《计算理论导引》期末试卷

南京大学计算机科学与技术系

2016 年 6 月

本试卷满分 100 分，共六题。考试时间 2 小时。开卷。

姓名	学号	成绩

一. （30 分）

(1) 什么是 Turing 机？

(2) 什么是 Church-Turing Thesis？

(3) 为什么算法和 Turing 机概念在可以构成“思维机器”的现代观点中占有如此核心的地位？是否在原则上存在一个算法可达到绝对极限呢？

二.（30 分） 设 A 表示 $\mathcal{EF}$, B 表示 $\mathcal{PRF}-\mathcal{EF}$, C 表示 $\mathcal{GRF}-\mathcal{PRF}$, D 表示 $\mathcal{RF}-\mathcal{GRF}$，$E$ 表示不可计算的数论函数类。判定下列数论函数所属的函数类，选择 A、B、C、D、E 之一，填在题后的表格中。

(1) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 为处处无定义的函数。

(2) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 定义为

$$f(n)=\begin{cases}0, & \text{若 } n \text{ 为偶数}\\ \text{无定义}, & \text{否则}\end{cases}$$

(3) Ackermann 函数。

(4) $f:\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}$ 定义为

$$\begin{aligned} f(m,0)&=m\\ f(m,n+1)&=n+f(m^2,n)\end{aligned}$$

(5) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 定义为 $f(n)=\lfloor\log_{10} n\rfloor$，这里 $\lfloor x\rfloor$ 为对 x 向下取整。

(6) $f:\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}$ 定义为

$$f(m,n)=\begin{cases}1, & \text{若存在 } M,N\in\Lambda \text{ 使得 } m=\ulcorner M\urcorner, n=\ulcorner N\urcorner \text{ 且 } M=_\beta N\\ 2, & \text{否则}\end{cases}$$

(7) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 定义为 $f(n)=\pi$的十进制展开式中的第 n 个数字。

(8) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 定义为

$$f(n)=\begin{cases}0, & \text{若存在 Turing 机 } M \text{ 使 } n=\sharp M \text{ 且 } M \text{ 对于一切输入皆停机}\\ 1, & \text{否则}\end{cases}$$

(9) Gödel 的 β–函数。

(10) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 定义为 $f(n)=\left.2^{3^{4^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{(n+2)}}}}}}\right\}n+1$ 层高。

对于上述各函数，判定其所属函数类，选择 A、B、C、D、E 之一，填在下面的表格中。

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)

三. （10 分） 构造 ADD $\in \Lambda^{\circ}$ 使 ADD λ–定义数论函数 add

$$\begin{aligned} \mathrm{add}(x,0) &= x \\ \mathrm{add}(x,y+1) &= \mathrm{suc}(\mathrm{add}(x,y)) \end{aligned}$$

这里 suc 为后继函数。

四. （10 分） 若在系统 $\lambda\beta$ 中加入

$$(\star) \qquad \lambda x.\, x = \lambda x.\, xx$$

作为额外公理，则对任何的 $M, N \in \Lambda$，$\lambda\beta + (\star) \vdash M = N$。

五.（10 分） 设 M 为如下定义的 Turing 机:

	0	1
1	$0R8$	$0R2$
2	$0R3$	$1R2$
3	$1R4$	$1R3$
4	$1R5$	
5	$1L6$	
6	$0L7$	$1L6$
7	$0R1$	$1L7$
8		

输入: $(2,1) : 0\underset{\uparrow}{1}^n 0\cdots$，这里 $n \in \mathbb{N}^+$。求输出。(只需要写出结果。)

六.（10 分） 设 Turing 机 M 计算函数 $f(x) = 2x$，试求 Turing 机 P 其计算函数 $g(x) = 2^x$。（只需要写出构造 P 的思想。）

《计算理论导引》期末试卷

南京大学计算机科学与技术系

2017 年 6 月

本试卷满分 100 分，共六题。考试时间 2 小时。开卷。

姓名	学号	成绩

一. (30 分)

(1)什么是 Turing 机？

(2)什么是 Church-Turing Thesis？你认可它吗？

(3)什么是 Halting Problem？它可判定吗？

二.(30 分) 设A表示$\mathcal{EF}$，B表示$\mathcal{PRF}-\mathcal{EF}$，$C$表示$\mathcal{GRF}-\mathcal{PRF}$，$D$表示$\mathcal{RF}-\mathcal{GRF}$，$E$表示不可计算的数论函数类。判定下列数论函数所属的函数类，选择A、B、C、D、E之一，填在题后的表格中。

(1) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$为处处无定义的函数。

(2) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$定义为

$$f(n)=\begin{cases}0, & \text{若}n\text{为素数}\\ \text{无定义}, & \text{否则}\end{cases}$$

(3) Ackermann 函数。

(4) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$定义为

$$f(m)=\begin{cases}0, \text{若存在}M\in\Lambda\text{使}m=\ulcorner M\urcorner\text{且}M\text{有}\beta-nf\\ 1, \text{否则}\end{cases}$$

(5) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$定义为$f(n)=[n!\cdot\cos(1)]$，这里$[x]$为对$x$向下取整。

(6) $f:\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}$定义为

$$f(m,n)=\begin{cases}1, \text{若存在}M,N\in\Lambda\text{使得}m=\ulcorner M\urcorner,n=\ulcorner N\urcorner\text{且}M=_\beta N\\ 2, \text{否则}\end{cases}$$

(7) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$定义为$f(n)=(n+1)^{(n+1)^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{(n+1)}}}}}$，共$(n+1)$层

(8) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$定义为

$$f(n)=\begin{cases}0, \text{若存在}Turing\text{机}M\text{使}n=\sharp M\text{且}M\text{对于一切输入皆停机}\\ 1, \text{否则}\end{cases}$$

(9) $G\ddot{o}del$的$\beta-$函数。

(10) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$定义为$f(n)=[\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{(n+1)^2}]$，这里$[x]$为对$x$向下取整。

对于上述各函数，判定其所属函数类，选择A、B、C、D、E之一，填在下面的表格中。

（1）	（2）	（3）	（4）	（5）	（6）	（7）	（8）	（9）	（10）

三. (10 分) 构造 $L \in \Lambda^{\circ}$ 使 $L\lambda-$定义数论函数 l，其定义如下：

$$l(x)=\begin{cases}0, & 若x偶\\ 1, & 若x奇\end{cases}$$

四. (10 分) 若在系统 $\lambda\beta$ 中加入

$$(\star) \qquad \lambda xy.xy=\lambda xy.yx$$

作额外公理，则对任何的$M, N \in \Lambda, \lambda\beta+(\star) \vdash M=N$。

五. (10 分)构造机器 M 使

输入 $S: 01^n01^m0\ldots$ 时
$\uparrow$

输出 $t: 0\ldots.01^m01^n0\ldots$
$\uparrow$

（可利用已有机器）

六. (10 分)越来越多的人使用智能手机，人们在使用的过程中或多或少的遇到过手机死机的情况，死机的现象往往是有些 app 运行了不曾定义的数学运算造成的，此时手机的表现是无法对用户的操作做出任何反馈，我们这里把该现象描述为手机被“冻结”。

假如人们想构造一个能监测手机是否被冻结的 app。

证明不存在一个 app，我们把它称为 Freeze Test，简称 FT。

其满足：当 FT 检测一个 app A 时，

(1)当 A 会冻结手机，则 FT 送回 Yes;

(2)当 A 不会冻结手机，则 FT 送回 No.

（谨以此题向 Alan Turing 先生致敬！）

《计算理论导引》期末试卷

南京大学计算机科学与技术系

2018 年 6 月

本试卷满分 100 分，共七题。考试时间 2 小时。开卷。

姓名	学号	成绩

一. （30 分）

(1) 什么是 Turing 机？

(2) 什么是 Church-Turing Thesis？你拥护吗？

(3) 什么是 Turing 机的通用性 (universality)？

(4) 什么是一般递归函数？

(5) 什么是 $\lambda\beta$ 系统的 CR 性质？

二. （20 分） 设 A 表示 $\mathcal{EF}$, B 表示 $\mathcal{PRF}-\mathcal{EF}$, C 表示 $\mathcal{GRF}-\mathcal{PRF}$, D 表示 $\mathcal{RF}-\mathcal{GRF}$，$E$ 表示不可计算的数论函数类。判定下列数论函数所属的函数类，选择 A、B、C、D、E 之一，填在题后的表格中。

(1) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 为处处无定义的函数。

(2) Ackermann 函数。

(3) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 定义为

$$f(n)=\begin{cases}0, & \text{若 } n \text{ 为奇数}\\ \text{无定义}, & \text{否则}\end{cases}$$

(4) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 定义为

$$f(m)=\begin{cases}0, & \text{若存在 } M\in\Lambda \text{ 使得 } m=\ulcorner M\urcorner \text{ 且 } M \text{ 呈形 } x_1x_2\cdots x_n\text{，这里 } x_i \text{ 为变元}\\ 1, & \text{否则}\end{cases}$$

(5) $f:\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}$ 定义为

$$f(m,n)=\begin{cases}1, & \text{若存在 } M,N\in\Lambda \text{ 使得 } m=\ulcorner M\urcorner, n=\ulcorner N\urcorner \text{ 且 } M=_\beta N\\ 2, & \text{否则}\end{cases}$$

(6) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 定义为 $f(n)=\lfloor n!\cdot\cos(1)\rfloor$，这里 $\lfloor x\rfloor$ 为对 x 向下取整。

(7) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 定义为

$$f(n)=\begin{cases}0, & \text{若存在 Turing 机 } M \text{ 使得 } n=\sharp M \text{ 且 } M \text{ 对于一切输入皆停机}\\ 1, & \text{否则}\end{cases}$$

(8) $f:\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}$ 定义为 $f(n,m)=\left.3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3^n}}}}}\right\}$ 共 $m+1$ 个 3。

(9) Gödel 的 β–函数。

(10) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 定义为 $f(n)=\left\lfloor\left(n+1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right\rfloor$，这里 $\lfloor x\rfloor$ 为对 x 向下取整。

对于上述各函数，判定其所属函数类，选择 A、B、C、D、E 之一，填在下面的表格中。

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)

三.（10 分） 设 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 为一元函数，其定义如下：

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, \\ f(1) &= 1, \\ f(n+2) &= (n+2)\left(f(n+1)+f(n)\right). \end{aligned}$$

证明：

1. $f(n)\leq(n+1)!$
2. $f(0)=0,\ f(n+1)=(n+2)f(n)+(-1)^n$
3. $f(n)=(n+1)!\sum_{i=0}^{n+1}\frac{(-1)^i}{i!}$
4. $f\in\mathcal{EF}$

四．（10 分） 若在系统 $\lambda\beta$ 中加入

$$(\star) \qquad \lambda x.\, x = \lambda x.\, xxx$$

作为额外公理，则对任何的 $M, N \in \Lambda$，$\lambda\beta + (\star) \vdash M = N$。

五．（10 分） 构造机器 M 使得其满足

输入 $s : 0\underset{\uparrow}{1}^n 01^m 0 \cdots$ 时，输出 $t : 0 \cdots 0\underset{\uparrow}{1}^{2m} 01^{2n} 0 \cdots$

(注：构造时可利用已有机器)

六. （10 分） （谨以此题向 Alan Turing 先生致敬！）
设 $\mathcal{L}$ 为某个给定的程序设计语言。对于每一个 $\mathcal{L}$-程序 P，假设我们已经构造了程序 P 的 Gödel 编码 $\sharp P$，且由 $\sharp P$ 可能行地重构 P。证明: 若定义数论谓词 $H(x,y)$ 为"编码为 y 的程序 P 对于输入 x 停机"，则 $H(x,y)$ 不可判定；即不存在一般递归函数 h 使得

$$h(x,y)=\begin{cases}0, & \text{若 } H(x,y) \text{ 真}\\ 1, & \text{否则}\end{cases}$$

七. （10 分） Let $f(n)$ be the n-th digit in the decimal expansion of the real number sinh(1), where $\sinh(x)=(e^x-e^{-x})/2$ is the hyperbolic sine function. For example, suppose that $\sinh(1)=a_0.a_1a_2\cdots$, then $f(0)=a_0$, $f(1)=a_1$, $f(2)=a_2$, $\cdots$. Prove that function f is Turing-computable. Furthermore, prove that it is elementary.

令 $f(n)$ 为实数 sinh(1) 的十进制展开式中的第 n 位数字，其中 $\sinh(x)$ 为双曲正弦函数。例如, 假设 $\sinh(1)=a_0.a_1a_2\cdots$, 那么 $f(0)=a_0$, $f(1)=a_1$, $f(2)=a_2$, $\cdots$。证明函数 f 是 Turing 可计算的。进而，证明 f 是初等函数。

《计算理论导引》期末试卷

南京大学计算机科学与技术系

2019 年 6 月

本试卷满分 100 分，共七题。考试时间 2 小时。开卷。

姓名	学号	成绩

一.（30 分）

(1) 什么是 Church-Turing Thesis？你拥护吗?

(2) 什么是通用 Turing 机?

(3) 什么是部分递归函数?

(4) 什么是 $\lambda\beta$ 系统的 CR 性质?

(5) 什么是配对函数组?

(6) 什么是停机问题?

二.（20 分）设 A 表示 $\mathcal{EF}$，B 表示 $\mathcal{PRF}-\mathcal{EF}$，$C$ 表示 $\mathcal{GRF}-\mathcal{PRF}$，$D$ 表示 $\mathcal{RF}-\mathcal{GRF}$，$E$ 表示不可计算的数论函数类。判定下列数论函数所属的函数类，选择 A、B、C、D、E 之一，填在题后的表格中。

(1) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 为处处无定义的函数。

(2) Ackermann 函数。

(3) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 定义为

$$f(n)=\begin{cases}0, & \text{若 } n\le 100\\ \text{无定义}, & \text{否则}\end{cases}$$

(4) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 定义为

$$f(m)=\begin{cases}0, & \text{若存在 } M\in\Lambda \text{ 使得 } m=\ulcorner M\urcorner \text{ 且 } M \text{ 呈形 } \lambda v.vv\cdots v\text{，这里 } v \text{ 为变元}\\ 1, & \text{否则}\end{cases}$$

(5) $f:\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}$ 定义为

$$f(m,n)=\begin{cases}1, & \text{若存在 } M,N\in\Lambda \text{ 使得 } m=\ulcorner M\urcorner\text{，} n=\ulcorner N\urcorner\text{，且 } M\neq_\beta N\\ 2, & \text{否则}\end{cases}$$

(6) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 定义为 $f(n)=\lfloor n!\cdot 2^n\cdot\sqrt{e}\rfloor$，这里 $\lfloor x\rfloor$ 为对 x 向下取整。

(7) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 定义为

$$f(n)=\begin{cases}0, & \text{若存在 Turing 机 } M \text{ 使得 } n=\sharp M \text{ 且 } M \text{ 对于一切输入皆停机}\\ 1, & \text{否则}\end{cases}$$

(8) $f:\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}$ 定义为 $f(n,m)=\left.n^{n^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{n^n}}}}}\right\}$ 共 $m+1$ 个 n。

(9) Gödel 的 β–函数。

(10) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 定义为 $f(n)=\lfloor a_n\rfloor$，这里 $\lfloor x\rfloor$ 为对 x 向下取整，$\{a_n\}$ 为单调递增数列且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\pi$。

对于上述各函数，判定其所属函数类，选择 A、B、C、D、E 之一，填在下面的表格中。

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)

三.（10 分） 设 $\mathcal{K}, \mathcal{S} \subseteq \mathbb{N}$ 是可判定的（decidable），证明

(1) $\mathbb{N} - \mathcal{S}$ 是可判定的;

(2) $\mathcal{K} \cap \mathcal{S}$ 是可判定的;

(3) $\mathcal{K} \cup \mathcal{S}$ 是可判定的。

四.（10 分） 证明：数论函数 $f(n) = \left\lfloor (\frac{\sqrt{5}+1}{2})^n \right\rfloor$ 为初等函数。

五.（10 分） 若在系统 $\lambda\beta$ 中加入

$$(\star) \qquad \mathbf{I} = \mathbf{K}$$

作为额外公理，则对任何的 $M, N \in \Lambda$，$\lambda\beta + (\star) \vdash M = N$。

六.（10 分） 构造机器计算函数 $f(x) = x^3$;
(注：构造时可利用已有机器)

七.（10 分）

Let $f(n)$ be the n-th digit in the decimal expansion of the real number $\frac{e^2+1}{2e}$. For example, suppose that $\frac{e^2+1}{2e} = a_0.a_1a_2a_3\cdots$, then $f(0) = a_0$, $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$, $\cdots$. Prove that function f is Turing-computable. Furthermore, prove that it is elementary.

令 $f(n)$ 为实数 $\frac{e^2+1}{2e}$ 的十进制展开式中的第 n 位数字。例如，假设 $\frac{e^2+1}{2e} = a_0.a_1a_2a_3\cdots$，那么 $f(0) = a_0$，$f(1) = a_1$，$f(2) = a_2$，$\cdots$。证明函数 f 是 Turing 可计算的。进而，证明 f 是初等函数。

《计算理论导引》期末试卷

南京大学计算机科学与技术系

2019 年 12 月

本试卷满分 100 分，共七题。考试时间 2 小时。开卷。

姓名	学号	成绩

一.（30 分）

(1) 什么是 Church-Turing Thesis？你拥护吗?

(2) 什么是通用 Turing 机?

(3) 什么是部分递归函数?

(4) 什么是 $\lambda\beta$ 系统的 CR 性质?

(5) 什么是配对函数组?

(6) 什么是停机问题?

二.（20 分）设 A 表示 $\mathcal{EF}$，B 表示 $\mathcal{PRF}-\mathcal{EF}$，$C$ 表示 $\mathcal{GRF}-\mathcal{PRF}$，$D$ 表示 $\mathcal{RF}-\mathcal{GRF}$，$E$ 表示不可计算的数论函数类。判定下列数论函数所属的函数类，选择 A、B、C、D、E 之一，填在题后的表格中。

(1) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 为处处无定义的函数。

(2) Ackermann 函数。

(3) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 定义为

$$f(n)=\begin{cases}0, & \text{若 } n \text{ 呈形 } m^m\\ \text{无定义}, & \text{否则}\end{cases}$$

(4) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 定义为

$$f(m)=\begin{cases}0, & \text{若存在 } M\in\Lambda \text{ 使得 } \ulcorner m\urcorner=\ulcorner M\urcorner \text{ 且 } M \text{ 呈形 } \lambda vu.\,vuvu\cdots vu\text{，这里 } v,u \text{ 为变元}\\ 1, & \text{否则}\end{cases}$$

(5) $f:\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}$ 定义为

$$f(m,n)=\begin{cases}1, & \text{若存在 } M,N\in\Lambda \text{ 使得 } \ulcorner m\urcorner=\ulcorner M\urcorner\text{，}\ulcorner n\urcorner=\ulcorner N\urcorner\text{，且 } M\neq_\beta N\\ 2, & \text{否则}\end{cases}$$

(6) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 定义为 $f(n)=\left\lfloor(\frac{\sqrt{5}+1}{2})^n\right\rfloor$，这里 $\lfloor x\rfloor$ 为对 x 向下取整。

(7) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 定义为

$$f(n)=\begin{cases}0, & \text{若存在 Turing 机 } M \text{ 使得 } n=\sharp M \text{ 且 } M \text{ 对于一切输入皆停机}\\ 1, & \text{否则}\end{cases}$$

(8) $f:\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}$ 定义为 $f(n,m)=\left.n^{n^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{n^n}}}}}\right\}$ 共 $m+1$ 个 n。

(9) Gödel 的 β–函数。

(10) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 定义为 $f(n)=\lfloor a_n\rfloor$，这里 $\lfloor x\rfloor$ 为对 x 向下取整，$\{a_n\}$ 为单调递减数列且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\pi$。

对于上述各函数，判定其所属函数类，选择 A、B、C、D、E 之一，填在下面的表格中。

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)

三. （10 分）设 $\mathcal{K}, \mathcal{S} \subseteq \mathbb{N}$ 是可判定的（decidable），证明

(1) $\mathbb{N} - \mathcal{S}$ 是可判定的;

(2) $\mathcal{K} \cap \mathcal{S}$ 是可判定的;

(3) $\mathcal{K} \cup \mathcal{S}$ 是可判定的。

四. （10 分）设数论函数 $f(n) = \left\lfloor (\sqrt{6} + \sqrt{5})^{2n} \right\rfloor$,

(1) 计算 $f(3)$ 的值;

(2) 证明 $f(n)$ 为初等函数.

五. （10 分）若在系统 $\lambda\beta$ 中加入

$$(\star) \qquad \mathbf{I} = \mathbf{S}$$

作为额外公理，则对任何的 $M, N \in \Lambda$，$\lambda\beta + (\star) \vdash M = N$。

六. （10 分）构造机器计算函数 $f(x) = x^4$;
(注：构造时可利用已有机器)

七.（10 分）

Let $f(n)$ be the n-th digit in the decimal expansion of the real number e. For example, suppose that $e = a_0.a_1a_2a_3\cdots$, then $f(0) = a_0$, $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$, $\cdots$. Prove that function f is Turing-computable. Furthermore, prove that it is elementary.

令 $f(n)$ 为实数 e 的十进制展开式中的第 n 位数字。例如，假设 $e = a_0.a_1a_2a_3\cdots$，那么 $f(0) = a_0$，$f(1) = a_1$，$f(2) = a_2$，$\cdots$。证明函数 f 是 Turing 可计算的。进而，证明 f 是初等函数。

《计算模型导引》期末试卷

南京大学计算机科学与技术系

2020 年 6 月

本试卷满分 100 分，共七题。考试时间 2 小时。开卷。

姓名	学号	成绩

一.（20 分）解释下列概念：

(1) 一般递归函数

(2) 数论全函数的 λ-可定义性

(3) λ-演算中 $\lambda\beta$ 的 CR 性质

(4) Turing 机（Turing Machine）

(5) 停机问题

二.（20 分）设 A 表示 $\mathcal{EF}$，B 表示 $\mathcal{PRF}-\mathcal{EF}$，$C$ 表示 $\mathcal{GRF}-\mathcal{PRF}$，$D$ 表示 $\mathcal{RF}-\mathcal{GRF}$，$E$ 表示不可计算的数论函数类。判定下列数论函数所属的函数类，选择 A、B、C、D、E 之一，填在题后的表格中。

(1) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 为处处无定义的函数。

(2) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 定义为

$$f(n)=\begin{cases}0, & \text{若 } n \text{ 为平方数}\\ 1, & \text{否则}\end{cases}$$

(3) Ackermann 函数。

(4) $f:\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}$ 定义为

$$f(n,m)=\begin{cases}0, & \text{若 } n=P_m\\ \text{无定义}, & \text{否则}\end{cases}$$

(5) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 定义为 $f(n)=\lfloor 10^n\cdot e\rfloor$，这里 $\lfloor x\rfloor$ 为对 x 向下取整，e 为自然对数之底。

(6) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 定义为

$$f(n)=\begin{cases}1, & \text{若存在 } M\in\Lambda \text{ 使得} \ulcorner n\urcorner=\ulcorner M\urcorner \text{ 且 } M \text{ 有 } \beta-nf\\ 2, & \text{否则}\end{cases}$$

(7) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 定义为 $f(n)=\left.2^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{(n+1)}}}}}\right\}n$ 层。

(8) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 定义为

$$f(n)=\begin{cases}0, & \text{若存在 Turing 机 } M \text{ 使 } n=\sharp M \text{ 且 } M \text{ 对于一切输入皆停机}\\ 1, & \text{否则}\end{cases}$$

(9) Gödel 的 β–函数。

(10) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 定义为 $f(n)=\left\lfloor\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right\rfloor$，这里 $\lfloor x\rfloor$ 为对 x 向下取整。

对于上述各函数，判定其所属函数类，选择 A、B、C、D、E 之一，填在下面的表格中。

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)

三.（10 分）

(1) 构造 $\mathbf{D} \in \Lambda^\circ$ 使 $\mathbf{D}$ λ-定义数论全函数 $f(x) = 2x$。

(2) 构造 $\mathbf{H} \in \Lambda^\circ$ 使 $\mathbf{H}$ λ-定义数论全函数 $g(x) = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$。

四.（10 分）若在系统 $\lambda\beta$ 中加入

$$(\star) \qquad \lambda x.xx = \lambda x.xxx$$

作为额外公理，则对任何的 $M, N \in \Lambda$，$\lambda\beta + (\star) \vdash M = N$。

五.（10 分）构造计算下列函数的 Turing 机：$f(x, y) = x \dot{-} y$

六. （20 分）

(1) What is Church-Turing's thesis?
何谓 Church-Turing 论题?

(2) Let $f(n)$ be the n-th digit in the decimal expansion of the real number $sin(1)$, where $sin(x)$ is the sine function. For example, suppose that $sin(1) = 0.a_1a_2a_3\cdots$, we have $f(0) = 0$, $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$, $\cdots$. Prove by Church-Turing's thesis that the function f is computable.
令 $f(n)$ 为实数 $sin(1)$ 的十进制展开式中的第 n 位数字，其中 $sin(x)$ 是正弦函数。例如，假设 $sin(1) = 0.a_1a_2a_3\cdots$，则我们有 $f(0) = 0$，$f(1) = a_1$，$f(2) = a_2$，$\cdots$。利用 Church-Turing 论题证明函数 f 是可计算的。

(3) Prove that the above function f is elementary.
证明上述函数 f 是初等的。

七.（10 分）设 f 为 k 元数论全函数，证明：
若 f 为 Turing-可计算函数，则 f 为一般递归函数。

《计算模型导引》期末试卷

南京大学计算机科学与技术系

2021 年 6 月

本试卷满分 100 分，共七题。考试时间 2 小时。开卷。

姓名	学号	成绩

一. （20 分）解释下列概念：

(1) Church-Turing Thesis

(2) 原始递归函数

(3) λ-演算中的不动点算子

(4) Turing 机（Turing Machine）

(5) 停机问题

二.（20 分）设 A 表示 $\mathcal{EF}$，B 表示 $\mathcal{PRF}-\mathcal{EF}$，$C$ 表示 $\mathcal{GRF}-\mathcal{PRF}$，$D$ 表示 $\mathcal{RF}-\mathcal{GRF}$，$E$ 表示不可计算的数论函数类。判定下列数论函数所属的函数类，选择 A、B、C、D、E 之一，填在题后的表格中。

(1) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 为处处无定义的函数。

(2) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 定义为

$$f(n)=\begin{cases}0, & \text{若 } n \text{ 为素数}\\ 1, & \text{否则}\end{cases}$$

(3) Ackermann 函数。

(4) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 定义为

$$f(n)=\begin{cases}0, & \text{若 } n \text{ 为素数}\\ \text{无定义}, & \text{否则}\end{cases}$$

(5) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 定义为 $f(n)=\lfloor 10^n\cdot e\rfloor$，这里 $\lfloor x\rfloor$ 为对 x 向下取整，e 为自然对数之底。

(6) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 定义为

$$f(n)=\begin{cases}1, & \text{若存在 } M\in\Lambda \text{ 使得 } \ulcorner n\urcorner=\ulcorner M\urcorner \text{ 且 } M \text{ 有 } \beta-nf\\ 2, & \text{否则}\end{cases}$$

(7) $f:\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}$ 定义为

$$f(m,n)=\begin{cases}\left.2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^n}}}}}\right\}\text{共 } m+1 \text{ 层}, & \text{若 } m\neq 0\\ n, & \text{若 } m=0\end{cases}$$

(8) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 定义为

$$f(n)=\begin{cases}0, & \text{若存在 Turing 机 } M \text{ 使得 } n=\sharp M \text{ 且 } M \text{ 对于一切输入皆停机}\\ 1, & \text{否则}\end{cases}$$

(9) Gödel 的 β–函数。

(10) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 定义为 $f(n)=\left\lfloor (n+\frac{1}{n})^{\frac{1}{n}}\right\rfloor$，这里 $\lfloor x\rfloor$ 为对 x 向下取整.

对于上述各函数，判定其所属函数类，选择 A、B、C、D、E 之一，填在下面的表格中。

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)

三.（15 分）设 $f(n) = \left\lfloor (2+\sqrt{3})^n \right\rfloor$,

(1) 计算 $f(5)$.

(2) 证明 $f(n)$ 为初等函数.

四.（15 分）证明：若在系统 $\lambda\beta$ 中加入

$$(\star) \quad \lambda x.x = \lambda x.x \cdots x \quad (\text{在}\lambda x.x \cdots x\text{中有}n+3\text{个}x, \text{且}n \in \mathbb{N})$$

作为额外公理，则对任何的 $M, N \in \Lambda$，$\lambda\beta + (\star) \vdash M = N$。

五.（10 分）构造 Turing 机 M 使其计算函数 $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$，这里 $f(x, y) = x^2 y$.

六.（10 分）设 $l \in \mathbb{N}^+$, 对于 $0 \le n \le l$，M_n 为 Turing 机，证明存在 Turing 机 M 使对于任何输入 $\overline{(n_1, \cdots, n_k)}$，若对于 $0 \le n \le l$，$M_n|\overline{(n_1, \cdots, n_k)} \twoheadrightarrow \overline{y_n}$，则对于 $0 \le n \le l$，$M|\overline{(n, n_1, \cdots, n_k)} \twoheadrightarrow \overline{y_n}$.

七.（10 分）

Show that $M \in \Lambda$ is a fixed-point combinator iff M is a fixed-point of SI.

在 $\lambda-$ 演算中，对于 $M \in \Lambda$，证明：$(\forall F \in \Lambda . F(MF) =_\beta MF) \Leftrightarrow SIM = M$，这里 $I \equiv \lambda x.x$，$S \equiv \lambda xyz.xz(yz)$.