Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba
***Campus* Campina Grande**
Curso Superior de Tecnologia em Telemática
Curso Superior de Engenharia de Computação

Exercícios da Semana 3 e 4

1. Determine as raízes reais de $f(x) = -0.5x^2 + 2.5x + 4.5$:

   (a) Graficamente;

   (b) Usando a fórmula quadrática;

   (c) Usando três iterações do método da bisseção para determinar a maior raiz. Use as aproximações iniciais $x_l = 5$ e $x_u = 10$. Calcule o erro relativo obtido entre cada iteração, e o erro entre os valores verdadeiros encontrados no item b e o valor de cada iteração.

2. Dada $f(x) = -2x^6 - 1.5x^4 + 10x + 20$, encontre o máximo dessa função ($f'(x) = 0$) usando o método da bisseção, considerando o intervalo $[0, 1]$ e um erro limite de 5%.

3. Embora a bisseção seja uma técnica perfeitamente válida para determinar raízes, sua abordagem do tipo "força bruta" é relativamente ineficiente. A falsa posição é uma alternativa baseada na percepção gráfica.

   Uma deficiência do método da bisseção é que, na divisão do intervalo de x_l a x_u em metades iguais, não são levados em conta os módulos de $f(x_l)$ e $f(x_u)$. Por exemplo, se $f(x_l)$ estiver muito mais próximo de zero do que $f(x_u)$, será provável que a raiz esteja mais próxima de x_l que de x_u.

   Um método alternativo que explora essa percepção gráfica é ligar $f(x_l)$ e $f(x_u)$ por uma reta. A intersecção dessa reta com o eixo x representa uma estimativa melhorada da raiz. O fato da substituição da curva por uma reta dar uma "falsa posição" da raiz é a origem do nome, método da falsa posição, ou, em latim, *regula falsi*. Ele também é chamado de método da interpolação linear. Para esse método, a aproximação da raiz é dada por

   $$x^* = x_u - \frac{f(x_u)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u))},$$

   em que x^* é a estimação da raiz na atual iteração, x_l e x_u são, respectivamente, os limites inferior e superior do intervalo de verificação da raiz e $f(x_l)$ e $f(x_u)$ são os valores da função para esses limites.

   As bibliotecas numérica do python não trazem uma implementação desse método. Implemente-o, teste-o com os exemplos da texto, comparando com o método da bisseção. Mostre que esse método, para vários casos, é mais eficiente que o da bisseção.

4. Use a iteração de ponto fixo simples para localizar a raiz de $f(x) = 2\sin(\sqrt{x}) - x$, tendo $x_0 = 0,5$ e adotando como critério de parada o erro $e_a \leq 0,001\%$.

5. Determine a maior raiz real de $f(x) = 2x^3 - 11.7x^2 + 17.7x - 5$

   (a) Graficamente;
   (b) Pelo método da iteração de ponto fixo (três iterações, $x_0 = 3$)(certifique-se de desenvolver uma solução que convirja para a raiz);
   (c) Pelo método de Newton-Raphson (três iterações, $x_0 = 3$);
   (d) Pelo método da secante (três iterações, $x_{-1} = 3, x_0 = 4$).

6. Compare os métodos da bisseção, falsa posição, do ponto fixo, de Newton-Raphson e da secante, localizando a raiz das seguintes equações:

   (a) $f_1(x) = 2x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 10x - 15, \text{com } x^* \in [0, 3]$
   (b) $f_2(x) = (x+3)(x+1)(x-2)^3, \text{com } x^* \in [0, 5]$
   (c) $f_3(x) = 5x^3 + x^2 - e^{1-2x} + \cos(x) + 20, \text{com } x^* \in [-5, 5]$
   (d) $f_4(x) = \sin(x)x + 4, \text{com } x^* \in [1, 5]$
   (e) $f_5(x) = (x-3)^5 ln(x), \text{com } x^* \in [2, 5]$
   (f) $f_6(x) = x^1 0 - 1, \text{com } x^* \in [0.8, 1.2]$

   Para as avaliações, deve-se considerar:

   - o número máximo de iterações de todos os métodos testados não pode ultrapassar 200;
   - a tolerância deve ser de 10^{-10};
   - para os métodos abertos, escolha os limites do intervalo, respectivamente como $x_{?1}$ e x_0.

   Para cada método, estamos interessados em comparar:

   - raiz;
   - número de iterações até o critério de parada;
   - se houve erro de convergência;
   - tempo de cálculo (procure como calcular tempo de execução usando jupyter notebooks, como `%timeit`).