# Fundamentos Lógicos y Algebraicos

**Ejercicios**

## Lógica de Primer Orden

**Salvador Lucas** *

[1]* http://slucas.webs.upv.es/

# Sintaxis de la lógica de primer orden

**Observación 1 (Signaturas a partir de una teoría)** *Una teoría consta de fórmulas bien formadas, que pueden verse como una combinación de átomos utilizando conectivas lógicas y cuantificadores. Los símbolos más externos de los átomos son símbolos de predicado. Dichos símbolos constituirán la* signatura $\Pi$ de símbolos de predicado *obtenida a partir de las fórmulas de la teoría.*

*Por otro lado, en un átomo los argumentos de los predicados son términos. Por tanto, todos los símbolos que aparecen por debajo de un símbolo de predicado son símbolos de función o variables. Exceptuando símbolos como $x$, $y$,... que, mientras no se indique lo contrario, corresponden a* variables*, los demás símbolos constituirán la* signatura $\mathcal{F}$ de símbolos de función*.*

***Importante:***

- *En ambos casos es importante comprobar que la aridad de cada símbolo es* la misma *en todos sus usos.*
- *Es posible que existan símbolos de función y predicado que no aparezcan explícitamente en la teoría. En ese caso, deben hacerse explícitos aparte.*

**Ejercicio 1** *Con relación al conjunto de sentencias del caso de estudio A, describir las signaturas de símbolos empleadas. ¿Cuáles son sus símbolos de función? ¿Y los símbolos de predicado? Justifica tus respuestas.*

**Ejercicio 2** *Con relación al conjunto de sentencias del caso de estudio B, describir la signatura de símbolos empleada. ¿Cuáles son sus símbolos de función? ¿Y los símbolos de predicado? Justifica tus respuestas.*

**Ejercicio 3** *Con relación al conjunto de sentencias del caso de estudio C, describir la signatura de* DwarfAndElf*. ¿Cuáles son sus símbolos de función? ¿Y los símbolos de predicado? Justifica tus respuestas.*

## Enunciados como fórmulas

**Observación 2** *En su libro, Mendelson da los siguientes consejos para traducir sentencias del lenguaje natural como fórmulas lógicas [Men97, p. 55]:*

> When English sentences are translated into formulas, certain general guidelines will be useful:
>
> 1. A sentence of the form 'All $A$s are $B$s' becomes $(\forall x)(A(x) \Rightarrow B(x))$. For example, *Every mathematician loves music* is translated as $(\forall x)(M(x) \Rightarrow L(x))$, where $M(x)$ means *x is a mathematician* and $L(x)$ means *x loves music*.
> 2. A sentence of the form 'Some $A$s are $B$s' becomes $(\exists x)(A(x) \wedge B(x))$. For example, *Some New Yorkers are friendly* becomes $(\exists x)(N(x) \wedge F(x))$, where $N(x)$ means *x is a New Yorker* and $F(x)$ means *x is friendly*.
> 3. A sentence of the form 'No $A$s are $B$s' becomes $(\forall x)(A(x) \Rightarrow \neg B(x))$.† For example, *No philosopher understands politics* becomes $(\forall x)(P(x) \Rightarrow \neg U(x))$, where $P(x)$ means *x is a philosopher* and $U(x)$ means *x understands politics*.
>
> Let us consider a more complicated example: *Some people respect everyone*. This can be translated as $(\exists x)(P(x) \wedge (\forall y)(P(y) \Rightarrow R(x,y)))$, where $P(x)$ means *x is a person* and $R(x,y)$ means *x respects y*.

Estos consejos pueden tenerse en cuenta al resolver los siguientes ejercicios.

**Ejercicio 4** *Traducir las siguientes sentencias del lenguaje natural en fórmulas de primer orden [Men97, Exercise 2.8].*

(a) Anyone who is persistent can learn logic.
(b) No politician is honest.
(c) Not all birds can fly.
(d) All birds cannot fly.
(e) $x$ is transcendental only if it is irrational.
(f) Seniors date only juniors.
(g) If anyone can solve the problem, Hilary can.
(h) Nobody loves a loser.
(i) Nobody in the statistics class is smarter than everyone in the logic class.
(j) John hates all people who do not hate themselves.
(k) Everyone loves somebody and no one loves everybody, or somebody loves everybody and someone loves nobody.
(l) You can fool some of the people all of the time, and you can fool all the people some of the time, but you can't fool all the people all the time.

(m) Any sets that have the same members are equal.
(n) Anyone who knows Julia loves her.
(o) There is no set belonging to precisely those sets that do not belong to themselves.
(p) There is no barber who shaves precisely those men who do not shave themselves.

**Ejercicio 5** *Traducir las siguientes fórmulas de primer orden en sentencias del lenguaje natural (donde* no *suelen utilizarse* variables*) [Men97, Exercise 2.9]:*

(a) $(\forall x)(M(x) \wedge (\forall y)\neg W(x,y) \Rightarrow U(x))$, where $M(x)$ means $x$ *is a man*, $W(x,y)$ means $x$ *is married to* $y$, and $U(x)$ means $x$ *is unhappy*.
(b) $(\forall x)(V(x) \wedge P(x) \Rightarrow A(x,b))$, where $V(x)$ means $x$ *is an even integer*, $P(x)$ means $x$ *is a prime integer*, $A(x,y)$ means $x = y$, and $b$ denotes 2.
(c) $\neg(\exists y)(I(y) \wedge (\forall x)(I(x) \Rightarrow L(x,y)))$, where $I(y)$ means $y$ *is an integer* and $L(x,y)$ means $x \leqslant y$.
(d) In the following wfs, $A_1^1(x)$ means $x$ *is a person* and $A_1^2(x,y)$ means $x$ *hates* $y$.
(i) $(\exists x)(A_1^1(x) \wedge (\forall y)(A_1^1(y) \Rightarrow A_1^2(x,y)))$
(ii) $(\forall x)(A_1^1(x) \Rightarrow (\forall y)(A_1^1(y) \Rightarrow A_1^2(x,y)))$
(iii) $(\exists x)(A_1^1(x) \wedge (\forall y)(A_1^1(y) \Rightarrow (A_1^2(x,y) \Leftrightarrow A_1^2(y,y))))$
(e) $(\forall x)(H(x) \Rightarrow (\exists y)(\exists z)(\neg A(y,z) \wedge (\forall u)(P(u,x) \Leftrightarrow (A(u,y) \vee A(u,z)))))$, where $H(x)$ means $x$ *is a person*, $A(u,v)$ means '$u = v$', and $P(u,x)$ means $u$ *is a parent of* $x$.

**Ejercicio 6** *Expresar la siguiente afirmación [CL73, Example 5.23]*

***Todo el que ahorra dinero obtiene un interés***

*como una fórmula de primer orden, indicando*

1. *La signatura de símbolos de función y predicado (cuando los hayan) y su aridad.*
2. *Las variables empleadas.*
3. *Si la fórmula obtenida es una sentencia.*

**Ejercicio 7** *Expresar la siguiente afirmación [HorEtAl08, Ejercicios 5.27(c) y 5.28(b)]*

***La esposa del rey Arturo fue la reina Ginebra,***
***que solo fue amada por caballeros***

*como una fórmula de primer orden, indicando*

1. *La signatura de símbolos de función y predicado (cuando los hayan) y su aridad.*
2. *Las variables empleadas.*

3. *Si la fórmula obtenida es una sentencia.*

**Ejercicio 8** *Expresar la siguiente afirmación [HorEtAl08, Ejercicio 5.28(c)]*

***Entre los vampiros se dan casos de hemofilia,***
***pero no entre los murciélagos***

*como una fórmula de primer orden, indicando*

1. *La signatura de símbolos de función y predicado (cuando los hayan) y su aridad.*
2. *Las variables empleadas.*
3. *Si la fórmula obtenida es una sentencia.*

**Ejercicio 9** *Expresar la siguiente afirmación*

***Dos no discuten si uno no quiere***

*como una fórmula de primer orden, indicando*

1. *La signatura de símbolos de función y predicado (cuando los hayan) y su aridad.*
2. *Las variables empleadas.*
3. *Si la fórmula obtenida es una sentencia.*

## Interpretación

**Ejercicio 10** *¿Qué propiedades o relaciones expresan las siguientes fórmulas e interpretaciones [Men97, Exercise 2.14].*

(a) $[(\exists u)A_1^2(f_1^2(x,u),y)] \wedge [(\exists v)A_1^2(f_1^2(x,v),z)]$, where the domain $D$ is the set of integers, $A_1^2$ is $=$, and $f_1^2$ is multiplication.

(b) Here, $D$ is the set of non-negative integers, $A_1^2$ is $=$, $a_1$ denotes 0, $f_1^2$ is addition, and $f_2^2$ is multiplication.

(i) $[(\exists z)(\neg A_1^2(z,a_1) \wedge A_1^2(f_1^2(x,z),y))]$

(ii) $(\exists y)A_1^2(x,f_2^2(y,y))$

(c) $(\exists x_3)A_1^2(f_1^2(x_1,x_3),x_2)$, where $D$ is the set of positive integers, $A_1^2$ is $=$, and $f_1^2$ is multiplication,

(d) $A_1^1(x_1) \wedge (\forall x_2)\neg A_1^2(x_1,x_2)$, where $D$ is the set of all living people, $A_1^1(x)$ means $x$ *is a man* and $A_1^2(x,y)$ means $x$ *is married to* $y$.

(e) (i) $(\exists x_1)(\exists x_2)(A_1^2(x_1,x_3) \wedge A_1^2(x_2,x_4) \wedge A_2^2(x_1,x_2))$

(ii) $(\exists x_3)(A_1^2(x_1,x_3) \wedge A_1^2(x_3,x_2))$

where $D$ is the set of all people, $A_1^2(x,y)$ means $x$ *is a parent of* $y$, and $A_2^2(x,y)$ means $x$ *and* $y$ *are siblings*.

(f) $(\forall x_3)((\exists x_4)(A_1^2(f_1^2(x_4,x_3),x_1) \wedge (\exists x_4)(A_1^2(f_1^2(x_4,x_3),x_2)) \Rightarrow A_1^2(x_3,a_1))$, where $D$ is the set of positive integers, $A_1^2$ is $=$, $f_1^2$ is multiplication, and $a_1$ denotes 1.

(g) $\neg A_1^2(x_2,x_1) \wedge (\exists y)(A_1^2(y,x_1) \wedge A_2^2(x_2,y))$, where $D$ is the set of all people, $A_1^2(u,v)$ means $u$ *is a parent of* $v$, and $A_2^2(u,v)$ means $u$ *is a wife of* $v$.

**Ejercicio 11** *Para cada una de las siguientes sentencias e interpretaciones, expresar su significado en lenguaje natural y determinar si son ciertas o falsas [Men97, Exercise 2.15].*

(a) The domain $D$ is the set of non-negative integers, $A_1^2$ is $=$, $f_1^2$ is addition, $f_2^2$ is multiplication, $a_1$ denotes 0 and $a_2$ denotes 1.

(i) $(\forall x)(\exists y)(A_1^2(x,f_1^2(y,y)) \vee A_1^2(x,f_1^2(f_1^2(y,y),a_2)))$

(ii) $(\forall x)(\forall y)(A_1^2(f_2^2(x,y),a_1) \Rightarrow A_1^2(x,a_1) \vee A_1^2(y,a_1))$

(iii) $(\exists y)A_1^2(f_1^2(y,y),a_2)$

(b) Here, $D$ is the set of integers, $A_1^2$ is $=$, and $f_1^2$ is addition.

(i) $(\forall x_1)(\forall x_2)A_1^2(f_1^2(x_1,x_2),f_1^2(x_2,x_1))$

(ii) $(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)A_1^2(f_1^2(x_1,f_1^2(x_2,x_3)),f_1^2(f_1^2(x_1,x_2),x_3))$

(iii) $(\forall x_1)(\forall x_2)(\exists x_3)A_1^2(f_1^2(x_1,x_3),x_2)$

(c) The wfs are the same as in part (b), but the domain is the set of positive integers, $A_1^2$ is $=$, and $f_1^2(x, y)$ is $x^y$.

(d) The domain is the set of rational numbers, $A_1^2$ is $=$, $A_2^2$ is $<$, $f_1^2$ is multiplication, $f_1^1(x)$ is $x + 1$, and $a_1$ denotes 0.

(i) $(\exists x)A_1^2(f_1^2(x, x), f_1^1(f_1^1(a_1)))$
(ii) $(\forall x)(\forall y)(A_2^2(x, y) \Rightarrow (\exists z)(A_2^2(x, z) \wedge A_2^2(z, y)))$
(iii) $(\forall x)(\neg A_1^2(x, a_1) \Rightarrow (\exists y)A_1^2(f_1^2(x, y), f_1^1(a_1)))$

(e) The domain is the set of non-negative integers, $A_1^2(u, v)$ means $u \leqslant v$, and $A_1^3(u, v, w)$ means $u + v = w$.

(i) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(A_1^3(x, y, z) \Rightarrow A_1^3(y, x, z))$
(ii) $(\forall x)(\forall y)(A_1^3(x, x, y) \Rightarrow A_1^2(x, y))$
(iii) $(\forall x)(\forall y)(A_1^2(x, y) \Rightarrow A_1^3(x, x, y))$
(iv) $(\exists x)(\forall y)A_1^3(x, y, y)$
(v) $(\exists y)(\forall x)A_1^2(x, y)$
(vi) $(\forall x)(\forall y)(A_1^2(x, y) \Leftrightarrow (\exists z)A_1^3(x, z, y))$

(f) The domain is the set of natural numbers, $A_1^2(u, v)$ means $u = v$, $f_1^2(u, v) = u + v$, and $f_2^2(u, v) = u \cdot v$
$(\forall x)(\exists y)(\exists z)A_1^2(x, f_1^2(f_2^2(y, y), f_2^2(z, z)))$

## Satisfacción, modelos

**Ejercicio 12** *Dadas las siguientes fórmulas (i)-(iii) e interpretaciones (a)-(c), decir, en su caso, para qué valores de las variables se satisfacen o, en caso de tratarse de* sentencias, *si son ciertas o falsas [Men97, Exercise 2.10].*

(i) $A_1^2(f_1^2(x_1, x_2), a_1)$

(ii) $A_1^2(x_1, x_2) \Rightarrow A_1^2(x_2, x_1)$

(iii) $(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(A_1^2(x_1, x_2) \wedge A_1^2(x_2, x_3) \Rightarrow A_1^2(x_1, x_3))$

(a) The domain is the set of positive integers, $A_1^2(y,z)$ is $y \geqslant z$, $f_1^2(y,z)$ is $y \cdot z$, and $a_1$ is 2.

(b) The domain is the set of integers, $A_1^2(y,z)$ is $y = z$, $f_1^2(y,z)$ is $y + z$, and $a_1$ is 0.

(c) The domain is the set of all sets of integers, $A_1^2(y,z)$ if $y \subseteq z$, $f_1^2(y,z)$ is $y \cap z$, and $a_1$ is the empty set $\emptyset$.

**Ejercicio 13** (Examen Parcial FLA de 21 de octubre de 2022) *Considera la teoría* NumTh *del Apéndice B que relaciona los* valores numéricos *positivos (i.e., naturales no nulos), naturales, enteros y racionales. Considera la siguiente interpretación $\mathcal{I}$, sobre el dominio $\mathbb{N} \cup \{-1\}$:*

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
0^{\mathcal{I}} & = & 1 & s^{\mathcal{I}}(x) & = & -1 \\
-^{\mathcal{I}} x & = & x+1 & \frac{x}{y}^{\mathcal{I}} & = & y+4 \\
NzNat^{\mathcal{I}}(x) & \Leftrightarrow & x = -1 & Nat^{\mathcal{I}}(x) & \Leftrightarrow & x \leq 1 \\
Int^{\mathcal{I}}(x) & \Leftrightarrow & x \leq 1 & Rat^{\mathcal{I}}(x) & \Leftrightarrow & x \leq 3
\end{array}$$

*¿Es $\mathcal{I}$ un modelo de* NumTh*? Justifica tu respuesta.*

**Ejercicio 14** *Con relación la teoría del caso de estudio CE3, Apéndice C, considera la siguiente interpretación $\mathcal{I}$, sobre el dominio $\{0, 1\}$:*

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
\mathsf{gimli}^{\mathcal{I}} & = & 0 & \mathsf{legolas}^{\mathcal{I}} & = & 0 \\
\mathsf{dwarf}^{\mathcal{I}}(x) & \Leftrightarrow & \mathit{false} & \mathsf{elf}^{\mathcal{I}}(x) & \Leftrightarrow & \mathit{true} \\
\mathsf{friends}^{\mathcal{I}}(x, y) & \Leftrightarrow & \mathit{true} & & &
\end{array}$$

*¿Es $\mathcal{I}$ un modelo de* DwarfAndElf*? Justifica tu respuesta.*

## Normalización de fórmulas

**Observación 3** *En los siguientes ejercicios, se aplica la transformación de normalización presentada en el Tema 1 sobre el* lenguaje de la lógica de primer orden*: ver las reglas (1)–(15) en las diapositivas 16 y 17, y también la* Skolemización *(diapositiva 19).*

**Ejercicio 15** *Consideremos la fórmula [CL73, Example 3.12]:*

$$(\forall x)(\forall y)((\exists z)(P(x,z) \wedge P(y,z)) \Rightarrow (\exists u)Q(x,y,u)) \tag{1}$$

*Obtener una forma prenexa* equivalente *cuya matriz esté en forma normal conjuntiva (CNF).*

**Ejercicio 16** *Consideremos las fórmulas [CL73, Example 5.20]:*

$$(\forall x)(C(x) \Rightarrow (W(x) \wedge R(x))) \tag{2}$$
$$(\exists x)(C(x) \wedge O(x)) \tag{3}$$
$$(\exists x)(O(x) \wedge R(x)) \tag{4}$$

*Obtener un conjunto de cláusulas correspondiente a* $(2) \wedge (3) \wedge \neg(4)$.

**Ejercicio 17** *Consideremos las fórmulas [CL73, Example 5.21]:*

$$(\exists x)(P(x) \wedge (\forall y)(D(y) \Rightarrow L(x,y))) \tag{5}$$
$$(\forall x)(P(x) \Rightarrow (\forall y)(Q(y) \Rightarrow \neg L(x,y)))) \tag{6}$$
$$(\forall x)(D(x) \Rightarrow \neg Q(x)) \tag{7}$$

*Obtener un conjunto de cláusulas correspondiente a* $(5) \wedge (6) \wedge \neg(7)$.

**Ejercicio 18** *Consideremos las fórmulas [CL73, Example 5.23]:*

$$(\forall x)((\exists y)(S(x,y) \wedge M(y)) \Rightarrow (\exists y)(I(y) \wedge E(x,y))) \tag{8}$$
$$\neg(\exists x)I(x) \Rightarrow (\forall x)(\forall y)(S(x,y) \Rightarrow \neg M(y)) \tag{9}$$

*Obtener un conjunto de cláusulas correspondiente a* $(8) \wedge \neg(9)$.

**Ejercicio 19** *La siguiente fórmula representa el enunciado* "si dos alumnos comparten un profesor, son compañeros de clase*":*

$$\begin{aligned}(\forall x)(\forall y)((stdnt(x) \wedge stdnt(y) \wedge ((\exists z)(tchr(z) \wedge teach(z,x) \wedge teach(z,y)))) \\ \Rightarrow cmates(x,y))\end{aligned} \tag{10}$$

*Observemos la introducción de un nuevo símbolo de predicado cmates para expresar la nueva relación derivada de las ya existentes en* Teach *mediante la sentencia (10)). Obtener una versión normalizada de (10). ¿Se obtiene una cláusula de Horn?*

**Ejercicio 20** *La siguiente fórmula representa el enunciado* "si alguien asiste a clase de un profesor, debe ser un alumno"*:*

$$(\forall x)((\exists y)(tchr(y) \wedge teach(y, x)) \Rightarrow stdnt(x)) \tag{11}$$

*Obtener una versión normalizada de la fórmula.*

**Ejercicio 21** *La siguiente fórmula representa el enunciado* "si alguien no asiste a clase de nigún profesor, debe ser un profesor"*:*

$$(\forall x)(\neg(\exists y)(tchr(y) \wedge teach(y, x)) \Rightarrow tchr(x))$$

*Obtener una versión normalizada de la fórmula y el conjunto de cláusulas que le corresponde.*

**Ejercicio 22** *Considera el enunciado "si alguien asiste a clase, o es un profesor o un alumno". Obtener una versión normalizada de la fórmula correspondiente:*

$$(\forall x)((\exists y)(teach(y, x) \vee teach(x, y))) \Rightarrow (tchr(x) \vee stdnt(x))$$

***Ejercicio 23*** *Obtener la representación normalizada de la teoría* NumTh *del caso de estudio B.*

# Sustituciones, ajuste y unificación

**Ejercicio 24** *Consideremos los términos* $s = h(a, y)$ *y* $t = g(f(y), z, h(a, x))$. *Dada la sustitución* $\sigma = \{x \mapsto y, y \mapsto a, z \mapsto h(x, y)\}$, *¿cuál sería el resultado de aplicar ésta sobre* $s$ *y* $t$, *respectivamente?*

**Ejercicio 25** *Dado el término* $\ell = h(a, x)$, *indicar si los siguientes términos* $t_i$ *se* ajustan *a él (i.e.,* $\exists \sigma_i \; t_i = \sigma_i(\ell)$*), y, en su caso, obtener la sustitución de ajuste* $\sigma_i$ *correspondiente:* $t_1 = h(a, b)$, $t_2 = h(b, a)$, $t_3 = h(h(a, x), y)$, $t_4 = h(a, y)$, $t_5 = h(y, h(a, z))$, $t_6 = h(a, f(x))$, $t_7 = f(a)$, $t_8 = g(a, b)$.

**Ejercicio 26** *Dados los términos* $\ell$ *y* $t_i$ *del Ejercicio 25, decir si* $\ell$ unifica *con alguno de los* $t_i$ *(i.e.,* $\exists \sigma_i \; \sigma_i(t_i) = \sigma_i(\ell)$*), y, en su caso, obtener el* unificador $\sigma_i$ *correspondiente.*

**Ejercicio 27** *A la vista de los resultados de los ejercicios 25 y 26, ¿puede decirse que si un término* $t$ *se ajusta a* $\ell$, *entonces* $t$ *y* $\ell$ *unifican? ¿Y viceversa? Justificar las respuestas.*

**Ejercicio 28** *Dados los términos* $t_i$ *del Ejercicio 25, decir si* $t_i$ unifica *con* $t_j$ *para algún* $i, j$, $i \neq j$ *(i.e.,* $\exists \sigma_{ij} \; \sigma_{ij}(t_i) = \sigma_{ij}(t_j)$*), y, en su caso, obtener el* unificador $\sigma_{ij}$ *correspondiente.*

## Resolución

**Ejercicio 29** *Consideremos los siguientes afirmaciones [CL73, Example 3.14]:*

1. *Ningún vendedor de coches usados compra un coche usado para su familia.*
2. *Algunas personas que compran coches usados para su familia son absolutamente deshonestos.*

*Concluir que*

> *algunas personas absolutamente deshonestas no son vendedores de coches usados.*

*Indicación: utilizar los siguientes predicados:*

- $VU(x)$ *para denotar que "x es un vendedor de coches usados",*
- $CU(x)$ *para denotar que "x compra un coche usado para su familia",*
- $AD(x)$ *para denotar que "x es absolutamente deshonesto".*

**Ejercicio 30** *Consideremos los siguientes afirmaciones [CL73, Example 3.15]:*

1. *A algunos pacientes les agradan todos los médicos.*
2. *A ningún paciente le agradan los curanderos.*

*Concluir que*

> *ningún médico es un curandero.*

*Indicación: utilizar los siguientes predicados:*

- $P(x)$ *para denotar que "x es un paciente",*
- $M(x)$ *para denotar que "x es un médico",*
- $C(x)$ *para denotar que "x es un curandero",*
- $A(x,y)$ *para denotar que "a x le agrada y".*

**Ejercicio 31** *Consideremos las siguientes cláusulas [CL73, Example 5.20]:*

$$\neg C(x) \vee W(x) \tag{12}$$
$$\neg C(x) \vee R(x) \tag{13}$$
$$C(a) \tag{14}$$
$$O(a) \tag{15}$$
$$\neg O(x) \vee \neg R(x) \tag{16}$$

*Demostrar que son insatisfacibles mediante resolución.*

**Ejercicio 32** *Consideremos las siguientes cláusulas [CL73, Example 5.21]:*

$$P(a) \tag{17}$$
$$\neg D(y) \vee L(a,y) \tag{18}$$
$$\neg P(x) \vee \neg Q(y) \vee \neg L(x,y) \tag{19}$$
$$D(b) \tag{20}$$
$$Q(b) \tag{21}$$

*Demostrar que son insatisfacibles mediante resolución.*

**Ejercicio 33** *Consideremos las siguientes cláusulas [CL73, Example 5.22]:*

$$\neg E(x) \vee V(x) \vee S(x, f(x)) \tag{22}$$
$$\neg E(x) \vee V(x) \vee C(f(x)) \tag{23}$$
$$P(a) \tag{24}$$
$$E(a) \tag{25}$$
$$\neg S(a,y) \vee P(y) \tag{26}$$
$$\neg P(x) \vee \neg V(x) \tag{27}$$
$$\neg P(x) \vee \neg C(x) \tag{28}$$

*Demostrar que son insatisfacibles mediante resolución.*

**Ejercicio 34** *Consideremos las siguientes cláusulas [CL73, Example 5.23]:*

$$\neg S(x,y) \vee \neg M(y) \vee I(f(x)) \tag{29}$$
$$\neg S(x,y) \vee \neg M(y) \vee E(x, f(x)) \tag{30}$$
$$\neg I(z) \tag{31}$$
$$S(a,b) \tag{32}$$
$$M(b) \tag{33}$$

*Demostrar que son insatisfacibles mediante resolución.*

**Ejercicio 35** *La afirmación* "los estudiantes son ciudadanos" *puede traducirse como sigue [CL73, Example 5.24]:*

$$(\forall x)\,(\mathsf{E}(x) \Rightarrow \mathsf{C}(x)) \tag{34}$$

*donde* $\mathsf{E}(x)$ *y* $\mathsf{C}(x)$ *denotan* "$x$ es un estudiante" *y* "$x$ es un ciudadano", *respectivamente.*

*La afirmación* "Los votos de los estudiantes son votos de ciudadanos" *representada por la fórmula*

$$(\forall x)((\exists y)\,(\mathsf{E}(y) \wedge \mathsf{V}(x,y)) \Rightarrow (\exists z)(\mathsf{C}(z) \wedge \mathsf{V}(x,z)) \tag{35}$$

*donde, además de lo anterior,* $\mathsf{V}(x,y)$ *denota que* "$x$ es un voto de $y$", *¿es consecuencia lógica de la afirmación anterior?*

**Ejercicio 36** (Examen Parcial FLA de 21 de octubre de 2022) *Considera la teoría* NumTh *del Apéndice B que relaciona los* valores numéricos *positivos (i.e., naturales no nulos), naturales, enteros y racionales. Considera las siguientes fórmulas:*

$$(\forall x) \qquad (Nat(x) \Rightarrow Nat(s(x))) \tag{36}$$

$$Rat(\frac{s(0)}{-s(0)}) \tag{37}$$

*¿Son (cada una de ellas) consecuencia lógica de* NumTh*? Justifica tus respuesta.*

**Ejercicio 37** *Con relación al conjunto de sentencias del caso de estudio C, considera las siguientes fórmulas:*

$$\mathsf{dwarf}(\mathsf{gimli}) \tag{38}$$

$$\mathsf{elf}(\mathsf{legolas}) \tag{39}$$

*¿Son (cada una de ellas) consecuencia lógica de* DwarfAndElf*? ¿Y la* disyunción *de ambas, i.e.,* $\mathsf{dwarf}(\mathsf{gimli}) \vee \mathsf{elf}(\mathsf{legolas})$*? Justifica tus respuestas.*

***Indicación:*** *La interpretación del problema 14 puede ser útil aquí.*

# References


[CL73] Chin-Liang Chang and Richard Char-Tung Lee. Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving. Academic Press, 1973.

[Ham81] Alan G. Hamilton. Lógica para matemáticos. Paraninfo, 1981.

[HorEtAl08] Teresa Hortalá González, Narciso Martí Oliet, Miguel Palomino Tarjuelo, Mario Rodríguez Artalejo, Rafael del Vado Vírseda. Lógica Matemática para Informáticos. Ejercicios resueltos. Pearson/Prentice Hall, 2008.

[Men97] Elliot Mendelson. Introduction to Mathematical Logic. Fourth edition. Chapman & Hall, 1997.

[Rei78] Raymond Reiter. On closed world data bases. In Hervé Gallaire and Jack Minker, editors, *Logic and Data Bases, Symposium on Logic and Data Bases, Centre d'études et de recherches de Toulouse, France, 1977*, Advances in Data Base Theory, pages 55–76, New York, 1977. Plemum Press.

# A Caso de estudio 1 (CE1): profesores y alumnos

Consideremos la siguiente base de datos sobre profesores y alumnos:

| *teach* | Teacher | Student |
|---|---|---|
| | Alice | Peter |
| | Alice | Quentin |
| | Bob | Quentin |
| | Charles | Rose |

modelada por la siguiente teoría Teach, que consta de las siguientes cláusulas:

$$tchr(alice) \tag{40}$$
$$tchr(bob) \tag{41}$$
$$tchr(charles) \tag{42}$$
$$tchr(diana) \tag{43}$$
$$stdnt(peter) \tag{44}$$
$$stdnt(quentin) \tag{45}$$
$$stdnt(rose) \tag{46}$$
$$teach(alice, peter) \tag{47}$$
$$teach(alice, quentin) \tag{48}$$
$$teach(bob, quentin) \tag{49}$$
$$teach(charles, rose) \tag{50}$$

## A.1 Especificación de Teach para AGES

Utilizamos la siguiente especificación de la signatura y teoría de Teach:

**(i) Módulo de signatura:**

```
mod Teach is
  sort S .
  ops alice bob charles diana peter quentin rose : -> S .
  ops tchr stdnt : S -> Bool .
  op teach : S S -> Bool .
endm
```

**(ii) Teoría** Teach**:**

```
tchr(alice)
tchr(bob)
tchr(charles)
tchr(diana)
```

```
stdnt(peter)
stdnt(quentin)
stdnt(rose)
teach(alice,peter)
teach(alice,quentin)
teach(bob,quentin)
teach(charles,rose)
```

## B Caso de estudio 2 (CE2): números naturales, enteros y racionales

La jerarquía de los *valores numéricos* positivos (i.e., naturales no nulos), naturales, enteros y racionales suele representarse mediante relaciones de *inclusión* entre los sorts y definiendo adecuadamente los símbolos utilizados para construir sus valores. Dicha información puede codificarse mediante una teoría $\mathsf{NumTh}$:

$$(\forall x) \quad (NzNat(x) \Rightarrow Nat(x)) \tag{51}$$
$$(\forall x) \quad (Nat(x) \Rightarrow Int(x)) \tag{52}$$
$$(\forall x) \quad (Int(x) \Rightarrow Rat(x)) \tag{53}$$
$$Nat(0) \tag{54}$$
$$(\forall x) \quad (Nat(x) \Rightarrow NzNat(s(x))) \tag{55}$$
$$(\forall x) \quad (NzNat(x) \Rightarrow Int(-x)) \tag{56}$$
$$(\forall x)(\forall y) \quad ((Int(x) \wedge NzNat(y)) \Rightarrow Rat(\frac{x}{y})) \tag{57}$$

## C Caso de estudio 3 (CE3): El Señor de los Anillos

Algunas de las relaciones entre personajes de la novela *El Señor de los Anillos*, de J.R.R. Tolkien, se describen en la siguiente teoría $\mathsf{DwarfAndElf}$:

$$(\forall x) \quad \mathsf{dwarf}(x) \vee \mathsf{elf}(x) \tag{58}$$
$$(\forall x)(\forall y) \quad \mathsf{friends}(x, y) \Rightarrow \mathsf{friends}(y, x) \tag{59}$$
$$(\forall x)(\forall y) \quad \mathsf{elf}(x) \wedge \mathsf{dwarf}(y) \Rightarrow \neg\mathsf{friends}(x, y) \tag{60}$$
$$\neg\mathsf{dwarf}(\mathsf{gimli}) \vee \neg\mathsf{elf}(\mathsf{gimli}) \tag{61}$$
$$\neg\mathsf{dwarf}(\mathsf{legolas}) \vee \neg\mathsf{elf}(\mathsf{legolas}) \tag{62}$$
$$\mathsf{friends}(\mathsf{gimli}, \mathsf{legolas}) \tag{63}$$