

PARTIKELFYSIK II
EKSAMENSOPGAVER

JOSEFINE BJØRNDAL ROBL

201706760

I DETTE DOKUMENT FINDES MINE LØSNINGER
TIL EKSAMENSOPGAVERNE I KURSET
"PARTICLE PHYSICS II" I EFTERÅRET 2020
PÅ AARHUS UNIVERSITET.

Indhold

1 Spin-1 partikler med masse	3
Besvarelse	4
1) Polarisationsvektor for massivt spin-1-felt	4
2) $e_\mu p^\mu = 0$ og $e_\mu e^\mu = 1$	4
3) Generelle polarisationsvektorer	5
4) λ egenværdi for rotationsoperator J_z for helicitetstilstande	6
5) J_z bliver helicitetsoperator	7
6) Polarisationsstilstande for spin-1-partikel i bevægelse langs $\hat{\mathbf{z}}$	7
7) Teori for spin- S partikel med $S > 1$	8
2 "Matrix"-feltet	9
Besvarelse	11
1) Frihedsgrader for feltet φ_{ij}	11
2) Bevægelsesligningerne for ψ_{ij}	12
3) Løsningerne for felterne er planbølger	13
4) Konjugeret felt er $\pi_{ij} = \partial^0 \psi_{ij}$	13
5) Hamiltonfunktion med felter	14
6) Feltudvidelse for "matrix"-feltet	15
7) Vis relationer med Klein-Gordon-indreproduktet	16
8) Relationer for kreations- og annihilationsoperatorerne med Klein-Gordon-indreproduktet	17
9) Bosonisk kommutationsrelation for kreations- og annihilations- operatorerne	19
10) Hamiltonfunktion med kreations- og annihilationsoperatorer	20
11) Feltoperator overholder Heisenbergs bevægelsesligning	24
12) Lagrangedensitet invariant under $O(N)^2$ transformation	25
13) Vekselvirkning med og uden $O(N)^2$ symmetri	25
14) Generatoren af $O(N)$	26
15) Noetherstrøm associeret med $O(N)^2$ symmetri	27
16) Ændringer hvis φ_{ij} komplekst i stedet for reelt	28
3 Helicitetsoperatoren	31
Besvarelse	33
1) $s^\mu = (0, \hat{\mathbf{s}})$ i partiklens hvilesystem	33
2) $\hat{\mathbf{s}} = \vec{\mathbf{p}}/ \vec{\mathbf{p}} $ i partiklens hvilesystem og beregning af s^μ efter boost	33
3) $\vec{\Sigma} = \gamma^5 \gamma^0 \vec{\gamma}$ og beregning af $\gamma^5 \not{s}$	34
4) $u_s(p)$ og $v_s(p)$ egentilstande for $\gamma^5 \not{s}$	35
5) $u_s(p)$ og $v_s(p)$ helicitetsegentilstande	36
6) $\int d^3\vec{x} \psi^\dagger(x) \vec{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} \psi(x)$ og helicitetsoperator	37
7) Betydningen af $\chi_{-s} \rightarrow \chi_s$ for helicitet af $v_s(p)$	40
4 Kvanteelektrodynamik med elektroner	41
Besvarelse	44

1) Gaugeinvariant Lagrangedensitet for elektroner	44
2) QED som $\mathcal{U}(1)$ -gaugeteori	45
3) Lagrangedensiteten for vekselvirkningen	46
4) Beregn $-e\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi$ og find $j_{\mu}^{(n)}$	48
5) Udled matricelementer fra $j_{\mu}^{(n)}$	49
6) Bevarede overgangsstrømme J_{μ}^{fi}	54
7) Beregning på fysiske processer i QED giver led på formen $J_{\mu}^{fi}(0)\varepsilon^{\mu}(\sigma)$	55
8) Sum af polarisationstilstande for en reel foton	56
9) Polarisationstilstande og den metriske tensor for en reel foton	57
10) Polarisationstilstande og den metriske tensor for reelle og virtuelle fotoner	57
11) Feynmandiagram for spredning af elektroner på myoner	58
12) S-matricen til anden orden for elektron-myon-spredningen	58
13) Fotonpropagator ved analogi med Klein-Gordon-propagatoren	60
14) Matricelementet \mathcal{M}_{fi} i $S_{fi}^{(2)}$	62
15) Amplituden af \mathcal{M}_{fi}	63
16) Tværsnit for elektron-myon-spredningen i CM-systemet og Rutherfordspredningstværsnit	66
17) Feynmanregler for QED	67
5 En model med to Higgsdubletter	69
Besvarelse	69
1) Gaugebosoners masse ved valg af vakuumtilstande	69
2) Betingelser for konstanterne μ_i og λ_i i Higgspotential	71
3) To Higgsdubletter vs. én Higgsdublet	72
6 Den lineære sigmamodel	74
Besvarelse	75
1) Dimension af felter og koblingskonstanter i \mathcal{L}	75
2) Massen af skalarfelterne π og σ	75
3) Vekselvirkningsknudepunkter og tilsvarende koblingskonstanter for Lagrangedensiteten \mathcal{L}	76
4) Loopkorrigeringer til π -propagatoren	76
5) Amplitude af $\pi\pi\sigma$ -ledets loopkorrigering	76
6) Amplitude for resterende loopkorrigeringer	77
7) For $p_{\mu} = 0$ for π er addition af alle loopkorrektioners amplituder 0	80
8) Højereordens loopkorrektioner og π -propagatoren	81
Litteratur	82

1 Spin-1 partikler med masse

En fri massiv partikel med spin-1 er repræsenteret ved et vektorfelt i rumtiden på en mærkværdig måde. Befinder vi os i partiklens hvilesystem (hvilket vi kan transformere til, siden partiklen har en masse $m \neq 0$) må vektorfeltet have samme antal frihedsgrader som spin-1-systemet, som vi har i ikke-relativistisk kvantemekanik, altså tre polarisationstilstande givet ved projektionen af spin langs en fikseret akse (typisk $\hat{\mathbf{z}}$ -aksen), $S_z = 0, \pm 1$. For at beskrive egenskaberne for en fri spin-1 partikel til fulde skal vi derfor give massen, impulsen og polarisationen.

1) Naivt set kunne man tro, at man kunne benytte en trevektor, $\vec{\mathbf{e}}$, som en generel polarisationsvektor for et massiv spin-1-felt, men dette passer ikke. Argumentér for at siden vi arbejder med relativistisk kvantemekanik og derfor skal bruge Lorentztransformationerne, da må den mest generelle form af polarisationsvektoren være en firvektor, e_μ . Argumentér også for at der findes tre uafhængige sådanne firvektor polarisationsvektorer.

2) Antag at vi insisterer på at $e_\mu p^\mu = 0$ og $e_\mu e^\mu = -1$, hvor p^μ er firimpulsen for partiklen. Bevis at disse relationer vil holde i ethvert referencesystem.

3) Betragt hvilesystemet for spin-1-partiklen og lad os som basis for de tre polarisationstilstande vælge de standard kartesiske basisvektorer for et tredimensionelt vektorrum, blot skrevet som firvektorer, altså

$$e^\mu(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e^\mu(\hat{\mathbf{y}}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad e^\mu(\hat{\mathbf{z}}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (1.1)$$

Antag at partiklens treimpuls, $\vec{\mathbf{p}}$, er langs $\hat{\mathbf{z}}$ -retningen. Vis at de generelle polarisationsvektorer i dette tilfælde bliver $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$ og $(|\vec{\mathbf{p}}|/m, 0, 0, E/m)$.

4) Ofte bruges en relateret men en smule anderledes basis for polarisationstilstandene for et massiv spin-1-felt, de såkaldte helicitetstilstande, hvilke indekseres med heltallet λ . Disse har formen

$$e^\mu(\lambda = \pm 1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ \mp 1 \\ -i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad e^\mu(\lambda = 0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (1.2)$$

Vis at hvis vi roterer disse polarisationstilstande omkring $\hat{\mathbf{z}}$ -aksen med en vinkel på θ , da bliver de multipliceret med en faktor $\exp(-i\lambda\theta)$. Argumentér for at denne rotation medfører, at λ er egenværdien for den kvantemekaniske rotationsoperator, J_z , for hver af tilstandene.

5) Heliciteten for en partikel er defineret som projektionen af partiklens spin på dens impuls, altså $\vec{\mathbf{J}} \cdot \vec{\mathbf{p}}/|\vec{\mathbf{p}}|$, hvor $\vec{\mathbf{J}}$ er spinoperatoren og $\vec{\mathbf{p}}$ er treimpulsen. Argumentér for at hvis vi booster fra hvilesystemet til et system, som bevæger sig med partiklen med hastighed $\vec{\mathbf{p}}/E$, så bliver J_z til helicitetsoperatoren.

6) Vis at polarisationstilstandene med veldefineret helicitet for en spin-1-partikel, som bevæger sig langs $\hat{\mathbf{z}}$ -retningen, er

$$e^\mu(\lambda = \pm 1) = \mp \left(0, \frac{\vec{\mathbf{e}}_x \pm i\vec{\mathbf{e}}_y}{\sqrt{2}} \right), \quad \text{og} \quad e^\mu(\lambda = 0) = \frac{1}{m} (|\vec{\mathbf{p}}|, 0, 0, E), \quad (1.3)$$

hvor $\vec{\mathbf{e}}_x$ og $\vec{\mathbf{e}}_y$ er de standard trekomponent basisvektorer.

7) Antag at nogen beder dig opstille en teori for en partikel med et generelt spin $S > 1$. Ved brug af det, som du har lært i de foregående delopgaver, hvordan vil du da generalisere proceduren for at konstruere polarisationstilstande for et sådan felt? Skitser blot proceduren; *lad være med* gå i gang med de detaljerede beregninger.

Besvarelse

1) Idet at man udfører en Lorentztransformation vil denne påvirke både påvirke rum og tid, da disse bliver blandet under transformationen. Derfor er det ikke nok kun at beskrive polarisationen med en trevektor i rummet. Den mest generelle måde at beskrive både de rummelige og det tidslige koordinat i relativitetsteori er med en firvektor, hvorfor en firvektor også skal benyttes til at beskrive polarisationen, e^μ . Ydermere giver det mening at benytte en firvektor til at beskrive polarisationen, da vi normalt ønsker vores teorier til at være Lorentzkovariante, hvilket en sammentrækning (eng: contraction) af firvektorer er.

Som beskrevet i opgavebeskrivelsen, så har partiklen tre frihedsgrader for kvantepolarisationstilstandene. Derfor må der findes tre ortogonale og dermed uafhængige polarisationsfirvektorer.

2) Lad Λ_ν^μ betegne en general Lorentztransformation således, at en arbitrær firvektor x^ν ved transformation til det nye system ved $x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu$. Sammentrækningen mellem en arbitrær kontravariant firvektor x^μ og en arbitrær kovariant firvektor y_μ er i det transformerede referencesystem derved

$$\begin{aligned} y'_\mu x'^\mu &= \eta_{\mu\nu} y'^\nu x'^\mu \\ &= \eta_{\mu\nu} \Lambda_\alpha^\nu y^\alpha \Lambda_\beta^\mu x^\beta \\ &= \eta_{\mu\nu} \Lambda_\alpha^\nu \eta^{\alpha\gamma} y_\gamma \Lambda_\beta^\mu x^\beta \\ &= \eta_{\mu\nu} \Lambda_\alpha^\nu \Lambda_\beta^\mu \eta^{\alpha\gamma} y_\gamma x^\beta \\ &= \eta_{\beta\alpha} \eta^{\alpha\gamma} y_\gamma x^\beta \\ &= \delta_\beta^\gamma y_\gamma x^\beta \\ &= y_\beta x^\beta, \end{aligned} \quad (1.4)$$

hvor $\eta_{\alpha\beta}$ er den metriske tensor, hvilken for Minkowskirum er invariant under Lorentztransformation, $\eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu_\beta\Lambda^\nu_\alpha = \eta_{\beta\alpha}$, og det er i det ovenstående blevet benyttet at $\eta_{\beta\alpha}\eta^{\alpha\gamma} = \delta^\gamma_\beta$, hvilket igen gør sig gældende i fladt Minkowskirum.

Af ligning (1.4) kan det ses, at en sammentrækning af to arbitrære firvektorer er Lorentzinvariant. Dermed, hvis vi insisterer på at $e_\mu p^\mu = 0$ og $e_\mu e^\mu = -1$ i ét referencesystem, da må de gøre sig gældende i ethvert referencesystem.

3) Jeg vil starte med at notere, at der beregnes i naturlige enheder, altså er $\hbar = c = 1$.

Idet vi kender polarisationstilstandene i hvilesystemet, da kan vi benytte en Lorentztransformation til at finde de generelle polarisationstilstande. Vi benytter dermed en Lorentztransformation, som transformerer fra hvilesystemet til et system, hvori partiklen har treimpuls $\vec{\mathbf{p}}$ i $\hat{\mathbf{z}}$ -retningen, altså $|\vec{\mathbf{p}}| = p_z$. Dette kan gøres på en af to måder, som begge giver samme resultat: 1) Vi benytter en Lorentztransformation fra hvilesystemet til referencesystemet med impuls $-\vec{\mathbf{p}}$ med hensyn til partiklen, eller 2) vi benytter en invers Lorentztransformation fra partiklens hvilesystem til laboratoriesystemet, hvor partiklen har impuls $\vec{\mathbf{p}}$. For begge tilfælde er Lorentztransformationen

$$\Lambda^\nu_\mu = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & |\vec{\mathbf{v}}|\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ |\vec{\mathbf{v}}|\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E/m & 0 & 0 & |\vec{\mathbf{p}}|/m \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ |\vec{\mathbf{p}}|/m & 0 & 0 & E/m \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

hvor vi har benyttet, at $\vec{\mathbf{p}} = \gamma m \vec{\mathbf{v}}$ og at energien er givet ved $E = \gamma m$. Benytter vi nu ovenstående Lorentztransformation, ligning (1.5), på polarisationstilstandene i hvilesystemet (μ -systemet), ligning (1.1), får vi de generelle polarisationstilstande i det nye system (ν -systemet) til

$$e^\nu(\hat{\mathbf{x}}) = \Lambda^\nu_\mu e^\mu(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} E/m & 0 & 0 & |\vec{\mathbf{p}}|/m \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ |\vec{\mathbf{p}}|/m & 0 & 0 & E/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = e^\mu(\hat{\mathbf{x}}), \quad (1.6a)$$

$$e^\nu(\hat{\mathbf{y}}) = \Lambda^\nu_\mu e^\mu(\hat{\mathbf{y}}) = \begin{bmatrix} E/m & 0 & 0 & |\vec{\mathbf{p}}|/m \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ |\vec{\mathbf{p}}|/m & 0 & 0 & E/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e^\mu(\hat{\mathbf{y}}), \quad \text{og} \quad (1.6b)$$

$$e^\nu(\hat{\mathbf{z}}) = \Lambda^\nu_\mu e^\mu(\hat{\mathbf{z}}) = \begin{bmatrix} E/m & 0 & 0 & |\vec{\mathbf{p}}|/m \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ |\vec{\mathbf{p}}|/m & 0 & 0 & E/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |\vec{\mathbf{p}}|/m \\ 0 \\ 0 \\ E/m \end{bmatrix}, \quad (1.6c)$$

hvilket var det, som skulle vises.

4) For en rotation med en vinkel θ omkring $\hat{\mathbf{z}}$ -aksen er rotationsmatricen

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.7)$$

Benytter vi denne på helicitetstilstandene, ligning (1.2), får vi

$$\begin{aligned} R_z(\theta)e^\mu(\lambda = \pm 1) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ \mp 1 \\ -i \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ \mp \cos(\theta) + i \sin(\theta) \\ \mp \sin(\theta) - i \cos(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1[\cos(\theta) \mp i \sin(\theta)] \\ -i[\cos(\theta) \mp i \sin(\theta)] \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.8a) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ \mp 1 \\ -i \\ 0 \end{bmatrix} [\cos(\theta) \mp \sin(\theta)] \\ &= e^\mu(\lambda = \pm 1) \exp(\mp i\theta) \\ &= e^\mu(\lambda = \pm 1) \exp(-i[\pm 1]\theta) \\ &= e^\mu(\lambda = \pm 1) \exp(-i\lambda\theta), \end{aligned}$$

idet at $\exp(\pm i\theta) = \cos(\theta) \pm i \sin(\theta)$, og

$$\begin{aligned} R_z(\theta)e^\mu(\lambda = 0) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.8b) \\ &= e^\mu(\lambda = 0) \\ &= e^\mu(\lambda = 0)\mathbb{1} \\ &= e^\mu(\lambda = 0) \exp(0) \\ &= e^\mu(\lambda = 0) \exp(-i\lambda\theta). \end{aligned}$$

Ergo et det vist, at under rotation omkring $\hat{\mathbf{z}}$ -aksen med en vinkel θ , så bliver

$$e^\mu(\lambda) \xrightarrow{R_z(\theta)} e^\mu(\lambda) \exp(-i\lambda\theta) . \quad (1.9)$$

Siden rotationen omkring $\hat{\mathbf{z}}$ -aksen af de tre helicitetstilstande ikke ændrer retningen af deres stråler, da er tilstandene egentilstande for rotation omkring $\hat{\mathbf{z}}$ -aksen.

Den kvantemekaniske rotationsoperator for en rotation omkring $\hat{\mathbf{z}}$ -aksen er givet som $\mathcal{D}_{\hat{\mathbf{z}}}(\theta) = \exp(-iJ_z\theta)$ i naturlige enheder ($\hbar = c = 1$). Dermed må vi fra ligning (1.9) have, at

$$\mathcal{D}_{\hat{\mathbf{z}}}(\theta)e^\mu(\lambda) = \exp(-iJ_z\theta)e^\mu(\lambda) = \exp(-i\lambda\theta)e^\mu(\lambda) , \quad (1.10)$$

for $\lambda = 0, \pm 1$ og dermed at $J_z e^\mu(\lambda) = \lambda e^\mu(\lambda)$, hvilket tydeligere kan ses fra Taylorudvidelsen af eksponentialfunktionerne

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-iJ_z\theta)^n \right) e^\mu(\lambda) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-i\lambda\theta)^n \right) e^\mu(\lambda) , \quad (1.11)$$

hvilket skal være sandt for en et vilkårligt θ .

5) Vi ved at heliciteten for en partikel er defineret som projektionen af partiklens spin på dens impuls, altså $h = \vec{\mathbf{J}} \cdot \vec{\mathbf{p}}/|\vec{\mathbf{p}}|$, hvor $\vec{\mathbf{J}}$ er spinoperatoren og $\vec{\mathbf{p}}$ er treimpulsen. Vi kan nu blot vælge at rotere vores system således, at partikel bevæger sig langs $\hat{\mathbf{z}}$ -aksen, hvis vi ikke allerede må antage, at den gør det. Når vi så booster (langs $\hat{\mathbf{z}}$ -aksen), da vil vi få at partiklen blot få

$$h = \vec{\mathbf{J}} \cdot \frac{\vec{\mathbf{p}}}{|\vec{\mathbf{p}}|} = \vec{\mathbf{J}} \cdot \frac{\vec{\mathbf{p}}_z}{|\vec{\mathbf{p}}_z|} = \vec{\mathbf{J}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = J_z , \quad (1.12)$$

hvormed J_z bliver helicitetsoperatoren.

6) Polarisationsstilstandene med veldefineret helicitet for en spin-1-partikel er givet i ligning (1.2), og for at finde ud af, hvordan disse ser ud, når partiklen bevæger sig langs $\hat{\mathbf{z}}$ -retningen med treimpuls $\vec{\mathbf{p}}$, da benytter vi det inverse Lorentzboost fra ligning (1.5),

$$\Lambda_\mu^\nu = \begin{bmatrix} E/m & 0 & 0 & |\vec{\mathbf{p}}|/m \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ |\vec{\mathbf{p}}|/m & 0 & 0 & E/m \end{bmatrix} , \quad (1.13)$$

hvorved vi får

$$e^\nu(\lambda = \pm 1) = \Lambda_\mu^\nu e^\mu(\lambda = \pm 1) = \begin{bmatrix} E/m & 0 & 0 & |\vec{\mathbf{p}}|/m \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ |\vec{\mathbf{p}}|/m & 0 & 0 & E/m \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ \mp 1 \\ -i \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ \mp 1 \\ -i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.14a)$$

$$e^\nu(\lambda = 0) = \Lambda_\mu^\nu e^\mu(\lambda = 0) = \begin{bmatrix} E/m & 0 & 0 & |\vec{\mathbf{p}}|/m \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ |\vec{\mathbf{p}}|/m & 0 & 0 & E/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |\vec{\mathbf{p}}|/m \\ 0 \\ 0 \\ E/m \end{bmatrix} . \quad (1.14b)$$

Dermed er det vist, at når vi benytter et Lorentzboost således, at spin-1-partikel nu bevæger sig med impuls $\vec{\mathbf{p}}$ i $\hat{\mathbf{z}}$ -retningen, da bliver helicitetsegentilstandene fra ligning (1.2)

$$e^\mu(\lambda = \pm 1) = \mp \left(0, \frac{\vec{\mathbf{e}}_x \pm i\vec{\mathbf{e}}_y}{\sqrt{2}} \right) , \quad \text{og} \quad e^\mu(\lambda = 0) = \frac{1}{m} (|\vec{\mathbf{p}}|, 0, 0, E) , \quad (1.15)$$

hvor $\vec{\mathbf{e}}_x$ og $\vec{\mathbf{e}}_y$ er de standard trekomponent basisvektorer, hvilket skulle vises. At disse stadig er helicitetsegentilstanden kan ses ved, at et boost langs $\hat{\mathbf{z}}$ -retningen commuterer med J_z , så når tilstandene før boostet var egentilstande for helicitet vil de efterfølgende også være det. Dette kommer af **4)** og **5)**.

7) For en partikel med spin- S har vi brug for $2S + 1$ lineært uafhængige basistilstande, som alle har frihedsgrader nok, $4S$ [1], til at kunne beskrive et spin- S -system, samt være veldefinerede under Lorentztransformation og opfylde analoge relationer til dem i **2)**. Det vil altså sige, at for en partikel med spin $S > 1$, da vil en firvektor ikke længere have nok frihedsgrader, hvorfor vi må arbejde med en tensor i stedet. Generelt vil man formode, at for en spin- S partikel (med heltalligt spin) vil en tensor af rang S være nødvendig (en tensor af rang 1 er en vektor, så dette er konsistent med vores beregninger i selv opgaven). Basistilstandene specificeres i hvilesystemet ved $2S + 1$ valg af J_z , og baseret på repræsentationen af rotationsgruppen vil spintilstandene kunne blive beskrevet ved sporløse (eng: traceless) symmetriske tensorer af rang S , (disse krav reducerer antallet af frihedsgrader, som ellers ville være for mange).

2 ”Matrix”-feltet

Betragt en mængde af felter φ_{ij} , hvor $i, j = 1, \dots, N$, og antag at $\varphi_{ij} = \varphi_{ji}$. Antag yderligere at felterne er reelle, altså at $\varphi_{ij} \in \mathbb{R}$, $\forall i, j = 1, \dots, N$. Lagrangedensiteten for dette system er

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi_{ij} \partial^\mu \varphi_{ji} - \frac{1}{2} m^2 \varphi_{ij} \varphi_{ji} , \quad (2.1)$$

hvor vi har implicitte summer over felterne således at

$$\varphi_{ij} \varphi_{jk} = \sum_{j=1}^N \varphi_{ij} \varphi_{jk} \quad \text{og} \quad \varphi_{ij} \varphi_{ji} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \varphi_{ij} \varphi_{ji} . \quad (2.2)$$

Bemærk hvordan $\varphi_{ij} \varphi_{ji}$ svarer til at betragte feltet som værende en matrix, multiplicere matricen med sig selv og sidst tage trace af den resulterende matrix.

1) Hvor mange frihedsgrader har feltet φ_{ij} ?

2) Vis at bevægelsesligningerne er

$$0 = (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \varphi_{ij} , \quad \forall i, j = 1, \dots, N . \quad (2.3)$$

3) Vis at løsninger er planbølger på formen $\varphi_{ij} = M_{ij} \exp(\pm i p x)$, hvor $p x = p^\mu x_\mu = p_\mu x^\mu$ med $p^\mu = (E, \vec{p})$ og M_{ij} er uafhængig af x^μ . Find udtrykket for E .

4) Definér det konjugerede felt, π_{ij} , som den naturlige generalisering af enkeltkomponent skalarfelter

$$\pi_{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \varphi_{ij})} . \quad (2.4)$$

Vis at $\pi_{ij} = \partial^0 \varphi_{ij}$.

5) Vis at Hamiltonfunktionen er

$$H = \int d^3 \vec{x} \left[\frac{1}{2} \pi_{ij} \pi_{ji} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} \varphi_{ij} \cdot \vec{\nabla} \varphi_{ji} + \frac{1}{2} m^2 \varphi_{ij} \varphi_{ji} \right] . \quad (2.5)$$

6) Argumentér for at en fornuftig feltudvidelse (eng: field expansion) for det kvantemekaniske ”matrix”-felt er

$$\varphi_{ij} = \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}ij} \exp[-i p x] + a_{\vec{p}ij}^\dagger \exp[i p x] \right) , \quad (2.6)$$

hvor $\omega_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$.

7) Vi introducerer nu et indre produkt, kaldet Klein-Gordon-indreproduktet, mellem to bølgefunktioner på en lidt besynderlig måde. Lad f og g være funktioner af tid og rum og definer

$$\begin{aligned}(f, g) &= i \int d^3\vec{x} f^*(\vec{x}, t) \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 g(\vec{x}, t) \\ &= i \int d^3\vec{x} \left[f^*(\vec{x}, t) \frac{\partial g(\vec{x}, t)}{\partial t} - \frac{\partial f^*(\vec{x}, t)}{\partial t} g(\vec{x}, t) \right],\end{aligned}\quad (2.7)$$

hvor $\overset{\leftrightarrow}{\partial}_0$ short-hand notation for operatoren, som tidsdifferentierer til først til højre og så til venstre med en minus imellem. Bemærk at dette indre produkt ikke er positivt bestemt (eng: positive definite) og derfor ikke er et matematisk indre produkt, hvis man skal være stringent. Men det er en dejlig og nyttig konstruktion, hvilket vi nu skal vise.

Betragt en planbølge på formen $u_{\vec{p}}(x) = \exp(-ipx) / \sqrt{2\omega_{\vec{p}}}$, hvor x og p er firvektorer som sædvanligt. Vis de følgende relationer

$$(u_{\vec{p}}, u_{\vec{p}'}) = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}'), \quad (2.8a)$$

$$(u_{\vec{p}}^*, u_{\vec{p}'}^*) = -(2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}'), \quad (2.8b)$$

$$(u_{\vec{p}}^*, u_{\vec{p}'}) = 0, \quad \text{og} \quad (2.8c)$$

$$(u_{\vec{p}}, u_{\vec{p}'}^*) = 0. \quad (2.8d)$$

8) Benyt nu det indre produkt med feltet fra ligning (2.6) og vis at

$$a_{\vec{p}ij} = (u_{\vec{p}}, \varphi_{ij}), \quad \text{og} \quad (2.9a)$$

$$a_{\vec{p}ij}^\dagger = -(u_{\vec{p}}^*, \varphi_{ij}). \quad (2.9b)$$

9) Kommutatorrelationerne for matrix-felterne er givet ved

$$[\varphi_{ij}(\vec{x}, t), \pi_{kl}(\vec{x}', t)] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{x}')\delta_{ik}\delta_{jl}, \quad (2.10)$$

mens alle andre kombinationer af φ_{ij} og π_{kl} forsvinder. Vis at dette betyder, at kreations- og annihilationsoperatorerne, $a_{\vec{p}ij}^\dagger$ og $a_{\vec{p}ij}$, har bosniske kommutationsrelationer.

10) Vis at Hamiltonfunktionen for det kvantiserede felt kan skrives som

$$H = \sum_{i,j=1}^N \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \left[\omega_{\vec{p}} a_{\vec{p}ij}^\dagger a_{\vec{p}ij} \right]. \quad (2.11)$$

11) Vis at feltoperatoren overholder Heisenbergs bevægelsesligning

$$i \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial t} = [\varphi_{ij}, H]. \quad (2.12)$$

Argumentér for at dette betyder, at feltoperatorerne fra ligning (2.6) er de rigtige feltoperatorer at benytte i vekselvirkningsbilledet (eng: interaction picture).

12) Vi vil nu kigge på symmetrier for vores matrix-felter. Betragt gruppen af ortogonale $N \times N$ matricer, hvilken kaldes $O(N)$ og defineres som mængden

$$O(N) = \{R \mid R^T R = \mathbb{1}\} , \quad (2.13)$$

hvor R er en reel $N \times N$ matrix og R^T betegner den transponerede matrix af R . Vælg $R \in O(N)$ og lad komponenterne betegnes R_{ij} . Vis at Lagrangedensiteten i ligning (2.1) er invariant under transformationen

$$\varphi'_{ij} = R_{ik} R_{jl} \varphi_{kl} . \quad (2.14)$$

Dette kaldes $O(N)^2$ -symmetri.

13) Find et vekselvirkningsled (eng: interaction term) som kan lægges til Lagrangedensiteten således, at denne stadig har $O(N)^2$ -symmetri. Find dernæst et vekselvirkningsled, som eksplicit *bryder* $O(N)^2$ -symmetrien for Lagrangedensiteten.

14) Betragt et element R i $O(N)$ meget tæt på identitetsmatricen, således at man kan skrive elementet $R = \mathbb{1} + A$, hvor A er en $N \times N$ matrix med elementer $|A_{ij}| \ll 1$. Vis at $R \in O(N)$ medfører at $A^T = -A$, altså at A er antisymmetrisk. Mængden af sådanne matricer A kaldes *generatoren* af $O(N)$. Hvor mange lineært uafhængige matricer findes med denne egenskab for dimensionen N ? Dette kaldes dimensionen af $O(N)$.

15) Find den bevarede Noetherstrøm (eng: Noether current) som associeres med $O(N)^2$ -symmetrien.

16) Hvad ville ændre sig, hvis feltet φ_{ij} var komplekst i stedet for reelt? Beskriv blot de overordnede forskellige; du skal *ikke* beregne hele opgaven igen med et komplekst felt.

Besvarelse

1) Vi genkender at φ_{ij} er en rang-2-tensor, hvilke beskrives ved matricer, som set i opgavebeskrivelsen. Her er der tale om, at $i, j \in \{1, \dots, N\}$, altså vil det for en generel reel matrix af denne størrelse gøre sig gældende, at der er N^2 frihedsgrader. Dog vides det, at feltet er symmetrisk, $\varphi_{ij} = \varphi_{ji}$, hvorved alle elementerne under diagonalen bestemmes af elementerne over den. Elementerne på diagonalen skal også medtælles som frihedsgrader, da disse ikke bestemmes af andre elementer. I den nedre trekant af matricen er der $N^2/2 - N/2$ elementer, hvor første del giver halvdelen af alle elementer i matricen, mens anden del fratrækker elementerne på diagonalen. Dermed må antallet af frihedsgrader for feltet φ_{ij} være de resterende elementer, altså

$$N^2 - \frac{N^2 - N}{2} = \frac{2N^2 - N^2 + N}{2} = \frac{N^2 + N}{2} = \frac{N(N+1)}{2} . \quad (2.15)$$

2) Vi betragter først Lagrangedensiteten ligning (2.1) og konstaterer, at idet $\varphi_{ij} = \varphi_{ji}$ samt at vi kan benytte metrikken til at ændre kovariante firvektorer til kontravariante og omvendt, så kan Lagrangedensiteten skrives som

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi_{ij} \partial^\mu \varphi_{ji} - \frac{1}{2} m^2 \varphi_{ij} \varphi_{ji} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi_{ij} \partial_\nu \varphi_{ij} - \frac{1}{2} m^2 \varphi_{ij} \varphi_{ij} . \quad (2.16)$$

For at finde bevægelsesligningerne benytter vi Euler-Lagrangeligningen

$$0 = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_{ij})} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{ij}} \quad (2.17)$$

for $i, j = 1, \dots, N$, hvormed vi altså får $i \cdot j$ bevægelsesligninger.

Først beregner vi den afledede mht. feltet selv

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{ij}} &= \frac{\partial}{\partial \varphi_{ij}} \left(\frac{1}{2} g^{\rho\nu} \partial_\rho \varphi_{kl} \partial_\nu \varphi_{kl} - \frac{1}{2} m^2 \varphi_{kl} \varphi_{kl} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \varphi_{ij}} \left(-\frac{1}{2} m^2 \varphi_{kl}^2 \right) \\ &= -\frac{1}{2} m^2 2 \delta_k^i \delta_l^j \varphi_{kl} \\ &= -\frac{1}{2} m^2 2 \varphi_{ij} \\ &= -m^2 \varphi_{ij} , \end{aligned} \quad (2.18)$$

og dernæst den afledede af Lagrangedensiteten mht. det afledede feltet

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_{ij})} &= \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu \varphi_{ij})} \left(\frac{1}{2} g^{\rho\nu} \partial_\rho \varphi_{kl} \partial_\nu \varphi_{kl} - \frac{1}{2} m^2 \varphi_{kl} \varphi_{kl} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu \varphi_{ij})} \left(\frac{1}{2} g^{\rho\nu} \partial_\rho \varphi_{kl} \partial_\nu \varphi_{kl} \right) \\ &= \frac{1}{2} g^{\rho\nu} \left(\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu \varphi_{ij})} (\partial_\rho \varphi_{kl}) \partial_\nu \varphi_{kl} + \partial_\rho \varphi_{kl} \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu \varphi_{ij})} (\partial_\nu \varphi_{kl}) \right) \\ &= \frac{1}{2} g^{\rho\nu} (\delta_\nu^\mu \delta_k^i \delta_l^j \partial_\rho \varphi_{kl} + \delta_\rho^\mu \delta_k^i \delta_l^j \partial_\nu \varphi_{kl}) \\ &= \frac{1}{2} (\delta_\nu^\mu \delta_k^i \delta_l^j \partial^\nu \varphi_{kl} + \delta_\rho^\mu \delta_k^i \delta_l^j \partial^\rho \varphi_{kl}) \\ &= \frac{1}{2} (\partial^\mu \varphi_{ij} + \partial^\mu \varphi_{ij}) \\ &= \partial^\mu \varphi_{ij} . \end{aligned} \quad (2.19)$$

Indsætter vi nu de beregnede afledede, ligningerne (2.18) og (2.19), i Euler-Lagrangeligningen, ligning (2.17), fås bevægelsesligningen for feltet φ_{ij} til

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\mu (\partial^\mu \varphi_{ij}) - (-m^2 \varphi_{ij}) \\ &= (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \varphi_{ij} . \end{aligned} \quad (2.20)$$

Altså er bevægelsesligningerne

$$0 = (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \varphi_{ij} , \quad \forall i, j = 1, \dots, N . \quad (2.21)$$

som givet af ligning (2.3).

3) For at vise, at løsningerne til ligning (2.3) er planbølger på formen $\varphi_{ij} = M_{ij} \exp(\pm i p x)$, hvor $p x = p^\mu x_\mu = p_\mu x^\mu$ med $p^\mu = (p^0, p^a) = (E, \vec{p})$ og M_{ij} er uafhængig af x^μ , indsættes disse planbølger i bevægelsesligningen ligning (2.3)

$$\begin{aligned}
 (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \varphi_{ij} &= (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) M_{ij} \exp(\pm i p x) \\
 &= M_{ij} (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \exp(\pm i p x) \\
 &= M_{ij} \left(\partial_\mu [\pm i \exp(\pm i p x) p^\mu] + \exp(\pm i p x) m^2 \right) \\
 &= M_{ij} \left(\pm i [\partial_\mu \exp(\pm i p x)] p^\mu + \exp(\pm i p x) m^2 \right) \\
 &= M_{ij} \left([\pm i]^2 \exp(\pm i p x) p_\mu p^\mu + \exp(\pm i p x) m^2 \right) \\
 &= M_{ij} \exp(\pm i p x) \left(- p_\mu p^\mu + m^2 \right) \\
 &= \varphi_{ij} \left(- p_0 p^0 - p_a p^a + m^2 \right) \\
 &= \varphi_{ij} \left(- E E - [-\vec{p}] \cdot \vec{p} + m^2 \right) \\
 &= \varphi_{ij} \left(- E^2 + \vec{p}^2 + m^2 \right) \\
 &= \varphi_{ij} \left(- E^2 + E^2 \right) \\
 &= 0,
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

hvor den relativistiske energi er $E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$. Altså er planbølger på formen $\varphi_{ij} = M_{ij} \exp(\pm i p x)$ løsninger til bevægelsesligningen fra ligning (2.3).

4) Vi er blevet givet, at det konjugerede felt er

$$\pi_{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi_{ij})}, \tag{2.23}$$

samt at $\varphi_{ij} = \varphi_{ji}$. Vi indsætter derfor blot Lagrangedensiteten fra ligning (2.1) i ligningen for det konjugerede felt (ligningerne (2.4) og (2.23)) (step a), benytter at indekserne på feltet φ_{ij} kan byttes rundt uden omkostning (step b), samt benytter produktreglen til at differentiere produktfunktionen (step c).

$$\begin{aligned}
\pi_{ij} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi_{ij})} \\
&\stackrel{(a)}{=} \frac{\partial}{\partial(\partial_0 \varphi_{ij})} \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi_{kl} \partial^\mu \varphi_{lk} - \frac{1}{2} m^2 \varphi_{kl} \varphi_{lk} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial(\partial_0 \varphi_{ij})} \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi_{kl} \partial^\mu \varphi_{lk} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial(\partial_0 \varphi_{ij})} \left(\frac{1}{2} \partial_0 \varphi_{kl} \partial^0 \varphi_{lk} \right) \\
&\stackrel{(b)}{=} \frac{\partial}{\partial(\partial_0 \varphi_{ij})} \left(\frac{1}{2} \partial_0 \varphi_{kl} \partial^0 \varphi_{kl} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial(\partial_0 \varphi_{ij})} \left(\frac{1}{2} g^{00} \partial_0 \varphi_{kl} \partial_0 \varphi_{kl} \right) \\
&= \frac{1}{2} g^{00} \frac{\partial}{\partial(\partial_0 \varphi_{ij})} (\partial_0 \varphi_{kl} \partial_0 \varphi_{kl}) \\
&\stackrel{(c)}{=} \frac{1}{2} g^{00} \left(\frac{\partial}{\partial(\partial_0 \varphi_{ij})} [\partial_0 \varphi_{kl}] \partial_0 \varphi_{kl} + \partial_0 \varphi_{kl} \frac{\partial}{\partial(\partial_0 \varphi_{ij})} [\partial_0 \varphi_{kl}] \right) \\
&= \frac{1}{2} g^{00} (\delta_k^i \delta_l^j \partial_0 \varphi_{kl} + \delta_k^j \delta_l^i \partial_0 \varphi_{kl}) \\
&= \frac{1}{2} g^{00} (\partial_0 \varphi_{ij} + \partial_0 \varphi_{ij}) \\
&= g^{00} \partial_0 \varphi_{ij} \\
&= \partial^0 \varphi_{ij} .
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Det er dermed vist, at det konjugerede felt er den kontravariante tidsafledede af feltet, $\pi_{ij} = \partial^0 \varphi_{ij}$.

5) Hamiltonfunktionen er givet som

$$H = \int d^3 \vec{x} \mathcal{H} , \tag{2.25}$$

hvor \mathcal{H} er Hamiltondensiteten defineret som

$$\mathcal{H} = \sum_{ij} \pi_{ij} (\partial_0 \varphi_{ij}) - \mathcal{L} . \tag{2.26}$$

I kurset benyttes metrikken $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -\mathbb{1})$, altså at de rummelige koordinater i de kovariante firvektorer får et negativt fortegn, mens tidskoordinatet forbliver det samme. For differentialoperatorer er det dog den kontravariante firvektors rummelige koordinater, som får det negative fortegn, da

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\partial_0, -\vec{\nabla} \right) . \tag{2.27}$$

Af denne grund kan vi også skrive π_{ij} som

$$\pi_{ij} = \partial^0 \varphi_{ij} = g^{00} \partial_0 \varphi_{ij} = 1 \partial_0 \varphi_{ij} = \partial_0 \varphi_{ij} . \tag{2.28}$$

Samtidig har vi, at $\varphi_{ij} = \varphi_{ji}$, hvorfor

$$\pi_{ij} = \partial^0 \varphi_{ij} = \partial^0 \varphi_{ji} = \pi_{ji} . \quad (2.29)$$

Sammensættes dette kan vi skrive $\pi_{ji} = \partial_0 \varphi_{ji}$.

Nu beregnes Hamiltondensiteten ved ligning (2.26), hvor der ligesom for $\varphi_{ij}\varphi_{ji}$ (ligning (2.2)) er en implicit sum for $\pi_{ij}\pi_{ji}$, og det romerske bogstav a er brugt for implicit summering over de rummelige koordinater fra firvektoren.

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \sum_{ij} \pi_{ij} (\partial_0 \varphi_{ij}) - \mathcal{L} \\ &= \pi_{ij}\pi_{ji} - \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi_{ij} \partial^\mu \varphi_{ji} + \frac{1}{2} m^2 \varphi_{ij} \varphi_{ji} \\ &= \pi_{ij}\pi_{ji} - \frac{1}{2} \partial_0 \varphi_{ij} \partial^0 \varphi_{ji} - \frac{1}{2} \partial_a \varphi_{ij} \partial^a \varphi_{ji} + \frac{1}{2} m^2 \varphi_{ij} \varphi_{ji} \\ &= \pi_{ij}\pi_{ji} - \frac{1}{2} \pi_{ij}\pi_{ji} - \frac{1}{2} \vec{\nabla} \varphi_{ij} \cdot (-\vec{\nabla} \varphi_{ji}) + \frac{1}{2} m^2 \varphi_{ij} \varphi_{ji} \\ &= \frac{1}{2} \pi_{ij}\pi_{ji} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} \varphi_{ij} \cdot \vec{\nabla} \varphi_{ji} + \frac{1}{2} m^2 \varphi_{ij} \varphi_{ji} . \end{aligned} \quad (2.30)$$

Indsættes denne Hamiltondensitet i ligning (2.25) fås Hamiltonfunktionen

$$H = \int d^3\vec{x} \left[\frac{1}{2} \pi_{ij}\pi_{ji} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} \varphi_{ij} \cdot \vec{\nabla} \varphi_{ji} + \frac{1}{2} m^2 \varphi_{ij} \varphi_{ji} \right] , \quad (2.31)$$

hvilken var den, som skulle vises (ligning (2.5)).

6) Betragter vi feltudvidelsen i ligning (2.6),

$$\varphi_{ij} = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}ij} \exp[-ipx] + a_{\vec{p}ij}^\dagger \exp[ipx] \right) , \quad (2.32)$$

ses det, at der er stor lighed med feltudvidelsen for det reelle Klein-Gordonfelt i [2, lign. 38], hvor vi sætter $a_{\vec{p}} = c_{\vec{p}}$ da feltet er reelt. Denne lighed er forventelig, da matrixfeltet er et sæt af reelle skalarfelter.

Hvis vi blot skal argumentere ud fra komponenterne i feltudvidelsen, så kan vi starte med at se på, hvad de forskellige komponenter gør. Vi ved at vi for en feltudvidelse ønsker et integral over normal modes med deres tilsvarende løsninger til bevægelsesligningen, hvilke for et skalarfelt er svarende til en Fouriertransformation, da løsningerne til Klein-Gordonligningen er planbølger, alstå eksponentialfunktioner. $a_{\vec{p}ij}$ er annihilationsoperatoren, som multipliceres med den positive energiløsning til Klein-Gordonligningen, mens $a_{\vec{p}ij}^\dagger$ er kreationsoperatoren, som multipliceres med den negative energiløsning til Klein-Gordonligningen. $(2\pi)^3$ er en normaliseringsfaktor, og $\int d^3\vec{p}/\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}$ er impulsrumsfaktoren, hvilken er Lorentzinvariant, hvorfor hele feltet bliver Lorentzinvariant (de andre dele er Lorentzinvariante også, hvorfor dette er sandt).

I korte træk så skaber eller annihilere vi partikler med de tilstande, som er løsninger til Klein-Gordonligningen, multiplicerer med normaliseringskonstanter og summerer over alle impulser, hvor vi selvfølgelig kun får et bidrag fra dem, hvor der er en partiklen med den givne impuls.

7) Vi betragter funktionen

$$u_{\vec{p}}(x) = \frac{\exp(-ipx)}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}}, \quad (2.33)$$

hvor x og p er firvektorer, $x^\mu = (t, \vec{x})$ og $p^\mu = (\omega_{\vec{p}}, \vec{p})$, og $px = p_\mu x^\mu = p^\mu x_\mu$.

Vi skal nu regne de indre produkter i ligning (2.8), til hvilket vi benytter os af definitionen af Klein-Gordonindreproduktet i ligning (2.7).

For ikke at gentage beregningerne for mange gange betegnes

$$u_{\vec{p}} = u_{\vec{p}}^- \quad \text{og} \quad u_{\vec{p}}^* = u_{\vec{p}}^+ \quad (2.34)$$

i det følgende. Derved får vi også, at

$$(u_{\vec{p}}^+)^* = (u_{\vec{p}}^*)^* = u_{\vec{p}} = u_{\vec{p}}^- . \quad (2.35)$$

Først beregnes $(u_{\vec{p}}, u_{\vec{p}'})$ og $(u_{\vec{p}}^*, u_{\vec{p}'}^*)$:

$$\begin{aligned} (u_{\vec{p}}^\pm, u_{\vec{p}'}^\pm) &= i \int d^3\vec{x} \left[u_{\vec{p}}^\mp \frac{\partial u_{\vec{p}'}^\pm}{\partial t} - \frac{\partial u_{\vec{p}}^\mp}{\partial t} u_{\vec{p}'}^\pm \right] \\ &= i \int d^3\vec{x} \left[\frac{\exp(\mp ipx)}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\exp(\pm ip'x)}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}'}}} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\exp(\mp ipx)}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \right) \frac{\exp(\pm ip'x)}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}'}}} \right] \\ &= i \int d^3\vec{x} \frac{1}{2\sqrt{\omega_{\vec{p}}\omega_{\vec{p}'}}} \left[\exp(\mp ipx) \{ \pm i\omega_{\vec{p}'} \exp(\pm ip'x) \} \right. \\ &\quad \left. - \{ \mp i\omega_{\vec{p}} \exp(\mp ipx) \} \exp(\pm ip'x) \right] \\ &= i \int d^3\vec{x} \frac{1}{2\sqrt{\omega_{\vec{p}}\omega_{\vec{p}'}}} \left[\exp(\mp ipx) \{ \pm i\omega_{\vec{p}'} \exp(\pm ip'x) \} \right. \\ &\quad \left. + \{ \pm i\omega_{\vec{p}} \exp(\mp ipx) \} \exp(\pm ip'x) \right] \\ &= \pm i^2 \int d^3\vec{x} \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}'}}{\omega_{\vec{p}}}} + \sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}}{\omega_{\vec{p}'}}} \right] \exp(\mp ipx) \exp(\pm ip'x) \\ &= \mp \int d^3\vec{x} \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}'}}{\omega_{\vec{p}}}} + \sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}}{\omega_{\vec{p}'}}} \right] \exp(\mp i[p - p']x) \\ &= \mp \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}'}}{\omega_{\vec{p}}}} + \sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}}{\omega_{\vec{p}'}}} \right] (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \exp(\mp i[\omega_{\vec{p}} - \omega_{\vec{p}'}]t) \\ &= \mp \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}'}}{\omega_{\vec{p}}}} + \sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}}{\omega_{\vec{p}'}}} \right] (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \exp(\mp i[\omega_{\vec{p}} - \omega_{\vec{p}'}]t) \\ &= \mp \frac{1}{2} [1 + 1] (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \exp(0) \\ &= \mp (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}'), \end{aligned} \quad (2.36)$$

altså

$$(u_{\vec{p}}, u_{\vec{p}}) = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \quad \text{og} \quad (2.37a)$$

$$(u_{\vec{p}}^*, u_{\vec{p}}^*) = -(2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') , \quad (2.37b)$$

idet at deltafunktioner fremkommer ved $\int dk \exp(iky) = 2\pi\delta(y)$, at $\delta(y - y') = \delta(y' - y)$ og at $f(y')\delta(y - y') = f(y)\delta(y - y')$.

Dernæst beregnes $(u_{\vec{p}}^*, u_{\vec{p}'})$ og $(u_{\vec{p}}, u_{\vec{p}'}^*)$:

$$\begin{aligned} (u_{\vec{p}}^\pm, u_{\vec{p}}^\pm) &= i \int d^3\vec{x} \left[u_{\vec{p}}^\pm \frac{\partial u_{\vec{p}'}^\mp}{\partial t} - \frac{\partial u_{\vec{p}}^\mp}{\partial t} u_{\vec{p}'}^\pm \right] \\ &= i \int d^3\vec{x} \frac{1}{2\sqrt{\omega_{\vec{p}}\omega_{\vec{p}'}}} \left[\exp(\mp ipx) \{ \mp i\omega_{\vec{p}'} \exp(\mp ip'x) \} \right. \\ &\quad \left. - \{ \mp i\omega_{\vec{p}} \exp(\mp ipx) \} \exp(\mp ip'x) \right] \\ &= \mp i^2 \int d^3\vec{x} \frac{1}{2\sqrt{\omega_{\vec{p}}\omega_{\vec{p}'}}} \left[\exp(\mp ipx) \{ \omega_{\vec{p}'} \exp(\mp ip'x) \} \right. \\ &\quad \left. - \{ \omega_{\vec{p}} \exp(\mp ipx) \} \exp(\mp ip'x) \right] \\ &= \mp \int d^3\vec{x} \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}'}}{\omega_{\vec{p}}}} - \sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}}{\omega_{\vec{p}'}}} \right] \exp(\mp i[p + p']x) \\ &= \mp \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}'}}{\omega_{\vec{p}}}} - \sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}}{\omega_{\vec{p}'}}} \right] (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} + \vec{p}') \exp(\mp i[\omega_{\vec{p}} + \omega_{\vec{p}'}]t) \\ &= \mp \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{\omega_{-\vec{p}}}{\omega_{\vec{p}}}} - \sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}}{\omega_{-\vec{p}}}} \right] (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} + \vec{p}') \exp(\mp i[\omega_{\vec{p}} + \omega_{-\vec{p}}]t) \\ &= \mp \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}}{\omega_{\vec{p}}}} - \sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}}{\omega_{\vec{p}}}} \right] (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} + \vec{p}') \exp(\mp i[\omega_{\vec{p}} + \omega_{\vec{p}}]t) \\ &= 0 , \end{aligned} \quad (2.38)$$

idet

$$\omega_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \quad \Rightarrow \quad \omega_{-\vec{p}} = \sqrt{(-\vec{p})^2 + m^2} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} = \omega_{\vec{p}} , \quad (2.39)$$

altså får vi at

$$(u_{\vec{p}}^*, u_{\vec{p}}) = (u_{\vec{p}}, u_{\vec{p}}^*) = 0 . \quad (2.40)$$

Dermed har vi vist de fire indre produkter i ligning (2.8).

8) Definerer vi, som i besvarelsen til 7), $u_{\vec{p}} = u_{\vec{p}}^-$ og $u_{\vec{p}}^* = u_{\vec{p}}^+$ for short-hand notation og husker, at $u_{\vec{p}}^\pm = \exp(\pm ipx) / \sqrt{2\omega_{\vec{p}}}$, hvorfor

$$\begin{aligned} \varphi_{ij} &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}ij} \exp[-ipx] + a_{\vec{p}ij}^\dagger \exp[ipx] \right) \\ &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \left(a_{\vec{p}ij} u_{\vec{p}}^- + a_{\vec{p}ij}^\dagger u_{\vec{p}}^+ \right) , \end{aligned} \quad (2.41)$$

så får vi, at

$$\begin{aligned}
 (u_{\vec{p}}^{\pm}, \varphi_{ij}(p')) &= i \int d^3\vec{x} \left[u_{\vec{p}}^{\mp} \frac{\partial \varphi_{ij}(p')}{\partial t} - \frac{\partial u_{\vec{p}}^{\mp}}{\partial t} \varphi_{ij}(p') \right] \\
 &= i \int d^3\vec{x} \left[u_{\vec{p}}^{\mp} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int \frac{d^3\vec{p}'}{(2\pi)^3} \left\{ a_{\vec{p}'ij} u_{\vec{p}'}^{-} + a_{\vec{p}'ij}^{\dagger} u_{\vec{p}'}^{+} \right\} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\partial u_{\vec{p}}^{\mp}}{\partial t} \left(\int \frac{d^3\vec{p}'}{(2\pi)^3} \left\{ a_{\vec{p}'ij} u_{\vec{p}'}^{-} + a_{\vec{p}'ij}^{\dagger} u_{\vec{p}'}^{+} \right\} \right) \right] \\
 &= i \int \frac{d^3\vec{x} d^3\vec{p}'}{(2\pi)^3} \left[u_{\vec{p}}^{\mp} \frac{\partial}{\partial t} \left(a_{\vec{p}'ij} u_{\vec{p}'}^{-} + a_{\vec{p}'ij}^{\dagger} u_{\vec{p}'}^{+} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\partial u_{\vec{p}}^{\mp}}{\partial t} \left(a_{\vec{p}'ij} u_{\vec{p}'}^{-} + a_{\vec{p}'ij}^{\dagger} u_{\vec{p}'}^{+} \right) \right] \\
 &= i \int \frac{d^3\vec{x} d^3\vec{p}'}{(2\pi)^3} \left[u_{\vec{p}}^{\mp} \left(a_{\vec{p}'ij} \frac{\partial u_{\vec{p}'}^{-}}{\partial t} + a_{\vec{p}'ij}^{\dagger} \frac{\partial u_{\vec{p}'}^{+}}{\partial t} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\partial u_{\vec{p}}^{\mp}}{\partial t} \left(a_{\vec{p}'ij} u_{\vec{p}'}^{-} - a_{\vec{p}'ij}^{\dagger} u_{\vec{p}'}^{+} \right) \right] \\
 &= i \int \frac{d^3\vec{x} d^3\vec{p}'}{(2\pi)^3} \left[a_{\vec{p}'ij} \left(u_{\vec{p}}^{\mp} \frac{\partial u_{\vec{p}'}^{-}}{\partial t} - \frac{\partial u_{\vec{p}}^{\mp}}{\partial t} u_{\vec{p}'}^{-} \right) \right. \\
 &\quad \left. + a_{\vec{p}'ij}^{\dagger} \left(u_{\vec{p}}^{\mp} \frac{\partial u_{\vec{p}'}^{+}}{\partial t} - \frac{\partial u_{\vec{p}}^{\mp}}{\partial t} u_{\vec{p}'}^{+} \right) \right] \\
 &= \int \frac{d^3\vec{p}'}{(2\pi)^3} \left[a_{\vec{p}'ij} (u_{\vec{p}}^{\pm}, u_{\vec{p}'}^{-}) + a_{\vec{p}'ij}^{\dagger} (u_{\vec{p}}^{\pm}, u_{\vec{p}'}^{+}) \right],
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

hvor Leibniz integrationsregel¹ er blevet benyttet for at bytte integralet og den partielle differentialoperator, og der ingen ekstra faktor kommer, da grænserne er konstanter.

Fra ligning (2.42) får vi altså, at

$$\begin{aligned}
 (u_{\vec{p}}, \varphi_{ij}) &= \int \frac{d^3\vec{p}'}{(2\pi)^3} \left[a_{\vec{p}'ij} (u_{\vec{p}}, u_{\vec{p}'}^{-}) + a_{\vec{p}'ij}^{\dagger} (u_{\vec{p}}, u_{\vec{p}'}^{+}) \right] \\
 &= \int \frac{d^3\vec{p}'}{(2\pi)^3} \left[a_{\vec{p}'ij} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') + 0 \right] \\
 &= a_{\vec{p}ij}^{\dagger},
 \end{aligned} \tag{2.43a}$$

¹Leibniz's integrationsregl er [3]

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{a(x)}^{b(x)} dy f(x, y) \right) = f(x, b(x)) \frac{db(x)}{dx} - f(x, a(x)) \frac{da(x)}{dx} + \int_{a(x)}^{b(x)} dy \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}.$$

Når $a(x)$ og $b(x)$ er konstanter i stedet for funktioner (a, b), så bliver Leibniz integrationsregl

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^b dy f(x, y) \right) = \int_a^b dy \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}.$$

$$\begin{aligned}
 (u_{\vec{p}}^*, \varphi_{ij}) &= \int \frac{d^3 \vec{p}'}{(2\pi)^3} \left[a_{\vec{p}'ij}(u_{\vec{p}}^*, u_{\vec{p}'}^*) + a_{\vec{p}'ij}^\dagger(u_{\vec{p}}^*, u_{\vec{p}'}^*) \right] \\
 &= \int \frac{d^3 \vec{p}'}{(2\pi)^3} \left[0 + a_{\vec{p}'ij}^\dagger \{ - (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \} \right] \\
 &= -a_{\vec{p}ij}^\dagger,
 \end{aligned} \tag{2.43b}$$

hvilke er ligning (2.9), som vi skulle vise.

9) Fra 8) har vi, at $a_{\vec{p}ij}$ og $a_{\vec{p}ij}^\dagger$ er givet som (ligning (2.9))

$$\begin{aligned}
 a_{\vec{p}ij} &= (u_{\vec{p}}, \varphi_{ij}) \\
 &= i \int d^3 \vec{x} \left(u_{\vec{p}}^* \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial t} - \frac{\partial u_{\vec{p}}^*}{\partial t} \varphi_{ij} \right) \\
 &= i \int d^3 \vec{x} (u_{\vec{p}}^* \pi_{ij} - i \omega_{\vec{p}} u_{\vec{p}}^* \varphi_{ij}), \quad \text{og}
 \end{aligned} \tag{2.44a}$$

$$\begin{aligned}
 a_{\vec{p}ij}^\dagger &= -(u_{\vec{p}}, \varphi_{ij}) \\
 &= -i \int d^3 \vec{x} \left(u_{\vec{p}} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial t} - \frac{\partial u_{\vec{p}}}{\partial t} \varphi_{ij} \right) \\
 &= -i \int d^3 \vec{x} (u_{\vec{p}} \pi_{ij} + i \omega_{\vec{p}} u_{\vec{p}} \varphi_{ij}).
 \end{aligned} \tag{2.44b}$$

Fra dette kan vi beregne de bosoniske kommutatorrelationer, hvor vi for nemhedens skyld beregner de to tilfælde samlet ved at betegne $a^+ = a^\dagger$ og $a^- = a$ og igen betegne $u_{\vec{p}}^+ = u_{\vec{p}}^\dagger$ og $u_{\vec{p}}^- = u_{\vec{p}}$:

$$\begin{aligned}
 [a_{\vec{p}ij}, a_{\vec{p}'kl}^\pm] &= [(u_{\vec{p}}, \varphi_{ij}), (u_{\vec{p}'}^\pm, \varphi_{kl})] \\
 &= i^2 \int d^3 \vec{x} d^3 \vec{x}' \left[u_{\vec{p}}^+ \pi_{ij} - i \omega_{\vec{p}} u_{\vec{p}}^+ \varphi_{ij}, \mp (u_{\vec{p}'}^\mp \pi_{kl} \pm i \omega_{\vec{p}'} u_{\vec{p}'}^\mp \varphi_{kl}) \right] \\
 &= \pm \int d^3 \vec{x} d^3 \vec{x}' u_{\vec{p}}^+ u_{\vec{p}'}^\mp [\pi_{ij} - i \omega_{\vec{p}} \varphi_{ij}, \pi_{kl} \pm i \omega_{\vec{p}'} \varphi_{kl}] \\
 &= \pm \int d^3 \vec{x} d^3 \vec{x}' u_{\vec{p}}^+ u_{\vec{p}'}^\mp \left(\overrightarrow{[\pi_{ij}, \pi_{kl}]}^0 \pm i \omega_{\vec{p}'} [\pi_{ij}, \varphi_{kl}] \right. \\
 &\quad \left. - i \omega_{\vec{p}} [\varphi_{ij}, \pi_{kl}] \mp i^2 \omega_{\vec{p}} \omega_{\vec{p}'} \overrightarrow{[\varphi_{ij}, \varphi_{kl}]}^0 \right) \\
 &= \pm \int d^3 \vec{x} d^3 \vec{x}' u_{\vec{p}}^+ u_{\vec{p}'}^\mp (\pm \omega_{\vec{p}'} + \omega_{\vec{p}}) \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \delta_{ik} \delta_{jl},
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

hvor vi har benyttet kommutatorrelationen mellem φ_{ij} og π_{kl} , ligning (2.10).

Integrerer vi nu eksponentialfunktionerne og deltafunktionen fra ligning (2.45) samt husker på, at vi taler om same-time kommutatorrelationer, altså $t = t'$, så får vi

$$\begin{aligned}
\int d^3\vec{x} d^3\vec{x}' u_{\vec{p}}^+ u_{\vec{p}'}^\mp \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') &= \int d^3\vec{x} d^3\vec{x}' \frac{\exp(i[p_x \mp p'_x])}{2\sqrt{\omega_{\vec{p}}\omega_{\vec{p}'}}} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \\
&= \int d^3\vec{x} \frac{\exp(i[\omega_{\vec{p}}t \mp \omega_{\vec{p}'}t]) \exp(-i[\vec{p} \mp \vec{p}'] \cdot \vec{x})}{2\sqrt{\omega_{\vec{p}}\omega_{\vec{p}'}}} \\
&= \int d^3\vec{x} \frac{\exp(i[\omega_{\vec{p}} \mp \omega_{\vec{p}'}]t) \exp(-i[\vec{p} \mp \vec{p}'] \cdot \vec{x})}{2\sqrt{\omega_{\vec{p}}\omega_{\vec{p}'}}} \\
&= (2\pi)^3 \frac{\exp(i[\omega_{\vec{p}} \mp \omega_{\vec{p}'}]t)}{2\sqrt{\omega_{\vec{p}}\omega_{\vec{p}'}}} \delta^3(\vec{p} \mp \vec{p}') .
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Sætter vi resultatet fra ligning (2.46) tilbage i ligning (2.45) og husker, at $\omega_{-\vec{p}} = \sqrt{(-\vec{p})^2 + m^2} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} = \omega_{\vec{p}}$, så får vi at

$$\begin{aligned}
[a_{\vec{p}ij}, a_{\vec{p}'kl}^\pm] &= \pm(2\pi)^3 \frac{\exp(i[\omega_{\vec{p}} \mp \omega_{\vec{p}'}]t)}{2\sqrt{\omega_{\vec{p}}\omega_{\vec{p}'}}} \delta^3(\vec{p} \mp \vec{p}') (\pm \omega_{\vec{p}'} + \omega_{\vec{p}}) \delta_{ik} \delta_{jl} \\
&= \pm(2\pi)^3 \frac{\exp(i[\omega_{\vec{p}} \mp \omega_{\pm\vec{p}}]t)}{2\sqrt{\omega_{\vec{p}}\omega_{\pm\vec{p}}}} \delta^3(\vec{p} \mp \vec{p}') (\pm \omega_{\pm\vec{p}} + \omega_{\vec{p}}) \delta_{ik} \delta_{jl} \\
&= \pm(2\pi)^3 \frac{\exp(i[\omega_{\vec{p}} \mp \omega_{\vec{p}}]t)}{2\omega_{\vec{p}}} \delta^3(\vec{p} \mp \vec{p}') (\pm \omega_{\vec{p}} + \omega_{\vec{p}}) \delta_{ik} \delta_{jl}
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Altså er de bosoniske kommutatorrelationer

$$[a_{\vec{p}ij}, a_{\vec{p}'kl}^\pm] = (2\pi)^3 \frac{2\omega_{\vec{p}} \exp(0)}{2\omega_{\vec{p}}} \delta^3(\vec{p} \mp \vec{p}') \delta_{ik} \delta_{jl} = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} \mp \vec{p}') \delta_{ik} \delta_{jl} , \tag{2.48a}$$

$$[a_{\vec{p}ij}, a_{\vec{p}'kl}^\pm] = -(2\pi)^3 \frac{\exp(2i\omega_{\vec{p}}t)}{2\omega_{\vec{p}}} \delta^3(\vec{p} \mp \vec{p}') (-\omega_{\vec{p}} + \omega_{\vec{p}}) \delta_{ik} \delta_{jl} = 0 . \tag{2.48b}$$

Fra ligning (2.48a) findes trivielt kommutatoren $[a_{\vec{p}ij}^\dagger, a_{\vec{p}'kl}]$ ved²

$$[a_{\vec{p}ij}^\dagger, a_{\vec{p}'kl}] = -[a_{\vec{p}'kl}, a_{\vec{p}ij}^\dagger] = -(2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{ik} \delta_{jl} , \tag{2.48c}$$

og kommutatoren $[a_{\vec{p}ij}^\dagger, a_{\vec{p}'kl}^\dagger]$ findes nemt fra ligning (2.48b) ved at hermitisk konjugere³ (eng: taking the conjugate transpose) denne

$$[a_{\vec{p}ij}^\dagger, a_{\vec{p}'kl}^\dagger] = [a_{\vec{p}'kl}, a_{\vec{p}ij}^\dagger]^\dagger = 0^\dagger = 0 . \tag{2.48d}$$

10) Det skal vises, at Hamiltonfunktionen fra ligning (2.5) er lig Hamiltonfunktionen opskrevet ud fra kreations- og annihilationsoperatorer i ligning (2.11).

Vi starter dermed med at beregne de indgående felter, hvor det vides, at feltet er givet som (ligning (2.6))

$$\varphi_{ij} = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \left(a_{\vec{p}ij} u_{\vec{p}} + a_{\vec{p}ij}^\dagger u_{\vec{p}}^* \right) , \tag{2.49}$$

²Trivielt er $[A, B] = AB - BA = -(BA - AB) = -[B, A]$.

³ $[A^\dagger, B^\dagger] = A^\dagger B^\dagger - B^\dagger A^\dagger = (BA)^\dagger - (AB)^\dagger = (BA - AB)^\dagger = [B, A]^\dagger$.

hvor $\omega_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ og $u_{\vec{p}}(x) = \exp(-ipx) / \sqrt{2\omega_{\vec{p}}}$, hvormed vi får

$$\pi_{ij} = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \left(a_{\vec{p}ij} \frac{\partial u_{\vec{p}}}{\partial t} + a_{\vec{p}ij}^\dagger \frac{\partial u_{\vec{p}}^*}{\partial t} \right) = -i \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{p}} \left(a_{\vec{p}ij} u_{\vec{p}} - a_{\vec{p}ij}^\dagger u_{\vec{p}}^* \right), \quad (2.50)$$

$$\vec{\nabla} \varphi_{ij} = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \left(a_{\vec{p}ij} \frac{\partial u_{\vec{p}}}{\partial \vec{x}} + a_{\vec{p}ij}^\dagger \frac{\partial u_{\vec{p}}^*}{\partial \vec{x}} \right) = i \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \vec{p} \left(a_{\vec{p}ij} u_{\vec{p}} - a_{\vec{p}ij}^\dagger u_{\vec{p}}^* \right), \quad (2.51)$$

hvor Leibnitz regel (fodnote 1 på side 18) igen er benyttet.

Udregnes nu de tre led indgående i Hamiltonfunktionen, ligning (2.5), og huskes der at $\varphi_{ij} = \varphi_{ji}$, fås

$$\begin{aligned} \varphi_{ij} \varphi_{ij} &= \int \frac{d^3\vec{p} d^3\vec{p}'}{(2\pi)^6} \left(a_{\vec{p}ij} u_{\vec{p}} + a_{\vec{p}ij}^\dagger u_{\vec{p}}^* \right) \left(a_{\vec{p}'ij} u_{\vec{p}'} + a_{\vec{p}'ij}^\dagger u_{\vec{p}'}^* \right) \\ &= \int \frac{d^3\vec{p} d^3\vec{p}'}{(2\pi)^6} \left(a_{\vec{p}ij} u_{\vec{p}} a_{\vec{p}'ij} u_{\vec{p}'} + a_{\vec{p}ij} u_{\vec{p}} a_{\vec{p}'ij}^\dagger u_{\vec{p}'}^* \right. \\ &\quad \left. + a_{\vec{p}ij}^\dagger u_{\vec{p}}^* a_{\vec{p}'ij} u_{\vec{p}'} + a_{\vec{p}ij}^\dagger u_{\vec{p}}^* a_{\vec{p}'ij}^\dagger u_{\vec{p}'}^* \right), \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} \pi_{ij} \pi_{ij} &= (-i)^2 \int \frac{d^3\vec{p} d^3\vec{p}'}{(2\pi)^6} \left(a_{\vec{p}ij} u_{\vec{p}} - a_{\vec{p}ij}^\dagger u_{\vec{p}}^* \right) \left(a_{\vec{p}'ij} u_{\vec{p}'} - a_{\vec{p}'ij}^\dagger u_{\vec{p}'}^* \right), \\ &= - \int \frac{d^3\vec{p} d^3\vec{p}'}{(2\pi)^6} \omega_{\vec{p}} \omega_{\vec{p}'} \left(a_{\vec{p}ij} u_{\vec{p}} a_{\vec{p}'ij} u_{\vec{p}'} - a_{\vec{p}ij} u_{\vec{p}} a_{\vec{p}'ij}^\dagger u_{\vec{p}'}^* \right. \\ &\quad \left. - a_{\vec{p}ij}^\dagger u_{\vec{p}}^* a_{\vec{p}'ij} u_{\vec{p}'} + a_{\vec{p}ij}^\dagger u_{\vec{p}}^* a_{\vec{p}'ij}^\dagger u_{\vec{p}'}^* \right), \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \varphi_{ij} \cdot \vec{\nabla} \varphi_{ij} &= i^2 \int \frac{d^3\vec{p} d^3\vec{p}'}{(2\pi)^6} \vec{p} \cdot \vec{p}' \left(a_{\vec{p}ij} u_{\vec{p}} - a_{\vec{p}ij}^\dagger u_{\vec{p}}^* \right) \left(a_{\vec{p}'ij} u_{\vec{p}'} - a_{\vec{p}'ij}^\dagger u_{\vec{p}'}^* \right) \\ &= - \int \frac{d^3\vec{p} d^3\vec{p}'}{(2\pi)^6} \vec{p} \cdot \vec{p}' \left(a_{\vec{p}ij} u_{\vec{p}} a_{\vec{p}'ij} u_{\vec{p}'} - a_{\vec{p}ij} u_{\vec{p}} a_{\vec{p}'ij}^\dagger u_{\vec{p}'}^* \right. \\ &\quad \left. - a_{\vec{p}ij}^\dagger u_{\vec{p}}^* a_{\vec{p}'ij} u_{\vec{p}'} + a_{\vec{p}ij}^\dagger u_{\vec{p}}^* a_{\vec{p}'ij}^\dagger u_{\vec{p}'}^* \right) \end{aligned} \quad (2.54)$$

De udregnede led i ligningerne (2.52) til (2.54) indsættes i Hamiltonfunktionen, ligning (2.5), hvor den implicitte sum nu er udskrevet, og vi får at

$$\begin{aligned} H &= \sum_{i,j=1}^N \int d^3\vec{x} \left[\frac{1}{2} \pi_{ij} \pi_{ij} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} \varphi_{ij} \cdot \vec{\nabla} \varphi_{ij} + \frac{1}{2} m^2 \varphi_{ij} \varphi_{ij} \right] \\ &= \sum_{i,j=1}^N \int \frac{d^3\vec{x} d^3\vec{p} d^3\vec{p}'}{2(2\pi)^6} \left[u_{\vec{p}} u_{\vec{p}'} a_{\vec{p}ij} a_{\vec{p}'ij} (-\omega_{\vec{p}} \omega_{\vec{p}'} - \vec{p} \cdot \vec{p}' + m^2) \right. \\ &\quad + u_{\vec{p}} u_{\vec{p}'}^* a_{\vec{p}ij} a_{\vec{p}'ij}^\dagger (\omega_{\vec{p}} \omega_{\vec{p}'} + \vec{p} \cdot \vec{p}' + m^2) \\ &\quad + u_{\vec{p}}^* u_{\vec{p}'} a_{\vec{p}ij}^\dagger a_{\vec{p}'ij} (\omega_{\vec{p}} \omega_{\vec{p}'} + \vec{p} \cdot \vec{p}' + m^2) \\ &\quad \left. + u_{\vec{p}}^* u_{\vec{p}'}^* a_{\vec{p}ij}^\dagger a_{\vec{p}'ij}^\dagger (-\omega_{\vec{p}} \omega_{\vec{p}'} - \vec{p} \cdot \vec{p}' + m^2) \right] \end{aligned} \quad (2.55)$$

Vi kan nu kommutere integralerne således, at vi kan udregne integralet af planbøl-

gerne, $u_{\vec{p}}$ mht. \vec{x} , hvorved vi får

$$\begin{aligned} \int d^3\vec{x} u_{\vec{p}} u_{\vec{p}'} &= \int d^3\vec{x} \frac{\exp(-i[p+p']x)}{2\sqrt{\omega_{\vec{p}}\omega_{\vec{p}'}}} \\ &= \frac{\exp(-i[\omega_{\vec{p}} + \omega_{\vec{p}'}]t)}{2\sqrt{\omega_{\vec{p}}\omega_{\vec{p}'}}} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} + \vec{p}') , \end{aligned} \quad (2.56a)$$

$$\begin{aligned} \int d^3\vec{x} u_{\vec{p}}^* u_{\vec{p}'} &= \int d^3\vec{x} \frac{\exp(i[p-p']x)}{2\sqrt{\omega_{\vec{p}}\omega_{\vec{p}'}}} \\ &= \frac{\exp(i[\omega_{\vec{p}} - \omega_{\vec{p}'}]t)}{2\sqrt{\omega_{\vec{p}}\omega_{\vec{p}'}}} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') , \end{aligned} \quad (2.56b)$$

$$\begin{aligned} \int d^3\vec{x} u_{\vec{p}}^* u_{\vec{p}'}^* &= \left(\int d^3\vec{x} u_{\vec{p}} u_{\vec{p}'} \right)^* \\ &= \left(\frac{\exp(-i[\omega_{\vec{p}} + \omega_{\vec{p}'}]t)}{2\sqrt{\omega_{\vec{p}}\omega_{\vec{p}'}}} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} + \vec{p}') \right)^* \\ &= \frac{\exp(i[\omega_{\vec{p}} + \omega_{\vec{p}'}]t)}{2\sqrt{\omega_{\vec{p}}\omega_{\vec{p}'}}} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} + \vec{p}') , \end{aligned} \quad (2.56c)$$

$$\begin{aligned} \int d^3\vec{x} u_{\vec{p}} u_{\vec{p}'}^* &= \left(\int d^3\vec{x} u_{\vec{p}}^* u_{\vec{p}'} \right)^* \\ &= \left(\frac{\exp(i[\omega_{\vec{p}} - \omega_{\vec{p}'}]t)}{2\sqrt{\omega_{\vec{p}}\omega_{\vec{p}'}}} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \right)^* \\ &= \frac{\exp(-i[\omega_{\vec{p}} - \omega_{\vec{p}'}]t)}{2\sqrt{\omega_{\vec{p}}\omega_{\vec{p}'}}} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') . \end{aligned} \quad (2.56d)$$

Indsættes ligningerne (2.56a) til (2.56d) i Hamiltonfunktionen, ligning (2.55), og husker vi at $\omega_{\vec{p}}^2 = \vec{p}^2 + m^2$ og dermed at $\omega_{-\vec{p}} = \sqrt{(-\vec{p})^2 + m^2} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} = \omega_{\vec{p}}$, så får vi

$$\begin{aligned}
H &= \sum_{i,j=1}^N \int \frac{d^3\vec{p} d^3\vec{p}'}{2(2\pi)^3} \\
&\quad \left[\frac{\exp(-i[\omega_{\vec{p}} + \omega_{\vec{p}'}]t)}{2\sqrt{\omega_{\vec{p}}\omega_{\vec{p}'}}} \delta^3(\vec{p} + \vec{p}') a_{\vec{p}ij} a_{\vec{p}'ij} (-\omega_{\vec{p}}\omega_{\vec{p}'} - \vec{p} \cdot \vec{p}' + m^2) \right. \\
&\quad + \frac{\exp(-i[\omega_{\vec{p}} - \omega_{\vec{p}'}]t)}{2\sqrt{\omega_{\vec{p}}\omega_{\vec{p}'}}} \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') a_{\vec{p}ij} a_{\vec{p}'ij}^\dagger (\omega_{\vec{p}}\omega_{\vec{p}'} + \vec{p} \cdot \vec{p}' + m^2) \\
&\quad + \frac{\exp(i[\omega_{\vec{p}} - \omega_{\vec{p}'}]t)}{2\sqrt{\omega_{\vec{p}}\omega_{\vec{p}'}}} \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') a_{\vec{p}ij}^\dagger a_{\vec{p}'ij} (\omega_{\vec{p}}\omega_{\vec{p}'} + \vec{p} \cdot \vec{p}' + m^2) \\
&\quad \left. + \frac{\exp(i[\omega_{\vec{p}} + \omega_{\vec{p}'}]t)}{2\sqrt{\omega_{\vec{p}}\omega_{\vec{p}'}}} \delta^3(\vec{p} + \vec{p}') a_{\vec{p}ij}^\dagger a_{\vec{p}'ij}^\dagger (-\omega_{\vec{p}}\omega_{\vec{p}'} - \vec{p} \cdot \vec{p}' + m^2) \right] \\
&= \sum_{i,j=1}^N \int \frac{d^3\vec{p}}{2(2\pi)^3} \left[\frac{\exp(-2i\omega_{\vec{p}}t)}{2\omega_{\vec{p}}} a_{\vec{p}ij} a_{-\vec{p}ij} \cancel{(-\omega_{\vec{p}}^2 + \vec{p}^2 + m^2)} \overset{0}{\rightarrow} \right. \\
&\quad + \frac{1}{2\omega_{\vec{p}}} a_{\vec{p}ij} a_{\vec{p}ij}^\dagger (\omega_{\vec{p}}^2 + \vec{p}^2 + m^2) \\
&\quad + \frac{1}{2\omega_{\vec{p}}} a_{\vec{p}ij}^\dagger a_{\vec{p}ij} (\omega_{\vec{p}}^2 + \vec{p}^2 + m^2) \\
&\quad \left. + \frac{\exp(2i\omega_{\vec{p}}t)}{2\omega_{\vec{p}}} a_{\vec{p}ij}^\dagger a_{-\vec{p}ij}^\dagger \cancel{(-\omega_{\vec{p}}^2 + \vec{p}^2 + m^2)} \overset{0}{\rightarrow} \right] \\
&= \sum_{i,j=1}^N \int \frac{d^3\vec{p}}{2(2\pi)^3} \left[\frac{2\omega_{\vec{p}}^2}{2\omega_{\vec{p}}} a_{\vec{p}ij} a_{\vec{p}ij}^\dagger + \frac{2\omega_{\vec{p}}^2}{2\omega_{\vec{p}}} a_{\vec{p}ij}^\dagger a_{\vec{p}ij} \right] \\
&= \sum_{i,j=1}^N \int \frac{d^3\vec{p}}{2(2\pi)^3} \omega_{\vec{p}} \left[a_{\vec{p}ij} a_{\vec{p}ij}^\dagger + a_{\vec{p}ij}^\dagger a_{\vec{p}ij} \right] \\
&= \sum_{i,j=1}^N \int \frac{d^3\vec{p}}{2(2\pi)^3} \omega_{\vec{p}} \left[a_{\vec{p}ij} a_{\vec{p}ij}^\dagger - a_{\vec{p}ij}^\dagger a_{\vec{p}ij} + a_{\vec{p}ij}^\dagger a_{\vec{p}ij} + a_{\vec{p}ij} a_{\vec{p}ij}^\dagger \right] \\
&= \sum_{i,j=1}^N \int \frac{d^3\vec{p}}{2(2\pi)^3} \omega_{\vec{p}} \left(\left[a_{\vec{p}ij}, a_{\vec{p}ij}^\dagger \right] + 2a_{\vec{p}ij}^\dagger a_{\vec{p}ij} \right).
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Kommutatoren i ligning (2.57) viser sig at være problematisk, da den reelt er uendelig, når denne Hamiltonfunktion benyttes. Vi vil dog negligere ledet, da vi normalt blot kigger på energiforskelle og dermed vil dette led gå ud med det samme led fra det andet energiudtryk. Kommutatoren ses altså blot som værende en "baggrundsenergi", som vi ikke betragter. Under denne antagelse bliver Hamiltonfunktionen

$$H = \sum_{i,j=1}^N \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \left[\omega_{\vec{p}} a_{\vec{p}ij}^\dagger a_{\vec{p}ij} \right]. \tag{2.58}$$

Hermed er det vist, at Hamiltonfunktionen for det kvantiserede felt kan skrives som ligning (2.11).

11) Det skal vises, at feltoperatoren beskrevet af ligning (2.6) overholder Heisenbergs bevægelsesligning, ligning (2.12), med hensyn til Hamiltonfunktionen i ligning (2.11). Her er fortsat benyttet notationen med $u_{\vec{p}}(x) = \exp(-ipx) / \sqrt{2\omega_{\vec{p}}}$, hvorved kommutatoren mellem feltet og Hamiltonfunktionen er

$$\begin{aligned}
[\varphi_{ij}(x, p), H(p')] &= \sum_{k,l=1}^N \int \frac{d^3\vec{p} d^3\vec{p}'}{(2\pi)^6} [a_{\vec{p}ij} u_{\vec{p}} + a_{\vec{p}ij}^\dagger u_{\vec{p}}^*, \omega_{\vec{p}'} a_{\vec{p}'kl}^\dagger a_{\vec{p}'kl}] \\
&= \sum_{k,l=1}^N \int \frac{d^3\vec{p} d^3\vec{p}'}{(2\pi)^6} \omega_{\vec{p}'} \left([a_{\vec{p}ij} u_{\vec{p}}, a_{\vec{p}'kl}^\dagger a_{\vec{p}'kl}] \right. \\
&\quad \left. + [a_{\vec{p}ij}^\dagger u_{\vec{p}}^*, a_{\vec{p}'kl}^\dagger a_{\vec{p}'kl}] \right) \\
&= \sum_{k,l=1}^N \int \frac{d^3\vec{p} d^3\vec{p}'}{(2\pi)^6} \omega_{\vec{p}'} \left(\overset{0}{\cancel{a_{\vec{p}'kl}^\dagger [a_{\vec{p}ij}, a_{\vec{p}'kl}] u_{\vec{p}}}} \right. \\
&\quad + [a_{\vec{p}ij}, a_{\vec{p}'kl}^\dagger] a_{\vec{p}'kl} u_{\vec{p}} \\
&\quad + a_{\vec{p}'kl}^\dagger [a_{\vec{p}ij}^\dagger, a_{\vec{p}'kl}] u_{\vec{p}}^* \\
&\quad \left. + \overset{0}{\cancel{a_{\vec{p}ij}^\dagger [a_{\vec{p}'kl}^\dagger, a_{\vec{p}'kl}] u_{\vec{p}}^*}} \right) \\
&= \sum_{k,l=1}^N \int \frac{d^3\vec{p} d^3\vec{p}'}{(2\pi)^6} \omega_{\vec{p}'} \left((2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{ik} \delta_{jl} a_{\vec{p}'kl} u_{\vec{p}} \right. \\
&\quad \left. - a_{\vec{p}'kl}^\dagger (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{ik} \delta_{jl} u_{\vec{p}}^* \right) \quad (2.59) \\
&= \int \frac{d^3\vec{p} d^3\vec{p}'}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{p}'} \left(\delta^3(\vec{p} - \vec{p}') a_{\vec{p}'ij} u_{\vec{p}} - a_{\vec{p}'ij}^\dagger \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') u_{\vec{p}}^* \right) \\
&= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{p}} \left(a_{\vec{p}ij} u_{\vec{p}} - a_{\vec{p}ij}^\dagger u_{\vec{p}}^* \right) \\
&= \mathbb{1} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{p}} \left(a_{\vec{p}ij} u_{\vec{p}} - a_{\vec{p}ij}^\dagger u_{\vec{p}}^* \right) \\
&= (-i^2) \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{p}} \left(a_{\vec{p}ij} u_{\vec{p}} - a_{\vec{p}ij}^\dagger u_{\vec{p}}^* \right) \\
&= i \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \left(a_{\vec{p}ij} \{-i\omega_{\vec{p}}\} u_{\vec{p}} + a_{\vec{p}ij}^\dagger \{i\omega_{\vec{p}}\} u_{\vec{p}}^* \right) \\
&= i \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \left(a_{\vec{p}ij} \frac{\partial u_{\vec{p}}}{\partial t} + a_{\vec{p}ij}^\dagger \frac{\partial u_{\vec{p}}^*}{\partial t} \right) \\
&= i \frac{\partial}{\partial t} \left(\int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \left(a_{\vec{p}ij} u_{\vec{p}} + a_{\vec{p}ij}^\dagger u_{\vec{p}}^* \right) \right) \\
&= i \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial t},
\end{aligned}$$

hvor Leibniz's integrationsregel (se fodnote 1 på side 18) igen er brugt for at flytte den partielle differentiation udenfor integralet, og de bosoniske kommutatorrelationer fundet i **9**), ligning (2.48), er benyttet.

Af ligning (2.59) kan det altså ses, at feltudvidelsen i ligning (2.6) overholder Heisenbergs bevægelsesligning. Dette betyder, at denne feltoperator er den korrekte at benytte i vekselvirkningsbilledet, da det gør sig gældende, at en sådan operator skal overholde Heisenbergs bevægelsesligning,

$$i\frac{\partial A_I}{\partial t} = [A_I, H_0], \quad (2.60)$$

hvor A_I er en operator i vekselvirkningsbilledet, og H_0 er den frie Hamiltonfunktion, ligning (2.11), hvilket også er den, som vi har benyttet i ligning (2.59), siden vi endnu ikke har medtaget vekselvirkningsled i denne.

12) De ortogonale og reelle matricer $R \in O(N)$ har egenskaben $R^T R = \mathbb{1}$, altså $R_{ji}^T R_{ik} = R_{ij} R_{ik} = \delta_{jk}$, hvor $R_{ji}^T = R_{ij}$ er den j, i 'te komponent af den transponerede matrix R^T .

Benytter vi nu transformationen af φ_{ij} , ligning (2.14), til at transformere Lagrangensiteten fra ligning (2.1), fås

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi'_{ij} \partial^\mu \varphi'_{ji} - \frac{1}{2} m^2 \varphi'_{ij} \varphi'_{ji} \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu (R_{ik} R_{jl} \varphi_{kl}) \partial^\mu (R_{jm} R_{in} \varphi_{mn}) - \frac{1}{2} m^2 (R_{ik} R_{jl} \varphi_{kl}) (R_{jm} R_{in} \varphi_{mn}) \\ &= R_{ik} R_{jl} R_{jm} R_{in} \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi_{kl} \partial^\mu \varphi_{mn} - m^2 \varphi_{kl} \varphi_{mn}) \\ &= \delta_{kn} \delta_{lm} \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi_{kl} \partial^\mu \varphi_{mn} - m^2 \varphi_{kl} \varphi_{mn}) \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi_{nm} \partial^\mu \varphi_{mn} - \frac{1}{2} m^2 \varphi_{nm} \varphi_{mn} \\ &= \mathcal{L}, \end{aligned} \quad (2.61)$$

hvorved Lagrangensiteten i ligning (2.1) er invariant under denne transformation (ligning (2.14)) og dermed udviser $O(N)^2$ -symmetri.

13) Først findes et vekselvirkningsled, som *bevarer* $O(N)^2$ -symmetrien:

Det bemærkes, at når alle indeks fremgår i et lige antal felter og de alle summeres over, da vil de ortogonale $N \times N$ matricer gå ud med hinanden grundet deres egenskab om $R^T R = \mathbb{1}$ og ledet vil dermed være invariant under $O(N)^2$ -symmetri. Et eksempel på et $O(N)^2$ -invariant led er $\mathcal{L}_I = g \varphi_{ab} \varphi_{bc} \varphi_{ca}$, hvor g er en koblingskonstant, og dette vekselvirkningsled transformerer som

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_I &= g \varphi'_{ab} \varphi'_{bc} \varphi'_{ca} \\ &= g (R_{ae} R_{bf} \varphi_{ef}) (R_{bg} R_{ch} \varphi_{gh}) (R_{ci} R_{aj} \varphi_{ij}) \\ &= g R_{ae} R_{bf} R_{bg} R_{ch} R_{ci} R_{aj} \varphi_{ef} \varphi_{gh} \varphi_{ij} \\ &= g \delta_{ej} \delta_{fg} \delta_{hi} \varphi_{ef} \varphi_{gh} \varphi_{ij} \\ &= g \varphi_{jg} \varphi_{gi} \varphi_{ij} \\ &= \mathcal{L}_I, \end{aligned} \quad (2.62)$$

hvor summeringen er implicit. Dette vekselvirkningsled er dermed invariant.

Som det næste findes et vekselvirkningsled, som *bryder* $O(N)^2$ -symmetrien: Hvis ikke alle indeks opstår i et lige antal felter og dermed ikke summeres over, da vil der være nogle ortogonale matricer, der ikke vil gå ud med hinanden, og derved vil ledet ikke være generelt invariant under $O(N)^2$ -symmetri. F.eks. kan vi tage eksemplet fra før og skifte sidste felts indeks, så $\mathcal{L}_I = g\varphi_{ab}\varphi_{bc}\varphi_{cd}$ og g stadig er en koblingskonstant. Dette vekselvirkningsled transformerer nu som

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'_I &= \sum_a \sum_d g\varphi'_{ab}\varphi'_{bc}\varphi'_{cd} \\ &= \sum_a \sum_d g(R_{ae}R_{bf}\varphi_{ef})(R_{bg}R_{ch}\varphi_{gh})(R_{ci}R_{dj}\varphi_{ij}) \\ &= \sum_a \sum_d gR_{ae}R_{bf}R_{bg}R_{ch}R_{ci}R_{dj}\varphi_{ef}\varphi_{gh}\varphi_{ij} \\ &= \sum_a \sum_d gR_{ae}\delta_{fg}\delta_{hi}R_{dj}\varphi_{ef}\varphi_{gh}\varphi_{ij} \\ &= \sum_a \sum_d gR_{ae}R_{dj}\varphi_{eg}\varphi_{gi}\varphi_{ij} \\ &\neq \mathcal{L}_I.\end{aligned}\tag{2.63}$$

hvor nogle af summerne (ligesom i ligning (2.62)) er implicitte, mens to her er eksplicit udskrevet, da de er over de indeks, som gør at de ortogonale matricer ikke går ud med hinanden, men som skal summeres over, idet at matricerne står skrevet på deres elementform. De summeres altså ikke over "i takt", men det kan i stedet ses som en summering over "forskellige rum". Det overordnede er, at $R_{ae}R_{dj}$ *ikke* kan gå ud med hinanden ved egenskaben $R^\top R = 1$, og dermed bevarer denne vekselvirkning *ikke* $O(N)^2$ -symmetrien.

Af ligning (2.63) kan det tydeligt ses, at de to indekser, som ikke summeres over, er de to indekser, som er i den endelige rang-2-tensor, som transformerer ved to rotationsmatricer. $O(N)^2$ -symmetrien kan dermed ikke bevares, hvis ikke alle indeks i alle felterne bliver summeret over, altså må der ikke eksistere et indeks i et felt, som ikke også eksisterer i et andet. Grundet transformationen af feltet (ligning (2.14)) kan et ikke-invariant led også konstrueres ved at multiplicere φ_{ii} på et ellers invariant led.

14) Vi betragter et element $R \in O(N)$, som er meget tæt på identitetsmatricen, $R = \mathbb{1} + A$, hvor A er en $N \times N$ -matrix med elementer $|A_{ij}| \ll 1$. For et sådan R kan det vises, at A er en antisymmetrisk matrix, altså $A^\top = -A$:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{1} &= R^\top R \\
 &= (\mathbb{1} + A)^\top (\mathbb{1} + A) \\
 &= (\mathbb{1}^\top + A^\top) (\mathbb{1} + A) \\
 &= (\mathbb{1} + A^\top) (\mathbb{1} + A) \\
 &= \mathbb{1} \cdot \mathbb{1} + \mathbb{1}A + A^\top \mathbb{1} + A^\top A \\
 &= \mathbb{1} + A + A^\top + A^\top A \\
 &\simeq \mathbb{1} + A + A^\top \\
 \Rightarrow 0 &= A + A^\top \\
 \Rightarrow A^\top &= -A,
 \end{aligned} \tag{2.64}$$

hvor det er blevet benyttet, at transponering er lineær, altså $(B + C)^\top = B^\top + C^\top$ for to kvadratiske matricer B og C , samt at $|A_{ij}| \ll 1 \Rightarrow |A_{ij}A_{ji}| \ll 1$ så $A^\top A$ dermed er så lille, at den negligeres.

Det er altså vist, at A er en antisymmetrisk matrix. For en asymmetrisk matrix gør det sig gældende, at den skal være sporløs (eng: traceless), altså at $A_{ii} = 0$ (siden $A_{ij} = -A_{ji} \Rightarrow A_{ii} = -A_{ii}$, hvilket kun 0 opfylder) og den øvre trekant af elementer (superdiagonalen og over) kan blive unikt bestemt ud fra den nedre trekants elementer (subdiagonalen og under) eller omvendt. Dermed er dimensionen af A , hvilket er frihedsgraderne for matricen, være

$$\dim(O(N)) = \dim(A) = \frac{N^2}{2} - \frac{N}{2} = \frac{N(N-1)}{2}, \tag{2.65}$$

hvor $N^2/2$ er halvdelen af matricen hvorfra vi så fratrækker den resterende del af diagonalens elementer $N/2$.

15) Da dimensionen af A er fundet til at være $N(N-1)/2$, ligning (2.65) i opgave **14)**, betragter vi nu $N(N-1)/2$ matricer A^k som udspænder rummet af alle antisymmetriske matricer med dimension N . Vi definerer nu $A = \sum_k \varepsilon^k A^k = \varepsilon^k A^k$ (og lader altså summeringen være implicit), hvorved vi nu kan skrive infinitesimaltransformationen R som

$$R = \mathbb{1} + A = \mathbb{1} + \varepsilon^k A^k. \tag{2.66}$$

Beregner vi nu variationen af φ_{ij} får vi

$$\begin{aligned}
 \delta\varphi_{ij} &= R_{il}R_{jn}\varphi_{ln} - \varphi_{ij} \\
 &= (\mathbb{1}_{il} + \varepsilon^k A_{il}^k) (\mathbb{1}_{jn} + \varepsilon^m A_{jn}^m) \varphi_{ln} - \varphi_{ij} \\
 &\simeq (\delta_{il}\delta_{jn} + \varepsilon^k A_{il}^k\delta_{jn} + \varepsilon^m A_{jn}^m\delta_{il}) \varphi_{ln} - \varphi_{ij} \\
 &= (\varepsilon^k A_{il}^k\delta_{jn} + \varepsilon^m A_{jn}^m\delta_{il}) \varphi_{ln},
 \end{aligned} \tag{2.67}$$

hvor vi har benyttet, at $|A_{ij}| \ll 1$ samt at identitetsmatricens indgange er givet som $\mathbb{1}_{ij} = \delta_{ij}$. Ved brug af linearitet kan det vises, at

$$\partial_\mu(\delta\varphi_{ij}) = \delta(\partial_\mu\varphi_{ij}). \tag{2.68}$$

Varierer vi nu Lagrangedensiteten fås⁴

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_{ij}}\delta\varphi_{ij} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_{ij})}\delta(\partial_\mu\varphi_{ij}), \quad (2.69)$$

og sætter vi nu lig 0, benytter Euler-Lagrangeligningen i første led i ligning (2.69), samt bruger Lagrangedensitetes symmetri, så finder vi

$$\begin{aligned} 0 &= \delta\mathcal{L} \\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_{ij}}\delta\varphi_{ij} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_{ij})}\delta(\partial_\mu\varphi_{ij}) \\ &= \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_{ij})} \right) \delta\varphi_{ij} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_{ij})}\delta(\partial_\mu\varphi_{ij}) \\ &= \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_{ij})} \right) \delta\varphi_{ij} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_{ij})}\partial_\mu(\delta\varphi_{ij}) \\ &= \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_{ij}}\delta\varphi_{ij} \right), \end{aligned} \quad (2.70)$$

hvor vi har benyttet kædereolen i sidste lighed. Derved kan det ses, at

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_{ij}}\delta\varphi_{ij} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_{ij}} (\varepsilon^k A_{il}^k \delta_{jn} + \varepsilon^m A_{jn}^m \delta_{il}) \varphi_{ln} \quad (2.71)$$

er bevaret uanset valget af ε^i 'erne. Af dette kan vi finde den bevarede strøm som

$$j_k^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_{ij}} (A_{il}^k \delta_{jn} + A_{jn}^k \delta_{il}) \varphi_{ln} = \frac{1}{2} (A_{il}^k \delta_{jn} + A_{jn}^k \delta_{il}) \varphi_{ln} \partial^\mu \varphi_{ij}, \quad (2.72)$$

hvor $\partial_\mu j_k^\mu = 0$ for all k , hvor sidste lighed har gjort brug af symmetrien af matrixfeltet, $\varphi_{ij} = \varphi_{ji}$.

Omskriver vi nu det hele til matricer i stedet for komponenter, får vi fra ligning (2.72) at

$$j_k^\mu = \text{tr} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)} [A^k\Phi - \Phi A^k] \right) = \frac{1}{2} \text{tr} (\partial^\mu\Phi [A^k\Phi - \Phi A^k]) \quad (2.73)$$

når vi igen benytter symmetrien af matrixfeltet, samt at A er asymmetrisk, og lader Φ betegne matricen med komponenterne φ_{ij} .

16) Gør vi feltet komplekst, da vil vi få det dobbelte antal frihedsgrader, da et komplekst felt har én frihedsgrad for dens reelle del og én fra dens imaginære del. For det komplekse felt skal Lagrangedensiteten også ændres, således at

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\varphi_{ij}^* \partial^\mu\varphi_{ji} - m^2\varphi_{ij}^* \varphi_{ji}, \quad (2.74)$$

og vi modificerer symmetrien af matrixfeltet til at $\varphi_{ij} = \varphi_{ji}^*$. Udover bevægelsesligningerne for φ_{ij} får vi også bevægelsesligninger for φ_{ij}^* grundet de nye frihedsgrader, så

$$0 = (\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\varphi_{ij}^* \quad \forall i, j = 1, \dots, N. \quad (2.75)$$

⁴Her er det brugt at $df = \frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy$.

Da feltet er komplekst, da bliver det konjugerede felt modificeret så

$$\pi_{ij} = \partial^0 \varphi_{ij}^* \quad \text{og} \quad \pi_{ij}^* = \partial^0 \varphi_{ij} , \quad (2.76)$$

hvorved vi også får en ændring i Hamiltonfunktionen, da der deri også skal kompenseres med komplekskonjugeringer

$$H = \int d^3\vec{x} \left[\frac{1}{2} \pi_{ij}^* \pi_{ji} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} \varphi_{ij} \cdot \vec{\nabla} \varphi_{ji}^* + \frac{1}{2} m^2 \varphi_{ij}^* \varphi_{ji} \right] . \quad (2.77)$$

Yderligere vil der ske ændringer i feltudvidelsen for φ_{ij} , nemlig at der vil være forskellige kreations- og annihilationsoperatorer, a^\dagger og c^\dagger for hhv. partikler og antipartikler, da et komplekst felt betyder, at partiklen ikke længere er sin egen antipartikel

$$\varphi_{ij} = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}ij} \exp[-ipx] + c_{\vec{p}ij}^\dagger \exp[ipx] \right) , \quad (2.78)$$

og vi skal dermed også introducere dens Hermitiskkonjugerede, da vi nu har kvantiseret vores felt,

$$\varphi_{ij}^\dagger = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}ij}^\dagger \exp[ipx] + c_{\vec{p}ij} \exp[-ipx] \right) . \quad (2.79)$$

Beregningerne i **8)** og **9)** kan gentages for $c_{\vec{p},ij}$, og vi vil komme frem til samme kommutatorrelationer blot med udskiftningen $a_{\vec{p},ij} \rightarrow c_{\vec{p},ij}$, så vores kommutatorrelationer bliver

$$\left[a_{\vec{p}'kl}, a_{\vec{p}ij}^\dagger \right] = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (2.80a)$$

$$\left[c_{\vec{p}'kl}, c_{\vec{p}ij}^\dagger \right] = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (2.80b)$$

$$0 = [a_{\vec{p}ij}, a_{\vec{p}'kl}] = [c_{\vec{p}ij}, c_{\vec{p}'kl}] = [a_{\vec{p}ij}, c_{\vec{p}'kl}] = [a_{\vec{p}ij}, c_{\vec{p}'kl}^\dagger] , \quad (2.80c)$$

og Hermitiskkonjugeringer af disse. Grundet denne tilføjelse af $c_{\vec{p}ij}$ vil vi i den kvantiserede Hamiltonfunktionen også få en tælleoperator for disse antipartikler, så

$$H = \sum_{i,j=1}^N \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{p}} \left[a_{\vec{p}ij}^\dagger a_{\vec{p}ij} + c_{\vec{p}ij}^\dagger c_{\vec{p}ij} \right] . \quad (2.81)$$

Når det kommer til spørgsmålet symmetrier med den ortogonale gruppe $O(N)$ i opgave **12)**, så vil vi i stedet for disse reelle matricer udvide symmetrien til gruppen af $N \times N$ unitære matricer, da disse også kan være komplekse, men stadig samme egenskab, nemlig

$$U(N) = \{ R \mid R^\dagger R = \mathbb{1} \} , \quad (2.82)$$

hvor komplekskonjugeringen er taget i betragtning i den Hermitiske konjugering, da denne er svarende til komplekskonjugering og transponering, og de samme regler for invarians under denne symmetri, som i **13)**, vil gøre sig gældende, dog når

der igen er taget i betragtning, at vi skal have medtaget φ_{ij} værende kompleks. Noetherstrømmen fundet i **15)** vil også ændres, idet den blev beregnet til at være afhængig af felterne, hvilket efter kompleksificeringen af felterne vil sige, at den nu kommer til at afhænge af både felterne og deres komplekskonjugeringer, og det giver også mening, at disse strømme vil ændre sig som et resultat af, da det komplekse felt kan have ladning.

De fleste af beregninger i dette tankeeksperiment er ikke specielt meget sværere end dem, som vi har lavet i denne opgave, og i løbet af kurset (problemsæt 2 [2]) har vi udført beregningerne for det komplekse Klein-Gordonfelt (uden matricer som felter), og vi har i denne opgave set, at det reelle matrixfelts beregninger er analoge til dem for det reelle Klein-Gordonfelt, hvorfor det komplekse matrixfelts beregninger også formodes at være analog med dem for det komplekse Klein-Gordonfelt i [2].

3 Helicitetsoperatoren

I denne opgave skal vi kigge nærmere på heliciteten som en operator: Først kigger på helicitet med hensyn til spinorer (eng: spinors), og derefter kigger på heliciteten med hensyn til de kvantiserede felter. Gamma matricerne i Dirac-Pauli repræsentationen er

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{bmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

hvor σ_i er den i 'te Paulimatrix. Løsningerne til Diracligningen er på formen

$$u_s(p) = \sqrt{E+m} \begin{bmatrix} \chi_s \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \chi_s}{E+m} \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad v_s(p) = \sqrt{E+m} \begin{bmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \chi_{-s}}{E+m} \\ \chi_{-s} \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

for hhv. positive og negative energier. Her er χ_s 2-spinorer med kvantiseringssakse lang retningen af impulsen \vec{p} med projektion $s = \pm 1$. Bemærk her ændringen $\chi_s \rightarrow \chi_{-s}$ for løsningerne med negativ energi, $v_s(p)$.

Helicitetsoperatoren kan defineres ved brug af spinoperatorerne, hvilke er passende generaliserede til fir-spinorer. Vi definerer

$$\vec{\Sigma} = \begin{bmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

og helicitetsoperatoren kan derudfra skrives som $h = \vec{\Sigma} \cdot \vec{p}/|\vec{p}|$.

1) Først betragter vi problemet med at definere en passende firvektor for spin, s^μ . Siden den i bund og grund er en rummelig vektor vil vi normalisere den således, at $s^\mu s_\mu = -1$. Som normalt med sådan en (spin)polarisationsvektor er et særlig praktisk valg, at den er ortogonal til firimpulsen, altså $s^\mu p_\mu = 0$. Argumentér for at vi i partiklens hvilesystem (under antagelse af at partiklen har masse $m \neq 0$) kan vælge $s^\mu = (0, \hat{s})$, hvor \hat{s} er en arbitrær treenhedsvektor.

2) Argumentér for at siden vi er interesserede i helicitet, så vil et godt valg for \hat{s} være $\hat{s} = \vec{p}/|\vec{p}|$. Vis at hvis vi booster fra hvilesystemet til et system, hvor partiklen har impuls \vec{p} , da bliver spinfirvektoren

$$s^\mu = \left(\frac{|\vec{p}|}{m}, \frac{E}{m} \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \right). \quad (3.4)$$

3) Vis at $\vec{\Sigma} = \gamma^5 \gamma^0 \vec{\gamma}$ og bevis den nyttige relation

$$\gamma^5 \not{A} = \vec{\Sigma} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \frac{\not{p}}{m}, \quad (3.5)$$

hvor $\not{A} = \gamma_\mu A^\mu = \gamma^\mu A_\mu$ for en firvektor A^μ .

4) Vis at $u_s(p)$ og $v_s(p)$ er egentilstande for $\gamma^5 \not{\epsilon}$, altså at

$$\gamma^5 \not{\epsilon} u_s(p) = s u_s(p) , \quad \text{og} \quad (3.6a)$$

$$\gamma^5 \not{\epsilon} v_s(p) = s v_s(p) . \quad (3.6b)$$

5) Benyt de foregående delopgaver til at vise at $u_s(p)$ og $v_s(p)$ også er helicitetsegentilstande, altså at

$$h u_s(p) = s u_s(p) , \quad \text{og} \quad (3.7a)$$

$$h v_s(p) = -s v_s(p) . \quad (3.7b)$$

Bemærk fortegnssændringen for løsningerne med negativ energi; dette bliver relevant om et øjeblik.

(Hint: De generelle relationer $(\not{p} - m)u_s(p) = 0$ og $(\not{p} + m)v_s(p) = 0$ er meget nyttige her.)

6) Vi er nu klar til at betragte de kvantiserede fermionfelter,

$$\psi(x) = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \left(\exp[-ipx] u(p, \lambda) b_{\vec{p}, \lambda} + \exp[ipx] v(p, \lambda) d_{\vec{p}, \lambda}^{\dagger} \right) . \quad (3.8)$$

Når vi forsøger at finde helicitetsoperatoren i anden kvantisering støder vi et problem. Vi vil gerne tage projektionen af spin på udbredelsesretningen. Intuitivt er dette på formen $\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}/|\vec{p}|$. Uheldigvis kan dette ikke gøres ved at betragte $\vec{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{P}}$, og vi skal i stedet være mere forsigtige. Lad os derfor betragte spinoperatoren i anden kvantisering projiceret langs en retning givet ved enhedsvektoren $\hat{\mathbf{n}}$; vi skal altså betragte det følgende udtryk

$$\int d^3 \vec{x} \psi^{\dagger}(x) \vec{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} \psi(x) . \quad (3.9)$$

Vis at man med hensyn til tælleoperatorerne (eng: number operators) for partikler og antipartikler finder at ligning (3.9) bliver

$$\begin{aligned} & \int d^3 \vec{x} \psi^{\dagger}(x) \vec{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} \psi(x) \\ &= \sum_{s, s'} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\vec{p}}} \left[u_s(p)^{\dagger} \vec{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} u_{s'}(p) b_{\vec{p}, s}^{\dagger} b_{\vec{p}, s'} \right. \\ & \quad + u_s(p)^{\dagger} \vec{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} v_{s'}(-p) \exp(2iE_{\vec{p}}t) b_{\vec{p}, s}^{\dagger} d_{-\vec{p}, s'}^{\dagger} \\ & \quad + v_s(p)^{\dagger} \vec{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} u_{s'}(-p) \exp(-2iE_{\vec{p}}t) d_{\vec{p}, s} b_{-\vec{p}, s'} \\ & \quad \left. + v_s(p)^{\dagger} \vec{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} v_{s'}(p) d_{\vec{p}, s} d_{\vec{p}, s'}^{\dagger} \right] . \end{aligned} \quad (3.10)$$

Lad nu $\hat{\mathbf{n}} = \vec{p}/|\vec{p}|$ og vis at helicitetsoperatoren i anden kvantisering er givet ved

$$\hat{h} = \sum_s \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \left(s b_{\vec{p}, s}^{\dagger} b_{\vec{p}, s} + s d_{\vec{p}, s}^{\dagger} d_{\vec{p}, s} \right) . \quad (3.11)$$

7) Argumentér for at havde vi brugt χ_s i stedet for χ_{-s} i $v_s(p)$ i ligning (3.2), da ville helicitetsoperatoren i ligning (3.11) være inkonsistent, idet heliciteten ville have det forkerte fortegn, når operatoren benyttes på tilstanden med negative energier, $v_s(p)$.

Besvarelse

1) Vælger vi spinfirvektoren som værende $s^\mu = (0, \hat{\mathbf{s}})$, hvor $\hat{\mathbf{s}}$ er en arbitrær treenhedsvektor, da ses det trivielt, at første kriterie er opfyldt,

$$s^\mu s_\mu = 0 \cdot 0 + \hat{\mathbf{s}} \cdot (-\hat{\mathbf{s}}) = -\hat{\mathbf{s}}^2 = -1, \quad (3.12)$$

grundet at Minkowski metrikken er $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1)$.

I partiklens hvilesystem (da partiklen har masse) har partiklen impuls $p^\mu = (E, \vec{0})$, hvormed det andet kriterie følger trivielt,

$$s^\mu p_\mu = 0 \cdot E + \hat{\mathbf{s}} \cdot (-\vec{0}) = 0. \quad (3.13)$$

Dermed kan vi i partiklens hvilesystem vælge spinfirvektoren som værende $s^\mu = (0, \hat{\mathbf{s}})$ hvor $\hat{\mathbf{s}}$ er en arbitrær treenhedsvektor.

2) Siden helicitet er defineret som projektionen af en partikels spin på retningen af dens impuls, og vi er interesserede i at undersøge partiklers helicitet, da giver det god mening at definere spintreenhedsvektoren som en funktion af impulstreenhedsvektoren $\vec{\mathbf{p}}/|\vec{\mathbf{p}}|$.

Ved dette valg af spinfirvektor, $s^\mu = (0, \vec{\mathbf{p}}/|\vec{\mathbf{p}}|)$, kan vi udføre et invers Lorentzboost, som vil tage os til systemet, hvor partiklen har impuls $\vec{\mathbf{p}}$ (som i ligning (1.5)):

$$\Lambda_\mu^\nu = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & |\vec{\mathbf{v}}|\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ |\vec{\mathbf{v}}|\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E/m & 0 & 0 & |\vec{\mathbf{p}}|/m \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ |\vec{\mathbf{p}}|/m & 0 & 0 & E/m \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

hvor vi har benyttet, at $\vec{\mathbf{p}} = \gamma m \vec{\mathbf{v}}$ og at energien er givet ved $E = \gamma m$ når vi arbejder i naturlige enheder ($c = 1$).

Udførelsen af boostet gøres ved først at rotere vores koordinatsystem således, at partiklens spin er i $\hat{\mathbf{z}}$ -retningen, dernæst udføre det inverse Lorentzboost (ligning (3.14)),

$$\Lambda_\mu^\nu s^\mu = \begin{bmatrix} E/m & 0 & 0 & p_z/m \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ p_z/m & 0 & 0 & E/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ p_z/|\vec{\mathbf{p}}_z| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_z^2/(|\vec{\mathbf{p}}_z|m) \\ 0 \\ 0 \\ p_z E/(|\vec{\mathbf{p}}_z|m) \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

hvor $\vec{\mathbf{p}}_z = \hat{\mathbf{z}}p_z$, og derefter udføre en invers rotation, således at spin igen er en kombination af de tre rumlige koordinater og ikke kun i $\hat{\mathbf{z}}$ -retningen,

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{p}}_z &\xrightarrow{\Lambda^{-1}} \vec{\mathbf{p}} = \hat{\mathbf{p}}|\vec{\mathbf{p}}|, \\ \Rightarrow \frac{\vec{\mathbf{p}}_z \cdot \vec{\mathbf{p}}_z}{|\vec{\mathbf{p}}_z|} &\xrightarrow{\Lambda^{-1}} \frac{\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{p}}}{|\vec{\mathbf{p}}|} = \frac{\hat{\mathbf{p}}|\vec{\mathbf{p}}| \cdot \hat{\mathbf{p}}|\vec{\mathbf{p}}|}{|\vec{\mathbf{p}}|} = (\hat{\mathbf{p}})^2|\vec{\mathbf{p}}| = 1|\vec{\mathbf{p}}| = |\vec{\mathbf{p}}|, \end{aligned} \quad (3.16)$$

hvormed vi får at

$$s^\mu = \left(\frac{|\vec{p}|}{m}, \frac{E}{m} \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \right) \quad (3.17)$$

hvilket er spinvektoren i ligning (3.4), som skulle vises.⁵

3) Først vil vi beregne $\gamma^5 \gamma^0 \vec{\gamma}$ og vise, at dette er definitionen af $\vec{\Sigma}$, ligning (3.3). Til dette benyttes gammamatricerne fra ligning (3.1), hvorved vi får

$$\begin{aligned} \gamma^5 \gamma^0 \vec{\gamma} &= \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \cdot \mathbb{1} + \mathbb{1} \cdot 0 & 0 \cdot 0 + \mathbb{1} \cdot (-\mathbb{1}) \\ \mathbb{1} \cdot \mathbb{1} + 0 \cdot 0 & \mathbb{1} \cdot 0 + 0 \cdot (-\mathbb{1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \cdot 0 - \mathbb{1} \cdot (-\vec{\sigma}) & 0 \cdot \vec{\sigma} - \mathbb{1} \cdot 0 \\ \mathbb{1} \cdot 0 + 0 \cdot (-\vec{\sigma}) & \mathbb{1} \cdot \vec{\sigma} + 0 \cdot 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{bmatrix} \\ &= \vec{\Sigma}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Som det næste skal den nyttige relation i ligning (3.5) bevises. Her er $\not{A} = \gamma_\mu A^\mu = \gamma^\mu A_\mu$ for en firvektor A^μ , og spinvektoren s^μ er givet af ligning (3.4).

⁵Det havde også været muligt at benytte Lorentztransformationen i en generel retning \hat{n} med størrelse v (når $\vec{v} = v\hat{n}$, som det følger af https://en.wikipedia.org/wiki/Lorentz_transformation#Vector_transformations). Denne transformation blev dog først fundet efter at ovenstående var udregnet.

$$\begin{aligned}
\gamma^5 \not{\epsilon} &= \gamma^5 \gamma^\mu s_\mu \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{bmatrix} \left(\gamma^0 \frac{|\vec{p}|}{m} - \vec{\gamma} \cdot \frac{E\vec{p}}{m|\vec{p}|} \right) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \frac{|\vec{p}|}{m} & 0 \\ 0 & -\frac{|\vec{p}|}{m} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \frac{E\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{m|\vec{p}|} \\ -\frac{E\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{m|\vec{p}|} & 0 \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{|\vec{p}|}{m} & -\frac{E\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{m|\vec{p}|} \\ \frac{E\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{m|\vec{p}|} & -\frac{|\vec{p}|}{m} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{E\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{m|\vec{p}|} & -\frac{|\vec{p}|}{m} \\ \frac{|\vec{p}|}{m} & -\frac{E\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{m|\vec{p}|} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{E\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{m|\vec{p}|} & -\frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2}{m|\vec{p}|} \\ \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2}{m|\vec{p}|} & -\frac{E\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{m|\vec{p}|} \end{bmatrix} \tag{3.19} \\
&= \mathbb{1} \left(\vec{\sigma} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \right) \begin{bmatrix} \frac{E}{m} & -\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{m} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{m} & -\frac{E}{m} \end{bmatrix} \\
&= \vec{\Sigma} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \left(\begin{bmatrix} \frac{E}{m} & 0 \\ 0 & -\frac{E}{m} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{m} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{m} & 0 \end{bmatrix} \right) \\
&= \vec{\Sigma} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \left(\gamma^0 \frac{E}{m} - \vec{\gamma} \cdot \frac{\vec{p}}{m} \right) \\
&= \vec{\Sigma} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \gamma^\mu \frac{p_\mu}{m} \\
&= \vec{\Sigma} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \not{p} ,
\end{aligned}$$

da det vides, at $|\vec{p}|^2 = (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2$ [4, ligning 3.2.39] og $p^\mu = (E, \vec{p})$.

4) Udregningen kan foretages ved brute force, men en hurtigere og mere elegant metode er at benytte de generelle relationer $(\not{p} - m)u_s(p) = 0$ og $(\not{p} + m)v_s(p) = 0$, som er blevet bevist i kurset [5, opgave 2.4]:

$$0 = (\not{p} - m)u_s(p) \quad \Rightarrow \quad \not{p}u_s(p) = mu_s(p) , \quad \text{og} \tag{3.20a}$$

$$0 = (\not{p} + m)v_s(p) \quad \Rightarrow \quad \not{p}v_s(p) = -mv_s(p) . \tag{3.20b}$$

Benytter vi nu den nyttige relation, ligning (3.5) med disse relationer (ligningerne (3.20a) og (3.20b)) samt bemærker, at vi grundet definitionen af $u_s(p)$ og $v_s(p)$ (ligning (3.2)) kan lade $\vec{\sigma} \cdot \vec{p}$ operere direkte på $\chi_{\pm s}$, hvor $\vec{p}\chi_s = |\vec{p}|\chi_s$ og $\vec{\sigma}\chi_s = s\chi_s$, så får vi

$$\begin{aligned}
 \gamma^5 \not{\vec{p}} u_s(p) &= \vec{\Sigma} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \frac{\not{p}}{m} u_s(p) \\
 &= \vec{\Sigma} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \frac{1}{m} (m u_s(p)) \\
 &= \vec{\Sigma} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} u_s(p) \\
 &= \frac{1}{|\vec{p}|} \mathbb{1} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} u_s(p) \\
 &= \mathbb{1} \frac{1}{|\vec{p}|} (|\vec{p}| s u_s(p)) \\
 &= s u_s(p) , \quad \text{og}
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma^5 \not{\vec{p}} v_s(p) &= \vec{\Sigma} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \frac{\not{p}}{m} v_s(p) \\
 &= \vec{\Sigma} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \frac{1}{m} (-m v_s(p)) \\
 &= -\vec{\Sigma} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} v_s(p) \\
 &= -\frac{1}{|\vec{p}|} \mathbb{1} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} v_s(p) \\
 &= -\mathbb{1} \frac{1}{|\vec{p}|} (|\vec{p}| (-s) v_s(p)) \\
 &= s v_s(p) ,
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

hvilket skulle vises.

5) Vi benytter igen de generelle relationer $(\not{p} - m)u_s(p) = 0$ og $(\not{p} + m)v_s(p) = 0$ fra [5, opgave 2.4], hvor vi denne gang ønsker at finde et udtryk for hhv. $u_s(p)$ og $v_s(p)$, hvilket gøres ved at isolere i ligningerne (3.20a) og (3.20b)

$$0 = (\not{p} - m)u_s(p) \quad \Rightarrow \quad u_s(p) = \frac{\not{p}}{m} u_s(p) , \quad \text{og} \tag{3.23a}$$

$$0 = (\not{p} + m)v_s(p) \quad \Rightarrow \quad v_s(p) = -\frac{\not{p}}{m} v_s(p) . \tag{3.23b}$$

Benytter vi nu at $h = \vec{\Sigma} \cdot \vec{p}/|\vec{p}|$, samt ligningerne (3.23a) og (3.23b) samt resultatet fra 4) (ligning (3.6a)), så får vi

$$\begin{aligned}
 h u_s(p) &= \vec{\Sigma} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} u_s(p) \\
 &= \vec{\Sigma} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \left(\frac{\not{p}}{m} u_s(p) \right) \\
 &= \gamma^5 \not{\vec{p}} u_s(p) \\
 &= s u_s(p) , \quad \text{og}
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned}
 hv_s(p) &= \vec{\Sigma} \cdot \frac{\vec{\mathbf{p}}}{|\vec{\mathbf{p}}|} v_s(p) \\
 &= \vec{\Sigma} \cdot \frac{\vec{\mathbf{p}}}{|\vec{\mathbf{p}}|} \left(-\frac{\not{p}}{m} v_s(p) \right) \\
 &= -\gamma^5 \not{p} v_s(p) \\
 &= -s v_s(p),
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

hvilket er ligning (3.7), som skulle vises.

6) Først indsættes ligning (3.8) i ligning (3.9), hvilket giver

$$\begin{aligned}
 &\int d^3\vec{\mathbf{x}} \psi^\dagger(x) \vec{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} \psi(x) \\
 &= \sum_{s,s'} \int \frac{d^3\vec{\mathbf{x}} d^3\vec{\mathbf{p}} d^3\vec{\mathbf{p}}'}{(2\pi)^6} \frac{1}{2\sqrt{\omega_{\vec{\mathbf{p}}} \omega_{\vec{\mathbf{p}}'}}} \\
 &\quad \times \left[\exp(-ipx) u_s(p) b_{\vec{\mathbf{p}},s} + \exp(ipx) v_s(p) d_{\vec{\mathbf{p}},s}^\dagger \right]^\dagger \vec{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} \\
 &\quad \times \left[\exp(-ip'x) u_{s'}(p') b_{\vec{\mathbf{p}}',s'} + \exp(ip'x) v_{s'}(p') d_{\vec{\mathbf{p}}',s'}^\dagger \right] \\
 &= \sum_{s,s'} \int \frac{d^3\vec{\mathbf{x}} d^3\vec{\mathbf{p}} d^3\vec{\mathbf{p}}'}{(2\pi)^6} \frac{1}{2\sqrt{\omega_{\vec{\mathbf{p}}} \omega_{\vec{\mathbf{p}}'}}} \\
 &\quad \times \left[b_{\vec{\mathbf{p}},s}^\dagger u_s^\dagger(p) \exp(ipx) + d_{\vec{\mathbf{p}},s} v_s^\dagger(p) \exp(-ipx) \right] \vec{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} \\
 &\quad \times \left[\exp(-ip'x) u_{s'}(p') b_{\vec{\mathbf{p}}',s'} + \exp(ip'x) v_{s'}(p') d_{\vec{\mathbf{p}}',s'}^\dagger \right] \\
 &= \sum_{s,s'} \int \frac{d^3\vec{\mathbf{x}} d^3\vec{\mathbf{p}} d^3\vec{\mathbf{p}}'}{(2\pi)^6} \frac{1}{2\sqrt{\omega_{\vec{\mathbf{p}}} \omega_{\vec{\mathbf{p}}'}}} \\
 &\quad \times \left[b_{\vec{\mathbf{p}},s}^\dagger u_s^\dagger(p) \exp(ipx) \vec{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} \exp(-ip'x) u_{s'}(p') b_{\vec{\mathbf{p}}',s'} \right. \\
 &\quad + b_{\vec{\mathbf{p}},s}^\dagger u_s^\dagger(p) \exp(ipx) \vec{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} \exp(ip'x) v_{s'}(p') d_{\vec{\mathbf{p}}',s'}^\dagger \\
 &\quad + d_{\vec{\mathbf{p}},s} v_s^\dagger(p) \exp(-ipx) \vec{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} \exp(-ip'x) u_{s'}(p') b_{\vec{\mathbf{p}}',s'} \\
 &\quad \left. + d_{\vec{\mathbf{p}},s} v_s^\dagger(p) \exp(-ipx) \vec{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} \exp(ip'x) v_{s'}(p') d_{\vec{\mathbf{p}}',s'}^\dagger \right] \\
 &= \sum_{s,s'} \int \frac{d^3\vec{\mathbf{x}} d^3\vec{\mathbf{p}} d^3\vec{\mathbf{p}}'}{(2\pi)^6} \frac{1}{2\sqrt{\omega_{\vec{\mathbf{p}}} \omega_{\vec{\mathbf{p}}'}}} \\
 &\quad \times \left[u_s^\dagger(p) \vec{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} u_{s'}(p') b_{\vec{\mathbf{p}},s}^\dagger b_{\vec{\mathbf{p}}',s'} \exp(i[p-p']x) \right. \\
 &\quad + u_s^\dagger(p) \vec{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} v_{s'}(p') b_{\vec{\mathbf{p}},s}^\dagger d_{\vec{\mathbf{p}}',s'}^\dagger \exp(i[p+p']x) \\
 &\quad + v_s^\dagger(p) \vec{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} u_{s'}(p') d_{\vec{\mathbf{p}},s} b_{\vec{\mathbf{p}}',s'} \exp(-i[p+p']x) \\
 &\quad \left. + v_s^\dagger(p) \vec{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} v_{s'}(p') d_{\vec{\mathbf{p}},s} d_{\vec{\mathbf{p}}',s'}^\dagger \exp(-i[p-p']x) \right].
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

Dernæst udføres integrationen mht. $\vec{\mathbf{x}}$ i ligning (3.26), hvilket giver deltafunktioner i impuls, hvilke dernæst integreres over ved $\vec{\mathbf{p}}'$ integration, således at hele udtrykket

blot afhænger af $\vec{\mathbf{p}}$:

$$\begin{aligned}
& \int d^3\vec{\mathbf{x}} \psi^\dagger(x) \vec{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} \psi(x) \\
&= \sum_{s,s'} \int \frac{d^3\vec{\mathbf{x}} d^3\vec{\mathbf{p}} d^3\vec{\mathbf{p}}'}{(2\pi)^6} \frac{1}{2\sqrt{\omega_{\vec{\mathbf{p}}}\omega_{\vec{\mathbf{p}}'}}} \\
&\quad \times \left[u_s^\dagger(p) \vec{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} u_{s'}(p') b_{\vec{\mathbf{p}},s}^\dagger b_{\vec{\mathbf{p}}',s'} \exp(i[p-p']x) \right. \\
&\quad + u_s^\dagger(p) \vec{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} v_{s'}(p') b_{\vec{\mathbf{p}},s}^\dagger d_{\vec{\mathbf{p}}',s'}^\dagger \exp(i[p+p']x) \\
&\quad + v_s^\dagger(p) \vec{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} u_{s'}(p') d_{\vec{\mathbf{p}},s} b_{\vec{\mathbf{p}}',s'} \exp(-i[p+p']x) \\
&\quad \left. + v_s^\dagger(p) \vec{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} v_{s'}(p') d_{\vec{\mathbf{p}},s} d_{\vec{\mathbf{p}}',s'}^\dagger \exp(-i[p-p']x) \right] \\
&= \sum_{s,s'} \int \frac{d^3\vec{\mathbf{p}} d^3\vec{\mathbf{p}}'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{\omega_{\vec{\mathbf{p}}}\omega_{\vec{\mathbf{p}}'}}} \\
&\quad \times \left[u_s^\dagger(p) \vec{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} u_{s'}(p') b_{\vec{\mathbf{p}},s}^\dagger b_{\vec{\mathbf{p}}',s'} \exp(i[E_{\vec{\mathbf{p}}} - E_{\vec{\mathbf{p}}'}]t) \delta^3(\vec{\mathbf{p}} - \vec{\mathbf{p}}') \right. \\
&\quad + u_s^\dagger(p) \vec{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} v_{s'}(p') b_{\vec{\mathbf{p}},s}^\dagger d_{\vec{\mathbf{p}}',s'}^\dagger \exp(i[E_{\vec{\mathbf{p}}} + E_{\vec{\mathbf{p}}'}]t) \delta^3(\vec{\mathbf{p}} + \vec{\mathbf{p}}') \\
&\quad + v_s^\dagger(p) \vec{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} u_{s'}(p') d_{\vec{\mathbf{p}},s} b_{\vec{\mathbf{p}}',s'} \exp(-i[E_{\vec{\mathbf{p}}} + E_{\vec{\mathbf{p}}'}]t) \delta^3(\vec{\mathbf{p}} + \vec{\mathbf{p}}') \\
&\quad \left. + v_s^\dagger(p) \vec{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} v_{s'}(p') d_{\vec{\mathbf{p}},s} d_{\vec{\mathbf{p}}',s'}^\dagger \exp(-i[E_{\vec{\mathbf{p}}} - E_{\vec{\mathbf{p}}'}]t) \delta^3(\vec{\mathbf{p}} - \vec{\mathbf{p}}') \right] \quad (3.27) \\
&= \sum_{s,s'} \int \frac{d^3\vec{\mathbf{p}}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{\omega_{\vec{\mathbf{p}}}}} \\
&\quad \times \left[\sqrt{\omega_{\vec{\mathbf{p}}}} u_s^\dagger(p) \vec{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} u_{s'}(p) b_{\vec{\mathbf{p}},s}^\dagger b_{\vec{\mathbf{p}},s'} \exp(i[E_{\vec{\mathbf{p}}} - E_{\vec{\mathbf{p}}}]t) \right. \\
&\quad + \sqrt{\omega_{-\vec{\mathbf{p}}}} u_s^\dagger(p) \vec{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} v_{s'}(-p) b_{\vec{\mathbf{p}},s}^\dagger d_{-\vec{\mathbf{p}},s'}^\dagger \exp(i[E_{\vec{\mathbf{p}}} + E_{-\vec{\mathbf{p}}}]t) \\
&\quad + \sqrt{\omega_{-\vec{\mathbf{p}}}} v_s^\dagger(p) \vec{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} u_{s'}(-p) d_{\vec{\mathbf{p}},s} b_{-\vec{\mathbf{p}},s'} \exp(-i[E_{\vec{\mathbf{p}}} + E_{-\vec{\mathbf{p}}}]t) \\
&\quad \left. + \sqrt{\omega_{\vec{\mathbf{p}}}} v_s^\dagger(p) \vec{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} v_{s'}(p) d_{\vec{\mathbf{p}},s} d_{\vec{\mathbf{p}},s'}^\dagger \exp(-i[E_{\vec{\mathbf{p}}} - E_{\vec{\mathbf{p}}}]t) \right] \\
&= \sum_{s,s'} \int \frac{d^3\vec{\mathbf{p}}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\vec{\mathbf{p}}}} \left[u_s^\dagger(p) \vec{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} u_{s'}(p) b_{\vec{\mathbf{p}},s}^\dagger b_{\vec{\mathbf{p}},s'} \right. \\
&\quad + u_s^\dagger(p) \vec{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} v_{s'}(-p) b_{\vec{\mathbf{p}},s}^\dagger d_{-\vec{\mathbf{p}},s'}^\dagger \exp(2iE_{\vec{\mathbf{p}}}t) \\
&\quad + v_s^\dagger(p) \vec{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} u_{s'}(-p) d_{\vec{\mathbf{p}},s} b_{-\vec{\mathbf{p}},s'} \exp(-2iE_{\vec{\mathbf{p}}}t) \\
&\quad \left. + v_s^\dagger(p) \vec{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} v_{s'}(p) d_{\vec{\mathbf{p}},s} d_{\vec{\mathbf{p}},s'}^\dagger \right]
\end{aligned}$$

hvor det er blevet benyttet, at $E_{-\vec{\mathbf{p}}} = \sqrt{(-\vec{\mathbf{p}})^2 + m^2} = \sqrt{\vec{\mathbf{p}}^2 + m^2} = E_{\vec{\mathbf{p}}}$ og ligeledes for $\omega_{\vec{\mathbf{p}}}$.⁶ Dermed er ligning (3.10) vist.

Lader vi nu $\hat{\mathbf{n}} = \vec{\mathbf{p}}/|\vec{\mathbf{p}}|$, da er $\vec{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \vec{\Sigma} \cdot \vec{\mathbf{p}}/|\vec{\mathbf{p}}| = h$ altså helicitetsoperatoren før kvantisering. Indsætter vi nu dette i ligning (3.27) og husker hvordan h virker på u

⁶Efter integrationen over $\vec{\mathbf{p}}'$, hvilket lod $\vec{\mathbf{p}}' \rightarrow \pm\vec{\mathbf{p}}$, da har vi ladet $p' \rightarrow \pm p$ også, idet at $p' = (E_{\vec{\mathbf{p}}'}, \vec{\mathbf{p}}') \xrightarrow{\vec{\mathbf{p}}' \rightarrow \pm\vec{\mathbf{p}}} (E_{\pm\vec{\mathbf{p}}}, \vec{\mathbf{p}}) = (E_{\vec{\mathbf{p}}}, \vec{\mathbf{p}}) = p$.

og v fra ligning (3.7) (opgave 5)), så får vi

$$\begin{aligned}
\hat{h} &= \int d^3\vec{x} \psi^\dagger(x) h \psi(x) \\
&= \sum_{s,s'} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\vec{p}}} \left[u_s^\dagger(p) h u_{s'}(p) b_{\vec{p},s}^\dagger b_{\vec{p},s'} \right. \\
&\quad + u_s^\dagger(p) h v_{s'}(-p) b_{\vec{p},s}^\dagger d_{-\vec{p},s'}^\dagger \exp(2iE_{\vec{p}}t) \\
&\quad + v_s^\dagger(p) h u_{s'}(-p) d_{\vec{p},s} b_{-\vec{p},s'} \exp(-2iE_{\vec{p}}t) \\
&\quad \left. + v_s^\dagger(p) h v_{s'}(p) d_{\vec{p},s} d_{\vec{p},s'}^\dagger \right] \\
&= \sum_{s,s'} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\vec{p}}} \left[u_s^\dagger(p) s u_{s'}(p) b_{\vec{p},s}^\dagger b_{\vec{p},s'} \right. \\
&\quad + u_s^\dagger(p) (-s) v_{s'}(-p) b_{\vec{p},s}^\dagger d_{-\vec{p},s'}^\dagger \exp(2iE_{\vec{p}}t) \\
&\quad + v_s^\dagger(p) s u_{s'}(-p) d_{\vec{p},s} b_{-\vec{p},s'} \exp(-2iE_{\vec{p}}t) \\
&\quad \left. + v_s^\dagger(p) (-s) v_{s'}(p) d_{\vec{p},s} d_{\vec{p},s'}^\dagger \right] \tag{3.28} \\
&= \sum_{s,s'} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{s}{2\omega_{\vec{p}}} \left[u_s^\dagger(p) u_{s'}(p) b_{\vec{p},s}^\dagger b_{\vec{p},s'} \right. \\
&\quad - \cancel{u_s^\dagger(p) v_{s'}(-p)} \xrightarrow{0} b_{\vec{p},s}^\dagger d_{-\vec{p},s'}^\dagger \exp(2iE_{\vec{p}}t) \\
&\quad + \cancel{v_s^\dagger(p) u_{s'}(-p)} \xrightarrow{0} d_{\vec{p},s} b_{-\vec{p},s'} \exp(-2iE_{\vec{p}}t) \\
&\quad \left. - v_s^\dagger(p) v_{s'}(p) d_{\vec{p},s} d_{\vec{p},s'}^\dagger \right] \\
&= \sum_{s,s'} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{s}{2\omega_{\vec{p}}} \left[2\omega_{\vec{p}} \delta_{s,s'} b_{\vec{p},s}^\dagger b_{\vec{p},s'} - 2\omega_{\vec{p}} \delta_{s,s'} d_{\vec{p},s} d_{\vec{p},s'}^\dagger \right] \\
&= \sum_s \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} s \left[b_{\vec{p},s}^\dagger b_{\vec{p},s} - d_{\vec{p},s} d_{\vec{p},s}^\dagger \right] \\
&= \sum_s \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} s \left[b_{\vec{p},s}^\dagger b_{\vec{p},s} + d_{\vec{p},s}^\dagger d_{\vec{p},s} - \left\{ d_{\vec{p},s}, d_{\vec{p},s}^\dagger \right\} \right],
\end{aligned}$$

hvor vi har benyttet standardnormaliseringen af Diracspinorerne [5, lign. 44–47],

$$u_s^\dagger(p) u_{s'}(p) = 2\omega_{\vec{p}} \delta_{s,s'}, \tag{3.29a}$$

$$v_s^\dagger(p) v_{s'}(p) = 2\omega_{\vec{p}} \delta_{s,s'}, \tag{3.29b}$$

$$u_s^\dagger(p) v_{s'}(-p) = 0, \quad \text{og} \tag{3.29c}$$

$$v_s^\dagger(p) u_{s'}(-p) = 0, \tag{3.29d}$$

samt den fermioniske antikommutatorrelation for kreations- og annihilationsoperato-
rer

$$\left\{ d_{\vec{p},s}, d_{\vec{p},s}^\dagger \right\} = d_{\vec{p},s} d_{\vec{p},s}^\dagger + d_{\vec{p},s}^\dagger d_{\vec{p},s}. \tag{3.30}$$

Hvis vi nu kigger på sidste led af ligning (3.28) og benytter at $\{d_{\vec{p},s}, d_{\vec{p},s}^\dagger\} = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}) \delta_{s,s}$ [5, lign. 37], får vi

$$\begin{aligned} \sum_s \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} s \{d_{\vec{p},s}, d_{\vec{p},s}^\dagger\} &= \sum_s \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} s (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}) \delta_{s,s} \\ &= \sum_s s \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{0}) \\ &= [1 - 1] \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{0}) \\ &= 0, \end{aligned} \tag{3.31}$$

da integralet blot giver en konstant – godt nok en uendelig, men stadig konstant – hvorfor hele dette led går ud grundet projektionen $s = \pm 1$, som summeres over. Dermed bliver helicitetsoperatoren i anden kvantisering

$$\hat{h} = \sum_s \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} s \left[b_{\vec{p},s}^\dagger b_{\vec{p},s} + d_{\vec{p},s}^\dagger d_{\vec{p},s} \right], \tag{3.32}$$

hvilket er ligning (3.11), som skulle vises.

7) Havde vi valgt at benytte $\chi_{-s} \rightarrow \chi_s$ i udtrykket for $v_s(p)$ i ligning (3.2), da ville dette give en ændring i egenværdien beregnet i **4)**, således at $\gamma^5 \not{v}_s(p) = -s v_s(p)$, hvilket igen ville ændre egenværdien for heliciteten beregnet i **5)** til $h v_s(p) = s v_s(p)$. Dette ændrer fortegnet for andet led i helicitetsoperatoren i anden kvantisering, ligning (3.11), således, at den nu vil være

$$\hat{h} = \sum_s \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \left(s b_{\vec{p},s}^\dagger b_{\vec{p},s} - s d_{\vec{p},s}^\dagger d_{\vec{p},s} \right). \tag{3.33}$$

Idet at helicitetsoperatoren effektivt set tæller antallet af partikler ($b_{\vec{p},s}^\dagger b_{\vec{p},s}$) og antipartikler ($d_{\vec{p},s}^\dagger d_{\vec{p},s}$) i de forskellige helicitetstilstande, da vil den ”modificerede” helicitetsoperator (ligning (3.33)) nu tælle antipartiklerne som havende negativ helicitet. Der er dog ingenting som fortæller os, at partikler og deres tilhørende antipartikler skulle have modsat helicitet, mens det modsatte – at heliciteten er den samme af de to – er forventet. Dermed ville ændringen $\chi_{-s} \rightarrow \chi_s$ gøre helicitetsoperatoren, der nu er ligning (3.33), inkonsistent.

4 Kvanteelektrodynamik med elektroner

Betragt Lagrangedensiteten for elektroner, hvilken kaldes Dirac Lagrangedensiteten,

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial - m)\psi, \quad (4.1)$$

hvor $\partial = \gamma^\mu \partial_\mu$ og γ_μ er Diracmatricerne af dimension 4×4 .

1) Betragt transformationen $\psi \rightarrow \exp[-ie\theta(x)]\psi$, hvor e er elektronens ladning og $\theta(x)$ er en skalarfunktion, som afhænger af rum og tid (betegnet samlet ved koordinatet $x = (\vec{x}, t)$). Benyt minimal substitution for et felt med ladning $q = -e$,

$$\partial^\mu \rightarrow D^\mu = \partial^\mu - ieA^\mu, \quad (4.2)$$

i Diracs Lagrangedensitet og vis at denne nu er gaugeinvariant. Hvad er den nødvendige transformation for A^μ ?

2) I matematik betegner $U(1)$ (den 1×1 unitære matrixgruppe) gruppen af de komplekse tal på enhedscirklen (modulo 1). Forklar hvorfor det giver mening at betegne gauge transformationen i 1) og den tilhørende teori, kvanteelektrodynamikken (QED), som en $U(1)$ -gaugeteori.

3) Vis at Lagrangedensiteten for vekselvirkningen (eng: interaction Lagrangian density), hvilken vi opnår ved brug af gaugeinvariansprincippet (eng: principle of gauge invariance), er på strømvektorfeldtsformen

$$\mathcal{L}_I = e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu = -J_\mu A^\mu. \quad (4.3)$$

Vis ydermere at $J_\mu(x) = -e\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)$ er en bevaret strøm i den forstand at $\partial^\mu J_\mu(x) = 0$. Hvordan transformerer Lagrangedensiteten for vekselvirkningen under en gaugetransformation? Tillader denne transformation teorien at forblive gaugeinvariant?

(Hint: Betragt virkningen (eng: action) genereret af Lagrangedensiteten for vekselvirkningen.)

4) Diracfeltet kan ekspanderes i normal modes ifølge

$$\psi_\alpha(x) = \sum_\lambda \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \left(b_{\vec{p},\lambda} u(\vec{p}, \lambda)_\alpha \exp[-ipx] + d_{\vec{p},\lambda}^\dagger v(\vec{p}, \lambda)_\alpha \exp[ipx] \right), \quad (4.4)$$

hvor λ er heliciteten og $px = p_\mu x^\mu$. b og d er operatorer som kreerer hhv. fermioniske partikler og antipartikler med en given impuls \vec{p} og helicitet λ . Vis at

$$-e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi = \sum_{\vec{p}, \vec{p}', \lambda, \lambda'} \sum_{n=1}^4 j_\mu^{(n)}(p, \lambda, p', \lambda', x) = \sum_{n=1}^4 j_\mu^{(n)}(x), \quad (4.5)$$

og find de fire led $j_\mu^{(n)}$ eksplicit.

5) Udled de følgende matrixelementer ved brug af strømmen fra 4):

$$\langle e^-, \vec{p}', \lambda' | j_\mu^{(1)} | e^-, \vec{p}, \lambda \rangle = -e\bar{u}(\vec{p}', \lambda') \gamma_\mu u(\vec{p}, \lambda) \exp(i[p' - p]x) , \quad (4.6a)$$

$$\langle e^+, \vec{p}', \lambda' | j_\mu^{(2)} | e^+, \vec{p}, \lambda \rangle = e\bar{v}(\vec{p}, \lambda) \gamma_\mu v(\vec{p}', \lambda') \exp(i[p' - p]x) , \quad (4.6b)$$

$$\langle 0 | j_\mu^{(3)} | e^-, \vec{p}, \lambda; e^+, \vec{p}', \lambda' \rangle = -e\bar{v}(\vec{p}', \lambda') \gamma_\mu u(\vec{p}, \lambda) \exp(-i[p' + p]x) , \quad (4.6c)$$

$$\langle e^-, \vec{p}', \lambda'; e^+, \vec{p}, \lambda | j_\mu^{(4)} | 0 \rangle = -e\bar{u}(\vec{p}', \lambda') \gamma_\mu v(\vec{p}, \lambda) \exp(i[p' + p]x) . \quad (4.6d)$$

Giv en fysisk fortolkning af de fire udtryk (det kan være en idé at tegne hver af udtrykkene som en del af et Feynmandiagram).

6) Matrixelementerne i 5) kaldes overgangsstrømme (eng: transition currents), $J_\mu^{fi}(x)$. Vis eksplicit at de er bevarede strømme ved at benytte gradientoperatoren ∂^μ på hver af dem.

7) Argumentér for at når vi beregner fysiske processer i QED med vekselvirkningen fra ligning (4.3), så vil vi altid få led på formen $J_\mu^{fi}(0)\varepsilon^\mu(\sigma)$, hvor $\varepsilon^\mu(\sigma)$ er en fotonens polarisationstilstand indiceret ved σ . Argumentér yderligere for at når vi kvadrerer amplituden for en given proces, så får vi udtryk på formen

$$|J_\mu^{fi}(0)\varepsilon^\mu(\sigma)|^2 = \varepsilon^\mu(\sigma)^* \varepsilon^\nu(\sigma) J_\mu^{fi}(0)^* J_\nu^{fi}(0) . \quad (4.7)$$

8) Ofte bliver vi nødt til at summere over uobserverede fotonpolarisationstilstande; vi summerer altså over σ ,

$$\left[\sum_\sigma \varepsilon^\mu(\sigma)^* \varepsilon^\nu(\sigma) \right] J_\mu^{fi}(0)^* J_\nu^{fi}(0) . \quad (4.8)$$

Antag at impulsoverførslen (eng: momentum transfer) for strømmen J_μ^{fi} er langs $\hat{\mathbf{z}}$ -retningen, altså $q = (q_0, 0, 0, q_0)$. Vis at vi for en reel foton har

$$\sum_\sigma \varepsilon^\mu(\sigma)^* \varepsilon^\nu(\sigma) = \delta_1^\mu \delta_1^\nu + \delta_2^\mu \delta_2^\nu , \quad (4.9)$$

hvor vi har benyttet den relativistiske konvention om at $\mu = 0$ betegner tidsretningen og $\mu = 1, 2, 3$ betegner de rummelige retninger hhv. $\hat{\mathbf{x}}$ -, $\hat{\mathbf{y}}$ - og $\hat{\mathbf{z}}$ -retningen.

9) Vis at for en reel foton gør det sig gældende, at

$$\left[\sum_\sigma \varepsilon^\mu(\sigma)^* \varepsilon^\nu(\sigma) \right] J_\mu^{fi}(0)^* J_\nu^{fi}(0) = -g^{\mu\nu} J_\mu^{fi}(0)^* J_\nu^{fi}(0) . \quad (4.10)$$

10) Under hvilke omstændigheder medfører ligning (4.10) følgende udtryk

$$\sum_\sigma \varepsilon^\mu(\sigma)^* \varepsilon^\nu(\sigma) = -g^{\mu\nu} ? \quad (4.11)$$

Hvilke yderligere led kunne opstå for en reel foton, hvor $q^2 = 0$? Hvilke yderligere led kunne opstå for en virtuel foton, hvor $q^2 \neq 0$?

11) Betragt spredningen af elektroner på myoner, $e^- + \mu^- \rightarrow e^- + \mu^-$. Tegn Feynmandiagrammet til anden orden for denne proces.

12) Vis at S-matricen til anden orden for elektron-myon-spredningsprocessen kan skrives som

$$S_{fi}^{(2)} = (-i)^2 \int d^4x_1 d^4x_2 J_\mu^{e^-}(x_1) J_\nu^{\mu^-}(x_2) \langle 0 | T [A^\mu(x_1) A^\nu(x_2)] | 0 \rangle . \quad (4.12)$$

Opskriv eksplicit elektron- og myonstrømmen (eng: electron and muon current) ved brug af overgangsstrømmene fra 5). Sørg for at mærke alle dele nødvendige for at specificere start- og sluttilstandene korrekt.

13) Ved at benytte Klein-Gordon-propagatoren som analogi, argumentér for at vi kan benytte den følgende form for fotonpropagatoren

$$G^{\mu\nu}(q) = \int d^4x \exp(iqx) \langle 0 | T [A^\mu(x) A^\nu(0)] | 0 \rangle = \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2} \quad (4.13)$$

i udtrykket for $S_{fi}^{(2)}$.

14) Definer som sædvanligt $S_{fi}^{(2)} = -i\mathcal{M}_{fi}(2\pi)^4\delta^4(p_f - p_i)$. Vis at

$$-i\mathcal{M}_{fi} = \left(-iJ_\mu^{e^-}(0)\right) \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2} \left(-iJ_\nu^{\mu^-}(0)\right) . \quad (4.14)$$

Udtryk impulsoverførslen q som funktion af start- og sluttilstandsimpulsen.

15) Når vi kvadrerer amplituden, summerer over sluttilstande og tager gennemsnittet af starttilstandene får vi

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{8e^4}{q^4} ([p_1 p_2] [p_3 p_4] + [p_1 p_4] [p_2 p_3]) \quad (4.15)$$

i grænsen hvor alle impulser er meget større end masserne af både elektronen og myonen. Her er skalarproduktet af firvektorerne betegnet som $pp' = p_\mu p'^\mu = p^\mu p'_\mu$. Vis at i denne grænse kan vi skrive

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{8e^4}{q^4} ([p_1 p_2]^2 + [p_1 p_4]^2) . \quad (4.16)$$

Vi betegner nu vinklen mellem den indkomne og den udadgående elektron i massemidtpunktssystemet (eng: center-of-mass frame) θ . Vis at

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{2e^4}{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} \left[1 + \cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] . \quad (4.17)$$

16) Vis at tværsnittet (eng: cross section) i massemidtspunktssystemet er givet ved

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{CM}} = \frac{\alpha^2}{2E_{\text{CM}}^2} \frac{1 + \cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}, \quad (4.18)$$

hvor E_{CM} er den totale energi i massemidtspunktssystemet og α er finstrukturkonstanten. Slå ”Tværsnit for Rutherfordspredning” op et sted (f.eks. i lærebog eller online). Sammenlign det fundne resultat (ligning (4.18)) med udtrykket for Rutherfordspredningen. Vis at udtrykkene har samme funktionsopførsel (eng: functional behavior) i grænsen $\theta \rightarrow 0$.

17) Brug alle informationerne, som du har fået fra foregående delopgaver, til at nedskrive Feynmanreglerne for QED for træiveau-Feynmandiagrammer (aka. *uden* loops), altså skal du finde ud af hvilke faktorer, som er forbundet med start- og slutttilstande for partikler og antipartikler, hvilke faktorer, som er forbundet med knudepunkter (eng: vertices), og hvilke faktorer, som er forbundet med propagatorer.

Besvarelse

1) Vi betragter Diracs Lagrangedensitet fra ligning (4.1), hvor princippet for minimal substitution med $q = -e$ er blevet benyttet idet Lagrangedensiteten ellers ikke ville være invariant under transformationen $\psi \rightarrow \exp[-ie\theta(x)]\psi$ for $x = (\vec{x}, t)$ værende en firvektor (der vil være et ekstra led fra differentialoperatoren):

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\cancel{D} - m)\psi \rightarrow \bar{\psi}(i\cancel{D} - m)\psi = \bar{\psi}(i\gamma_\mu[\partial^\mu - ieA^\mu] - m)\psi, \quad (4.19)$$

hvor D^μ er den gaugekovariante differentialoperator, $\cancel{D} = \gamma_\mu \partial^\mu$ og $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ er den Diracadjungerede (Dirac adjunct). Idet minimal substitutionen indføres, indføres også et nyt felt, A^μ , hvilket også transformerer under førnævnte transformation, $A^\mu \rightarrow A'^\mu$.

Opgaven kan nu løses på en af følgende måder: Antag at transformationen af A^μ er kendt og vis at denne gør Lagrangedensiteten invariant, eller antag at Lagrangedensiteten er invariant og find transformationen af A^μ . Her vælges den sidste af de to metoder.

Vi betragter transformationen

$$\psi \rightarrow \psi' = \mathcal{U}\psi = \exp(-ie\theta[x])\psi \quad (4.20)$$

for $x = (\vec{x}, t)$ værende en firvektor. Det konjugerede felt transformerer dermed som⁷

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = (\psi')^\dagger \gamma^0 = (\mathcal{U}\psi)^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger \mathcal{U}^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger \gamma^0 \mathcal{U}^\dagger = \bar{\psi} \exp(ie\theta[x]). \quad (4.21)$$

⁷Hermitisk konjugering af et produkt af operatorer er produktet af hver operator Hermitisk konjugeret og i omvendt orden, altså $(XY)^\dagger = Y^\dagger X^\dagger$.

Benyttes disse transformationer fås Lagrangedensitetens transformation til (hvor $\theta(x)$ betegnes θ for overskuelighed)

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' &= \bar{\psi}' (i\gamma_\mu [\partial^\mu - ieA'^\mu] - m) \psi' \\ &= \bar{\psi} \exp(ie\theta) (i\gamma_\mu [\partial^\mu - ieA'^\mu] - m) \exp(-ie\theta) \psi \\ &= \bar{\psi} \exp(ie\theta) \left(i\gamma_\mu \left[\{ -ie \exp(-ie\theta) (\partial^\mu \theta) + \exp(-ie\theta) \partial^\mu \} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - ieA'^\mu \exp(-ie\theta) \right] - \exp(-ie\theta) m \right) \psi \\ &= \bar{\psi} \mathbb{1} (\gamma_\mu e (\partial^\mu \theta) + i\gamma_\mu \partial^\mu - m) \psi + \bar{\psi} \exp(ie\theta) \gamma_\mu e A'^\mu \exp(-ie\theta) \psi\end{aligned}\tag{4.22}$$

Lagrangedensiteten er invariant hvis $\mathcal{L}' = \mathcal{L}$, hvorfor

$$\begin{aligned}0 &= \mathcal{L}' - \mathcal{L} \\ &= \bar{\psi} (\gamma_\mu e (\partial^\mu \theta) + i\gamma_\mu \partial^\mu - m) \psi + \bar{\psi} \exp(ie\theta) \gamma_\mu e A'^\mu \exp(-ie\theta) \psi \\ &\quad - \bar{\psi} (i\gamma_\mu [\partial^\mu - ieA'^\mu] - m) \psi \\ &= \bar{\psi} e \gamma_\mu [\partial^\mu \theta - A'^\mu + \exp(ie\theta) A'^\mu \exp(-ie\theta)] \psi.\end{aligned}\tag{4.23}$$

Dette medfører, at

$$A'^\mu - (\partial^\mu \theta) = \exp(ie\theta) A'^\mu \exp(-ie\theta),\tag{4.24}$$

idet ψ er en arbitrær bølgefunktion og ladningen e kan være forskellig fra 0. Vi kan dermed opskrive A'^μ som

$$\begin{aligned}A'^\mu &= \mathbb{1} A'^\mu \mathbb{1} \\ &= \exp(-ie\theta) \exp(ie\theta) A'^\mu \exp(-ie\theta) \exp(ie\theta) \\ &= \exp(-ie\theta) [A'^\mu - (\partial^\mu \theta)] \exp(ie\theta) \\ &= \exp(-ie\theta) \exp(ie\theta) [A'^\mu - (\partial^\mu \theta)] \\ &= \mathbb{1} [A'^\mu - (\partial^\mu \theta)] \\ &= A'^\mu - (\partial^\mu \theta).\end{aligned}\tag{4.25}$$

For at Lagrangedensiteten er invariant under transformationen $\psi \rightarrow \exp(-ie\theta[x]) \psi$ skal transformationen af A'^μ altså være (ligning (4.25))

$$A'^\mu \rightarrow A'^\mu = A'^\mu - [\partial^\mu \theta(x)].\tag{4.26}$$

2) Transformationen

$$\psi \rightarrow \psi' = \mathcal{U} \psi = \exp(-ie\theta[x]) \psi\tag{4.27}$$

for $x = (\vec{x}, t)$ værende en firvektor, er en $U(1)$ -gaugeteori, da transformationen har modulo 1

$$|\mathcal{U}| = \mathcal{U} \mathcal{U}^* = \exp(-ie\theta[x]) \exp(ie\theta[x]) = \mathbb{1}.\tag{4.28}$$

Idet transformationen er en $U(1)$ -transformation giver det mening, at teorien dannet ud fra denne transformation kaldes ved transformationens symmetri, altså her en $U(1)$ -teori.

3) Vekselvirkningeledet i Lagrangedensiteten er det led, hvor de to felter interagerer, så med Lagrangedensiteten fra ligning (4.1) med minimal substitution ligning (4.2) fås ligning (4.19)

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \bar{\psi}(i\gamma_\mu[\partial^\mu - ieA^\mu] - m)\psi \\ &= i\bar{\psi}\gamma_\mu\partial^\mu\psi - m\bar{\psi}\psi + e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu \\ &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I ,\end{aligned}\tag{4.29}$$

hvor \mathcal{L}_0 er den frie Lagrangedensitet og \mathcal{L}_I er Lagrangedensiteten for vekselvirkningen, hvilken er

$$\mathcal{L}_I = e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu = -J_\mu A^\mu ,\tag{4.30}$$

når $J_\mu(x) = -e\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)$.

Som det næste skal det vises, at $J_\mu(x)$ er en bevaret strøm, hvilket vil sige, at $\partial^\mu J_\mu = 0$. Dette vises ved først at differentiere strømmen og benytte Diracligningen $0 = (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi$ og dens Hermitiskkonjugerede.

For at beregne den Hermitiskkonjugerede af Diracligningen, da starter vi med at beregne den Hermitiskkonjugerede af $\gamma^0\gamma^\mu$, hvilket gøres ud fra kendskab til udledningen af Diracmatricerne, nemlig at

$$\gamma^0 = \beta \quad \text{og} \quad \gamma^i = \beta\alpha_i \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} ,\tag{4.31}$$

hvor α_i og β er Hermitiske matricer. Dermed får vi at

$$\gamma^0(\gamma^\mu)^\dagger = \begin{bmatrix} \gamma^0(\gamma^0)^\dagger \\ \gamma^0(\gamma^i)^\dagger \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta(\beta)^\dagger \\ \beta(\beta\alpha_i)^\dagger \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta\beta \\ \beta(\alpha_i)^\dagger(\beta)^\dagger \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta\beta \\ \beta\alpha_i\beta \end{bmatrix} = \gamma^\mu\gamma^0 ,\tag{4.32}$$

og betragter man $\gamma^0 = \text{diag}(\mathbb{1}, -\mathbb{1})$ kan det ses, at $(\gamma^0)^2 = \mathbb{1}$. Benytter vi nu dette til at beregne den Hermitiskkonjugerede af Diracligning fås

$$\begin{aligned}0 &= \left[(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \right]^\dagger \\ &= (i\gamma^\mu[\partial_\mu\psi] - m\psi)^\dagger \\ &= -i[\partial_\mu\psi^\dagger](\gamma^\mu)^\dagger - m\psi^\dagger \\ &= -i[\partial_\mu\psi^\dagger]\mathbb{1}(\gamma^\mu)^\dagger - m\psi^\dagger\mathbb{1} \\ &= -i[\partial_\mu\psi^\dagger]\gamma^0\gamma^0(\gamma^\mu)^\dagger - m\psi^\dagger\gamma^0\gamma^0 \\ &= \left\{ -i[\partial_\mu\bar{\psi}]\gamma^\mu - m\bar{\psi} \right\} \gamma^0 \\ &= -i\left\{ [\partial_\mu\bar{\psi}]\gamma^\mu - im\bar{\psi} \right\} \gamma^0 \\ &\Rightarrow (\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu = im\bar{\psi} .\end{aligned}\tag{4.33}$$

Differentierer vi nu strømmen og benytter vi ligning (4.33) samt at vi fra Diraclig-

ningen har at $\gamma^\mu \partial_\mu \psi = -im\psi$, så får vi

$$\begin{aligned}
 \partial^\mu J_\mu &= \partial^\mu [-e\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)] \\
 &= \partial_\mu [-e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi] \\
 &= -e[(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi + \bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\psi)] \\
 &= -e[(im\bar{\psi})\psi + \bar{\psi}(-im\psi)] \\
 &= -e[im\bar{\psi}\psi + -im\bar{\psi}\psi] \\
 &= 0,
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

hvorfra det kan ses, at strømmen er bevaret.

Sidst kigger vi på transformationen af vekselvirkningen. Transformerer vi ved brug af de givne transformationer fra **1)** får vi

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}'_I &= e\bar{\psi}'\gamma_\mu\psi' A'^\mu \\
 &= e\bar{\psi}\exp(ie\theta)\gamma_\mu\exp(-ie\theta)\psi(A^\mu - [\partial^\mu\theta]) \\
 &= e\bar{\psi}\mathbb{1}\gamma_\mu\psi(A^\mu - [\partial^\mu\theta]) \\
 &= e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu - e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi[\partial^\mu\theta] \\
 &= \mathcal{L}_I + J_\mu[\partial^\mu\theta],
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

hvor $[\gamma^\mu, \mathcal{U}] = 0$, siden \mathcal{U} er et tal (egenskab af $\mathcal{U}(1)$ -gruppen).

For nu at besvare, om denne transformationen af vekselvirkningen tillader, at teorien er lokal gaugeinvariant, da afhænger forklaringen af, hvad der helt præcis menes med spørgsmålet. Betragter vi først den transformerede vekselvirkning i ligning (4.35), så ses det tydeligt, at $\mathcal{L}_I \neq \mathcal{L}'_I$, men ved sammensætningen med den frie Lagrangedensitet, som heller ikke i sig selv er lokal gaugeinvariant, da bliver summen af disse lokal gaugeinvariant ($\mathcal{L} = \mathcal{L}'$), hvilket er vist i **1)** (\mathcal{L}_I var defineret således, at \mathcal{L} blev lokal gaugeinvariant).

Skal det i stedet besvares, om teorien forbliver gaugeinvariant i den forstand, at $S_I = S'_I$, hvor S_I er virkningen, så er argumentationen lidt anderledes. Vi starter stadig fra ligning (4.35), og husker på, at vi kan skrive $\partial^\mu(A_\mu B_\mu) = (\partial^\mu A_\mu)B_\mu + A_\mu(\partial^\mu B_\mu)$, så

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}'_I &= \mathcal{L}_I + J_\mu(\partial^\mu\theta) \\
 &= \mathcal{L}_I + (\partial^\mu J_\mu\theta) + (J_\mu\partial^\mu\theta) \\
 &= \mathcal{L}_I + (\partial^\mu J_\mu\theta),
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

idet $\partial^\mu J_\mu = 0$ fra ligning (4.34). Når vi nu skal finde virkningen, da integreres denne vekselvirkning over hele rummet, hvilket for første led blot giver vekselvirkningen for den originale Lagrangedensitet for vekselvirkningen, mens det andet led er hel rummelig integration over $\vec{\nabla} \cdot J_\mu\theta(x)$. Dette kan omskrives ved brug af divergenssætningen⁸ (eng: Divergence theorem), så selvom $\theta(x)$ kan vælges som en

⁸Divergenssætningen er givet som [6, lign. 1.56]

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{v} d\tau = \oint_S \vec{v} \cdot d\vec{a}. \tag{4.37}$$

arbitrær fase selv ved uendelig, så har strømmen en grænsebetingelse på 0, hvorved dette andet led forsvinder således, at virkningen $S'_I = S_I$ og teorien derved er lokal gaugeinvariant.

Uanset metoden, så må svaret være, at **ja** teorien er lokal gaugeinvariant, enten med begrundelsen $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$ eller at $S_I = S'_I$.

4) De fire strømme $j_\mu^{(n)}$ findes ved at indsætte feltudvidelsen fra ligning (4.4) i udtrykket for strømmen

$$\begin{aligned}
 -e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi &= -e\left\{\sum_\lambda\int\frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}}\left[b_{\vec{p},\lambda}u(\vec{p},\lambda)\exp(-ipx)\right. \right. \\
 &\quad \left. \left.+d_{\vec{p},\lambda}^\dagger v(\vec{p},\lambda)\exp(ipx)\right]\right\}^\dagger\gamma^0\gamma_\mu \\
 &\quad \times\left\{\sum_{\lambda'}\int\frac{d^3\vec{p}'}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}'}}} \left[b_{\vec{p}',\lambda'}u(\vec{p}',\lambda')\exp(-ip'x)\right. \right. \\
 &\quad \left. \left.+d_{\vec{p}',\lambda'}^\dagger v(\vec{p}',\lambda')\exp(ip'x)\right]\right\} \\
 &= -e\sum_{\lambda,\lambda'}\int\frac{d^3\vec{p}\,d^3\vec{p}'}{(2\pi)^6}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}\omega_{\vec{p}'}}} \\
 &\quad \times\left[\exp(ipx)u^\dagger(\vec{p},\lambda)b_{\vec{p},\lambda}^\dagger+\exp(-ipx)v^\dagger(\vec{p},\lambda)d_{\vec{p},\lambda}\right]\gamma^0\gamma_\mu \\
 &\quad \times\left[b_{\vec{p}',\lambda'}u(\vec{p}',\lambda')\exp(-ip'x)+d_{\vec{p}',\lambda'}^\dagger v(\vec{p}',\lambda')\exp(ip'x)\right] \\
 &= -e\sum_{\lambda,\lambda'}\int\frac{d^3\vec{p}\,d^3\vec{p}'}{(2\pi)^6}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}\omega_{\vec{p}'}}} \tag{4.38} \\
 &\quad \times\left[\exp(ipx)u^\dagger(\vec{p},\lambda)b_{\vec{p},\lambda}^\dagger\gamma^0\gamma_\mu b_{\vec{p}',\lambda'}u(\vec{p}',\lambda')\exp(-ip'x)\right. \\
 &\quad +\exp(-ipx)v^\dagger(\vec{p},\lambda)d_{\vec{p},\lambda}\gamma^0\gamma_\mu b_{\vec{p}',\lambda'}u(\vec{p}',\lambda')\exp(-ip'x) \\
 &\quad +\exp(ipx)u^\dagger(\vec{p},\lambda)b_{\vec{p},\lambda}^\dagger\gamma^0\gamma_\mu d_{\vec{p}',\lambda'}^\dagger v(\vec{p}',\lambda')\exp(ip'x) \\
 &\quad \left. +\exp(-ipx)v^\dagger(\vec{p},\lambda)d_{\vec{p},\lambda}\gamma^0\gamma_\mu d_{\vec{p}',\lambda'}^\dagger v(\vec{p}',\lambda')\exp(ip'x)\right] \\
 &= -e\sum_{\lambda,\lambda'}\int\frac{d^3\vec{p}\,d^3\vec{p}'}{(2\pi)^6}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}\omega_{\vec{p}'}}} \\
 &\quad \times\left[\exp(i[p-p']x)b_{\vec{p},\lambda}^\dagger b_{\vec{p}',\lambda'}\bar{u}(\vec{p},\lambda)\gamma_\mu u(\vec{p}',\lambda')\right. \\
 &\quad +\exp(-i[p+p']x)d_{\vec{p},\lambda}b_{\vec{p}',\lambda'}\bar{v}(\vec{p},\lambda)\gamma_\mu u(\vec{p}',\lambda') \\
 &\quad +\exp(i[p+p']x)b_{\vec{p},\lambda}^\dagger d_{\vec{p}',\lambda'}^\dagger\bar{u}(\vec{p},\lambda)\gamma_\mu v(\vec{p}',\lambda') \\
 &\quad \left. +\exp(-i[p-p']x)d_{\vec{p},\lambda}d_{\vec{p}',\lambda'}^\dagger\bar{v}(\vec{p},\lambda)\gamma_\mu v(\vec{p}',\lambda')\right].
 \end{aligned}$$

Dermed bliver de fire strømme

$$j_{\mu}^{(1)} = -e \sum_{\lambda, \lambda'} \int \frac{d^3 \vec{p} d^3 \vec{p}'}{(2\pi)^6} \frac{1}{2\sqrt{\omega_{\vec{p}} \omega_{\vec{p}'}}} \exp(i[p - p']x) b_{\vec{p}, \lambda}^{\dagger} b_{\vec{p}', \lambda'} \bar{u}(\vec{p}, \lambda) \gamma_{\mu} u(\vec{p}', \lambda') \quad (4.39a)$$

$$j_{\mu}^{(2)} = -e \sum_{\lambda, \lambda'} \int \frac{d^3 \vec{p} d^3 \vec{p}'}{(2\pi)^6} \frac{1}{2\sqrt{\omega_{\vec{p}} \omega_{\vec{p}'}}} \exp(-i[p - p']x) d_{\vec{p}, \lambda} d_{\vec{p}', \lambda'}^{\dagger} \bar{v}(\vec{p}, \lambda) \gamma_{\mu} v(\vec{p}', \lambda') \quad (4.39b)$$

$$j_{\mu}^{(3)} = -e \sum_{\lambda, \lambda'} \int \frac{d^3 \vec{p} d^3 \vec{p}'}{(2\pi)^6} \frac{1}{2\sqrt{\omega_{\vec{p}} \omega_{\vec{p}'}}} \exp(-i[p + p']x) d_{\vec{p}, \lambda} b_{\vec{p}', \lambda'} \bar{v}(\vec{p}, \lambda) \gamma_{\mu} u(\vec{p}', \lambda') \quad (4.39c)$$

$$j_{\mu}^{(4)} = -e \sum_{\lambda, \lambda'} \int \frac{d^3 \vec{p} d^3 \vec{p}'}{(2\pi)^6} \frac{1}{2\sqrt{\omega_{\vec{p}} \omega_{\vec{p}'}}} \exp(i[p + p']x) b_{\vec{p}, \lambda}^{\dagger} d_{\vec{p}', \lambda'}^{\dagger} \bar{u}(\vec{p}, \lambda) \gamma_{\mu} v(\vec{p}', \lambda') , \quad (4.39d)$$

og $-e\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi$ er summen af disse fire strømme, $-e\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi = \sum_n j_{\mu}^{(n)}$, $\forall n \in [1, 2, 3, 4]$. I definitionen herover kommer strømmenes givne n af, at de skal passe på ligning (4.6). Dermed er ligning (4.5) vist.

5) I de følgende udregninger vil de fermioniske antikommutatorrelationer (se [5, lign. 36–37])

$$(2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{\lambda, \lambda'} = \left\{ b_{\vec{p}, \lambda}, b_{\vec{p}', \lambda'}^{\dagger} \right\} = b_{\vec{p}, \lambda} b_{\vec{p}', \lambda'}^{\dagger} + b_{\vec{p}', \lambda'}^{\dagger} b_{\vec{p}, \lambda} , \quad \text{og} \quad (4.40a)$$

$$(2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{\lambda, \lambda'} = \left\{ d_{\vec{p}, \lambda}, d_{\vec{p}', \lambda'}^{\dagger} \right\} = d_{\vec{p}, \lambda} d_{\vec{p}', \lambda'}^{\dagger} + d_{\vec{p}', \lambda'}^{\dagger} d_{\vec{p}, \lambda} , \quad (4.40b)$$

hvor de resterende kombinationer af operatorerne giver 0, blive benyttet, samt at

$$b_{\vec{p}, \lambda} |0\rangle = 0 \quad \xleftarrow{\text{DC}} \quad \langle 0| b_{\vec{p}, \lambda}^{\dagger} = 0 , \quad \text{og} \quad (4.41a)$$

$$d_{\vec{p}, \lambda} |0\rangle = 0 \quad \xleftarrow{\text{DC}} \quad \langle 0| d_{\vec{p}, \lambda}^{\dagger} = 0 . \quad (4.41b)$$

For matricelementer betegner vi

$$|e^{-}, \vec{p}, \lambda\rangle = \sqrt{2\omega_{\vec{p}}} b_{\vec{p}, \lambda}^{\dagger} |0\rangle \quad \xleftarrow{\text{DC}} \quad \langle e^{-}, \vec{p}, \lambda| = \langle 0| b_{\vec{p}, \lambda} \sqrt{2\omega_{\vec{p}}} , \quad \text{og} \quad (4.42a)$$

$$|e^{+}, \vec{p}, \lambda\rangle = \sqrt{2\omega_{\vec{p}}} d_{\vec{p}, \lambda}^{\dagger} |0\rangle \quad \xleftarrow{\text{DC}} \quad \langle e^{+}, \vec{p}, \lambda| = \langle 0| d_{\vec{p}, \lambda} \sqrt{2\omega_{\vec{p}}} , \quad (4.42b)$$

da $b_{\vec{p}, \lambda}^{\dagger}$ kreerer en partikel, mens $d_{\vec{p}, \lambda}^{\dagger}$ kreerer en antipartikel, og $\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}$ er en normaliseringsfaktor.

I det følgende udregnes de fire matricelementer i ligning (4.6) ved først at udregne matricelementerne med kreations- og annihilationsoperatorerne, som fremkommer som dele af de fire matricelementer i ligning (4.6), hvorefter disse ”store” matricelementer udregnes. Til dette benyttes de ovenstående relationer.

For det første matricelement, ligning (4.6a), har vi, at

$$\begin{aligned}
 & \langle 0 | b_{\vec{p}', \lambda'} b_{\vec{q}, s}^\dagger b_{\vec{q}', s'} b_{\vec{p}, \lambda}^\dagger | 0 \rangle \\
 &= \langle 0 | \left[(2\pi)^3 \delta^3(\vec{q} - \vec{p}') \delta_{s, \lambda'} - b_{\vec{q}, s}^\dagger b_{\vec{p}', \lambda'} \right] \left[(2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q}') \delta_{\lambda, s'} - b_{\vec{p}, \lambda}^\dagger b_{\vec{q}', s'} \right] | 0 \rangle \\
 &= (2\pi)^6 \delta^3(\vec{q} - \vec{p}') \delta^3(\vec{p} - \vec{q}') \delta_{s, \lambda'} \delta_{\lambda, s'} \langle 0 | 0 \rangle - (2\pi)^3 \delta^3(\vec{q} - \vec{p}') \delta_{s, \lambda'} \langle 0 | b_{\vec{p}, \lambda}^\dagger b_{\vec{q}', s'} | 0 \rangle \\
 &\quad - (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q}') \delta_{\lambda, s'} \langle 0 | b_{\vec{q}, s}^\dagger b_{\vec{p}', \lambda'} | 0 \rangle + \langle 0 | b_{\vec{q}, s}^\dagger b_{\vec{p}', \lambda'} b_{\vec{p}, \lambda}^\dagger b_{\vec{q}', s'} | 0 \rangle \\
 &= (2\pi)^6 \delta^3(\vec{q} - \vec{p}') \delta^3(\vec{p} - \vec{q}') \delta_{s, \lambda'} \delta_{\lambda, s'} ,
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

hvorfor

$$\begin{aligned}
 & \langle e^-, \vec{p}', \lambda' | j_\mu^{(1)} | e^-, \vec{p}, \lambda \rangle \\
 &= \left\langle e^-, \vec{p}', \lambda' \left| -e \sum_{s, s'} \int \frac{d^3 \vec{q} d^3 \vec{q}'}{(2\pi)^6} \frac{1}{2\sqrt{\omega_{\vec{q}} \omega_{\vec{q}'}}} \exp(i[q - q']x) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times b_{\vec{q}, s}^\dagger b_{\vec{q}', s'} \bar{u}(\vec{q}, s) \gamma_\mu u(\vec{q}', s') \right| e^-, \vec{p}, \lambda \right\rangle \\
 &= \left\langle 0 \left| b_{\vec{p}', \lambda'} \sqrt{2\omega_{\vec{p}'}} - e \sum_{s, s'} \int \frac{d^3 \vec{q} d^3 \vec{q}'}{(2\pi)^6} \frac{1}{2\sqrt{\omega_{\vec{q}} \omega_{\vec{q}'}}} \exp(i[q - q']x) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times b_{\vec{q}, s}^\dagger b_{\vec{q}', s'} \bar{u}(\vec{q}, s) \gamma_\mu u(\vec{q}', s') \sqrt{2\omega_{\vec{p}}} b_{\vec{p}, \lambda}^\dagger \right| 0 \right\rangle \\
 &= -2e \sqrt{\omega_{\vec{p}'} \omega_{\vec{p}}} \sum_{s, s'} \int \frac{d^3 \vec{q} d^3 \vec{q}'}{(2\pi)^6} \frac{1}{2\sqrt{\omega_{\vec{q}} \omega_{\vec{q}'}}} \exp(i[q - q']x) \\
 &\quad \times \left\langle 0 \left| b_{\vec{p}', \lambda'} b_{\vec{q}, s}^\dagger b_{\vec{q}', s'} b_{\vec{p}, \lambda}^\dagger \right| 0 \right\rangle \bar{u}(\vec{q}, s) \gamma_\mu u(\vec{q}', s') \\
 &= -2e \sqrt{\omega_{\vec{p}'} \omega_{\vec{p}}} \sum_{s, s'} \int \frac{d^3 \vec{q} d^3 \vec{q}'}{(2\pi)^6} \frac{1}{2\sqrt{\omega_{\vec{q}} \omega_{\vec{q}'}}} \exp(i[q - q']x) \\
 &\quad \times (2\pi)^6 \delta^3(\vec{q} - \vec{p}') \delta^3(\vec{p} - \vec{q}') \delta_{s, \lambda'} \delta_{\lambda, s'} \bar{u}(\vec{q}, s) \gamma_\mu u(\vec{q}', s') \\
 &= -e \sqrt{\omega_{\vec{p}'} \omega_{\vec{p}}} \sum_{s, s'} \int \frac{d^3 \vec{q} d^3 \vec{q}'}{\sqrt{\omega_{\vec{q}} \omega_{\vec{q}'}}} \exp(i[q - q']x) \\
 &\quad \times \delta^3(\vec{q} - \vec{p}') \delta^3(\vec{p} - \vec{q}') \delta_{s, \lambda'} \delta_{\lambda, s'} \bar{u}(\vec{q}, s) \gamma_\mu u(\vec{q}', s') \\
 &= -e \sum_{s, s'} \exp(i[p' - p]x) \delta_{s, \lambda'} \delta_{\lambda, s'} \bar{u}(\vec{p}', s) \gamma_\mu u(\vec{p}, s') \\
 &= -e \bar{u}(\vec{p}', \lambda') \gamma_\mu u(\vec{p}, \lambda) \exp(i[p' - p]x) ,
 \end{aligned} \tag{4.44}$$

da $q^\mu = (\sqrt{\vec{q}^2 + m^2}, \vec{q})$, hvorfor integrationen af deltafunktionerne med \vec{q} også ændrer på energien, så f.eks. $\delta^3(\vec{q} - \vec{p}') \Rightarrow q \rightarrow p'$. Derved er ligning (4.6a) vist.

Det andet matrixelement, ligning (4.6b), giver

$$\begin{aligned}
& \langle 0 | d_{\vec{p}', \lambda'} d_{\vec{q}, s} d_{\vec{q}', s'}^\dagger d_{\vec{p}, \lambda}^\dagger | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | d_{\vec{p}', \lambda'} \left[(2\pi)^3 \delta^3(\vec{q} - \vec{q}') \delta_{s, s'} - d_{\vec{q}', s'}^\dagger d_{\vec{q}, s} \right] d_{\vec{p}, \lambda}^\dagger | 0 \rangle \\
&= (2\pi)^3 \delta^3(\vec{q} - \vec{q}') \delta_{s, s'} \langle 0 | d_{\vec{p}', \lambda'} d_{\vec{p}, \lambda}^\dagger | 0 \rangle - \langle 0 | d_{\vec{p}', \lambda'} d_{\vec{q}', s'}^\dagger d_{\vec{q}, s} d_{\vec{p}, \lambda}^\dagger | 0 \rangle \\
&= (2\pi)^3 \delta^3(\vec{q} - \vec{q}') \delta_{s, s'} \langle 0 | \left[(2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{\lambda, \lambda'} - d_{\vec{p}, \lambda}^\dagger d_{\vec{p}', \lambda'} \right] | 0 \rangle \\
&\quad - \langle 0 | \left[(2\pi)^3 \delta^3(\vec{p}' - \vec{q}') \delta_{\lambda', s'} - d_{\vec{q}', s'}^\dagger d_{\vec{p}', \lambda'} \right] \left[(2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) \delta_{\lambda, s} - d_{\vec{p}, \lambda}^\dagger d_{\vec{q}, s} \right] | 0 \rangle \\
&= (2\pi)^6 \delta^3(\vec{q} - \vec{q}') \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{s, s'} \delta_{\lambda, \lambda'} \langle 0 | 0 \rangle - (2\pi)^6 \delta^3(\vec{p}' - \vec{q}') \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) \delta_{\lambda', s'} \delta_{\lambda, s} \langle 0 | 0 \rangle \\
&= (2\pi)^6 \left[\delta^3(\vec{q} - \vec{q}') \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{s, s'} \delta_{\lambda, \lambda'} - \delta^3(\vec{p}' - \vec{q}') \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) \delta_{\lambda', s'} \delta_{\lambda, s} \right], \tag{4.45}
\end{aligned}$$

hvorfor

$$\begin{aligned}
& \langle e^+, \vec{p}', \lambda' | j_\mu^{(2)} | e^+, \vec{p}, \lambda \rangle \\
&= \left\langle e^+, \vec{p}', \lambda' \right| -e \sum_{s, s'} \int \frac{d^3 \vec{q} d^3 \vec{q}'}{(2\pi)^6} \frac{1}{2\sqrt{\omega_{\vec{q}} \omega_{\vec{q}'}}} \exp(-i[q - q']x) \\
&\quad \times d_{\vec{q}, s} d_{\vec{q}', s'}^\dagger \bar{v}(\vec{q}, s) \gamma_\mu v(\vec{q}', s') \Big| e^+, \vec{p}, \lambda \rangle \\
&= -e \sum_{s, s'} \int \frac{d^3 \vec{q} d^3 \vec{q}'}{(2\pi)^6} \sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}'} \omega_{\vec{p}}}{\omega_{\vec{q}} \omega_{\vec{q}'}}} \exp(-i[q - q']x) \\
&\quad \times \langle 0 | d_{\vec{p}', \lambda'} d_{\vec{q}, s} d_{\vec{q}', s'}^\dagger d_{\vec{p}, \lambda}^\dagger | 0 \rangle \bar{v}(\vec{q}, s) \gamma_\mu v(\vec{q}', s') \tag{4.46} \\
&= -e \sum_{s, s'} \int d^3 \vec{q} d^3 \vec{q}' \sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}'} \omega_{\vec{p}}}{\omega_{\vec{q}} \omega_{\vec{q}'}}} \exp(-i[q - q']x) \bar{v}(\vec{q}, s) \gamma_\mu v(\vec{q}', s') \\
&\quad \times [\delta^3(\vec{q} - \vec{q}') \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{s, s'} \delta_{\lambda, \lambda'} - \delta^3(\vec{p}' - \vec{q}') \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) \delta_{\lambda', s'} \delta_{\lambda, s}] \\
&= e \bar{v}(\vec{p}, \lambda) \gamma_\mu v(\vec{p}', \lambda') \exp(i[p' - p]x) \\
&\quad - e \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{\lambda, \lambda'} \sum_s \int d^3 \vec{q} \frac{\omega_{\vec{p}}}{\omega_{\vec{q}}} \bar{v}(\vec{q}, s) \gamma_\mu v(\vec{q}, s).
\end{aligned}$$

For andet led i ligning (4.46) ses det i Dirac deltafunktionen, at impulsen for elektronen før og efter vekselvirkningen skal være ens, og ligeså for myonen, men siden dette ikke kan lade sig gøre ved udveksling af en foton, er der altså ikke tale om en spredning men blot en loopkorrektion, hvorfor dette led ikke medtages men blot negligeres. Derved får vi

$$\begin{aligned}
& \langle e^+, \vec{p}', \lambda' | j_\mu^{(2)} | e^+, \vec{p}, \lambda \rangle \\
&= e \bar{v}(\vec{p}, \lambda) \gamma_\mu v(\vec{p}', \lambda') \exp(i[p' - p]x) \\
&\quad - e \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{\lambda, \lambda'} \sum_s \int d^3 \vec{q} \frac{\omega_{\vec{p}}}{\omega_{\vec{q}}} \bar{v}(\vec{q}, s) \gamma_\mu v(\vec{q}, s) \\
&= e \bar{v}(\vec{p}, \lambda) \gamma_\mu v(\vec{p}', \lambda') \exp(i[p' - p]x) \\
&\quad - e \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{\lambda, \lambda'} \int d^3 \vec{q} \left(\frac{\omega_{\vec{p}}}{\omega_{\vec{q}}} \gamma_\mu \sum_s \bar{v}(\vec{q}, s) v(\vec{q}, s) \right) \\
&= e \bar{v}(\vec{p}, \lambda) \gamma_\mu v(\vec{p}', \lambda') \exp(i[p' - p]x) .
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Derved er ligning (4.6b) vist.

I det tredje matrixelement, ligning (4.6c), optræder

$$\begin{aligned}
& \langle 0 | d_{\vec{q}, s} b_{\vec{q}', s'} b_{\vec{p}, \lambda}^\dagger d_{\vec{p}', \lambda'}^\dagger | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | [-b_{\vec{q}', s'} d_{\vec{q}, s}] b_{\vec{p}, \lambda}^\dagger d_{\vec{p}', \lambda'}^\dagger | 0 \rangle \\
&= - \langle 0 | b_{\vec{q}', s'} [-b_{\vec{p}, \lambda}^\dagger d_{\vec{q}, s}] d_{\vec{p}', \lambda'}^\dagger | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | b_{\vec{q}', s'} b_{\vec{p}, \lambda}^\dagger d_{\vec{q}, s} d_{\vec{p}', \lambda'}^\dagger | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | \left[(2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q}') \delta_{\lambda, s'} - b_{\vec{p}, \lambda}^\dagger b_{\vec{q}', s'} \right] \left[(2\pi)^3 \delta^3(\vec{q} - \vec{p}') \delta_{s, \lambda'} - d_{\vec{p}', \lambda'}^\dagger d_{\vec{q}, s} \right] | 0 \rangle \\
&= (2\pi)^6 \delta^3(\vec{p} - \vec{q}') \delta^3(\vec{q} - \vec{p}') \delta_{\lambda, s'} \delta_{s, \lambda'} ,
\end{aligned} \tag{4.48}$$

så vi får

$$\begin{aligned}
& \langle 0 | j_\mu^{(3)} | e^-, \vec{p}, \lambda; e^+, \vec{p}', \lambda' \rangle \\
&= \langle 0 | -e \sum_{s, s'} \int \frac{d^3 \vec{q} d^3 \vec{q}'}{(2\pi)^6} \frac{1}{2\sqrt{\omega_{\vec{q}} \omega_{\vec{q}'}}} \exp(-i[q + q']x) \\
&\quad \times d_{\vec{q}, s} b_{\vec{q}', s'} \bar{v}(\vec{p}, \lambda) \gamma_\mu u(\vec{p}', \lambda') | e^-, \vec{p}, \lambda; e^+, \vec{p}', \lambda' \rangle \\
&= -e \sum_{s, s'} \int \frac{d^3 \vec{q} d^3 \vec{q}'}{(2\pi)^6} \sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}} \omega_{\vec{p}'}}{\omega_{\vec{q}} \omega_{\vec{q}'}}} \exp(-i[q + q']x) \\
&\quad \times \langle 0 | d_{\vec{q}, s} b_{\vec{q}', s'} b_{\vec{p}, \lambda}^\dagger d_{\vec{p}', \lambda'}^\dagger | 0 \rangle \bar{v}(\vec{q}, s) \gamma_\mu u(\vec{q}', s') \\
&= -e \sum_{s, s'} \int \frac{d^3 \vec{q} d^3 \vec{q}'}{(2\pi)^6} \sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}} \omega_{\vec{p}'}}{\omega_{\vec{q}} \omega_{\vec{q}'}}} \exp(-i[q + q']x) \bar{v}(\vec{q}, s) \gamma_\mu u(\vec{q}', s') \\
&\quad \times (2\pi)^6 \delta^3(\vec{p} - \vec{q}') \delta^3(\vec{q} - \vec{p}') \delta_{\lambda, s'} \delta_{s, \lambda'} \\
&= -e \bar{v}(\vec{p}', \lambda') \gamma_\mu u(\vec{p}, \lambda) \exp(-i[p + p']x) .
\end{aligned} \tag{4.49}$$

Derved er ligning (4.6c) vist.

For det fjerde og sidste matrixelement, ligning (4.6a), har vi, at

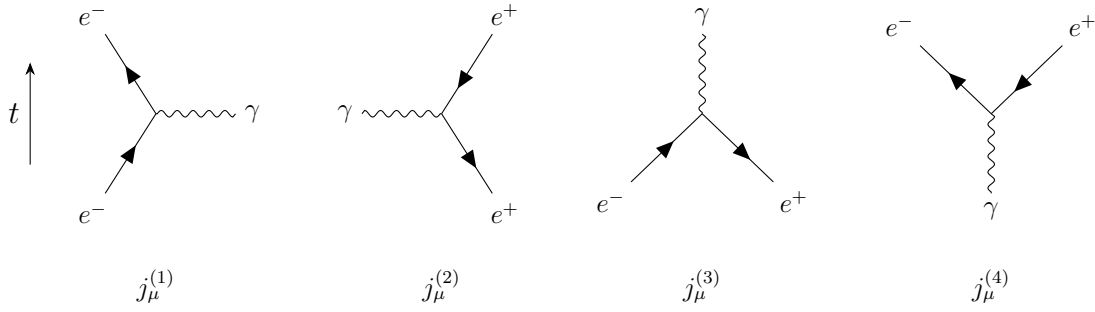
$$\begin{aligned}
 & \left\langle 0 \left| d_{\vec{p},\lambda} b_{\vec{p}',\lambda'} b_{\vec{q},s}^\dagger d_{\vec{q}',s'}^\dagger \right| 0 \right\rangle \\
 &= \left\langle 0 \left| [-b_{\vec{p}',\lambda'} d_{\vec{p},\lambda}] b_{\vec{q},s}^\dagger d_{\vec{q}',s'}^\dagger \right| 0 \right\rangle \\
 &= - \left\langle 0 \left| b_{\vec{p}',\lambda'} [-b_{\vec{q},s}^\dagger d_{\vec{p},\lambda}] d_{\vec{q}',s'}^\dagger \right| 0 \right\rangle \\
 &= \left\langle 0 \left| b_{\vec{p}',\lambda'} b_{\vec{q},s}^\dagger d_{\vec{p},\lambda} d_{\vec{q}',s'}^\dagger \right| 0 \right\rangle \\
 &= \left\langle 0 \left| \left[(2\pi)^3 \delta^3(\vec{q} - \vec{p}') \delta_{s,\lambda'} - b_{\vec{q},s}^\dagger b_{\vec{p}',\lambda'} \right] \left[(2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q}') \delta_{\lambda,s'} - d_{\vec{q}',s'}^\dagger d_{\vec{p},\lambda} \right] \right| 0 \right\rangle \\
 &= (2\pi)^6 \delta^3(\vec{q} - \vec{p}') \delta^3(\vec{p} - \vec{q}') \delta_{s,\lambda'} \delta_{\lambda,s'} ,
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

hvorfor

$$\begin{aligned}
 & \left\langle e^-, \vec{p}', \lambda'; e^+, \vec{p}, \lambda \left| j_\mu^{(4)} \right| 0 \right\rangle \\
 &= \left\langle e^-, \vec{p}', \lambda'; e^+, \vec{p}, \lambda \left| -e \sum_{s,s'} \int \frac{d^3\vec{q} d^3\vec{q}'}{(2\pi)^6} \frac{1}{2\sqrt{\omega_{\vec{q}}\omega_{\vec{q}'}}} \exp(i[q + q']x) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \times b_{\vec{q},\lambda}^\dagger d_{\vec{q}',\lambda'}^\dagger \bar{u}(\vec{q}, s) \gamma_\mu v(\vec{q}', s') \right| 0 \right\rangle \\
 &= -e \sum_{s,s'} \int \frac{d^3\vec{q} d^3\vec{q}'}{(2\pi)^6} \sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}'}\omega_{\vec{p}}}{\omega_{\vec{q}}\omega_{\vec{q}'}}} \exp(i[q + q']x) \\
 & \quad \times \left\langle 0 \left| d_{\vec{p},\lambda} b_{\vec{p}',\lambda'} b_{\vec{q},s}^\dagger d_{\vec{q}',s'}^\dagger \right| 0 \right\rangle \bar{u}(\vec{q}, s) \gamma_\mu v(\vec{q}', s') \\
 &= -e \sum_{s,s'} \int \frac{d^3\vec{q} d^3\vec{q}'}{(2\pi)^6} \sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}'}\omega_{\vec{p}}}{\omega_{\vec{q}}\omega_{\vec{q}'}}} \exp(i[q + q']x) \bar{u}(\vec{q}, s) \gamma_\mu v(\vec{q}', s') \\
 & \quad \times (2\pi)^6 \delta^3(\vec{q} - \vec{p}') \delta^3(\vec{p} - \vec{q}') \delta_{s,\lambda'} \delta_{\lambda,s'} \\
 &= -e \bar{u}(\vec{p}', \lambda') \gamma_\mu v(\vec{p}, \lambda) \exp(i[p + p']x) .
 \end{aligned} \tag{4.51}$$

Derved er ligning (4.6d) vist.

Overgangsstrømmene i ligning (4.6) er matrixelementerne mellem start- og sluttilstandene for impulsudvekslingen mellem elektroner og positroner i forskellige kombinationer, dog ekskluderende fotonen, som også er en del af vekselvirkningen, i de to tilstande, som i stedet beskrives af strømoperatoren, hvorfor dette kun giver dele af Feynmandiagrammer og ikke de fulde diagrammer. Vi kan derfor tegne disse som Feynmandiagrammer, hvilke kan ses nedenfor. Matrixelementerne er alle på formen $\langle f | j_\mu | i \rangle$ hvor i og f betegner hhv. start- og sluttstanden, hvorved det første matrixelement er en indkommende elektron med impuls \vec{p} og helicitet λ som ændres til en udgående elektron med impuls \vec{p}' og helicitet λ' . For andet matrixelement er positron med impuls \vec{p} og helicitet λ som spredes til en positron med impuls \vec{p}' og helicitet λ' . Det tredje matrixelement er annihilationen af et elektron-positron-par til vakuum (eller rettere end foton), og det fjerde matrixelement er blot denne annihilation set med tiden gående baglæns, altså dannelsen af et elektron-positron-par fra en foton.



6) I det følgende vil det blive vist, at overgangsstrømmene i ligning (4.6) er bevarede.

Anvender vi ∂^μ på det første matrixelement, ligning (4.6a), fås

$$\begin{aligned}
 \partial^\mu \langle e^-, \vec{p}', \lambda' | j_\mu^{(1)} | e^-, \vec{p}, \lambda \rangle &= \partial^\mu [-e \bar{u}(\vec{p}', \lambda') \gamma_\mu u(\vec{p}, \lambda) \exp(i[p' - p]x)] \\
 &= -e \bar{u}(\vec{p}', \lambda') \gamma_\mu u(\vec{p}, \lambda) \partial^\mu [\exp(i[p' - p]x)] \\
 &= -e \bar{u}(\vec{p}', \lambda') \gamma_\mu u(\vec{p}, \lambda) i(p'^\mu - p^\mu) \exp(i[p' - p]x) \\
 &= -ie \bar{u}(\vec{p}', \lambda') \gamma_\mu (p'^\mu - p^\mu) u(\vec{p}, \lambda) \exp(i[p' - p]x) \\
 &= -ie \bar{u}(\vec{p}', \lambda') (\not{p}' - \not{p}) u(\vec{p}, \lambda) \exp(i[p' - p]x) \\
 &= -ie \bar{u}(\vec{p}', \lambda') (m - m) u(\vec{p}, \lambda) \exp(i[p' - p]x) \\
 &= 0,
 \end{aligned} \tag{4.52}$$

hvor relationen $(\not{p} - m)u(\vec{p}, \lambda) = 0$ fra [5, opgave 2.4] og $\bar{u}(\vec{p}, \lambda)(\not{p} - m) = 0$ er benyttet. Sidstnævnte findes nemt ved at tage den Hermitiskkonjugerede af førstnævnte relation, hvorved der fås

$$\begin{aligned}
 0 &= [(\not{p} - m)u(\vec{p}, \lambda)]^\dagger \\
 &= u^\dagger(\vec{p}, \lambda)(\not{p} - m)^\dagger \\
 &= u^\dagger(\vec{p}, \lambda)[(\gamma^\mu)^\dagger p_\mu - m] \\
 &= u^\dagger(\vec{p}, \lambda)\mathbb{1}[(\gamma^\mu)^\dagger p_\mu - m] \\
 &= u^\dagger(\vec{p}, \lambda)\gamma^0\gamma^0[(\gamma^\mu)^\dagger p_\mu - m] \\
 &= \bar{u}(\vec{p}, \lambda)[\gamma^\mu p_\mu \gamma^0 - m\gamma^0] \\
 &= \left\{ \bar{u}(\vec{p}, \lambda)[\not{p} - m] \right\} \gamma^0 \\
 \Rightarrow 0 &= \bar{u}(\vec{p}, \lambda)(\not{p} - m),
 \end{aligned} \tag{4.53}$$

hvor det er benyttet, at p^μ er Hermitisk, at $[p_\mu, \gamma^0] = 0$ siden γ^0 er diagonal og består af tal, at $\gamma^0\gamma^0 = \mathbb{1}$ og at $\gamma^0(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^\mu\gamma^0$ vist i ligning (4.32).

Samme fremgangsmåde benyttes for det andet matrixelement, ligning (4.6b), men her benyttes relationerne $(\not{p} + m)v(\vec{p}, \lambda) = 0$ (igen fra [5, opgave 2.4]) og $\bar{v}(\vec{p}, \lambda)(\not{p} + m) = 0$, hvor sidstnævnte kan findes ved samme udregninger som i

ligning (4.53),

$$\begin{aligned}
 \partial^\mu \langle e^+, \vec{p}', \lambda' | j_\mu^{(2)} | e^+, \vec{p}, \lambda \rangle &= \partial^\mu [e\bar{v}(\vec{p}, \lambda)\gamma_\mu v(\vec{p}', \lambda') \exp(i[p' - p]x)] \\
 &= ie\bar{v}(\vec{p}, \lambda)\gamma_\mu(p'^\mu - p^\mu)v(\vec{p}', \lambda') \exp(i[p' - p]x) \\
 &= ie\bar{v}(\vec{p}, \lambda)(\not{p}' - \not{p})v(\vec{p}', \lambda') \exp(i[p' - p]x) \\
 &= ie\bar{v}(\vec{p}, \lambda)(-m - [-m])v(\vec{p}', \lambda') \exp(i[p' - p]x) \\
 &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{4.54}$$

For både det tredje matrixelement, ligning (4.6c), og det fjerde matrixelement, ligning (4.6d), benyttes samme fremgangsmåde som for de to foregående, så

$$\begin{aligned}
 \partial^\mu \langle 0 | j_\mu^{(3)} | e^-, \vec{p}, \lambda; e^+, \vec{p}', \lambda' \rangle &= \partial^\mu [-e\bar{v}(\vec{p}', \lambda')\gamma_\mu u(\vec{p}, \lambda) \exp(-i[p' + p]x)] \\
 &= ie\bar{v}(\vec{p}', \lambda')\gamma_\mu(p'^\mu + p^\mu)u(\vec{p}, \lambda) \exp(-i[p' + p]x) \\
 &= ie\bar{v}(\vec{p}', \lambda')(\not{p}' + \not{p})u(\vec{p}, \lambda) \exp(-i[p' + p]x) \\
 &= ie\bar{v}(\vec{p}', \lambda')(-m + m)u(\vec{p}, \lambda) \exp(-i[p' + p]x) \\
 &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{4.55}$$

$$\begin{aligned}
 \partial^\mu \langle e^-, \vec{p}', \lambda'; e^+, \vec{p}, \lambda | j_\mu^{(4)} | 0 \rangle &= \partial^\mu [-e\bar{u}(\vec{p}', \lambda')\gamma_\mu v(\vec{p}, \lambda) \exp(i[p' + p]x)] \\
 &= -ie\bar{u}(\vec{p}', \lambda')\gamma_\mu(p'^\mu + p^\mu)v(\vec{p}, \lambda) \exp(i[p' + p]x) \\
 &= -ie\bar{u}(\vec{p}', \lambda')(\not{p}' + \not{p})v(\vec{p}, \lambda) \exp(i[p' + p]x) \\
 &= -ie\bar{u}(\vec{p}', \lambda')(m + [-m])v(\vec{p}, \lambda) \exp(i[p' + p]x) \\
 &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{4.56}$$

Dermed ses det tydeligt, at alle fire overgangsstrømme er bevarede i den forstand, at $\partial^\mu J_\mu^{fi} = 0$, ligningerne (4.52) og (4.54) til (4.56).

7) Med en Lagrangedensitet for virkningen på formen $\mathcal{L}_I = -J_\mu A^\mu$ vil vi have en Hamiltontensitet for vekselvirkningen, som er $\mathcal{H}_I = J_\mu A^\mu$, da \mathcal{L}_I ikke indeholder nogle differentialoperatorer, som ellers ville "besværliggøre" Legendretransformationen. Betragter vi nu kvantiseringen af feltet for en foton, [7, lign. 8]

$$A^\mu(x) = \sum_\sigma \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \left[\varepsilon^\mu(\sigma) a_{\vec{p},\sigma} \exp(-ipx) + \varepsilon^\mu(\sigma)^* a_{\vec{p},\sigma}^\dagger \exp(ipx) \right],
 \tag{4.57}$$

samt benytter Dysonserien og tidsafhængigperturbationsteori, som vi har lært i kurset, da er det klart at vi vil få matrixelementer på formen ([2, lign. 53–54])

$$\langle f | J_\mu(x) A^\mu(x) | i \rangle \propto \langle f | J_\mu(0) | i \rangle \varepsilon^\mu(\sigma) \propto J_\mu^{fi}(0) \varepsilon^\mu(\sigma),
 \tag{4.58}$$

da feltudvidelsen for A^μ kun indeholder impulsrumsintegration og dermed kan tages ud af matrixelementet, samt at $J_\mu(x) \propto J_\mu(0)$, da vi kan translaterer operatorer med komplekse eksponentialfunktioner, og at kun overgangsstrømmene fra **5)** (ligning (4.6)) ikke-trivielle, altså forskellige fra 0. $J_\mu^{fi}(x)$ er overgangsstrømmene regnet i **5)**.

Når vi taler sandsynlighed, så tages normkvadratet af matrixelementet, altså

$$|J_\mu^{fi}(0)\varepsilon^\mu(\sigma)|^2 = J_\mu^{fi}(0)^*\varepsilon^\mu(\sigma)^* J_\nu^{fi}(0)\varepsilon^\nu(\sigma) = \varepsilon^\mu(\sigma)^*\varepsilon^\nu(\sigma) J_\mu^{fi}(0)^* J_\nu^{fi}(0). \quad (4.59)$$

Går vi til højere orden i perturbationen, da vil vi blot få flere matrixelementer på denne form, da vi vil få nogen "mellemliggende" (eng: intermediate) tilstande.

8) Fra opgave 1.2 (delopgave 2 i Spin-1 partikler med masse) i afsnit 1 er det givet, at $\varepsilon_\mu q^\mu = 0$ samt at $\varepsilon_\mu(\sigma)\varepsilon^\mu(\sigma') = -\delta_{\sigma\sigma'}$. Fra første krav kan vi se, at siden $q^\mu = (q_0, 0, 0, q_0)$, da skal $\varepsilon^0 = \varepsilon^3 = 0$ ⁹. Sidstnævnte krav skyldes, at polarisationstilstandene skal være ortogonale, da vi kræver, at en partikel kun kan være i én tilstand (enten den ene eller den anden). Vi har i **opgave 1: Spin-1-partikler med masse** set to mulige sæt af tilstande, som opfylder begge krav: De lineært polariserede tilstande e_x^μ og e_y^μ fra ligning (1.1) samt de cirkulært polariserede tilstande $e^\mu(\sigma = \pm 1)$ fra ligning (1.2),

$$e^\mu(\sigma = \pm 1) = \left(0, \mp \frac{\hat{\mathbf{x}} \pm i\hat{\mathbf{y}}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ \mp 1 \\ -i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.60)$$

Det ses trivielt fra de lineært polariserede tilstande, at $\sum_\sigma \varepsilon^\mu(\sigma)^*\varepsilon^\nu(\sigma) = \delta_1^\mu\delta_1^\nu + \delta_2^\mu\delta_2^\nu$, hvorfor det også må gælde for de cirkulært polariserede tilstande, da disse blot er sammenhængende ved en unitære transformationer (se **Spin-1 partikler med masse**), men dette kan også eksplicit vises. $\sum_\sigma \varepsilon^\mu(\sigma)^*\varepsilon^\nu(\sigma)$ bliver for de cirkulært polariserede tilstande derved følgende, hvor ledene med ε^0 og ε^3 trivielt er 0:

$$\sum_\sigma \varepsilon^1(\sigma)^*\varepsilon^1(\sigma) = \frac{-1}{\sqrt{2}}\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1, \quad (4.61a)$$

$$\sum_\sigma \varepsilon^1(\sigma)^*\varepsilon^2(\sigma) = \frac{-1}{\sqrt{2}}\frac{-i}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{-i}{\sqrt{2}} = \frac{i}{2} + \frac{-i}{2} = 0, \quad (4.61b)$$

$$\sum_\sigma \varepsilon^2(\sigma)^*\varepsilon^1(\sigma) = \frac{i}{\sqrt{2}}\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{-i}{2} + \frac{i}{2} = 0, \quad \text{og} \quad (4.61c)$$

$$\sum_\sigma \varepsilon^2(\sigma)^*\varepsilon^2(\sigma) = \frac{i}{\sqrt{2}}\frac{-i}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\frac{-i}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \quad (4.61d)$$

Dermed er ligning (4.9), $\sum_\sigma \varepsilon^\mu(\sigma)^*\varepsilon^\nu(\sigma) = \delta_1^\mu\delta_1^\nu + \delta_2^\mu\delta_2^\nu$, vist.

⁹Yderlige giver det mening at $\varepsilon^3 = 0$, idet at fotoner, da de er masseløse, ikke kan være polariserede i propageringsretningen, som her trivielt er valgt til at være $\hat{\mathbf{z}}$ -retningen.

9) Først betragtes venstresiden af ligning (4.10), og benyttes identiteten vist i ligning (4.9) fås

$$\begin{aligned} \left[\sum_{\sigma} \varepsilon^{\mu}(\sigma)^* \varepsilon^{\nu}(\sigma) \right] J_{\mu}^{fi}(0)^* J_{\nu}^{fi}(0) &= [\delta_1^{\mu} \delta_1^{\nu} + \delta_2^{\mu} \delta_2^{\nu}] J_{\mu}^{fi}(0)^* J_{\nu}^{fi}(0) \\ &= \left| J_1^{fi}(0) \right|^2 + \left| J_2^{fi}(0) \right|^2. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Betragtes nu højresiden af ligning (4.10) fås

$$-g^{\mu\nu} J_{\mu}^{fi}(0)^* J_{\nu}^{fi}(0) = -\left| J_0^{fi}(0) \right|^2 + \left| J_1^{fi}(0) \right|^2 + \left| J_2^{fi}(0) \right|^2 + \left| J_3^{fi}(0) \right|^2, \quad (4.63)$$

da $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1)$. Det huskes at $J_{\mu}^{fi}(x)$ er en bevaret strøm (fra 6)) samt at $J_{\mu}^{fi}(x) = \exp(iqx) J_{\mu}^{fi}(0)$ fra ligning (4.6), hvor $q = p_f - p_i$ er fotonens impulsoverførsel (p_i og p_f er hhv. start- og sluttlistandens impuls), hvorfor

$$\begin{aligned} 0 &= \partial^{\mu} J_{\mu}^{fi}(x) \\ &= \partial^{\mu} [\exp(iqx) J_{\mu}^{fi}(0)] \\ &= iq^{\mu} \exp(iqx) J_{\mu}^{fi}(0) \\ &= iq^{\mu} J_{\mu}^{fi}(x) \\ &= iq_0 [J_0^{fi}(x) - J_3^{fi}(x)] \\ &\Rightarrow J_0^{fi}(x) = J_3^{fi}(x) \\ &\Rightarrow \left| J_0^{fi}(0) \right|^2 = \left| J_3^{fi}(0) \right|^2, \end{aligned} \quad (4.64)$$

da vi fra 8) har at $q^{\mu} = (q_0, 0, 0, q_0)$. Indsættes dette i ligning (4.63) og sammenlignet med ligning (4.62) fås

$$\begin{aligned} -g^{\mu\nu} J_{\mu}^{fi}(0)^* J_{\nu}^{fi}(0) &= -\left| J_0^{fi}(0) \right|^2 + \left| J_1^{fi}(0) \right|^2 + \left| J_2^{fi}(0) \right|^2 + \left| J_3^{fi}(0) \right|^2 \\ &= \left| J_1^{fi}(0) \right|^2 + \left| J_2^{fi}(0) \right|^2 \\ &= \left[\sum_{\sigma} \varepsilon^{\mu}(\sigma)^* \varepsilon^{\nu}(\sigma) \right] J_{\mu}^{fi}(0)^* J_{\nu}^{fi}(0), \end{aligned} \quad (4.65)$$

hvilket er ligning (4.10) som skulle vises.

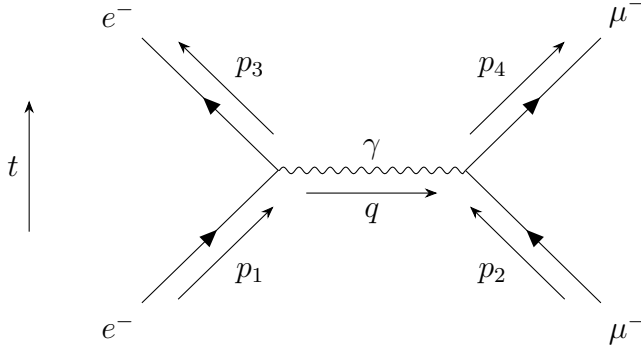
10) Betragter vi udregningen i ligning (4.10), da ser vi, at vi har benyttet bevarelse af J_{μ}^{fi} er bevaret.

Vi skal nu kigge på hvilke yderligere led, som kunne opstå i ligning (4.11) for en reel og en virtuel foton. Et sådan ekstra led ville være en enhedsløs rank-2-tensor, således at den kan sammenlægges med metrikken, som også er en enhedsløs rank-2-tensor,

$$\sum_{\sigma} \varepsilon^{\mu}(\sigma)^* \varepsilon^{\nu}(\sigma) = -g^{\mu\nu} + C^{\mu\nu}, \quad (4.66)$$

og denne tensor skal overholde, at $C^{\mu\nu} J_\mu^{fi}(0)^* J_\nu^{fi}(0) = 0$, således at ligning (4.10) stadig overholdes. For et system med kendte parametre, kan en sådan tensor kun konstrueres ved $C^{\mu\nu} = q^\mu q^\nu / q^2$, hvilket er veldefineret for en virtuel foton med $q^2 \neq 0$. Dette led dur dog ikke for en reel foton, da denne er masseløs, hvorfor $q_{\text{reel}}^2 = 0$.

11) Feynmandiagrammet for spredningen af elektroner på myoner, $e^- + \mu^- \rightarrow e^- + \mu^-$, til anden orden er vist herunder, og tiden er valgt til at gå opad.



12) Lagrangedentiteten for vekselvirkningen er $\mathcal{L}_I = -(j_\mu^{e^-} + j_\mu^{\mu^-})A^\mu = -J_\mu A^\mu$, hvor $j_\mu^{e^-}$ og $j_\mu^{\mu^-}$ er strømmen for hhv. elektronen og myonen og J_μ er den totale firstrøm, og da \mathcal{L}_I ikke indeholder nogle differentialer, så er Hamiltondensiteten af vekselvirkningen $\mathcal{H} = -\mathcal{L}_I = J_\mu A^\mu$. Fra [2, lign. 56 og 59] har vi, at S-matrixelementet til anden orden kan skrives som

$$S_{fi}^{(2)} = \frac{(-i)^2}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 \langle f | T[\mathcal{H}_I(x_1)\mathcal{H}_I(x_2)] | i \rangle . \quad (4.67)$$

Siden udregningen er for spredningen af en elektron med impuls $\vec{\mathbf{p}}_1$ og helicitet λ_1 over i en elektron med $\vec{\mathbf{p}}_3$ og λ_3 , når den spredes på en myon med impuls $\vec{\mathbf{p}}_2$ og helicitet λ_2 over i en elektron med $\vec{\mathbf{p}}_4$ og λ_4 , da bliver start- og sluttilstanden

$$|i\rangle = |e^-, \vec{\mathbf{p}}_1, \lambda_1; \mu^-, \vec{\mathbf{p}}_2, \lambda_2\rangle \quad \text{og} \quad |f\rangle = |e^-, \vec{\mathbf{p}}_3, \lambda_3; \mu^-, \vec{\mathbf{p}}_4, \lambda_4\rangle . \quad (4.68)$$

Vi kan nu udregne S-matrixelementet

$$\begin{aligned}
S_{fi}^{(2)} &= \frac{(-i)^2}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 \langle f | T[\mathcal{H}_I(x_1)\mathcal{H}_I(x_2)] | i \rangle \\
&= \frac{(-i)^2}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 \langle f | T[J_\mu(x_1)A^\mu(x_1)J_\nu(x_2)A^\nu(x_2)] | i \rangle \\
&= \frac{(-i)^2}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 \langle f | J_\mu(x_1)J_\nu(x_2) | i \rangle \langle 0 | T[A^\mu(x_1)A^\nu(x_2)] | 0 \rangle \\
&= \frac{(-i)^2}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 \left\langle f \left| \left(j_\mu^{e^-}(x_1) + j_\mu^{\mu^-}(x_1) \right) \left(j_\nu^{e^-}(x_2) + j_\nu^{\mu^-}(x_2) \right) \right| i \right\rangle \\
&\quad \times \langle 0 | T[A^\mu(x_1)A^\nu(x_2)] | 0 \rangle \\
&= \frac{(-i)^2}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 \left(\left\langle f \left| j_\mu^{e^-}(x_1)j_\nu^{e^-}(x_2) \right| i \right\rangle + \left\langle f \left| j_\mu^{e^-}(x_1)j_\nu^{\mu^-}(x_2) \right| i \right\rangle \right. \\
&\quad \left. + \left\langle f \left| j_\mu^{\mu^-}(x_1)j_\nu^{e^-}(x_2) \right| i \right\rangle + \left\langle f \left| j_\mu^{\mu^-}(x_1)j_\nu^{\mu^-}(x_2) \right| i \right\rangle \right) \\
&\quad \times \langle 0 | T[A^\mu(x_1)A^\nu(x_2)] | 0 \rangle \\
&= \frac{(-i)^2}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 \\
&\quad \times \left(\left\langle e^-, \vec{\mathbf{p}}_3, \lambda_3 \left| j_\mu^{e^-}(x_1)j_\nu^{e^-}(x_2) \right| e^-, \vec{\mathbf{p}}_1, \lambda_1 \right\rangle \left\langle \mu^-, \vec{\mathbf{p}}_4, \lambda_4 \left| \mu^-, \vec{\mathbf{p}}_2, \lambda_2 \right\rangle \right. \\
&\quad + \left\langle e^-, \vec{\mathbf{p}}_3, \lambda_3 \left| j_\mu^{e^-}(x_1) \right| e^-, \vec{\mathbf{p}}_1, \lambda_1 \right\rangle \left\langle \mu^-, \vec{\mathbf{p}}_4, \lambda_4 \left| j_\nu^{\mu^-}(x_2) \right| \mu^-, \vec{\mathbf{p}}_2, \lambda_2 \right\rangle \\
&\quad + \left\langle \mu^-, \vec{\mathbf{p}}_4, \lambda_4 \left| j_\mu^{\mu^-}(x_1) \right| \mu^-, \vec{\mathbf{p}}_2, \lambda_2 \right\rangle \left\langle e^-, \vec{\mathbf{p}}_3, \lambda_3 \left| j_\nu^{e^-}(x_2) \right| e^-, \vec{\mathbf{p}}_1, \lambda_1 \right\rangle \\
&\quad \left. + \left\langle e^-, \vec{\mathbf{p}}_3, \lambda_3 \left| e^-, \vec{\mathbf{p}}_1, \lambda_1 \right\rangle \left\langle \mu^-, \vec{\mathbf{p}}_4, \lambda_4 \left| j_\mu^{\mu^-}(x_1)j_\nu^{\mu^-}(x_2) \right| \mu^-, \vec{\mathbf{p}}_2, \lambda_2 \right\rangle \right) \\
&\quad \times \langle 0 | T[A^\mu(x_1)A^\nu(x_2)] | 0 \rangle, \tag{4.69}
\end{aligned}$$

hvor vi har kunnet opdele matrixelementerne i den sidste lighed, da operatorerne kun virker på deres eget rum, altså $j_\mu^{e^-}$ virker kun på $|e^- \rangle$.

Af de fire strømled i ligning (4.69) svarer det første og sidste blot til hhv. at elektronen og myonen vekselvirker med sig selv gennem en foton, men siden dette ikke er spredningen, som vi regner på, da kan disse led negligeres. Kigger vi nu på det tredje led og lader $x_1 \leftrightarrow x_2$ og $\mu \leftrightarrow \nu$ får vi, at

$$\begin{aligned}
&\left\langle \mu^-, \vec{\mathbf{p}}_4, \lambda_4 \left| j_\nu^{\mu^-}(x_2) \right| \mu^-, \vec{\mathbf{p}}_2, \lambda_2 \right\rangle \left\langle e^-, \vec{\mathbf{p}}_3, \lambda_3 \left| j_\mu^{e^-}(x_1) \right| e^-, \vec{\mathbf{p}}_1, \lambda_1 \right\rangle \\
&\quad \times \langle 0 | T[A^\nu(x_2)A^\mu(x_1)] | 0 \rangle \\
&= \left\langle e^-, \vec{\mathbf{p}}_3, \lambda_3 \left| j_\mu^{e^-}(x_1) \right| e^-, \vec{\mathbf{p}}_1, \lambda_1 \right\rangle \left\langle \mu^-, \vec{\mathbf{p}}_4, \lambda_4 \left| j_\nu^{\mu^-}(x_2) \right| \mu^-, \vec{\mathbf{p}}_2, \lambda_2 \right\rangle \\
&\quad \times \langle 0 | T[A^\mu(x_1)A^\nu(x_2)] | 0 \rangle, \tag{4.70}
\end{aligned}$$

da $T[A^\mu(x_1)A^\nu(x_2)] = T[A^\nu(x_2)A^\mu(x_1)]$. Dermed er andet og tredje led i lig-

ning (4.69) ens, hvorfor S-matrixelementet til anden orden bliver

$$\begin{aligned} S_{fi}^{(2)} &= (-i)^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \left\langle e^-, \vec{\mathbf{p}}_3, \lambda_3 \left| j_\mu^{e-}(x_1) \right| e^-, \vec{\mathbf{p}}_1, \lambda_1 \right\rangle \\ &\quad \times \left\langle \mu^-, \vec{\mathbf{p}}_4, \lambda_4 \left| j_\nu^{\mu-}(x_2) \right| \mu^-, \vec{\mathbf{p}}_2, \lambda_2 \right\rangle \langle 0 | T[A^\mu(x_1)A^\nu(x_2)] | 0 \rangle \quad (4.71) \\ &= (-i)^2 \int d^4x_1 d^4x_2 J_\mu^{e-}(x_1) J_\nu^{\mu-}(x_2) \langle 0 | T[A^\mu(x_1)A^\nu(x_2)] | 0 \rangle \end{aligned}$$

hvor vi har defineret

$$J_\mu^{e-}(x_1) = \left\langle e^-, \vec{\mathbf{p}}_3, \lambda_3 \left| j_\mu^{e-}(x_1) \right| e^-, \vec{\mathbf{p}}_1, \lambda_1 \right\rangle \quad \text{og} \quad (4.72a)$$

$$J_\nu^{\mu-}(x_2) = \left\langle \mu^-, \vec{\mathbf{p}}_4, \lambda_4 \left| j_\nu^{\mu-}(x_2) \right| \mu^-, \vec{\mathbf{p}}_2, \lambda_2 \right\rangle, \quad (4.72b)$$

hvilke er præcis på formen for ligning (4.6a) og dermed kun giver noget for $j_\mu^{(1)}$ -strømmen fra ligning (4.39a), hvorfor disse eksplicit bliver

$$J_\mu^{e-}(x_1) = -e\bar{u}(\vec{\mathbf{p}}_3, \lambda_3) \gamma_\mu u(\vec{\mathbf{p}}_1, \lambda_1) \exp(i[p_3 - p_1]x_1) \quad \text{og} \quad (4.73a)$$

$$J_\nu^{\mu-}(x_2) = -e\bar{u}(\vec{\mathbf{p}}_4, \lambda_4) \gamma_\mu u(\vec{\mathbf{p}}_2, \lambda_2) \exp(i[p_4 - p_2]x_2). \quad (4.73b)$$

Dermed er ligning (4.12) vist.

13) For $G^{\mu\nu}(q)$ værende impulsrumspagatoren for fotonen må $\langle 0 | T[A^\mu(x)A^\nu(0)] | 0 \rangle$ være stedrumsfotonpagatoren grundet den inverse Fouriertransformation. At $\langle 0 | T[A^\mu(x)A^\nu(0)] | 0 \rangle$ giver mening som værende fotonpagatoren i stedrum vises herunder.

Kvantiseringen af feltet for en foton er [7, lign. 8]

$$A^\mu(x) = \sum_\sigma \int \frac{d^3\vec{\mathbf{p}}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{\mathbf{p}}}}} \left[\varepsilon^\mu(\sigma) a_{\vec{\mathbf{p}},\sigma} \exp(-ipx) + \varepsilon^\mu(\sigma)^* a_{\vec{\mathbf{p}},\sigma}^\dagger \exp(ipx) \right], \quad (4.74)$$

så hvis stedrumspagatoren udregnes, fås

$$\begin{aligned}
& \langle 0 | T [A^\mu(x) A^\nu(0)] | 0 \rangle \\
&= \left\langle 0 \left| \left\{ \sum_{\sigma} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \left[\varepsilon^\mu(\sigma) a_{\vec{p},\sigma} \exp(-ipx) + \varepsilon^\mu(\sigma)^* a_{\vec{p},\sigma}^\dagger \exp(ipx) \right] \right\} \right. \right. \\
&\quad \times \left. \left\{ \sum_{\sigma'} \int \frac{d^3 \vec{p}'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}'}}} \left[\varepsilon^\nu(\sigma') a_{\vec{p}',\sigma'} + \varepsilon^\nu(\sigma')^* a_{\vec{p}',\sigma'}^\dagger \right] \right\} \right| 0 \rangle \\
&= \theta(t) \sum_{\sigma, \sigma'} \int \frac{d^3 \vec{p} d^3 \vec{p}'}{(2\pi)^6} \frac{1}{2\sqrt{\omega_{\vec{p}} \omega_{\vec{p}'}}} \langle 0 | \left[\varepsilon^\mu(\sigma) a_{\vec{p},\sigma} \exp(-ipx) + \varepsilon^\mu(\sigma)^* a_{\vec{p},\sigma}^\dagger \exp(ipx) \right] \\
&\quad \times \left[\varepsilon^\nu(\sigma') a_{\vec{p}',\sigma'} + \varepsilon^\nu(\sigma')^* a_{\vec{p}',\sigma'}^\dagger \right] | 0 \rangle \\
&\quad + \theta(-t) \sum_{\sigma, \sigma'} \int \frac{d^3 \vec{p} d^3 \vec{p}'}{(2\pi)^6} \frac{1}{2\sqrt{\omega_{\vec{p}} \omega_{\vec{p}'}}} \langle 0 | \left[\varepsilon^\nu(\sigma') a_{\vec{p}',\sigma'} + \varepsilon^\nu(\sigma')^* a_{\vec{p}',\sigma'}^\dagger \right] \\
&\quad \times \left[\varepsilon^\mu(\sigma) a_{\vec{p},\sigma} \exp(-ipx) + \varepsilon^\mu(\sigma)^* a_{\vec{p},\sigma}^\dagger \exp(ipx) \right] | 0 \rangle \\
&= \theta(t) \sum_{\sigma, \sigma'} \int \frac{d^3 \vec{p} d^3 \vec{p}'}{(2\pi)^6} \frac{1}{2\sqrt{\omega_{\vec{p}} \omega_{\vec{p}'}}} \langle 0 | \varepsilon^\mu(\sigma) a_{\vec{p},\sigma} \exp(-ipx) \varepsilon^\nu(\sigma')^* a_{\vec{p}',\sigma'}^\dagger | 0 \rangle \\
&\quad + \theta(-t) \sum_{\sigma, \sigma'} \int \frac{d^3 \vec{p} d^3 \vec{p}'}{(2\pi)^6} \frac{1}{2\sqrt{\omega_{\vec{p}} \omega_{\vec{p}'}}} \langle 0 | \varepsilon^\nu(\sigma') a_{\vec{p}',\sigma'} \varepsilon^\mu(\sigma)^* a_{\vec{p},\sigma}^\dagger \exp(ipx) | 0 \rangle \\
&= \theta(t) \sum_{\sigma, \sigma'} \int \frac{d^3 \vec{p} d^3 \vec{p}'}{(2\pi)^6} \frac{1}{2\sqrt{\omega_{\vec{p}} \omega_{\vec{p}'}}} \varepsilon^\mu(\sigma) \varepsilon^\nu(\sigma')^* \exp(-ipx) (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{\sigma, \sigma'} \\
&\quad + \theta(-t) \sum_{\sigma, \sigma'} \int \frac{d^3 \vec{p} d^3 \vec{p}'}{(2\pi)^6} \frac{1}{2\sqrt{\omega_{\vec{p}} \omega_{\vec{p}'}}} \varepsilon^\nu(\sigma') \varepsilon^\mu(\sigma)^* \exp(ipx) (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{\sigma, \sigma'} \\
&= \theta(t) \sum_{\sigma} \varepsilon^\mu(\sigma) \varepsilon^\nu(\sigma)^* \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\vec{p}}} \exp(-ipx) \\
&\quad + \theta(-t) \sum_{\sigma} \varepsilon^\nu(\sigma) \varepsilon^\mu(\sigma)^* \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\vec{p}}} \exp(ipx) \\
&= \theta(t) (-g^{\mu\nu}) \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\vec{p}}} \exp(-ipx) + \theta(-t) (-g^{\nu\mu}) \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\vec{p}}} \exp(ipx) \\
&= -g^{\mu\nu} \left[\theta(t) \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\vec{p}}} \exp(-ipx) + \theta(-t) \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\vec{p}}} \exp(ipx) \right], \tag{4.75}
\end{aligned}$$

hvor identiteten fra **10**), ligning (4.11), er blevet benyttet, hvor det også noteres, at $\sum_{\sigma} \varepsilon^\mu(\sigma) \varepsilon^\nu(\sigma)^* = [\sum_{\sigma} \varepsilon^\mu(\sigma)^* \varepsilon^\nu(\sigma)]^* = [-g^{\mu\nu}]^* = -g^{\mu\nu}$, da $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1)$. Yderligere er det blevet benyttet, at kun ledene, hvor en partikel først skabes og derefter annihileres overlever, idet at $a_{\vec{p},\sigma} | 0 \rangle = 0 \xrightarrow{\text{DC}} \langle 0 | a_{\vec{p},\sigma}^\dagger = 0$, samt gjort brug at de bosoniske kommutatorrelationer, $[a_{\vec{p},\sigma}, a_{\vec{p}',\sigma'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{\sigma, \sigma'}$.

Udtrykket i parentes i ligning (4.75) er præcis Klein-Gordon-propagatoren $\langle 0 | T[\varphi(x) \varphi(0)] | 0 \rangle$ for et skalarfelt φ ([5, lign. 40]), så

$$\langle 0 | T[A^\mu(x) A^\nu(0)] | 0 \rangle = -g^{\mu\nu} \langle 0 | T[\varphi(x) \varphi(0)] | 0 \rangle, \tag{4.76}$$

hvorfor det giver mening at $\langle 0|T[A^\mu(x)A^\nu(0)]|0\rangle$ er fotonpropagatoren i stedrum.

Benytter vi os af udtrykket for Klein-Gordon-stedumspropagatoren fra [5, lign. 40]

$$\langle 0|T[\varphi(x)\varphi(0)]|0\rangle = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m^2} \exp(-iqx) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2} \exp(-iqx) , \quad (4.77)$$

hvor $m = 0$, da der er tale om en reel foton, så ser vi at ligning (4.13) bliver

$$\begin{aligned} G^{\mu\nu}(q) &= \int d^4x \exp(iqx) \langle 0|T[A^\mu(x)A^\nu(0)]|0\rangle \\ &= -g^{\mu\nu} \int d^4x \exp(iqx) \langle 0|T[\varphi(x)\varphi(0)]|0\rangle \\ &= \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2} , \end{aligned} \quad (4.78)$$

da vi tager den inverse Fouriertransformation ([2, lign. 72]) af en fouriertransformation ([2, lign. 71]) af en funktion, hvilket blot giver funktionen selv ([8, lign. 2.6], $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]] = f$). Dermed er ligning (4.13) vist.

14) Vi starter med at translaterer $J_\mu^{e^-}(x_1)$, $J_\nu^{\mu^-}(x_2)$ og matrixelementet med tidsombytningsoperatoren fra ligning (4.12), hvilket gøres ved at lade P være den totale firimpulsoperator, $x = x_1 - x_2$ og $Px = P^\mu x_\mu$ være sammentrækningen (eng: the contraction) af to firvektorer. Da får vi følgende

$$\begin{aligned} J_\mu^{e^-}(x_1) &= \left\langle e^-, \vec{\mathbf{p}}_3, \lambda_3 \left| j_\mu^{e^-}(x_1) \right| e^-, \vec{\mathbf{p}}_1, \lambda_1 \right\rangle \\ &= \left\langle e^-, \vec{\mathbf{p}}_3, \lambda_3 \left| \exp(iPx_1) j_\mu^{e^-}(0) \exp(-iPx_1) \right| e^-, \vec{\mathbf{p}}_1, \lambda_1 \right\rangle \\ &= \left\langle e^-, \vec{\mathbf{p}}_3, \lambda_3 \left| \exp(ip_3x_1) j_\mu^{e^-}(0) \exp(-ip_1x_1) \right| e^-, \vec{\mathbf{p}}_1, \lambda_1 \right\rangle \\ &= \exp(ip_3x_1) \exp(-ip_1x_1) \left\langle e^-, \vec{\mathbf{p}}_3, \lambda_3 \left| j_\mu^{e^-}(0) \right| e^-, \vec{\mathbf{p}}_1, \lambda_1 \right\rangle \\ &= \exp(i[p_3 - p_1]x_1) J_\mu^{e^-}(0) \\ &= \exp(i[p_3 - p_1]x) \exp(i[p_3 - p_1]x_2) J_\mu^{e^-}(0) , \end{aligned} \quad (4.79)$$

$$\begin{aligned} J_\nu^{\mu^-}(x_2) &= \left\langle \mu^-, \vec{\mathbf{p}}_4, \lambda_4 \left| j_\nu^{\mu^-}(x_2) \right| \mu^-, \vec{\mathbf{p}}_2, \lambda_2 \right\rangle \\ &= \left\langle \mu^-, \vec{\mathbf{p}}_4, \lambda_4 \left| \exp(iPx_2) j_\nu^{\mu^-}(0) \exp(-iPx_2) \right| \mu^-, \vec{\mathbf{p}}_2, \lambda_2 \right\rangle \\ &= \left\langle \mu^-, \vec{\mathbf{p}}_4, \lambda_4 \left| \exp(ip_4x_2) j_\nu^{\mu^-}(0) \exp(-ip_2x_2) \right| \mu^-, \vec{\mathbf{p}}_2, \lambda_2 \right\rangle \\ &= \exp(ip_4x_2) \exp(-ip_2x_2) \left\langle \mu^-, \vec{\mathbf{p}}_4, \lambda_4 \left| j_\nu^{\mu^-}(0) \right| \mu^-, \vec{\mathbf{p}}_2, \lambda_2 \right\rangle \\ &= \exp(i[p_4 - p_2]x_2) J_\nu^{\mu^-}(0) , \quad \text{og} \end{aligned} \quad (4.80)$$

$$\begin{aligned}
& \langle 0 | T[A^\mu(x_1)A^\nu(x_2)] | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | T[A^\mu(x_1) \exp(iPx_2) A^\nu(0) \exp(-iPx_2)] | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | T[\mathbb{1}A^\mu(x_1) \exp(iPx_2) A^\nu(0) \exp(-iPx_2)] | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | T[\exp(iPx_2) \exp(-iPx_2) A^\mu(x_1) \exp(iPx_2) A^\nu(0) \exp(-iPx_2)] | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | T[\exp(iPx_2) A^\mu(x_1 - x_2) A^\nu(0) \exp(-iPx_2)] | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | \exp(-i\vec{p} \cdot \vec{x}_2) T[\exp(iEt_2) A^\mu(x) A^\nu(0) \exp(-iEt_2)] \exp(i\vec{p} \cdot \vec{x}_2) | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | \exp(0) T[\exp(iEt_2) \exp(-iEt_2) A^\mu(x) A^\nu(0)] \exp(0) | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | T[A^\mu(x) A^\nu(0)] | 0 \rangle ,
\end{aligned} \tag{4.81}$$

hvor eksponentialfunktionerne udenfor tidsombytningsoperatoren "forsvinder", da $\exp(0) = 1$, og eksponentialfunktionerne indenfor tidsombytningsoperatoren kan rykkes hen til hinanden, da tidsombytningsoperatoren sørger for, at operatorerne står tidsordnet og eksponentialerne har samme tid t_2 , så de vil stå sammen og dermed danner de en identitet.

Indsætter vi disse beregninger i udtrykket fra **12)**, ligning (4.12), får vi

$$\begin{aligned}
S_{fi}^{(2)} &= (-i)^2 \int d^4x_1 d^4x_2 J_\mu^{e-}(x_1) J_\nu^{\mu-}(x_2) \langle 0 | T[A^\mu(x_1)A^\nu(x_2)] | 0 \rangle \\
&= (-i)^2 \int d^4x_2 d^4x \exp(i[p_3 - p_1]x) \exp(i[p_3 - p_1]x_2) J_\mu^{e-}(0) \\
&\quad \times \exp(i[p_4 - p_2]x_2) J_\nu^{\mu-}(0) \langle 0 | T[A^\mu(x)A^\nu(0)] | 0 \rangle \\
&= (-i)^2 J_\mu^{e-}(0) J_\nu^{\mu-}(0) \int d^4x_2 \exp(i[p_3 + p_4 - p_1 - p_2]x_2) \\
&\quad \times \int d^4x \exp(i[p_3 - p_1]x) \langle 0 | T[A^\mu(x)A^\nu(0)] | 0 \rangle \\
&= (-i)^2 J_\mu^{e-}(0) J_\nu^{\mu-}(0) (2\pi)^4 \delta^4(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) \frac{-ig^{\mu\nu}}{(p_3 - p_1)^2} \\
&= \left(-iJ_\mu^{e-}(0)\right) \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2} \left(-iJ_\nu^{\mu-}(0)\right) (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) ,
\end{aligned} \tag{4.82}$$

hvor vi har benyttet propagatoren fundet i **13)** (ligning (4.13)), samt at vi betegner startimpulsen $p_i = p_1 + p_2$, slutimpulsen betegnes $p_f = p_3 + p_4$ og fotonens impuls betegnes $q = p_1 - p_3$. Sammenligner vi ligning (4.82) med den generelle definition af S-matrixelementet til anden orden, $S_{fi}^{(2)} = -i\mathcal{M}_{fi}(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i)$, så ses det, at

$$-i\mathcal{M}_{fi} = \left(-iJ_\mu^{e-}(0)\right) \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2} \left(-iJ_\nu^{\mu-}(0)\right) , \tag{4.83}$$

hvilket skulle vises.

15) Først bemærkes det, at der er bevarelse af firimpulsen, altså er $p_i = p_f$, hvor i og f betegner hhv. start- og sluttilstanden. Af dette følger, at

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4 \tag{4.84}$$

$$\Rightarrow p_1 - p_4 = p_3 - p_2 . \quad (4.85)$$

Ydermere er kvadratet på firimpulsen

$$p^\mu p_\mu = E^2 - \vec{p}^2 = (\vec{p}^2 + m^2) - \vec{p}^2 = m^2 . \quad (4.86)$$

Betragter vi først ligning (4.84) og vælger at kvadrere begge sider, da fås

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 &= p_3 + p_4 \\ \Rightarrow p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2 &= p_3^2 + p_4^2 + 2p_3p_4 \\ \Rightarrow m_e^2 + m_\mu^2 + 2p_1p_2 &= m_e^2 + m_\mu^2 + 2p_3p_4 \\ \Rightarrow p_1p_2 &= p_3p_4 , \end{aligned} \quad (4.87)$$

da p_1 og p_3 er hhv. den indgående og udgående impuls for elektronen, mens p_2 og p_4 hhv. er den indgående og udgående impuls for myonen, altså $p_1^2 = p_3^2 = m_e^2$ og $p_2^2 = p_4^2 = m_\mu^2$.

Betragter vi nu ligning (4.85) og kvadrerer igen fås

$$\begin{aligned} p_1 - p_4 &= -p_2 + p_3 \\ \Rightarrow p_1^2 + p_4^2 - 2p_1p_4 &= p_2^2 + p_3^2 - 2p_2p_3 \\ \Rightarrow m_e^2 + m_\mu^2 - 2p_1p_4 &= m_\mu^2 + m_e^2 - 2p_2p_3 \\ \Rightarrow p_1p_4 &= p_2p_3 . \end{aligned} \quad (4.88)$$

Indsætter vi ligningerne (4.87) og (4.88) i den kvadrerede amplitude, hvor der er summeret over sluttillstande og taget gennemsnit af ståtillstandene, ligning (4.15), fås

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 &= \frac{8e^4}{q^4} ([p_1p_2] [p_3p_4] + [p_1p_4] [p_2p_3]) \\ &= \frac{8e^4}{q^4} ([p_1p_2] [p_1p_2] + [p_1p_4] [p_1p_4]) \\ &= \frac{8e^4}{q^4} ([p_1p_2]^2 + [p_1p_4]^2) . \end{aligned} \quad (4.89)$$

Når vi er i massemidt punktssystemet, da er $p_i = p_f = 0$, altså $\vec{p}_2 = -\vec{p}_1$ og $\vec{p}_4 = -\vec{p}_3$, og da vi betragter det hyperrelativistiske tilfælde $\vec{p} \gg m_n$ (hvor n betegner elektronen eller myonen), så er $E \simeq |\vec{p}|$, og faktisk er $E = E_1 = E_2 = E_3 = E_4$. Betragter vi nu de to kvadrerede led i ligning (4.89) ses, at

$$\begin{aligned} (p_1p_2)^2 &= (E_1E_2 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2)^2 \\ &= \left(EE - \vec{p}_1 \cdot [-\vec{p}_1] \right)^2 \\ &= (E^2 + \vec{p}_1^2)^2 \\ &\simeq (E^2 + E^2)^2 \\ &= 4E^4 , \end{aligned} \quad (4.90)$$

$$\begin{aligned}
 (p_1 p_4)^2 &= (E_1 E_4 - \vec{\mathbf{p}}_1 \cdot \vec{\mathbf{p}}_4)^2 \\
 &= \left(EE - \vec{\mathbf{p}}_1 \cdot [-\vec{\mathbf{p}}_3] \right)^2 \\
 &= (E^2 + \vec{\mathbf{p}}_1 \cdot \vec{\mathbf{p}}_3)^2 \\
 &= \left[E^2 + |\vec{\mathbf{p}}_1| |\vec{\mathbf{p}}_3| \cos(\theta) \right]^2 \\
 &\simeq \left[E^2 \{1 + \cos(\theta)\} \right]^2 \\
 &= \left[2E^2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right]^2 \\
 &= 4E^4 \cos^4 \left(\frac{\theta}{2} \right),
 \end{aligned} \tag{4.91}$$

hvor den trigonometriske identitet $2 \cos^2(A) = 1 + \cos(2A)$ er blevet benyttet. Sidst vil vi kigge på ledet q^4 , hvor $q = p_1 - p_3$ er impulsoverførslen, hvorfor

$$\begin{aligned}
 q^4 &= (p_1 - p_3)^4 \\
 &= (p_1^2 + p_3^2 - 2p_1 p_3)^2 \\
 &= \left(m_e^2 + m_e^2 - 2[E_1 E_3 - \vec{\mathbf{p}}_1 \cdot \vec{\mathbf{p}}_3] \right)^2 \\
 &= \left(m_e^2 + m_e^2 - 2[EE - |\vec{\mathbf{p}}_1| |\vec{\mathbf{p}}_3| \cos(\theta)] \right)^2 \\
 &\simeq \left(m_e^2 + m_e^2 - 2E^2 [1 - \cos(\theta)] \right)^2 \\
 &\approx \left(-2E^2 [1 - \cos(\theta)] \right)^2 \\
 &= \left(-2E^2 \left[2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \right)^2 \\
 &= 16E^4 \sin^4 \left(\frac{\theta}{2} \right),
 \end{aligned} \tag{4.92}$$

hvor den trigonometriske identitet $2 \sin^2(A) = 1 - \cos(2A)$ er blevet benyttet. Indsætter vi nu ligningerne (4.90) til (4.92) i ligning (4.89) fås

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 &= \frac{8e^4}{q^4} ([p_1 p_2]^2 + [p_1 p_4]^2) \\
 &= \frac{8e^4}{16E^4 \sin^4 \left(\frac{\theta}{2} \right)} \left[4E^4 + 4E^4 \cos^4 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \\
 &= \frac{8e^4}{4 \sin^4 \left(\frac{\theta}{2} \right)} \left[1 + \cos^4 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \\
 &= \frac{2e^4}{\sin^4 \left(\frac{\theta}{2} \right)} \left[1 + \cos^4 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right],
 \end{aligned} \tag{4.93}$$

hvilket er ligning (4.17), som skulle vises.

16) Fra [9, lign. 6.129] vides det, at det generelle udtryk for tværsnittet i masse-midtpunktssystemet af en spredning mellem to partikler er

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{CM} = \frac{1}{(8\pi E_i)^2} |\mathcal{M}_{fi}|^2, \quad (4.94)$$

hvor E_i er den indkomne energi. Denne formel kan benyttes, da vi er i højenergi-grænsen, altså $p \gg m$, hvorfor masserne er negligerbare.

For elektron-myon-spredningen bliver tværsnittet

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{CM} &= \frac{1}{(8\pi E_i)^2} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \\ &= \frac{1}{(8\pi[E_1 + E_2])^2} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \\ &= \frac{1}{(8\pi[E + E])^2} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \\ &= \frac{1}{(16\pi E)^2} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \\ &= \frac{1}{(8\pi E)^2} \frac{1}{4} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \\ &= \frac{1}{(8\pi E)^2} \frac{2e^4}{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} \left[1 + \cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \\ &= \frac{2e^4}{64\pi^2 E^2} \frac{1 + \cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\ &= \frac{\alpha^2}{2E_{CM}^2} \frac{1 + \cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}, \end{aligned} \quad (4.95)$$

hvor $E = E_{CM}$ er energien i massemidtpunktssystemet, $\alpha = e^2/(4\pi)$ er finstruktur-konstanten (i naturlige enheder), og resultatet fra **15)** (ligning (4.17)) er blevet benyttet.

Vi kigger nu på funktionsopførslen af ligning (4.17), når $\theta \rightarrow 0$, hvilket gør at

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{CM} (\theta \rightarrow 0) = \frac{\alpha^2}{2E_{CM}^2} \frac{1 + \cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} \simeq \frac{\alpha^2}{2E_{CM}^2} \frac{1 + 1^4}{\left(\frac{\theta}{2}\right)^2} = \frac{\alpha^2}{E_{CM}^2 \left(\frac{\theta}{2}\right)^2} \propto \theta^{-4}. \quad (4.96)$$

Nu betragtes Rutherfordtværsnittet ([10, lign. 5.16])

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{CM,R} = \frac{\alpha^2}{16E_{CM}^2 \sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}, \quad (4.97)$$

og tager vi her også grænsen $\theta \rightarrow 0$, får vi

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{CM,R} (\theta \rightarrow 0) = \frac{\alpha^2}{16E_{CM}^2 \sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} \simeq \frac{\alpha^2}{16E_{CM}^2 \left(\frac{\theta}{2}\right)^4} \propto \theta^{-4}. \quad (4.98)$$

Altså er funktionsopførslen for begge tværsnit, at de udvikles som funktion af $(d\sigma/d\Omega)_{CM} \propto \theta^{-4}$ i grænsen hvor $\theta \rightarrow 0$.

17) Først kigger vi på indgående og udgående fermioner og antifermioner. Til dette betragter vi matrixelementerne fra ligning (4.6) **5)**, og sammenligner vi specifikt matrixelementerne med $j_\mu^{(1)}$ og $j_\mu^{(3)}$ (ligningerne (4.6a) og (4.6c)) ses det, at bidraget fra en indgående elektron med impuls \vec{p} og helicitet λ er $u(\vec{p}, \lambda)$, hvormed bidraget fra udgående elektron med impuls \vec{p} og helicitet λ er $\bar{u}(\vec{p}, \lambda)$. Ligeså kan det ved en sammenligning af matrixelementerne med $j_\mu^{(2)}$ og $j_\mu^{(3)}$ (ligningerne (4.6b) og (4.6c)) ses, at en indgående positron med impuls \vec{p} og helicitet λ er $\bar{v}(\vec{p}, \lambda)$ og bidraget fra udgående positron med impuls \vec{p} og helicitet λ er $v(\vec{p}, \lambda)$.

Kigger vi nu på fotonens bidrag, så ses det ud fra kvantiseringen af feltet for en foton, [7, lign. 8]

$$A^\mu(x) = \sum_\sigma \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \left[\varepsilon^\mu(\sigma) a_{\vec{p},\sigma} \exp(-ipx) + \varepsilon^\mu(\sigma)^* a_{\vec{p},\sigma}^\dagger \exp(ipx) \right], \quad (4.99)$$

ses, at en indkommende foton giver anledning til et bidrag af $\varepsilon^\mu(\sigma)$, mens en udgående foton giver anledning til et bidrag af $\varepsilon^\mu(\sigma)^*$ [11, s. 123].

Som det næste har vi propagatorerne, hvor vi i Problemset 3, opg. 4.7 [5, lign. 34] har udregnet fermionpropagatoren til

$$G_{F_{\alpha\beta}}(p_\mu) = \frac{i(\not{p} + m)_{\alpha\beta}}{p^2 - m^2}, \quad (4.100)$$

hvor p er firimpulsen af fermionen, og i **13)** (ligning (4.13)) fandt vi fotonpropagatoren til

$$G_\gamma^{\mu\nu}(q_\mu) = \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2}, \quad (4.101)$$

hvor q er firimpulsen, som overføres gennem denne propagator og $g^{\mu\nu}$ er den metriske tensor i Minkowskimetrikken.

Sidst kigger vi på knudepunkterne. Ud fra ligning (4.14) i **14)** samt ligning (4.73) kan det ses, at de resterende bidrag, når vi har taget højde for indgående og udgående partikler samt propagatorer, må være fra knudepunkterne, hvorfor disse må være $ie\gamma_\mu$ for hvert knudepunkt. Dog har vi kun kigget på fermioner i vores beregninger, men havde vi kigget på antifermioner ville det ses, at de ville bidrage med en knudepunktsfaktor på $-ie\gamma_\mu$ [12, s. 106].

For at opsummere, så er Feynmanreglerne for kvanteelektrodynamik

- En indgående fermioner bidrager med $u(\vec{p}, \lambda)$.
- En udgående fermion bidrager med $\bar{u}(\vec{p}, \lambda)$.
- En indgående antifermion bidrager med $\bar{v}(\vec{p}, \lambda)$.

- En udgående antifermion bidrager med $v(\vec{p}, \lambda)$.
- En indgående foton bidrager med $\varepsilon^\mu(\sigma)$.
- En udgående foton bidrager med $\varepsilon^\mu(\sigma)^*$.
- En fermion propagator bidrager med $i(\not{p} + m)_{\alpha\beta}/(p^2 - m^2)$.¹⁰
- En foton propagator bidrager med $-ig^{\mu\nu}/q^2$.
- Et knudepunkt for en fermion bidrager med $ie\gamma_\mu$, mens det for en antifermion bidrager med $-ie\gamma_\mu$.

Herudover skal der selvfølgelig være impulsbevarelse i hvert knudepunkt.

¹⁰Dette kan også skrives som

$$G_{\text{fermion}} = \frac{i}{\not{p} - m}, \quad (4.102)$$

da $\not{p}^2 = p^2$, hvis man tager sig i agt for notationen med her at dele med en matrix.

5 En model med to Higgsdubletter

I denne opgave vil vi betragte en model, hvor der er to Higgsfelter med samme kvantetal som dem, vi normalt introducerer i Standardmodellen. Lagrangedensiteten er

$$\mathcal{L} = \left| \left(i\partial_\mu - g\vec{T} \cdot \vec{W}_\mu - g'\frac{1}{2}B_\mu \right) \Phi_1 \right|^2 + \left| \left(i\partial_\mu - g\vec{T} \cdot \vec{W}_\mu - g'\frac{1}{2}B_\mu \right) \Phi_2 \right|^2 - V(\Phi_1, \Phi_2), \quad (5.1)$$

hvor både Φ_1 og Φ_2 er komplekse dubletter med hyperladning $Y = 1$ som i Standardmodellen.

1) Antag at vi spontant ødelægger symmetrien for Higgspotentialet på en sådan måde, at vakuumet kan skrives som

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{v_1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \Phi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{v_2}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

Find gaugebosonernes masser ved dette valg af vakuum.

2) Antag at Higgspotentialet i denne model er på formen

$$V(\Phi_1, \Phi_2) = -\mu_1^2 \Phi_1^\dagger \Phi_1 - \mu_2^2 \Phi_2^\dagger \Phi_2 + \lambda_1^2 \left(\Phi_1^\dagger \Phi_1 \right)^2 + \lambda_2^2 \left(\Phi_2^\dagger \Phi_2 \right)^2 + \lambda_3 \Phi_1^\dagger \Phi_1 \Phi_2^\dagger \Phi_2. \quad (5.3)$$

Find betingelserne for konstanterne μ_i og λ_i for at der er et lokalt minimum på formen brugt i 1).

3) Når vi bruger gaugesymmetri i Standardmodeltilfældet med én Higgsdublet får vi et partikelspektrum med en enkelt ikke-ladet Higgsboson. Betragt hvad der vil ske i tilfældet med to Higgsdubletter. Hvor mange frihedsgrader kan vi eliminere med gauge transformationer og hvor mange er tilbage? Karakterisér alle "Higgs"-partiklerne ud fra deres kvantetal (ladning).

Besvarelse

1) For at finde gaugebosonernes masser ved valget af vakuum som i ligning (5.2), så indsættes disse komplekse dubletter i Lagrangedensiteten i ligning (5.1), hvor vi kun medtager vakuumdelen, da differentialoperatorledene ikke medvirker til at finde masserne, samt vi udelader potentialet, da det heller ikke indeholder nogle led med bosoner

$$\begin{aligned}
& \left| \left(-g\vec{\mathbf{T}} \cdot \vec{\mathbf{W}}_\mu - \frac{g'}{2}B_\mu \right) \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{v_1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \right|^2 + \left| \left(-g\vec{\mathbf{T}} \cdot \vec{\mathbf{W}}_\mu - \frac{g'}{2}B_\mu \right) \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{v_2}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \right|^2 \\
&= \left| \left(-g\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{\mathbf{W}}_\mu - \frac{g'}{2}B_\mu \right) \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{v_1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \right|^2 + \left| \left(-g\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{\mathbf{W}}_\mu - \frac{g'}{2}B_\mu \right) \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{v_2}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \right|^2 \\
&= \frac{1}{8} \left\{ \left| \left(-g\vec{\sigma} \cdot \vec{\mathbf{W}}_\mu - \frac{g'}{2}B_\mu \right) \begin{bmatrix} 0 \\ v_1 \end{bmatrix} \right|^2 + \left| \left(-g\vec{\sigma} \cdot \vec{\mathbf{W}}_\mu - \frac{g'}{2}B_\mu \right) \begin{bmatrix} 0 \\ v_2 \end{bmatrix} \right|^2 \right\} \\
&= \frac{1}{8} \left\{ \left| \begin{bmatrix} g'B_\mu + gW_\mu^{(3)} & g(W_\mu^{(1)} - iW_\mu^{(2)}) \\ g(W_\mu^{(1)} + iW_\mu^{(2)}) & g'B_\mu - gW_\mu^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ v_1 \end{bmatrix} \right|^2 \right. \\
&\quad \left. + \left| \begin{bmatrix} g'B_\mu + gW_\mu^{(3)} & g(W_\mu^{(1)} - iW_\mu^{(2)}) \\ g(W_\mu^{(1)} + iW_\mu^{(2)}) & g'B_\mu - gW_\mu^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ v_2 \end{bmatrix} \right|^2 \right\} \\
&= \frac{1}{8} \left\{ \left| \begin{bmatrix} g(W_\mu^{(1)} - iW_\mu^{(2)}) \\ g'B_\mu - gW_\mu^{(3)} \end{bmatrix} v_1 \right|^2 + \left| \begin{bmatrix} g(W_\mu^{(1)} - iW_\mu^{(2)}) \\ g'B_\mu - gW_\mu^{(3)} \end{bmatrix} v_2 \right|^2 \right\} \\
&= \frac{v_1^2 + v_2^2}{8} \left| \begin{bmatrix} g(W_\mu^{(1)} - iW_\mu^{(2)}) \\ g'B_\mu - gW_\mu^{(3)} \end{bmatrix} \right|^2,
\end{aligned} \tag{5.4}$$

hvilket præcis er udtrykket fundet i [13, lign. 27] med $v^2 \rightarrow v'^2 = v_1^2 + v_2^2$. Feltet for en massiv spin-1-boson har en Lagrangedensitet på formen

$$\mathcal{L}_{S=1,B} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}M^2 A_\mu A^\mu. \tag{5.5}$$

Udskriver vi ligning (5.4) og sammenligner med Lagrangedensiteten i ligning (5.5), hvor vi husker på, at vi kun har medtaget led, som giver masseledet, altså $\frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu$, da får vi

$$\begin{aligned}
& \left| \left(-g\vec{\mathbf{T}} \cdot \vec{\mathbf{W}}_\mu - \frac{g'}{2}B_\mu \right) \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{v_1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \right|^2 + \left| \left(-g\vec{\mathbf{T}} \cdot \vec{\mathbf{W}}_\mu - \frac{g'}{2}B_\mu \right) \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{v_2}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \right|^2 \\
&= \frac{v_1^2 + v_2^2}{8} \left| \begin{bmatrix} g(W_\mu^{(1)} - iW_\mu^{(2)}) \\ g'B_\mu - gW_\mu^{(3)} \end{bmatrix} \right|^2 \\
&= \frac{v_1^2 + v_2^2}{8} \left\{ g^2 [W_\mu^{(1)}]^2 + g^2 [W_\mu^{(2)}]^2 + [g'B_\mu - gW_\mu^{(3)}]^2 \right\} \\
&= \left(\frac{g\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}{2} \right)^2 \left(\frac{[W_\mu^{(1)}]^2 + [W_\mu^{(2)}]^2}{2} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{g^2 + g'^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}{2} \right)^2 \left(\frac{g'B_\mu - gW_\mu^{(3)}}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \right)^2 \\
&= m_{W^\pm}^2 W_\mu^+ (W^-)^\mu + \frac{1}{2}m_Z^2 Z_\mu Z^\mu,
\end{aligned} \tag{5.6}$$

hvor vi har benyttet, at $W_\mu^\pm = (W_\mu^1 \mp iW_\mu^2)/\sqrt{2}$ ([13, opg. 4]) og $Z_\mu = [gW_\mu^{(3)} - g'B_\mu]/\sqrt{g^2 + g'^2}$ ([13, lign. 4 og 12]), og det skal noteres, at $1/2$ foran m_{W^\pm} bliver slugt, idet vi har to identiske led ([13, lign. 30])

$$\vec{W}_{\mu\nu} \cdot \vec{W}^{\mu\nu} \rightarrow 2W_{\mu\nu}^+ (W^-)^{\mu\nu} + Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu}. \quad (5.7)$$

Dermed er gaugebosonernes masser

$$m_{W^\pm} = \frac{g\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}{2} \quad \text{og} \quad m_Z = \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}{2}, \quad (5.8)$$

hvor hvilket er samme masser som fundet i [13, opg. 17], hvor vi blot har ladet $v \rightarrow v' = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.

2) Higgspotentialet indeholder kun felterne i sammensætningen $\Phi_i^\dagger \Phi_i$ som er positiv og reel. For at lette notationen defineres derfor $x_i = |\Phi_i|^2$, hvormed potentialet i ligning (5.3) bliver

$$V(x_1, x_2) = -\mu_1^2 x_1 - \mu_2^2 x_2 + \lambda_1^2 x_1^2 + \lambda_2^2 x_2^2 + \lambda_3 x_1 x_2. \quad (5.9)$$

Først finder vi minimum ved at differentierer potentialet med hensyn til hvert felt og sætter dette lig nul,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial V}{\partial x_1} = -\mu_1^2 + 2\lambda_1^2 x_1 + \lambda_3 x_2 & \text{og} \\ 0 &= \frac{\partial V}{\partial x_2} = -\mu_2^2 + 2\lambda_2^2 x_2 + \lambda_3 x_1, \end{aligned} \quad (5.10)$$

fra hvilket x_1 og x_2 kan findes som

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2\lambda_2^2 \mu_1^2 - \lambda_3 \mu_2^2}{4\lambda_1^2 \lambda_2^2 - \lambda_3^2} & \text{og} \\ x_2 &= \frac{2\lambda_1^2 \mu_2^2 - \lambda_3 \mu_1^2}{4\lambda_1^2 \lambda_2^2 - \lambda_3^2} \end{aligned} \quad (5.11)$$

under antagelse af at $4\lambda_1^2 \lambda_2^2 - \lambda_3^2 \neq 0$ og $\lambda_2 \neq 0$.

Siden potentialet skal være et minimum for både x_1 og x_2 separat, så skal krumingen være positiv for begge,

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} = 2\lambda_1^2 & \text{og} \\ 0 &< \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} = 2\lambda_2^2, \end{aligned} \quad (5.12)$$

hvormed og da det lokale minimum skal være et minimum for begge felter samtidig, da kræves det yderligere, at determinanten af Hessematrixen er positiv

$$0 < \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 = 4\lambda_1^2 \lambda_2^2 - \lambda_3^2. \quad (5.13)$$

Yderligere, for at både x_1 og x_2 er positive, da kræver vi, at

$$2\lambda_2^2\mu_1^2 > \lambda_3\mu_2^2 \quad \text{og} \quad 2\lambda_1^2\mu_2^2 > \lambda_3\mu_1^2. \quad (5.14)$$

Så kriterierne for at x_1 og x_2 har positive minimum er

$$\begin{aligned} 4\lambda_1^2\lambda_2^2 &> \lambda_3^2, \\ 2\lambda_2^2\mu_1^2 &> \lambda_3\mu_2^2, \\ 2\lambda_1^2\mu_2^2 &> \lambda_3\mu_1^2, \\ \lambda_1^2 &> 0, \quad \text{og} \\ \lambda_2^2 &> 0. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Siden Lagrangedensiteten kun indeholder felterne gennem $\Phi_i^\dagger\Phi_i$ kan minimumet vælges til kun at være den reelle del af den nederste komponent, så $x_i = \Phi_i^\dagger\Phi_i = v_i^2/2$.

3) Den mest generelle form at de to Higgsdoubletter, når de er korrekt normaliserede (se [13, lign. 25]), er

$$\Phi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \varphi_1^R + i\varphi_1^I \\ \varphi_2^R + i\varphi_2^I \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \Phi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \varphi_3^R + i\varphi_3^I \\ \varphi_4^R + i\varphi_4^I \end{bmatrix}, \quad (5.16)$$

altså er der 8 frihedsgrader tilsammen i de to Higgsdoubletter, hvilket giver god mening, da en dublet består af to komplekse skalarfelter, som hver har to frihedsgrader, da de er komplekse, så vi har i alt $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ frihedsgrader.

Den generelle gaugesymmetri for Higgsfeltet er $\exp(i[\vec{\mathbf{T}} \cdot \vec{\alpha}(x) + \beta/2])$, hvilken har fire frihedsgrader da $\vec{\alpha}(x)$ har tre frihedsgrader og β én. Vi kan, som i [13, lign. 26], skrive Higgsdoubletterne ved denne gaugesymmetri

$$\Phi_1 = \exp(i\vec{\mathbf{T}} \cdot \vec{\alpha}_1(x)) \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{v_1 + H_1(x)}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \Phi_2 = \exp(i\vec{\mathbf{T}} \cdot \vec{\alpha}_2(x)) \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{v_2 + H_2(x)}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad (5.17)$$

idet vi stadig ønsker at efterlade én af frihedsgraderne i gaugesymmetrien ubruds for det elektromagnetiske felt, hvorfor vi ikke kan fiksere β_i . Dog skal de to Higgsdoubletter være i samme gauge, hvorfor vi kun kan gaugetransformere tre frihedsgrader væk, så

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{v_1 + H_1(x)}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \Phi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} H_2(x) + iH_3(x) \\ H_4(x) + iH_5(x) \end{bmatrix}. \quad (5.18)$$

Der er altså fem Higgsfelter med hver deres frihedsgrad tilbage, mens at de resterende tre frihedsgrader er gaugetransformeret over i bosonmasserne.

Som det næste skal Higgsfelterne karakteriseres ud fra deres kvantetal. Vi ved at begge Higgsdoubletter har hyperladning $Y = 1$, samt at doubletterne har svagt

isospin¹¹ $T = \pm 1/2$, hvor plus er for topkomponenten af dubletten og minus for bundkomponenten. Ladningen kan nu beregnes ved

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2}, \quad (5.19)$$

hvorved vi får

$$H_1(x) : \quad Q_{H_1} = 0 \quad (5.20a)$$

$$H_+(x) = H_2(x) + iH_3(x) : \quad Q_{H_+} = 1 \quad (5.20b)$$

$$H_-(x) = H_2(x) - iH_3(x) : \quad Q_{H_-} = -1 \quad (5.20c)$$

$$H(x) = H_4(x) + iH_5(x) : \quad Q_H = 0 \quad (5.20d)$$

$$h(x) = H_4(x) - iH_5(x) : \quad Q_h = 0. \quad (5.20e)$$

Dermed kan det ses, at de nedre komponenter af ligning (5.18) har ladning 0, hvilket stemmer overens med, at vakuumet fra ligning (5.2) har ladning 0 som ønsket, da vakuum derved ikke kan interferere med elektrodynamik, så elektrodynamik er en ubrudt gaugesymmetri.

¹¹”Symmetrien associeret med svagt isospin er $SU(2)$ og kræver gaugebosoner med $T = 1$ (W^\pm , W^0) til at gå mellem fermioner med halvtallig svag isospin ladning.” [14]

6 Den lineære sigmamodel

Betragt den følgende Lagrangedensitet

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma) (\partial^\mu \sigma) + \frac{1}{2} (\partial_\mu \pi) (\partial^\mu \pi) - \frac{1}{2} m^2 \sigma^2 - \lambda v \sigma^3 - \lambda v \sigma \pi^2 - \frac{1}{4} \lambda (\sigma^2 + \pi^2)^2, \quad (6.1)$$

hvor σ og π er skalarfelter og $v^2 = m^2/(2\lambda)$.

- 1) Find dimensionen af alle felter og koblingskonstanter i \mathcal{L} i enheder, når $\hbar = c = 1$.
- 2) Ved at kigge på \mathcal{L} , hvad vil du så mene, at massen af σ og π er?
- 3) Tegn alle de lovlige vekselvirkningsknodepunkter (eng: interaction vertices) for denne Lagrangedensitet og bestem deres tilsvarende koblingskonstanter.
- 4) Tegn alle loopkorrigeringerne til π -propagatoren. Du skal finde fem forskellige slags korrektioner.
- 5) Betragt diagrammet hvor der er én π og én σ , som løber i loopet (eng: running around the loop). Dette tillades af $\pi\pi\sigma$ -ledet for andenordensperturbation. Vis at diagrammets amplitude er

$$4\lambda^2 v^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2} \frac{1}{(k+p)^2}. \quad (6.2)$$

Er amplituden endelig eller uendelig, og hvis den er uendelig, hvordan divergerer den så for store k ?

(Hint: Faktoren af 4 er den såkaldte symmetrifaktor. For at udlede den, tænk da på det mulige antal måder, som man kan parre de eksterne π_{in} - og π_{out} -felter med operatorerne i matricelementet $\pi\pi\sigma\pi\pi\sigma$. Du kan også gøre dette ved at brute force gennem udvidelsen af Dysonserien, men at tænke sig til udledningen er noget mere elegant.)

- 6) Nedskriv amplituderne for resten af loopkorrigeringerne til π -propagatoren. Husk symmetrifaktorerne; de er vigtige!
- 7) Betragt nu grænsen for nul-firimpuls for π ($p_\mu = 0$) i propagatoren. Vis at når du adderer alle korrektionerne for amplituden for $p_\mu = 0$, så får man 0! (Hint: Der er en god idé at nedbryde (eng: decompose) integranten i amplituden i 5) til partielle brøker (eng: partial fractions).)

8) I de ovenstående opgaver er loopkorrektionerne blevet betragtet til laveste orden. Forestil dig at vi kunne inkludere højereordenskorrektioner i propagatoren (flere loops osv.). Hvordan forestiller du dig, at π -propagatoren kan modificeres for højere ordener?

Besvarelse

1) Først betragter vi effekten af naturlige enheder $\hbar = c = 1$: Idet at $c = 1$, da bliver tid og sted sat på lige fod $1 = c = [l]/[t]$, hvorfor $[\text{længde}] = [\text{tid}]$. Ligeså gør det sig gældende, at når $c = 1$ så giver energi-impulsrelationen ($E^2 = p^2 + m^2$) at $[E] = [m]$. Sammenhængen mellem disse to sæt af sammenhænge findes ved $\hbar = 1$, hvilket gør at $E = \omega$, altså $[E] = [t]$. Ergo betyder naturlige enheder, at

$$[\text{længde}] = [\text{tid}] = [\text{energi}]^{-1} = [\text{masse}]^{-1}. \quad (6.3)$$

Dimensionen af alle felter og koblingskonstanter i \mathcal{L} vil nu blive udtrykt i enheder af energi. Først bemærkes det, at Lagrangedensiteten må have dimension $[\mathcal{L}] = [E]$, idet at Lagrangefunktionen er dimensionsløs $[1] = [\int d^4x][\mathcal{L}] = ([l]^3[t]^1)[\mathcal{L}] = [E]^{-4}[\mathcal{L}] \Rightarrow [\mathcal{L}] = [E]^4$. Dermed skal alle led i Lagrangedensiteten altså have dimensionen $[E]^4$.

Først betragtes de kinetiske led. Siden $[\partial_\mu] = [E]$, da må $[\sigma] = [\pi] = [E]$. Dette stemmer også for tredje led i ligning (6.1) med $[m]^2[\sigma]^2 = [E]^2[E]^2 = [E]^4$. For det fjerde led i Lagrangedensiteten (det femte led kunne her også have været brugt), hvor $[E]^4 = [\lambda v\sigma^3] = [\lambda v][E]^3 \Rightarrow [\lambda v] = [E]$. Fra sidste led i Lagrangedensiteten har vi dog, at $[\lambda] = [1]$ idet $[(\sigma^2 + \pi^2)^2] = [E]^4$, hvormed $[v] = [E]$. Dermed har vi tilsammen at

$$\begin{aligned} [E] &= [\sigma] = [\pi] = [v] \quad \text{og} \\ [1] &= [\lambda]. \end{aligned} \quad (6.4)$$

2) Betragter vi Lagrangedensiteten i ligning (6.1) ses det, at den kan opdeles i et frit Lagrangedensitetsled og et vekselvirknings-Lagrangedensitetsled, hvor sidstnævnte er de sidste tre led. Dermed er det frie Lagrangedensitetsled

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma) (\partial^\mu \sigma) + \frac{1}{2} (\partial_\mu \pi) (\partial^\mu \pi) - \frac{1}{2} m^2 \sigma^2. \quad (6.5)$$

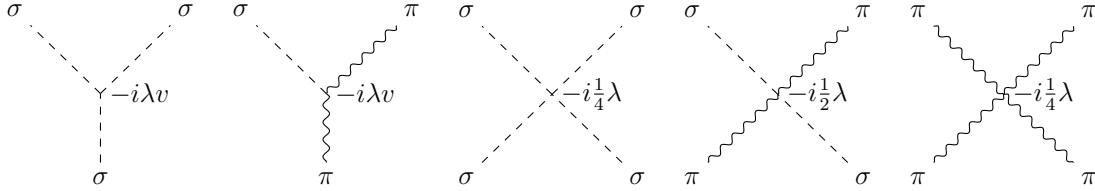
Den generelle Lagrangedensitet for et frit skalarfelt φ er

$$\mathcal{L}_{0,\text{gen}} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi) (\partial^\mu \varphi) - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2, \quad (6.6)$$

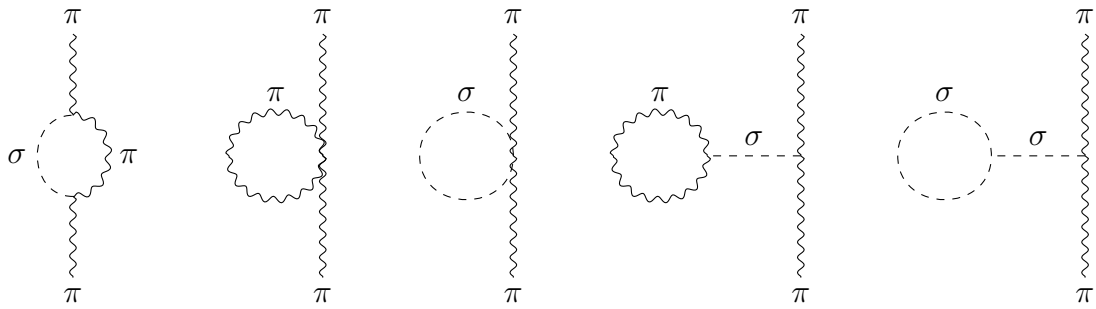
så sammenlignes ligning (6.5) med ligning (6.6) for begge felter, σ og π , ses det, at massen af σ -feltet er $m_\sigma = m$, mens massen af π -feltet er $m_\pi = 0$. Altså

$$m_\sigma = m \quad \text{og} \quad m_\pi = 0. \quad (6.7)$$

3) Siden der er 5 led i vekselvirkningsledet for Lagrangedensiteten i ligning (6.1) forventes også 5 Feynmandiagrammer med vekselvirkning. Koblingskonstanterne tilhørende vekselvirkningsknudepunkterne er angivet på Feynmandiagrammerne, og for en Lagrangedensitet på formen $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I$ med vekselvirkningen $\mathcal{L}_I = -k\varphi_j^n$ er koblingskonstanten givet som $-ik$.

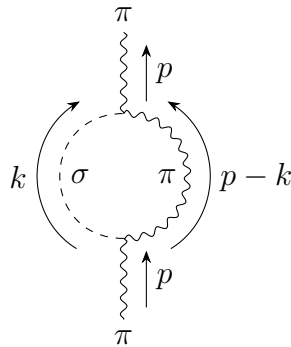


4) Loopkorrigeringerne for Lagrangedensiteten i ligning (6.1) er vist herunder.



Dette er de fem mulige korrektioner, som kun indeholder ét loop, og som er dannet af de mulige knudepunkter fra 3.

5) Lad os først tegne Feynmandiagrammet igen og denne gang notere impulserne på diagrammet.



Nu benyttes Feynmanreglerne for skalarfelter, [2, opg. 11.4]. Først vides det, at indkomne og udgående partikler (initial/final) bidrager med 1, og at hvert knudepunkt bidrager med koblingskonstanten $g = -i\lambda v$. Ydermere bidrager de virtuelle partikler hver med en propagator på formen $i/(p'^2 - m^2)$ ([2, opg. 7.3]), hvor p' er impulsen, så for de to virtuelle partikler får vi propagatorerne

$$\Delta_\sigma = \frac{i}{k^2 - m^2} \quad \text{og} \quad \Delta_\pi = \frac{i}{(p - k)^2}, \quad (6.8)$$

da $m_\pi = 0$. Sidst skal symmetrifaktoren findes, hvilket gøres ved at betragte matricelementet, som opstår i spredningsamplituden til anden orden,

$$\begin{aligned} \langle \pi, p | \pi(x) \pi(x) \sigma(x) \pi(0) \pi(0) \sigma(0) | \pi, p \rangle \\ = \langle \pi, p | \pi(x) \pi(x) \pi(0) \pi(0) | \pi, p \rangle \langle 0 | \sigma(x) \sigma(0) | 0 \rangle . \end{aligned} \quad (6.9)$$

σ -matricelementet kan kun udføres på én måde, så dette led bidrager ikke med nogle symmetrifaktorer. π -matricelementet derimod bidrager med symmetrifaktoren 8. Dette kan ses, da hvert π -felt indeholder en kreations- og en annihilationsoperator for π -partikler, og symmetrifaktoren er antallet af måder, hvorpå en π partikel kan annihileres og en virtuel π -partikel skabes, hvorefter denne annihileres og en π -partikel skabes. Den første π -partikel kan skabes ved enhver af de fire operatoren, hvilket bidrager en symmetrifaktor af 4, og den udgående partikel kan da kun skabes ved to af de fire operatoren, da den ikke må skabes samme sted som den indgående partikel blev annihilert, hvilket bidrager en symmetrifaktor på 2. Ergo bliver den overordnede symmetrifaktor $S_{\text{sym}} = 1 \cdot 4 \cdot 2 = 8$. Samles alt det ovenstående, og huskes faktoren $1/2$ fra Dysonserien til anden orden, fås amplituden

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \frac{1}{2} S_{\text{sym}} g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \Delta_\sigma \Delta_\pi \\ &= \frac{1}{2} 8 (-i)^2 \lambda^2 v^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2} \frac{i}{(p - k)^2} \\ &= 4i^4 \lambda^2 v^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2} \frac{1}{(p - k)^2} \\ &= 4(-1)^2 \lambda^2 v^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(-k)^2 - m^2} \frac{1}{(p - [-k])^2} \\ &= 4\lambda^2 v^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2} \frac{1}{(p + k)^2} , \end{aligned} \quad (6.10)$$

hvor vi ved andensidste lighed har ladet $k \rightarrow -k$, hvilket vi har lov til, da vi integrerer over hele impulsrummet. Dette er amplituden, ligning (6.2), som skulle vises.

Denne amplitude er divergerende for store k , hvilket kan ses ved

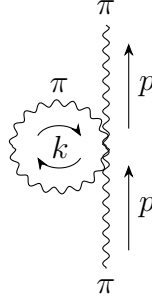
$$4\lambda^2 v^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2} \frac{1}{(p + k)^2} \stackrel{\text{stor } k}{\simeq} 4\lambda^2 v^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2} \frac{1}{k^2} = 4(2\pi)^4 \lambda^2 v^2 \int \frac{d^4 k}{k^4} , \quad (6.11)$$

siden graden af den inverse af integranden (her 4, da integranden er k^{-4}) og antallet af dimensioner, der integreres over for denne integrand (her 4, da $d^4 k$) er ens. Altså divergerer amplituden logaritmisk for store k .

6) Besvarelsen af denne opgave følger den præcis samme metode som **5)**, hvorfor der måske gås lidt hurtigt over nogle af forklaringerne, da forklaringen af hvordan

man finder frem til ledene, er beskrevet i 5).

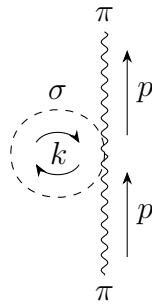
For den anden loopkorrektur i 4) har vi, at Feynmandiagrammet med impulser er som følger nedenfor.



Symmetrifaktoren på 12 kommer af, at knudepunktet har fire π -partikler, hvorfor der er fire mulige valg af π for den indkomne π -partikel og dermed kun tre valg for den udgående, og de sidste to kan kun forbindes på én måde, nemlig loopet, hvorfor disse ikke giver et bidrag. Dermed bliver amplituden

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_2 &= S_{\text{sym}} g \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \Delta_\pi \\ &= 12 \left(-\frac{i\lambda}{4} \right) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2} \\ &= 3\lambda \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2} .\end{aligned}\tag{6.12}$$

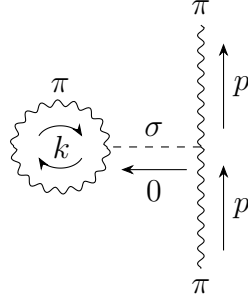
For den tredje loopkorrektur i 4) har vi, at Feynmandiagrammet med impulser er som følger nedenfor.



Her er symmetrifaktoren 2, da der er to mulige valg for den indkomne π , mens der kun er én mulighed for den udgående (den resterende π -partikel), og σ i loopet ikke bidrager, da der kun er den ene kombination. Dermed bliver amplituden

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_3 &= S_{\text{sym}} g \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \Delta_\sigma \\ &= 2 \frac{-i\lambda}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2} \\ &= \lambda \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2} .\end{aligned}\tag{6.13}$$

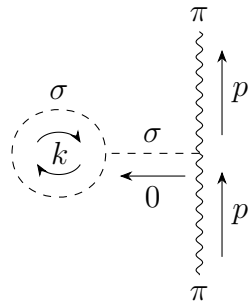
For den fjerde loopkorrektur i 4) har vi, at Feynmandiagrammet med impulser er som følger nedenfor.



I dette diagram er symmetrifaktoren 4, der er to end knudepunkter med hver to π -felter, som kan være indgående og udgående partikler, hvorfor den indgående π -partikel kan vælges frit mellem de 4 mulige, men derefter er den udgående bestemt, da den skal være i samme knudepunkt, og de to resterende π -felter giver loopet, og σ kan også kun være ét sted. Her skal vi huske at inkludere en faktor af $1/2$ fra Dysonserien, da der er tale om en andenordenskorrektur (to knudepunkter), og vi skal medtage propagatoren for begge virtuelle partikler. Af dette bliver amplituden

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_4 &= \frac{1}{2} S_{\text{sym}} g \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \Delta_\sigma \Delta_\pi \\ &= \frac{1}{2} 4(-i)^2 \lambda^2 v^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{-m^2} \frac{i}{k^2} \\ &= -2 \frac{\lambda^2 v^2}{m^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2} .\end{aligned}\tag{6.14}$$

For den sidste loopkorrektur i 4) har vi, at Feynmandiagrammet med impulser er som følger nedenfor.



Symmetrifaktoren i dette diagram er 12: Den første faktor 6 kommer af blot at matche operatorerne i Feynmandiagrammet som for de tidligere diagrammet. Her har vi, at der er 2 mulige valg af π som den indkomne partikel og dermed kun ét valg for den udgående. For σ er der 3 muligheder for den, som er mellem de to knudepunkter, mens de resterende kun kan sammensættes på én måde, nemlig et loop. Fra dette får vi da en symmetrifaktor på $2 \cdot 3 = 6$. Den sidste faktor 2

kommer af, at matrixelementet $\langle \pi, p | \mathcal{H}_I(x) \mathcal{H}_I(0) | \pi, p \rangle$ indeholder to led, som kan give dette Feynmandiagram

$$\langle \pi, p | \sigma(x) \sigma(x) \sigma(x) \sigma(0) \pi(0) \pi(0) | \pi, p \rangle + \langle \pi, p | \sigma(x) \pi(x) \pi(x) \sigma(0) \sigma(0) \sigma(0) | \pi, p \rangle, \quad (6.15)$$

hvorfor amplituden af ét diagram multipliceres med 2 for at give den totale amplitude – dette er den faktor 2, som indgår i symmetrifaktoren. De to matrixelementer i ligning (6.15) kan vises værende ens ved at translaterer x med komplekse eksponentialfunktioner ($\sigma(x) = \exp[iPx] \sigma(0) \exp[-iPx]$) som i [2, lign. 43].

Igen skal vi huske faktoren $1/2$ fra Dysonserien og begge propagatorer. Derved fås amplituden

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_5 &= \frac{1}{2} S_{\text{sym}} g \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \Delta_\sigma \Delta'_\sigma \\ &= \frac{1}{2} 12(-i)^2 \lambda^2 v^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{-m^2} \frac{i}{k^2 - m^2} \\ &= -6 \frac{\lambda^2 v^2}{m^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2}. \end{aligned} \quad (6.16)$$

7) Først kigger vi på ligning (6.2), hvor $p = p^\mu = 0$

$$\mathcal{A}_1 = 4\lambda^2 v^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2} \frac{1}{(p+k)^2} = 4\lambda^2 v^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2} \frac{1}{k^2} \quad (6.17)$$

og opdeler vi delene, som kommer fra propagatorerne, til partielle brøker, altså

$$\frac{1}{k^2} \frac{1}{k^2 - m^2} = \frac{m^4}{m^4 k^2 (k^2 - m^2)} = \frac{m^2 k^2 - m^2 (k^2 - m^2)}{m^4 k^2 (k^2 - m^2)} = \frac{1}{m^2 (k^2 - m^2)} - \frac{1}{m^2 k^2}. \quad (6.18)$$

Summeres nu over alle loopkorrektionernes amplituder, ligningerne (6.10), (6.12) til (6.14) and (6.16), hvor $p = p^\mu = 0$, og benyttes det at $v^2 = m^2/(2\lambda)$, fås

$$\begin{aligned} \sum_i \mathcal{A}_i &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left(4\lambda^2 v^2 \frac{1}{m^2 (k^2 - m^2)} - 4\lambda^2 v^2 \frac{1}{m^2 k^2} + 3\lambda \frac{1}{k^2} \right. \\ &\quad \left. + \lambda \frac{1}{k^2 - m^2} - \frac{2\lambda^2 v^2}{m^2} \frac{1}{k^2} - \frac{6\lambda^2 v^2}{m^2} \frac{1}{k^2 - m^2} \right) \\ &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left(4 \frac{\lambda^2 m^2}{2\lambda} \frac{1}{m^2 (k^2 - m^2)} - 4 \frac{\lambda^2 m^2}{2\lambda} \frac{1}{m^2 k^2} + 3\lambda \frac{1}{k^2} \right. \\ &\quad \left. + \lambda \frac{1}{k^2 - m^2} - \frac{2\lambda^2 m^2}{2m^2 \lambda} \frac{1}{k^2} - \frac{6\lambda^2 m^2}{2m^2 \lambda} \frac{1}{k^2 - m^2} \right) \\ &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left(\frac{2\lambda}{k^2 - m^2} - \frac{2\lambda}{k^2} + \frac{3\lambda}{k^2} + \frac{\lambda}{k^2 - m^2} - \frac{\lambda}{k^2} - \frac{3\lambda}{k^2 - m^2} \right) \\ &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned} \quad (6.19)$$

8) Svar til eksamen:

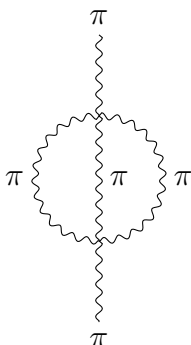
Svaret på dette er, at da førsteordensloopkorrektionerne for $p = 0$ går ud, da vil dette også være tilfældet for højereordenskorrektionerne grundet "Adlers nul" (eng: Adler zero). Dette er vist i [15, s. 175] og [16].

Afleveret svar:

Vi vil kigge på, hvorfor korrektionerne ikke burde ændre på propagatoren. Her kan vi bemærke, at Lagrangedensiteten i ligning (6.1) er på en form lignende den, som vi betragtede i opgave 4 i problemsæt 5 [17, opg. 4] samt i [18, kap. 10.8]. Følges denne metode findes, at π er en Goldstoneboson, som kan transformeres væk.

Siden π er en Goldstoneboson, hvorved disse loopkorrektioner ser ud til at være relateret til massekorrektionen af Goldstonebosonen, da vil vi forvente at højereordenskorrektioner vil gå ud for $p = 0$, da førsteordens loopkorrektionerne også gør. Man kan måske tænke på det som at siden π kan transformeres væk, og dermed ikke er en partikel "på samme måde" som σ er, da kan man formode, at den vil beholde samme symmetri som for enkeltloopskorrektioner, altså at den som vist i denne opgave ikke vil blive modificeret af loopkorrektioner for $p^\mu = 0$.

At korrektionerne skulle gå ud er dog ikke lige så åbenlyst, da højereordensloops, som det set herunder, vil give anledning til divergerende integraler (infrarød divergens, da $m_\pi = 0$), hvorfor det er nødvendigt at benytte renormalisering.



Litteratur

- [1] Emilio Pisanty, “How many degrees of freedom for the spin $1/2$?” Physics Stack Exchange, URL: <https://physics.stackexchange.com/q/333005>. Version: 2017-05-13. Tilgået d. 3. januar 2021.
- [2] N. T. Zinner og S. E. Rasmussen, “Particle Physics II Fall 2020 Problem Set 2.” Tilgået d. 18. december 2020.
- [3] “Leibniz integral rule.” URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Leibniz_integral_rule. Tilgået d. 26. november 2020.
- [4] J. J. Sakurai og J. Napolitano, *Modern quantum mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2. udgave, 2017. OCLC: 1029603578, ISBN: 9781108422413.
- [5] N. T. Zinner og S. E. Rasmussen, “Particle Physics II Fall 2020 Problem Set 3.” Tilgået d. 10. december 2020.
- [6] D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*. Cambridge University Press, 7 2017. ISBN: 1108420419.
- [7] N. T. Zinner og S. E. Rasmussen, “Questions and Answers to Week 10.” Tilgået d. 20. december 2020.
- [8] A. Boggess og F. J. Narcowich, *A First Course in Wavelets with Fourier Analysis*. 2. udgave, 2009. ISBN: 9780470431177.
- [9] I. Aitchison og A. Hey, *Gauge Theories in Particle Physics*, vol. 1. 3. udgave, september 2002. ISBN: 9780750308649.
- [10] B. Povh, K. Rith, C. Scholz, F. Zetsche, og W. Rodejohann, *Particles and Nuclei: An Introduction to the Physical Concepts*. Graduate texts in physics, Heidelberg New York Dordrecht London: Springer, 7. udgave, 2015. OCLC: 900290398, ISBN: 9783662463208.
- [11] M. E. Peskin og D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*. Oktober 1995. ISBN: 9780201503975.
- [12] A. Seiden, *Particle Physics*. 2005. ISBN: 9780805387360.
- [13] N. T. Zinner og S. E. Rasmussen, “Standard Model Higgs mechanism.” Tilgået d. 17. december 2020.
- [14] “Weak isospin.” URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Weak_isospin#Weak_isospin_and_the_W_bosons. Tilgået d. 2. januar 2021.
- [15] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*. 01 1995.

- [16] K. Kampf, J. Novotny, M. Shifman, og J. Trnka, “New soft theorems for goldstone-boson amplitudes,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 124, p. 111601, Mar 2020.
- [17] N. T. Zinner og S. E. Rasmussen, “Particle Physics II Fall 2020 Problem Set 5.” Tilgået d. 3. januar 2021.
- [18] D. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*. Oktober 2008. ISBN: 9783527406012.