $\{v_1, \dots, v_n\}$.

Utilizando as propriedades de volume a seguir é possível restringir a subconjuntos C e V , que são reuniões finitas da região fundamental,

- (i) $vol(x + C) = vol(C)$, para todo $x \in V$;
- (ii) $vol(\gamma C) = \gamma^n vol(C)$, para todo $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$;
- (iii) Se $C \cap C' = \emptyset$, então $vol(C \cup C') = vol(C) + vol(C')$.

Definição 31 *Sejam $\{v_1, \dots, v_n\}$ uma base de um reticulado $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^n$ e P_v a sua região fundamental. Se $v_i = (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in})$, para $i = 1, 2, \dots, n$, então o volume da região fundamental P_v , denotado por $vol(P_v)$, é definido por*

$$\text{vol}(P_v) = |\det(B)|, \quad (25)$$

onde:

$$B = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \dots & v_{nn} \end{bmatrix}.$$

Proposição 15 *O volume da região fundamental independe da base do reticulado.*

Demonstração: Seja $v = \{v_1, \dots, v_n\}$ uma base de uma reticulado $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^n$. Se $s = \{s_1, \dots, s_n\}$ é uma outra base de Λ , então, $s_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} v_j$, com $\alpha_{ij} \in \mathbb{Z}$. Assim,

$$\text{vol}(P_s) = |\det(\alpha_{ij})| \text{vol}(P_v). \quad (26)$$

Como a matriz mudança de base (α_{ij}) é inversível, segue que $\det(\alpha_{ij}) = \pm 1$. Portanto, $\text{vol}(P_s) = \text{vol}(P_v)$.

■

Observação 5 *Seja β' uma outra base para Λ_β , segue que $\text{vol}(\Lambda_\beta) = \text{vol}(\Lambda_{\beta'})$, pois β e β' diferem pelo produto de uma matriz inversível com entradas inteiras. Deste modo, podemos definir o volume de Λ_β como o volume de uma região fundamental.*

Definição 32 *Seja $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base de um reticulado $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^n$. O volume do reticulado Λ_β é definido por $\text{vol}(\Lambda_\beta) = \text{vol}(P_v)$.*

Definição 33 *Um empacotamento reticulado é um empacotamento em que o conjunto dos centros das esferas formam um reticulado Λ_β de \mathbb{R}^n .*

A Figura 19 apresenta um empacotamento do reticulado $\Lambda_\beta = \mathbb{Z}^2$.

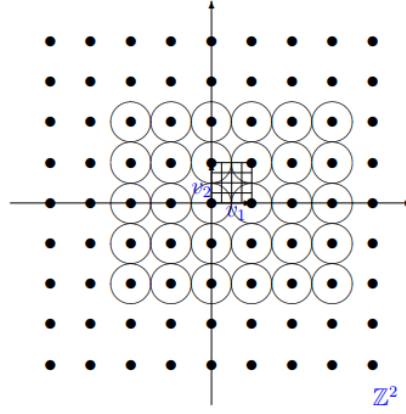


Figura 19: Empacotamento do reticulado $\Lambda_\beta = \mathbb{Z}^2$.

Fonte: [9].

Definição 34 Dado um empacotamento no \mathbb{R} , associado a um reticulado Λ_β com $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ uma \mathbb{Z} -base, definimos a sua densidade de empacotamento com a proporção de espaço \mathbb{R} coberta pela união das esferas.

Seja Λ_β um reticulado \mathbb{R}^2 gerado pelos vetores $(1, 0)$ e $(0, 1)$. Temos que o raio de empacotamento é $p = 1/2$, e $\text{vol}(B(1)) = \pi \cdot 1 = \pi$. Assim, o volume do reticulado é $\text{vol}(\Lambda_\beta) = 1$, a densidade de empacotamento é:

$$\Delta(\Lambda_\beta) = \text{vol}(B(1)) \cdot \frac{p^2}{\text{vol}(\Lambda_\beta)} = \pi \frac{1}{4} = \frac{\pi}{4}, \quad (27)$$

e a densidade de centro é $\delta(\Lambda_\beta) = 1/4$.

Seja $\Lambda_\beta = \mathbb{Z}^n$ um reticulado do \mathbb{R}^n , gerado pelos vetores $v_1 = (1, 0, \dots, 0), v_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, v_n = (0, 0, \dots, 1)$. A forma quadrática $|v|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$ assume o valor mínimo quando $x_i = 1$ para algum $i = 1, \dots, n$, e os demais são nulos. Assim $|v|^2 = 1$ e $p = 1/2$. Visto que $\text{vol}(\Lambda_\beta) = |\det B|$, e B neste caso é a matriz identidade, temos que o $\text{vol}(\Lambda_\beta) = 1$, e portanto, $\delta(\Lambda_\beta) = \frac{1}{2^n}$.

Dessa forma, o objetivo é encontrar empacotamentos com maiores densidades, pois quanto maior a densidade, maior a probabilidade da informação ser codificada. Tem-se que em \mathbb{R} , o empacotamento é o melhor possível, pois sua densidade é 1. Em \mathbb{R}^2 o melhor reticulado é o hexagonal, enquanto em \mathbb{R}^3 é o reticulado conhecido por *face - centered - cubic*. Contudo, a partir de \mathbb{R}^4 , não são conhecidos os reticulados com maiores densidades, possuindo apenas alguns exemplos.

4 Caracterização Algébrica e Geométrica de Sistemas de Comunicação via Elementos de Geometria Hiperbólica

Este Capítulo está organizado da seguinte maneira: na Seção 4.1, caracteriza-se o canal de comunicação $C_{2,2}$, duas entradas e duas saídas, e o $C_{2,4}$, duas entradas e quatro saídas, geometricamente e algebricamente, via Geometria Hiperbólica e na Seção 4.2 é feita uma análise teórica sobre o empacotamento hiperbólico e sua relação com Sistemas de Comunicação.

4.1 Canais de Comunicação

Nesta Seção serão caracterizados os canais de comunicação $C_{2,2}$ e $C_{2,4}$, através das seguintes etapas:

- (i) representação dos polígonos associados aos mesmos nos modelos do Semiplano Superior e do disco de Poincaré;
- (ii) identificação das transformações aplicadas aos lados dos mesmos;
- (iii) identificação da matrizes associadas às transformações;
- (iv) classificação das transformações por meio da função traço da matriz associada;
- (v) cálculo da característica de Euler;
- (vi) identificação da superfície de Riemann associada;
- (vii) obtenção do gênero mínimo e máximo associados ao mergulho do canal em uma superfície.

4.1.1 Canal $C_{2,2}$

Considere o triângulo hiperbólico de vértices $(0, 2, \infty)$, representado pela Figura 20 no modelo do Semiplano Superior. As transformações γ_1 e γ_2 , dadas por $\gamma_1(z) = -z + 2$ e $\gamma_2(z) = z + 2$, são identificadas por meio da relação: a transformação γ_1 leva o vértice 0 no vértice 2 e vice-versa, enquanto a transformação γ_2 leva o vértice ∞ no vértice ∞ .

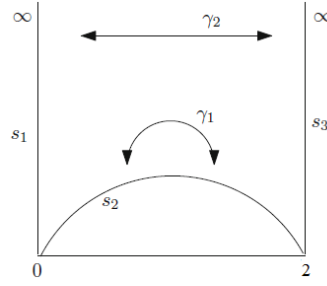


Figura 20: Triângulo hiperbólico de vértices $(0, 2, \infty)$ no modelo do Semiplano Superior.
Fonte: O autor (2018).

De acordo com a transformação apresentada na Observação 1, obtém-se os vértices deste polígono no modelo do disco de Poincaré. Dessa forma, obtém-se:

- para $\tau = 0$: $\bar{\tau} = i \cdot \frac{0 - 1 - i}{0 - 1 + i} = \frac{-i + 1}{i - 1} = -1$;
- para $\tau = 2$: $\bar{\tau} = i \cdot \frac{2 - 1 - i}{2 - 1 + i} = \frac{i + 1}{i + 1} = 1$;
- para $\tau = \infty$: $\bar{\tau} = i \cdot \frac{\infty - 1 - i}{\infty - 1 + i} = i$.

A Figura 21 apresenta o triângulo hiperbólico de vértices $(0, 2, \infty)$ no modelo do disco de Poincaré.

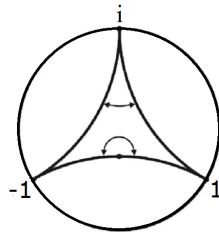


Figura 21: Representação do triângulo hiperbólico de vértices $(0, 2, \infty)$ no modelo do disco de Poincaré.

Fonte: O autor (2018).

As matrizes associadas às transformações γ_1 e γ_2 , A e B, são respectivamente:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para classificar a transformação por meio do traço da matriz associada, é necessário normalizá-la. Note que a matriz B já está em sua forma normalizada, pois $\sqrt{ad - bc} = 1$.

A matriz A não está normalizada, para sua normalização é necessário adotar $\sqrt{ad - bc} = \sqrt{-1} = i$ e dividir cada elemento por i . A seguir, a matriz A normalizada:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-1}{i} & \frac{2}{i} \\ 0 & \frac{1}{i} \end{bmatrix}.$$

A partir das representações matriciais destas transformações, é possível classificá-las de acordo com a função traço. Calculando os traços das transformações A e B , obtém-se:

$$t(A) = \left| \left(\frac{-1}{i} + \frac{1}{i} \right)^2 \right| = 0, \quad (28)$$

$$t(B) = |(1 + 1)^2| = |4| = 4. \quad (29)$$

Portanto, a transformação γ_1 é elíptica, devido ao traço de sua matriz associada ser 0, enquanto a transformação γ_2 é parabólica, pois o traço de sua matriz associada é 4.

Agora, a partir da característica de Euler, caracteriza-se a superfície que está associada ao triângulo hiperbólico e às transformações γ_1 e γ_2 .

$$2 - 2g = V - A + F$$

$$2 - 2g = 3 - 2 + 1$$

$$2 - 2g = 2$$

$$g = 0,$$

obtendo-se gênero zero, que caracteriza uma esfera.

Considere o triângulo hiperbólico de vértices $(-2, 2, \infty)$, representado pela Figura 22, no modelo do Semiplano Superior, e assumindo $\gamma_1(z) = -z$ e $\gamma_2(z) = z$ como as transformações associadas ao polígono.

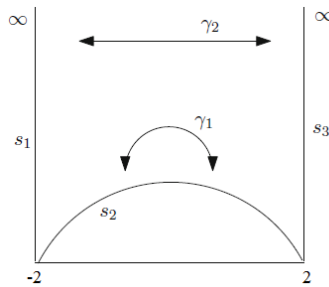


Figura 22: Triângulo hiperbólico de vértices $(-2, 2, \infty)$ no modelo do Semiplano Superior. Fonte: O autor (2018).

A representação no disco de Poincaré, é feita aplicando-se a transformação, conforme a Observação 1:

- para $\tau = -2$: $\bar{\tau} = i \cdot \frac{-2 - 1 - i}{-2 - 1 + i} = \frac{-3i + 1}{i - 3} = \frac{4i - 3}{5}$,
- para $\tau = 2$: $\bar{\tau} = i \cdot \frac{2 - 1 - i}{2 - 1 + i} = \frac{i + 1}{i + 1} = 1$,
- para $\tau = \infty$: $\bar{\tau} = i \cdot \frac{\infty - 1 - i}{\infty - 1 + i} = i$.

Dessa forma, obtém-se a representação do triângulo hiperbólico de vértices $(-2, 2, \infty)$, no modelo do disco de Poincaré, dado pela Figura 23.

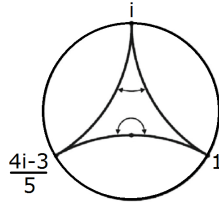


Figura 23: Representação do triângulo hiperbólico de vértices $(-2, 2, \infty)$ no disco de Poincaré.

Fonte: O autor (2018).

As matrizes associadas às transformações γ_1 e γ_2 , A e B, são respectivamente:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Observe que a matriz A não está normalizada, enquanto a matriz B está, pois $\sqrt{ad - bc} =$

1. Para normalizar A, tome $\sqrt{ad - bc} = \sqrt{-1} = i$ e divida todos os elementos por i :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-1}{i} & 0 \\ 0 & \frac{1}{i} \end{bmatrix}.$$

Com as representações matriciais destas transformações, é possível classificá-las de acordo com a função traço. Calculando os traços das transformações A e B, obtém-se:

$$t(A) = \left| \left(\frac{-1}{i} + \frac{1}{i} \right)^2 \right| = 0, \quad (30)$$

$$t(B) = |(1+1)^2| = |4| = 4. \quad (31)$$

Portanto, a transformação γ_1 é elíptica devido ao traço de sua matriz associada ser 0, enquanto a transformação γ_2 é parabólica, pois o traço de sua matriz associada é 4.

Agora, a partir da característica de Euler, caracteriza-se a superfície que está associada ao triângulo hiperbólico e às transformações γ_1 e γ_2 :

$$2 - 2g = V - A + F = 3 - 2 + 1 = 2 \rightarrow g = 0, \quad (32)$$

obtendo-se gênero zero, que caracteriza uma esfera.

Um canal $C_{2,2}$ é composto por duas entradas e duas saídas. Para melhor representá-lo, a Figura 24 apresenta dois exemplos de grafos associados a este canal, relacionados aos triângulos hiperbólicos apresentados anteriormente.

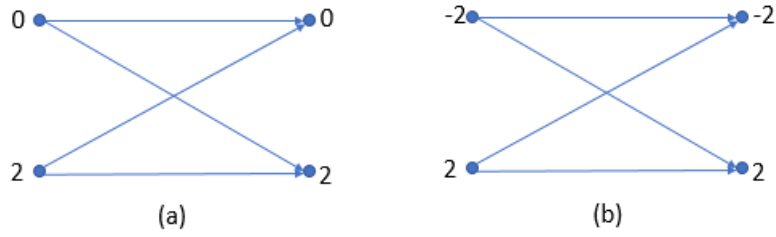


Figura 24: (a) Grafo associado aos vértices 0 e 2 de um triângulo hiperbólico; (b) Grafo associado aos vértices -2 e 2 de um triângulo hiperbólico.

Fonte: O autor (2018).

De acordo com [7], pode-se identificar o gênero mínimo e o gênero máximo associado ao mergulho destes canais de comunicação em superfícies, a fim de analisar o desempenho desses canais. No caso do canal $C_{2,2}$, tem-se:

$$g_{min} = \left\{ \frac{(m-2)(n-2)}{4} \right\} = \left\{ \frac{(2-2)(2-2)}{4} \right\} = \left\{ \frac{(0)(0)}{4} \right\} = \{0\} = 0. \quad (33)$$

$$g_{max} = \left\{ \frac{(m-1)(n-1)}{2} \right\} = \left\{ \frac{(2-1)(2-1)}{2} \right\} = \left\{ \frac{(1)(1)}{2} \right\} = \left\{ \frac{1}{2} \right\} = 0. \quad (34)$$

$$g_{min} = \left\{ \frac{(m-2)(n-2)}{4} \right\} = 0 = \left\{ \frac{(m-1)(n-1)}{2} \right\} = g_{max}, \quad (35)$$

onde m é o número de entradas e n é o número de saídas.

Portanto, o gênero mínimo e o gênero máximo de um canal $C_{2,2}$ é igual a 0.

4.1.2 Canal $C_{2,4}$

Considere o quadrilátero hiperbólico de vértices $(-2, 0, 2, \infty)$, representado no modelo do Semiplano Superior, apresentado na Figura 25, e as transformações γ_1 e γ_2 , dadas por:

$$\gamma_1 = \frac{2z + 4}{z + 1} \text{ e } \gamma_2 = \frac{z + 6}{2}.$$

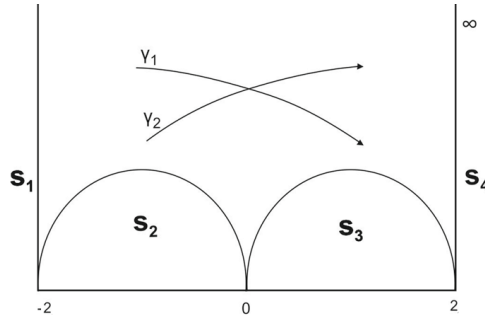


Figura 25: Quadrilátero hiperbólico de vértices $(-2, 0, 2, \infty)$ no modelo do Semiplano Superior.

Fonte: O autor (2018).

De acordo com a Observação 1, realizando os cálculos para a representação do polígono no modelo do disco de Poincaré, obtém-se:

- para $\tau = -2$: $\bar{\tau} = i \cdot \frac{-2 - 1 - i}{-2 - 1 + i} = \frac{-3i + 1}{i - 3} = \frac{4i - 3}{5}$;
- para $\tau = 0$: $\bar{\tau} = i \cdot \frac{0 - 1 - i}{0 - 1 + i} = \frac{-i + 1}{i - 1} = -1$;
- para $\tau = 2$: $\bar{\tau} = i \cdot \frac{2 - 1 - i}{2 - 1 + i} = \frac{i + 1}{i + 1} = 1$;
- para $\tau = \infty$: $\bar{\tau} = i \cdot \frac{\infty - 1 - i}{\infty - 1 + i} = i$.

Dessa forma, a Figura 26 apresenta o modelo do disco de Poincaré com os vértices encontrados.

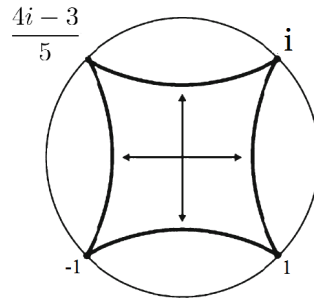


Figura 26: Quadrilátero hiperbólico de vértices $(-2, 0, 2, \infty)$ no modelo do disco de Poincaré.

Fonte: O autor (2018).

As matrizes associadas às transformações γ_1 e γ_2 , A e B, são respectivamente:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Note que nenhuma das matrizes associadas está normalizada. Portanto, para normalizar A, tome $\sqrt{ad - bc} = \sqrt{-2} = \sqrt{2}i$ e divida cada elemento por i :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}i} & \frac{4}{\sqrt{2}i} \\ \frac{1}{\sqrt{2}i} & \frac{1}{\sqrt{2}i} \end{bmatrix}.$$

Para normalizar B, tome $\sqrt{ad - bc} = \sqrt{2}$ e divida cada elemento por $\sqrt{2}$:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{6}{\sqrt{2}} \\ \frac{0}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

A partir das representações matriciais destas transformações, é possível classificá-las de acordo com a função traço. Calculando os traços de A e B, obtém-se:

$$t(A) = \left| \left(\frac{2}{\sqrt{2}i} + \frac{1}{\sqrt{2}i} \right)^2 \right| = \left| \left(\frac{3}{\sqrt{2}i} \right)^2 \right| = \left| \frac{9}{2 \cdot (-1)} \right| = \left| \frac{9}{-2} \right| = 4, 5, \quad (36)$$

$$t(B) = \left| \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} \right)^2 \right| = \left| \left(\frac{3}{\sqrt{2}} \right)^2 \right| = \left| \frac{9}{2} \right| = \left| \frac{9}{2} \right| = 4, 5. \quad (37)$$

Portanto, ambas as transformações γ_1 e γ_2 são hiperbólicas, devido aos traços de suas matrizes associadas serem iguais a 4, 5.

Agora, a partir da característica de Euler, caracteriza-se a superfície que está associada

ao quadrilátero hiperbólico e às transformações γ_1 e γ_2 .

$$2 - 2g = V - A + F = 1 + \frac{4}{2} + 1 = 1 - 2 + 1 = 0 \rightarrow g = 1, \quad (38)$$

obtendo-se gênero um, que caracteriza um toro.

Considere o canal $C_{2,4}$, com duas entradas e quatro saídas. Sua representação por meio de um grafo, está representada na Figura 27. Para análise de elementos de Geometria Hiperbólica, será caracterizado o quadrilátero hiperbólico de vértices $(-2, 0, 2, \infty)$.

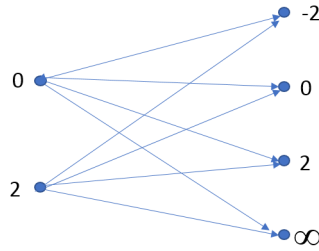


Figura 27: Grafo associado aos vértices 0 e 2 de um quadrilátero hiperbólico.
Fonte: O autor (2018).

Calculando o gênero mínimo e máximo associado ao mergulho deste canal em superfícies, de acordo com [14], obtém-se:

$$g_{min} = \left\{ \frac{(m-2) \cdot (n-2)}{4} \right\} = \left\{ \frac{(2-2) \cdot (4-2)}{4} \right\} = \left\{ \frac{(0) \cdot (2)}{4} \right\} = \{0\} = 0. \quad (39)$$

$$g_{max} = \left\{ \frac{(m-1) \cdot (n-1)}{2} \right\} = \left\{ \frac{(2-1) \cdot (4-1)}{2} \right\} = \left\{ \frac{(1) \cdot (3)}{2} \right\} = \left\{ \frac{3}{2} \right\} = 1, \quad (40)$$

caracterizando o toro como gênero máximo associado.

4.2 Empacotamento Hiperbólico

Um dos objetivos da teoria da informação é que uma mensagem seja enviada da forma mais clara possível, assim, uma das teorias utilizadas para este processo são os códigos corretores de erros.

Os códigos corretores de erros são sequências de símbolos pertencentes a um alfabeto, associados a sinais de um canal de comunicação. Dessa forma, antes da informação ser enviada, ela é codificada e modulada, tanto algebricamente quanto geometricamente.

Estes conjuntos de códigos podem ser obtidos a partir de tesselações regulares, e, como já dito anteriormente, o plano hiperbólico apresenta uma infinidade de tesselações

regulares, o que justifica o estudo de tesselações hiperbólicas para a utilização em Sistemas de Comunicação.

Na Seção anterior, é verificado que o canal $C_{2,2}$ está associado ao gênero zero, assim como uma modulação do tipo PSK, da qual possui como região fundamental um círculo e o emparelhamento de lados leva a uma esfera, [12]. Dessa forma, pode-se afirmar que existe uma relação entre a modulação PSK, o canal $C_{2,2}$ e o invariante topológico, que neste caso é o gênero $g = 0$ (esfera).

Já para o canal $C_{2,4}$, o gênero máximo identificado foi 1, do qual obtém-se um toro. A partir da análise de uma modulação QAM, como apresentado em [12], verifica-se que a região fundamental associada à modulação é um quadrado, que tessela todo o plano. Esses emparelhamentos geram um toro (gênero um). Logo, observa-se uma interessante relação entre a modulação QAM, o canal $C_{2,4}$ e o invariante $g = 1$.

Como mencionado na Seção 3.1, a modulação QAM apresenta melhor desempenho que a modulação PSK. Conclui-se, então, que ao aumentar o gênero da superfície associada, melhora-se o desempenho do processo de transmissão de informação.

As Figuras 28 e 29 apresentam as conexões apresentadas anteriormente:

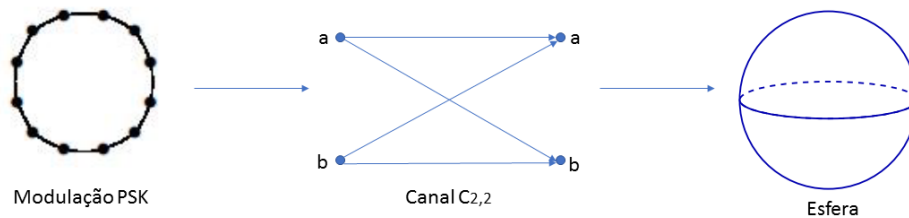


Figura 28: Conexões da modulação PSK.
Fonte: O autor (2018).

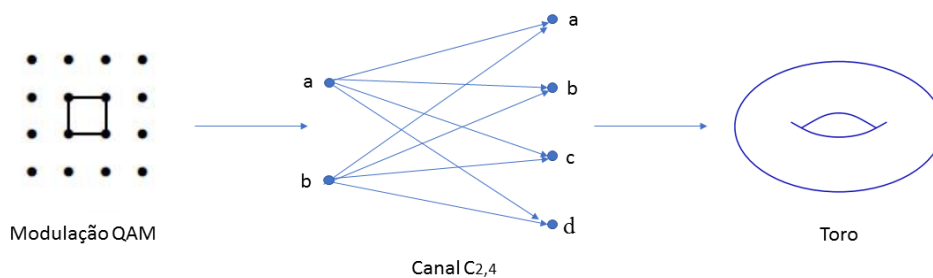


Figura 29: Conexões da modulação QAM.
Fonte: O autor (2018).

5 Considerações Finais

O presente trabalho possibilitou a compreensão do surgimento da Geometria Hiperbólica, seus resultados e aplicação desses em Sistemas de Comunicação. O referencial teórico foi suficiente para a construção do trabalho, sendo necessárias algumas complementações.

Este trabalho é um material pensado para estudante de ciências exatas, referente à Geometria Hiperbólica e suas aplicações em Sistemas de Comunicação. São apresentadas descrições, características, testes e análises de modelos já conhecidos.

O estudo revelou que alguns resultados da Geometria Hiperbólica podem ser aplicados em Sistemas de Comunicação, em particular, no processo de caracterização de um canal discreto sem memória, para os casos com duas entradas e duas saídas e duas entradas e quatro saídas, vistos como um grafo, mergulhado em superfícies, como apresentado no Capítulo 4. Além disso, baseado nesses resultados, o trabalho possibilita a continuação da pesquisa para outros canais de comunicação, não apresentados neste trabalho.

Neste trabalho foram utilizados livros, artigos e teses que abordam a conexão existente entre Geometria Hiperbólica e Sistemas de Comunicação, selecionados previamente pelos orientadores. Baseado no referencial teórico utilizado, pode-se perceber que essa área de pesquisa ainda não conta com número expressivo de pesquisadores e que ainda existem questões abertas relacionadas aos aspectos teóricos, além de aplicações dos mesmos em diversas áreas do conhecimento.

O desenvolvimento do trabalho teve papel relevante na formação acadêmica do autor, uma vez que complementa e associa aspectos das disciplinas presentes na grade curricular do curso de Matemática-Licenciatura da UNIFAL-MG, além de proporcionar contato com a pesquisa e redação científica.

Este trabalho estabelece questões práticas e teóricas, que servem como base para pesquisas futuras. Vale ressaltar que o trabalho, também, possibilita à estudantes de ciências exatas contato com uma área de pesquisa não presente na grade curricular do curso.

Um dos resultados deste trabalho foi a apresentação de um resumo no XXXVIII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional 2018, na cidade de Campinas-SP, em formato de painel.

Referências

- [1] CARVALHO, M. C. M. D. **Construindo o Saber: Metodologia Científica, Fundamentos e Técnicas.** Campinas: Papirus, 2010.
- [2] BRÁZ, F. M. **História da Geometria Hiperbólica.** 34f. Monografia (Especialização em Matemática) - Departamento de Matemática, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2009.
- [3] WALKDEN, C. **Hyperbolic Geometry.** Manchester University, 2012.
- [4] LIN, S. COSTELLO, D.J. **Error control coding: fundamentals and applications.** 2.ed. Upper Saddle River: Pearson Prentice Hall, 2004, 1260p.
- [5] MAGALHÃES, J. M. **Um estudo dos Modelos da Geometria Hiperbólica.** 63f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2015.
- [6] OLIVEIRA, A. J. **Uniformização de curvas algébricas associadas a sequências de Farey através de equações diferenciais fuchsianas na proposta de novos sistemas de comunicação.** Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) - Faculdade de Engenharia Elétrica e Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2017.
- [7] OLIVEIRA, A. J.; PALAZZO JR, R. Geometric and algebraic structures associated with the channel quantization problem. **Computational and Applied Mathematics**, p. 1-19, 2017.
- [8] QUEIROZ, C. R. O. Q. **Códigos Geometricamente Uniformes Derivados de Grafos sobre Anéis Quocientes de Inteiros e de Ordens dos Quatérnio.** 108f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) - Faculdade de Engenharia Elétrica e Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2011.
- [9] QUILLES, C. R. O. **Discriminante de Corpos de Números.** 140f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Departamento de Matemática, Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, 2006.
- [10] ALVES, A. F. **Análise dos Emparelhamentos de Arestas de Polígonos Hiperbólicos para a Construção de Constelações de Sinais Geometricamente Uniformes.** 108f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) - Faculdade de Engenharia Elétrica e Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2011.
- [11] ALBUQUERQUE, C. D. **Análise e construção de códigos quânticos topológicos sobre variedades bidimensionais.** 139f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) - Faculdade de Engenharia Elétrica e Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2009.
- [12] ANTUNES, A. K. L. **Tesselações no Plano Hiperbólico.** 62f. Monografia (Graduação em Matemática-Licenciatura) - Departamento de Matemática, Universidade Federal de Alfenas, Alfenas, 2016.

- [13] COVER, T. M. THOMAS, J. A. **Elements of information theory**. 2.ed. Hoboken: Wiley-Interscience, 2006. 748p.
- [14] CAVALCANTI, R. G., LAZARI, H., LIMA, J. D., PALAZZO JR, R. A new approach to the design of digital communication systems. **DIMACS**, p. 1-33, 2003.
- [15] VIANA, M. **Geometria de Superfícies Planas**. Rio de Janeiro: IMPA.
Disponível em: <<http://w3.impa.br/~viana/out/GSP.pdf>> Acesso em: 29 nov 2018.