



Índex

1. Introducció	4
1.1. Antecedents	4
1.2. Objecte	4
1.3. Especificacions i abast	5
2. El problema del flux de càrregues 	6
2.1. Tipus de busos	7
2.2. Modelització d'elements	9
2.2.1. Transformadors	9
2.2.2. Línies	11
2.3. Mètodes tradicionals de resolució	13
2.3.1. Gauss-Seidel	13
2.3.2. Newton-Raphson	15
2.3.3. Desacoblat ràpid	18
3. Mètode d'incrustació holomòrfica	20
3.1. Característiques	20
3.2. Formulació original	24
3.2.1. Algoritme	28
3.3. Formulació pròpia	32
3.3.1. Algoritme	33
4. Convergència de les sèries 	37
4.1. Radi de convergència	37
4.2. Mètodes de recurrència	41
4.2.1. Delta d'Aitken	41
4.2.2. Transformació de Shanks	41
4.2.3. Rho de Wynn	42
4.2.4. Èpsilon de Wynn	43
4.2.5. Theta de Brezinski	44
4.2.6. Eta de Bauer	44
4.3. Aproximants de Padé	45
4.3.1. Càlcul	46
4.3.2. Anàlisi de pols i zeros	48
5. Aproximants de Thévenin i aproximants Sigma	52
5.1. Aproximants de Thévenin	52


5.1.1. Càlcul	54
5.2. Aproximants Sigma	59
5.2.1. Formulació	59
5.2.2. Càlcul	61
5.2.3. Diagnòstic	64
6. Padé-Weierstrass	68
6.1. Primer graó	69
6.1.1. Busos PQ	70
6.1.2. Busos PV	72
6.1.3. Compactació	74
6.1.4. Algoritme	76
6.2. Generalització	79
6.2.1. Busos PQ	80
6.2.2. Compactació	81
6.2.3. Busos PV	82
6.2.4. Punt d'avaluació de les solucions parcials	85
7. Circuit en contínua i càrrega no lineal	87
7.1. Díode amb càrrega a potència constant	87
7.2. Làmpada de descàrrega	92
8. Programa	101
8.1. Inicialització	101
8.2. Càlcul de coeficients	104
8.3. Padé-Weierstrass	106
8.4. Incorporació al GridCal	109
9. Xarxes de test inicials	111
9.1. Diagnòstic	112
9.2. Comparació amb mètodes tradicionals	116
9.3. Influència de la profunditat	119
10. Càrrega de xarxes de test	126
10.1. Cas d'11 busos	126
10.2. IEEE14	129
10.3. IEEE30	132
10.4. Nord Pool	135
10.5. IEEE118	138

10.6. Pegase2869	141
11. Resum del pressupost	144
12. Conclusions	145
12.1. Treball futur	147
13. Relació de documents	149
14. Bibliografia	150
15. Glossari	154
A. Expressions de càlcul addicionals 	155
A.1. Valors unitaris	155
A.2. Jacobià del NR	156
A.3. Matrius B' i B'' del FDLF	156
B. Codi	158
B.1. MIH formulació pròpia	158
B.2. MIH formulació original	167
B.3. Funcions: Padé, Thévenin, Sigma i mètodes recursius	177
B.4. Padé-Weierstrass	187
B.5. Matriu com a imatge, Domb-Sykes, gràfic Sigma 	194
B.6. Díode amb càrrega a potència constant	195
B.7. Làmpada de descàrrega amb MIH	196
B.8. Làmpada de descàrrega amb GS	199

1. Introducció


1.1. Antecedents

El flux de càrregues, també anomenat flux de potències, és l'eina principal per estudiar els sistemes elèctrics de potència. Permet conèixer més a fons les xarxes de distribució i transport per determinar el millor punt d'operació dels sistemes així com per planificar futures expansions.

En la seva essència el problema del flux de càrregues tracta de trobar les tensions de tots els busos. Amb això es poden conèixer sense complicació les potències que circulen per les línies i les injectades a cada bus. Tanmateix, l'etapa inicial en què es calculen les tensions implica la resolució d'equacions no lineals. Tradicionalment s'han abordat a partir d'algoritmes iteratius, com el de Gauss-Seidel i sobretot el de Newton-Raphson. Tot i que avui en dia aquests mètodes encara s'utilitzen, **no són totalment fiables** en sistemes mal condicionats que per exemple operen molt carregats. 

L'any 2012 Antonio Trias va presentar un algoritme basat en la incrustació holomòrfica, comercialment anomenat HELMTM (Holomorphic Embedding Load-Flow Method). A diferència dels anteriors, és directe i resulta capaç d'indicar si la solució és correcta.

1.2. Objecte


Primerament l'objecte d'aquest treball consisteix a utilitzar el mètode d'incrustació holomòrfica per resoldre les equacions de sistemes de potència que treballen en condicions crítiques. És a dir, que la seva solució se situa molt propera **respecte al límit d'estabilitat de tensions**. Dins el ventall de possibilitats conegudes per computar la solució, es vol esbrinar quines **esdevenen**  més atractives.

En segon lloc, per tal de comprovar si les solucions obtingudes són vàlides, es farà ús dels aproximants Sigma, que corresponen a una eina de diagnòstic. Caracteritzen quant propers estan els busos del col·lapse de tensió i permeten representar gràficament tal proximitat.

També es busca avaluar si el mètode d'incrustació holomòrfica resulta avantatjós respecte als algoritmes tradicionals. Es valorarà si troba la solució del sistema quan els altres mètodes no ho fan i si les eines que el complementen proporcionen un valor afegit.

1.3. Especificacions i abast

La implementació del mètode d'incrustació holomòrfica passa per adaptar i desenvolupar les equacions que regeixen els fluxos de potència. L'obra de Trias (2018) és la referència bibliogràfica principal. Es treballarà la formulació original del mètode i es plantejarà una nova formulació per tal d'entendre fins on arriben les limitacions de cada una. Seran programades en Python, així com les funcions que utilitzen.

S'empraran xarxes de test de l'Institut d'Enginyers Elèctrics i Electrònics (IEEE), en concret, els casos de 14, 30 i 118 busos. Altres sistemes elèctrics de testatge seran la xarxa nòrdica de 44 busos, la PEGASE (Pan European Grid Advanced Simulation and State Estimation) de 2.869 busos i un sistema d'11 busos mal condicionat (Bonini et al., 2015). Totes aquestes xarxes s'estudiaran en el seu estat inicial i en situacions variades de càrrega. També se solucionaran amb  mètodes tradicionals de resolució del flux de càrregues amb la idea de comparar les respostes amb ambdós enfocaments.

Per obtenir els resultats finals de flux de potències s'utilitzaran tècniques de continuació analítica. En destaquen els mètodes recurrents i sobretot els aproximants de Padé, que fonamenten teòricament el mètode d'incrustació holomòrfica. Altres recursos són els aproximants de Thévenin. Serveixen per trobar els mòduls de tensió propis de punts de treball estables i inestables. A més a més, es descriurà la formulació i l'ús del mètode de Padé-Weierstrass com a eina definitiva per refinar la solució en casos en què els sistemes romanen mal condicionats.

La correcció de la solució es validarà analíticament amb els aproximants Sigma. S'oferiran resultats gràfics sota les diverses condicions de càrrega i es donaran nocions qualitatives sobre la interpretació dels valors.

Per altra banda, es mostrarà l'aplicació del mètode d'incrustació holomòrfica per un circuit en contínua i per un sistema amb una càrrega no lineal, el que pretén il·lustrar que el seu camp d'aplicació va més enllà dels sistemes elèctrics de potència de transport i distribució.

2. El problema del flux de càrregues

El flux de càrregues és la solució d'un sistema elèctric de potència equilibrat en règim permanent. En la seva versió més bàsica, el sistema es modelitza com un conjunt de generadors, transformadors, línies de distribució i/o transport i càrregues. Els càrregues es defineixen a partir potències, no impedàncies. Això comporta una dificultat afegida a l'hora de solucionar les equacions del flux de potències, ja que les equacions esdevenen no lineals.

La informació principal que s'extreu de la resolució del sistema són el valor absolut de les tensions i el seu desfasament. Aleshores s'obtenen els fluxos de potència activa i reactiva que circulen per les línies, les pèrdues del sistema, així com la potència que aporten els generadors.

La Figura 1 il·lustra un sistema simple de dos busos que es troben interconnectats per una línia d'admitància Y . Les tensions dels busos es representen per U_i i U_j respectivament, les intensitats per I_i i I_j i les potències complexes per S_i i S_j . En alguns casos hi ha connectades impedàncies entre els busos i el bus comú de terra. Per presentar el problema del flux de potències no s'ha afegit aquesta complicació. En aquest exemple, l'únic element que introdueix una admitància és la línia que uneix els dos busos.

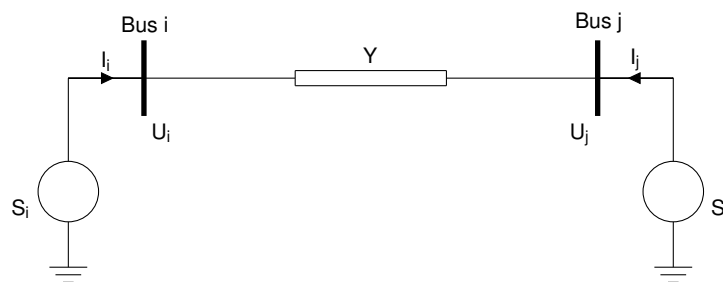


Figura 1. Sistema simple de dos busos

S'ha considerat el conveni positiu de signes, és a dir, que s'assumeix que les intensitats positives entren cap als busos. La potència complexa injectada al bus i és:

$$S_i = U_i I_i^* . \quad (\text{Eq. 1})$$

Al seu torn la intensitat injectada resulta:

$$I_i = U_i Y_{ii} + U_j Y_{ij}, \quad (\text{Eq. 2})$$

on l'admitància Y_{ii} i l'admitància Y_{ij} són elements de la matriu d'admitàncies. En aquest exemple resulta que $Y_{ii} = Y$ i $Y_{ij} = -Y$.

En combinar les Equacions 1 i 2 s'arriba a:

$$S_i = U_i U_i^* Y_{ii}^* + U_i U_j^* Y_{ij}^* . \quad (\text{Eq. 3})$$

Si es descompon en part real i imaginària, de forma més genèrica l'Equació 3 es converteix en:

$$\begin{aligned} P_i &= |U_i| \sum_j |U_j| |Y_{ij}| \cos(\delta_i - \delta_j - \gamma_{ij}), \\ Q_i &= |U_i| \sum_j |U_j| |Y_{ij}| \sin(\delta_i - \delta_j - \gamma_{ij}), \end{aligned} \quad (\text{Eq. 4})$$

on:

P_i : potència activa injectada al bus i.

Q_i : potència reactiva injectada al bus i.

$|U_i|$: valor absolut de la tensió del bus i.

$|Y_{ij}|$: valor absolut de l'admitància entre els busos i i j.

δ_i : angle de la tensió del bus i.

γ_{ij} : angle de l'admitància entre els busos i i j.

S'observa que si per exemple les potències P_i i Q_i són dades i es coneix la tensió U_j tant en mòdul com en angle, s'ha de trobar $|U_i|$ i l'angle δ_i . Hi ha dues incògnites i dues equacions, però s'aprecia que són de caràcter no lineal. Per solucionar aquesta mena d'equacions s'han d'utilitzar els tradicionals mètodes numèrics, o bé, recórrer al mètode d'incrustació holomòrfica.

2.1. Tipus de busos

Cada bus està associat a quatre magnituds elèctriques (mòdul de la tensió, angle de la tensió, potència activa injectada i potència reactiva injectada). Tal com s'observa a l'Equació 4, es plantegen dues equacions per bus. Si el nombre total d'equacions ha de ser igual al nombre total d'incògnites, de les quatre magnituds, dues han de ser desconegudes i dues han de ser conegudes.

En el flux de potències els busos es classifiquen en tres categories: PQ, PV i oscil·lant. A la

Taula 1 apareixen les incògnites i les dades per a cada un d'ells.

Bus	Incògnites	Dades
PQ	$ U_i , \delta_i$	P_i, Q_i
PV	δ_i, Q_i	$P_i, U_i $
Oscil·lant	P_i, Q_i	$ U_i , \delta_i$

Taula 1. Incògnites i dades per a cada tipus de bus

Els busos PQ també s'anomenen busos de càrrega. En efecte, es coneix la potència activa i reactiva. Són busos PQ aquells on hi ha una demanda fixa o bé, on la generació és coneguda. També pot donar-se el cas que en un bus PQ hi hagi tant generació com consum. En aquest cas la potència injectada resultant surt de fer el balanç. Aquests busos són els més habituals en els sistemes elèctrics de potència real. Segons Barrero (2004) suposen **entorn** un 80% o 90% de la totalitat.

Per altra banda, en els busos PV es coneix la potència activa i el mòdul de la tensió. Tradicionalment hi tenen connectat un generador, en el qual es varia la potència entregada per mitjà de controlar la vàlvula d'admissió de la turbina, mentre que la tensió es regula amb el corrent d'excitació. Per això, els busos PV també se'ls coneix pel nom de busos de regulació. La Taula 2 posa de manifest que els busos PV són minoritaris.



Sistema	% busos PV
IEEE 14	28,6
IEEE 30	16,7
Nord Pool	36,4
IEEE 118	44,9
PEGASE 2869	17,7

Taula 2. Percentatge de busos PV en algunes xarxes de test

La tercera categoria de busos pertany als busos oscil·lants. Cada sistema necessita com a mínim un bus oscil·lant. Si per exemple tots els busos fossin PQ i/o PV, la potència activa seria una dada en qualsevol cas. Això és incompatible amb el balanç de potències de l'Equació 5, on de fet les pèrdues són un resultat de solucionar el flux de càrregues.


$$P_p = \sum_i P_{G,i} - \sum_i P_{D,i}, \quad (\text{Eq. 5})$$

on:

P_p : pèrdues de potència activa totals en el sistema.

$P_{G,i}$: potència activa generada al bus i .

$P_{D,i}$: potència activa de consum al bus i .


Així, una de les potències d'algun bus ha de ser desconeguda, ha de quedar lliure. Aquest bus serà l'anomenat bus oscil·lant. **En lloc de potències**,  dades són el mòdul de tensió i l'angle de la tensió, que per conveniència es fixa a 0. Típicament el bus oscil·lant correspon a aquell on hi ha connectat el generador amb més capacitat del sistema.

És possible que un sistema disposi de més d'un bus oscil·lant. No obstant això, s'ha de conèixer la participació de cada un d'ells. A les xarxes de test que s'estudien només hi ha un bus oscil·lant.

2.2. Modelització d'elements

En els sistemes que es tracta, s'han de modelitzar transformadors, generadors, línies i càrregues, atès que principalment són els quatre tipus d'elements a considerar en règim permanent. A vegades, poden haver-hi bateries o elements de transmissió flexible. Tanmateix, en el flux de potències tradicional no es tenen en compte. Tampoc apareixen a les xarxes de test.



En un costat, les càrregues es modelen com un valor constant aplicat a un bus concret. Malgrat que la demanda és variable al llarg del temps, hi ha arguments per considerar-la fixa: primer, es pot predir dins d'uns marges de precisió, i segon, sovint experimenta canvis lents. Això explica que a les xarxes de test la demanda vingui donada com una constant. 

Els generadors es connecten al sistema amb transformadors elevadors. En l'estudi del flux de potències s'estudien les variables a la sortida d'aquest conjunt format per generador i transformador. De manera similar, no intervé la impedància interna del generador. És a la sortida d'aquest conjunt on es coneixen les dades i on es busquen les incògnites restants.

2.2.1. Transformadors



En l'anàlisi del flux de potències fa falta modelar els transformadors que interconnecten busos. Al cap i a la fi, influeixen en la matriu d'admitàncies. Un primer model apareix a la Figura 2.

Aquest model considera les pèrdues de potència activa del ferro i del coure. A més, inclou la inductància magnetitzant i les inductàncies de dispersió. També conté un transformador ideal

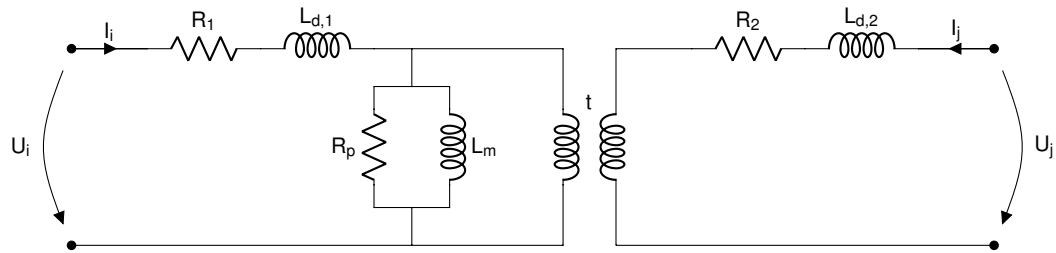


Figura 2. Model complet del transformador en règim permanent

amb relació d'espises t .



Com que a l'hora de resoldre el flux de potències s'usen valors per unitat, en assumir que les tensions nominals coincideixen amb les de base, el transformador amb relació de transformació t de la Figura 2 desapareix. També és raonable menysprear les pèrdues al ferro i el corrent de magnetització. Així es negligeix la branca en paral·lel. Amb tot, s'obté la versió simplificada del model del transformador de la Figura 3.

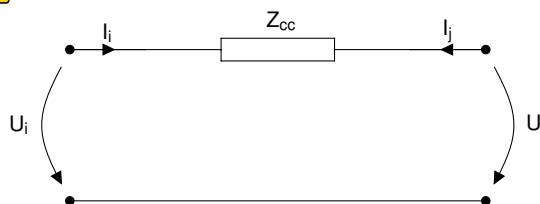


Figura 3. Model simplificat del transformador en règim permanent

Aquest model només conté la impedància de curtcircuit, que teòricament compta amb part real i imaginària. No obstant això, freqüentment es negligeixen les pèrdues al coure, de manera que es redueix a una reactància.

A l'hora de treballar amb aquests models val la pena definir-los com un quadripol. Aquest lliga les dues intensitats amb les dues tensions a través d'admitàncies:

$$\begin{pmatrix} I_i \\ I_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{cc} & -Y_{cc} \\ -Y_{cc} & Y_{cc} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_i \\ U_j \end{pmatrix}, \quad (\text{Eq. 6})$$

on Y_{cc} és la inversa de Z_{cc} .

El model anterior no és vàlid quan alguna de les tensions base de banda i banda del transformador no coincideixen amb les nominals de la màquina. Aleshores es recorre al model de la Figura 4.

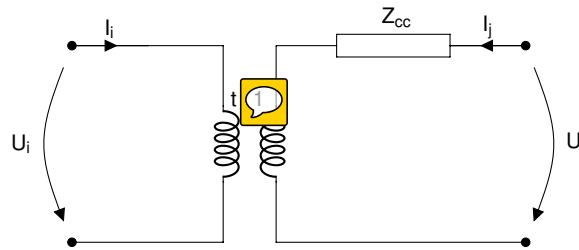



Figura 4. Model simplificat del transformador de relació variable en règim permanent


A les xarxes de test s'utilitza aquest model amb presència de transformadors de relació variable. És necessari introduir la relació  per considerar les diferències entre les tensions nominals i les tensions base. Habitualment el mòdul de la relació de transformació t és proper a la unitat mentre que la seva fase tendeix a ser nul·la.

En aquest cas el quadripol no es pot obtenir per observació tal com s'ha fet a l'Equació 6. Tanmateix, s'arriba a:

$$\begin{pmatrix} I_i \\ I_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{cc}/t^2 & -Y_{cc}/t^* \\ -Y_{cc}/t & Y_{cc} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_i \\ U_j \end{pmatrix}. \quad (\text{Eq. 7})$$

Quan t és unitària i el seu angle nul, l'Equació 7 resulta idèntica a l'Equació 6.

2.2.2. Línies

El model general de la línia inclou quatre paràmetres: la resistència R_u , la inductància L_u , la susceptància G_u i la capacitat C_u , totes per unitat de longitud. La resistència i la inductància són les parts real i imaginària de la impedància de la branca sèrie respectivament. Per altra banda, la susceptància i la capacitat representen les parts real i imaginària de l'admitància de la branca paral·lela. En conjunt donen lloc a un model de paràmetres distribuïts (Barrero, 2004). 

Per a major simplicitat els paràmetres es combinen:

$$\begin{aligned} Z_u &= R_u + j\omega L_u, \\ Y_u &= G_u + j\omega C_u. \end{aligned} \quad (\text{Eq. 8})$$

S'arriba al següent quadripol de paràmetres distribuïts:

$$\begin{pmatrix} U_i \\ I_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \zeta l & Z_c \sinh \zeta l \\ \frac{\sinh \zeta l}{Z_c} & \cosh \zeta l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_j \\ I_j \end{pmatrix}, \quad (\text{Eq. 9})$$

on:

$\zeta = \sqrt{Z_u Y_u}$. S'anomena constant de propagació, en m^{-1} .

$Z_c = \sqrt{Z_u / Y_u}$. És la impedància característica. Esdevé adimensional en operar amb unitaris.

l : longitud de la línia, en m.

Segons Barrero (2004), el model de paràmetres distribuïts, que implica el càlcul de funcions hiperbòliques, queda justificat per a línies llargues on les longituds són superiors als 200 km.

A les xarxes de test que es resoldran les línies són prou curtes per poder basar-se en models simplificats.

Primerament la susceptància es negligeix, atès que la capacitat predomina sobre la susceptància, i ja de per si la branca paral·lela té poca influència en el model. Per una línia de longitud mitjana (entre 100 i 200 km), s'assumeix que ζl pren valors petits, força inferiors a la unitat. En resulta el model de la Figura 5. Sovint se'l coneix pel nom de model en π .

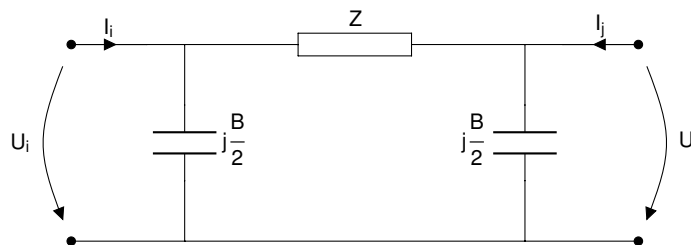


Figura 5. Model simplificat de la línia de longitud mitjana

El paràmetre B recull l'efecte de la capacitat i és igual a ωC . Té dimensions d'admitància. La branca sèrie se simbolitza per la impedància Z , que equival a $R + j\omega L$.

Per a línies inferiors a 100 km la capacitat és menyspreable. Així queda el model de la Figura 6, igual que el model simplificat del transformador de la Figura 3.

En línies de transport típicament la resistència resulta força inferior a ωL . En tals situacions el model pot no incloure la resistència.

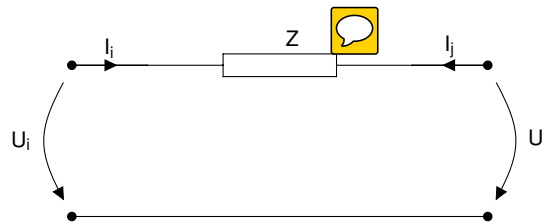


Figura 6. Model simplificat de la línia de longitud curta

2.3. Mètodes tradicionals de resolució

Tal com s'ha justificat per mitjà l'Equació 4, a cada bus apareixen dues equacions no lineals. Això justifica l'ús de mètodes iteratius. De fet, tots els mètodes tradicionals ho són. Es caracteritzen per partir d'un valor inicial (també anomenat llavor) que amb el pas de les iteracions s'espera que convergeixi cap a la solució.

El valor inicial a què es fa referència es pot escollir basant-se en l'experiència. Per exemple, com que les tensions acostumen a ser properes a la unitat, és habitual suposar-les unitàries. Tanmateix, la selecció dels valors inicials condiciona el mètode resolutiu. A vegades el mètode no convergeix degut a una tria incorrecta.

Els principals algorismes iteratius que es contemplen a l'hora de solucionar el flux de càrregues són el Gauss-Seidel, el Newton-Raphson (amb diverses variacions) i el flux en contínua. Aquest últim assumeix totes les tensions unitàries i no té en compte la potència reactiva. Al cap i a la fi les solucions que proporciona són força aproximades. Per això no serà detallat.

2.3.1. Gauss-Seidel

El mètode de Gauss-Seidel (GS) soluciona un sistema d'equacions en el qual les incògnites x_i són funció del conjunt d'incògnites del sistema:

$$x_i^{(k+1)} = f_i(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_{i-1}^{(k+1)}, x_i^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}), \quad (\text{Eq. 10})$$

on:

i: índex d'una de les incògnites.

k: índex de la iteració.

De l'Equació 10 s'observa que s'utilitzen les incògnites el més actualitzades possible. L'actualització segueix l'ordre que defineixen els índexs dels busos. El bus oscil·lant no es tracta com

una incògnita.



La implementació al flux de càrregues considera en primer lloc la potència complexa:

$$S_i = U_i \sum_{r=1}^n Y_{ir}^* U_r^*, \quad (\text{Eq. 11})$$

que es reescriu com:



$$S_i^* = U_i^* \sum_{r=1}^n Y_{ir} U_r. \quad (\text{Eq. 12})$$

En extreure del sumatori la tensió U_i^* i el terme corresponent d'admitància, l'Equació 11 es desenvolupa per donar lloc a:

$$U_i = \frac{1}{Y_{ii}} \left(\frac{S_i^*}{U_i^*} - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n Y_{ir} U_r \right), \quad (\text{Eq. 13})$$

que al tenir en compte els índexs de les iteracions esdevé:

$$U_i^{(k+1)} = \frac{1}{Y_{ii}} \left(\frac{P_i - jQ_i^{(k+1)}}{(U_i^{(k)})^*} - \sum_{r=1}^{i-1} Y_{ir} U_r^{(k+1)} - \sum_{r=i+1}^n Y_{ir} U_r^{(k)} \right). \quad (\text{Eq. 14})$$

La potència reactiva és una dada per als busos PQ, mentre que per als PV a partir de desenvolupar l'Equació 12 en forma d'esquema iteratiu resulta:

$$Q_i^{(k+1)} = -\Im \left[(U_i^{(k)})^* \sum_{r=1}^{i-1} Y_{ir} U_r^{(k+1)} + (U_i^{(k)})^* \sum_{r=i}^n Y_{ir} U_r^{(k+1)} \right], \quad (\text{Eq. 15})$$

on $\Im[]$ denota la funció que extreu la part imaginària.

Als busos PV també s'ha de trobar l'angle de la tensió especificada. A partir l'Equació 14 s'obté:

$$\delta_i^{(k+1)} = \angle \left[\frac{1}{Y_{ii}} \left(\frac{P_i - jQ_i^{(k+1)}}{(U_i^{(k)})^*} - \sum_{r=1}^{i-1} Y_{ir} U_r^{(k+1)} - \sum_{r=i+1}^n Y_{ir} U_r^{(k)} \right) \right], \quad (\text{Eq. 16})$$


on $\angle[]$ simbolitza la funció que captura l'angle de l'expressió.



Amb tot, l'algoritme considera que les tensions inicials són totes unitàries. És el que s'anomena un perfil pla de tensions. Les potències reactives desconegudes es poden inicialitzar a 0.

Progressivament es calculen les incògnites dels busos PQ, que són tensió i angle de la tensió, amb l'Equació 14; per als busos PV es recorre a les Equacions 15 i 16. S'itera fins que es compleix la condició de parada per a tots els busos:

$$|U_i^{(k+1)} - U_i^{(k)}| < \epsilon, \quad (\text{Eq. 17})$$


on ϵ és la màxima tolerància que es vol permetre. Això  **conclou** l'algoritme perquè s'assumeix que ha convergit a una solució correcta.

Segons Kothari i Nagrath (2011) el mètode de Gauss-Seidel és relativament senzill de programar. Necessita menys temps per completar una iteració que el mètode de Newton-Raphson i que el desacoblament ràpid. No obstant això, convergeix linealment, amb la qual cosa resulta més lent que els altres dos mètodes esmentats. Per tant, necessita més iteracions. Esdevé fiable només per a sistemes amb pocs busos. Tot plegat comporta que a la pràctica hagi quedat bastant en desús.

2.3.2. Newton-Raphson

El mètode de Newton-Raphson (NR) és un mètode amb aplicabilitat per a grans sistemes de potència. Converteix en la majoria de casos en què el GS no ho fa (Glover et al., 2008). Cal afegir que la seva convergència és quadràtica. Requereix poques iteracions, sovint entre 3 i 5 (Kothari i Nagrath, 2011). El mètode soluciona un sistema d'equacions de la forma:

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) = 0. \quad (\text{Eq. 18})$$

El NR es fonamenta en l'expansió de les sèries de Taylor  entorn el valor inicial. Només es tenen en compte els termes que inclouen les primeres derivades. Així, s'arriba a:

$$\begin{pmatrix} f_1^{(k)} \\ \vdots \\ f_n^{(k)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)^{(k)} & \dots & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right)^{(k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_1}\right)^{(k)} & \dots & \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right)^{(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1^{(k)} \\ \vdots \\ \Delta x_n^{(k)} \end{pmatrix}, \quad (\text{Eq. 19})$$

que de forma compacta s'expressa com $f^{(k)} = -J^{(k)}\Delta x^{(k)}$. Aleshores s'inverteix la matriu per solucionar el sistema d'equacions i s'actualitza el vector d'incògnites:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}. \quad (\text{Eq. 20})$$

Es para d'iterar una vegada es compleix:

$$|f_i(x^{(k)})| < \epsilon. \quad (\text{Eq. 21})$$

El mètode de NR necessita més temps per iteració que el GS perquè ha de computar les funcions per tal d'avaluar l'Equació 21, i sobretot, ha d'invertir o factoritzar a cada iteració la matriu de l'Equació 19. Aquesta matriu s'anomena jacobià o matriu jacobiana, i se simbolitza per J.

Quant a l'aplicació a la resolució del flux de potències, es comença amb la definició dels vectors d'incògnites i els residus de potència, tots ells transposats:

$$\begin{aligned} \Delta x^{(k)} &= \left[\Delta \delta_2^{(k)}, \dots, \Delta \delta_n^{(k)}, \frac{\Delta U_{m+1}^{(k)}}{U_{m+1}^{(k)}}, \dots, \frac{\Delta U_n^{(k)}}{U_n^{(k)}} \right]^T, \\ f^{(k)} &= \left[\Delta P_2^{(k)}, \dots, \Delta P_n^{(k)}, \Delta Q_{m+1}^{(k)}, \dots, \Delta Q_n^{(k)} \right]^T. \end{aligned} \quad (\text{Eq. 22})$$

El conjunt de busos PQ s'indexen per $[m+1, m+2, \dots, n]$, mentre que els busos PV porten per índexs $[2, 3, \dots, m]$. L'índex 1 es reserva pel bus oscil·lant. Les variacions de tensió es divideixen per la tensió amb tal de simplificar posteriorment el jacobià. Els residus de potències són:

$$\begin{aligned} \Delta P_i^{(k)} &= P_i^{\text{con}} - U_i^{(k)} \sum_{r=1}^n U_r^{(k)} Y_{ir} \cos(\delta_{ir}^{(k)} - \gamma_{ir}), \\ \Delta Q_i^{(k)} &= Q_i^{\text{con}} - U_i^{(k)} \sum_{r=1}^n U_r^{(k)} Y_{ir} \sin(\delta_{ir}^{(k)} - \gamma_{ir}), \end{aligned} \quad (\text{Eq. 23})$$

on P_i^{con} i Q_i^{con} són les potències activa i reactiva conegudes, respectivament. Així, de forma compactada l'Equació 19 es converteix en:

$$\begin{pmatrix} \Delta P^{(k)} \\ \Delta Q^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J1^{(k)} & J2^{(k)} \\ J3^{(k)} & J4^{(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \delta^{(k)} \\ \Delta U^{(k)}/U^{(k)} \end{pmatrix}. \quad (\text{Eq. 24})$$

El jacobià s'ha dividit en quatre blocs, l'expressió de les quals es troba a l'annex. Tal com apunta Barrero (2004), els termes fora la diagonal principal de cada bloc matricial contenen l'element sèrie del circuit equivalent que interconnecta dos busos. Així, bona part dels termes del jacobià són nuls. La Figura 7 mostra el jacobià de la Nord Pool en forma d'imatge.



Aquesta mena de matrius s'anomenen disperses. Definir i treballar amb matrius disperses, en

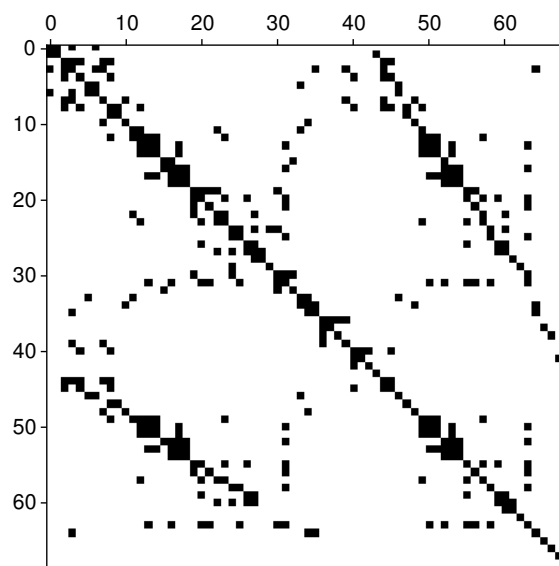


Figura 7. Jacobià de la primera iteració de la xarxa Nord Pool de 44 busos. En blanc els elements nuls



lloc de denses, permet reduir el temps de computació. De fet, el mètode d'incrustació holomòrfica també utilitza matrius disperses.

Per a sistemes de potència mal condicionats s'han ideat variacions que parteixen del NR, per exemple, l'ús del multiplicador d'Iwamoto o del mètode de Levenberg-Marquardt.

El multiplicador d'Iwamoto va ser introduït per Iwamoto i Tamura (1981) com un mètode simple que no utilitza aproximacions i que gairebé no empitjora el temps de computació del NR inicial. Es formula de la següent manera:

$$\Delta x^{(k)} = \mu^{(k)} (J^{-1})^{(k)} f^{(k)}, \quad (\text{Eq. 25})$$



on $\mu^{(k)}$ és el multiplicador òptim, de tipus escalar.

El multiplicador òptim permet determinar la llargada de la iteració per aconseguir que aquella iteració no degradi el procés resolutiu. L'expressió per al seu càlcul es deriva de la minimització de mínims quadrats i de la resolució d'una equació cúbica, tal com detallen Iwamoto i Tamura (1981) i Peñate (2020a).

Per altra banda, el mètode de Levenberg-Marquardt també s'anomena mètode de mínims quadrats esmorteïts. Igual que el NR comença amb l'expansió de Taylor, però busca reduir per mínims quadrats els errors. Introdueix el factor d'esmoreïment λ , que segons Lagace et al. (2008) permet millorar les propietats de convergència tot i que necessita que l'aproximació ini-

cial sigui propera a la solució. Igual que amb el multiplicador μ , el factor λ s'adapta durant el procés iteratiu.

De la deducció de Lagace et al. (2008) s'arriba a l'expressió final:

$$\Delta x^{(k)} = -[(J^{(T)})^{(k)} J^{(k)} + \lambda^{(k)} I]^{-1} (J^{(T)})^{(k)} f^{(k)}, \quad (\text{Eq. 26})$$

on I és la matriu identitat. Es nota que quan $\lambda = 0$ el mètode equival al de Newton-Raphson. En general, el mètode de Levenberg-Marquardt necessita més iteracions que el NR. Malgrat ser més lent, funciona millor per xarxes de grans dimensions i per a sistemes mal condicionats (Peñate, 2020a).

2.3.3. Desacoblat ràpid



El mètode del desacoblat ràpid es fonamenta en el mètode de Newton-Raphson. Aprofita el fet que el flux de potència activa depèn fortament de l'angle de les tensions mentre que el flux de reactiva està més relacionat amb els mòduls de tensió. Això es dedueix de l'Equació 4 en considerar que a les línies de transmissió la reactància té més pes que la resistència i que els angles dels busos es mantenen propers al 0. Amb tals assumpcions l'Equació 24 se simplifica en:

$$\begin{pmatrix} \Delta P^{(k)} \\ \Delta Q^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J1^{(k)} & 0 \\ 0 & J4^{(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \delta^{(k)} \\ \Delta U^{(k)}/U^{(k)} \end{pmatrix}. \quad (\text{Eq. 27})$$

Aquesta estructura s'anomena desacoblada perquè s'ha eliminat la dependència entre potència activa i tensió i entre potència reactiva i angle. Comparat amb el NR, redueix els requeriments de memòria. Kothari i Nagrath (2001) apunten que el temps per iteració es minimitza. Per contra, fan falta més iteracions a causa de les aproximacions dutes a terme.

El desacoblat ràpid consisteix en definir un jacobià constant que segueix l'estructura de l'Equació 27. Va ser introduït per Stott i Alsac (1974) amb la idea de descriure un mètode veloc adient per a l'anàlisi de contingències. Es basa en una sèrie de simplificacions i aproximacions addicionals.



Considera que $\cos \delta_{ik} \approx 1$ i que $\sin \delta_{ik} \approx 0$. Té en compte que la part imaginària de les impedàncies en sèrie predomina per sobre la part real. A la matriu $J4$ es menyspreen els transformadors que introdueixen desfasaments (quan $\angle[t] \neq 0$). A la matriu $J1$ es fixen les

relacions de transformació variables a $t = 1$ i s'ignoren els elements en paral·lel del circuit equivalent de les línies. Amb tot això s'arriba a:

$$\begin{aligned}\Delta P/U &= B' \Delta \delta, \\ \Delta Q/U &= B'' \Delta U,\end{aligned}\tag{Eq. 28}$$

on les dues matrius B' i B'' prenen les mateixes dimensions que $J1$ i $J4$ respectivament. Es detallen a l'annex. Tots els seus elements són reals. S'acostumen a definir com a matrius disperses. El mètode itera a partir de calcular $\Delta \delta$ i ΔU , actualitzar les incògnites i recalcular-les fins que els errors de potència activa i reactiva són inferiors a les toleràncies definides.

El desacoblat ràpid es caracteritza per oferir una convergència que es troba a mig camí entre el GS i el NR. És una opció encertada a l'hora d'estudiar la seguretat d'un sistema i també quan s'estudia la seva optimització. Resulta més fiable que el Newton-Raphson bàsic.

3. Mètode d'incrustació holomòrfica

El mètode d'incrustació holomòrfica, originalment anomenat Holomorphic Embedding Load-Flow Method (HELM), és una tècnica relativament nova per construir la solució de les equacions que regeixen el flux de potències en sistemes elèctrics. De fet, la sigla HELM consisteix en una marca registrada per la companyia EleQuant Inc. En aquest treball el recurs desenvolupat rebrà per nom: mètode d'incrustació holomòrfica (MIH).

Segons Trias (2018), els resultats del mètode són inequívocs. Si la solució és físicament possible, la construeix, i si no ho és, ho indica. Per contra, els esquemes iteratius com el Gauss-Seidel i el Newton-Raphson, poden patir sobretot dos tipus de problemes: que la solució no sempre convergeixi, i per altra banda, si convergeix, que no ho faci a la solució desitjada.

3.1. Característiques

El mètode d'incrustació holomòrfica és trencador, en el sentit que es diferencia de la resta d'algoritmes resolutius en el fet que no és iteratiu. Construeix la solució. Converteix les incògnites en funcions analítiques al pla complex. Així, el problema es fragmenta en conjunts d'equacions algebraiques, la solució de les quals troba el valor de les incògnites, encara que aquestes formin part d'un sistema d'equacions no lineals.

En la seva essència, es parteix d'una situació de referència en la qual les tensions als busos són totes iguals. No hi ha ni demanda ni generació, i les intensitats que circulen per les línies són nul·les. La Figura 8 mostra com queda un sistema en aquest estat.

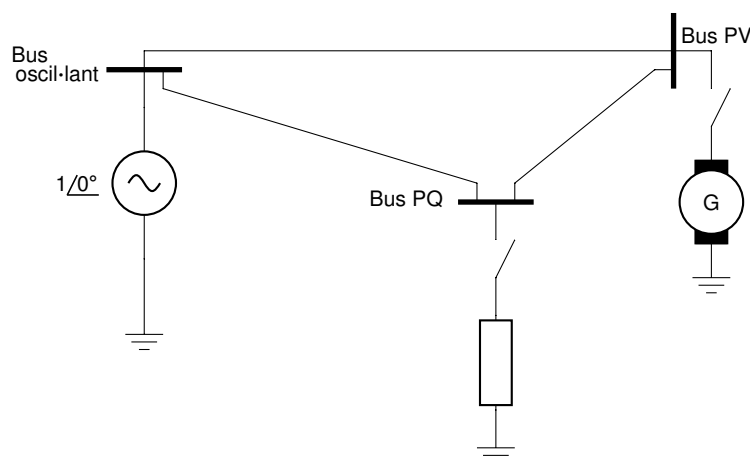


Figura 8. Sistema d'exemple en el seu estat de referència

Com es desprèn de la Figura 8, tots els elements connectats als busos que no siguin l'oscil·lant queden despenjats del sistema. Totes les tensions coincideixen, i per conveniència, es fixen a la unitat. Des de l'estat de referència el mètode soluciona cada una de les divisions en què s'ha fragmentat el problema. En efecte, de forma genèrica les incògnites segueixen funcions del tipus:

$$C(s) = c_0 + c_1(s-c)^1 + c_2(s-c)^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(s-c)^k, \quad (\text{Eq. 29})$$

on:

$C(s)$: funció analítica d'una incògnita sistema.

s : variable complexa en què s'avalua la funció.

c_k : terme k que conforma la funció $C(s)$.

c : centre de la funció.

La funció $C(s)$ teòricament s'expressa com una sèrie infinita de potències. En el mètode d'incrustació holomòrfica se l'anomena sèrie de Maclaurin perquè es troba centrada al 0. Precisament l'avaluació de la funció a $s = 0$ **es** correspon a l'estat de referència de la Figura 8. Així, l'Equació 29 es converteix en:



$$C(s) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k s^k. \quad (\text{Eq. 30})$$

En lloc de buscar obtenir infinitat de termes de la sèrie, es limita el nombre de coeficients a calcular:

$$C'(s) = \sum_{k=0}^n c_k s^k, \quad (\text{Eq. 31})$$

on n simbolitza l'índex de l'últim terme a calcular. També rep el nom de profunditat.

Es nota que $C(s)$ i $C'(s)$ difereixen, ja que la darrera no conté tots els termes. Per compensar l'error que s'introdueix al només obtenir els primers coeficients de la sèrie, habitualment cal recórrer a eines de continuació analítica. La continuació analítica estén el domini de les funcions analítiques. Amb aquestes, el valor de $C(s)$ i $C'(s)$ avaluades a una mateixa s tendirà a coincidir. Amb el MIH se selecciona $s = 1$ a l'hora de calcular el valor final de les incògnites.

En el problema del flux de potències les incògnites que es defineixen com sèries són les

tensions de tots els busos PQ i PV, així com la potència reactiva dels busos PV.

S'han desenvolupat dues formulacions diferents: una és la plantejada en el volum de la bibliografia bàsica (Trias, 2018), que se l'anomena formulació original; l'altra, la formulació pròpia, ha estat ideada per l'autor del projecte. En els dos enfocaments se segueix la nomenclatura capturada a la Figura 9.

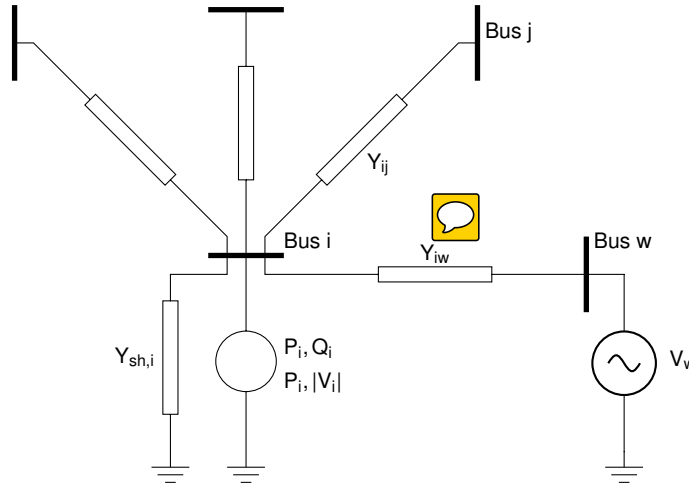



Figura 9. Nomenclatura d'un fragment de sistema genèric

A l'hora de plantejar les equacions se selecciona un bus PQ o PV, amb índex i . Si es tracta d'un bus PQ, es coneix P_i i Q_i ; si és PV, les dades són P_i i $|V_i|$. Al bus i hi ha connectada l'admitància $Y_{sh,i}$ que recull les capacitats dels models de les línies amb què enllaça el bus i com també la càrrega d'impedància constant que penja del bus i . 

El bus i connecta amb el bus oscil·lant, que s'anomena w . En l'acoblament de diverses xarxes de distribució pot haver-hi més d'un bus oscil·lant. Això es contempla a la formulació pròpia. L'admitància entre el bus i i el bus oscil·lant ve donada Y_{iw} . El bus i també connecta amb la resta de busos PQ i PV, que s'identifiquen amb l'índex j progressivament. Cada un d'ells comparteix amb el bus i les admitàncies Y_{ij} . Cal afegir que es considera que les admitàncies del tipus Y_{ij} i Y_{iw} donen lloc a la matriu d'admitàncies, que per tant, aquesta només conté els elements sèrie de les branques. Les admitàncies en paral·lel van per separat.

Les formulacions es deriven de les expressions:

$$\sum_j Y_{ij} V_j + Y_{iw} V_w + Y_{sh,i} V_i = \frac{S_i^*}{V_i^*}, \quad i \in \text{PQ, PV}, \quad (\text{Eq. 32})$$

$$V_i V_i^* = |V_i|^2, \quad i \in \text{PV}.$$

En aquest capítol s'aborda el càlcul dels coeficients de les incògnites. Aquest és un dels primers passos per assolir la solució final. De fet, es tracta d'una etapa imprescindible, no només per trobar les incògnites, sinó també per poder emprar els recursos complementaris del mètode d'incrustació holomòrfica. La Figura 10 mostra un esquema a alt nivell del mètode, on apareixen els seus recursos principals.

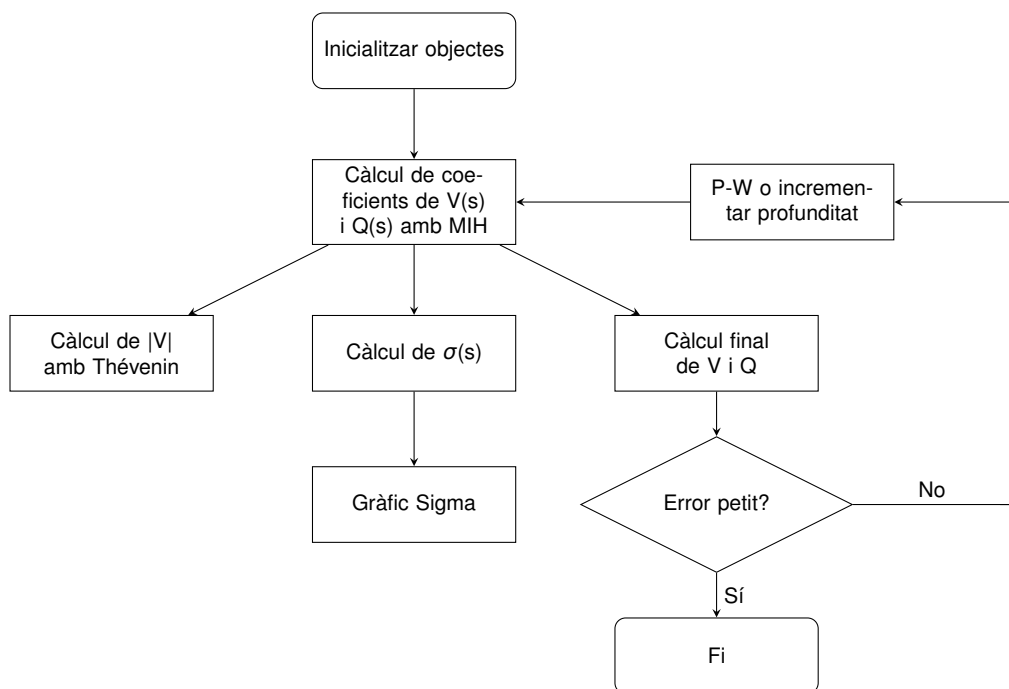


Figura 10. Organigrama de les funcionalitats i de les etapes d'ús del mètode d'incrustació holomòrfica

La inicialització dels objectes consisteix en la definició de les matrius i la incorporació de les dades que intervenen al programa. El càlcul dels coeficients es detalla en aquest capítol i s'ataca per mitjà de dues formulacions. Una vegada es coneixen les sèries de tensió i de potència reactiva, es calcula el seu valor final o bé sumant termes o bé amb mètodes de continuació analítica. Si l'error del balanç de potència resulta excessiu, es defineixen sèries amb més coeficients per llavors repetir els càlculs. Quan s'utilitza la formulació original també es pot recórrer al mètode de Padé-Weierstrass (P-W) per millorar la solució.

El mètode d'incrustació holomòrfica ofereix dues eines més. Una consisteix en calcular les tensions amb els aproximants de Thévenin (el que serveix per generar corbes que relacionen tensió i potència activa o reactiva). L'altra es basa en els aproximants Sigma, que s'utilitzen com a eina de diagnòstic.

3.2. Formulació original

El desenvolupament de la formulació original busca iniciar els primers coeficients de les sèries tals que compleixin amb l'estat de referència de la Figura 8. Per al seu desenvolupament es comença amb el sumatori d'intensitats per als busos PQ. De fet, és l'única equació a emprar per a aquest tipus de bus.

$$\sum_j Y_{ij} V_j = -Y_{iw} V_w - Y_{sh,i} V_i + \frac{S_i^*}{V_i^*}. \quad (\text{Eq. 33})$$

En aquest punt fa falta incrustar l'equació. Incrustar es refereix a afegir la variable complexa s a les expressions. Hi ha llibertat per decidir com fer-ho, el que dona lloc a multitud de formulacions possibles. L'elecció d'una incrustació diferent ha originat la formulació pròpia, que si bé dona peu a un desenvolupament relativament més simple, presenta alguna mancança a l'hora d'utilitzar l'eina de diagnòstic de la solució.

La formulació original converteix l'Equació 33 en:

$$\sum_j Y_{ij} V_j(s) = -Y_{iw} V_w(s) - s Y_{sh,i} V_i(s) + s \frac{S_i^*}{V_i^*(s^*)}. \quad (\text{Eq. 34})$$

Les tensions V_j i V_i , al ser incògnites, es tracten com les sèries $V_j(s)$ i $V_i(s)$, que segueixen l'Equació 31. La tensió del bus oscil·lant, tot i ser una dada, es tracta com una sèrie amb només dos termes. És imprescindible per complir amb l'estat de referència, on totes les tensions inicials valen 1 pu.

El darrer terme de l'Equació 34 es multiplica per s . De no ser així, el coeficient d'un cert ordre de $V_i(s)$ i $V_j(s)$ dependria directament del terme de mateix ordre de $V_i^*(s^*)$, el qual apareix al denominador. En aquesta situació l'equació seria no lineal. Precisament, s'opera amb sèries per descompondre el problema en un conjunt d'equacions lineals. Multiplicar per s retarda l'ús d'aquell objecte. El penúltim terme de l'Equació 34 també es retarda en el càlcul per tal de complir amb l'estat de referència, on es desconnecta tot allò connectat als busos PQ i PV que no siguin les branques en sèrie de les línies.

La formulació original només planteja la presència d'un únic bus oscil·lant, que obeeix:

$$V_w(s) = 1 + s(V_w - 1), \quad (\text{Eq. 35})$$

on V_w fa referència a la dada de tensió del bus oscil·lant. S'observa que el primer terme de la sèrie $V_w(s)$ és idèntic a 1, necessari per assolir l'estat de referència. El segon (i també últim) terme de la sèrie serveix per compensar la diferència entre la tensió coneguda i la unitat. Com que les sèries s'avaluen per $s = 1$, la tensió $V_w(s = 1)$ resulta igual a V_w .

Amb l'Equació 35 i tots els termes incrustats tal com apareixen a l'Equació 34, s'arriba a:

$$\sum_j Y_{ij} V_j(s) = -Y_{iw}(1 + s(V_w - 1)) - sY_{sh,i} V_i(s) + s \frac{S_i^*}{V_i^*(s^*)}. \quad (\text{Eq. 36})$$

Tots els termes de la dreta de l'igual estan incrustats, menys la intensitat que aporta el bus oscil·lant en l'estat de referència. De fet, matemàticament l'estat de referència equival a $s = 0$. Això implica que al primer pas queda:

$$\sum_j Y_{ij} V_j[0] = -Y_{iw}, \quad (\text{Eq. 37})$$

on $V_j[0]$ denota el primer terme de la sèrie $V_j(s)$. Amb aquesta notació les sèries són de la forma:

$$V_j(s) = V_j[0] + sV_j[1] + s^2V_j[2] + \dots + s^nV_j[n]. \quad (\text{Eq. 38})$$

De l'Equació 37 es dedueix que si es vol que tot $V_j[0] = 1$, fa falta que $\sum_j Y_{ij} = -Y_{iw}$. La matriu d'admitàncies total es defineix com la que no diferencia entre busos oscil·lants i no oscil·lants. És a dir, que recull totes les admitàncies a les quals es connecta un bus, independentment de la categoria dels busos. Totes les seves files sumen 0, cosa que permet complir amb $V_j[0] = 1$. Només en el cas que hi hagi transformadors de relació variable això no serà necessàriament cert. La solució a aquest cas es presenta més endavant.

Per altra banda, de l'Equació 36, s'observa que V_i^* s'ha incrustat com $V_i^*(s^*) = (V_i(s^*))^*$ i no com $V_i^*(s) = (V_i(s))^*$. Tal com il·lustra el nom del mètode, les funcions han de ser holomòrfiques. Una funció holomòrfica és aquella que definida en un subconjunt obert del pla complex, resulta complexament diferenciable en qualsevol dels seus punts. També se l'anomena funció analítica. Ha de complir amb les condicions de Cauchy-Riemann. Com assenyala Peñate (2020a), s'només pren valors reals.

Primer es comprova si $\partial(V_i(s))^* / \partial s^* = 0$:

$$\frac{\partial(V_i(s))^*}{\partial s^*} = \frac{\partial(\sum_{k=0}^n (s^k)^* V_i^*[k])}{\partial s^*} = \sum_{k=0}^n k(s^{k-1})^* V_i^*[k]. \quad (\text{Eq. 39})$$

S'evidencia que la incrustació $V_i^*(s)$ no és adient. Amb la incrustació $V_i^*(s^*)$:

$$\frac{\partial(V_i(s^*))^*}{\partial s^*} = \frac{\partial(\sum_{k=0}^n s^k V_i^*[k])}{\partial s^*} = 0, \quad (\text{Eq. 40})$$

que sí que compleix amb la condició establerta $\partial(V_i(s^*))^* / \partial s^* = 0$. Això valida la incrustació de les sèries conjugades.

Convé introduir un canvi de variable per no treballar amb la sèrie $V_i^*(s^*)$ al denominador:

$$X_i(s) = \frac{1}{V_i^*(s^*)}, \quad (\text{Eq. 41})$$

i d'aquesta manera l'Equació 36 esdevé:

$$\sum_j Y_{ij} V_j(s) = -Y_{iw}(1 + s(V_w - 1)) - sY_{sh,i} V_i(s) + sS_i^* X_i(s). \quad (\text{Eq. 42})$$

Quant als busos PV, aquests requereixen l'ús de dues equacions. La primera d'elles, el sumatori d'intensitats, segueix el mateix estil que l'Equació 42. Tanmateix, no tota la potència es multiplica per s . Només aquella que forma part de les dades, és a dir, la potència activa. La reactiva actua com una incògnita. S'obté:

$$\sum_j Y_{ij} V_j(s) = -Y_{iw}(1 + s(V_w - 1)) - sY_{sh,i} V_i(s) + s \frac{P_i}{V_i^*(s^*)} - j \frac{Q_i(s)}{V_i^*(s^*)}. \quad (\text{Eq. 43})$$

A l'hora de calcular els termes, en el primer pas s'arriba a:

$$\sum_j Y_{ij} V_j[0] = -Y_{iw} - j \frac{Q_i[0]}{V_i^*[0]}. \quad (\text{Eq. 44})$$

Aquest cop per complir amb l'estat de referència fa falta que $Q_i[0] = 0$. Llavors l'Equació 44 és idèntica a l'Equació 37, així que sense transformadors de relació variable totes les $V_j[0] = 1$.

Igualment es realitza el canvi de variable de l'Equació 41 per a l'Equació 43:

$$\sum_j Y_{ij} V_j(s) = -Y_{iw}(1 + s(V_w - 1)) - sY_{sh,i} V_i(s) + sP_i X_i(s) - jQ_i(s) X_i(s). \quad (\text{Eq. 45})$$

Per altra banda, els mòduls de tensió dels busos PV segueixen:

$$V_i(s) V_i^*(s^*) = 1 + s(W_i - 1), \quad (\text{Eq. 46})$$

on $W_i = |V_i|^2$. Es nota que l'Equació 46 és consistent amb l'estat de referència.

Cal adreçar la presència de transformadors de relació variable. Es caracteritzen per afegir asimètries a la matriu d'admitàncies, així que es decideix tractar-los per separat. Un element de la matriu inicial és la suma dels elements en les mateixes posicions de dues matrius següents:

$$Y = Y^{(b)} + Y^{(a)}. \quad (\text{Eq. 47})$$

on:

$Y^{(b)}$: matriu d'admitàncies simètrica.

$Y^{(a)}$: matriu d'admitàncies asimètrica.

Aquest plantejament no es descriu a la formulació original, però és un mode coherent d'afrontar el problema. Es proposa que la matriu $Y^{(b)}$ reculli, a part de les admitàncies de les línies i transformadors sense relació variable, les dels transformadors de relació variable amb l'assumpció que la relació $t = 1$. Per exemple, en un model de dos busos com el de la Figura 4:

$$Y = \begin{pmatrix} Y_{cc} & -Y_{cc} \\ -Y_{cc} & Y_{cc} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y_{cc}/t^2 - Y_{cc} & -Y_{cc}/t^* + Y_{cc} \\ -Y_{cc}/t + Y_{cc} & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{Eq. 48})$$

Així la suma de les dues matrius equival a la matriu d'admitàncies de l'Equació 7.

Per complir amb l'estat de referència es retarda l'ús de la matriu asimètrica $Y^{(a)}$ per mitjà de:

$$Y = Y^{(b)} + sY^{(a)}. \quad (\text{Eq. 49})$$

En cas d'haver-hi algun de transformador de relació variable entre el bus oscil·lant i la resta de busos, el terme Y_{iw} també es divideix en $Y_{iw}^{(b)}$ i $Y_{iw}^{(a)}$.


Amb la fragmentació esmentada l'Equació 42 per als busos PQ esdevé:

$$\sum_j Y_{ij}^{(b)} V_j(s) = -s \sum_j Y_{ij}^{(a)} V_j(s) - Y_{iw}^{(b)} (1 + s(V_w - 1)) - sY_{iw}^{(a)} (1 + s(V_w - 1)) - sY_{sh,i} V_i(s) + sS_i^* X_i(s). \quad (\text{Eq. 50})$$

I l'Equació 45 per als busos PV passa a ser:

$$\sum_j Y_{ij}^{(b)} V_j(s) = -s \sum_j Y_{ij}^{(a)} V_j(s) - Y_{iw}^{(b)} (1 + s(V_w - 1)) - sY_{iw}^{(a)} (1 + s(V_w - 1)) - sY_{sh,i} V_i(s) + sP_i X_i(s) - jQ_i(s) X_i(s). \quad (\text{Eq. 51})$$

3.2.1. Algoritme

L'algoritme de la formulació original inicialitza tots els primers termes de tensió a 1, i tots els primers termes de potència reactiva a 0. Per als següents ordres fa falta fragmentar les equacions del sumatori d'intensitat en part real i part imaginària. Schmidt (2015) ho evita i consegüentment simplifica les equacions. Encara que la implementació resulti més simple, s'ha comprovat que amb presència de busos PV s propietats de convergència de les sèries es degraden considerablement. Vet aquí la necessitat de dividir en part real i imaginària.

Així, l'Equació 50 es converteix en:

$$\begin{aligned} \sum_j (G_{ij}^{(b)} V_j^{(re)}(s) - B_{ij}^{(b)} V_j^{(im)}(s)) &= \Re \left[-s \sum_j Y_{ij}^{(a)} V_j(s) - Y_{iw}^{(b)} (1 + s(V_w - 1)) \right. \\ &\quad \left. - sY_{iw}^{(a)} (1 + s(V_w - 1)) - sY_{sh,i} V_i(s) + sS_i^* X_i(s) \right], \\ \sum_j (B_{ij}^{(b)} V_j^{(re)}(s) + G_{ij}^{(b)} V_j^{(im)}(s)) &= \Im \left[-s \sum_j Y_{ij}^{(a)} V_j(s) - Y_{iw}^{(b)} (1 + s(V_w - 1)) \right. \\ &\quad \left. - sY_{iw}^{(a)} (1 + s(V_w - 1)) - sY_{sh,i} V_i(s) + sS_i^* X_i(s) \right], \end{aligned} \quad (\text{Eq. 52})$$

on:

$G_{ij}^{(b)}$: part real de l'element $Y_{ij}^{(b)}$.

$B_{ij}^{(b)}$: part imaginària de l'element $Y_{ij}^{(b)}$.

$V_j^{(re)}(s)$: part real de la tensió $V_j(s)$.

$V_j^{(im)}(s)$: part imaginària de la tensió $V_j(s)$.

$\Re[\]$: funció que extreu la part real.

Per als busos PV l'Equació 51 resulta:

$$\begin{aligned} \sum_j (G_{ij}^{(b)} V_j^{(re)}(s) - B_{ij}^{(b)} V_j^{(im)}(s)) - \Im[Q_i(s) X_i(s)] &= \Re \left[-s \sum_j Y_{ij}^{(a)} V_j(s) \right. \\ &\quad \left. - Y_{iw}^{(b)} (1 + s(V_w - 1)) - s Y_{iw}^{(a)} (1 + s(V_w - 1)) - s Y_{sh,i} V_i(s) + s P_i X_i(s) \right], \\ \sum_j (B_{ij}^{(b)} V_j^{(re)}(s) + G_{ij}^{(b)} V_j^{(im)}(s)) + \Re[Q_i(s) X_i(s)] &= \Im \left[-s \sum_j Y_{ij}^{(a)} V_j(s) \right. \\ &\quad \left. - Y_{iw}^{(b)} (1 + s(V_w - 1)) - s Y_{iw}^{(a)} (1 + s(V_w - 1)) - s Y_{sh,i} V_i(s) + s P_i X_i(s) \right]. \end{aligned} \quad (\text{Eq. 53})$$



Tots els elements que apareixen a la dreta de la igualtat o pertanyen a variables conegudes, o bé són incògnites en què el coeficient necessari ja ha estat calculat. En lloc de buscar les incògnites complexes $V_j(s)$, el problema tracta de trobar la seva part real i imaginària per llavors unir-les i conèixer finalment la tensió complexa.

Les sèries es descomponen en termes. L'anàlisi dels primers termes, és a dir, els d'ordre 0, ja s'ha dut a terme. Pels d'ordre 1, les expressions de l'Equació 52 són:

$$\begin{aligned} \sum_j (G_{ij}^{(b)} V_j^{(re)}[1] - B_{ij}^{(b)} V_j^{(im)}[1]) &= \Re \left[- \sum_j Y_{ij}^{(a)} V_j[0] - Y_{iw}^{(b)} (V_w - 1) \right. \\ &\quad \left. - Y_{iw}^{(a)} - Y_{sh,i} V_i[0] + S_i^* X_i[0] \right], \\ \sum_j (B_{ij}^{(b)} V_j^{(re)}[1] + G_{ij}^{(b)} V_j^{(im)}[1]) &= \Im \left[- \sum_j Y_{ij}^{(a)} V_j[0] - Y_{iw}^{(b)} (V_w - 1) \right. \\ &\quad \left. - Y_{iw}^{(a)} - Y_{sh,i} V_i[0] + S_i^* X_i[0] \right], \end{aligned} \quad (\text{Eq. 54})$$

on $X_i[0] = 1$ tal com es dedueix de l'Equació 41. Per un ordre genèric c tal que $c > 0$:


$$X_i[c] = - \sum_{k=0}^{c-1} X_i[k] V_i^* [c-k]. \quad (\text{Eq. 55})$$

Les expressions a utilitzar per als termes d'ordre 1 en els busos PV esdevenen:

$$\begin{aligned} \sum_j (G_{ij}^{(b)} V_j^{(re)}[1] - B_{ij}^{(b)} V_j^{(im)}[1]) &= \Re \left[- \sum_j Y_{ij}^{(a)} V_j[0] \right. \\ &\quad \left. - Y_{iw}^{(b)} (V_w - 1) - Y_{iw}^{(a)} - Y_{sh,i} V_i[0] + P_i X_i[0] \right], \\ \sum_j (B_{ij}^{(b)} V_j^{(re)}[1] + G_{ij}^{(b)} V_j^{(im)}[1]) &+ Q_i[1] = \Im \left[- \sum_j Y_{ij}^{(a)} V_j[0] \right. \\ &\quad \left. - Y_{iw}^{(b)} (V_w - 1) - Y_{iw}^{(a)} - Y_{sh,i} V_i[0] + P_i X_i[0] \right]. \end{aligned} \quad (\text{Eq. 56})$$

Per als termes d'ordre 1 de les sèries de tensions dels busos PV, es fa ús de:

$$2V_i^{(re)}[1] = W_i - 1. \quad (\text{Eq. 57})$$

En aquest punt la resolució de les expressions que es presenten a les Equacions 54, 56 i 57 proporciona els termes d'ordre 1 de les tensions dels busos PQ i PV i de la potència reactiva desconeguda als busos PV. Es nota que conformen un sistema lineal d'equacions. Una vegada solucionat, es calculen els termes $X_i[1]$ per mitjà de l'Equació 55 per passar a obtenir els coeficients del següent ordre. 

Pels termes d'ordre 2 les equacions dels busos PQ donen peu a:


$$\begin{aligned} \sum_j (G_{ij}^{(b)} V_j^{(re)}[2] - B_{ij}^{(b)} V_j^{(im)}[2]) &= \Re \left[- \sum_j Y_{ij}^{(a)} V_j[1] \right. \\ &\quad \left. - Y_{iw}^{(a)} (V_w - 1) - Y_{sh,i} V_i[1] + S_i^* X_i[1] \right], \\ \sum_j (B_{ij}^{(b)} V_j^{(re)}[2] + G_{ij}^{(b)} V_j^{(im)}[2]) &= \Im \left[- \sum_j Y_{ij}^{(a)} V_j[1] - Y_{iw}^{(b)} (V_w - 1) \right. \\ &\quad \left. - Y_{iw}^{(a)} (V_w - 1) - Y_{sh,i} V_i[1] + S_i^* X_i[1] \right], \end{aligned} \quad (\text{Eq. 58})$$

mentre que per als busos PV esdevenen:

$$\begin{aligned} \sum_j (G_{ij}^{(b)} V_j^{(re)}[2] - B_{ij}^{(b)} V_j^{(im)}[2]) &= \Re \left[- \sum_j Y_{ij}^{(a)} V_j[1] \right. \\ &\quad \left. - Y_{iw}^{(a)} (V_w - 1) - Y_{sh,i} V_i[1] + P_i X_i[1] - jQ_i[1] X_i[1] \right], \\ \sum_j (B_{ij}^{(b)} V_j^{(re)}[2] + G_{ij}^{(b)} V_j^{(im)}[2]) &+ Q_i[2] = \Im \left[- \sum_j Y_{ij}^{(a)} V_j[1] \right. \\ &\quad \left. - Y_{iw}^{(a)} (V_w - 1) - Y_{sh,i} V_i[1] + P_i X_i[1] - jQ_i[1] X_i[1] \right]. \end{aligned} \quad (\text{Eq. 59})$$

Pels mòduls dels busos PV es recorre a:

$$2V_i^{(re)}[2] = -V_i[1] V_i^*[1]. \quad (\text{Eq. 60})$$

Altres cops es planteja un sistema d'equacions lineals, que té la mateixa estructura abans  alment, es generalitza l'algoritme per un ordre $c = 3, 4, \dots, n_i$, on n_i representa la profunditat, és a

dir, el màxim nombre de coeficients a calcular per les sèries. Per als busos PQ s'utilitza:

$$\begin{aligned} \sum_j (G_{ij}^{(b)} V_j^{(re)}[c] - B_{ij}^{(b)} V_j^{(im)}[c]) &= \Re \left[- \sum_j Y_{ij}^{(a)} V_j[c-1] - Y_{sh,i} V_i[c-1] + S_i^* X_i[c-1] \right], \\ \sum_j (B_{ij}^{(b)} V_j^{(re)}[c] + G_{ij}^{(b)} V_j^{(im)}[c]) &= \Im \left[- \sum_j Y_{ij}^{(a)} V_j[c-1] - Y_{sh,i} V_i[c-1] + S_i^* X_i[c-1] \right]. \end{aligned} \quad (\text{Eq. 61})$$


Els mòduls de tensió dels busos PV segueixen:

$$2V_i^{(re)}[c] = - \sum_{k=1}^{c-1} V_i[k] V_i^*[c-k]. \quad (\text{Eq. 62})$$

Per als busos PV les equacions generalitzades dels sumatoris d'intensitat són:

$$\begin{aligned} \sum_j (G_{ij}^{(b)} V_j^{(re)}[c] - B_{ij}^{(b)} V_j^{(im)}[c]) &= \Re \left[- \sum_j Y_{ij}^{(a)} V_j[c-1] - Y_{sh,i} V_i[c-1] + P_i X_i[c-1] \right. \\ &\quad \left. - j \sum_{k=1}^{c-1} Q_i[k] X_i[c-k] \right], \\ \sum_j (B_{ij}^{(b)} V_j^{(re)}[c] + G_{ij}^{(b)} V_j^{(im)}[c]) &+ Q_i[c] = \Im \left[- \sum_j Y_{ij}^{(a)} V_j[c-1] - Y_{sh,i} V_i[c-1] \right. \\ &\quad \left. + P_i X_i[c-1] - j \sum_{k=1}^{c-1} Q_i[k] X_i[c-k] \right]. \end{aligned} \quad (\text{Eq. 63})$$

L'algoritme finalitza una vegada s'han calculat tots els termes de les sèries de tensió dels busos PQ i PV i de potència reactiva dels busos PV.

Des del punt de vista de computació, el MIH parteix de l'avantatge que la matriu del sistema es conserva per tots els ordres. Pels  nes d'ordre 0 no s'utilitza. Però per la resta de profunditats, se la defineix al principi de l'algoritme i s'inverteix o es factoritza una única vegada, cosa que no passa amb el mètode de Newton-Raphson.

En forma de blocs el sistema d'equacions és:

$$R = \begin{pmatrix} G & -B & 0 \\ B & G & 1 \\ Y & 0 & 0 \end{pmatrix} L, \quad (\text{Eq. 64})$$

on:

L: vector d'incògnites format per $[V^{(re)}, V^{(im)}, Q]$. S'ordenen en funció de l'índex dels busos.

R : vector de la dreta de la igualtat, calculat en funció de l'ordre. És una dada i segueix la mateixa ordenació que L .

Y : matriu amb tantes columnes com busos no oscil·lants i tantes files com busos PV. A cada fila totes les seves entrades són nul·les, excepte aquella que multiplica per $V_i^{(re)}$, on i simbolitza l'índex d'un dels busos PV. Així, tots els seus elements no nuls valen 2.

La Figura 11 posa de manifest que, tot i que comparat amb el jacobià de la Figura 7 la matriu sigui de dimensions superiors, és també del tipus dispersa. La majoria dels seus elements són nuls. A l'hora de programar l'algoritme això s'ha tingut en compte. Es treballa amb la biblioteca SciPy per tractar-la com a dispersa, i així, estalviar temps de càlcul.

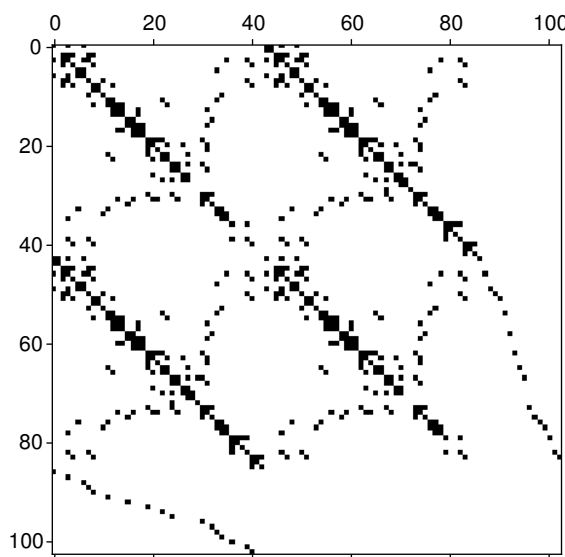


Figura 11. Matriu del sistema Nord Pool de la formulació original en imatge. Elements nuls en blanc.

S'observa que la majoria d'entrades no nul·les dibuixen diagonals, que precisament coincideixen amb les de les matrius de blocs de l'Equació 64.

3.3. Formulació pròpia

La formulació pròpia es distingeix de la formulació original en la seva incrustació. No adapta la matriu d'admitàncies a la presència de transformadors de relació variable. Les equacions resultants són sovint més compactes. Tanmateix, amb transformadors de relació variable no compleix amb l'estat de referència en el primer ordre de tots. Això desencadena algunes limitacions a l'hora de fer servir recursos ideats per ser aplicats en la primera formulació.

Per els busos PQ es parteix de:

$$\sum_j Y_{ij} V_j(s) = - \sum_w Y_{iw} (1 + s(V_w - 1)) - sY_{sh,i} V_i(s) + sS_i^* X_i(s), \quad (\text{Eq. 65})$$

on no es divideix la matriu d'admitàncies en simètrica i asimètrica. A diferència de la formulació original, es considera que pot haver-hi més d'un bus oscil·lant.

En el cas dels busos PV, l'equació corresponent al balanç d'intensitats és:

$$\sum_j Y_{ij} V_j(s) = - \sum_w Y_{iw} (1 + s(V_w - 1)) - sY_{sh,i} V_i(s) + s(P_i X_i(s) - jQ_i(s) X_i(s)), \quad (\text{Eq. 66})$$

que a diferència de l'Equació 45, també s'ha multiplicat la potència reactiva per s . Per tant, el seu càlcul queda retardat. Quan es calculin els termes $V_i[c]$, simultàniament es calcula $Q_i[c-1]$. Aquesta incrustació facilita l'obtenció dels primers termes de tensió.



Pels mòduls de tensió dels busos PV es fa servir:

$$V_i(s) V_i^*(s) = |V_i[0]|^2 + s(W_i - |V_i[0]|^2). \quad (\text{Eq. 67})$$

Es nota que comparat amb l'Equació 46, no s'assumeix que els primers coeficients de tensió són unitaris. De fet, igual que en la formulació original l'equació dels mòduls de tensió no intervé en el càlcul dels primers termes.



3.3.1. Algoritme



L'algoritme de la formulació pròpia comença amb les Equacions 65 i 66. En el primer ordre porten al mateix:

$$\sum_j Y_{ij} V_j[0] = - \sum_w Y_{iw}. \quad (\text{Eq. 68})$$

Quan no hi hagi transformadors de relació variable, el sistema d'equacions que en resulta té per solució les tensions unitàries, ja que la matriu d'admitàncies manté la simetria. Quan n'hi hagi, pot passar que $\sum_j Y_{ij}$ per una fila donada no sigui igual a l'element Y_{iw} . En aquestes condicions els primers coeficients de tensió varien lleugerament respecte a la unitat. Com més extremes són les relacions t dels transformadors, més distants d'1 esdevenen.



Les equacions referents al balanç d'intensitats dels busos PQ pels termes del següent ordre són:

$$\begin{aligned} \sum_j (G_{ij} V_j^{(re)}[1] - B_{ij} V_j^{(im)}[1]) &= \Re \left[\sum_w Y_{iw} (V_w - 1) - Y_{sh,i} V_i[0] + S_i^* X_i[0] \right], \\ \sum_j (B_{ij} V_j^{(re)}[1] + G_{ij} V_j^{(im)}[1]) &= \Im \left[\sum_w Y_{iw} (V_w - 1) - Y_{sh,i} V_i[0] + S_i^* X_i[0] \right]. \end{aligned} \quad (\text{Eq. 69})$$

Com que no es pot afirmar que els primers termes de tensió són sempre unitaris, per al càlcul del primer terme d' $X_i(s)$ s'empra:

$$X_i[0] = \frac{1}{V_i^*[0]} \quad (\text{Eq. 70})$$

A la resta d'ordres s'utilitza:

$$X_i[c] = \frac{-\sum_{k=0}^{c-1} X_i[k] V_i^*[c-k]}{V_i^*[0]} \quad (\text{Eq. 71})$$

En els busos PV, pels segons termes ja apareix la seva potència reactiva, que actua com incògnita:

$$\begin{aligned} \sum_j (G_{ij} V_j^{(re)}[1] - B_{ij} V_j^{(im)}[1]) - X_i^{(im)}[0] Q_i[0] &= \\ \Re \left[\sum_w Y_{iw} (V_w - 1) - Y_{sh,i} V_i[0] + P_i X_i[0] \right], \\ \sum_j (B_{ij} V_j^{(re)}[1] + G_{ij} V_j^{(im)}[1]) + X_i^{(re)}[0] Q_i[0] &= \\ \Im \left[\sum_w Y_{iw} (V_w - 1) - Y_{sh,i} V_i[0] + P_i X_i[0] \right], \end{aligned} \quad (\text{Eq. 72})$$

on $X_i^{(re)}$ i $X_i^{(im)}$ denoten respectivament la part real i imaginària d' X_i . El desenvolupament de l'Equació 67 pels termes d'ordre 1 porta a:

$$2V_i^{(re)}[0]V_i^{(re)}[1] + 2V_i^{(im)}[0]V_i^{(im)}[1] = W_i - |V_i[0]|^2. \quad (\text{Eq. 73})$$

La resolució del sistema format per les Equacions 69, 72 i 73 proporciona la solució a les tensions $V_i[1]$ i les potències reactives $Q_i[0]$. A partir d'aquí l'algoritme es generalitza per un ordre $c = 2, 3, \dots, n_i$.

En els busos PQ s'empra:

$$\begin{aligned}\sum_j (G_{ij} V_j^{(re)}[c] - B_{ij} V_j^{(im)}[c]) &= \Re \left[-Y_{sh,i} V_i[c-1] + S_i^* X_i[c-1] \right], \\ \sum_j (B_{ij} V_j^{(re)}[c] + G_{ij} V_j^{(im)}[c]) &= \Im \left[-Y_{sh,i} V_i[c-1] + S_i^* X_i[c-1] \right],\end{aligned}\quad (\text{Eq. 74})$$

que s'assembla a l'Equació 69 amb la diferència que no conté la contribució dels busos oscil·lants.

Per als busos PV l'equació del balanç de corrents esdevé:

$$\begin{aligned}\sum_j (G_{ij} V_j^{(re)}[c] - B_{ij} V_j^{(im)}[c]) - X_i^{(im)}[0] Q_i[c-1] &= \\ \Re \left[-j \sum_{k=1}^{c-1} X_i[k] Q_i[c-1-k] - Y_{sh,i} V_i[c-1] + P_i X_i[c-1] \right], \\ \sum_j (B_{ij} V_j^{(re)}[c] + G_{ij} V_j^{(im)}[c]) + X_i^{(re)}[0] Q_i[c-1] &= \\ \Im \left[-j \sum_{k=1}^{c-1} X_i[k] Q_i[c-1-k] - Y_{sh,i} V_i[c-1] + P_i X_i[c-1] \right].\end{aligned}\quad (\text{Eq. 75})$$

Igualment desapareix l'efecte dels busos oscil·lants.

Pels mòduls de voltatge dels busos PV es recorre a:



$$2V_i^{(re)}[0] V_i^{(re)}[c] + 2V_i^{(im)}[0] V_i^{(im)}[c] = - \sum_{k=1}^{c-1} V_i[k] V_i^*[c-k]. \quad (\text{Eq. 76})$$

Els termes que multipliquen les incògnites es mantenen constants des de l'ordre número 1, pel que la matriu del sistema, igual que en la formulació original, es conserva. Només ha de ser factoritzada o invertida una única vegada. En forma de blocs resulta ser:

$$R = \begin{pmatrix} G & -B & -X^{(im)}[0] \\ B & G & X^{(re)}[0] \\ 2V^{(re)}[0] & 2V^{(im)}[0] & 0 \end{pmatrix} L, \quad (\text{Eq. 77})$$

on R i L són vectors que segueixen la mateixa ordenació que en la formulació original. Les matrius $2V^{(re)}[0]$ i $2V^{(im)}[0]$ són tals que contenen els primers termes de tensió real i imaginària respectivament, multiplicats per 2, per així de complir amb l'equació dels mòduls de tensió. Les matrius $-X^{(im)}[0]$ i $X^{(re)}[0]$ també estan formades pels primers termes, en aquest cas de les sèries $X_i(s)$, per obeir els balanços d'intensitat als busos PV.



Es nota que sense transformadors de relació variable, situació en què les entrades no nul·les de $V^{(re)}[0]$ i $X^{(re)}[0]$ estan constituïdes només per uns, i en què $V^{(im)}[0]$ i $X^{(im)}[0]$ només conté zeros, la matriu de l'Equació 77 és idèntica a la de l'Equació 64.

Amb transformadors de relació variable la matriu de la formulació pròpia és lleugerament menys dispersa que la de la formulació original. L'avantatge de la formulació pròpia es troba sobretot en la simplicitat de l'algoritme.

4. Convergència de les sèries



Els dos algorismes que s'han presentat es basen en l'obtenció dels coeficients que conformen les sèries. No obstant això, la solució final de les incògnites sorgiria de la suma d'infininitat de coeficients. Com que el nombre de coeficients obtinguts és finit, i de fet es recomana que es trobi entre 20 i 40 (Trias, 2018), sovint fa falta accelerar les sèries.

El recurs més utilitzat a l'hora de computar les incògnites amb el mètode d'incrustació holomòrfica són els aproximants de Padé, que constitueixen la teoria fonamental del MIH. Permeten estendre el radi de convergència de les sèries. D'acord amb la teoria, són la millor aproximació d'una funció a través d'una funció racional. El problema també es pot enfocar amb l'ús de processos d'acceleració recurrents. Es tracten els següents: Delta d'Aitken, Rho de Wynn, Èpsilon de Wynn, Theta de Brezinski, Eta de Bauer i les transformacions de Shanks. Les obres de referència són Weniger (1989) i Shanks (1955).



4.1. Radi de convergència

Les sèries obtingudes amb el MIH, siguin de tensió o de potència reactiva, compten amb un radi de convergència. És a dir, que quan la variable s excedeix un determinat valor, la suma dels termes de la sèrie divergeix. **El radi de convergència defineix un disc amb centre a c .** La condició a complir per assegurar la convergència és:



$$|s - c| < r, \quad (\text{Eq. 78})$$

on r simbolitza el radi de convergència. Segons Trias (2018), es necessita continuació analítica si aquest radi és inferior a 1. En aquest cas es rrer típicament als aproximants de Padé. L'anàlisi del radi de convergència, a pt d'indicar com de mal condicionat es troba el sistema elèctric, dóna idea de si obligatòriament cal utilitzar algorismes de continuació analítica, o si per contra, es poden sumar els coeficients i obtenir una solució satisfactòria.

De fet, els mètodes de continuació analítica, ja siguin aproximants de Padé o mètodes recurrents, sempre són un recurs que es pot utilitzar. Tanmateix, si es vol reduir el temps de càlcul és interessant sumar els coeficients si s'assegura que el radi de convergència supera la unitat. La Figura 12 esquematitza la decisió. S'evidencia que la Figura 12 ve a ser un fragment detallat de la Figura 10, indispensable per trobar el resultat final.

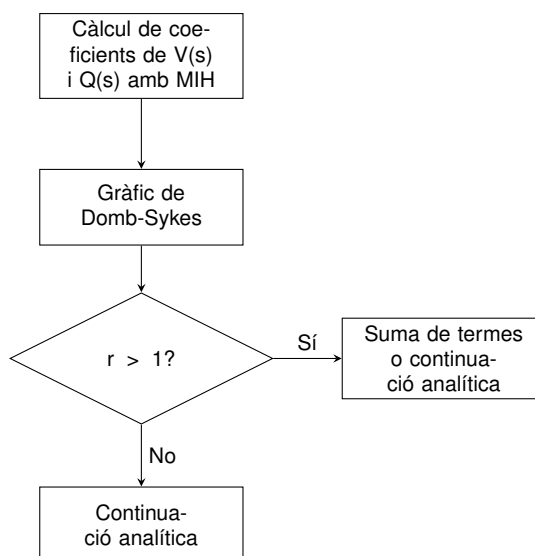


Figura 12. Etapes per decidir com calcular la tensió final



Des d'un punt de vista teòric el càlcul del radi de convergència s'abordaria amb el criteri de l'arrel o criteri de Cauchy. Com que les sèries del MIH són finites, per calcular el radi de convergència s'han desenvolupat estimacions gràfiques. Són els anomenats gràfics de Domb-Sykes. Una primera versió parteix de:

$$\frac{1}{r} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{u_i}{u_{i-1}}, \quad (\text{Eq. 79})$$

on u_i representa un terme de la sèrie a estudiar i u_{i-1} simbolitza el terme anterior. Pel MIH, les sèries són de tensió (busos PQ i PV) i de potència reactiva (només pels busos PV). L'Equació 79 indica que interessa buscar un valor d' i prou elevat tal que $\frac{1}{r} \rightarrow 0$. Això significa que i s'aproxima a la profunditat màxima definida.

Es representa $|\frac{u_i}{u_{i-1}}|$ a les ordenades i i a les abscisses. Llavors s'extrapola la tendència que defineixen els punts i es determina quin valor pren el quocient de l'eix vertical quan $\frac{1}{r} \rightarrow 0$. Precisament, el radi és la inversa d'aquest valor. Per caracteritzar-lo correctament pot convenir utilitzar més coeficients del compte.



La Figura 13 il·lustra el primer gràfic Domb-Sykes per a la tensió del bus 5 de la xarxa Nord Pool amb les dades inicials.

En operar la inversa del quocient $|\frac{u_i}{u_{i-1}}|$ per una i prou gran, es nota que el radi de convergència és força superior a 1. Per tant, en aquest cas no cal mètode de continuació. Experimentalment s'ha trobat que totes les sèries de tensió i de potència reactiva tenen pràcticament el mateix

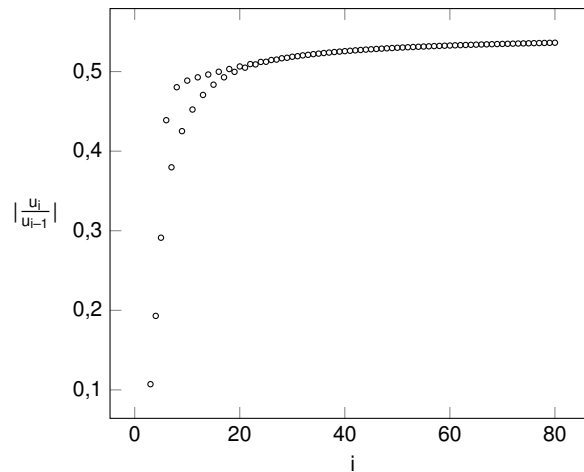


Figura 13. Gràfic de Domb-Sykes per a la tensió bus 5 de la Nord Pool amb la formulació pròpia

radi de convergència.

Mercer i Roberts (1990) proposen una variació respecte al gràfic de Domb-Sykes. Quan els signes dels coeficients no segueixen un patró clar, es calcula:

$$b_i^2 = \frac{u_{i+1}u_{i-1} - u_i^2}{u_i u_{i-2} - u_{i-1}^2}, \quad i \geq 3. \quad (\text{Eq. 80})$$

L'eix d'ordenades del gràfic conté l'arrel positiva de b_i^2 mentre que a l'eix horitzontal es representa $1/i$. Igual que abans, cal extrapolar per $1/i \rightarrow 0$. El valor de l'eix vertical indica altre cop la inversa del radi de convergència.

A la Figura 14 es representa aquesta variació del gràfic de Domb-Sykes, també per la tensió del bus 5 de la xarxa Nord Pool amb l'estat de càrrega origin

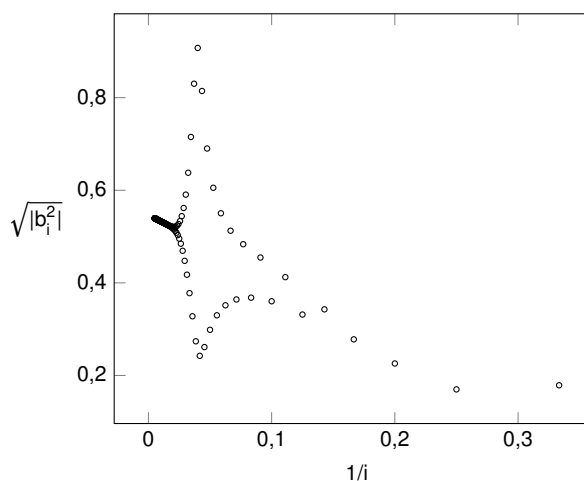


Figura 14. Variació del gràfic de Domb-Sykes per a la tensió del bus 5 de la Nord Pool amb la formulació pròpia

S'arriba a la mateixa conclusió que amb el gràfic de Domb-Sykes original, encara que amb la variació introduïda el perfil resulta més caòtic.

Davant l'estat de càrrega inicial de la xarxa Nord Pool, on el radi de convergència supera la unitat, es poden sumar els coeficients de les sèries perquè no fa falta continuació analítica. Tanmateix, això pot no ser així amb increments importants de càrrega. Quan totes les potències conegudes del sistema es dupliquen, el gràfic de Domb-Sykes per a la tensió bus 5 es plasma a la Figura 15.

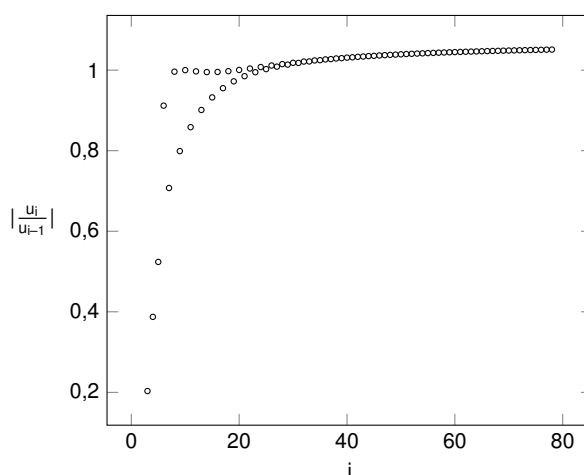


Figura 15. Gràfic de Domb-Sykes per a la tensió del bus 5 de la xarxa Nord Pool amb la formulació pròpia i $\lambda = 2$

Tal com s'observa a la Figura 15, quan totes les potències del sistema Nord Pool es dupliquen, la inversa del radi de convergència supera la unitat, així que fa falta utilitzar mètodes de continuació analítica. Si no, l'error màxim de potència complexa resulta inacceptable. Això indica que la solució del flux de potències no és prou bona. La Figura 16 il·lustra els errors en les dues situacions de càrrega esmentades en funció del nombre de coeficients o profunditat.

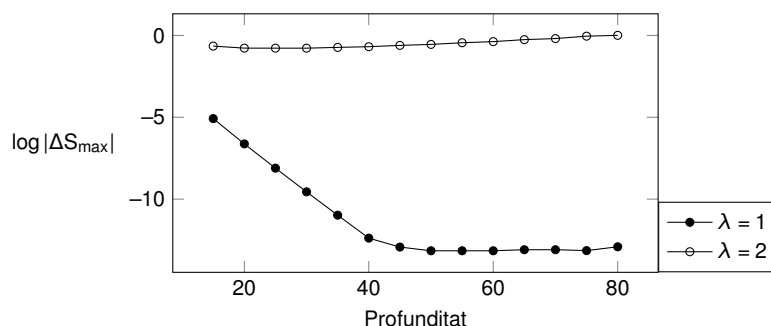


Figura 16. Errors de la solució amb la suma de termes amb càrrega inicial i duplicada per la xarxa Nord Pool


La Figura 16 posa de manifest que no cal continuació analítica per $\lambda = 1$. El logaritme en base 10 de l'error màxim disminueix fins a ser extremadament petit. Quan $\lambda = 2$ cal optar



per la continuació analítica. Els errors són inacceptables i no milloren amb la profunditat. De fet, la xarxa Nord Pool amb $\lambda = 2$ té solució. S'obtenen errors de l'ordre de 10^{-12} amb els aproximants de Padé.



4.2. Mètodes de recurrència

S'anomenen mètodes de recurrència o mètodes recursius a aquells que aproximen el valor final de la sèrie  om indica el seu nom mitjançant una relació de recurrència. O sigui, es combinen seqüencialment els diversos termes per formar la solució final. Són una alternativa als aproximants de Padé.

4.2.1. Delta d'Aitken

El mètode Delta d'Aitken, Δ^2 d'Aitken o simplement Delta és l'esquema recurrent més senzill. Considera les sumes parcials de la sèrie dels coeficients de tensió, per les quals s'adopta la nomenclatura de l'Equació 81.

$$S_i = \sum_{k=0}^i U[k]. \quad (\text{Eq. 81})$$

Seguidament es construeix una nova sèrie, anomenada $T(s)$. Es tracta de trobar el seu valor final, atès que en principi resulta la millor aproximació. Cada un dels seus coeficients es calcula per mitjà de:

$$T[i] = S_i - \frac{(S_{i+1} - S_i)^2}{(S_{i+2} - S_{i+1}) - (S_{i+1} - S_i)}. \quad (\text{Eq. 82})$$



Es defineix com un mètode interessant per sèries que convergeixen ràpidament, mentre que per sistemes mal condicionats, on la convergència s'alenteix, no és la millor de les opcions. Tot i que no preserva les propietats que s'exploten amb els aproximants de Padé, amb sèries molt profundes s'aconsegueix major rapidesa de càlcul (Rao, 2017).

4.2.2. Transformació de Shanks

La transformació de Shanks es basa en generar una o diverses noves seqüències que sovint convergeixen més de pressa que les sèries inicials. La transformació és idèntica a la de les Δ^2



d'Aitken, tot i que segueix la nomenclatura:

$$H(S_i) = S_i - \frac{(S_{i+1} - S_i)^2}{(S_{i+2} - S_{i+1}) - (S_{i+1} - S_i)}, \quad (\text{Eq. 83})$$

on $H(S_i)$ denota la nova seqüència. No desenvolupar el numerador i el denominador fa els mètodes més estables.

Es poden calcular les successives transformacions ($H(H(S_i))$, $H(H(H(S_i)))$, etc.) fins a exhaurir els termes que conformen S_i . Cada seqüència conté dos elements menys l'anterior. El valor que en principi aproxima millor el resultat final de la incògnita a calcular és el darrer element no nul de l'última transformació. Comparat amb el mètode Delta d'Aitken, la transformació de Shanks espera una solució millor, atès que accelera les transformacions anteriors. La Figura 17 compara els errors segons la profunditat en un cas força ben condicionat de la IEEE30.

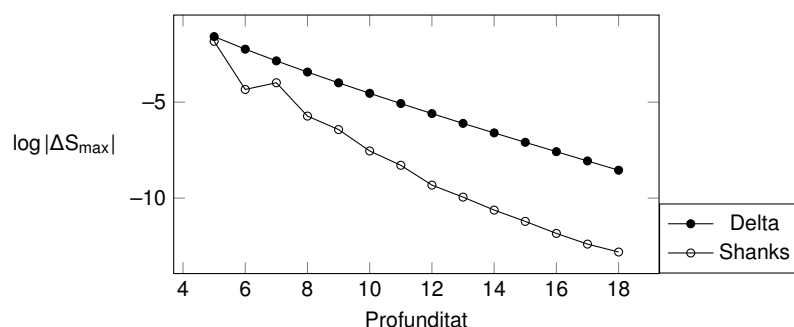



Figura 17. Errors segons Delta d'Aitken i 3 transformacions de Shanks a la xarxa IEEE30, $\lambda = 2$

S'observa que a l'inici els dos mètodes parteixen de gairebé el mateix error. Tanmateix, les transformacions de Shanks aconseguixen minimitzar l'error a un ritme més veloç que la Delta d'Aitken. 

4.2.3. Rho de Wynn

Aquest mètode de recurrència comença inicialitzant una matriu amb la primera columna (elements ρ_{-1}^i) plena de zeros mentre que la segona columna (elements ρ_0^i) conté les sumes parcials definides segons l'Equació 81. Per trobar els elements de les següents columnes s'empra:

$$\rho_{k+1}^i = \rho_{k-1}^{i+1} + \frac{k+1}{\rho_k^{i+1} - \rho_k^i}, \quad (\text{Eq. 84})$$



on $i = 0, 1, \dots, n$ serveix per referir-se a la fila, mentre que $k = 0, 1, \dots, n$ s'utilitza per identificar la columna. El mètode construeix successives columnes, cada una amb un element menys que l'anterior, fins que s'exhaureixen els coeficients. Queda una estructura de la forma:


$$M = \begin{bmatrix} 0 & S_0 & \rho_1^0 & \dots & \rho_{n-1}^0 & \rho_n^0 \\ 0 & S_1 & \rho_1^1 & \dots & \rho_{n-1}^1 & 0 \\ 0 & S_2 & \rho_1^2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & S_{n-1} & \rho_1^{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & S_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{Eq. 85})$$

Amb les dues primeres columnes inicialitzades, s'empra l'Equació 84 per tal de calcular els elements de cada columna restant. Per conèixer el valor final de les incògnites, quan el nombre de coeficients de la sèrie és parell, se selecciona l'element ρ_{n-1}^0 , mentre que si és senar, s'utilitza l'element ρ_n^0 . Des del punt de vista de càlcul, realitza poques operacions en comparació amb els altres mètodes.

4.2.4. Èpsilon de Wynn

El mètode Èpsilon de Wynn presenta una estructura similar al Rho de Wynn. Es perfila com un sistema robust, utilitzat per Schmidt (2015) i per Rao (2017), amb uns resultats superiors a la majoria de sistemes recurrents. El mètode tracta d'organitzar els elements com en el mètode Rho de Wynn, és a dir, en la mateixa forma que la matriu de l'Equació 85, on la primera columna està plena de zeros i la segona incorpora les sumes parcials. Per calcular els següents termes que conformen la taula, s'utilitza:

$$\epsilon_{k+1}^i = \epsilon_{k-1}^{i+1} + \frac{1}{\epsilon_k^{i+1} - \epsilon_k^i}, \quad (\text{Eq. 86})$$

que comparat amb l'Equació 84 només canvia el numerador del segon terme. L'Èpsilon de Wynn és un mètode que al cap i a la fi també calcula els aproximants de Padé de mode recurrent, i no en forma de matriu. 

Com a solució final s'utilitza el mateix criteri que amb el mètode Rho de Wynn: amb un nombre parell de coeficients s'escull l'element ϵ_{n-1}^0 , i quan és senar, ϵ_n^0 . L'estructura de la taula és tal que successivament una columna pren valors extremadament grans mentre que l'altra accelera la sèrie.

4.2.5. Theta de Brezinski

L'Èpsilon de Wynn accelera la convergència lineal però falla quan és logarítmica, mentre que el mètode Rho de Wynn és un dels millors per la convergència logarítmica però no per la lineal (Weniger, 1989). En aquest context interessa un esquema recurrent que aprofiti les millors característiques dels dos: el mètode Theta de Brezinski.


Inicia igual que les Rho de Wynn, amb la primera columna formada per zeros i la segona amb les sumes parcials. És a dir, $\Theta_{-1}^i = 0$ mentre que $\Theta_0^i = S_i$ per tota i . Aleshores si l'índex de la columna és imparell, s'opta per:

$$\Theta_{2k+1}^i = \Theta_{2k-1}^{i+1} + \frac{1}{\Theta_{2k}^{i+1} - \Theta_{2k}^i}, \quad (\text{Eq. 87})$$

i quan l'índex de la columna resulta parell es recorre a:

$$\Theta_{2k+2}^i = \Theta_{2k}^{i+1} + \frac{(\Theta_{2k}^{i+2} - \Theta_{2k}^{i+1})(\Theta_{2k+1}^{i+2} - \Theta_{2k+1}^{i+1})}{(\Theta_{2k+1}^{i+2} - \Theta_{2k+1}^{i+1}) - (\Theta_{2k+1}^{i+1} - \Theta_{2k+1}^i)}. \quad (\text{Eq. 88})$$

Igualment es calcula columna a columna fins que no hi ha més termes per progressar. L'Equació 87 segueix el mateix patró que l'Equació 86. Per altra banda, l'Equació 88 recorda a la Delta d'Aitken.

Segons Weniger (1989), les columnes amb subíndexs parells convergeixen cap a la solució que se cerca. Les que comptin amb un índex imparell, divergeixen. L'esquema recurrent que es planteja en el mètode Theta de Brezinski és més complicat que la resta d'algoritmes. Va ser creat de forma experimental. No obstant això, s'ha comprovat que proporciona resultats satisfactoris, fins i tot amb sèries altament divergents. 

4.2.6. Eta de Bauer

L'algoritme Eta de Bauer presenta força similituds en comparació amb els anteriors: inicialitza les dues primeres columnes i la tria de les equacions depèn de si l'índex és parell o senar. La primera columna està composta pels termes $\eta_{-1}^i = \infty$ i la segona pels termes $\eta_0^i = U[i]$. S'observa que no es basa en sumes parcials com abans. Si l'índex és senar, s'opta per:

$$\frac{1}{\eta_{2k+1}^i} = \frac{1}{\eta_{2k-1}^{i+1}} + \frac{1}{\eta_{2k}^{i+1}} + \frac{1}{\eta_{2k}^i}, \quad (\text{Eq. 89})$$

en cas que sigui parell s'usa:

$$\eta_{2k+2}^i = \eta_{2k}^{i+1} + \eta_{2k+1}^{i+1} - \eta_{2k+1}^i. \quad (\text{Eq. 90})$$

El resultat final que aproxima la sèrie de tensió o de potència reactiva es correspon a la suma dels termes de la primera fila de totes les columnes, en excepció de la primera, que és infinit. Rao (2017) esmenta que el mètode Eta de Bauer proporciona aproximants diagonals de Padé.



Es mostra la Figura 18 per exemplificar el comportament dels algorismes recorrents presentats, tots ells a la xarxa IEEE14 amb $\lambda = 2$.

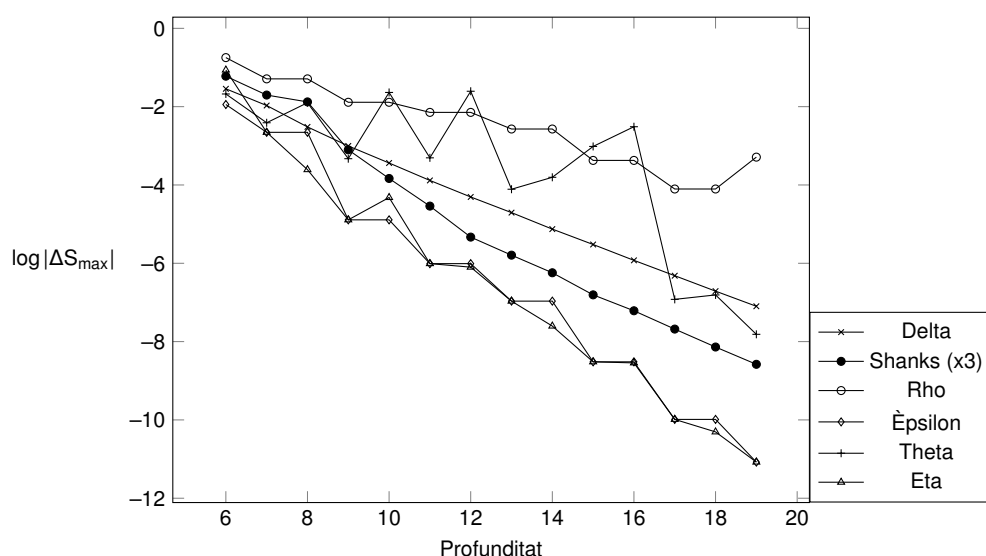


Figura 18. Errors enfront la profunditat amb els mètodes recorrents a la IEEE14, $\lambda = 2$

Les transformacions de Shanks són altre cop superiors a la Delta d'Aitken. L'algoritme Rho de Wynn exhibeix una convergència lenta mentre que el perfil de Theta de Brezinski esdevé força erràtic. Els dos mètodes més encertats en aquesta situació són l'Eta de Bauer i l'Épsilon de Wynn, que assoleixen errors de l'ordre de 10^{-12} amb menys d'una vintena de coeficients.



4.3. Aproximants de Padé

Els aproximants de Padé constitueixen una eina bàsica del mètode d'incrustació holomòrfica. Són uns aproximants racionals àmpliament utilitzats com a eina de continuació analítica gràcies a les seves propietats de convergència. Segons Trias (2018), el teorema d'Stahl (Stahl (1997) Stahl (1989)) anuncia que la seqüència d'aproximants de Padé, tal que els seus índexs tendeixen a infinit, convergeix en la seva màxima capacitat.



Pel que fa a l'aplicació en el MIH, si els aproximants de Padé convergeixen a $s = 1$, es garanteix que el resultat és fruit de la continuació analítica de la solució que parteix d' $s = 0$ (en altres paraules, l'estat de referència). Si els aproximants de Padé no convergeixen a $s = 1$, no hi ha solució possible que parteixi de l'estat de referència (Trias, 2018).

La definició dels aproximants de Padé és la següent.

$$C(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{p_0 + sp_1 + s^2p_2 + \dots + p_L s^L}{q_0 + sq_1 + s^2q_2 + \dots + q_M s^M}, \quad (\text{Eq. 91})$$

on:

$C(s)$: sèrie genèrica sobre la qual es vol aplicar la continuació analítica. Es coneixen els seus coeficients i correspondrà a una sèrie de tensió o de potència reactiva.

L : ordre del numerador.

M : ordre del denominador.

L'Equació 91 dóna peu al que es coneix com l'aproximant de Padé $[L/M]$. Per aprofitar el teorema d'Stahl, interessa emprar els màxims valors possibles d' L i M . Així, se següent una estructura en forma d'escala, del tipus: $[x/x]$, $[x + 1/x]$, $[x + 1/x + 1]$... Tal com plantegen Dromanraju et al. (2020), també es pot escollir: $[x/x]$, $[x/x + 1]$, $[x + 1/x + 1]$... Experimentalment s'ha trobat que la primera opció arriba a errors menors.

4.3.1. Càlcul


El càlcul dels aproximants de Padé es dedueix del desenvolupament de l'Equació 91. En el cas que $L = M + 1$:


$$\begin{aligned} p_0 &= c_0 q_0, \\ p_1 &= c_1 q_0 + c_0 q_1, \\ &\vdots \\ p_M &= c_M q_0 + c_{M-1} q_1 + \dots + c_0 q_M, \\ p_{M+1} &= c_{M+1} q_0 + c_M q_1 + \dots + c_1 q_M, \\ 0 &= c_{M+2} q_0 + c_{M+1} q_1 + \dots + c_2 q_M, \\ &\vdots \\ 0 &= c_{M+L} q_0 + c_{M+L-1} q_1 + \dots + c_L q_M, \end{aligned} \quad (\text{Eq. 92})$$



on c_i representa el terme d'índex i de la sèrie $C(s)$. En total $C(s)$ conté $L + M + 1$ termes.

S'utilitza la condició de normalització en què el primer terme del denominador $Q(s)$ es fixa a la unitat. És una tria arbitrària. L'obtenció de la resta de termes de $Q(s)$ s'aconsegueix per mitjà de plantejar el sistema matricial:

$$-\begin{pmatrix} c_2 & c_3 & \dots & c_M & c_{M+1} \\ c_3 & c_4 & \dots & c_{M+1} & c_{M+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{M+1} & c_{M+2} & \dots & c_{M+L-2} & c_{M+L-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_M \\ q_{M-1} \\ \vdots \\ q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{M+2} \\ c_{M+3} \\ \vdots \\ c_{L+M} \end{pmatrix}. \quad (\text{Eq. 93})$$

La solució del sistema genera els elements que restaven per conèixer del denominador. Per trobar els coeficients del numerador, es resol de forma directa l'Equació 92 amb els termes de $C(s)$ que proporciona el MIH i els de $Q(s)$ calculats anteriorment. Una vegada coneguts $P(s)$ i $Q(s)$, se substitueixen els valors a l'Equació 91. A menys que s'indiqui el contrari, s'avaluaran a $s = 1$. 

Per tant, el càlcul dels aproximants de Padé implica la resolució d'un sistema matricial, on la matriu típicament s'incrementa  tirà. Si no es vol optar per aquest camí, es poden utilitzar els mètodes recurrents. Com a contrapartida, en principi no s'aprofita el teorema d'Stahl.

Quan el nombre de termes que conté $C(s)$ és imparell , s'utilitza l'Equació 93 i el desenvolupament es  ntat fins ara. En canvi, quan el nombre de termes és imparell, es fixa $L = M$. Aleshores, l'expansió dels coeficients esdevé:

$$\begin{aligned} p_0 &= c_0 q_0, \\ p_1 &= c_1 q_0 + c_0 q_1, \\ &\vdots \\ p_L &= c_L q_0 + c_{L-1} q_1 + \dots + c_0 q_M, \\ 0 &= c_{L+1} q_0 + c_L q_1 + \dots + c_1 q_M, \\ &\vdots \\ 0 &= c_{L+M} q_0 + c_{L+M-1} q_1 + \dots + c_L q_M, \end{aligned} \quad (\text{Eq. 94})$$

el que dóna lloc al sistema:

$$-\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{L-1} & c_L \\ c_2 & c_3 & \dots & c_L & c_{L+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_L & c_{L+1} & \dots & c_{L+M-2} & c_{L+M-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_M \\ q_{M-1} \\ \vdots \\ q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{L+1} \\ c_{L+2} \\ \vdots \\ c_{L+M} \end{pmatrix}. \quad (\text{Eq. 95})$$

El procés resolutiu és el mateix. Amb l'Equació 95 s'obtenen els termes que formen el denominador per llavors utilitzar-los a l'Equació 94. Finalment se substitueixen a l'Equació 91.

La Figura 19 presenta els errors amb els mètodes recurrents que més bones prestacions ofereixen (Èpsilon i Eta) juntament amb els errors obtinguts amb els aproximants de Padé. L'anàlisi s'ha dut a terme també la xarxa IEEE14 amb $\lambda = 2$ i amb la formulació pròpia.

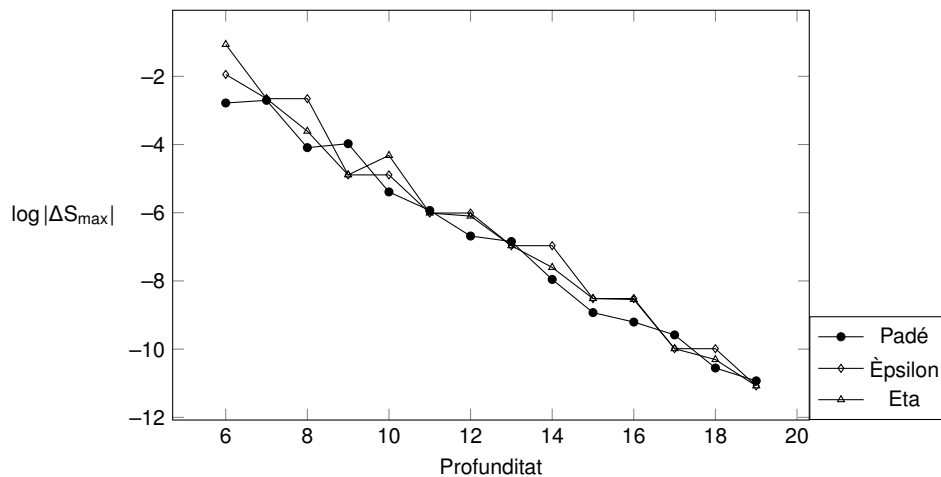


Figura 19. Errors enfront la profunditat amb recurrents i Padé a la IEEE14, $\lambda = 2$

S'observa que gairebé no hi ha diferència entre les trajectòries que segueixen els errors dels mètodes recurrents i els dels aproximants de Padé. Si bé és cert que amb la mínima profunditat els aproximants de Padé es perfilen com la millor opció, a la llarga tots tres proporcionen solucions amb pràcticament el mateix error.

4.3.2. Anàlisi de pols i zeros

Segons Dronamraju et al. (2020) interessa veure quina distribució prenen els pols i els zeros al pla complex per estudiar com convergeixen, per què ho fan d'aquella manera, i com depenen de la càrrega del sistema. Per això es pren la xarxa IEEE30 inicialment amb una demanda al bus 29 de -0,106, tal com ve per defecte. S'utilitza la formulació original. Es treballa amb els

aproximants de Padé diagonals, és a dir, on $L = M$. Pel cas proposat es capturen a la Figura 20.

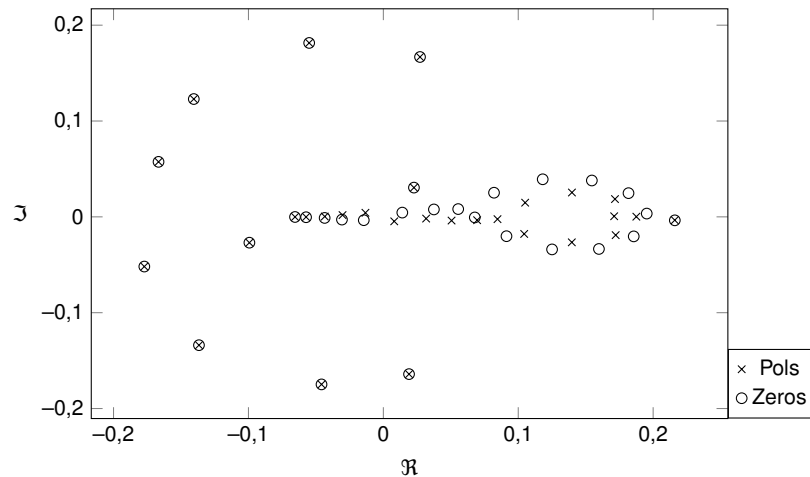


Figura 20. Pols i zeros de l'aproximant de Padé del bus 29 de la IEEE30. $n_i = 59$ i $P_{29} = -0,106$



Bona part dels pols i zeros es cancel·len: la seva posició al pla complex és idèntica. Això passa pels primers pols i zeros. Si només s'empressin aquests, el resultat de tensió final seria unitari. La resta de pols i zeros es concentren aproximadament entre el 0,2 i el 0 de l'eix real, sempre molt propers del 0 imaginari. Sota aquestes condicions la tensió V_{29} val $0,9665/-3,0415^\circ$. S'evidencia que la part imaginària de la tensió resultant té molt menys pes que la real.



Si es carrega més el sistema, per exemple per $P_{29} = -0,82$, en resulta la gràfica de la Figura 21.

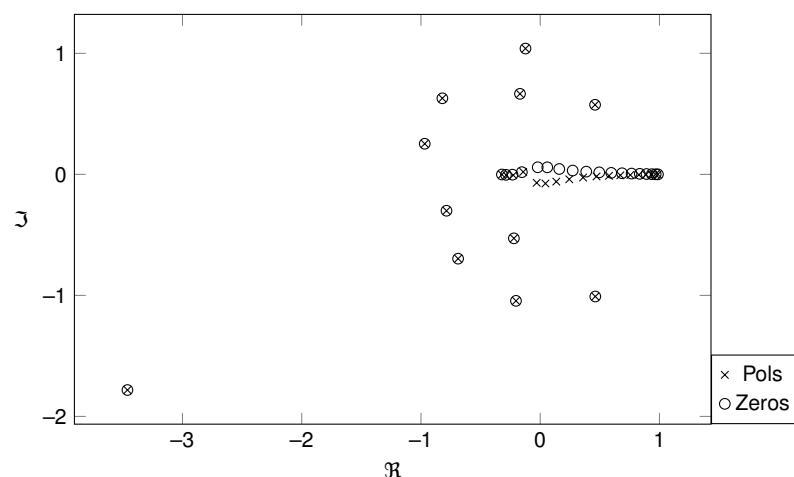


Figura 21. Pols i zeros de l'aproximant de Padé del bus 29 de la IEEE30 amb $n_i = 59$ i $P_{29} = -0,82$



Aquesta vegada la primera parella de pols i zeros queda molt allunyada dels altres. La resta, es distribueixen de forma similar a la d'abans. Altre cop hi ha un conjunt de pols i zeros amb la

part imaginària petita, que per tant, s'agrupen de forma horitzontal. Respecte al cas anterior, ara els pols i els zeros estan molt més dispersos. Ocupen una regió més àmplia en el pla complex. En vistes d'aquests resultats, s'espera que un sistema ben condicionat tingui els pols i els zeros més agrupats.

Per comprovar això últim s'introdueix el factor de càrrega $\lambda = 0,1$. Així es redueixen totes les dades de potència per un factor de 10. La Figura 22 mostra la nova distribució de pols i zeros.

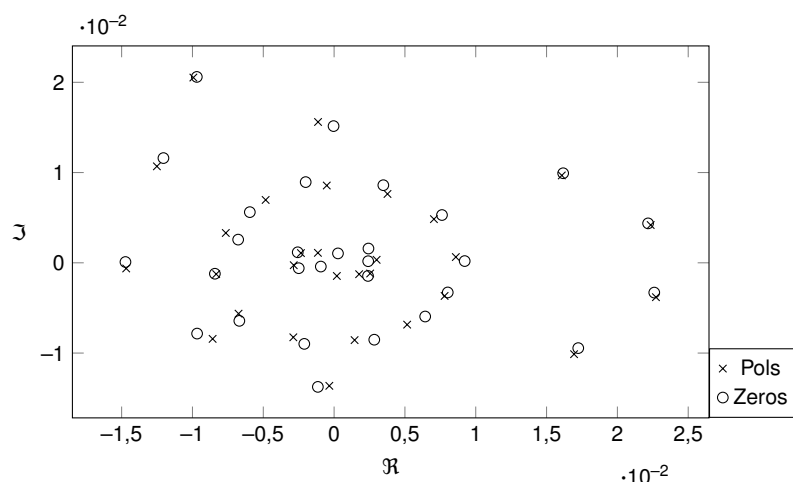


Figura 22. Pols i zeros de l'aproximant de Padé del bus 29 de la IEEE30. $n_i = 59$ i $\lambda = 0,1$



Efectivament els pols i zeros queden més concentrats que en els casos anteriors. Referent a la seva cancel·lació, pràcticament la posició de tots ells coincideixen, encara que, en l'empetir el rang de valors dels eixos, no es visualitza tan clarament com a les Figures 20 i 21. Es dedueix que la cancel·lació no és total. En conjunt descriuen unes formes circulars, en diversos nivells. Comparat amb situacions de major càrrega, ara el centre esdevé més estret.

Per la seva banda, la potència reactiva és també una de les incògnites dels busos PV. S'escull el bus 26 com aquell on s'analitzen els pols i zeros de la sèrie de potència reactiva. Primer es representen els pols i zeros en la situació de càrrega inicial del sistema (Figura 23).

S'ha de destacar que la potència reactiva, per definició, és un nombre real. Això explica que els pols i zeros de la Figura 23 obeeixin una distribució simètrica respecte a l'eix horitzontal. En altres paraules, hi ha parelles de complexos conjugats. Altre cop uns quants pols i zeros es cancel·len. La gran majoria dels que no ho fan s'acumulen al llarg d' $\Im = 0$, mentre que els restants dibuixen una forma similar a la de la Figura 20. Aquesta vegada, però, els zeros queden a dins els pols.

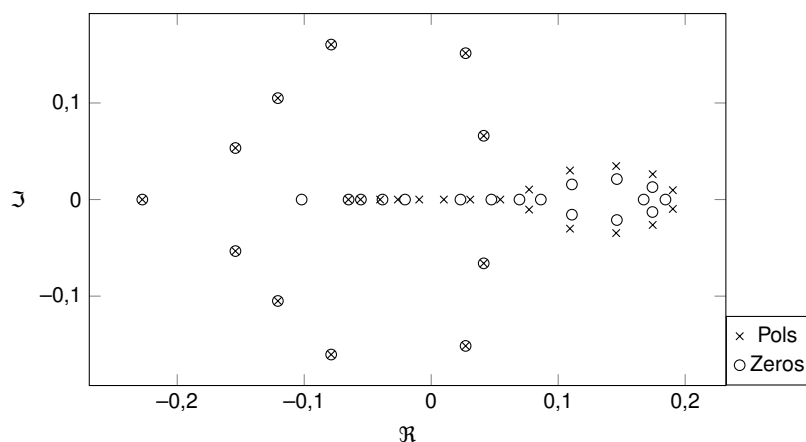


Figura 23. Pols i zeros dels aproximants de Padé de la reactiva del bus 26 de la IEEE30 amb $n_i = 59$

En carregar més el sistema a partir de $P_{29} = -0,82$, s'obté la Figura 24.

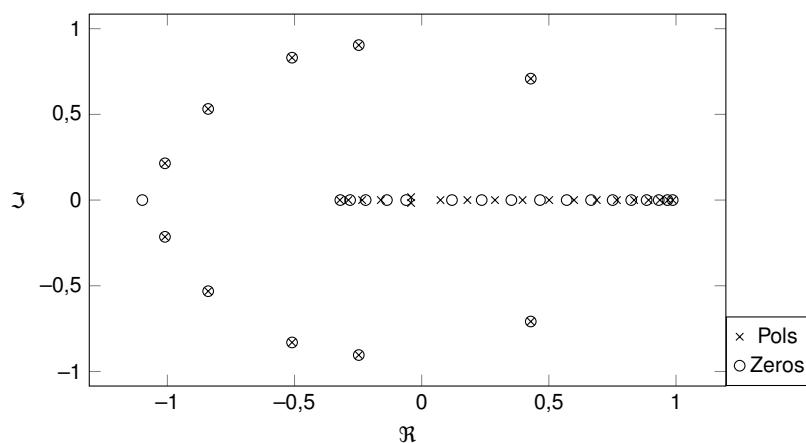


Figura 24. Pols i zeros de la reactiva del bus 26 de la IEEE30 amb $n_i = 59$ i $P_{29} = -0,82$



En lloc de tenir uns quants pols i zeros que dibuixen una figura que ressembla una el·lipse, ara aquells que no es cancel·len es distribueixen al llarg de l'eix real. Es preserva la simetria. Aquest fenomen no es compleix amb la tensió, on el més normal és que compti amb una petita part imaginària. Comparat amb la Figura 23 els pols i zeros s'han expandit, no estan tan concentrats.

5. Aproximants de Thévenin i aproximants Sigma

Els aproximants de Thévenin i els aproximants Sigma actuen com a complements en el mètode d'incrustació holomòrfica. No intervenen en la resolució de les diverses formulacions plantejades, i tampoc són indispensables a l'hora de calcular el valor final de les sèries. Tanmateix, proporcionen informació per comprendre millor el sistema. Tots dos tipus d'aproximants es fonamenten en reduir el sistema en un equivalent de dos busos: el bus que s'analitza i el bus oscil·lant (o un equivalent d'aquest últim).



Els aproximants de Thévenin consisteixen en el que s'anomenen aproximants de major ordre (Trias, 2018). Són interessants per obtenir tensions més exactes que les resultants amb els aproximants de Padé a zones properes al col·lapse de tensions. També permeten trobar la tensió del sistema en condicions d'operació inestables.



Per altra banda, els aproximants Sigma estan ideats per actuar com a eina de diagnòstic. Hi ha situacions en xarxes molt carregades en què el flux de potència no té solució. Els aproximants Sigma es perfilen com un recurs per conèixer si el sistema és resoluble. A més, gràficament donen nocions de l'estat de càrrega del sistema i identifiquen com els busos més problemàtics perjudiquen la resta de busos.

5.1. Aproximants de Thévenin

Els aproximants de Thévenin són un cas particular dels aproximants d'Hermite-Padé. El cap i a la fi, tots ells busquen aproximar la solució, en aquest cas del flux de potències, a partir la relació d'osculació. La Figura 25 representa gràficament en què consisteix.

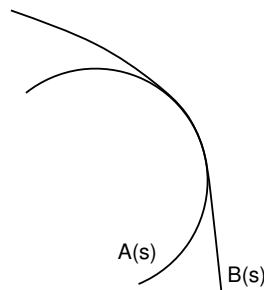


Figura 25. Relació d'osculació entre dues corbes

Hi ha una sèrie genèrica $A(s)$ que es vol avaluar a un punt donat (per exemple, en el MIH això equivaldria a dir que es busca la tensió $V(s = 1)$). Llavors, com que en funció del cas cal

utilitzar algun mètode de continuació analítica per obtenir un error acceptable, s'opta per una sèrie $B(s)$. Es diu que manté una relació d'osculació amb $A(s)$ perquè estableixen contacte entorn del punt en què es vol avaluar $A(s)$.

Tot i no ser aproximants de major ordre, els aproximants de Padé es fonamenten en el mateix concepte. La sèrie $B(s)$ ve a ser el quocient $P(s)/Q(s)$ de l'Equació 91.

Els equivalents de Thévenin busquen expressar la tensió $V(s)$ com:

$$V(s) = F(s) + s \frac{G(s)}{V^*(s^*)}, \quad (\text{Eq. 96})$$

on $G(s)$ i $F(s)$ són sèries a obtenir a través dels aproximants de Thévenin. S'observa que l'Equació 96 recorda a l'equació resultant del balanç d'intensitats d'un bus que només es troba connectat al bus oscil·lant.

En concret, els equivalents de Thévenin segueixen la següent relació amb la sèrie de tensió $U(s)$:

$$T_N^{(0)}(s) + T_N^{(1)}(s)V(s) + T_N^{(2)}(s) \frac{s}{V^*(s^*)} = r_N(s)s^{N+1}, \quad (\text{Eq. 97})$$

on:

$T_N^{(0)}(s)$, $T_N^{(1)}(s)$ i $T_N^{(2)}(s)$: sèries a calcular.

$N = -1, 0, 1, \dots, \infty$: ordre d'aquella relació d'osculació.

$r_N(s)$: residu a l'ordre N . És d'esperar que prengui valors molt petits.

Així, es tracta de convertir l'Equació 97 en:

$$V(s) = -\frac{T_N^{(0)}(s)}{T_N^{(1)}(s)} - \frac{T_N^{(2)}(s)}{T_N^{(1)}(s)} \frac{s}{V^*(s^*)} + r_N(s)s^{N+1}, \quad (\text{Eq. 98})$$

on al final, per a grans N , $r_N(s)s^{N+1}$ serà menyspreat. Per tant, les sèries $F(s)$ i $G(s)$ de l'Equació 96 s'extreuen de l'Equació 98. D'aquí que s'anomenin aproximants de Thévenin. S'obté un equivalent no lineal que ve recollit per $F(s)$ i $G(s)$. Aquestes dues sèries engloben la informació del sistema vist des d'aquell bus.

5.1.1. Càlcul

Segons Trias (2018), el càlcul dels aproximants implica imposar el grau dels polinomis:

$$\text{grau}(T_N^{(a)}(s)) = \lfloor \frac{N+1-a}{3} \rfloor, \quad (\text{Eq. 99})$$

on $\lfloor m \rfloor$ arrodoneix a l'enter menor o igual a m i a pren per valor el 0, l'1 i el 2, tal com es dedueix de l'Equació 98. Quan el grau resulta negatiu, el polinomi és nul; quan val zero, el polinomi esdevé una constant.

Els polinomis en què $a = 0$ es normalitzen:

$$T_N^{(0)}(0) = -1, \quad (\text{Eq. 100})$$

encara que aquesta tria és arbitrària. En aquest desenvolupament s'ignora la dependència de les sèries amb s quan aquesta és evident. De les Equacions 97 i 99 quan $a = 1$ es dedueix:

$$\begin{aligned} T_{-1}^{(1)} &= 0, \\ T_0^{(1)} &= \frac{1}{V[0]}, \\ T_1^{(1)} &= \frac{1}{V[0]}. \end{aligned} \quad (\text{Eq. 101})$$

És necessari considerar que $V[0]$ pot no ser exactament igual a 1 per aplicar els aproximants de Thévenin al MIH amb la formulació pròpia. Quan $a = 2$:

$$\begin{aligned} T_{-1}^{(2)} &= 0, \\ T_0^{(2)} &= 0, \\ T_1^{(2)} &= \frac{-V[1]V^*[0]}{V[0]}. \end{aligned} \quad (\text{Eq. 102})$$

Els residus es troben a partir de l'Equació 97. S'aïllen per $N = -1, 0, 1$ i en resulta que cada un dels seus coeficients segueix:


$$\begin{aligned} r_{-1}[0] &= -1, \\ r_0[k] &= \frac{V[k+1]}{V[0]}, \\ r_1[k] &= \frac{V[k+2]V[0]}{V^2[0] - V[1]V^*[0]X[k+1]}, \end{aligned} \quad (\text{Eq. 103})$$

on:

$k = 0, 1, \dots, n-2$: índex que identifica un terme genèric dels residus.

n : darrer índex de la sèrie $V(s)$.

$X(s)$: sèrie inversa de la tensió $V^*(s^*)$.

Tal com s'aprecia, tots els termes d' $r_{-1}(s)$ són nuls excepte el primer d'ells. A continuació cal obtenir els successius polinomis $T_N^{(a)}(s)$. Com que en principi a major N millor s'aproxima la solució, s'inicia amb $N = 1$.  xpanseixen les relacions d'osculació per tres ordres consecutius:

$$\begin{aligned} T_{N-2}^{(0)} + T_{N-2}^{(1)} V(s) + T_{N-2}^{(2)} \frac{s}{V^*(s^*)} &= r_{N-2}(s) s^{N-1}, \\ T_{N-1}^{(0)} + T_{N-1}^{(1)} V(s) + T_{N-1}^{(2)} \frac{s}{V^*(s^*)} &= r_{N-1}(s) s^N, \\ T_N^{(0)} + T_N^{(1)} V(s) + T_N^{(2)} \frac{s}{V^*(s^*)} &= r_N(s) s^{N+1}. \end{aligned} \quad (\text{Eq. 104})$$

Es busca progressar, o sigui, trobar els polinomis d'ordre $N + 1$. Es multiplica cada expressió de l'Equació 104 per les constants a_{N+1} , b_{N+1} i c_{N+1} respectivament, que s'han de determinar. Això s'ha de llegir com aquelles constants que donen peu als polinomis $T_{N+1}^{(a)}(s)$, d'aquí el seu subíndex. Queda:

$$\begin{aligned} a_{N+1} s T_{N-2}^{(0)} + b_{N+1} T_{N-1}^{(0)} + c_{N+1} T_N^{(0)} + (a_{N+1} s T_{N-2}^{(1)} + b_{N+1} T_{N-1}^{(1)} + c_{N+1} T_N^{(1)}) V(s) \\ + (a_{N+1} s T_{N-2}^{(2)} + b_{N+1} T_{N-1}^{(2)} + c_{N+1} T_N^{(2)}) s X(s) \\ = (a_{N+1} r_{N-2}(s) + b_{N+1} r_{N-1}(s) + c_{N+1} s r_N(s)) s^N. \end{aligned} \quad (\text{Eq. 105})$$

L'Equació 105 té la mateixa forma que la relació d'osculació. Precisament es tracta d'aconseguir que doni lloc a la relació d'osculació d'ordre $N+2$ a través d'escollir les constants coherentment. Per progressar cap a la següent equació d'osculació, on a la banda dreta de la igualtat de l'expressió hi ha de figurar s^{N+2} , s'han d'eliminar aquells termes que acompanyin s^N i s^{N+1} . Amb aquesta condició s'arriba a:

$$\begin{aligned} a_{N+1} r_{N-2}[0] + b_{N+1} r_{N-1}[0] &= 0, \\ a_{N+1} r_{N-2}[1] + b_{N+1} r_{N-1}[1] + c_{N+1} s r_N[0] &= 0. \end{aligned} \quad (\text{Eq. 106})$$

Per calcular les tres constants manca una equació. Es defineixen els nous polinomis d'ordre $N + 1$:

$$T_{N+1}^{(a)}(s) = a_{N+1} s T_{N-2}^{(a)} + b_{N+1} T_{N-1}^{(a)} + c_{N+1} T_N^{(a)}, \quad (\text{Eq. 107})$$

on la constant a_{N+1} i l'indicador del polinomi a que val 0, 1 i 2, se simbolitzen per la mateixa lletra però no representen el mateix.

Mitjançant l'Equació 107, en normalitzar el nou polinomi $T_{N+1}^{(0)} = -1$ igual que s'ha fet amb els altres, s'obté la tercera equació per determinar les constants:

$$b_{N+1}(-1) + c_{N+1}(-1) = -1. \quad (\text{Eq. 108})$$

Llavors, es combinen les Equacions 106 i 108 per conèixer què val cada constant:

$$\begin{aligned} a_{N+1} &= \frac{r_{N-1}[0]r_N[0]}{r_{N-2}[0]r_{N-1}[1] - r_{N-1}[0]r_{N-2}[1] - r_{N-2}[0]r_N[0]}, \\ b_{N+1} &= -a_{N+1} \frac{r_{N-2}[0]}{r_{N-1}[0]}, \\ c_{N+1} &= 1 - b_{N+1}. \end{aligned} \quad (\text{Eq. 109})$$

Finalment només queda treure la nova sèrie $r_{N+1}(s)$, on cada un dels seus termes es dedueix a través de l'expressió a la dreta de l'igual de l'Equació 105:

$$r_{N+1}[k] = a_{N+1}r_{N-2}[k+2] + b_{N+1}r_{N-1}[k+2] + c_{N+1}r_N[k+1]. \quad (\text{Eq. 110})$$

En resum, el procediment de càlcul dels aproximants de Thévenin comença amb les sèries de tensió $V_i(s)$ per a cada bus i , que prèviament s'han calculat amb qualsevol de les dues formulacions del MIH. Seguidament es calculen els residus amb l'Equació 103. Amb això s'obtenen les constants de l'Equació 109, el que permet trobar els nous polinomis amb l'Equació 107. Es repeteix aquest procés (la resta de vegades s'utilitza l'Equació 110 pels residus) fins a exhaurir els coeficients. En efecte, el nombre de termes dels residus es redueix a mesura que N creix. El càlcul dels aproximants de Thévenin finalitza quan no se'n poden calcular més.

Per al càlcul definitiu de les tensions s'utilitza $G(s)$ i $F(s)$, que tal com s'ha raonat, s'extreuen de l'Equació 98. Es pren l'Equació 96 i en resulta:

$$v(s) = 1 + s \frac{G(s)}{F(s)F^*(s^*)} \frac{1}{v(s)}, \quad (\text{Eq. 111})$$

on $v(s) = \frac{V(s)}{F(s)}$. Per simplificar-ho més s'introdueix el canvi de variable $\sigma^{\text{TH}} = \frac{G(s)}{F(s)F^*(s^*)}$. Això

permet calcular el valor final de v :

$$v = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \Re[\sigma^{TH}] - (\Im[\sigma^{TH}])^2 + j\Im[\sigma^{TH}]} \quad (\text{Eq. 112})$$

Com s'observa, v rep dos valors. Aquell en què s'utilitza el signe positiu de l'arrel quadrada representarà la tensió superior, del que s'anomena la branca estable de la corba PV, mentre que amb el signe negatiu davant l'arrel, s'obté un punt de la branca inestable o negativa. Numèricament s'ha vist que els aproximants de Thévenin indiquen incorrectament l'angle de la tensió. Tanmateix, la seva característica més profitosa es manifesta a la Figura 26.

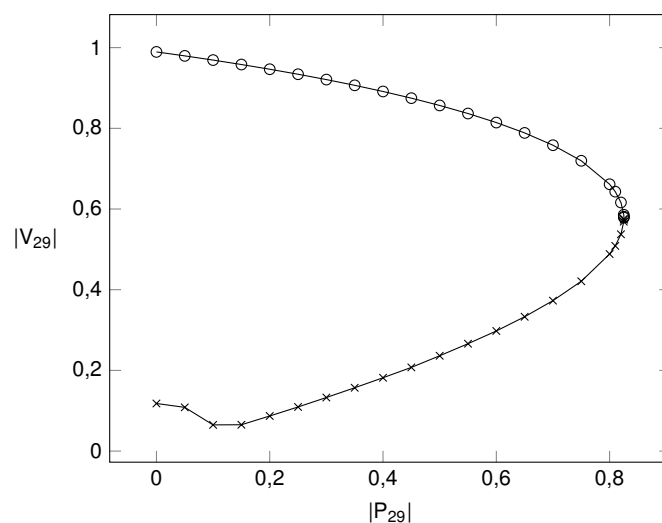


Figura 26. Corba PV pel bus 29 de la xarxa IEEE30 amb la formulació original

Les corbes PV consisteixen en una representació del mòdul de tensió a mesura que s'incrementa la demanda. A major consum, més s'empetiteix el voltatge, fins que s'arriba a l'anomenat punt de col·lapse de tensions, on la situació es reverteix. A la branca negativa o inestable una disminució de demanda implica una reducció de tensió. Matemàticament és una solució vàlida però anòmala (Barrero, 2004), que més aviat té un interès teòric. Amb els aproximants de Padé i els mètodes recurrents no s'obtenen els punts de treball de la branca negativa, ja que troben la solució físicament possible.



El punt de col·lapse de tensions marca la màxima demanda que pot tenir lloc en un bus. Si fos més gran, el flux de potències del sistema no tindria solució. Per això, aquelles xarxes que contenen busos a prop del col·lapse de tensions es coneixen pel nom de mal condicionades. La resolució del flux de càrregues resulta més costosa que en casos ben condicionats. Els mètodes tradicionals iteren més vegades i en el MIH es necessiten més coeficients.

La branca inestable obtinguda amb els aproximants de Thévenin, lluny del punt de col·lapse, pot no prendre els valors esperats. A la Figura 26 es fa evident que per potències inferiors a 0,1, la trajectòria no segueix el típic perfil teòric. Segons Trias (2018), aquest comportament és típic dels aproximants de Thévenin. Sí que són convenients a l'hora de representar les tensions a prop del punt de col·lapse. Ho fan amb més exactitud que els aproximants de Padé. La Figura 27 il·lustra aquesta comparació, on s'utilitza la formulació pròpia i sèries de 30 coeficients.

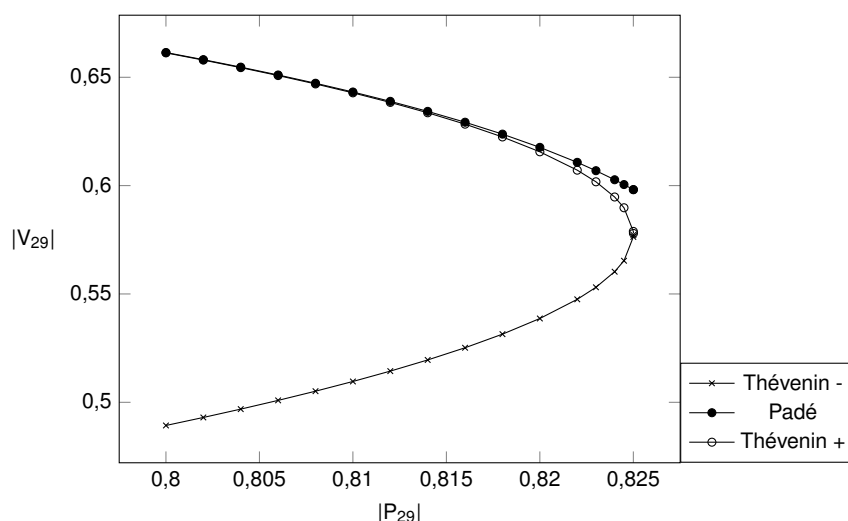


Figura 27. Corba PV pel bus 29 de la xarxa IEEE30 a prop del col·lapse. Aproximants de Padé i Thévenin

A punts propers del col·lapse de tensió, els aproximants de Padé es desvien de la trajectòria dels aproximants de Thévenin. És més, els errors màxims de potència complexa calculats amb els aproximants de Padé esdevenen massa elevats, de l'ordre de 10^{-3} . Es nota que les dues corbes dels aproximants de Thévenin s'uneixen al punt de col·lapse.

Els aproximants de Thévenin també permeten generar les corbes QV. A l'eix vertical es representa el mòdul de tensió mentre que a l'horitzontal hi apareix la potència reactiva injectada al bus. A la Figura 28 s'exemplifica aquesta corba pel bus 29 de la xarxa IEEE 30.

També hi ha un punt de col·lapse ben marcat, on ambdues branques s'uneixen. A major consum de reactiva, és a dir, com més negativa resulta, més s'apropa el punt de treball al col·lapse. La potència reactiva més extrema a consumir val entorn de -0,622, el que representa una injecció de -0,622. Els aproximants de Thévenin també són capaços de representar la branca inestable, tot i que fins a cert punt.

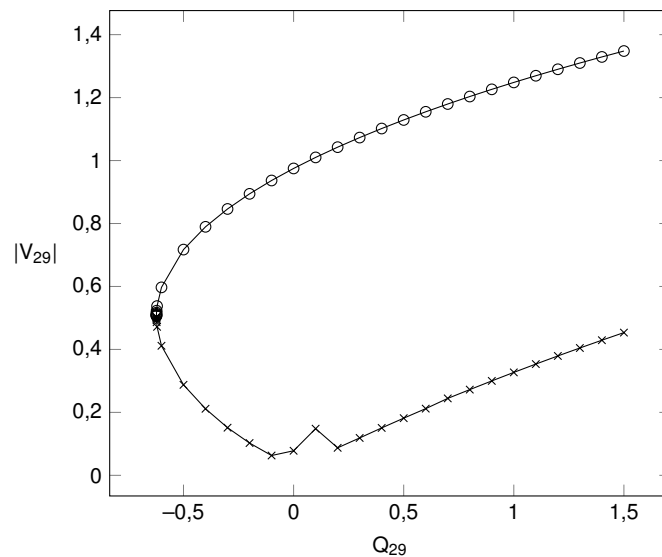


Figura 28. Corba QV pel bus 29 de la xarxa IEEE30 amb aproximants de Thévenin

5.2. Aproximants Sigma

Els aproximants Sigma es presenten com un dels majors avantatges que ofereix el mètode d'incrustació holomòrfica respecte als mètodes de resolució tradicionals. És una eina pensada per mostrar de forma gràfica cada bus PQ i PV com un punt. Si tots els punts se situen dins els límits d'una paràbola, la solució queda validada. Per contra, si algun d'ells surt dels límits, la solució del flux de potències no resulta correcta.

5.2.1. Formulació

De manera similar als aproximants de Thévenin, els aproximants Sigma també construeixen un model equivalent de dos busos. Es busca una expressió que resemblance l'Equació 96. El desenvolupament comença amb el balanç de corrents a un bus donat:

$$\frac{V(s) - V_w(s)}{Z(s)} = s \frac{S^*(s^*)}{V^*(s^*)}, \quad (\text{Eq. 113})$$

on:

$V_w(s)$: voltatge del nus oscil·lant. D'entrada la seva sèrie és coneguda.

$V(s)$: voltatge del bus PV o PQ. És una incògnita. 

$Z(s)$: sèrie que representa la impedància equivalent.

$S^*(s^*)$: complex conjugat de la potència del bus incògnita.



Pel desenvolupament és indiferent considerar si es tracta amb un bus PV o amb un bus PQ, encara que les dades i les incògnites variïn. Pot ser que aquest bus no enllaci de manera directa amb el nus oscil·lant. Precisament la gràcia dels aproximants Sigma resideix en formar un model equivalent entre ambdós busos.

Es multiplica l'Equació 113 a banda i banda per $\frac{Z(s)}{V_w(s)}$:

$$\frac{V(s)}{V_w(s)} - 1 = s \frac{S^*(s^*)}{V^*(s^*)} \frac{Z(s)}{V_w(s)}. \quad (\text{Eq. 114})$$

Aleshores s'aplica el canvi de variable $U(s) = \frac{V(s)}{V_w(s)}$. L'Equació 114 es converteix en:

$$U(s) - 1 = s \frac{S^*(s^*)Z(s)}{V^*(s^*)} \frac{1}{V_w(s) \frac{V_w^*(s^*)}{V_w^*(s^*)}}. \quad (\text{Eq. 115})$$

Seguidament s'introdueix el canvi de variable que dóna nom als aproximants Sigma, que és:

$\sigma(s) = \frac{S^*(s^*)Z(s)}{V_w(s)V_w^*(s^*)}$. Amb això s'arriba a:

$$U(s) = 1 + s \frac{\sigma(s)}{U^*(s^*)}, \quad (\text{Eq. 116})$$

que recorda a l'Equació 96 i per tant, a un equivalent de dos busos.

L'algoritme del MIH es basa a obtenir les sèries de tensió $V(s)$, i com que la sèrie del bus oscil·lant es construeix independentment del flux de potències, trobar $\sigma(s)$ a partir l'Equació 116 és el següent pas. En aïllar-la de l'Equació 116:

$$\sigma(s) = \frac{(U(s) - 1)/s}{\frac{1}{U^*(s^*)}}, \quad (\text{Eq. 117})$$

on s'introdueix el canvi de variable $\frac{1}{U^*(s^*)} = X(s)$. Així, $\sigma(s)$ esdevé calculable amb:

$$\sigma(s) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} U[k+1]s^k}{\sum_{k=0}^{\infty} X[k]s^k}, \quad (\text{Eq. 118})$$

tot i que no es calcula d'aquest mode. Es formula un enfocament més apropiat.



Interessa plantejar com calcular la tensió a partir dels aproximants Sigma, per motius que es faran evidents a continuació. Es defineix $U = a + jb$ i $\sigma = \sigma_r + j\sigma_i$. En considerar $s = 1$, l'Equació 116 es converteix en:

$$a + jb = 1 + \frac{\sigma_r + j\sigma_i}{a - jb}, \quad (\text{Eq. 119})$$

que en desenvolupar-la i separar explícitament entre part real i imaginària:



$$(a^2 - a + b^2) + j(b) = (\sigma_r) + j(\sigma_i), \quad (\text{Eq. 120})$$

de manera que directament $b = \sigma_i$. Per la part real es treballa l'equació de segon grau. S'obté:

$$a = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \sigma_i^2 + \sigma_r}. \quad (\text{Eq. 121})$$

Consegüentment es dedueix una conclusió de vital importància a l'hora de tractar els aproximants Sigma com a eina de diagnòstic. Serveixen per indicar que no hi ha solució quan es compleix:

$$\frac{1}{4} - \sigma_i^2 + \sigma_r < 0. \quad (\text{Eq. 122})$$

Al cap i a la fi l'Equació 122 dibuixa una paràbola. Quan la solució de la tensió quedi fora de l'interior que defineix la paràbola, serà considerada invàlida. De fet, només que una tensió resti fora, la solució del flux de potències resulta incorrecta. Això compta amb una aplicabilitat destacable en un centre de control: d'un sistema amb multitud de busos, a simple cop d'ull s'identifica la situació d'operació en què es troba.

5.2.2. Càlcul

Per trobar el valor que pren $\sigma(s)$ l'opció més adient tracta de plantejar un sistema matricial. Experimentalment s'ha vist que si s'aplica l'Equació 118 s'aconsegueix menys exactitud. El càlcul consisteix a obtenir els coeficients d'un parell de sèries noves.



Una d'elles és la que sorgeix d' $U(s)$:

$$(U(s) - 1)/s = \sum_{N=0}^{\infty} U[N+1]s^N = \sum_{n=0}^{\infty} c_n s^n, \quad (\text{Eq. 123})$$

i l'altra d' $X(s)$:

$$X(s) = \frac{1}{U^*(s^*)} = \sum_{N=0}^{\infty} X[N]s^N = \sum_{n=0}^{\infty} d_n s^n. \quad (\text{Eq. 124})$$

Lavors es planteja aproximar el quocient que formen les Equacions 123 i 124 a través de:

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} c_n s^n}{\sum_{n=0}^{\infty} d_n s^n} = \frac{\sum_{n=0}^L p_n s^n}{\sum_{n=0}^M q_n s^n}, \quad (\text{Eq. 125})$$

on s'han menyspreat els termes d'ordre $L + M + 1$ i superior. En desenvolupar l'Equació 125 i igualar termes s'arriba a:

$$- \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -d_0 & 0 & \dots & 0 \\ c_0 & 0 & \dots & 0 & -d_1 & -d_0 & \dots & 0 \\ c_1 & c_0 & \dots & 0 & -d_2 & -d_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_{2M-2} & c_{2M-3} & \dots & c_{M-1} & -d_{2M-1} & -d_{2M-2} & \dots & -d_{M-1} \\ c_{2M-1} & c_{2M-2} & \dots & c_M & -d_{2M} & -d_{2M-1} & \dots & -d_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_M \\ p_0 \\ \vdots \\ p_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{2M-1} \\ c_{2M} \end{pmatrix} \quad (\text{Eq. 126})$$

Cal invertir la matriu per tal de trobar els t que es busquen i seguidament computar el quocient de l'Equació 125. No apareix q_0 , ja que s'ha fixat que valgui 1 (igual que amb els aproximants de Padé, on aquest valor és arbitrari).

Val la pena tenir present les implicacions de l'Equació 116. Se sap que d'acord amb la seva definició, $U(s) = \frac{V(s)}{V_w(s)}$. Per tant, el seu primer terme resulta:

$$U[0] = \frac{V[0]}{V_w[0]}, \quad (\text{Eq. 127})$$

on $V_w[0] = 1$ segons la incrustació que s'utilitza en aquest bus. L'Equació 116 indica que forçosament $U[0] = 1$, així que tot això porta a descobrir que, en efecte, $V[0]$ també ha de valdre 1. Pel que s'ha raonat, a la formulació pròpia amb presència de transformadors de relació variable això no és cert. El primer coeficient de la sèrie de tensió difereix de la unitat. En aquesta situació els aproximants Sigma fan un diagnòstic incorrecte.

Per comparar gràfics s'escull la xarxa IEEE14, que conté tres transformadors de relació variable, i el bus 13 es carrega més que a l'inici. Amb la formulació pròpia s'obté la Figura 29.

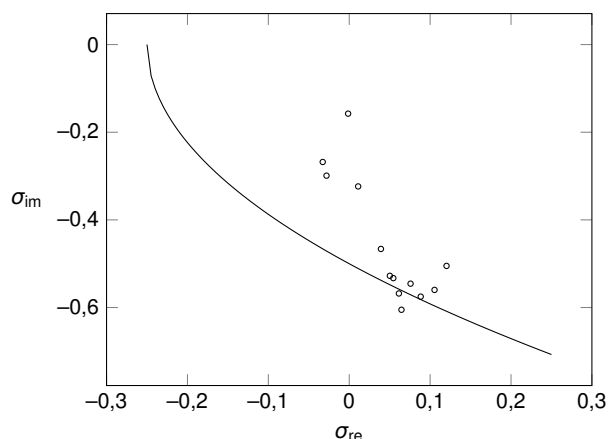



Figura 29. Gràfic Sigma de la IEEE14 amb $P_{13} = -1,5$ amb la formulació pròpia

Només s'ha dibuixat el límit inferior de la paràbola, atès que es fa evident que els busos s'allunyen del límit superior. A partir la Figura 29, el punt que es correspon al bus 13 (o sigui, el darrer bus del sistema) arrossa  la resta de busos cap a fora els límits. De bon principi es trobaven tots més a prop de l'origen. En canvi, si s'utilitza la formulació de la bibliografia, surt la Figura 30.

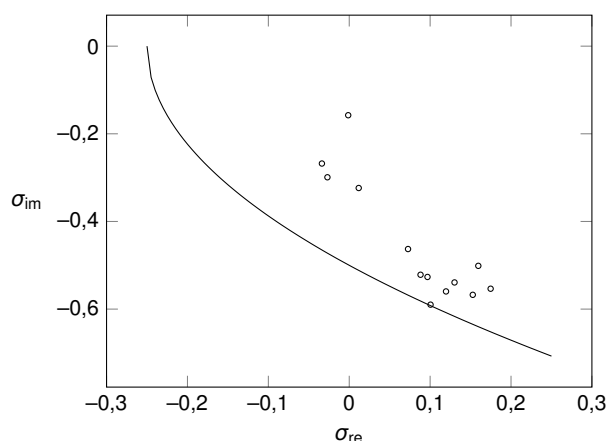



Figura 30. Gràfic Sigma de la IEEE14 amb $P_{13} = -1,5$ amb la formulació original

La distribució dels punts s'assimila, encara que en el gràfic de la formulació pròpia hi ha punts que surten dels límits. Amb la formulació original, en canvi, tots queden dins els marges que defineix la paràbola. Es tracta d'un cas mal condicionat, on l'error  b totes dues formulacions és de l'ordre de 10^{-7} . Resulta prou acceptable. Així, el gràfic Sigma de la formulació pròpia no és correcte. La part positiva es troba en el fet que avisa abans que arribi el col·lapse. En aquest aspecte, tira pel costat de la seguretat.

No obstant això, s'ha comprovat que per xarxes sense transformadors de relació variable, com la IEEE30, els gràfics Sigma de les dues formulacions resulten idèntics.

5.2.3. Diagnòstic

Els aproximants Sigma han estat pensats per actuar com a eina de diagnòstic. Analíticament indiquen si la resolució del flux de potències és correcta a partir de trobar σ_{re} i σ_{im} . Amb això es determina si s'està dins dels límits. Tal com a la Figura 30, la seva representació gràfica resulta molt beneficiosa per diagnosticar l'estat del sistema.

Per un costat, mostra com evoluciona l'estat del sistema en funció de la seva càrrega. Per exemple, la Figura 31 capta la distribució de punts del gràfic Sigma en la xarxa IEEE30 inicial.

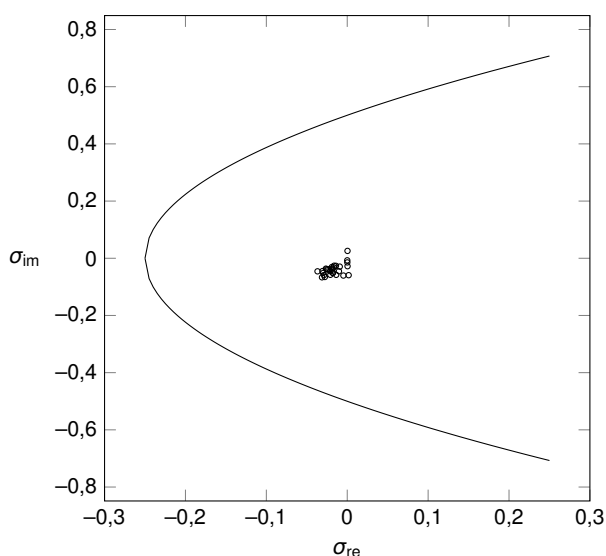
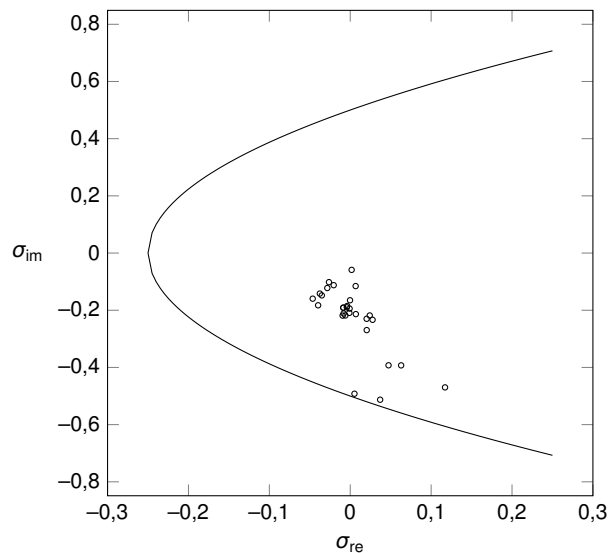


Figura 31. Gràfic Sigma de la IEEE30 en la situació de càrrega inicial

Com s'observa, tots ells se situen molt a prop de l'origen. Això correspon a un sistema ben condicionat. I és que per mitjà de l'Equació 116 es dedueix que si $\sigma(s) \rightarrow 0$, $U(s) \rightarrow 1$, la tensió del bus s'aproxima a la del bus oscil·lant. En un cas així els corrents que circulen per les branques sèrie tendeixen a ser nuls.

Per contra, quan el bus 29 injecta una potència de -0,82, la xarxa esdevé molt més mal condicionada. A la Figura 27 s'observa que en aquestes condicions s'opera a prop del punt de col·lapse. La Figura 32 mostra el gràfic Sigma en tal situació.

Aquell núvol de punts que en un principi estava concentrat entorn de l'origen, s'ha expandit cap avall. Ho han fet especialment els busos 26, 28 i 29. Justament s'ha carregat més el bus 29, i els busos 26 i 28 enllacen amb aquest. Així doncs, de la Figura 32 s'interpreta que un bus estira el sistema cap al col·lapse de tensions.

Figura 32. Gràfic Sigma de la IEEE30 quan $P_{29} = -0,82$

No és casualitat que en general els punts es desplacin així. De fet, σ s'ha definit com:

$$\sigma(s) = \frac{S^*(s^*)Z(s)}{V_w(s)V_w^*(s^*)}. \quad (\text{Eq. 128})$$

S'elimina la dependència de les sèries amb s i es considera que es tracta amb un bus on la potència complexa és coneguda, o sigui, un bus PQ. Amb això:

$$\sigma = \frac{(P - jQ)(R + jX)}{|V_w|^2}, \quad (\text{Eq. 129})$$

on R i X representen la part real i imaginària de la impedància Z . En fragmentar també σ :

$$\begin{aligned} \sigma_{re} &= \frac{PR + QX}{|V_w|^2}, \\ \sigma_{im} &= \frac{PX - QR}{|V_w|^2}. \end{aligned} \quad (\text{Eq. 130})$$

Separar σ en part real i imaginària permet fer-se una idea de les variacions que patiran en funció de les potències. A més, en els sistemes de transport la reactància de les línies és predominant al costat de la resistència, pel que $X \gg R$. En aquestes xarxes σ_{re} depèn especialment de la potència reactiva, mentre que σ_{im} ho fa amb la potència activa.

A tall d'exemple se suposa que hi ha un sistema de dos busos: un és l'oscil·lant, que roman fixat a una tensió d'1 pu, l'altre, un bus PQ on les potències varien. La línia que els uneix té una reactància de 0,05 pu. La Figura 33 mostra l'evolució del punt en el gràfic Sigma.

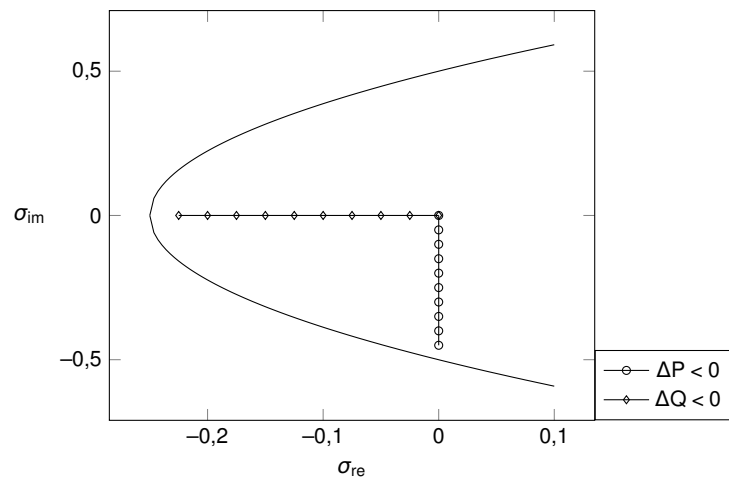


Figura 33. Evolució de Sigma segons canvis a la P o a la Q per a xarxa de dos busos amb $R = 0$

Tal com s'observa a la Figura 33, quan la injecció de potència reactiva disminueix (per tant, hi ha un major consum d'aquesta), σ_{re} disminueix, el que provoca que s'acosti cap al nas de la paràbola. Encara que no s'hagi representat, si la potència reactiva injectada al bus s'incrementa, σ_{re} creix. En aquesta situació el punt s'allunya del límit. El sistema passa a trobar-se més ben condicionat.

Davant canvis a la potència activa, σ_{re} es queda fixa i és σ_{im} la que varia. Ho fa cap avall quan el consum s'incrementa, i cap amunt quan disminueix. Això lliga amb la Figura 32, on només s'augmentava la potència activa del bus 29. En global els punts s'apropaven al límit inferior. La xarxa IEEE30 és un bon exemple de sistema en el qual $X \gg R$, pel que les relacions entre variables que s'han justificat es compleixen.



El gràfic Sigma també té la capacitat d'indicar entre quins valors es mouen els mòduls de tensió. En expandir l'Equació 120 es troba que en el gràfic Sigma tots els punts d'un mateix mòdul de tensió dibuixen una circumferència, del tipus:

$$(\sigma_{re} - V_x^2)^2 + (\sigma_i - 0)^2 = V_x^2, \quad (\text{Eq. 131})$$

on V_x és límit escollit.

De no representa directament el voltatge dels busos, sinó la proporció entre la tensió d'aquests i la de l'oscil·lant, ja que és el límit que es fixa per a U . No obstant això, mostra si les tensions dels busos se separen extremadament de la del bus oscil·lant.

Per exemple, si es decideix que V_x valgui 1 i 0,9, la Figura 32 esdevé la Figura 34.

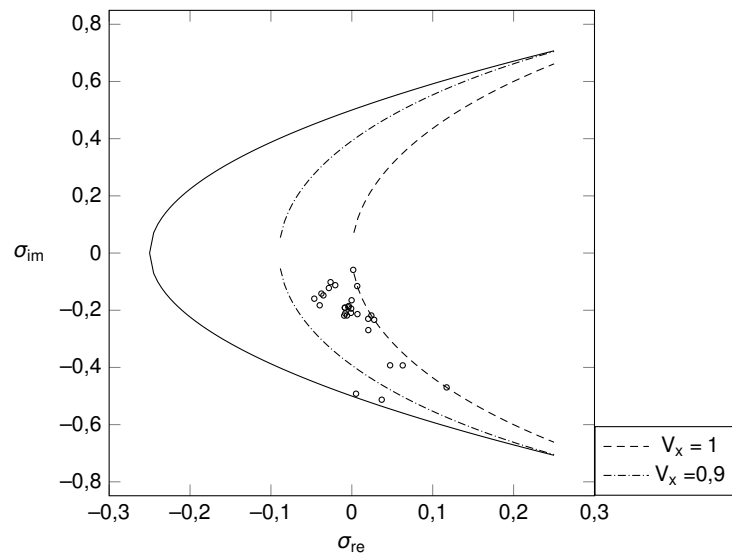


Figura 34. Gràfic Sigma de la IEEE30 quan $P_{29} = -0,82$ amb indicadors de tensió d'1 i 0,9



Com que la tensió del bus oscil·lant és unitària, es dedueix que la majoria de busos compten amb un mòdul de tensió situat entre 1 i 0,9, mentre que els dos busos més propers als límits tenen una tensió en valor absolut inferior a 0,9.



6. Padé-Weierstrass



El mètode de Padé-Weierstrass (P-W) consisteix en un procediment que permet reduir els errors obtinguts amb el MIH. De vegades, aquests són massa grans, i per tant, inacceptables. Encara que les sèries continguin més coeficients i s'utilitzin tant els aproximants de Padé com els mètodes recurrents, la solució gairebé no millora. Això sobretot succeeix en situacions properes al col·lapse de tensions.

Precisament el Padé-Weierstrass es basa a minimitzar aquests errors a partir de solucions parcials. És a dir, la resolució del flux de potències pot no resultar del tot bona perquè els errors superen la tolerància establerta. Però donen lloc a un punt de partida. En la seva essència el mètode de Padé-Weierstrass procura utilitzar aquestes solucions per recalculer el flux de potències. Així, progressivament la solució tendeix a millorar.

El nom de Padé-Weierstrass prové, per una banda, de l'ús dels aproximants de Padé. Per casos mal condicionats no està garantit que els aproximants de Padé avaluats a $s = 1$ convergeixin. El P-W busca un punt $0 < s_0 < 1$ on sí que convergeixen. Llavors incrementa s fins que $s \rightarrow 1$. Així es porta a terme la continuació analítica i **millora la precisió numèrica**. Es compleix amb el teorema d'Stahl. Per altra banda, similar al teorema d'aproximació de Weierstrass, s'expandeix una nova sèrie a partir la inicial, i a més, a partir les equacions del flux de potències (Trias, 2018).

El mètode comença amb:

$$\frac{1 - s_0}{s - s_0} = \frac{1 - 0}{s' - 0}, \quad (\text{Eq. 132})$$

on:



s_0 : valor entre 0 i 1 on les sèries convergeixen. Dóna lloc a una solució parcial.

s' : nova variable complexa de la qual dependran les noves sèries.

L'Equació 132 realitza una transformació conforme. Pren el rang de valors $[s_0, 1]$ a l'espai s i el converteix en el rang $[0, 1]$ a l'espai s' . Així, si per exemple $s_0 = 0,9$, s realment es mourà entre 0,9 i 1 encara que s' tindrà llibertat per ocupar un rang entre 0 i 1. Aquesta ampliació permet obtenir una sèrie que convergeixi molt més ràpidament. La Figura 35 mostra gràficament aquesta idea.



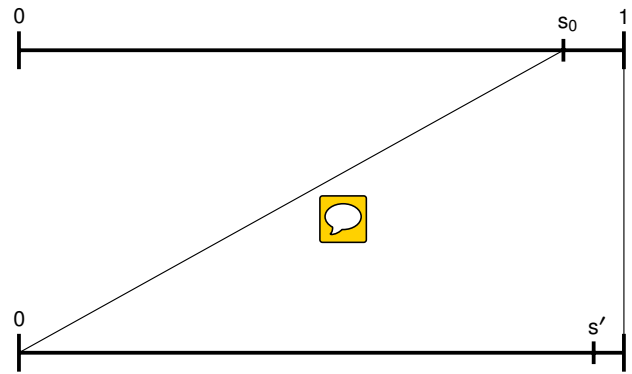


Figura 35. Ampliació que realitza el P-W

La idea al darrere de la transformació conforme resideix en avaluar sèries en les quals els aproximants de Padé convergeixin. Si en el cas exemplificat això passa per $s' = 0,95$, a partir l'Equació 132 es dedueix que $s = 0,995$. D'aquest mode el P-W tracta d'apropar-se a $s = 1$ a partir de solucions parcials **que convergeixen**.



El P-W està pensat per dur a terme diverses ampliacions d'aquesta mena, de fet, tantes com faci falta. Cada un d'aquests passos s'anomenarà graó. Primer es dedueixen les expressions per un graó i llavors es generalitza. Se segueix la formulació original. L'adaptació del P-W a la formulació compacta implica retardar a cada graó algunes expressions, i en aquest cas, el mètode es veu perjudicat.

6.1. Primer graó

Es desenvolupen les equacions del P-W a partir de la formulació original, ja que en comptar amb $V[0] = 1$ i $Q[0] = 0$ les expressions se simplifiquen, i sobretot, permeten plantejar un algoritme escalable. També, es tracta de replicar un sistema d'equacions com el de l'algoritme original: una matriu constant a tots els passos i que només es factoritza una vegada per cada graó, un vector amb les incògnites d'ordre c i un vector calculable amb coeficients d'ordre $c - 1$ o inferior.

De moment es treballa amb la formulació compacta, és a dir, que el bus oscil·lant forma part del mateix vector que els busos PQ i PV. La fragmentació de la matriu d'admitàncies en $Y^{(a)}$ i $Y^{(b)}$ es deixa per més endavant.

6.1.1. Busos PQ

El desenvolupament pels busos PQ comença amb el balanç d'intensitats a un bus i . Els factors de la dreta de la igualtat s'incrusten, el que implica que el seu càlcul es retardi un pas:

$$\sum_j Y_{ij} V_j(s) = -s Y_{sh,i} V_i(s) + s \frac{S_i^*}{V_i^*(s^*)}. \quad (\text{Eq. 133})$$

A partir d'ara, per comoditat les expressions de l'estil $X^*(s^*)$ es converteixen a $X^*(s)$ perquè s ha de ser forçosament real. El mètode parteix de $s = 0$ i avança cap a $s = 1$ sempre al llarg de l'eix real (Trias, 2018). Aleshores es realitza la transformació conforme de la variable s , tal com es dedueix de l'Equació 132. També s'introdueix una nova sèrie de tensió per cada bus incògnita:

$$\begin{aligned} s &= s_0 + s'(1 - s_0), \\ V_i(s) &= V_i'(s') V_i(s_0), \end{aligned} \quad (\text{Eq. 134})$$

on:

$V_i'(s')$: nova sèrie de tensió a calcular.

$V(s_0)$: sèrie de tensió inicial avaluada a s_0 . És una solució parcial.



De forma que la combinació de les Equacions 133 i 134 dona peu a:

$$\sum_j Y_{ij} V_j'(s') V_j(s_0) = -(s_0 + s'(1 - s_0)) Y_{sh,i} V_i'(s) V_i(s_0) + (s_0 + s'(1 - s_0)) \frac{S_i^*}{V_i'^*(s') V_i^*(s_0)}. \quad (\text{Eq. 135})$$

Cada costat de l'equació es multiplica per $V_i^*(s_0)$ per tal fer-lo desaparèixer del denominador de l'últim sumand:

$$\sum_j Y_{ij} V_j'(s') V_j(s_0) V_i^*(s_0) = -(s_0 + s'(1 - s_0)) Y_{sh,i} V_i'(s) |V_i(s_0)|^2 + (s_0 + s'(1 - s_0)) \frac{S_i^*}{V_i'^*(s')}. \quad (\text{Eq. 136})$$

Es reordenen termes per veure per què el penúltim terme és conflictiu fins a cert punt:

$$\begin{aligned} \sum_j Y_{ij} V_j'(s') V_j(s_0) V_i^*(s_0) + s_0 Y_{sh,i} V_i'(s) |V_i(s_0)|^2 &= -s'(1 - s_0) Y_{sh,i} V_i'(s) |V_i(s_0)|^2 \\ &+ s_0 \frac{S_i^*}{V_i'^*(s')} + s'(1 - s_0) \frac{S_i^*}{V_i'^*(s')}. \end{aligned} \quad (\text{Eq. 137})$$

Tots els sumands de la dreta de l'igual, excepte un, es troben multiplicats per s' ; així el seu ús queda retardat i no intervenen els coeficients del mateix ordre dels de l'esquerra de l'igual. En el penúltim terme això no passa, de forma que $V_i'^*(s')$ es troba al denominador i això complica la resolució. Una solució és:

$$s_0 \frac{S_i^*}{V_i'^*(s')} = s_0 S_i^* V_i'(s') + s_0 S_i^* \left(\frac{1}{V_i'^*(s')} - V_i'(s') \right). \quad (\text{Eq. 138})$$

L'avantatge d'introduir aquesta aparent complicació es manifesta en tenir en compte que els primers termes de la sèrie $V_i'(s')$ han de valdre també 1, igual que es buscava per $V(s)$. Així, quan es calculen els primers coeficients de les incògnites, l'Equació 138 esdevé:

$$s_0 \frac{S_i^*}{V_i'^*(s')} = s_0 S_i^* V_i'(s'). \quad (\text{Eq. 139})$$

La sèrie $V_i'(s')$ es troba al numerador. Això permet progressar amb la construcció del sistema lineal d'equacions. Així, amb aquesta modificació l'Equació 137 passa a ser:

$$\begin{aligned} \sum_j Y_{ij} V_j'(s') V_j(s_0) V_i^*(s_0) + s_0 Y_{sh,i} V_i'(s) |V_i(s_0)|^2 - s_0 S_i^* V_i'(s') = \\ -s'(1-s_0) Y_{sh,i} V_i'(s) |V_i(s_0)|^2 + s'(1-s_0) \frac{S_i^*}{V_i'^*(s')} \\ + s_0 S_i^* \left(\frac{1}{V_i'^*(s')} - V_i'(s') \right). \end{aligned} \quad (\text{Eq. 140})$$

En aquest punt només falta desenvolupar el darrer terme. S'assumeix que $V_i[0] = 1$ de manera que en forma de coeficients:

$$s_0 S_i^* \left(\frac{1}{V_i'^*(s')} - V_i'(s') \right) \rightarrow s_0 S_i^* (-2V_i'^{(re)}[c] - \sum_{k=1}^{c-1} X_i'[k] V_i'^*[c-k]). \quad (\text{Eq. 141})$$



Amb tot això l'equació definitiva pels busos PQ en el primer graó és:

$$\begin{aligned} \sum_j Y_{ij} V_j'[c] V_j(s_0) V_i^*(s_0) + s_0 Y_{sh,i} V_i'[c] |V_i(s_0)|^2 - s_0 S_i^* V_i'[c] \\ + 2s_0 S_i^* V_i'^{(re)}[c] = -(1-s_0) Y_{sh,i} V_i'[c-1] |V_i(s_0)|^2 + (1-s_0) S_i^* X_i'[c-1] \\ + s_0 S_i^* \left(- \sum_{k=1}^{c-1} X_i'[k] V_i'^*[c-k] \right), \end{aligned} \quad (\text{Eq. 142})$$

que s'utilitza per a $c \geq 1$. Tal com en un principi interessava, a l'esquerra hi ha les incògnites d'ordre c i a la dreta termes que depenen de l'ordre $c-1$ o inferior.

6.1.2. Busos PV

La deducció de les equacions pels busos PV inicia també amb el sumatori d'intensitats en un bus i . La diferència amb els busos PQ està en el fet que la incògnita $Q_i(s)$ no es troba retardada en el càlcul:

$$\sum_j Y_{ij} V_j(s) = -s Y_{sh,i} V_i(s) + s \frac{P_i}{V_i^*(s)} - j \frac{Q_i(s)}{V_i^*(s)}. \quad (\text{Eq. 143})$$

En aquest tipus de bus s'introdueixen les tres expressions següents:

$$\begin{aligned} s &= s_0 + s'(1 - s_0), \\ V_i(s) &= V_i(s_0) V_i'(s'), \\ Q_i(s) &= Q_i(s_0) + Q_i'(s'), \end{aligned} \quad (\text{Eq. 144})$$

on les dues primeres són idèntiques que les utilitzades pels busos PQ. En aquest cas es crea una nova sèrie de potència reactiva $Q_i'(s')$ per cada un dels busos PV, que se sumen a la solució parcial de reactiva. Aleshores s'introdueixen les expressions de l'Equació 144 a l'Equació 143. Amb unes quantes manipulacions directes en resulta:

$$\begin{aligned} \sum_j Y_{ij} V_j(s_0) V_i^*(s_0) V_i'(s') + (s_0 + s'(1 - s_0)) Y_{sh,i} |V_i(s_0)|^2 V_i'(s') &= s_0 \frac{P_i}{V_i^*(s')} \\ + s'(1 - s_0) \frac{P_i}{V_i^*(s')} - j \frac{Q_i(s_0)}{V_i^*(s')} - j \frac{Q_i'(s')}{V_i^*(s')} &= \Psi, \end{aligned} \quad (\text{Eq. 145})$$

on Ψ equival al costat de la dreta de la igualtat, que s'ha de desenvolupar. Tots aquells sumands que no depenen de s' passen per una transformació com la dels busos PQ:

$$\Psi = s'(1 - s_0) \frac{P_i}{V_i^*(s')} - j \frac{Q_i'(s')}{V_i^*(s')} + (s_0 P_i - j Q_i(s_0)) \left(\frac{1}{V_i^*(s')} - V_i'(s') \right) + (s_0 P_i - j Q_i(s_0)) V_i'(s'). \quad (\text{Eq. 146})$$

Així, els termes que contenen incògnites de l'ordre a calcular es mouen al costat esquerre de l'Equació 145, mentre que a la dreta hi apareixen les expressions que s'anul·len a l'hora

d'obtenir els primers coeficients:

$$\begin{aligned} \sum_j Y_{ij} V_j(s_0) V_i^*(s_0) V_j'(s') + s_0 Y_{sh,i} |V_i(s_0)|^2 V_i'(s') - s_0 P_i V_i'(s') + j Q_i(s_0) V_i'(s') = \\ -s'(1-s_0) Y_{sh,i} |V_i(s_0)|^2 V_i'(s') + s'(1-s_0) \frac{P_i}{V_i'^*(s')} \quad (\text{Eq. 147}) \\ + (s_0 P_i - j Q_i(s_0)) \left(\frac{1}{V_i'^*(s')} - V_i'(s') \right) - j \frac{Q_i'(s')}{V_i'^*(s')}. \end{aligned}$$

Ara només manca desfer-se dels denominadors on apareix la tensió d'incògnita. Això implica realitzar algunes convolucions, amb la qual cosa en forma de termes s'arriba a:

$$\begin{aligned} \sum_j Y_{ij} V_j(s_0) V_i^*(s_0) V_j'[c] + s_0 Y_{sh,i} |V_i(s_0)|^2 V_i'[c] - s_0 P_i V_i'[c] + j Q_i(s_0) V_i'[c] \\ + 2(s_0 P_i - j Q_i(s_0)) V_i'^{(re)}[c] + j Q_i'[c] = -(1-s_0) Y_{sh,i} |V_i(s_0)|^2 V_i'[c-1] \\ + (1-s_0) P_i X_i'[c-1] - j \sum_{k=1}^{c-1} Q_i'[k] X_i'[c-k] \\ + (s_0 P_i - j Q_i(s_0)) \left(- \sum_{k=1}^{c-1} X_i'[k] V_i'^*[c-k] \right). \quad (\text{Eq. 148}) \end{aligned}$$

S'observa que l'Equació 148, que és la pròpia dels busos PV des del punt de vista de balanç d'intensitats, s'assimila molt a la **pròpia** dels PQ (Equació 142). Com que les incògnites d'ordre c depenen de termes d'ordre $c-1$ o inferior, quan $c=0$ la dreta de la igualtat és nul·la. Això permet que les noves tensions siguin unitàries i que el primer terme de potència reactiva esdevingui 0.

Cal deixar clar que a l'Equació 142 el terme $2s_0 S_i^* V_i'^{(re)}[c]$ és inexistent per $c=0$. Succeeix el mateix per l'expressió $2(s_0 P_i - j Q_i(s_0)) V_i'^{(re)}[c]$ de l'Equació 148, mentre que $j Q_i'[0]$ és nul. D'aquesta manera la inicialització és idèntica a la de la formulació original del MIH base.

Pel que fa als mòduls de voltatge dels busos PV, en un principi es plantejava:

$$V_i(s) V_i^*(s^*) = 1 + s(W_i - 1). \quad (\text{Eq. 149})$$

Si en aquesta equació se li apliquen les transformacions, queda:

$$V_i(s_0) V_i'(s') V_i^*(s_0) V_i'^*(s') = 1 + (s_0 + s'(1-s_0))(W_i - 1), \quad (\text{Eq. 150})$$

que pot no ser consistent amb $V_i'[0] = 1$. Per això, és necessari convertir-la en:

$$|V_i(s_0)|^2 V_i'(s') V_i'^*(s') = |V_i(s_0)|^2 + s' (W_i - |V_i(s_0)|^2). \quad (\text{Eq. 151})$$

D'aquesta manera es garanteix que l'Equació 151 mantingui coherència amb $V_i'[0] = 1$. Resulta necessari assumir que d'entrada $|V_i(s_0)| \neq 1$. L'Equació 151 es pot simplificar en:

$$V_i'(s') V_i'^*(s') = 1 + s' \left(\frac{W_i}{|V_i(s_0)|^2} - 1 \right). \quad (\text{Eq. 152})$$

El plantejament de les equacions com a tal s'acaba aquí. Tot i això, convé compactar més les expressions per facilitar la comprensió del mètode i afavorir la seva programació. Se simplifiquen les expressions per mitjà de canvis de variable. A més, a la implementació se separa en part real i imaginària i el bus oscil·lant es tracta per separat.

6.1.3. Compactació

Igual que a la formulació original, es considera que només hi ha un bus oscil·lant en tot el sistema. Aquest bus també passa per la transformació de tensions:

$$V_w(s) = V_w(s_0) V_w'(s'). \quad (\text{Eq. 153})$$

Altres cops es necessita que el primer coeficient de la nova sèrie $V_w'(s')$ valgui 1. De no ser així, el desenvolupament anterior queda invalidat. De manera que en aïllar $V_w'(s')$ i en tenir present que $s = s_0 + s'(1 - s_0)$, la nova tensió del bus oscil·lant s'incrusta així:

$$V_w'(s') = 1 + s' \frac{(1 - s_0)(V_w - 1)}{1 + s_0(V_w - 1)}, \quad (\text{Eq. 154})$$

on per descomptat es compleix que $V_w'[0]$ valgui 1.

D'acord amb Trias (2018) es crea el paràmetre Γ_i :

$$\begin{aligned} \Gamma_{i \in PQ} &= s_0 S_i^*, \\ \Gamma_{i \in PV} &= s_0 P_i - j Q_i(s_0). \end{aligned} \quad (\text{Eq. 155})$$

Quant a la matriu d'admitàncies, tal com s'exposa a la formulació original, està composta per $Y^{(b)}$ i per $Y^{(a)}$. De fet, a les Equacions 142 i 148 la matriu Y queda multiplicada per les solucions

parcials. Per això s'introdueix el canvi de variable:

$$\begin{aligned}\hat{Y}_{ij}^{(a)} &= Y_{ij}^{(a)} V_j(s_0) V_i^*(s_0), \\ \hat{Y}_{ij}^{(b)} &= Y_{ij}^{(b)} V_j(s_0) V_i^*(s_0),\end{aligned}\quad (\text{Eq. 156})$$

on ara s'estima que $\hat{Y}^{(a)}$ és asimètrica però no hi ha motius per assegurar que $\hat{Y}^{(b)}$ sigui simètrica.

Per lluitar contra l'asimetria de la matriu $\hat{Y}^{(b)}$ s'ha de tenir present que si es desitja que tots els primers coeficients de tensió siguin 1, tant de l'Equació 142 com de l'Equació 148 es dedueix:

$$\sum_j \hat{Y}_{ij}^{(b)} * 1 + s_0 Y_{sh,i} * 1 * |V_i(s_0)|^2 - \Gamma_i * 1 = 0, \quad (\text{Eq. 157})$$

és a dir, que permet conèixer quant val la suma de qualsevol fila:

$$\sum_j \hat{Y}_{ij}^{(b)} * 1 = -s_0 Y_{sh,i} * 1 * |V_i(s_0)|^2 + \Gamma_i * 1. \quad (\text{Eq. 158})$$

Així, s'ha de restar aquesta expressió a algun terme de la fila i. Llavors, la suma dels elements d'una fila serà nul·la, tal com interessa per fixar que $V'[0] = 1$. S'escull modificar els elements que conformen la diagonal:

$$\begin{aligned}\hat{Y}_{ij}^{(b)} &= \hat{Y}_{ij}^{(b)} & \text{si } j \neq i, \\ \hat{Y}_{ij}^{(b)} &= \hat{Y}_{ij}^{(b)} - \sum_j \hat{Y}_{ij}^{(b)} * 1 & \text{si } j = i.\end{aligned}\quad (\text{Eq. 159})$$

El procediment a seguir tant si i es refereix a un bus PQ com a un bus PV és idèntic. L'únic que canvia és el terme Γ_i , que segueix l'Equació 155.

Tanmateix, falta tenir en compte que en la formulació original la matriu d'admitàncies resultava $Y = Y^{(b)} + sY^{(a)}$. Com que s pateix la transformació de l'Equació 134, queda:

$$Y = Y^{(b)} + s_0 Y^{(a)} + s'(1 - s_0) Y^{(a)}. \quad (\text{Eq. 160})$$

Si a això se li afegeixen les modificacions per les quals han passat les matrius simètrica i

asimètrica, s'actualitzen de la següent forma:



$$\begin{aligned}\tilde{Y}^{(b)} &\equiv \tilde{Y}^{(b)} + s_0 \hat{Y}^{(a)}, \\ \hat{Y}^{(a)} &\equiv (1 - s_0) \hat{Y}^{(a)}.\end{aligned}\quad (\text{Eq. 161})$$

Es nota que igual que en el MIH base de la formulació pròpia (on no s'aplica el P-W), les matrius $Y^{(a)}$, on a indica asimetria, estan retardades. Consegüentment no influeixen a l'hora de calcular els **termes primers termes**, i com que $Y^{(b)}$ és simètrica, s'aconsegueix l'estat de referència. En aquest cas $\tilde{Y}^{(b)}$ resulta ser la matriu simètrica que es buscava i $\hat{Y}^{(a)}$ la matriu asimètrica. Aquesta última també queda retardada en el càlcul.

6.1.4. Algoritme

En aquest punt s'han adaptat les matrius d'admitàncies segons convenia i es disposa de les Equacions 142, 148 i 152. Convé plantejar de forma més explícita els passos en què consisteix l'algoritme resolutiu, així com esbrinar quines expressions intervenen en el sistema lineal d'equacions.

Pels busos PQ la dreta de l'igual de l'Equació 142, que s'anomena Ψ , esdevé:

$$\begin{aligned}\Psi_{i \in PQ} = & - \sum_j \hat{Y}_{ij}^{(a)} V_j' [c-1] - (1 - s_0) Y_{sh,i} V_i' [c-1] |V_i(s_0)|^2 + (1 - s_0) S_i^* X_i' [c-1] \\ & + s_0 S_i^* \left(- \sum_{k=1}^{c-1} X_i' [k] V_i'^* [c-k] \right).\end{aligned}\quad (\text{Eq. 162})$$



L'efecte d'afegir la matriu asimètrica ve a ser el mateix que afegir la injecció que provoquen els elements com transformadors de relació variable, encara que en el P-W queda multiplicada per $1 - s_0$. Això fa que les seves entrades no tinguin gaire pes. En el codi, els elements del tipus $\hat{Y}_{ij}^{(a)}$ es divideixen en aquells on els busos j són PQ i PV i per altre costat, en els elements que prenen l'índex del bus oscil·lant. El bus oscil·lant només intervé a l'ordre $c = 1$ i a $c = 2$, tal com posa de manifest l'Equació 154. Aquesta distinció no s'ha tingut en compte en el desenvolupament per no complicar més les expressions.

En els busos PV la dreta de l'igual de l'Equació 148 es converteix en:

$$\begin{aligned} \Psi_{i \in PV} = & - \sum_j \hat{Y}_{ij}^{(a)} V_j' [c-1] - (1-s_0) Y_{sh,i} |V_i(s_0)|^2 V_i' [c-1] \\ & + (1-s_0) P_i X_i' [c-1] - j \sum_{k=1}^{c-1} Q_i' [k] X_i' [c-k] \\ & + (s_0 P_i - j Q_i(s_0)) \left(- \sum_{k=1}^{c-1} X_i' [k] V_i'^* [c-k] \right). \end{aligned} \quad (\text{Eq. 163})$$

Anàlogament el bus oscil·lant també es pot separar explícitament de la matriu d'admitàncies simètrica. La matriu $\tilde{Y}^{(b)}$ encara conté la connexió amb el bus oscil·lant, que no és una incògnita. Per això cal fragmentar-la. En aquest aspecte el bus oscil·lant només apareix a l'ordre $c = 1$ perquè $\tilde{Y}^{(b)}$ no està retardada i $c = 0$ es correspon a l'estat de referència on no se soluciona directament cap sistema d'equacions.

La matriu $\tilde{Y}^{(b)}$ reduïda (sense connexió amb el bus oscil·lant) es denota per $\tilde{Y}^{(b,red)}$. L'Equació 162 esdevé:

$$\begin{aligned} \Psi_{i \in PQ} = & - \tilde{Y}_{iw}^{(b)} V_w' [c] - \sum_j \hat{Y}_{ij}^{(a)} V_j' [c-1] - (1-s_0) Y_{sh,i} V_i' [c-1] |V_i(s_0)|^2 \\ & + (1-s_0) S_i^* X_i' [c-1] + s_0 S_i^* \left(- \sum_{k=1}^{c-1} X_i' [k] V_i'^* [c-k] \right), \end{aligned} \quad (\text{Eq. 164})$$

on $\tilde{Y}_{iw}^{(b)}$ és l'admitància simètrica que enllaça amb l'oscil·lant. L'Equació 163 passa a ser:

$$\begin{aligned} \Psi_{i \in PV} = & - \tilde{Y}_{iw}^{(b)} V_w' [c] - \sum_j \hat{Y}_{ij}^{(a)} V_j' [c-1] - (1-s_0) Y_{sh,i} |V_i(s_0)|^2 V_i' [c-1] \\ & + (1-s_0) P_i X_i' [c-1] - j \sum_{k=1}^{c-1} Q_i' [k] X_i' [c-k] \\ & + (s_0 P_i - j Q_i(s_0)) \left(- \sum_{k=1}^{c-1} X_i' [k] V_i'^* [c-k] \right). \end{aligned} \quad (\text{Eq. 165})$$

Per a la implementació es calcula la part real i imaginària de Ψ_i , tal com es fa en les formulacions del MIH base.

Finalment, s'ha de refer el vector de l'esquerra de la igualtat, que s'anomena Θ , per determinar també els elements de la matriu del sistema. Segons Trias (2018) la seva estructura i dispersió es conserva respecte al MIH original. **No obstant això**, les seves entrades canvien però són les mateixes al llarg de tots els passos d'aquesta iteració del P-W. Així doncs, la matriu només s'ha de

factoritzar una vegada per graó.

Pels busos PQ es recupera l'Equació 142, s'apliquen els canvis anteriorment esmentats i se la converteix en:

$$\Theta_{i \in PQ} = \sum_j \tilde{Y}_{ij}^{(b,red)} V_j' [c] + 2\Gamma_i V_i'^{(re)} [c]. \quad (\text{Eq. 166})$$

Aquesta darrera equació és vàlida a condició que $c \geq 1$, és clar.

Pels busos PV s'arriba a una expressió molt similar amb la diferència que hi ha la incògnita de potència reactiva:

$$\Theta_{i \in PV} = \sum_j \tilde{Y}_{ij}^{(b,red)} V_j' [c] + 2\Gamma_i V_i'^{(re)} [c] + jQ_i' [c]. \quad (\text{Eq. 167})$$

Tant els termes de l'Equació 166 com els de l'Equació 167 es fragmenten també en part real i imaginària.

La matriu del sistema en forma de blocs és:

$$R = \begin{pmatrix} G + 2\Gamma^{(re)} & -B & 0 \\ B + 2\Gamma^{(im)} & G & 1 \\ \Upsilon & 0 & 0 \end{pmatrix} L, \quad (\text{Eq. 168})$$

on:

$\Gamma^{(re)}$: matriu diagonal formada per les parts reals dels paràmetres Γ_i .

$\Gamma^{(im)}$: matriu diagonal formada per les parts imaginàries dels paràmetres Γ_i .

G : part real de la matriu $\tilde{Y}^{(b,red)}$.

B : part imaginària de la matriu $\tilde{Y}^{(b,red)}$.

La resta de matrius són idèntiques a les de l'Equació 64. Els vectors R i L segueixen la mateixa ordenació, encara que ara R és definit per Ψ i L inclou les incògnites V' i Q' .

A tall d'exemple la Figura 36 compara com evoluciona la grandària dels termes amb el MIH base i amb el primer graó del P-W pel bus 1 de la xarxa de test Nord Pool.

S'observa com els termes que conformen la tensió V_1' s'empetiteixen més ràpidament. Així, aquesta nova sèrie millora pel que fa a la convergència. La solució final que proporciona el

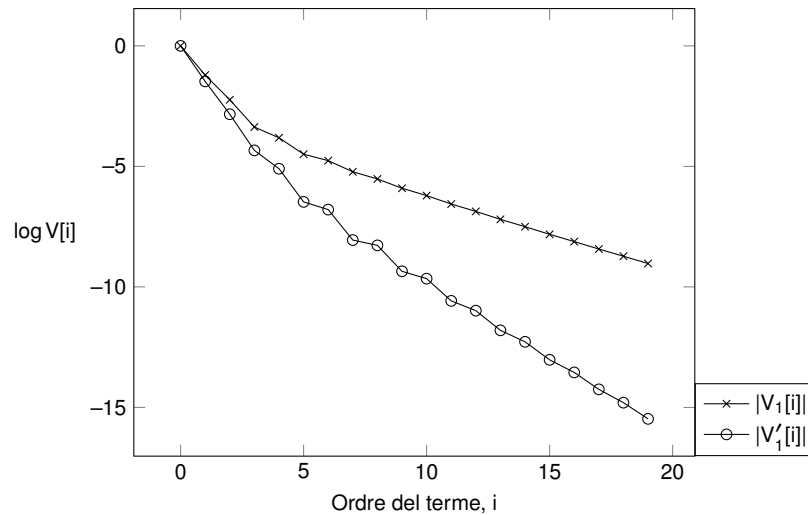


Figura 36. Evolució de les sèries de la tensió del bus 1 del Nord Pool per $s_0 = 0.5$

P-W de només un graó fa ús de les Equacions 134 i 144, on avalua les noves sèries a $s' = 1$ i d'aquesta manera obté les incògnites definitives $V(s)$ i $Q(s)$.

6.2. Generalització

A la Figura 36 la convergència dels termes s'accelera, tot i que no necessàriament l'error esdevé prou satisfactori. L'algoritme del P-W consisteix a trobar tantes sèries noves com faci falta per minimitzar l'error. Per això cal generalitzar el P-W per un graó qualsevol. De fet, com més mal condicionat es troba un sistema, habitualment més graons es necessiten.

Es comença amb les expressions per a dos graons, on la variable s obeeix:

$$s = s_0 + s'(1 - s_0) = s_0 + s'_0(1 - s_0) + s''(1 - s_0)(1 - s'_0). \quad (\text{Eq. 169})$$

En aquest cas, s'' intervé com a variable; s_0 i s'_0 són dades. En expandir l'Equació 169, es nota que tot plegat es pot compactar de forma general per mitjà de:

$$s = \gamma^{(r)} + s^{(r)}(1 - \gamma^{(r)}), \quad (\text{Eq. 170})$$

on:

r : indicador del graó actual. Al segon graó, $r = 2$.

$\gamma^{(r)}$: variable que agrupa els termes que no depenen de $s^{(r)}$. Per a dos graons val $s_0 + s'_0 - s_0 s'_0$.

S'ha d'actualitzar a cada graó.

$s^{(r)}$: variable complexa del graó actual. Quan es treballa amb dos graons, $s^{(r)}$ simbolitza s'' .

6.2.1. Busos PQ

Es procedeix a observar el patró que segueix l'equació que obeeixen els busos PQ al segon graó, encara amb la notació antiga:

$$\begin{aligned} \sum_j Y_{ij} V_j(s_0) V_i^*(s_0) V_j'(s'_0) V_j''(s'') + s_0 |V_i(s_0)|^2 Y_{sh,i} V_i'(s'_0) V_i''(s'') - s_0 S_i^* V_i'(s'_0) V_i''(s'') = \\ - (1 - s_0)(s'_0 + s''(1 - s'_0)) Y_{sh,i} |V_i(s_0)|^2 V_i'(s'_0) V_i''(s'') \\ + (1 - s_0)(s'_0 + s''(1 - s'_0)) \frac{S_i^*}{V_i'^*(s'_0) V_i''^*(s'')} + s_0 S_i^* \left(\frac{1}{V_i'^*(s'_0) V_i''^*(s'')} - V_i'(s'_0) V_i''(s'') \right). \end{aligned} \quad (\text{Eq. 171})$$



Similar al desenvolupament inicial, es multiplica a banda i banda per desfer-se del terme $V_i'^*(s'_0)$, que apareix en uns quants denominadors, i manipulant s'arriba a:

$$\begin{aligned} \sum_j Y_{ij} V_j(s_0) V_i^*(s_0) V_j'(s'_0) V_i'^*(s'_0) V_j''(s'') + s_0 |V_i(s_0)|^2 |V_i'(s'_0)|^2 Y_{sh,i} V_i''(s'') = s_0 \frac{S_i^*}{V_i''^*(s'')} \\ - (1 - s_0) s'_0 Y_{sh,i} |V_i(s_0)|^2 |V_i'(s'_0)|^2 V_i''(s'') + s''(1 - s_0)(1 - s'_0) \frac{S_i^*}{V_i''^*(s'')} \\ - s''(1 - s_0)(1 - s'_0) Y_{sh,i} |V_i(s_0)|^2 |V_i'(s'_0)|^2 V_i''(s'') + (1 - s_0) s'_0 \frac{S_i^*}{V_i''^*(s'')}. \end{aligned} \quad (\text{Eq. 172})$$

Llavors s'identifiquen els termes que porten $V_i''(s'')$ i que no es veuen retardats per tal d'enviar-los a l'esquerra de la igualtat. També es compacta més l'expressió (encara sense fer servir $\gamma^{(r)}$), i en resulta:

$$\begin{aligned} \sum_j Y_{ij} V_j(s_0) V_i^*(s_0) V_j'(s'_0) V_i'^*(s'_0) V_j''(s'') + (s_0 + s'_0(1 - s_0)) |V_i(s_0)|^2 |V_i'(s'_0)|^2 Y_{sh,i} V_i''(s'') = \\ - s''(1 - s_0)(1 - s'_0) Y_{sh,i} |V_i(s_0)|^2 |V_i'(s'_0)|^2 V_i''(s'') + s''(1 - s_0)(1 - s'_0) \frac{S_i^*}{V_i''^*(s'')} \\ + (s_0 + s'_0(1 - s_0)) S_i^* \left(\frac{1}{V_i''^*(s'')} - V_i''(s'') \right) + (s_0 + s'_0(1 - s_0)) S_i^* V_i''(s''). \end{aligned} \quad (\text{Eq. 173})$$

Si s'introdueix $\gamma^{(r)}$ l'Equació 173 esdevé:

$$\begin{aligned} \sum_j Y_{ij} V_j(s_0) V_i^*(s_0) V_j'(s_0') V_i'^*(s_0') V_j''(s'') + \gamma^{(r)} |V_i(s_0)|^2 |V_i'(s_0')|^2 Y_{sh,i} V_i''(s'') - \gamma^{(r)} S_i^* V_i''(s'') = \\ -s''(1 - \gamma^{(r)}) Y_{sh,i} |V_i(s_0)|^2 |V_i'(s_0')|^2 V_i''(s'') + s''(1 - \gamma^{(r)}) \frac{S_i^*}{V_i''^*(s'')} \\ + \gamma^{(r)} S_i^* \left(\frac{1}{V_i''^*(s'')} - V_i''(s'') \right). \end{aligned} \quad (\text{Eq. 174})$$

La implicació de treballar amb $\gamma^{(r)}$ es fa evident. L'expressió final es compacta. A més, $\gamma^{(r)}$ és la mateixa per a qualsevol bus en un graó donat. En afegir la notació al complet:

$$\begin{aligned} \sum_j Y_{ij} \prod_{k=0}^{r-1} V_i^{*(k)}(s_0^{(k)}) V_j^{(k)}(s_0^{(k)}) V_j^{(r)}(s^{(r)}) + \gamma^{(r)} \prod_{k=0}^{r-1} |V_i^{(k)}(s_0^{(k)})|^2 Y_{sh,i} V_i^{(r)}(s^{(r)}) - \Gamma^{(r)} V_i^{(r)}(s^{(r)}) = \\ -s^{(r)}(1 - \gamma^{(r)}) \prod_{k=0}^{r-1} |V_i^{(k)}(s_0^{(k)})|^2 Y_{sh,i} V_i^{(r)}(s^{(r)}) + s^{(r)}(1 - \gamma^{(r)}) \frac{S_i^*}{V_i^{*(r)}(s^{(r)})} \\ + \Gamma_i^{(r)} \left(\frac{1}{V_i^{*(r)}(s^{(r)})} - V_i^{(r)}(s^{(r)}) \right), \end{aligned} \quad (\text{Eq. 175})$$

on per les tensions s'ha seguit una notació similar. Per exemple $V_j^{(0)}(s_0^{(0)})$ representa $V_j(s_0)$.

6.2.2. Compactació

De forma similar al raonament que s'ha seguit per un graó, el P-W generalitzat també guanya en conveniència si les expressions es compacten. En aquest subapartat es detallen algunes definicions útils i necessàries que intervenen en el codi. Les matrius d'admitàncies fragmentades no s'han incorporat a les equacions definitives pels busos PQ i PV perquè en primer lloc es prefereix no entrar encara en més detall en el desenvolupament, i en segon lloc, la seva addició calca la que tenia lloc en el MIH bàsic.

Els nous termes $\Gamma^{(r)}$, que ja s'han usat a l'Equació 175, segueixen:

$$\begin{aligned} \Gamma_{i \in PQ}^{(r)} &= \gamma^{(r)} S_i^* . \\ \Gamma_{i \in PV}^{(r)} &= \gamma^{(r)} P_i - j \sum_{k=0}^{r-1} Q_i^{(k)}(s_0^{(k)}). \end{aligned} \quad (\text{Eq. 176})$$

Pel que fa a les matrius d'admitàncies, també cal fragmentar-les en simètrica i asimètrica. Tal com se'n desprèn de l'Equació 175:

$$\begin{aligned}\hat{Y}_{ij}^{(a)} &= Y_{ij}^{(a)} \prod_{k=0}^{r-1} V_i^{*(k)}(s_0^{(k)}) V_j^{(k)}(s_0^{(k)}), \\ \hat{Y}_{ij}^{(b)} &= Y_{ij}^{(b)} \prod_{k=0}^{r-1} V_i^{*(k)}(s_0^{(k)}) V_j^{(k)}(s_0^{(k)}),\end{aligned}\quad (\text{Eq. 177})$$

on igual que amb només un graó s'assumeix que tant $\hat{Y}^{(a)}$ com $\hat{Y}^{(b)}$ són asimètriques. Es posa remei a l'asimetria de la matriu $\hat{Y}^{(b)}$ mitjançant el càlcul de la suma de les seves files:

$$\sum_j \hat{Y}_{ij}^{(b)} = -\gamma^{(r)} \prod_{k=0}^{r-1} |V_i^{(k)}(s_0^{(k)})|^2 Y_{sh,i} + \Gamma_i^{(r)}, \quad (\text{Eq. 178})$$

on altre cop els primers coeficients de tensió de les sèries valen 1. Igualment es modifiquen els elements de la diagonal:

$$\begin{aligned}\hat{Y}_{ij}^{(b)} &= \hat{Y}_{ij}^{(b)} & \text{si } j \neq i, \\ \hat{Y}_{ij}^{(b)} &= \hat{Y}_{ij}^{(b)} - \sum_j \hat{Y}_{ij}^{(b)} * 1 & \text{si } j = i.\end{aligned}\quad (\text{Eq. 179})$$

Degut a la transformació que pateix s, les matrius resultants són:

$$\begin{aligned}\tilde{Y}^{(b)} &\equiv \hat{Y}^{(b)} + \gamma^{(r)} \hat{Y}^{(a)}, \\ \hat{Y}^{(a)} &\equiv (1 - \gamma^{(r)}) \hat{Y}^{(a)}.\end{aligned}\quad (\text{Eq. 180})$$


Cada cop $\gamma^{(r)}$ tendeix més cap a l'1, i així, els elements de la matriu asimètrica tenen cada vegada menys pes.

6.2.3. Busos PV

En el cas dels busos PV també es desenvolupen les expressions pel segon graó, i llavors es generalitzen. Es parteix d'una equació molt similar a la inicial dels PQ, tot i que aquí ja s'ha

eliminat $V_i'^*(s'_0)$ del denominador:

$$\begin{aligned} \sum_j Y_{ij} V_j(s_0) V_i^*(s_0) V_j'(s'_0) V_i'^*(s'_0) V_j''(s'') + (s_0 + s'_0(1 - s_0)) |V_i(s_0)|^2 |V_i'(s'_0)|^2 Y_{sh,i} V_i''(s'') = \\ - s''(1 - s_0)(1 - s'_0) Y_{sh,i} |V_i(s_0)|^2 |V_i'(s'_0)|^2 V_i''(s'') + s'_0(1 - s_0) \frac{P_i}{V_i''^*(s'')} \\ + s''(1 - s_0)(1 - s'_0) \frac{P_i}{V_i''^*(s'')} + \frac{s_0 P_i - j Q_i(s_0) - j Q_i'(s'_0)}{V_i''^*(s'')} - \frac{j Q_i''(s'')}{V_i''^*(s'')}. \end{aligned} \quad (\text{Eq. 181})$$

A continuació es  ipula l'Equació 181 amb l'objectiu de desfer-se de la incògnita del denominador, i queda:

$$\begin{aligned} \sum_j Y_{ij} V_j(s_0) V_i^*(s_0) V_j'(s'_0) V_i'^*(s'_0) V_j''(s'') + (s_0 + s'_0(1 - s_0)) |V_i(s_0)|^2 |V_i'(s'_0)|^2 Y_{sh,i} V_i''(s'') \\ - ((s_0 + s'_0(1 - s_0)) P_i - j(Q_i'(s'_0) + Q_i(s_0))) V_i''(s'') = \\ - s''(1 - s_0)(1 - s'_0) Y_{sh,i} |V_i(s_0)|^2 |V_i'(s'_0)|^2 V_i''(s'') + s''(1 - s_0)(1 - s'_0) \frac{P_i}{V_i''^*(s'')} \\ + ((s_0 + s'_0(1 - s_0)) P_i - j(Q_i'(s'_0) + Q_i(s_0))) \left(\frac{1}{V_i''^*(s'')} - V_i''(s'') \right) - j \frac{Q_i''(s'')}{V_i''^*(s'')}. \end{aligned} \quad (\text{Eq. 182})$$

La inclusió de $\gamma^{(r)}$ juntament amb la nova notació origina:

$$\begin{aligned} \sum_j Y_{ij} \prod_{k=0}^{r-1} V_i^{*(k)}(s_0^{(k)}) V_j^{(k)}(s_0^{(k)}) V_j^{(r)}(s^{(r)}) + \gamma^{(r)} \prod_{k=0}^{r-1} |V_i^{(k)}(s_0^{(k)})|^2 Y_{sh,i} V_i^{(r)}(s^{(r)}) - \Gamma^{(r)} V_i^{(r)}(s^{(r)}) = \\ - s^{(r)}(1 - \gamma^{(r)}) \prod_{k=0}^{r-1} |V_i^{(k)}(s_0^{(k)})|^2 Y_{sh,i} V_i^{(r)}(s^{(r)}) + s^{(r)}(1 - \gamma^{(r)}) \frac{P_i}{V_i^{*(r)}(s^{(r)})} \\ + \Gamma_i^{(r)} \left(\frac{1}{V_i^{*(r)}(s^{(r)})} - V_i^{(r)}(s^{(r)}) \right) - j \frac{Q_i^{(r)}(s^{(r)})}{V_i^{*(r)}(s^{(r)})}, \end{aligned} \quad (\text{Eq. 183})$$

on la potència reactiva també segueix la nomenclatura esmentada.

En últim lloc, quant als mòduls dels busos PV en el segon graó, se sap que obeeixen:

$$|V_i(s_0)|^2 |V_i'(s'_0)|^2 V_i''(s'') V_i''^*(s'') = |V_i(s_0)|^2 |V_i'(s'_0)|^2 + s''(W_i - |V_i(s_0)|^2 |V_i'(s'_0)|^2). \quad (\text{Eq. 184})$$

En lloc de desenvolupar l'equació incrustada amb s del MIH base, es comença amb una nova

equació d'aquest estil a cada ordre. Cal que sigui així per tal d'assegurar que el primer terme de tensió de cada sèrie valgui 1. L'Equació 184 es compacta i queda:

$$V_i''(s'')V_i^{''*}(s'') = 1 + s'' \left(\frac{W_i}{|V_i(s_0)|^2 |V_i'(s_0')|^2} - 1 \right), \quad (\text{Eq. 185})$$

que de forma genèrica es transforma en:

$$V_i^{(r)}(s^{(r)})V_i^{*(r)}(s^{(r)}) = 1 + s^{(r)} \left(\frac{W_i}{\prod_{k=0}^{r-1} |V_i^{(k)}(s_0^{(k)})|^2} - 1 \right). \quad (\text{Eq. 186})$$

Les Equacions 175, 183 i 186 tenen la mateixa forma que les Equacions 142, 148 i 152 del primer graó. Així, l'algoritme generalitzat recorre a unes expressions molt similars. La matriu del sistema té la mateixa forma. No es detalla pas a pas aquest algoritme resultant perquè manté molta similitud amb l'inicial.

L'avantatge d'utilitzar el P-W generalitzat està en la seva capacitat de minimitzar els errors. La Figura 37 il·lustra aquest concepte per la xarxa d'11 busos, on s'aplica el factor de càrrega $\lambda = 0,695$. En aquest estat el sistema es troba mal condicionat, ja que sense el P-W (MIH bàsic) l'error esdevé força millorable.

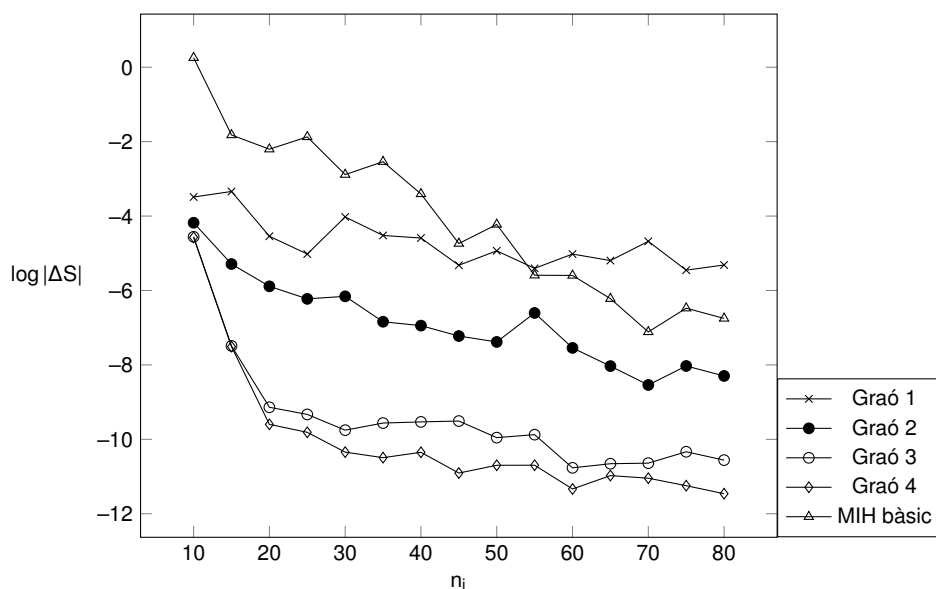


Figura 37. Error segons la profunditat al cas d'11 busos. $\lambda = 0,695$ i $s_0 = [0,72; 0,69; 0,78; 0,82]$

Amb un únic graó P-W s'aconsegueix una solució desfavorida, amb errors d'ordre 10^{-5} . Gairebé no disminueixen si s'usa una profunditat η_i major. Amb el segon graó s'aprecia que l'error disminueix si la profunditat augmenta, però si fa no es manté com el del MIH bàsic. S'assoleix un error de 10^{-8} amb uns 80 termes a cada sèrie. Quan s'utilitzen tres graons hi ha

una millora molt destacable, ja que l'error disminueix ràpidament amb pocs coeficients, mentre que amb el quart graó s'assumeix que l'error és prou satisfactori. Val entorn 10^{-12} . D'aquí la motivació d'utilitzar el P-W. Es parteix d'una solució parcial que conté massa error i s'arriba a un resultat plausible.

Incrementar la profunditat del MIH bàsic sembla millorar la solució. Si més no, així es deduiria a partir la Figura 37. Sovint aquest és un recurs vàlid, però quan el sistema a estudiar es troba mal condicionat arriba un punt en què no influeix positivament. Per exemple, si s'utilitzen sèries de 300, 400 o 500 coeficients, l'error del MIH bàsic resulta de l'ordre de 10^{-8} . Per tant, queda estancat. L'única forma que s'ha trobat per reduir-lo es basa justament a utilitzar el P-W.

6.2.4. Punt d'avaluació de les solucions parcials

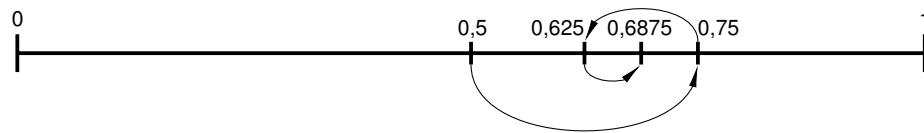
És imprescindible utilitzar unes s_0 adients. En efecte, els valors que prenen influeixen molt en el resultat final del P-W. Si són valors extremadament petits es requereixen més graons, mentre que si resulten massa grans pot succeir que per més graons que s'utilitzin la solució amb prou feines millora.

El procediment a seguir consisteix a calcular les sèries de tensió amb el MIH base. Aleshores, s'avaluen els seus aproximants de Padé. Es computa la diferència de tensió de cada bus si s'utilitzen precisament els dos últims aproximants majors possibles, que pel teorema d'Stahl, han de formar part de la diagonal o estar-ne molt propers. És a dir, que l'ordre de numerador i denominador de les funcions racionals pràcticament hauria de ser igual.

Seguidament s'estableix una tolerància arbitrària, que s'assimila màxim error que es desitja. Si la diferència de tensió dels dos aproximants és inferior a la tolerància, s'incrementa s_0 fins just abans que se superi la tolerància. Si per contra la diferència de tensió és més gran que la tolerància, cal reduir s_0 fins que sigui lleugerament inferior. Essencialment aquest és un mètode d'assaig-i-error.

Per portar-lo a terme de forma metòdica es recomana fer servir la bisecció (Press et al. 2007). A tall d'exemple la Figura 38 mostra els primers passos que se segueixen per trobar un dels components del vector s_0 . Es nota que cada vegada els intervals es redueixen a la meitat. El procés s'atura quan es considera que la llargada d'un interval és prou petita.

En la majoria de casos succeeix que es comença amb una s_0 relativament petita i progressi-

Figura 38. Bisecció per conformar el vector s_0

vament s'apropa cap a la unitat. La sèrie obtinguda a l'últim graó s'avalua a $s^{(r)} = 1$. A partir l'Equació 170 s'observa que això causa que $s = 1$, que és el valor en què es desitjava avaluar les sèries inicialment.



7. Circuit en contínua i càrrega no lineal

Fins aquest punt s'ha plantejat el mètode d'incrustació holomòrfica per resoldre sistemes elèctrics de potència trifàsics. Com s'ha presentat, aquests contenen busos PQ, PV molt habitualment un únic bus oscil·lant. S'han modelitzat els elements que hi intervenen, com les línies de transmissió i els transformadors que uneixen busos.

No obstant això, hi ha sistemes o parts d'aquests sistemes que treballen amb contínua. Per exemple, a vegades s'utilitza el corrent continu d'alta tensió (HVDC). Altres inclouen elements com bateries, equips d'electrònica de potència, plaques solars fotovoltaïques, etc. Això motiva a ampliar el camp d'aplicació del mètode d'incrustació holomòrfica descrit amb anterioritat.



En aquest capítol es tracten un parell d'exemples que permeten il·lustrar l'aplicació del MIH amb sistemes d'altra mena. Un d'ells resulta un circuit simple que inclou un díode i una càrrega a potència constant. S'alimenta a partir d'una font de tensió contínua. L'altre exemple incorpora una làmpada de descàrrega alimentada amb alterna, en què es contemplen els harmònics.

7.1. Díode amb càrrega a potència constant

Per aplicar el mètode d'incrustació holomòrfica en una situació en què s'opera en contínua es parteix d'un circuit com el de la Figura 39.

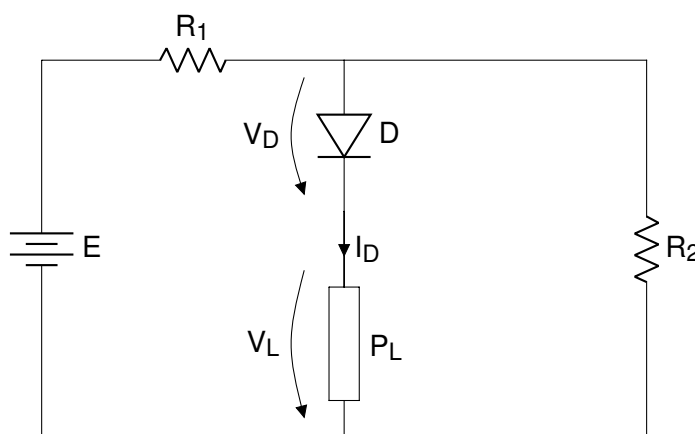


Figura 39. Esquema del circuit amb càrrega a potència constant

Com s'observa, està conformat per una bateria, dues resistències, un díode i una càrrega darrere el díode que demana una potència constant. Les seves dades apareixen a la Taula 3.



La resolució d'un circuit d'aquesta mena, igual que amb el flux de potència dels sistemes de



Magnitud	Valor
E	5,0 V
R ₁	2,0 Ω
R ₂	3,0 Ω
P _L	1,2 W

Taula 3. Valors dels components del circuit de la Figura 39

potència trifàsica, busca obtenir les tensions a tots els busos. Una vegada aquestes són conegudes, la resta de variables es calculen sense complicació. En primera instància es modelitza el díode per mitjà de l'equació de Shockley. S'ha assumit que es tracta d'un díode de germani:

$$I_D = I_s(e^{\frac{V_D}{V_T}} - 1), \quad (\text{Eq. 187})$$

on:

I_D : intensitat que circula a través del díode.

I_s : corrent de saturació. En aquest exemple s'ha escollit de $5 \mu\text{A}$.

V_T : tensió tèrmica, d'uns 26 mV.

Hi ha dues equacions més que caracteritzen el circuit. Una és la referent al balanç d'intensitats al nus que connecta les tres branques del circuit:

$$I_D + \frac{V_D + V_L}{R_2} = \frac{E - (V_D + V_L)}{R_1}. \quad (\text{Eq. 188})$$

La darrera equació té a veure amb la càrrega a potència constant, que precisament, es defineix per la seva potència:

$$P_L = V_L I_D. \quad (\text{Eq. 189})$$

En aquest punt cap de les equacions està incrustada. El següent pas consisteix a definir les incògnites V_D , V_L i I_D com a sèries. Així, l'Equació 189 esdevé:

$$P_L = V_L(s) I_D(s). \quad (\text{Eq. 190})$$

D'aquesta equació interessa aïllar la tensió, que pel primer ordre segueix:



$$V_L[0] = \frac{P_L}{I_D[0]}. \quad (\text{Eq. 191})$$

La resta de termes que la conformen obeeixen:

$$V_L[i] = \frac{-\sum_{k=0}^{i-1} V_L[k] I_D[i-k]}{I_D[0]}. \quad (\text{Eq. 192})$$

Per altra banda, l'equació 188 s'incrusta de manera que l'ús les tensions V_D i V_L queda retardat:

$$I_D(s) + s \frac{V_D(s) + V_L(s)}{R_2} = \frac{E}{R_1} - s \frac{V_D(s) + V_L(s)}{R_1}. \quad (\text{Eq. 193})$$

Per tant, el primer terme de la sèrie I_D només depèn de la tensió E i la resistència R_1 . Expressat en termes, al primer ordre s'obté:



$$I_D[0] = \frac{E}{R_1}, \quad (\text{Eq. 194})$$

mentre que als següents ordres:

$$I_D[i] = -(V_D[i-1] + V_L[i-1]) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (\text{Eq. 195})$$

on $i \geq 1$.

L'última equació que cal convertir és la de Shockley. Tot i no ser l'única manera d'atacar el problema, es deriva l'Equació 187 respecte a la variable s . Tant I_s com V_T són constants, així que:

$$\frac{I'_D(s)}{I_s} = \frac{V'_D(s)}{V_T} e^{\frac{V_D(s)}{V_T}}, \quad (\text{Eq. 196})$$

on $I'_D(s)$ i $V'_D(s)$ fan referència a les sèries $I_D(s)$ i $V_D(s)$ derivades. Tal com es dedueix de l'Equació 187, $e^{\frac{V_D(s)}{V_T}} = \frac{I_D(s)}{I_s} + 1$. Això se substitueix a l'Equació 196 i si es desenvolupa s'arriba a:

$$I'_D(s) V_T = V'_D(s) I_s + V'_D(s) I_D(s). \quad (\text{Eq. 197})$$

En forma de factors s'aïlla la tensió del díode i queda:

$$V_D[i] = \frac{i V_T I_D[i] - \sum_{k=0}^{i-1} k V_D[k] I_D[i-k]}{i(I_s + I_D[0])}, \quad (\text{Eq. 198})$$

que s'utilitza per a $i \geq 1$ i el seu càlcul fa ús de les sèries inicials, no de les derivades. El

primer terme de $V_D(s)$ no es calcula a través de l'Equació 197, sinó que s'obté de l'equació de Shockley, on es fixa que $s = 0$. Així:

$$V_D[0] = V_T \ln \left(1 + \frac{I_D[0]}{I_s} \right). \quad (\text{Eq. 199})$$

D'aquesta manera, el càlcul de les incògnites passa primer per utilitzar l'Equació 194 per llavors obtenir els primers termes de les tensions amb les Equacions 191 i 199. Seguidament es calcula el següent terme de la intensitat I_D amb l'Equació 195. Per la tensió de la càrrega a potència constant s'empra l'Equació 192, mentre que per la tensió del díode es recorre a l'Equació 198. El càlcul continua fins que l'error absolut és satisfactori.



Les solucions obtingudes pel problema plantejat són: $I_D=1,60056$ A, $V_L=0,74973$ i $V_D=0,32958$ V. Val la pena avaluar la convergència de les sèries i determinar si l'aplicació d'algun mètode de continuació analítica resulta beneficiós. Per exemple, la Figura 40 representa el gràfic de Domb-Sykes per la sèrie $V_D(s)$.

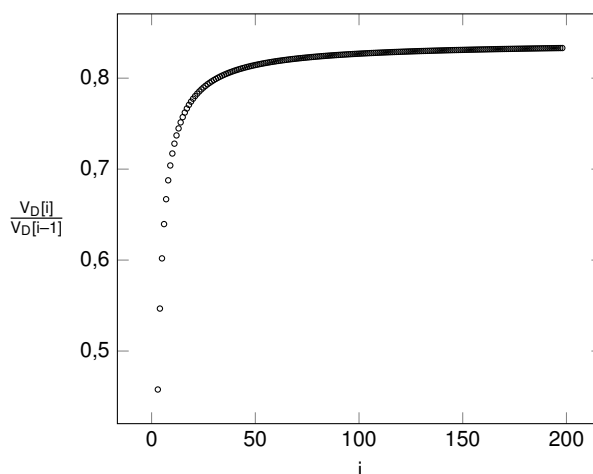


Figura 40. Gràfic de Domb-Sykes per la tensió $V_D(s)$

Com que l'eix vertical indica la inversa del radi de convergència, es dedueix que aquest és lleugerament superior a la unitat, pel que no és estrictament necessari utilitzar mètodes de continuació analítica. A més, tant per les sèries $I_D(s)$ i $V_L(s)$ el radi de convergència pràcticament esdevé igual.



A causa de la proximitat del radi de convergència a la unitat, es valora com varia la tensió en funció de l'ordre. Per un costat es recorre als aproximants de Padé com a mètode de continuació analítica, i per l'altre, es calcula el resultat final de la forma més compacte possible: amb la suma dels coeficients que la conformen. La Figura 41 mostra la diferència entre la tensió

obtinguda a aquell ordre i la tensió final V_D . Aquesta diferència es denota per ΔV_D .

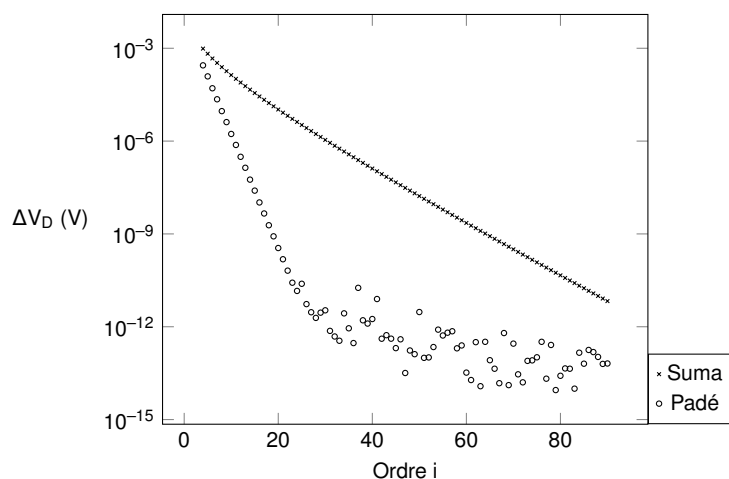


Figura 41. Error de tensió segons l'ordre, amb Padé i amb la suma de termes



Tal com s'observa, la solució obtinguda amb els aproximants de Padé tendeix cap a la solució final a major ritme que quan s'utilitza la suma de termes. Així doncs, la continuació analítica resulta beneficiosa, en el sentit que permet calcular menys coeficients. D'aquesta manera amb uns 20 termes s'aconsegueix un error d'uns 10^{-10} V mentre que amb la suma de coeficients aquest error val uns 10^{-5} V.

És clar que buscar solucions tan exactes no té gaire sentit des d'un punt de vista pràctic, ja que per exemple les resistències presenten toleràncies, varien amb la temperatura... Amb aquest exercici s'ha volgut, des d'un enfocament més teòric, mostrar que convé aplicar la continuació analítica fins i tot quan es resolen circuits amb elements que no estan presents a les típiques xarxes de test de sistemes de potència.

La Figura 41 posa de manifest un concepte important a l'hora de cercar el mínim error: la precisió. Tal com apunta Trias (2018), en representar els errors segons la profunditat de les sèries, sovint s'arriba a una gràfica que recorda a un pal d'hoquei: hi ha una primera part on l'error decau linealment (amb escala logarítmica) i llavors pràcticament es manté horitzontal. Tanmateix, això no és massa preocupant. En el càlcul dels aproximants de Padé amb el mètode matricial es produeix un fenomen d'autocorrecció d'errors.

Aquest fet també es fa evident en els sistemes elèctrics de potència com a tal. Rao (2017) detalla casos en què això succeeix; assolint errors de l'ordre de 10^{-15} a la xarxa IEEE118. A més, els mètodes recurrents també esdevenen numèricament estables.

7.2. Làmpada de descàrrega

Hi ha càrregues que quan se'ls aplica una tensió sinusoidal no consumeixen una intensitat que se ixi també un perfil ben bé sinusoidal. Aquest és el cas de rectificadors, variadors de freqüència, làmpades de descàrrega... S'anomenen càrregues no lineals. Quan la intensitat  **no sinusoidal** que consumeixen passa a través d'una impedància, provoquen tensions que tampoc són totalment sinusoidals. En descompondre aquestes formes d'ona en una suma de sinusoidals, hi ha una component fonamental i multitud de components harmòniques.

Els harmònics són problemàtics perquè redueixen l'eficiència del sistema elèctric, causen vibracions en motors, pertorben xarxes de comunicació, entre d'altres. Des d'una visió econòmica, poden provocar el disparament intempestiu d'interruptors, el que aturaria la producció. També comporten un augment de les pèrdues. Aleshores, pot fer falta pujar el nivell de potència contractada.

La resolució de sistemes formats per càrregues no lineals porta una complexitat afegida. A part de solucionar el sistema per la seva freqüència fonamental de 50 Hz, també s'ha d'obtenir la solució pels harmònics. Tot seguit es desenvolupa una variació del mètode d'incrustació holomòrfica per resoldre un sistema amb una làmpada de descàrrega. Es planteja com un dels procediments més simples: la penetració harmònica. Considera que el comportament de la càrrega no lineal només depèn de magnituds a la freqüència fonamental.

Per a la modelització de la làmpada de descàrrega s'utilitza un model descrit per Mesas (2009), que la caracteritza a partir de paràmetres invariants:

$$I_{1,N} = \sqrt{1 - v_{A,N}^2(2 - \lambda^2)}, \quad (\text{Eq. 200})$$

on:

$I_{1,N}$: mòdul de la component fonamental d'intensitat.

$v_{A,N}$: paràmetre invariant. Té a veure amb l'amplitud de la tensió que utilitza el model.

λ : constant que val $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$.

S'assumeix que la tensió fonamental de la làmpada de descàrrega no necessàriament compta

amb un angle nul. Així, la fase d'aquesta intensitat, que es denota per θ_1 , es defineix per:

$$\theta_1 = \theta_{V_c} - \frac{\pi}{2} + \arctan \left(\frac{v_{A,N} \sqrt{\lambda^2 - v_{A,N}^2}}{1 - v_{A,N}^2} \right), \quad (\text{Eq. 201})$$

on θ_{V_c} representa la fase de la tensió fonamental d'alimentació de la làmpada.

Quan es busquen les intensitats harmòniques es recorre a:

$$I_{h,N} = \frac{\lambda v_{A,N}}{h^2},$$

$$\theta_h = \theta_{V_c} + h \arcsin \left(\frac{v_{A,N}}{h} \right), \quad (\text{Eq. 202})$$

on:

h : ordre de l'harmònic.

$I_{h,N}$: mòdul d'intensitat de l'harmònic h .

θ_h : fase de la intensitat harmònica.

Es planteja un circuit d'exemple on hi ha una làmpada de descàrrega denotada per NL, una càrrega de la qual es coneix la seva potència activa i reactiva (equivaldria a un bus PQ) i un bus oscil·lant. Es mostra a la Figura 42.

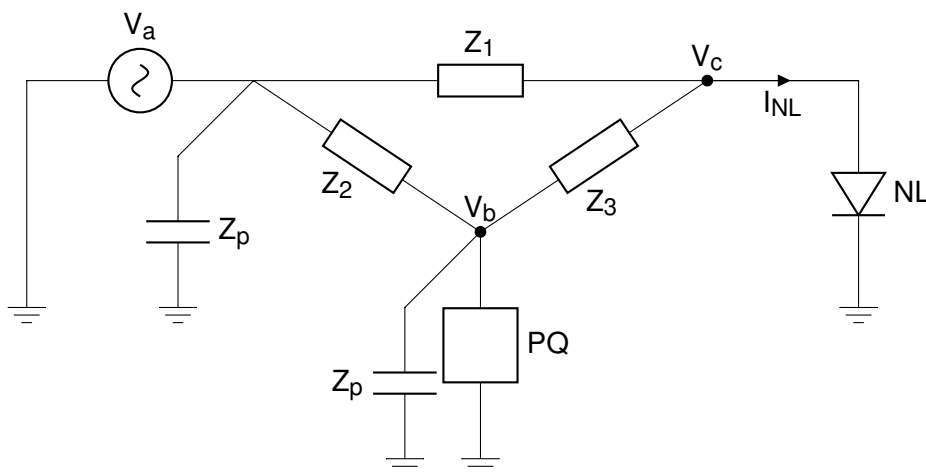


Figura 42. Circuit a estudiar amb làmpada de descàrrega

En alguns busos també hi ha les impedàncies constants Z_p . Més endavant la seva admitància s'anomenarà Y_p . S'observa que es tracta d'un sistema mallat per les impedàncies Z_1 , Z_2 i Z_3 . Els valors de les dades del sistema es plasmen a la Taula 4, expressats en tant per unitat.

Magnitud	Valor
Z_1	$0,1 + 0,5j$
Z_2	$0,02 + 0,13j$
Z_3	$0,023 + 0,1j$
Z_p	$-10j$
$V_{A,N}$	$0,5$
V_a	$1,1$
$P + jQ$	$-1-0,1j$

Taula 4. Valors de les dades del model de la Figura 42



Per resoldre el sistema, el primer pas i el més laboriós consisteix a formular les equacions per les quals es regeix el sistema a freqüència fonamental. Es comença amb la intensitat de la càrrega no lineal:

$$I_{NL} = I_{1,N} \cos \theta_1 + j I_{1,N} \sin \theta_1, \quad (\text{Eq. 203})$$

on el mòdul $I_{1,N}$ es coneix però no la fase θ_1 atès que la fase θ_{V_c} és desconeguda. L'Equació 201 es compacta en:



$$\theta_1 = \theta_{V_c} + \theta_x, \quad (\text{Eq. 204})$$



on θ_x es calcula amb l'Equació 201. L'angle θ_{V_c} rigorosament és l'angle final de la tensió V_c . Si es defineix com una sèrie per aplicar el mètode d'incrustació holomòrfica, obeeix:

$$\tan \theta_{V_c}(s) = \frac{V_c^{(im)}[0] + s V_c^{(im)}[1] + s^2 V_c^{(im)}[2] + \dots + s^n V_c^{(im)}[n]}{V_c^{(re)}[0] + s V_c^{(re)}[1] + s^2 V_c^{(re)}[2] + \dots + s^n V_c^{(re)}[n]}, \quad (\text{Eq. 205})$$

on cada un dels termes de la tensió del bus on es connecta la càrrega no lineal s'ha separat en part real i imaginària. L'últim coeficient pren l'índex n.

Amb l'Equació 204 s'expandeix l'Equació 203 que dona peu a:



$$I_{N,L} = I_{1,N}(\cos \theta_x \cos \theta_{V_c}(s) - \sin \theta_x \sin \theta_{V_c}(s)) + j I_{1,N}(\sin \theta_x \cos \theta_{V_c}(s) + \cos \theta_x \sin \theta_{V_c}(s)). \quad (\text{Eq. 206})$$

Llavors, amb la idea de no dependre a la vegada de $\cos \theta_{V_c}(s)$ i $\sin \theta_{V_c}(s)$, s'utilitzen les raons

trigonomètriques:

$$\begin{aligned}\sin \theta_{V_c}(s) &= \pm \frac{\tan \theta_{V_c}(s)}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta_{V_c}(s)}}, \\ \cos \theta_{V_c}(s) &= \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta_{V_c}(s)}}.\end{aligned}\quad (\text{Eq. 207})$$

És d'esperar que la fase de la tensió V_c romanguí propera a la de V_a , que és la tensió del bus oscil·lant. De fet, en tractar-se del bus oscil·lant, es fixa el seu angle a 0. Així, s'espera que l'angle θ_{V_c} final quedi al primer o al quart quadrant. Davant aquesta assumptió se selecciona el signe positiu de les expressions de l'Equació 207. Posteriorment s'ha de comprovar el compliment de tal suposició.

És interessant realitzar uns quants canvis de variable per facilitar el desenvolupament dels termes:

$$\begin{aligned}F(s) &= \tan \theta_{V_c}(s), \\ M(s) &= \sin \theta_{V_c}(s), \\ Y(s) &= \cos \theta_{V_c}(s).\end{aligned}\quad (\text{Eq. 208})$$

També convé utilitzar l'Equació 209 per reemplaçar el denominador present a l'Equació 207 i desfer-se d'un operador no lineal com és l'arrel gràcies a la introducció d' $F(s)$. Només cal calcular una arrel quadràtica pel primer terme de la sèrie $L(s)$.

$$L(s)L(s) = 1 + F(s)F(s). \quad (\text{Eq. 209})$$

A més, es crea una sèrie auxiliar per evitar que el càlcul d' $F(s)$ depengui d'una divisió:

$$X(s) = \frac{1}{V_c^{(re)}(s)}, \quad (\text{Eq. 210})$$

de mode que l'Equació 205 es converteix en:

$$F(s) = V_c^{(im)}(s)X(s), \quad (\text{Eq. 211})$$

on $V_c^{(im)}(s)$ simbolitza la sèrie de parts imaginàries de tensió que apareix al numerador de l'Equació 205.

Amb tot això, l'equació de càlcul de la intensitat de la càrrega no lineal també s'expressa en

funció d's:

$$I_{NL}(s) = I_{1,N}(\cos \theta_x Y(s) - \sin \theta_x M(s)) + jI_{1,N}(\sin \theta_x Y(s) + \cos \theta_x M(s)). \quad (\text{Eq. 212})$$

Pel que fa a les equacions que defineixen el sistema, primer es considera el balanç de corrents amb les incrustacions **pertinents** al bus en què es connecta la làmpada de descàrrega:



$$V_a Y_1 + V_b(s) Y_3 + V_c(s)(-Y_1 - Y_3) = s I_{NL}(s). \quad (\text{Eq. 213})$$

Es nota que el producte de la variable s per la sèrie $I_{NL}(s)$ implica que quan en un principi s'utilitza l'Equació 213, la intensitat de la càrrega no lineal no hi influeix. En altres paraules, es retarda el seu ús.

Del sumatori d'intensitats al bus PQ es dedueix:

$$s V_b(s) Y_p + Y_2(V_b(s) - V_a) + s Y_3(V_b(s) - V_c(s)) = s(P - jQ)R(s), \quad (\text{Eq. 214})$$

on altre cop no hi ha només una manera d'incrustar-la. S'ha decidit que sigui així per tal que $V_b(s)$ s'obtingui de l'Equació 214 sense massa complicació. La nova sèrie $R(s)$ segueix:

$$R(s) = \frac{1}{V_b^*(s^*)}, \quad (\text{Eq. 215})$$

i serveix per simplificar l'Equació 214. Amb aquestes equacions plantejades es passa a mostrar explícitament el càlcul dels coeficients de les diverses sèries. Pels termes d'ordre 0 es comença amb l'Equació 214. Se soluciona per $V_b(s)$:



$$V_b[0] = V_a. \quad (\text{Eq. 216})$$

Per la tensió $V_c(s)$ de l'Equació 213 s'arriba a:



$$V_c[0] = \frac{Y_1 V_a + Y_3 V_b[0]}{Y_1 + Y_3}. \quad (\text{Eq. 217})$$

La sèrie $R(s)$ només depèn de $V_b(s)$. Així, el seu primer terme esdevé:


$$R[0] = \frac{1}{V_b^*[0]}. \quad (\text{Eq. 218})$$

Es progressa amb el càlcul de sèries que influeixen en la fase de la càrrega no lineal:

$$\begin{aligned} X[0] &= \frac{1}{V_c^{(re)}[0]}, \\ F[0] &= X[0]V_c^{(im)}[0], \\ L[0] &= \sqrt{1 + F[0]F[0]}. \end{aligned} \quad (\text{Eq. 219})$$

Així, la resta de factors de les sèries que manca inicialitzar són:

$$\begin{aligned} Y[0] &= \frac{1}{L[0]}, \\ M[0] &= F[0]Y[0], \\ I_{NL}[0] &= I_{1,N}(\cos \theta_x Y[0] - \sin \theta_x M[0]) + jI_{1,N}(\sin \theta_x Y[0] + \cos \theta_x M[0]). \end{aligned} \quad (\text{Eq. 220})$$

A continuació es formula el càlcul dels factors amb índex $i \geq 1$. L'ordre en què es calculen els termes és idèntic al seguit fins ara. Per trobar la sèrie $V_b(s)$ els successius termes només depenen d'aquells que ja s'han trobat: 

$$V_b[i] = \frac{(P - jQ)R[i-1] - Y_3(V_b[i-1] - V_c[i-1]) - Y_p V_b[i-1]}{Y_2}. \quad (\text{Eq. 221})$$

Pels termes de la sèrie $V_c(s)$ s'empra:



$$V_c[i] = \frac{I_{NL}[i-1] - Y_3 V_b[i]}{-Y_1 - Y_3}. \quad (\text{Eq. 222})$$



S'observa que es necessita el càlcul de $V_b[i]$ precedeixi el de $V_c[i]$. Pel càlcul dels termes $R[i]$ s'aplica la convolució discreta:

$$R[i] = \frac{-\sum_{k=0}^{i-1} R[k]V_b^*[i-k]}{V_b^*[0]}. \quad (\text{Eq. 223})$$

Per la resta de sèries relacionades amb $\theta_{V_c}(s)$ es fa servir:

$$\begin{aligned}
 X[i] &= \frac{-\sum_{k=0}^{i-1} X[k]V_c^{(re)}[i-k]}{V_c^{(re)}[0]}, \\
 F[i] &= \sum_{k=0}^i V_c^{(im)}[k]X[i-k], \\
 L[i] &= \frac{\sum_{k=0}^i F[k]F[i-k] - \sum_{k=1}^{i-1} L[k]L[i-k]}{2L[0]}, \\
 Y[i] &= \frac{-\sum_{k=0}^{i-1} Y[k]L[i-k]}{L[0]}, \\
 M[i] &= \sum_{k=0}^i F[k]Y[i-k].
 \end{aligned} \tag{Eq. 224}$$

Finalment, els termes de la intensitat de la càrrega no lineal obeeixen:

$$I_{NL}[i] = I_{1,N}(\cos \theta_x Y[i] - \sin \theta_x M[i]) + j I_{1,N}(\sin \theta_x Y[i] + \cos \theta_x M[i]). \tag{Eq. 225}$$

Com s'ha pogut evidenciar, la major part de les sèries es dediquen a calcular l'angle de la tensió que rep la càrrega no lineal. Tanmateix, la complexitat d'adaptar el mètode d'incrustació holomòrfica queda justificada en el fet que, una vegada s'han inicialitzat els primers termes de les sèries, s'ha transformat un circuit regit per equacions no lineals en un conjunt d'equacions lineals. Això possibilita l'ús d'un esquema recurrent en què es construeix la solució.



També es vol apuntar que la potència que demana el bus PQ s'ha considerat que només és deguda a la component fonamental. Exactament no seria així, però es tracta d'una bona aproximació. S'utilitza a diversos plantejaments tradicionals de resolució del flux de potències amb harmònics (Rashid, 2018).



Per la component fonamental s'obtenen els resultats de la Taula 5.



Magnitud	Valor
I_{NL}	0,8382 $\angle -70,01^\circ$
V_c	0,9491 $\angle -6,53^\circ$
V_b	1,0031 $\angle -6,77^\circ$

Taula 5. Resultats del circuit amb làmpada de descàrrega a la freqüència fonamental

S'observa que en el pla complex la tensió V_c fonamental queda al quart quadrant. Així, l'assumpció d'escollir el signe positiu a les expressions de l'Equació 207 és correcta.

Els harmònics que injecta la làmpada de descàrrega són imparells. A partir l'Equació 202 es calcula la intensitat de cada harmònic en mòdul i fase. Llavors, les tensions surten d'una simple anàlisi nodal. S'ha tingut en compte que la part imaginària de les reactàncies és proporcional a l'ordre de l'harmònic, mentre que les impedàncies dels condensadors són inversament proporcionals. La Taula 6 capta els resultats pels primers harmònics.

Magnitud	h = 3		h = 5		h = 7		h = 9	
I_{NL}	0,0500	/22, 25°	0,0180	/22, 16°	0,0092	/22, 14°	0,0056	/22, 13°
V_a	0,0862	/112, 15°	0,0199	/111, 98°	0,0081	/111, 81°	0,0047	/111, 54°
V_b	0,0806	/112, 36°	0,0162	/112, 39°	0,0050	/112, 67°	0,0015	/113, 94°
V_c	0,0690	/113, 10°	0,003	/114, 50°	0,0003	/162, 10°	0,0021	/-71, 49°

Taula 6. Resultats del circuit amb làmpada de descàrrega, components harmòniques



En vistes dels resultats, els harmònics tenen poc pes. L'aproximació que la potència vingui deguda només per la fonamental és acceptable.



Per altra banda, igual que s'ha fet amb el circuit en contínua amb un díode i potència constant, s'avalua l'evolució de l'error. En aquest cas es computa el màxim error d'intensitat als busos en què es planteja l'equació del balanç d'intensitat. S'ha calculat amb els aproximants de Padé. Se'l compara amb l'obtingut a través de la resolució del sistema amb l'esquema iteratiu de Gauss-Seidel (Figura 43).

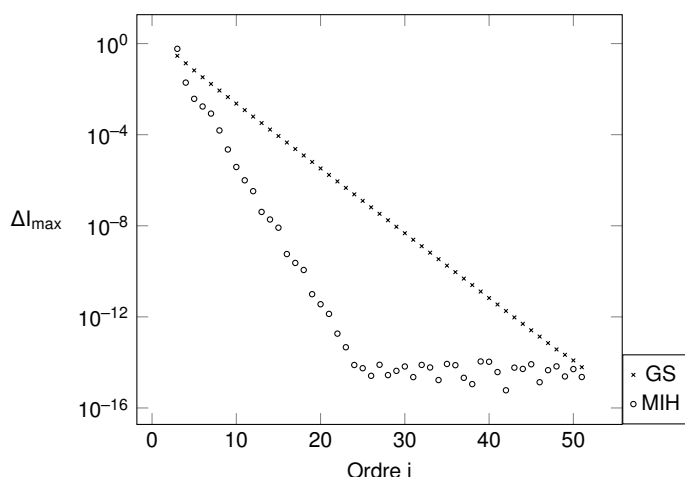




Figura 43. Error d'intensitat segons l'ordre, amb Padé pel MIH i amb Gauss-Seidel

De la Figura 43 se'n desprèn que tot i que els dos mètodes arriben a la solució, el mètode de Gauss-Seidel necessita pràcticament el doble de passos per arribar a l'error mínim. Altre cop amb els aproximants de Padé s'obté un perfil en què l'error es redueix ràpidament i llavors s'estabilitza.

La resolució del flux de potències amb harmònics tradicionalment s'ha abordat amb el mètode de Newton-Raphson. En aquest capítol no s'intenta justificar que el mètode d'incrustació holomòrfica és superior als iteratius. Simplement s'ha volgut oferir una explicació de com se'l pot adaptar per a sistemes amb altres càrregues. S'ha mostrat que també  a la solució i que en essència, el plantejament en forma de termes recorda al dels sistemes elèctrics de transport o distribució.

8. Programa

En aquest capítol es presenta l'estructura que segueix el codi per resoldre el flux de potències de les xarxes de test. Es concreten les parts que el conformen, la utilitat de cada una i com s'enllacen entre elles. També es fa referència a la forma de les matrius principals que hi intervenen. A causa de la seva simplicitat, no es tracta el codi del circuit en contínua ni de la làmpada de descàrrega. És el resultat de replicar directament les equacions.



La Figura 10 mostra el plantejament a alt  nivell del mètode. Aquí s'entra en detall amb la inicialització, amb el càlcul dels coeficients, així com amb l'ajust de la solució a través del mètode de Padé-Weierstrass. Els tres fitxers adjunts que s'especifiquen són els de la Taula 7, on es resumeixen les seves funcionalitats.

Fitxer	Finalitat
MIH_propi.py	Inicialització, càlcul de coeficients i solució final
MIH_original.py	Inicialització, càlcul de coeficients, solució final i P-W
Funcions.py	Padé, Sigma, Thévenin i mètodes recurrents

Taula 7. Fitxers principals amb les seves funcionalitats

El fitxer MIH_propi.py calcula els coeficients amb la formulació pròpia mentre que el MIH_original.py ho fa per mitjà de l'original. Cada un d'ells inicialitza els objectes perquè les matrius d'admitàncies que utilitzen són diferents. Per exemple, el fitxer MIH_propi.py no fragmenta entre matriu simètrica i asimètrica, mentre que el MIH_original.py sí. L'arxiu Funcions.py és cridat per obtenir la solució final a través dels mètodes recurrents i dels aproximants de Padé. També s'usa a l'hora de calcular els aproximants de Thévenin i els aproximants Sigma.

8.1. Inicialització

La inicialització del programa comença per carregar el fitxer .xlsx de la xarxa a estudiar. Les dades de tots i cada un dels sistemes estudiats  en amb un d'aquests arxius, que es divideix en dues parts. En una pestanya hi ha contingudes les dades de cada bus, que en funció de si és PQ, PV o oscil·lant se sap la seva  sió, potència activa o potència reactiva. En aquesta pestanya també hi apareixen les càrregues d'impedància constant. Aquestes participen en la generació de les matrius d'admitàncies.

A la segona pestanya es defineix la topologia del sistema. Per això, hi ha les dades de les línies i transformadors que enllacen entre busos inicials i busos finals. També s'inclou la relació de

transformació i el desfasament que introdueix. En la majoria dels casos la relació és unitària i el desfasament nul.

Tot plegat comporta que esquemàticament la inicialització sigui tal com es mostra a la Figura 44.

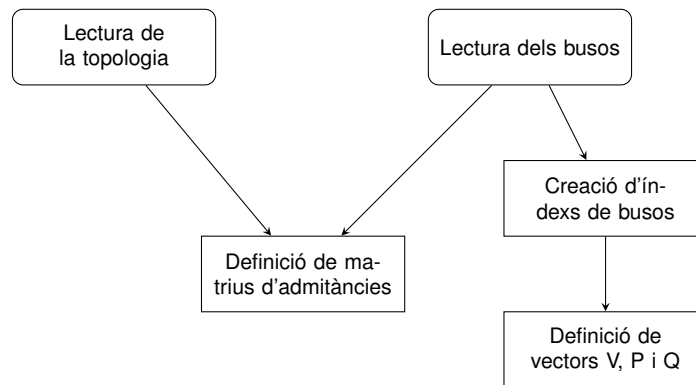


Figura 44. Esquema d'inicialització dels objectes

La lectura de les dades des dels fitxers .xlsx s'ha dut a terme mitjançant la llibreria Pandas. Pandas serveix per manipular i analitzar estructures de dades amb el que rep el nom de "dataframe". Per tal de treballar amb matrius, en la inicialització i pràcticament en tot el codi s'empra la llibreria Numpy. Aquesta integra funcions per operar amb matrius, com també permet calcular el complex conjugat, dividir en part real i imaginària una variable...

Les matrius d'admitàncies que intervenen a la formulació pròpia són tres: la que conté les branques en sèrie que connecten el bus oscil·lant amb els busos PQ i PV, que s'anomena Y_{sl} ; la que compta amb totes les branques en sèrie que veuen els busos PQ i PV, que es coneix pel nom d' Y_{red} ; i el vector vec_shunts , que agrupa les admitàncies degudes a les capacitats del model de les línies així com les càrregues d'impedància constant, totes amb el signe canviat. Equivalen a admitàncies en paral·lel.


La construcció d' Y_{sl} i vec_shunts s'efectua per observació. Això significa que es recorren totes les files del fitxer per tal de trobar quines admitàncies connecten a cada bus. La creació d' Y_{red} és més metòdica. Parteix de que tots els transformadors compten amb una relació de transformació unitària per llavors emprar:

$$Y_{serie} = ALA^T, \quad (Eq. 226)$$

on:



Y_{serie} : matriu d'admitàncies de les branques sèrie amb relacions de transformació unitàries.

A: matriu d'incidència. Compta amb tantes files com busos i tantes columnes com branques hi
 hagi. Les seves entrades són 0, 1 o -1. Defineix entre quins busos enllacen les branques.

L: matriu diagonal amb les admitàncies de les branques en sèrie.

La matriu Y_{serie} dona lloc a Y_{red} després d'afegir la contribució dels transformadors de relació variable per observació.

A la formulació original entren en joc cinc matrius d'admitàncies. Per un costat la matriu d'admitàncies de les branques en sèrie es divideix en dues: la Y_{series} i la Y_{tap} . La primera és simètrica perquè fixa totes les relacions de transformació a la unitat, mentre que la Y_{tap} compensa, és a dir, que conté el que falta sumar a Y_{series} per generar la matriu d'admitàncies total de les branques en sèrie. Les admitàncies en sèrie que connecten amb el bus oscil·lant també es fragmenten en dos: Y_{slack} i Y_{tapslack} . A la primera s'ha suposat que totes les relacions de transformació són unitàries i la segona serveix per compensar. Finalment, el vector vec_shunts s'anomena Y_{shunts} en aquesta formulació. Els seus signes no estan girats.



A la Taula 8 es recullen les matrius d'admitàncies de cada formulació segons el tipus, com a mode de resum. Com s'observa, la formulació original utilitza menys matrius d'admitàncies, pel que s'aconsegueix que sigui més compacta.

Fitxer	Sèrie amb l'oscil·lant	Sèrie entre PQ i PV	Paral·lel
MIH_propi.py	Y_{sl}	Y_{red}	vec_shunts
MIH_original.py	Y_{slack} , Y_{tapslack}	Y_{series} , Y_{tap}	Y_{shunts}

Taula 8. Matrius d'admitàncies segons el tipus i el fitxer



Per altra banda, és necessari emmagatzemar els índexs dels busos **segons** de quin tipus es tractin: oscil·lants, PQ o PV. Els vectors que els guarden són respectivament sl , pq i pv . Els dos últims conformen el vector pqpv , que agrupa els índexs dels busos PQ i PV. No obstant això, durant el càlcul de coeficients de les sèries, els busos oscil·lants són dades. Així doncs, no tots els índexs de pqpv són consecutius, el que més endavant complicaria el càlcul.

Per fer que sí que siguin consecutius, pq es converteix en pq_ , pv en pv_ i pqpv en pqpv_ . Això s'aconsegueix a partir d'ocupar l'índex del bus o dels busos oscil·lants pels índexs de busos PQ i/o PV.

Pel que fa als vectors de dades com la tensió, la potència activa o la potència reactiva, es llegei-

xen de la pestanya de busos. Cada dada es guarda en un vector diferent, que respectivament són vec_V , vec_P i vec_Q . Com que del bus oscil·lant es coneix la tensió en mòdul i angle, se'l tracta per separat. Els vectors de dades utilitzen l'ordenació pqp_v en la seva creació però durant l'execució del codi se seleccionen els elements amb la indexació del tipus pqp_v_. Totes les potències es multipliquen pel factor de càrrega λ , que en el codi se li associa la variable factor_carrega .

8.2. Càlcul de coeficients

El càlcul dels coeficients de les sèries és la part essencial del mètode d'incrustació holomòrfica. Tot i que aquest pas resulta la base del mètode, en un inici s'han de captar les dades del problema, dur a terme les definicions inicials, **calcular els coeficients** i llavors trobar els errors. També hi ha eines que proporcionen informació valuosa que val la pena avaluar, com els aproximants Sigma i els aproximants de Thévenin. En resum, el procediment es plasma a la Figura 45.

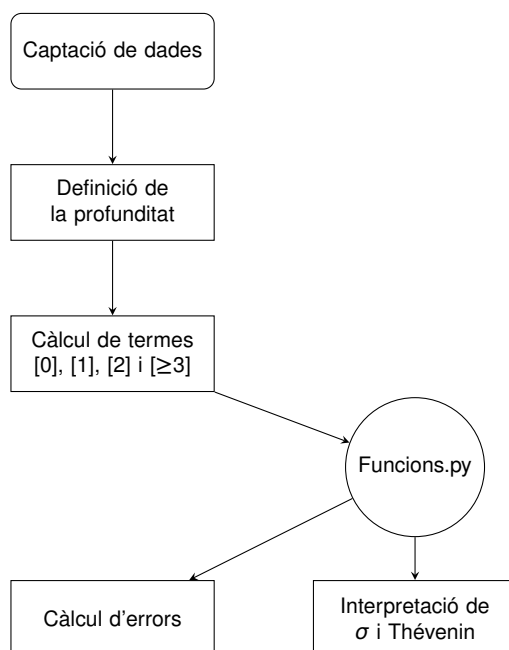


Figura 45. Esquema del procés de càlcul del mètode

L'etapa de captació de dades, que representa el punt de partida, simbolitza l'aprofitament de les matrius d'admitàncies, dels vectors de potències i tensions i dels índexs que s'han definit a la fase d'inicialització (Figura 44).

Aleshores, és molt important establir una profunditat adient, o sigui, un nombre de coeficients

suficient per extreure solucions amb poc error però no exagerat per reduir el temps de càlcul. Es podria adoptar l'enfocament de calcular a cada pas l'error, decidir si fa falta calcular el següent coeficient, i així successivament. Tanmateix, per accelerar les simulacions sovint s'opta per concretar una profunditat inicial. Llavors, en funció de l'error es valora si és adequada. En principi, com més mal condicionat es troba un sistema, més convé que la profunditat resulti elevada.

Pel que fa al càlcul de termes, les sèries desconegudes són les tensions dels busos PQ i PV, així com la potència reactiva dels busos PV. Però aquestes no són les úniques sèries, perquè la tensió es divideix en part real i imaginària. També hi intervé la tensió inversa conjugada, que al seu torn es fragmenta en real i imaginària. Així, hi ha un total de 7 tipus de sèries a calcular. Totes elles segueixen l'estructura de la Figura 46.

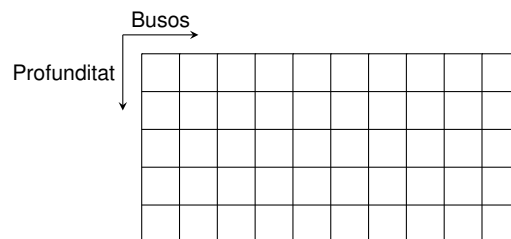


Figura 46. Estructura de les matrius de les sèries a calcular

A partir la Figura 46 es posa de manifest que a cada tipus de sèrie els coeficients d'un bus ocupen una columna. Aquests busos són els busos inicials, és a dir, els PQ i els PV. A la matriu de la sèrie de potència reactiva les columnes dels busos PQ no s'omplen. El càlcul dels coeficients comença emplenant la primera fila per a totes les sèries, llavors la segona, i així fins que es completen totes. En l'exemplificació de la Figura 46 hi hauria 10 busos inicials amb un total de 5 coeficients cada un. Realment es treballa amb profunditats superiors a aquesta. Es recomanen entre 20 i 40 termes.

La formulació original té la particularitat de retardar el càlcul de la potència reactiva en un pas. Això implica que els primers termes de reactiva es calculen a la mateixa etapa que s'obtenen els segons termes de tensió.

En les dues formulacions es distingeix entre les primeres profunditats i les següents. Per exemple, a la formulació original els primers termes (del tipus [0]) corresponen a l'estat de referència. A la formulació pròpia se soluciona un sistema d'equacions nodals relativament simple. En aquesta última formulació es generalitza a partir dels tercers termes (de l'estil ≥ 2), mentre

que a la formulació original el fet de dividir les matrius en simètrica i asimètrica comporta que l'algoritme es generalitzi a partir dels quarts termes (del tipus ≥ 3).

El càlcul dels coeficients exigeix resoldre un sistema lineal d'equacions a cada profunditat. En aquest aspecte, el mètode d'incrustació holomòrfica compta amb un avantatge clar davant el mètode de Newton-Raphson, ja que la matriu es manté constant al llarg de totes les profunditats. Per aquest motiu només es factoritza una vegada. La llibreria SciPy conté eines d'àlgebra lineal. Precisament és la que s'utilitza a l'hora de factoritzar la matriu del sistema.

A més a més, les matrius en forma de blocs que constitueixen la matriu general del sistema són disperses. Per reduir el temps de càlcul es defineixen primer les matrius en forma del tipus `coo` gràcies a la llibreria SciPy, és a dir, matrius en forma de coordenades. D'aquesta manera només s'emmagatzemen les entrades no nul·les. Per poder factoritzar la matriu del sistema aquestes matrius de blocs s'acaben convertint al tipus `csc`, que possibilita la realització d'operacions de forma eficient.

Tal com es mostra a la Figura 45, una vegada calculats els coeficients, es criden les funcions de l'arxiu `Funcions.py`. Aquestes funcions per una banda són els aproximants de Padé i els mètodes recurrents: Delta d'Aitken, transformacions de Shanks, Rho de Wynn, Èpsilon de Wynn, Theta de Brezinski i Eta de Bauer. En aquestes últimes funcions s'empra la llibreria Numba per reduir els temps de càlcul. D'entrada l'Eta de Bauer no es fa servir amb la formulació original perquè donat que els primers coeficients de reactiva resulten nuls, apareix una divisió per zero.

Totes aquestes funcions obtenen els valors de tensió i potència reactiva final, el que permet passar a calcular els errors de potència a cada bus i valorar si són acceptables. En cas que no ho fossin s'augmentaria la profunditat o es recorreria al P-W amb la formulació original. Aquesta validació no s'ha plasmat a la Figura 45 amb la idea de mantenir-la simple.

El fitxer `Funcions.py` també és cridat per obtenir els aproximants Sigma (i conseqüentment el gràfic Sigma), així com per calcular les tensions, tant de la branca estable com de la inestable, amb els aproximants de Thévenin. D'aquesta manera es diagnostica millor el sistema.

8.3. Padé-Weierstrass

El mètode de Padé-Weierstrass resulta l'eina definitiva per afinar la solució del flux de potències quan aquesta es calcula amb la formulació original i l'error és insatisfactori. En un inici parteix

de les sèries calculades amb el MIH bàsic, talment, el procés de càlcul dels termes de la Figura 45. A partir d'aquesta informació, que actua com una solució parcial, s'aconsegueix una solució final que en principi minimitza l'error.

La Figura 47 resumeix de forma esquemàtica les etapes per les quals passa. Tal com s'observa, també fa ús del fitxer `Funcions.py`.

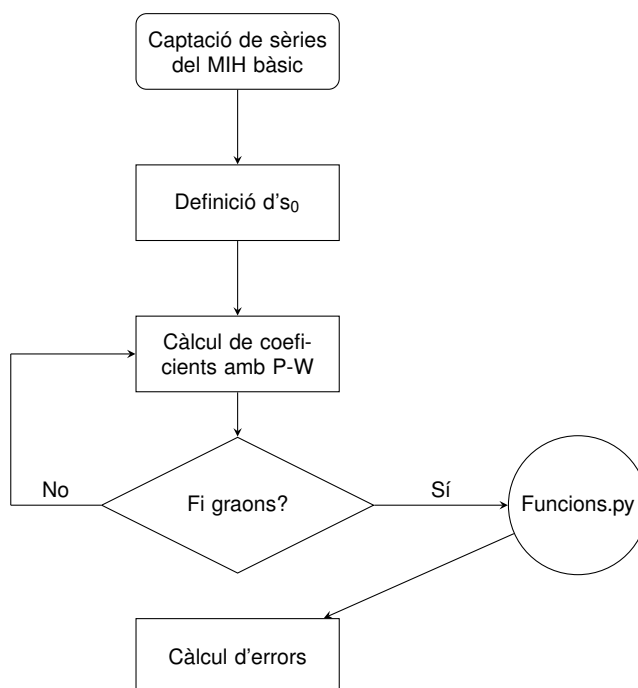


Figura 47. Esquema del procés que segueix el P-W



Per ser generalitzat el P-W necessita que els primers coeficients de tensió siguin tots unitaris i els de reactiva nuls. Aleshores, es tracta d'avaluar les sèries de tensió i reactiva inicials a s_0 . De fet, a la Figura 47 s_0 s'entén com un vector que agrupa les diverses s a les quals s'avaluen les solucions anteriors. Com s'explica al capítol dedicat al P-W, seleccionar s_0 correctament és imprescindible si es vol reduir l'error. No qualsevol valor empetiteix l'error fins a la tolerància establerta.

El vector s_0 es calcula amb un mètode d'assaig-i-error. Això significa que primer es treballa amb només un graó. Es porta a terme el procediment de la Figura 47 i a part d'obtenir l'error final, s'avalua si la diferència entre aproximants de Padé consecutius és inferior a la tolerància seleccionada. Si ho és, s'augmenta el valor d'aquell element d' s_0 . Si no ho és, se'l disminueix. Es repeteixen aquestes etapes fins a arribar al límit. Fins aquí s'ha concretat la primera entrada del vector s_0 . Els següents passos consisteixen a repetir-ho pels altres elements d' s_0 .

Així doncs, la llargada del vector s_0 és arbitrària. Cada un dels seus elements en què s'avaluen les sèries anteriors defineix un graó. Per això a la Figura 47 es calculen els coeficients fins que no hi ha més graons definits. Cal dir que al codi s'inclou el càlcul de les diferències entre els valors que proporcionen els aproximants de Padé per ajustar s_0 . En efecte, la Figura 47 es correspon al procés a seguir al final de tot, una vegada s_0 ja és conegut.

Durant el càlcul dels coeficients amb el P-W, a part de fragmentar les matrius, es defineixen 7 matrius tridimensionals. Aquestes es corresponen a les tensions (total, part real i part imaginària), a la inversa de les tensions conjugades (total, part real i part imaginària) i a la potència reactiva. Per exemple, la tensió es denota per U_p , on p indica que són les noves sèries. La forma d'aquestes matrius es copsa a la Figura 48.

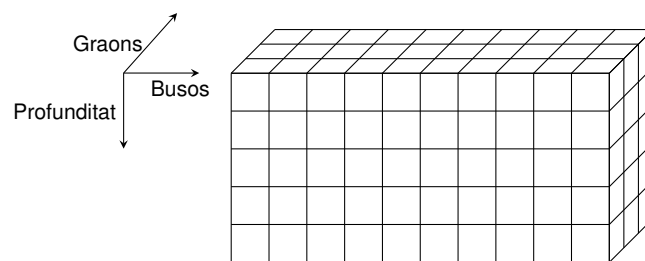


Figura 48. Estructura de les matrius de les noves sèries del P-W

En el P-W també s'defineix una profunditat arbitrària, que per conveniència sovint es fixa a la mateixa que la del mètode d'incrustació holomòrfica bàsic. Com s'observa, l'estructura de la matriu de la Figura 48 és idèntica a la de la Figura 46 amb la diferència que aquest cop resulta tridimensional, ja que també recull els coeficients per a cada graó. A l'exemple de la Figura 48 hi ha 10 busos amb una profunditat de 5 coeficients i 3 graons. Per omplir aquesta matriu, primer s'omple fila a fila el primer graó, llavors el segon, i així fins que s'acaben.

Com que el P-W es basa a emprar les sèries anteriorment obtingudes per avaluar-les a s_0 i tractar-les com a solucions parcials, es defineixen uns altres dos objectes rellevants. Són les matrius que agrupen les solucions parcials de tensió (U_{s0}) i de potència reactiva (Q_{s0}). La seva forma es plasma a la Figura 49.

Tal com se'n desprèn de la Figura 49, en aquest exemple també es treballa amb 10 busos i 3 graons. És clar, no hi ha una dimensió dedicada a la profunditat perquè es recullen les solucions parcials avaluades a s_0 , i no els termes que permeten arribar a aquesta solució.

La Figura 47 il·lustra que quan s'han calculat tots els coeficients de tots els graons, és moment

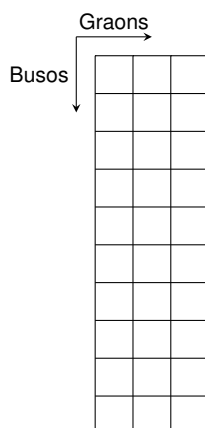


Figura 49. Estructura de les matrius de les solucions parcials

de cridar el fitxer `Funcions.py`. En aquest cas no s'aprofita per calcular els resultats finals amb els mètodes recurrents, obtenir els aproximants Sigma i els de Thévenin, sinó que només es busca avaluar l'última sèrie a $s = 1$. Per fer-ho, es podrien utilitzar els mètodes recurrents però la teoria del P-W es basa en els aproximants de Padé, així que es prefereix emprar aquesta última eina.

Finalment, en conèixer les tensions i potències reactives de l'últim graó avaluades a 1, s'efectua el producte d'aquestes per totes les respectives sèries anteriors i s'avalua l'error. En cas que l'error sigui inacceptable es construeix de nou el vector s_0 amb una altra tolerància, o es varia la profunditat si es creu convenient, per llavors repetir el càlcul sencer.

Al codi del P-W hi ha quatre matrius d'admitàncies rellevants. Aquestes són *Yahatred*, *Yahatw*, *Ybtildred*, *Ybtildew*. Les dues primeres corresponen a parts de la matriu $\hat{Y}^{(a)}$. En concret, *Yahatw* conté les connexions asimètriques amb el bus oscil·lant, mentre que *Yahatred* agrupa els elements per a la resta de busos, és a dir, els PQ i PV. Per la seva banda, *Ybtildew* representa els elements del tipus $\tilde{Y}_{iw}^{(b)}$. *Ybtildered* és la matriu simètrica reduïda als busos PQ i PV, que es denota per $\tilde{Y}^{(b,red)}$.

8.4. Incorporació al GridCal

Una part del codi en què es basa aquest treball s'ha integrat a la plataforma GridCal. GridCal és un programari de codi obert utilitzat per a temes de recerca i consultoria relacionada amb sistemes elèctrics de potència des de l'any 2015. Està concebut per permetre que sigui extensible segons les necessitats dels usuaris. A més, inclou una interfície gràfica. Igual que el codi desenvolupat en aquest treball, es troba escrit en Python.

L'autor del projecte va posar-se en contacte amb el creador del GridCal per comunicar-li que havia generat un codi capaç de resoldre el flux de potències amb el mètode d'incrustació holomòrfica, tant si hi havia busos PQ com PV. Posteriorment aquest codi es va incorporar a la versió 3.7.0 del GridCal. Segons Peñate (2020a), és sensat afirmar que aquest és el primer programari en codi obert fonamentat en el mètode d'incrustació holomòrfica que soluciona xarxes reals. A la Figura 50 apareixen els diversos mètodes resolutius del flux de potència de la versió 3.7.0 del GridCal.

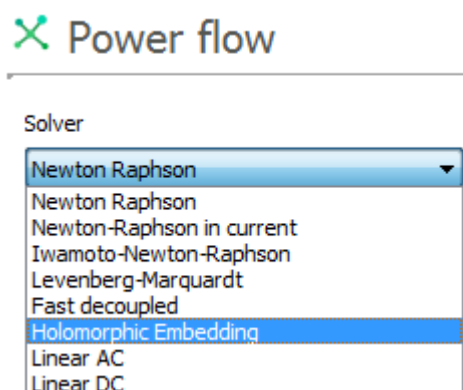


Figura 50. Mètodes resolutius del flux de potències amb què compta la versió 3.7.0 del GridCal

La formulació integrada és la formulació pròpia, que com s'explica en aquest treball, compta amb algunes limitacions al costat de la formulació original. També s'han inclòs els aproximants Sigma, que són inapropiats per a sistemes amb transformadors de relació variable. Aquests i altres aspectes a tractar es contemplen a l'apartat de treball futur, que s'ubica al capítol de les conclusions.

9. Xarxes de test inicials

Per validar el mètode d'incrustació holomòrfica i esbrinar les seves diferències respecte als mètodes tradicionals, s'han seleccionat sis xarxes de test: un sistema d'11 busos mal condicionat, les xarxes IEEE14, IEEE30 i IEEE118, el sistema Nord Pool de 44 busos i la xarxa Pegase2869 de 2.869 busos. En aquest capítol s'estudien sense canviar el percentatge de càrrega dels busos. En el següent, es modifica la càrrega per valorar les variacions.

El sistema d'11 busos mal condicionat va ser primer plantejat per Tripathy et al. (1982). Les dades que ofereixen de la topologia només contenen els elements de la matriu d'admitàncies. Bonini et al. (2015) mostren unes dades similars però més aclaridores, pel que s'utilitzen aquestes últimes. A l'hora de resoldre'l, en ser una xarxa amb relativament pocs busos, segons Kothari i Nagrah (2011) és sensat utilitzar el mètode de Gauss-Seidel. També se soluciona amb el Newton-Raphson i amb la formulació original del MIH, ja que compta amb transformadors de relació variable. Totes les potències s'han multiplicat per un factor de $\lambda = 0,5$ perquè de no ser així, el sistema ja des d'un principi no té solució.

La formulació pròpia del MIH també funciona per a sistemes amb relació variable. Tanmateix, els aproximants Sigma no són representatius. Per aquest motiu, quan hi ha transformadors de relació variable d'entrada es recorre a la formulació original.

Les xarxes IEEE14, IEEE30 i IEEE 118 contenen 14, 30 i 118 busos respectivament. La IEEE14 representa una part del sistema de potència elèctric de l'Oest Mitjà dels Estats Units que data del febrer de 1962. Per la seva banda, la IEEE30 simbolitza una fracció del mateix sistema el desembre de 1961, mentre que la IEEE118 ho fa el desembre de 1962 (Christie, 1993). Els fitxers de dades s'han extret de Peñate (2020b).

Com que el sistema IEEE14 es pot considerar de dimensions reduïdes, en un principi s'utilitza el GS, el NR i la formulació original del MIH perquè hi ha transformadors de relació variable. Per a la IEEE30 s'usa el NR i les dues formulacions del MIH. La IEEE118 es resol amb el NR i amb la formulació original del MIH.

La xarxa Nord Pool de 44 busos seleccionada es correspon a un model del sistema de transport que transcorre per Suècia, Noruega i Finlàndia. Se soluciona amb el NR i les dues formulacions del MIH. El fitxer de dades s'ha adaptat a partir dels de Peñate (2020b).

En últim lloc, la xarxa Pegase2869 de 2.869 busos és un sistema fictici que pretén representar amb exactitud la mida i la complexitat d'una part de la xarxa europea (Zimmerman et al. 2011). També s'ha partit de les dades de Peñate (2020b). Els resultats s'extreuen amb el MIH amb la formulació original i amb el NR. En aquest cas no es duu a terme un estudi detallat, sinó més aviat es mostra que el MIH és capaç de resoldre un sistema amb tants busos.

Cal afegir que en tots els sistemes en què s'utilitza el Newton-Raphson també s'obté la solució amb el desacoblat ràpid. En un principi s'empra el NR bàsic, però si no convergeix, s'opta pel multiplicador d'Iwamoto i pel mètode de Levenberg-Marquardt.

9.1. Diagnòstic

En primer lloc es vol determinar l'estat de càrrega global de les xarxes sense introduir canvis en els consums. Els gràfics Sigma permeten donar una idea qualitativa del sistema on en conjunt s'aprecia si la demanda de potència activa i reactiva té molt pes. Si els punts es concentren entorn el punt (0, 0) del gràfic, significa que la xarxa treballa lluny dels límits. A més, els aproximants Sigma quantifiquen si la solució és correcta, cosa que també es representa al gràfic.

A la Figura 51 es copen els gràfics Sigma de les xarxes de menor dimensió. D'ara per endavant s'hi dibuixen les línies que indiquen que la proporció de tensió amb la de l'oscil·lant és igual a 0,9 i 1,1, de mode que visualment s'entén a quines franges es troben els busos.

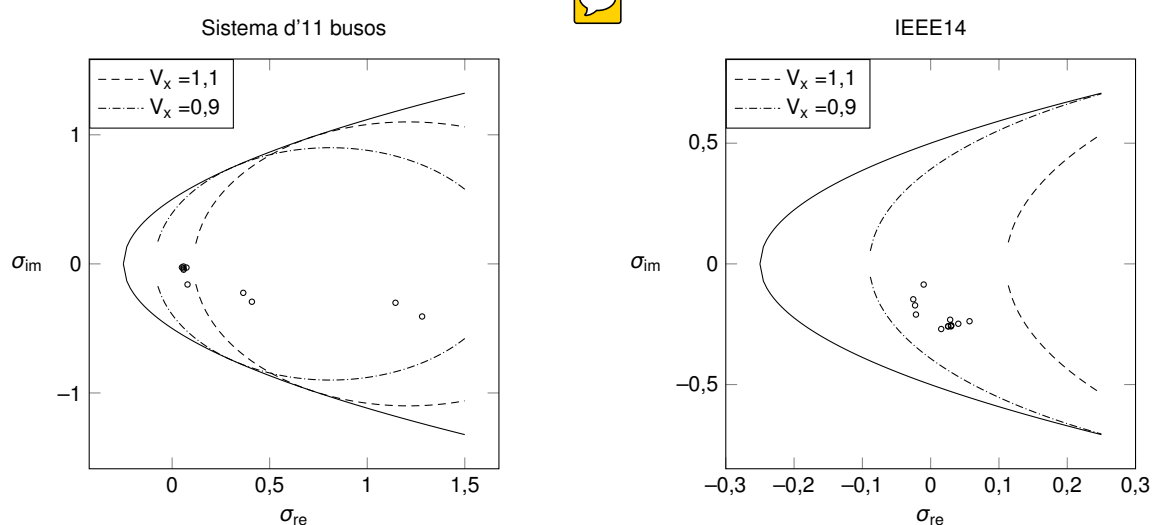


Figura 51. Gràfic Sigma del sistema d'11 busos i de la IEEE14

La xarxa IEEE14 presenta una distribució de punts típica d'un sistema ben condicionat. Tots

els busos es troben entre les franges de 0,9 i 1,1. A més, no es distancien gaire del punt (0, 0).



Per la seva banda, el sistema d'11 busos és en essència un sistema mal condicionat. Compta amb un total de set línies de transmissió i set transformadors, tots ells de relació variable. Aquestes relacions de transformació estan ajustades per sota la unitat, el que comporta que tal com s'observa a la Figura 51 les tensions de quatre busos siguin superiors a 1,1 vegades la del bus oscil·lant. El perfil de tensions del sistema és anormal perquè si bé alguns voltatges estan entorn la unitat, el bus 10 es troba a 1,759 pu.

La Figura 52 mostra els gràfics Sigma per les altres xarxes: la IEEE30, la Nord Pool, la IEEE118 i la Pegase2869.

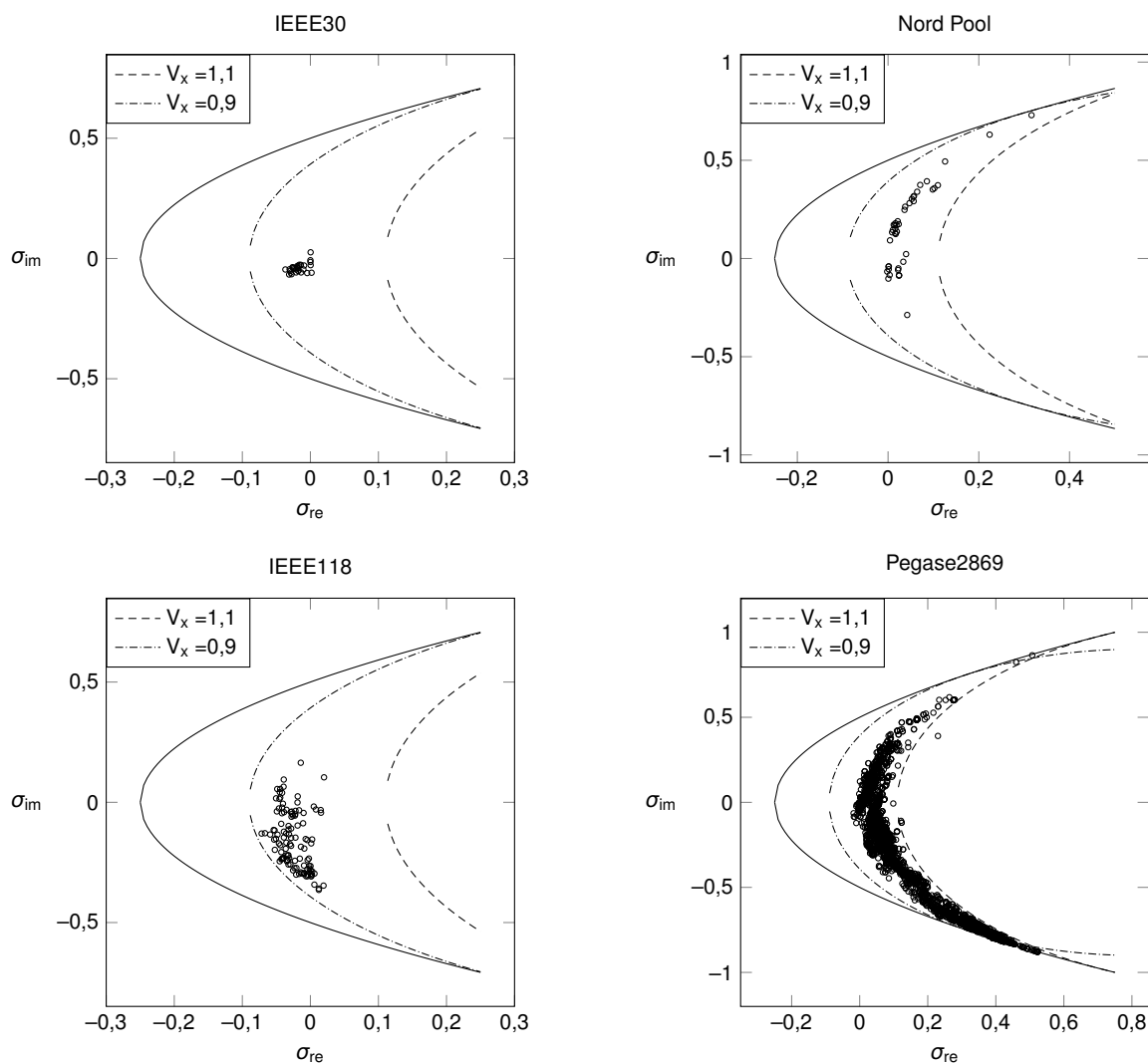


Figura 52. Gràfic Sigma de les xarxes IEEE30, la Nord Pool, IEEE118 i Pegase2869

La xarxa IEEE30 es troba molt poc carregada. Tots els busos presenten mòduls de tensió molt similars. Al cap i a la fi els punts queden concentrats a prop del (0, 0). Al sistema Nord Pool

els punts queden a prop de la part superior de la paràbola. Això indica que els busos en què la potència és més extrema es corresponen a busos on hi ha molta generació en lloc de molta demanda. En aquest aspecte es tracta d'un sistema anormal perquè sovint la tendència és contrària. Igual que a la xarxa IEEE30, tots els busos estan entre les línies de 0,9 i 1,1.

Al sistema IEEE118 altre cop tots els busos treballen entre 0,9 i 1,1 vegades el voltatge de l'oscil·lant, tot i que força més pròxims al límit de 0,9. S'observa que en conjunt als busos hi ha demanda de potència activa però no generació, ja que els punts del gràfic tendeixen cap al límit inferior. A la xarxa Pegase2869 el núvol de punts il·lustra que en bona part els busos també treballen dins uns marges de tensió acceptables. Hi ha una agrupació important de punts que freguen el límit inferior de la paràbola. Aquests són els més propers al col·lapse de tensions.

Per tal d'esbrinar si els mètodes de continuació analítica són necessaris, s'estudia el radi de convergència de les sèries. S'ha comprovat que les tensions d'un mateix sistema presenten radis de convergència semblants. La Taula 9 mostra per a cada xarxa seleccionada el major i el menor radi de les tensions. S'utilitzen les dues formulacions quan no hi ha transformadors de relació variable. S'utilitza una profunditat de 60 coeficients.

Formulació	Original		Pròpia	
Sistema	r_{\max}	r_{\min}	r_{\max}	r_{\min}
Cas d'11 busos	0,882	0,880	-	-
IEEE14	3,702	3,679	-	-
IEEE30	5,827	5,819	5,721	5,717
Nord Pool	1,917	1,912	1,881	1,878
IEEE118	2,944	2,370	-	-
Pegase2869	1,460	1,454	-	-

Taula 9. Mínims i màxims radis de convergència de les tensions dels sistemes en l'estat inicial

Els radis de convergència guarden relació amb els gràfics Sigma. Per exemple, el sistema d'11 busos és on són menors. La Figura 51 ja indica una distribució de punts molt escampats. En canvi, a la IEEE30 els punts es concentren a prop del (0, 0). S'obtenen els majors radis de convergència de tots els sistemes. En aquesta xarxa i en la Nord Pool els radis de convergència màxims i mínims són molt similar amb les dues formulacions.

Els resultats de la Taula 9 també posen de manifest que només cal emprar mètodes de continuació analítica en el sistema d'11 busos. En aquest sistema si se surten les tensions, el valor final no convergeix. Per exemple, la Figura 53 mostra la tensió del bus 10 que s'aconsegueix amb els aproximants de Padé i amb la suma de coeficients depenent de la profunditat.

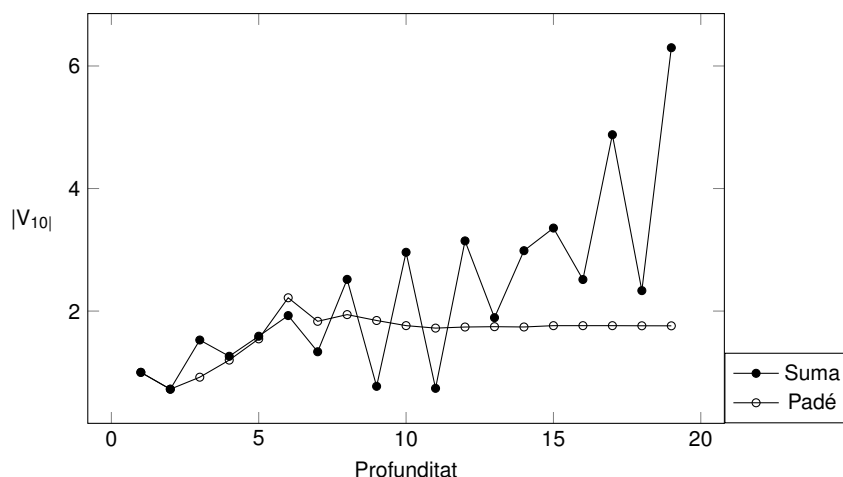


Figura 53. Evolució del mòdul de tensió del bus 10 del cas d'11 busos segons la profunditat

Encara que el valor a què s'arriba amb els aproximants de Padé és força diferent de la unitat, aconsegueixen convergir. Amb la suma de termes la solució divergeix. Com més s'incrementa la profunditat, més s'allunya la solució obtinguda amb la suma comparat amb la que generen els aproximants de Padé. En conclusió, la continuació analítica és necessària en aquest sistema.

En canvi, a la xarxa IEEE30 s'obté el perfil de la Figura 54 pel bus 29.

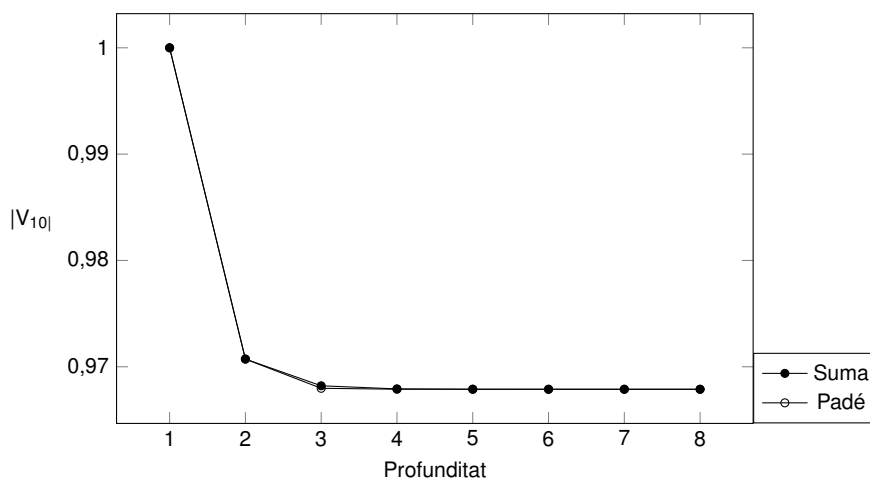


Figura 54. Evolució del mòdul de tensió del bus 29 de la IEEE30 segons la profunditat

No només de les dues maneres el voltatge convergeix, sinó que en tractar-se d'un sistema ben condicionat, ho fa força a major velocitat en comparació amb el cas d'11 busos. Igual que abans, les solucions s'igualen amb profunditats d'un i dos coeficients.



9.2. Comparació amb mètodes tradicionals

Una eina com els aproximants Sigma i el seu gràfic són útils per determinar a simple cop d'ull l'estat d'operació del sistema. No obstant això, són propis del mètode d'incrustació holomòrfica. Atès que els mètodes iteratius com el Gauss-Seidel, el Newton-Raphson i el desacoblat ràpid per definició no compten amb aquest recurs, es procedeix a solucionar els sistemes per primer comprovar que s'obté la solució, i en segon lloc, per tal de descobrir si d'algun mode s'intueix que el sistema opera molt carregat o poc.



A la Taula 10 es captura l'error màxim així com el nombre d'iteracions necessari per a cada sistema amb els mètodes iteratius esmentats. S'ha fixat un error màxim de 10^{-10} pu amb els resultats del NR i del FDLF. Pel GS, que se soluciona amb el PowerWorld, s'assumeix que l'error màxim és de 10^{-6} pu. El programa no indica més decimals, i per tant, no hi ha interès en l'error.

Sistema	Errors		Iteracions		
	NR	FDLF	GS	NR	FDLF
Cas d'11 busos	$2,94 \cdot 10^{-12}$	$8,28 \cdot 10^{-11}$	282	7	80
IEEE14	$8,86 \cdot 10^{-16}$	$6,90 \cdot 10^{-11}$	180	3	22
IEEE30	$4,48 \cdot 10^{-17}$	$9,52 \cdot 10^{-11}$	-	3	22
Nord Pool	$9,93 \cdot 10^{-11}$	$7,21 \cdot 10^{-11}$	-	3	20
IEEE118	$3,93 \cdot 10^{-12}$	$2,64 \cdot 10^{-11}$	-	3	14
Pegase2869	$3,25 \cdot 10^{-16}$	$8,96 \cdot 10^{-11}$	-	6	70

Taula 10. Errors obtinguts i iteracions necessàries en els sis sistemes seleccionats

A partir la Taula 10 s'observa que encara que hi hagi pocs busos, el GS requereix moltes iteracions pel cas d'11 busos i per la IEEE14. Es tracta d'un mètode amb poca utilitat per resoldre fluxos de potència que segons Kothari i Nagrath (2011) resulta menys fiable que el NR. D'ara per endavant no serà utilitzat.



El mètode de NR bàsic és el que menys iteracions necessita. Per la majoria de sistemes només n'hi fan falta 3 gràcies a la seva convergència quadràtica. A la xarxa Pegase2869 itera 6 vegades, segurament a causa de la seva dimensió. El cas d'11 busos, tot i ser el de menors dimensions, demana més iteracions que la resta de sistemes. Això dóna a pensar que es tracta d'un sistema mal condicionat. Aparentment en cap cas cal recórrer al multiplicador d'Iwamoto o al mètode de Levenberg-Marquardt perquè el NR bàsic convergeix i aconsegueix l'error desitjat.

Per altra banda, teòricament el FDLF necessita més iteracions que el NR però menys que el GS. Com s'aprecia a la Taula 10, altre cop al cas d'11 busos és on es requereixen més iteracions.

El cas d'11 busos mereix especial atenció. Encara que s'hagi reduït la càrrega a la meitat, es troba que amb el NR la solució convergeix a unes tensions extremadament baixes que corresponen a solucions que formen part de la branca inestable de la corba PV. A la Taula 11 es plasmen els mòduls de tensió obtinguts amb el NR bàsic, el FDLF i les variacions del NR com el multiplicador d'Iwamoto i el mètode de Levenberg-Marquardt (L-M). També hi apareixen els voltatges obtinguts amb les dues formulacions del MIH. Se segueix la nomenclatura dels busos tal com apareixen als fitxers de dades del MIH.

Bus	NR	FDLF	NR Iwamoto	NR L-M	MIH propi	MIH original
0	1,024	1,024	1,024	1,024	1,024	1,024
1	1,047	1,080	1,047	1,080	1,080	1,080
2	1,041	1,080	1,041	1,080	1,080	1,080
3	1,014	1,073	1,014	1,073	1,073	1,073
4	1,035	1,080	1,035	1,080	1,080	1,080
5	1,034	1,094	1,034	1,094	1,094	1,094
6	0,536	1,088	0,536	1,088	1,088	1,088
7	0,512	1,302	0,512	1,302	1,302	1,302
8	0,665	1,709	0,665	1,709	1,709	1,709
9	0,260	1,322	0,260	1,322	1,322	1,322
10	0,290	1,759	0,290	1,759	1,759	1,759

Taula 11. Mòdul de tensions del cas d'11 busos amb mètodes iteratius i amb MIH

Per una banda, el FDLF, el NR amb Levenberg-Marquardt i les dues formulacions del MIH porten a la mateixa solució. S'observa que tot i haver-hi transformadors de relació variable, els dos plantejaments del mètode d'incrustació holomòrfica arriben a voltatges idèntics. Les tensions dels darrers busos prenen valors molt distants de la unitat, el que provoca que el perfil de tensions en conjunt sigui anormal. De fet, guarda relació amb les relacions de transformació variable. Totes elles estan ajustades a valors per sota la unitat. Així, intuïtivament s'entén que les tensions dels busos PQ superin la del bus oscil·lant de bastant.

Per altra banda, el NR bàsic i el NR amb el multiplicador d'Iwamoto arriben a una solució que encara que matemàticament és possible, correspon a la tensió de la branca negativa o inestable de les corbes PV. Per confirmar això, la Taula 12 recull els mòduls de voltatge calculats amb els aproximants de Thévenin per una profunditat de 60 i les solucions del NR bàsic.

Bus	NR	Aprox. Thévenin
0	1,024	-
1	1,047	1,042
2	1,041	1,043
3	1,014	1,009
4	1,035	1,042
5	1,034	1,036
6	0,536	0,539
7	0,512	0,510
8	0,665	0,670
9	0,260	0,259
10	0,290	0,291

Taula 12. Mòdul de tensions del cas d'11 busos amb mètodes iteratius i amb MIH

Els aproximants de Thévenin no s'utilitzen per al voltatge del bus oscil·lant, atès que es tracta d'una dada. Per la resta de busos hi ha alguna diferència de decimals, però en general les dues solucions s'assimilen molt.

Segons Tripathy et al. (1982), el cas d'11 busos correspon a un sistema mal condicionat, no necessàriament perquè la càrrega sigui excessiva. Sense canviar els percentatges de càrrega, es va trobar divergent tant pel NR com pel FDLF. Justifiquen que el jacobià presenta un nombre de condició elevat. En el problema del flux de potències, el nombre de condició representa com varien les incògnites si el vector que conté els errors de potència canvia lleugerament. Un nombre de condició elevat implica que les incògnites experimentaran un gran canvi. Això complica l'obtenció de la solució.

El cas d'11 busos il·lustra la problemàtica de fer servir el mètode de Newton-Raphson. En un sistema mal condicionat el mètode pot convergir cap a una solució inestable que durant condicions d'operació normals no es donarà. Per contra, algunes de les seves variacions (com el FDLF i el NR L-M) assoleixen la solució correcta des del punt de vista d'operació del sistema. Conèixer el sistema permet fer-se una idea aproximada de la correcció de la solució, però no hi ha eines per confirmar-ho.

Contrari als mètodes iteratius, el MIH genera un gràfic Sigma que indica que tots els punts es troben dins la paràbola, i per tant, la solució és correcta. A més, els aproximants Thévenin obtenen tant la solució corresponent a la branca estable de la corba PV com la de la inestable. Tal riquesa d'eines no està present en els mètodes iteratius. Com s'ha vist, el sistema no es pot conèixer tan a fons.

9.3. Influència de la profunditat

Igual que l'evolució de l'error en els mètodes iteratius depèn de la profunditat, en el MIH el nombre de coeficients que constitueixen les sèries també afecta el resultat final. S'espera que a més coeficients, millor es construirà la solució.

Primer es busca determinar si hi ha diferències notables entre l'error i la profunditat en les dues formulacions del MIH. Se selecciona el cas d'11 busos perquè a part d'estar mal condicionat,



presenta diversos transformadors de relació variable. Per definició la formulació tradicional del MIH no és encertada per calcular els aproximants Sigma. Tanmateix, a diferència de la formulació original, no fragmenta la matriu d'admitàncies en simètrica i asimètrica. L'evolució de l'error calculat amb Padé segons la profunditat es mostra a la Figura 55.

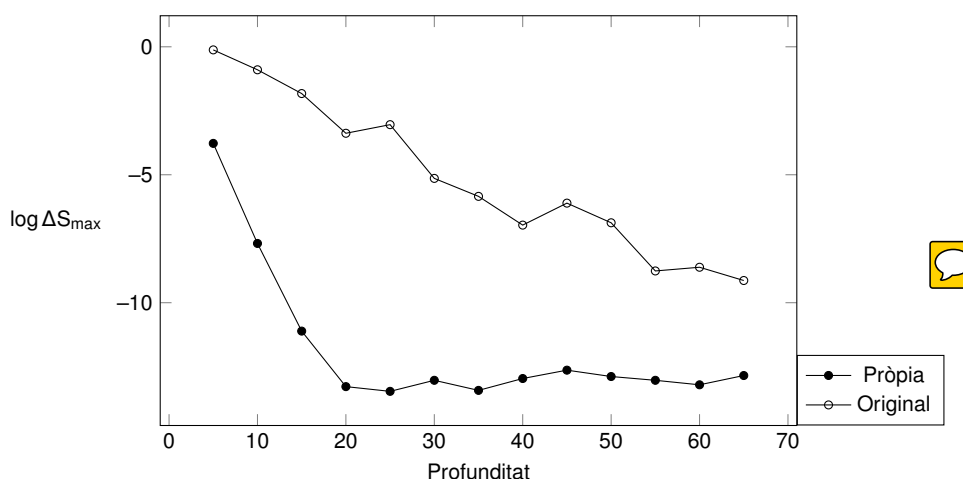


Figura 55. Evolució del logaritme de l'error màxim pel cas d'11 busos amb les dues formulacions

La formulació pròpia no força que els primers coeficients de les sèries de tensió siguin tots 1. Això per una banda impossibilita l'ús dels aproximants Sigma, però aconsegueix que aquests primers coeficients s'acostin molt més a la solució final. Amb qüestió de 20 coeficients s'arriba a un error de l'ordre de 10^{-14} . A partir d'aquest punt, incrementar la profunditat no millora significativament l'error. Amb la formulació original calen força més coeficients per assolir un error satisfactori de 10^{-10} . En aquest cas no s'ha cregut oportú, però si aquest error fos inacceptable, es pot recórrer al Padé-Weierstrass.

En altres sistemes on les relacions de transformació variables s'ajusten més a la unitat i no són tan nombroses, les dues formulacions segueixen una progressió de l'error en funció la profunditat similar. La Figura 56 ho exemplifica per la IEEE118. També s'utilitzen els aproximants de Padé. Tal com s'observa, les dues formulacions esdevenen competitives. Entorn uns



20 coeficients l'error s'estabilitza.

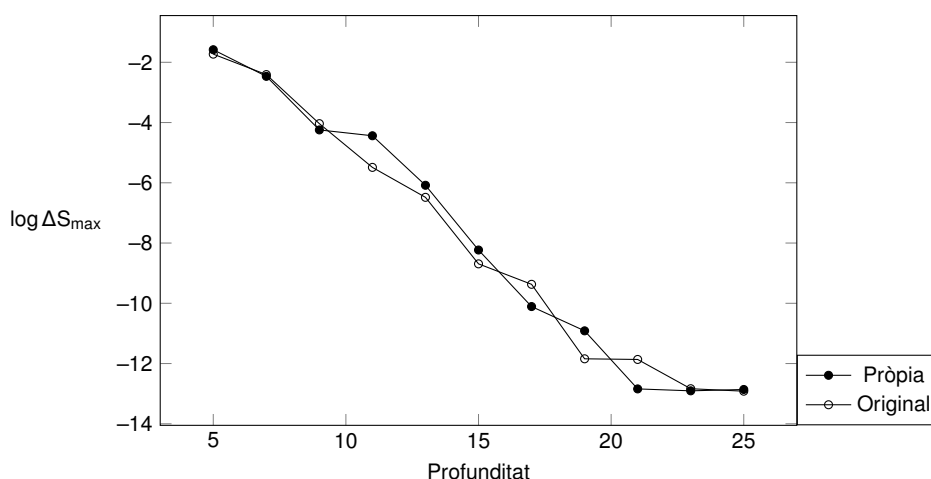


Figura 56. Evolució del logaritme de l'error màxim per la IEEE118 amb les dues formulacions

S'ha notat que a l'hora de resoldre el flux de potències per mitjà dels mètodes iteratius, el nombre d'iteracions requerides pel NR en general presenta poca variabilitat al costat del FDLF. Per això, també es valora la profunditat necessària de la formulació original del MIH per obtenir un error màxim de 10^{-10} . La Taula 13 mostra el nombre de coeficients requerits i l'error resultant pels sistemes seleccionats amb els aproximants de Padé.

Sistema	Errors	Profunditat
Cas d'11 busos	$2,53 \cdot 10^{-11}$	69
IEEE14	$3,29 \cdot 10^{-11}$	12
IEEE30	$5,52 \cdot 10^{-12}$	10
Nord Pool	$3,70 \cdot 10^{-11}$	21
IEEE118	$6,82 \cdot 10^{-11}$	16
Pegase2869	$2,36 \cdot 10^{-11}$	28

Taula 13. Errors obtinguts i profunditat necessària en els sis sistemes seleccionats amb el MIH original

A partir la Taula 13 es dedueix que la profunditat requerida guarda certa relació amb els radis de convergència de la Taula 9: a major radi de convergència cal menys profunditat. S'observa que en aquests exemples el nombre de busos no marca la tendència de quants coeficients fan falta. La xarxa Pegase2869 és d'una dimensió molt superior al sistema d'11 busos, però així i tot, en aquest últim es necessita força més profunditat. De forma similar al mètode de NR, des d'un punt de vista de temps de càlcul és interessant que el nombre de busos no tingui gaire influència en la profunditat.

El càlcul de la solució final no sempre s'ha de dur a terme amb els aproximants de Padé. Els

mètodes recurrents són una alternativa vàlida, com també ho és la suma de coeficients quan no fa falta continuació analítica.

Per tal de fer-se una idea de l'error existent en funció de la profunditat, primerament s'estudia el cas d'11 busos, ja que segons el raonat fins ara consisteix en un sistema mal condicionat. A la Figura 57 apareixen els resultats amb els diversos mètodes de continuació (ja que no s'hi val a utilitzar la suma de coeficients), calculats amb la formulació original. Els únics mètodes que han arribat a solucions satisfactòries són els aproximants de Padé, l'Èpsilon de Wynn i l'Eta de Bauer (en aquest últim cas les potències reactives han estat calculades amb Padé). Amb la resta de mètodes les solucions no convergeixen.

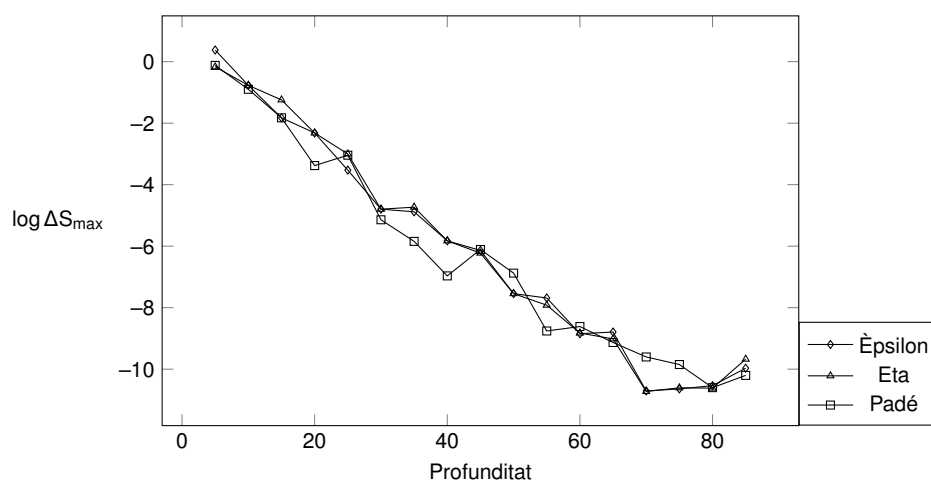



Figura 57. Evolució de l'error pel cas d'11 busos amb continuació analítica, formulació original

Tal com s'observa, pràcticament tots tres mètodes assoleixen els mateixos errors al llarg de les diverses profunditats. De fet, a la IEEE14 amb $\lambda = 2$ també es deduïa que aquests tres mètodes de continuació analítica eren els més encertats. A la Figura 19 s'obtenia un perfil similar. 

Per contra, amb la formulació pròpia s'ha vist que es necessiten menys coeficients. A part dels aproximants de Padé, la resta de mètodes de continuació analítica també són útils (Figura 58).

De tots els mètodes de continuació analítica, el Rho de Wynn són la pitjor opció. Convergeixen més lentament que la resta. L'Eta de Bauer i l'Èpsilon de Wynn es tornen a perfilar com els mètodes que presenten menys error a la llarga. Un grup intermedi està constituït pels aproximants de Padé, les tres transformacions de Shanks, el mètode Theta de Brezinski i el Delta d'Aitken.



No resulta millor que Eta de Bauer ni que Èpsilon de Wynn, però sí que esdevé preferible davant el mètode Rho de Wynn.

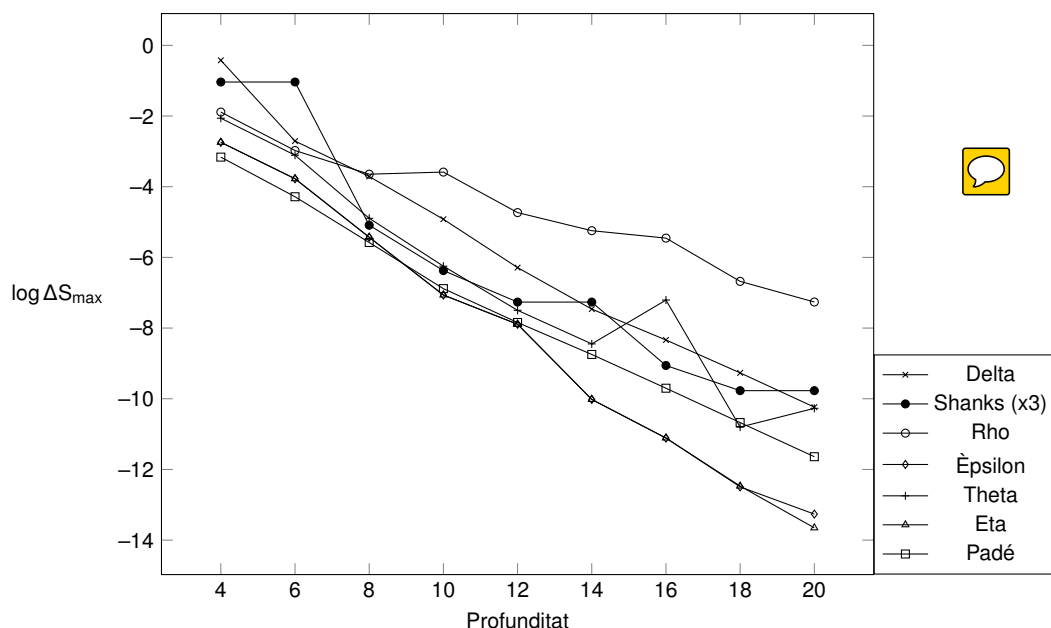


Figura 58. Evolució de l'error pel cas d'11 busos amb continuació analítica, formulació pròpia

Es torna a realitzar la mateixa comparació per un sistema més ben condicionat com és la IEEE30. En aquest cas s'utilitza la formulació original. Com que no hi ha transformadors de relació variable, les diferències entre ambdues formulacions són poc apreciables. La Figura 59 mostra l'evolució de l'error màxim segons la profunditat. També es contempla la suma de coeficients, que tal com indica el seu radi de convergència, es tracta d'una opció viable.

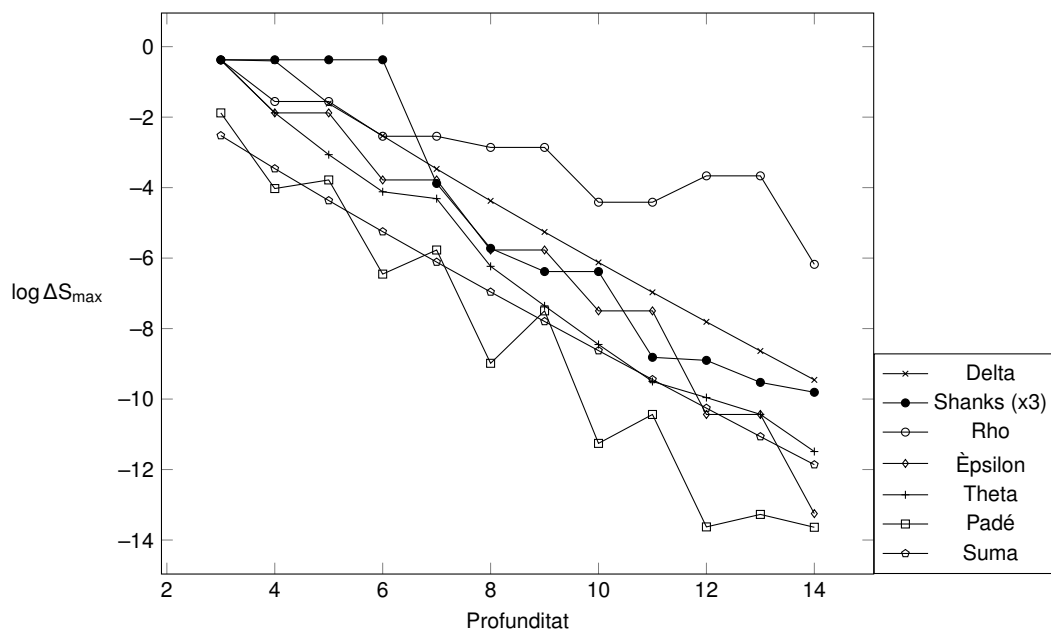


Figura 59. Evolució de l'error per la IEEE30 amb continuació analítica, formulació original


Amb presència de busos PV, si es fa servir la formulació original, el primer terme de les potències reactives incògnites és nul. Per això és preferible no computar la solució amb Eta; altrament

té lloc una divisió per 0. Si tot i això es vol utilitzar Eta, un recurs consisteix en fer un híbrid: les tensions es calculen amb Eta i les potències reactives amb Padé, tal com s'ha fet a la Figura 57. Aquesta vegada els aproximants de Padé resulten la millor eina per computar la solució final. Sumar els coeficients també proporciona errors competitius. El mètode de Rho de Wynn torna a ser el més desafavorit.

Per altra banda, els aproximants Sigma són sèries, i com a tal, depenen del nombre de coeficients triat. Les Figures 51 i 52 han sigut generades a partir de 60 coeficients. Si en lloc de 60 se n'escullen 10, que és una profunditat en què els errors encara tenen marge de millora, s'obté la Figura 60.

La distribució de punts és gairebé idèntica a la de les Figures 51 i 52 en excepció del sistema d'11 busos, on hi ha un canvi destacable. És clar, el càlcul dels aproximants Sigma depèn dels coeficients de tensió. S'ha mostrat que l'error resultant per 10 coeficients és de l'ordre de 10^{-1} , que esdevé inacceptable (Figura 57).

El problema d'utilitzar pocs coeficients per diagnosticar el sistema es fa evident a la Figura 61, on aquest cop s'ha generat el gràfic amb només 8 termes.

S'observa que hi ha un punt que queda fora els límits. Això indica que la solució és incorrecta, però no que el sistema no tingui solució. Com s'ha comprovat, el sistema té solució, l'únic que fa falta més profunditat per arribar-hi. A mesura que es treballa amb més i més coeficients els gràfics Sigma s'assimilen més fins que resulten iguals a la vista. Cal fer èmfasi en  et que els aproximants Sigma depenen dels coeficients de tensió. D'igual manera que a vegades fa falta una profunditat generosa per trobar una solució amb poc error, també fan falta suficients coeficients per diagnosticar correctament el sistema.

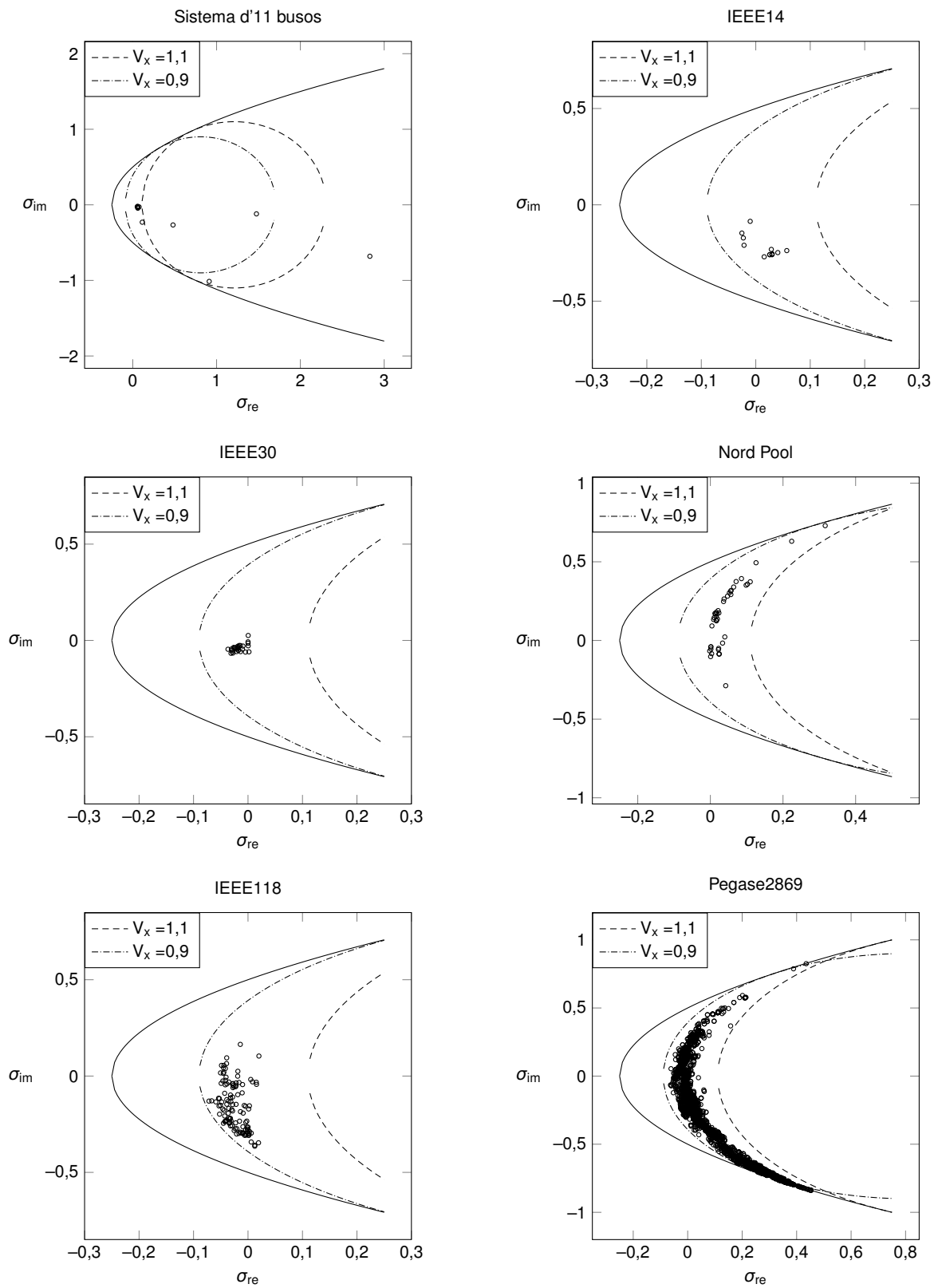


Figura 60. Gràfic Sigma de tots els sistemes per una profunditat de 10 coeficients

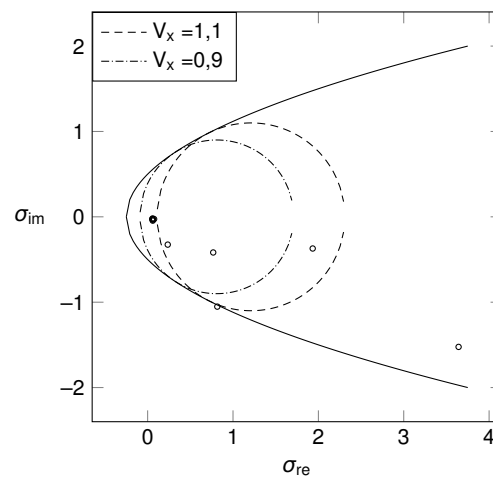


Figura 61. Gràfic Sigma del sistema d'11 busos per una profunditat de 8 coeficients

10. Càrrega de xarxes de test

En el capítol anterior s'ha valorat l'estat d'operació de les sis xarxes seleccionades en el seu punt d'operació inicial. S'ha observat que bona part d'elles resultaven ben condicionades. En aquest capítol s'apropen aquests mateixos sistemes al punt de col·lapse de tensions a partir de variar la seva càrrega. Això fa que es trobin més mal condicionats, i que per tant, els mètodes resolutius del flux de potències siguin més susceptibles de fallar.

Es realitza un estudi individual per a cada xarxa. En algunes d'elles s'augmenta la càrrega de tot el sistema pel mateix factor, mentre que en d'altres s'incrementa la demanda en únic bus. Tot això amb la idea de buscar fins a quin punt el mètode d'incrustació holomòrfica resulta capaç d'arribar a la solució. A les xarxes sense canvis en la seva potència l'ús del Padé-Weierstrass i dels aproximants Thévenin per traçar les corbes PV o PQ no quedava justificat. En aquest cas també s'analitza la utilitat d'aquests recursos.

La Taula 14 recull els canvis que pateix cada canvi per acostar els sistemes al punt de col·lapse de tensions. El paràmetre λ denota el factor pel qual es multipliquen les potències de tot el sistema. S'ha assumit que a la xarxa d'11 busos λ val 0,5 en un inici.

Sistema	Canvi
Cas d'11 busos	$P_{10} = -0,18$
IEEE14	$\lambda = 4,0$
IEEE30	$P_{29} = -0,82$
Nord Pool	$\lambda = 2,3$
IEEE118	$P_{117} = -8,5$
Pegase2869	$Q_{2866} = -11,0$

Taula 14. Canvis de càrrega escollits a les xarxes a estudiar

10.1. Cas d'11 busos

El cas d'11 busos és en la seva essència un sistema mal condicionat. La presència de transformadors de relació variable fa que, tot i reduir la seva càrrega a la meitat, el NR bàsic i el NR amb el multiplicador d'Iwamoto no siguin capaços d'obtenir una solució correcta des del punt de vista d'operació. Tanmateix, el desacoblament ràpid, el NR amb la variació de Levenberg-Marquardt i el MIH sí que arriben a una solució vàlida. Per això, ara s'incrementa la potència del bus 10. Passa de comptar amb una demanda de potència activa de 0,079 a 0,18.

En aquestes condicions s'obtenen els gràfics Sigma de la Figura 62. Per validar la solució s'han

traçat les dues representacions amb profunditats diferents. Així, si tots els seus punts convergeixen a l'interior de la paràbola cap a la mateixa posició, la solució és físicament correcta (Trias, 2018).

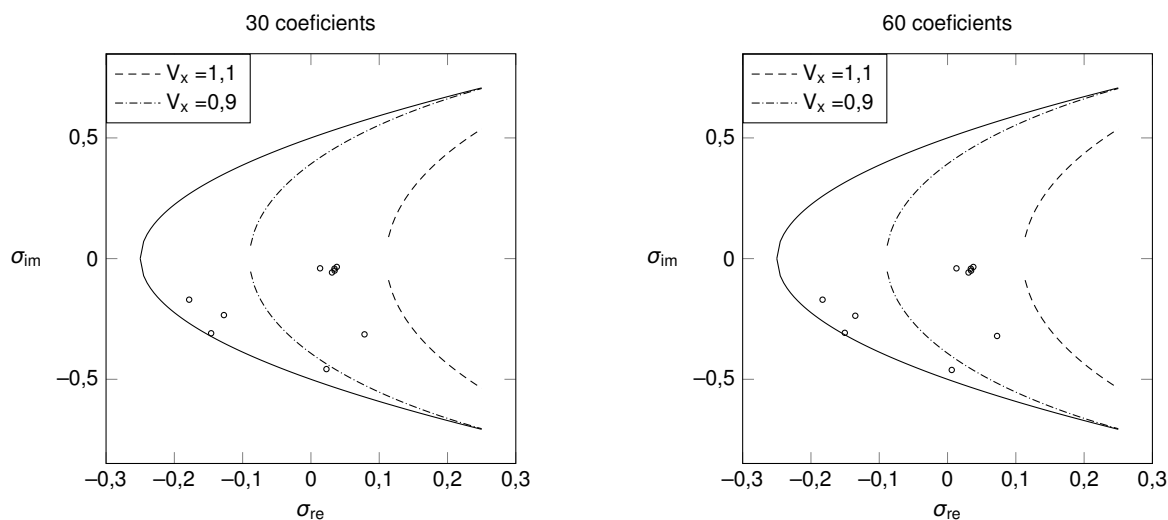


Figura 62. Gràfic Sigma del sistema d'11 busos amb $P_{10} = -0,18$ i profunditats de 30 i 60

En els dos gràfics el punt més a prop del límit correspon al del bus 10, precisament, el que s'ha carregat més. Tant en un cas com en l'altre la distribució de punts resulta molt similar. Si s'incrementa encara més la profunditat, s'arriba a un gràfic gairebé igual a aquests dos on tots els punts queden dins els límits.



No passa el mateix quan per exemple $P_{10} = -0,20$. En tal situació resulten els gràfics de la Figura 63. Com s'aprecia, hi ha diferències notables en funció de la profunditat.

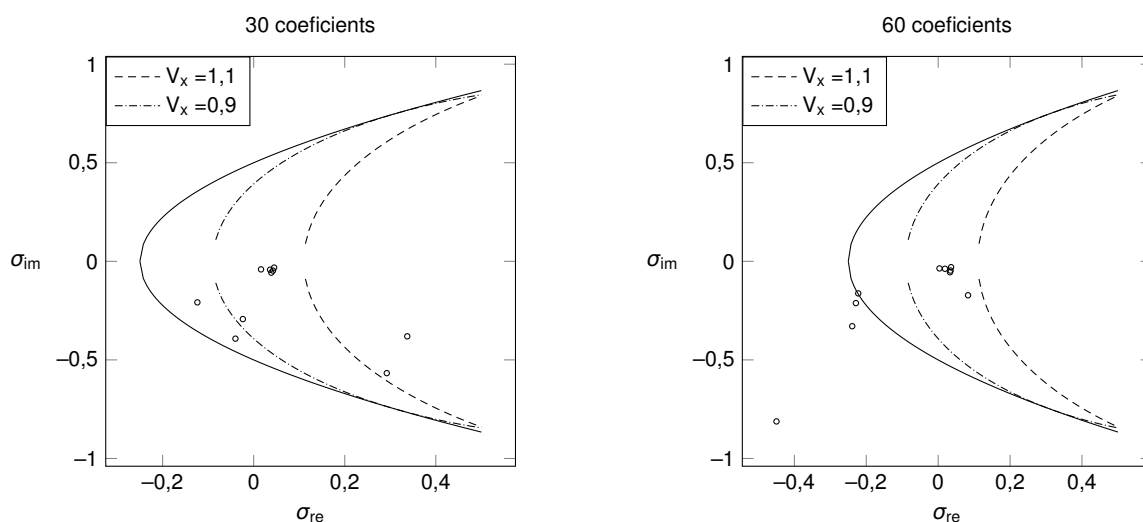


Figura 63. Gràfic Sigma del sistema d'11 busos amb $P_{10} = -0,20$ i profunditats de 30 i 60

A la Figura 63 les distribucions de punts no convergeixen cap a dins la paràbola. Així, es diagnostica que el sistema no té solució. Si s'incrementa la profunditat a més de 60 coeficients, els punts tampoc queden a l'interior de la paràbola. La informació afegida dels gràfics Sigma és que mostren els busos problemàtics. En aquest cas el bus 10 és el que queda més allunyat dels límits de la paràbola amb 60 coeficients. Això es podia anticipar a partir de la Figura 62, on gairebé roman sobre el límit.





Donat que amb $P_{10} = -0,18$ el sistema té solució, es continua amb aquesta condició de càrrega. La resolució del sistema amb els mètodes iteratius dóna lloc a la Taula 15, on es presenten les iteracions requerides per aconseguir un error inferior a 10^{-10} i l'error resultant. Només es treballa amb el Levenberg-Marquardt i el desacoblat ràpid perquè en aquesta ocasió són els únics que convergeixen.

Mètode	Errors	Iteracions
NR L-M	$3,10 \cdot 10^{-12}$	19
FDLF	$9,70 \cdot 10^{-11}$	57

Taula 15. Errors obtinguts i iteracions necessàries en el cas d'11 busos amb mètodes tradicionals. $P_{10} = -0,18$

Tant el desacoblat ràpid com el Levenberg-Marquardt no només han estat capaços de convergir sinó també d'arribar a la solució correcta. El desacoblat ràpid ha necessitat menys iteracions en comparació amb les requerides quan $P_{10} = -0,079$ (Taula 10). En canvi, si per exemple $P_{10} = -0,20$, cap d'ells convergeix.

El mètode d'incrustació holomòrfica en un inici proporciona errors de l'ordre de 10^{-2} . Encara que la profunditat creixi, no milloren significativament. S'ignora la possibilitat d'utilitzar la formulació pròpia, en primer lloc perquè no diagnostica el sistema, i en segon lloc  té errors insatisfactoris. Per tant, en punts tan propers al col·lapse no es perfila com una bona eina per determinar si la solució és correcta. Cal emprar el mètode de Padé-Weierstrass amb la formulació original per tal d'aconseguir errors acceptables.

L'obtenció del vector que conté les s_0 en què s'avaluen  sèries es porta a terme per mitjà d'un procediment d'assaig-i-error. S'ha trobat que $s_0 = [0,5; 0,4; 0,5; 0,55]$ i una profunditat de 30 tant pel MIH bàsic com pel P-W, l'error final és inferior a 10^{-10} . La Figura 64 captura l'evolució de l'error al llarg de les iteracions en els diversos graons del P-W, i també, del MIH bàsic.

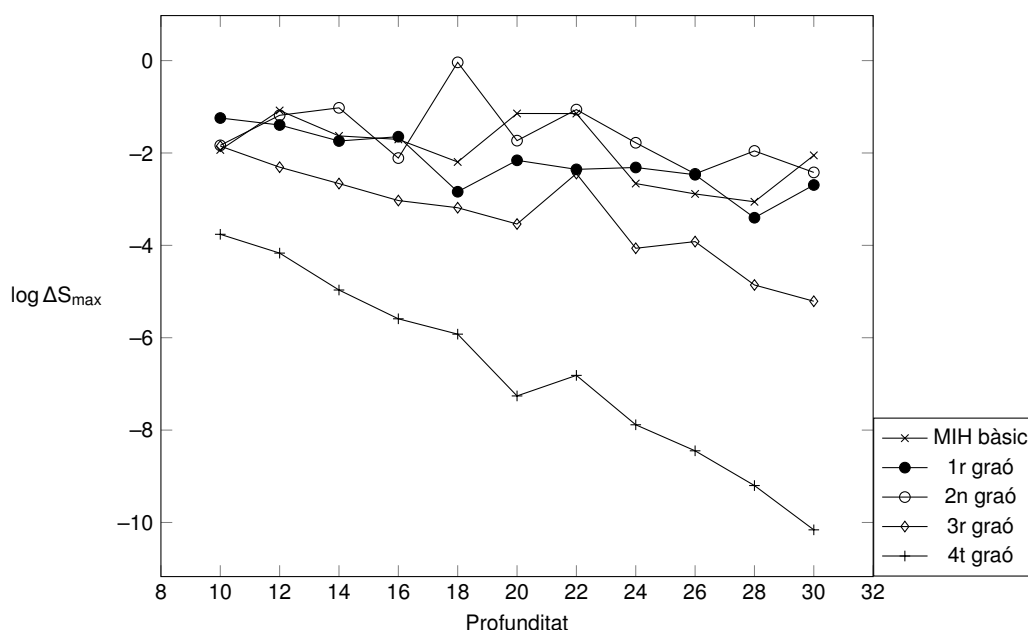


Figura 64. Evolució de l'error al cas d'11 busos segons l'etapa resolutiva

Tal com s'observa, els primers dos graus no superen el MIH bàsic, en el sentit que els seus errors romanen similars. Amb el tercer graó la solució comença a millorar, tot i que ho fa lentament. No és fins al quart graó que el perfil d'evolució de l'error en funció de la profunditat pren la trajectòria desitjada. Per una profunditat de 10 ja comença amb un error de l'ordre de 10^{-4} i llavors, amb 20 coeficients més assolix un error de $6,93 \cdot 10^{-11}$.

Així doncs, s'ha comprovat la utilitat del P-W. A partir d'una solució aparentment incorrecta, després de repetir diverses vegades la resolució del flux de potències a partir solucions anteriors, arriba a un resultat satisfactori.



En comparació amb els mètodes tradicionals, iteratius, s'ha vist que la combinació del MIH amb el P-W permet assolir errors del mateix ordre. En aquest cas, la riquesa del MIH està sobretot en el fet que diagnostica l'estat del sistema. Primer perquè permet identificar quins busos estan més a prop del límit de la paràbola del gràfic Sigma (que corresponen als busos més crítics), i llavors, perquè quan el resultat és erroni es fa evident quins busos en són els causants. Amb els mètodes tradicionals, quan la solució divergeix, no hi ha cap recurs per conèixer directament el motiu.

10.2. IEEE14

La xarxa IEEE14 també conté transformadors de relació variable. Per aquesta raó només es recorre a la formulació original. El fet que es tracti d'un sistema real en el seu moment fa que



no presenti un perfil de tensions anormal com el del cas d'11 busos. Per tal d'acostar-lo al col·lapse de tensions, s'augmenten totes les seves potències d'acord amb un factor $\lambda = 4,0$. El gràfic Sigma amb 30 coeficients es mostra a la Figura 65. Per a profunditats superiors la distribució de punts es manté dins els límits, pràcticament amb els punts en la mateixa posició.

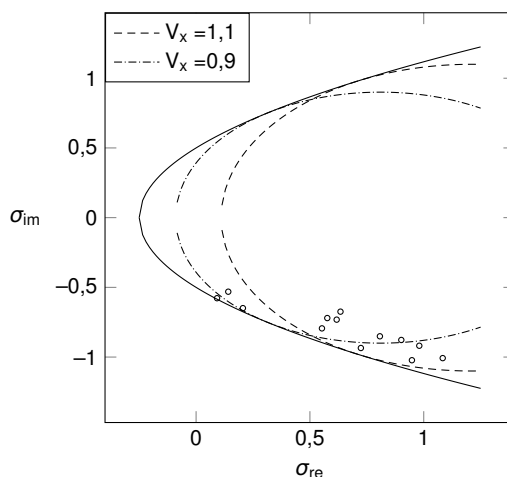


Figura 65. Gràfic Sigma de la IEEE14 amb $\lambda = 4,0$ i sèries de 30 coeficients

El conjunt de punts partia proper del (0, 0) però s'expandeix fins a aproximar-se al límit inferior de la paràbola. Això té sentit perquè s'han escalat totes les potències, tant activa com reactiva. Com que el consum d'activa és superior al de reactiva i a les línies la reactància predomina per sobre la resistència, els punts tendeixen a desplaçar-se verticalment cap a la zona inferior del gràfic.

Tots els mètodes numèrics iteratius han solucionat el sistema correctament. Tanmateix, la Taula 16 posa de manifest que fan falta força més iteracions de les habituals per assolir una solució amb un error inferior a 10^{-10} .

Mètode	Errors	Iteracions
NR	$1,29 \cdot 10^{-14}$	6
NR Iwamoto	$6,68 \cdot 10^{-14}$	7
NR L-M	$6,17 \cdot 10^{-12}$	10
FDLF	$9,89 \cdot 10^{-11}$	110

Taula 16. Errors obtinguts i iteracions necessàries a la IEEE14 amb mètodes tradicionals. $\lambda = 4,0$

Per ser competitiu amb aquests mètodes tradicionals, el MIH també ha de ser capaç de trobar la solució amb un error acceptable. En un inici, per una profunditat de 30 coeficients, s'aconsegueix que valgui prop de 10^{-3} . Altre cop el P-W permet reduir aquest error fins a una tolerància arbitrària. Per exemple, amb el vector $s_0 = [0,5; 0,4; 0,5; 0,55]$ (el mateix que pel cas d'11 bu-

sos), s'arriba a un error de $6,11 \cdot 10^{-11}$.

Més que veure la solució resultant a cada graó, es pretén estudiar la influència dels vectors s_0 sobre l'error final. S'han fixat tres toleràncies diferents. La Taula 17 presenta els vectors s_0 ajustats tal que la diferència entre aproximants de Padé d'ordres L/M i $(L-1)/(M-1)$ sigui inferior a la tolerància.

Tolerància	s_0
10^{-7}	[0,85]
10^{-8}	[0,83; 0,97]
10^{-9}	[0,78; 0,92]
10^{-10}	[0,74; 0,88]
10^{-11}	[0,70; 0,82]
10^{-12}	[0,66; 0,76; 0,87]
10^{-13}	[0,61; 0,63; 0,61; 0,72]

Taula 17. Vectors s_0 en funció de la tolerància permesa

Quan es busquen toleràncies petites cal utilitzar més graons. S'observa que per un costat hi ha dependència amb la llargada del vector s_0 però també amb valors que el conformen. Per exemple, el primer element de tots els vectors decreix a mesura que s'especifica una tolerància menys generosa. És necessari que sigui així, ja que en principi els termes del vector s_0 s'han d'acostar progressivament a 1. L'última sèrie s'avalua a 1 i per això s'ha de trobar un valor ben condicionat.

Començar s_0 amb valors petits implica que es necessitin més graons, però per contra, possibilita arribar a un error menor. Quan el primer valor d' s_0 resulta excessivament gran, no importa el nombre de graons perquè l'error amb prou feines disminueix. La Taula 18 mostra els logaritmes dels errors a cada un dels graons amb els vectors de la Taula 17. Sempre s'ha utilitzat una profunditat de 30 coeficients.

Tolerància	1r graó	2n graó	3r graó	4t graó
10^{-7}	-6,58			
10^{-8}	-6,86	-7,53		
10^{-9}	-5,33	-7,81		
10^{-10}	-5,66	-7,78		
10^{-11}	-4,97	-10,38		
10^{-12}	-4,59	-9,63	-10,60	
10^{-13}	-5,06	-7,80	-10,75	-11,70

Taula 18. Logaritmes dels errors segons la tolerància i el seu respectiu vector s_0



Sovint les toleràncies més petites comencen amb errors considerables, però a mesura que s'implementen els següents graons, s'empetiteixen. Aquest és el preu a pagar per arribar a un error acceptable.

Si en lloc d'estudiar el sistema per una càrrega concreta, es valora com evoluciona la tensió dels busos a mesura que s'incrementa el factor de càrrega, s'arriba a la conclusió que les tensions evolucionen de forma similar a com ho fan en una gràfica PV. La gràfica de la Figura 66 il·lustra l'evolució de la tensió del bus 3 amb els aproximants de Thévenin i amb el P-W per comparar les solucions obtingudes amb les dues eines.

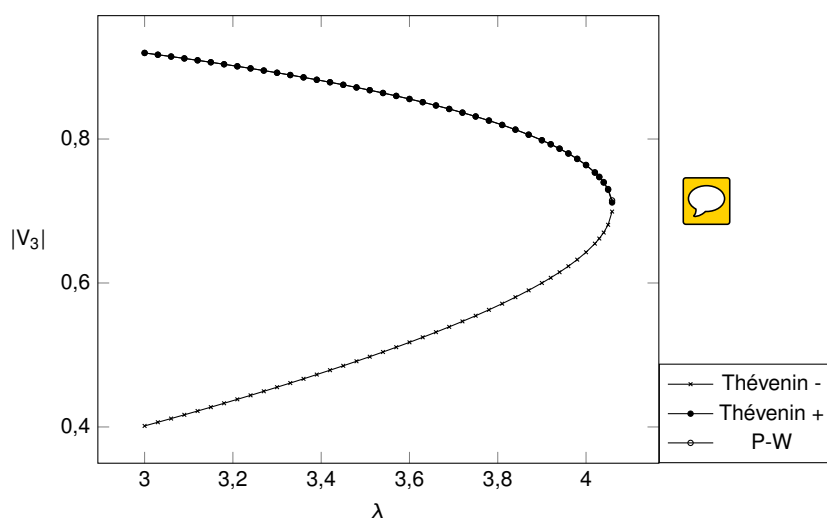


Figura 66. Mòdul de tensió del bus 3 de la xarxa IEEE14 en funció de λ amb aproximants de Thévenin i amb P-W

La corba superior ha estat representada tant amb els resultats extrets amb el P-W com amb la solució positiva dels aproximants Thévenin. S'encavalquen. Tot i que els aproximants Thévenin parteixen dels coeficients de les sèries inicials, l'osculació fa possible obtenir mòduls de tensió extremadament similars als generats amb el P-W. En aquest darrer cas els errors s'han mantingut per sota l'ordre de 10^{-10} . Així, els aproximants Thévenin són una molt bona opció a l'hora de representar aquesta mena de corbes. De fet, és l'única eina que genera la branca inestable.

10.3. IEEE30

A jutjar pel gràfic Sigma, la IEEE30 és la xarxa més ben condicionada en l'estat inicial. Els punts queden molt propers al (0, 0). Per carregar el sistema es modifica la potència activa al bus 29, que passa de -0,106 a -0,82. Al capítol en què es detallen els aproximants Sigma ja s'ha presentat el gràfic Sigma en aquesta situació (Figura 32). Els busos 28 i 29 són els que

més s'acosten al límit. Això lliga amb la modificació de potència del bus 29. Aquest bus estira els altres a l'acostament cap al límit.



Tal com s'ha apreciat a la Figura 27, una potència $P_{29} = -0,82$ implica que el sistema es trobi molt a prop del col·lapse de tensions. Es tracta d'una situació en què l'estat d'operació de la xarxa es cataloga de mal condicionat. No obstant això, tots els mètodes iteratius resolen el flux de potències correctament. A la Taula 19 es capturen els errors i les iteracions per aconseguir un error inferior a 10^{-10} , que generalment varien poc en comparació amb els de la IEEE14 (Taula 16).

Mètode	Errors	Iteracions
NR	$4,70 \cdot 10^{-12}$	6
NR Iwamoto	$1,44 \cdot 10^{-14}$	8
NR L-M	$2,71 \cdot 10^{-11}$	11
FDLF	$9,13 \cdot 10^{-11}$	142

Taula 19. Errors obtinguts i iteracions necessàries a la IEEE30 amb mètodes tradicionals. $P_{29} = -0,82$

Per altra banda, la Figura 67 mostra el radi de convergència de la tensió del bus 29 en funció de la potència. S'ha treballat amb la formulació original.

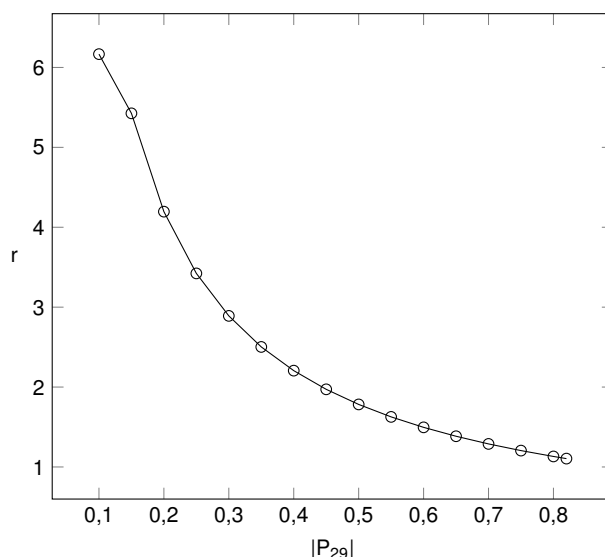


Figura 67. Radi de convergència de V_{29} en funció de la demanda de potència activa P_{29}

La Figura 67 reflecteix que no fa falta aplicar mètodes de continuació analítica. Amb la suma de coeficients s'arriba també a una solució acceptable en comparació amb els aproximants de Padé, per exemple. Aquest cas és oposat al sistema d'11 busos, on encara que el sistema es trobés lluny del col·lapse (amb $\lambda = 0,5$), els radis de convergència eren inferiors a 1. Per tant,



no es pot traçar una relació entre la proximitat al punt de col·lapse i la necessitat de mètodes de continuació analítica.

Com que no compta amb transformadors de relació variable, la IEEE30 és un sistema candidat a ser solucionat per mitjà de les dues formulacions del MIH. En un cas en el qual la xarxa opera lluny del col·lapse de tensions això resulta cert, però quan treballa a prop d'aquest col·lapse, els errors amb el MIH bàsic són inacceptables. Només la combinació de la formulació original amb el P-W possibilita minimitzar els errors.

La Figura 68 posa de manifest que sense el P-W la solució gairebé no millora al llarg de les iteracions.

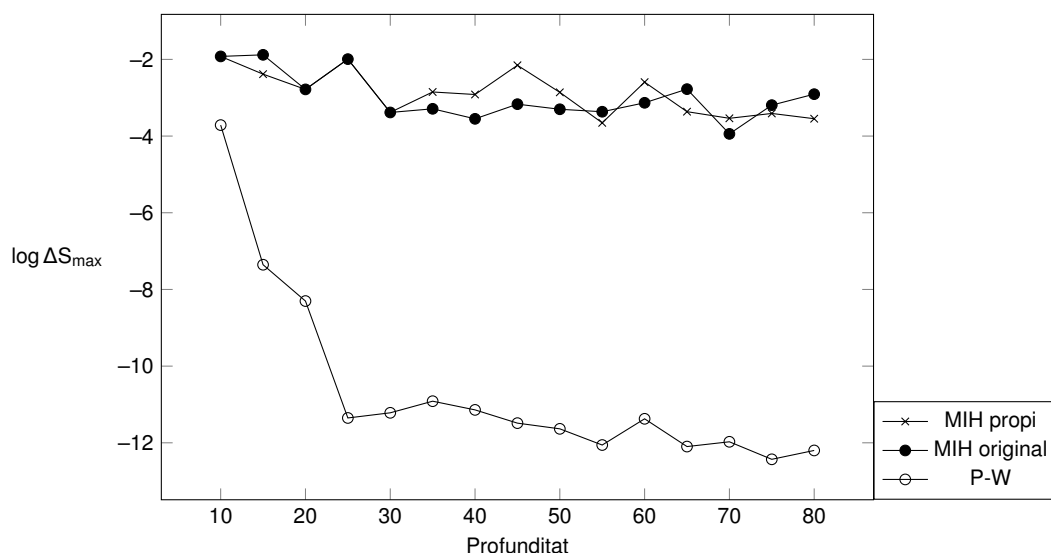
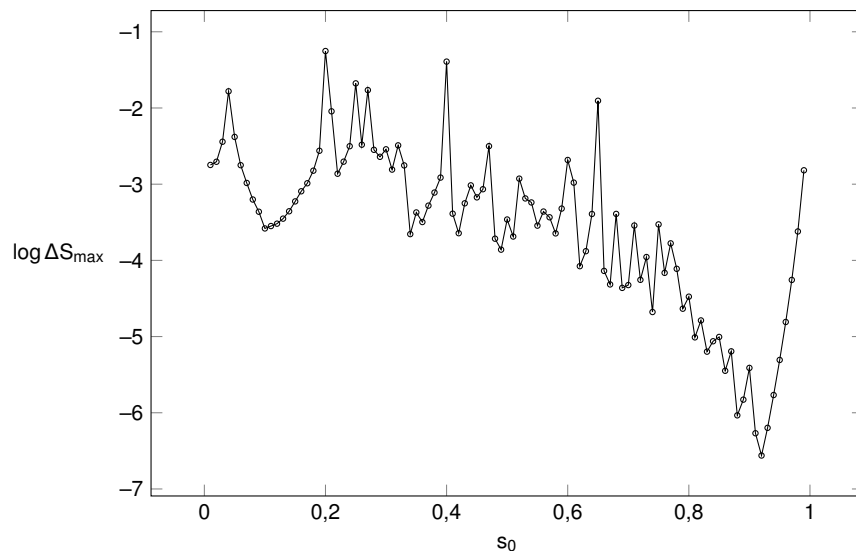


Figura 68. Evolució de l'error a la IEEE30 amb $P_{29} = -0,82$, amb formulació pròpia, original i P-W

Alguns errors dels MIH coincideixen al principi. En general les dues formulacions sense el P-W ofereixen resultats similars. Amb cap d'ells s'obtenen errors satisfactoris. S'ha comprovat que cap dels mètodes recorrents per calcular la solució final millora respecte als aproximants de Padé. Per aquesta raó, la formulació original es combina amb el P-W. L'error disminueix ràpidament i s'estabilitza entorn de 10^{-12} . S'ha fixat una tolerància de 10^{-13} . El vector s_0 ha resultat ser $[0,65; 0,55; 0,56; 0,59; 0,61; 0,76]$.

Com s'ha raonat per a la IEEE14, el vector s_0 depèn de l'objectiu a l'hora d'utilitzar el P-W. Si per exemple es busca una tolerància petita com 10^{-13} , es necessiten força graons i la progressió dels components d' s_0 esdevé lenta. La Figura 69 il·lustra la dependència d' s_0 amb l'error. Només s'ha emprat el P-W amb un únic graó en aquest cas.

Figura 69. Evolució de l'error amb un graó del P-W en funció d' s_0 

S'evidencia que l'error mínim es produeix entorn a $s_0 = 0,9$, i que a partir d'aquell punt, creix. De fet, quan s'emptra el P-W amb diversos graons, el primer valor del vector s_0 resulta més petit que aquest mínim. Això s'evidencia en el vector amb el qual es generen els resultats de la Figura 68, que compta amb un valor inicial de 0,65. A la Figura 69 queda clar que no correspon a la millor solució en un principi. Malgrat això, és indispensable per complir amb una tolerància de 10^{-13} en els aproximants de Padé.



Numèricament s'observa que amb el vector $s_0 = [0,65; 0,55; 0,56; 0,59; 0,61; 0,76]$ l'error final val $6,06 \cdot 10^{-12}$. En canvi, si $s_0 = [0,9; 0,55; 0,56; 0,59; 0,61; 0,76]$ (i per tant només canvia el primer valor), l'error resulta de $5,84 \cdot 10^{-8}$. Una bona solució inicial amb el primer graó no garanteix que aquell primer valor sigui el millor per progressar amb altres graons.

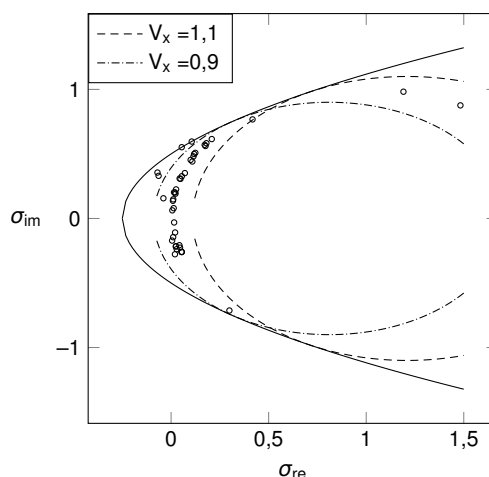
10.4. Nord Pool


El sistema Nord Pool de 44 busos es caracteritza per comptar amb busos on la generació de potència activa és més extrema que la demanda. Això comporta que al gràfic Sigma els punts tendeixin a apropar-se al límit superior. La Figura 70 il·lustra aquest gràfic pel factor de càrrega $\lambda = 2,3$.



Els dos punts que queden tan desplaçats cap a la dreta de l'eix real corresponen als busos 16 i 33. Això es deu al fet que són busos PV, on la potència reactiva no està fixada. Davant increments de potència, per mantenir el mòdul de tensió s'ha d'injectar potència reactiva. A la xarxa Nord Pool les línies presenten un caràcter especialment reactiu, és a dir, que la X del



Figura 70. Gràfic Sigma de la Nord Pool amb $\lambda = 2,3$ i sèries de 30 coeficients


seu model predomina per sobre la R i la B. Això comporta que juntament amb els augments de potència reactiva, els punts es desplacin tant cap a la dreta.  busos 18 i 19 són els més propers als límits. Es tracten de busos PQ d'interconnexió, és a dir, on $P = 0$ i $Q = 0$.

Els mètodes iteratius com el NR i les seves variacions no tenen problemes a l'hora de calcular la solució final. La Taula 20 mostra que malgrat necessitar més iteracions de l'habitual, tots ells convergeixen. Ho fan cap a la solució de la branca positiva.

Mètode	Errors	Iteracions
NR	$3,96 \cdot 10^{-15}$	6
NR Iwamoto	$7,18 \cdot 10^{-14}$	7
NR L-M	$4,18 \cdot 10^{-13}$	13
FDLF	$9,79 \cdot 10^{-11}$	101

Taula 20. Errors obtinguts i iteracions necessàries a la Nord Pool amb mètodes tradicionals. $\lambda = 2,3$

Altres cop, hi ha poca diferència entre aquests resultats i els extrets per les xarxes IEEE14 i IEEE30. Per a aquesta mena de xarxes de test, que pertanyen a sistemes reals i que no són fruit de la imaginació com el cas d'11 busos, tots els mètodes tradicionals de resolució arriben a la solució.

La particularitat de la xarxa  Nord Pool està en què es tracta d'un sistema on les potències més extremes són de generació, i l'evolució de la tensió pot presentar diferències notables al costat de les típiques corbes PV. A la IEEE14 la tensió variava en funció del factor de càrrega tal com ho faria una corba PV. A la xarxa Nord Pool se selecciona un bus PQ com és el bus 2 per traçar primer la corba que determina com varia el mòdul de tensió respecte al factor de càrrega.

El perfil obtingut es presenta a la Figura 71, on es mostra que no es tracta d'una evolució habitual. Difereix de la típica forma que segueixen les corbes PV i també de la Figura 66. En aquestes, al nas en què se separen les dues branques (positiva i negativa) amb prou feines la tensió és significativament inferior que per poca càrrega.

Els aproximants de Thévenin han estat calculats amb les dues formulacions i en tots dos casos segueixen la mateixa tendència. A la Figura 71 es presenten els obtinguts amb la formulació original. També s'ha calculat la solució amb el P-W a partir la formulació original, és clar.

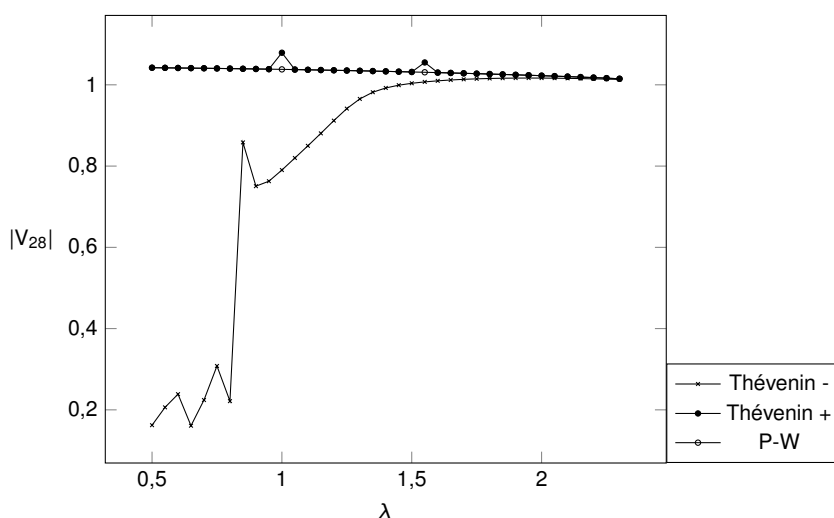


Figura 71. Mòdul de tensió del bus 2 de la xarxa Nord Pool en funció de λ , amb P-W i Thévenin

La corba de la Figura 71 per definició no es tracta ni d'una corba PV ni d'una corba QV perquè les variacions de càrrega són a la vegada de potència activa i de reactiva. Se la pot entendre com un híbrid entre les dues. Es visualitza un perfil que contrasta amb els d'aquestes corbes perquè la tensió en el punt en què s'uneixen les dues branques dels aproximants de Thévenin resulta molt propera a la unitat. No passa com en els altres casos on en aquest punt màxim el voltatge esdevenia inacceptable des d'un punt de vista d'operació.

El P-W genera un perfil on la tensió disminueix de forma progressiva. En canvi, la branca positiva dels aproximants de Thévenin presenta algun pic. Segons Trias (2018) això és d'esperar. Aquests aproximants són adients per obtenir el perfil de tensions a prop del punt de col·lapse. La branca negativa dels aproximants de Thévenin també compta amb solucions que segueixen una tendència caòtica, però a partir $\lambda = 1$ no presenta salts abruptes. A la llarga les dues branques s'uneixen.

Per altra banda, fins ara tots els resultats extrets amb el P-W s'han basat en utilitzar una

profunditat igual en les sèries inicials que en les sèries del P-W. Però no necessàriament les dues han de ser idèntiques. Per exemple, una opció consisteix a utilitzar menys coeficients per calcular $V(s_0)$ per llavors afinar la solució amb força coeficients a les sèries del P-W.

A la Figura 72 es contemplen dos casos. En un d'ells la profunditat del MIH bàsic, que s'anomena n_i , es fixa a 30 i es varia la profunditat del P-W, denotada per n_{PW} . En l'altre cas $n_{PW} = 30$ i n_i resulta variable. En totes dues situacions s'ha utilitzat el mateix vector $s_0 = [0,6; 0,65; 0,68; 0,72; 0,9]$.

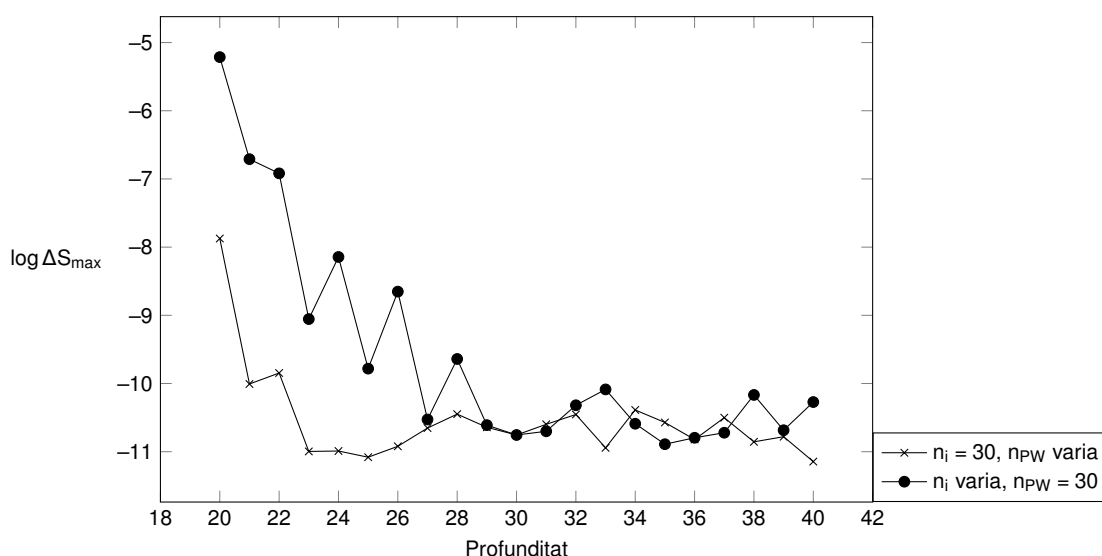



Figura 72. Evolució de l'error del P-W segons les profunditats

La Figura 72 mostra que profunditats inferiors a 30 és millor que pertanyin a n_{PW} que a n_i . Cal utilitzar prou coeficients per inicialitzar correctament les aproximacions $V(s_0)$. No obstant això, a partir d'una profunditat variable de 30, de les dues maneres l'error s'assimila molt. En aquesta situació i tal com també s'ha vist en d'altres, augmentar la profunditat no necessàriament es tradueix a minimitzar l'error, sinó que aquest arriba a un punt on s'estabilitza.

10.5. IEEE118

Tal com es mostra a la Figura 52, totes les tensions dels busos de la IEEE118, en proporció amb la del bus oscil·lant, es mantenen entre el 0,9 i l'1,1. Tendeixen a apropar-se al límit inferior de la paràbola, i no al superior com a la Nord Pool. Això indica que la demanda és més extrema que la generació. Per tal d'apropar la xarxa cap al col·lapse de tensions, la potència del bus 117 passa de -0,33 a -8,5.

La Figura 73 presenta el gràfic Sigma per a $P_{117} = -8,50$ i per a $P_{117} = -8,75$. El primer d'ells es correspon a un estat d'operació a prop del col·lapse (per tant, mal condicionat), mentre que el segon no és operatiu. La demanda resulta excessiva.

Al primer gràfic hi ha quatre punts que se situen força més a prop del límit inferior de la paràbola en comparació amb el núvol de punts corresponents a la resta de busos. En aquest aspecte els busos més conflictius són el 73, el 74, el 75 i el 117. El bus 117 precisament és el que s'encarrega d'estirar els altres busos cap als límits. La topologia de la xarxa és tal que el bus 117 enllaça amb el 74 i el 75. El 73 connecta amb el 74  augmentar la demanda de potència activa al bus 117, els busos propers també noten les conseqüències.

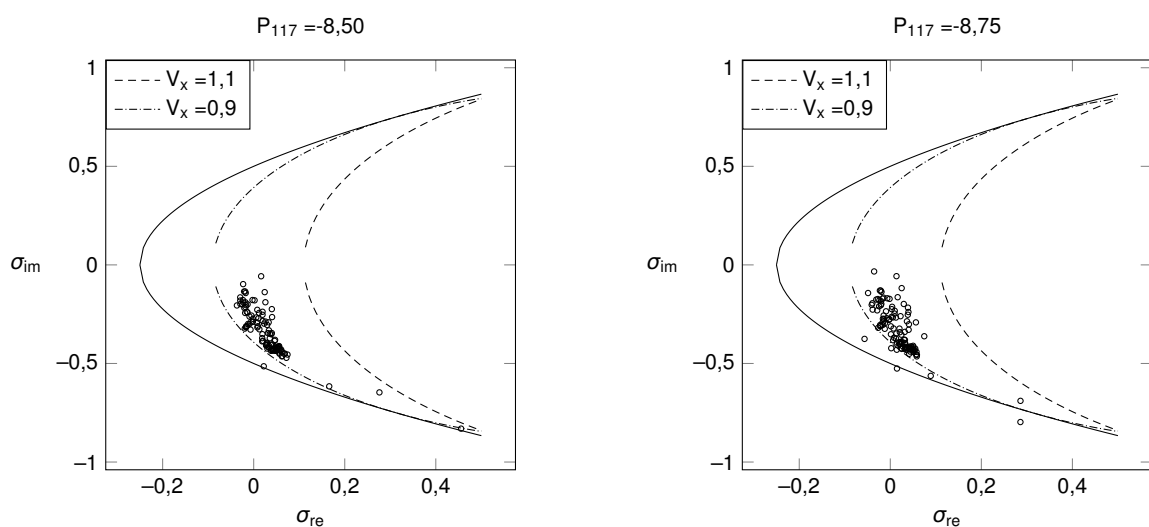



Figura 73. Gràfic Sigma de la IEEE118 per $P_{117} = -8,50$ i $P_{117} = -8,75$ amb sèries de 60 coeficients

Al segon gràfic, quan $P_{117} = -8,75$, els busos 74 i 75 abandonen l'interior de la paràbola. Per tant, no és directament el bus causant dels problemes el que queda fora la paràbola, sinó aquells que connecten directament amb ell. L'evolució dels punts del gràfic Sigma permet adonar-se de quina zona del sistema està apropant la totalitat del sistema  cap al col·lapse. A partir la solució dels mètodes iteratius tradicionals es pot dibuixar el gràfic d'abans el col·lapse, però no una vegada el sistema no té solució. Amb els mètodes iteratius tradicionals, quan no s'assoleix un resultat factible, no es té informació de la causa. Per contra, amb el MIH també es pot representar el gràfic Sigma quan la solució és invàlida. Serveix per confirmar a quins busos apareixen els problemes.

Els mètodes iteratius també solucionen el sistema quan $P_{117} = -8,50$. A la Taula 21 es mostren les iteracions requerides per assolir un error inferior a 10^{-10} , així com l'error resultant.

Mètode	Errors	Iteracions
NR	$1,43 \cdot 10^{-13}$	6
NR Iwamoto	$3,87 \cdot 10^{-14}$	7
NR L-M	$1,35 \cdot 10^{-13}$	13
FDLF	$9,56 \cdot 10^{-11}$	114

Taula 21. Errors obtinguts i iteracions necessàries a la IEEE118 amb mètodes tradicionals. $P_{117} = -8,50$

El nombre d'iteracions i els errors obtinguts s'assimilen als resultats de la Taula 20. Una dimensió més gran no sembla influir a l'hora d'obtenir la solució amb la precisió desitjada quan els sistemes operen a prop del col·lapse.

Per altra banda, s'extreu la corba PV del bus 117, que es plasma a la Figura 74.

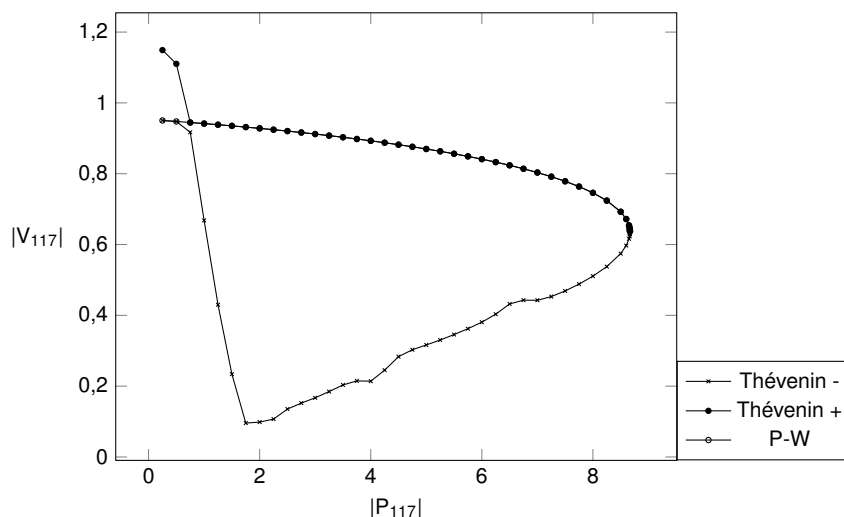


Figura 74. Corba PV del bus 117 de la IEEE118, amb P-W i aproximants de Thévenin

Les tensions obtingudes amb els aproximants de Thévenin per a la branca positiva són erràtiques per a les potències $|P_{117}|=0,25$ i $|P_{117}|=0,5$. Fora d'aquests dos punts, segueixen el mateix perfil que la solució extreta amb el P-W. Les tensions de la branca negativa que proporcionen els aproximants de Thévenin coincideixen en els dos punts inicials de la solució del P-W. Llavors, a mesura que la potència creix, presenten un perfil amb algunes cavitats i salts, fins que a partir de $|P_{117}| \approx 7$, tracen la forma que s'espera en el punt de col·lapse de tensions. Al final totes les solucions coincideixen. La potència al punt de col·lapse resulta $|P_{117}|=8,6669$, pel que la selecció de $P_{117}=-8,50$ es troba realment a prop d'aquest punt crític.

Per la naturalesa del mètode d'incrustació holomòrfic, els aproximants de Thévenin no sempre proporcionen la tensió corresponent a la branca inestable que s'espera. Segons Trias (2018) aquests aproximants es basen en l'oscullació de la solució per mitjà d'un polinomi de segon

grau. Per tant, no reproduïen completament la branca inestable de forma correcta, però sí que ho fan en punts propers al col·lapse. D'acord amb l'observat en els sistemes estudiats fins ara, a major nombre de busos, més habitual que la branca inestable tingui un perfil erràtic lluny del col·lapse.



A la Figura 75 es mostra la corba QV generada amb els aproximants de Thévenin i amb el P-W. S'ha retornat la potència activa del bus 117 a -0,33 i es varia la potència reactiva.

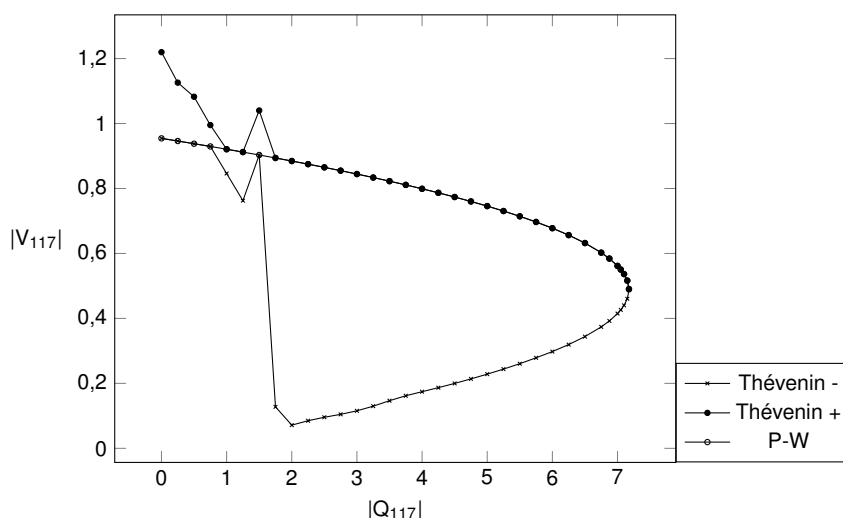


Figura 75. Corba QV del bus 117 de la IEEE118, amb aproximants de Thévenin i P-W



De forma similar a la Figura 74 s'observa que al final les dues branques s'uneixen, i que la branca inestable en general no és tan caòtica com abans. Per $|Q_{117}| < 2$, els aproximants de Thévenin de les dues branques presenten solucions sense gaire sentit. Els primers punts de la branca inestable dels Thévenin coincideixen amb els valors obtinguts mitjançant el P-W. La tensió al punt de col·lapse és lleugerament inferior a la de la Figura 74.

10.6. Pegase2869

Com el seu nom indica, el sistema Pegase2869 compta amb 2.869 busos. S'ha observat que en el seu estat base el MIH és capaç de solucionar el flux de potències. Per tal d'acostar el sistema a un punt d'operació més mal condicionat, en aquest cas s'incrementa el consum de reactiva del bus 2.866. En lloc de ser de -0,5998, esdevé de -11,0. La Figura 76 mostra el gràfic Sigma en aquesta situació.

En comparació amb el gràfic Sigma inicial d'aquesta xarxa (Figura 52), hi ha uns quants punts que es desplacen cap a l'esquerra. Això quadra amb un increment de reactiva. Pel que s'ha

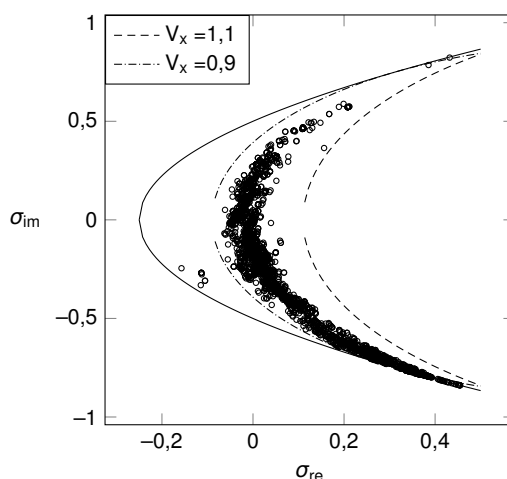


Figura 76. Gràfic Sigma de la Pegase2869 amb $Q_{2866}=-11,0$, amb 30 coeficients



justificat al capítol en què es detallen els aproximants Sigma, quan a les línies del sistema hi predominen les reactàncies inductives, precisament els punts més afectats per l'augment de reactiva es desplacen cap a l'esquerra, i no cap avall, com passa per increments de potència activa.

El bus 2.866, que és el que ha patit l'increment de consum de reactiva, es tracta del bus amb la menor σ_{re} . Altra vegada s'observa com un només un augment de consum aconseguir que uns quants busos s'acostin al col·lapse, i que a més, un dels busos que més s'hi acostava és aquell on té lloc l'increment de demanda.



Els mètodes iteratius considerats solucionen sense problemes el flux de potències. A la Taula 22 es presenten les iteracions i els errors consegüents.

Mètode	Errors	Iteracions
NR	$3,25 \cdot 10^{-16}$	6
NR Iwamoto	$1,43 \cdot 10^{-11}$	7
NR L-M	$1,03 \cdot 10^{-13}$	24
FDLF	$8,96 \cdot 10^{-11}$	70



Taula 22. Errors obtinguts i iteracions necessàries a la Pegase2869 amb mètodes tradicionals. $Q_{2866}=-11,0$

Al costat dels resultats extrets pels altres sistemes, les diferències són mínimes. El mètode de Levenberg-Marquardt requereix força més iteracions que per exemple per la xarxa IEEE118 (Taula 21). En canvi, el FDLF finalitza amb menys iteracions. En global, a partir de les xarxes estudiades, se'n desprèn que el nombre d'iteracions no va lligat amb el nombre de busos del sistema. Més aviat, les iteracions requerides **sempre** són similars en qualsevol sistema.



Malgrat la dimensió del sistema, el mètode d'incrustació holomòrfica amb la formulació original combinada amb el P-W és capaç d'assolir un error satisfactori. Amb el vector $s_0 = [0,6; 0,65; 0,68; 0,72; 0,9]$ i una profunditat de 30 coeficients, l'error màxim resulta de $4,94 \cdot 10^{-11}$. En aquest i en tots els sistemes l'error s'ha minimitzat per mitjà del P-W encara que treballin a prop del col·lapse.



11. Resum del pressupost

L'import del projecte de resolució del flux de potències per mitjà del mètode d'incrustació holomòrfica és degut a l'aprenentatge i a la simulació dels sistemes de test, el que suma un total de catorze mil nou-cents vint-i-quatre euros, sense IVA.

12. Conclusions

El mètode d'incrustació holomòrfica s'ha presentat com una eina adient per solucionar el flux de potències de sistemes elèctrics ben condicionats i mal condicionats. Des d'un punt de vista purament resolutiu, és competitiu amb els mètodes iteratius tradicionals.

S'han treballat dues formulacions que en la seva essència es basen en el mateix però exhibeixen lleugeres variacions. Ambdues converteixen un problema definit a través d'equacions no lineals en successives equacions lineals. Les incògnites es tracten com sèries, i després de trobar suficients coeficients, el mètode és capaç d'assolir un resultat satisfactori. Totes dues han estat programades en Python, així com les diverses funcions que utilitzen.

La formulació pròpia és una contribució d'aquest treball, i s'ha integrat al programari GridCal. No força el compliment de l'estat de referència, de manera que els primers coeficients de les sèries de tensió difereixen de la unitat quan hi ha transformadors de relació de transformació variable. Per això els aproximants Sigma no sempre són bons indicadors. Tanmateix, arriba a la solució independentment de si hi ha transformadors de relació variable o no. Per la seva banda, la formulació original se centra en assolir l'estat de referència. Ho aconsegueix gràcies a la fragmentació de les matrius d'admitàncies en simètrica i asimètrica. Amb aquesta formulació la validesa dels aproximants Sigma no depèn de quina mena de transformadors hi hagi en el sistema.

S'ha raonat que els aproximants de Padé fonamenten el mètode d'incrustació holomòrfica gràcies al teorema d'Stahl. A part d'aquest, hi ha altres camins per trobar el valor final de les incògnites: els mètodes recurrents. Per a xarxes ben condicionades el mètode Èpsilon de Wynn i Eta de Bauer ofereixen errors equiparables als dels aproximants de Padé. En general els altres mètodes són menys convenients. L'estudi del radi de convergència determina si només amb el sumatori dels coeficients de les sèries se'n fa prou. Quan el radi excedeix la unitat, és una bona idea. Si no, cal emprar els mètodes de continuació analítica descrits. Per a xarxes mal condicionades es recorre al Padé-Weierstrass, que com el seu nom indica, igualment utilitza els aproximants de Padé.

Els aproximants de Thévenin resulten una eina potent a l'hora d'obtenir les corbes PV i QV. A diferència de tots els altres recursos per calcular el resultat final, generen no només la solució de la branca estable sinó també la de la branca inestable. El seu ús sobretot val la pena quan es computen les solucions a prop del punt de col·lapse de tensions. Encara que amb el mètode

d'incrustació bàsic l'error sigui elevat, tracen les corbes amb exactitud.

Els aproximants Sigma són l'eina de diagnòstic del mètode d'incrustació holomòrfica. Determinen si el resultat esdevé vàlid a partir de computar una arrel quadrada. Quan aquesta no té solució, l'estat de treball és físicament impossible. També proporcionen informació de forma gràfica. Situen un punt per cada bus PQ i PV en un pla, on s'hi dibuixa una paràbola. Quan tots els punts queden dins la paràbola, la solució queda validada, i viceversa. A més a més, permeten intuir a què són deguts els desplaçaments dels punts (variacions de potència activa o de reactiva) i identifiquen els busos conflictius. Fins i tot quan els punts queden fora la paràbola dóna idea dels busos problemàtics.




Quan les xarxes es troben operant a prop del punt de col·lapse de tensions, els gràfics Sigma identifiquen aquest estat de treball. Una mica més de càrrega, i indiquen que la solució no és factible. En tals condicions la combinació del mètode d'incrustació holomòrfica amb el Padé-Weierstrass resulta l'única manera d'obtenir un error acceptable. S'ha vist que és clau seleccionar el vector s_0 correctament perquè variar la profunditat té poca importància. El Padé-Weierstrass ha estat desenvolupat per a la formulació original, així que en sistemes carregats, s'ha d'evitar la formulació pròpia.


Dels sistemes seleccionats, ja des d'un inici el cas d'11 busos ha estat el més mal condicionat. Els radis de convergència eren inferiors als dels altres sistemes, i la distribució de punts en el gràfic Sigma, força anormal. Només el mètode de Levenberg-Marquardt i el desacoblat ràpid han obtingut les solucions correctes. Els altres convergien, però no proporcionaven el resultat operatiu adient. El mètode d'incrustació holomòrfica ha encertat el resultat amb les dues formulacions. A més a més, el diagnòstic indica que la solució és correcta, cosa que no s'aconsegueix amb els mètodes iteratius tradicionals. En aquest cas provoquen ambigüitat.



La resta de xarxes (IEEE14, IEEE30, Nord Pool, IEEE118 i Pegase2869) s'han resolt correctament amb els mètodes iteratius. No són sistemes mal condicionats des d'un principi. Els gràfics Sigma han donat una idea de quin era el desplaçament dels punts i s'ha justificat el motiu, mentre que les corbes PV i QV han caracteritzat les tensions al voltant del punt de col·lapse. El nombre d'iteracions requerit pels mètodes tradicionals pràcticament no ha variat amb les dimensions dels sistemes.




S'ha treballat un cas en corrent continu i un sistema amb una càrrega no lineal que s'han resolt per mitjà del mètode d'incrustació holomòrfica. En el sistema amb la càrrega no lineal la

solució s'ha comparat amb l'obtinguda a través del Gauss-Seidel, que si bé obtenia la mateixa solució, presentava un ritme de convergència inferior. Això  mostra que l'aplicació del mètode d'incrustació holomòrfica s'estén més enllà de les xarxes de transport i distribució.

 Al costat del mètode d'incrustació holomòrfica, **en general** els mètodes iteratius tradicionals també són capaços d'obtenir la solució correcta. No obstant això, la principal riquesa del mètode d'incrustació holomòrfica es troba en el ventall d'eines que ofereix. Els aproximants Sigma diagnostiquen el sistema tant abans com després del col·lapse, els aproximants Thévenin generen les corbes PV i PQ, i quan la solució inicial és millorable, el Padé-Weierstrass aconsegueix afinar-la. Es conclou que el mètode d'incrustació holomòrfica permet conèixer més a fons els sistemes elèctrics de potència.

12.1. Treball futur

La formulació original que s'ha desenvolupat és incompatible amb els aproximants Sigma quan hi ha transformadors de relació variable i amb el Padé-Weierstrass. En els dos casos el plantejament exigeix que els primers coeficients de tensió siguin unitaris. Tanmateix, es pensa que el Padé-Weierstrass es pot remodelar per a la formulació original encara que això impliqui el retard del càlcul dels coeficients de potència reactiva.

Un aspecte que queda obert és la interpretació en més detall de les sèries dels aproximants Sigma, que al cap i a la fi, participen  en un equivalent de dos busos entre el bus oscil·lant i qualsevol altre bus. Conèixer les sèries pot permetre que davant canvis de càrrega d'aquell bus, mitjançant l'equivalent **de dos busos**  no faci falta tornar a solucionar el flux de potències de tot el sistema. S'estima que això donaria lloc a  l'aproximació del valor final de tensió de forma més ràpida. Per aquest motiu pot tenir importància a l'hora de solucionar contingències, on la solució final no ha de ser exacta però sí que ha de ser extreta amb poc temps.

També fa falta comprendre la dependència entre s_0 i l'estat d'operació del sistema. Consegüentment l'ajust del vector s_0 s'efectuaria sense gaires intents. A més a més, aquest vector es pot anar omplint a mesura que es completa cada graó, no necessàriament a la inicialització.

Altres aspectes que queden pendents tenen a veure amb la integració de totes les funcionalitats del codi al GridCal. Actualment només hi consta la formulació pròpia, que va ser la que es va desenvolupar primer. No obstant això, per fer-ho més extensible caldria incorporar també la formulació original, de manera que els aproximants Sigma i el Padé-Weierstrass fos-

sin totalment compatibles. Fa falta integrar-hi els aproximants de Thévenin perquè avui en dia el GridCal no genera les dues branques de les corbes PV i QV. El creador del GridCal n'és conscient. Es preveu incloure-ho a les pròximes versions.

Manca analitzar els temps de càlcul que demana el mètode d'incrustació holomòrfica amb les dues formulacions al costat dels mètodes iteratius de programaris de simulació popularitzats per resoldre el flux de potències, com poden ser PowerWorld, MATPOWER o el mateix GridCal. És possible que el fet que la matriu del sistema no s'hagi d'invertir a cada càlcul faci competitiu el mètode d'incrustació holomòrfica. A més a més es beneficiaria d'un codi totalment vectoritzat, ja que en aquest treball no sempre s'hi troba.



Josep Fanals Batllori
Graduat en Enginyeria Elèctrica

Girona, 30 d'abril de 2020.

13. Relació de documents

Aquest projecte està constituït pels quatre documents següents: Memòria, Plec de condicions, Estat d'amidaments i Pressupost.

14. Bibliografia

ARRILLAGA, J., WATSON, N.R. Power System Harmonics. University of Canterbury. John Wiley & Sons Ltd. 2003.

BARRERO, F. Sistemas de energía eléctrica. Ediciones Paraninfo. Madrid. 2004.

BONINI, N.A., MATARUCCO, R.R., ALVES, D.A. Technique for Continuation Power Flow Using the Flat Start and for Ill-Conditioned Systems. World Journal Control Science and Engineering. Vol. 3. No. 1. p. 1-7. 2015.

BREZINSKI, C. A derivation of extrapolation algorithms based on error estimates. Journal of Computational and Applied Mathematics. Vol. 66. No. 1-2. p. 5-26. 1996.

CHRISTIE, R. Power systems test case archive. University of Washington. Department of Electrical Engineering. (<http://labs.ece.uw.edu/pstca>, 30 d'abril de 2020)

DRONAMRAJU, A., LI, S., LI, Q., LI, Y., TYLAVSKY, D., SHI, D., WANG, Z. Implications of Stahl's Theorems to Holomorphic Embedding Pt. 2: Numerical Convergence. 2020.

ELEQUANT. Company. Corporate Overview. (<http://elequant.com/company>, 22 de febrer de 2020)

FLISCOUNAKIS, S., PANCITICI, P., CAPITANESCU, F., WEHENKEL, L. Contingency ranking with respect to overloads in very large power systems taking into account uncertainty, preventive and corrective actions. IEEE Transactions on Power Systems. Vol 28. No. 4. p. 4909-4917. 2013.

GLOVER, J.D., SARMA, M.S., OVERBYE, T.J. Power System Analysis and Design. PWS Publishing Company. Boston. 2008.

GRIFFITHS, D.F. Numerical Analysis. Proceedings of the Biennial Conference Held at Dundee. Springer. 1983.

HARIHARAN, G., VARWANDKAR, S.D., GUPTA, P.P. Modular Load Flow for Restructured Power Systems. Lecture Notes in Electrical Engineering. Springer. 2016.

IWAMOTO, S., TAMURA, Y. A Load Flow Calculation Method for Ill-Conditioned Power Systems. IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems. Vol. PAS-100. No. 4. p. 1736-1743. 1981.

JOSZ, C., FLISCOUNAKIS, S., MAEGTH, J., PANCIATICI, P. AC Power Flow Data in MAT-POWER and QCQP Format: iTesla, RTE Snapshots, and PEGASE. 2016.

KOTHARI, D.P., NAGRATH, I.J. Modern Power Systems Analysis. Tata McGraw Hill. Nova Dehli. 2011.

LAGACE, P.J., VUONG, M.H., KAMWA, I. Improving power flow convergence by Newton Raph-son with a Levenberg-Marquardt method. IEEE Power and Energy Society General Meeting. Conversion and Delivery of Electrical Energy in the 21st Century. Pittsburgh. p. 1-6. 2008.

MERCER, G.N., ROBERTS, A. A centre manifold description of contaminant dispersion in channels with varying row properties. SIAM Journal on Applied Mathematics. Vol. 50. No. 6. p. 1547-1565. 1990.

MESAS, J.J. Estudio y caracterización de cargas no lineales. Tesis doctoral. Universitat Poli-tècnica de Catalunya. 2009.

NUMPY. User Guide. NumPy v1.18 Manual. (<https://numpy.org/doc/1.18/user/index.html>, 15 de gener de 2020)

PANDAS. User Guide. Pandas 1.0.0 Documentation. (https://pandas.pydata.org/pandas-docs/version/1.0.0/user_guide/index.html#user-guide, 23 de febrer de 2020)

PEÑATE, S. GridCal Documentation. (<https://gridcal.readthedocs.io/>, 17 de març de 2020a)

PEÑATE, S. GridCal. Grids and Profiles. (https://github.com/SanPen/GridCal/tree/master/Grids_and_profiles/grids, 4 d'abril de 2020b)

PRESS, W.H., TEUKOLSKY, S.A., VETTERLING, W.T., FLANNERY, B. P. Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing. Cambridge. 2007.

RASHID, A. Harmonic load flow formulation and numerical resolution. Doctoral thesis. Univer-sitat Politècnica de Catalunya. 2018.



RAO, S., FENG, Y., TYLAVSKY, D., SUBRAMANIAN, M.K. The Holomorphic Embedding Method Applied to the Power-Flow Problem. IEEE Transactions on Power Systems. Vol. 31. No. 5. p. 3816-3828. 2016.

RAO, S. Exploration of a Scalable Holomorphic Embedding Method Formulation for Power System Analysis Applications. Doctoral thesis. Arizona State University. Agost 2017.

SCHMIDT, B. Implementation and Evaluation of the Holomorphic Embedding Load Flow Method. Master thesis. Institute of Power Transmission Systems. Technical University of Munich. 2015.

SCIPY. Linear Algebra (scipy.linalg). SciPy v1.4.1 Reference Guide. (<https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/tutorial/linalg.html>, 22 de febrer de 2020)

SHANKS, D. Nonlinear transformations of divergent and slowly convergent sequences. Journal of Mathematical Physics. Vol. 34. No. 1-4. p. 1-42. 1955.

STAHL, H. The Convergence of Padé Approximants to Functions with Branch Points. Journal of Approximation Theory. Vol. 91. No. 2. p. 139-204. 1997.



STAHL, H. On the convergence of generalized Padé approximants. Constructive Approximation. Vol. 5. p. 221-240. 1989.

STOTT, B., ALSAC, O. Fast decoupled load flow. IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems. Vol. PAS-93. No. 3. p. 859-869. 1974.

SUBRAMANIAN, M.K. Application of Holomorphic Embedding to Power-Flow Problem. Master thesis. Arizona State University. 2014.

TRIAS, A. The Holomorphic Embedding Load Flow method. IEEE Power and Energy Society General Meeting. San Diego. p. 1-8. 2012.

TRIAS, A. Sigma algebraic approximants as a diagnostic tool in power networks. United States Patent Application Publication. 2014.

TRIAS, A. The Holomorphic Embedding Load-Flow Method. Foundations and Implementations. Foundations and Trends in Electric Energy Systems. Vol. 3. No. 3-4. p. 140-370. 2018.

TRIPATHY, S.C., DURGA, P.G., MALIK, O.P., HOPE, G.S. Load-Flow Solutions for Ill-Conditioned Power Systems by a Newton-Like Method. IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems. Vol. PAS-101. No. 10. p. 3648-3657, 1982.

VON ROSSUM, G. PEP 8. Style Guide for Python Code. (<https://www.python.org/dev/peps/pep-0008/>, 29 de març de 2020)

WENIGER, E.J. Nonlinear sequence transformations for the acceleration of convergence and the summation of divergent series. Computer Physics Reports. Vol. 10. No. 5-6. p. 189-371. 1989.

ZIMMERMAN, R.D., MURILLO-SÁNCHEZ, C.E., THOMAS, R.J. MATPOWER: Steady-State Operations, Planning and Analysis Tools for Power Systems Research and Education. IEEE Transactions on Power Systems. Vol. 26. No. 1. p. 1219. 2011.

15. Glossari

FDLF: desacoblat ràpid.

GS: Gauss-Seidel.



LM: Levenberg-Marquardt.

MIH: mètode d'incrustació holomòrfica.

NR: Newton-Raphson.

PQ: potència activa, potència reactiva.

PV: potència activa, mòdul de tensió.

P-W: Padé-Weierstrass.

QV: potència reactiva, mòdul de tensió.

A. Expressions de càlcul addicionals


Per facilitar la realització i la interpretació dels càlculs es treballa amb valors unitaris. També s'ofereixen les expressions que intervenen en la resolució del flux de potències del NR i del FDLF.

A.1. Valors unitaris

L'eina que s'utilitza a l'hora d'operar numèricament les equacions que regeixen els sistemes de potència és el que s'anomena valors unitaris o valors per unitat (pu). Aquests consisteixen en referir uns valors reals a una base determinada, és a dir, talment s'escalen els números. Segueixen:

$$X_{pu} = \frac{X_{real}}{X_{base}}, \quad (\text{Eq. 227})$$

on:

 X_{pu} : valor per unitat d'una magnitud determinada.

X_{real} : valor real, amb les unitats que li corresponguin.

X_{base} : valor base o de referència, amb les unitats que li corresponguin.

L'avantatge d'aquesta metodologia està el fet que si les bases s'escullen apropiadament, es pot aconseguir operar sovint amb valors propers a la unitat. A més, en circuits trifàsics permet prescindir de distingir entre tensions entre fases i tensions entre fase i neutre.

En el cas de sistemes elèctrics de potència es defineix una potència aparent de base S_b i una tensió de base V_b . A partir d'aquestes dues variables s'obté la intensitat de base I_b :

$$I_b = \frac{S_b}{\sqrt{3}V_b}, \quad (\text{Eq. 228})$$

i també la impedància de base Z_b :

$$Z_b = \frac{V_b^2}{S_b}. \quad (\text{Eq. 229})$$

A.2. Jacobià del NR

La resolució del flux de potències per mitjà del mètode de NR segueix l'estructura següent:

$$\begin{pmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J1 & J2 \\ J3 & J4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \delta \\ \Delta U/U \end{pmatrix}. \quad \text{(Eq. 230)}$$

Els elements del jacobià que es troben fora la diagonal dels diversos blocs matricials, tal com apunta Barrero (2004), obeeixen:

$$\begin{aligned} J1_{ik} &= J4_{ik} = U_i U_k Y_{ik} \sin(\delta_{ik} - \gamma_{ik}), \\ J2_{ik} &= -J3_{ik} = U_i U_k Y_{ik} \cos(\delta_{ik} - \gamma_{ik}), \end{aligned} \quad \text{(Eq. 231)}$$

on $k \neq i$. Per la seva banda, els elements que constitueixen la diagonal són:

$$\begin{aligned} J1_{ii} &= -Q_i - U_i^2 Y_{ii} \sin \gamma_{ii}, \\ J2_{ii} &= P_i + U_i^2 Y_{ii} \cos \gamma_{ii}, \\ J3_{ii} &= P_i - U_i^2 Y_{ii} \cos \gamma_{ii}, \\ J4_{ii} &= Q_i - U_i^2 Y_{ii} \sin \gamma_{ii}. \end{aligned} \quad \text{(Eq. 232)}$$

El càlcul d'aquests elements s'ha de dur a terme a cada iteració.

A.3. Matrius B' i B'' del FDLF

La resolució del flux de potències a través del FDLF es planteja com:

$$\begin{aligned} \Delta P/U &= B' \Delta \delta, \\ \Delta Q/U &= B'' \Delta U. \end{aligned} \quad \text{(Eq. 233)}$$

La matriu B' té la mateixa dimensió que J1. Es calcula a partir de les reactàncies X de les branques sèrie de línies i transformadors. Pels elements fora la diagonal:



$$B'_{ik} = \frac{-1}{X_{ik}}, \quad \text{(Eq. 234)}$$

mentre que pels de la diagonal:

$$B'_{ii} = \sum_k 1/X_{ik}. \quad \text{(Eq. 235)}$$

Per altre costat, la matriu B quant a dimensions és idèntica a J_4 . Es forma a partir de la part imaginària de les diverses entrades la matriu d'admitàncies completa. Es denoten per B . Els elements que no formen part de la diagonal es defineixen com:

$$B''_{ik} = -B_{ik}. \quad (\text{Eq. 236})$$

Pels elements de la diagonal s'utilitza:

$$B''_{ii} = -B_{ii}. \quad (\text{Eq. 237})$$

Com que aquestes matrius només contenen dades de la topologia del circuit, romanen constants al llarg de totes les iteracions.

B. Codi

Es presenta el codi de la formulació pròpia, de la formulació original, de les funcions que utilitza el mètode d'incrustació holomòrfica, del Padé-Weierstrass i també d'algunes representacions gràfiques com el gràfic Sigma, per exemple. En últim lloc hi figura el codi per resoldre el flux de potències del circuit en contínua que inclou un díode i del circuit format per una làmpada de descàrrega (en aquest darrer cas, tant hi apareix el MIH com el GS).

B.1. MIH formulació pròpia

```
# LLIBRERIES
import numpy as np
from mpmath import mp # per tenir més decimals
mp.dps = 50
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.sparse import csc_matrix, coo_matrix
from scipy.sparse import lil_matrix, diags, hstack, vstack
from scipy.sparse.linalg import spsolve, factorized

np.set_printoptions(linewidth=2000, edgeitems=1000, suppress=True)
pd.set_option('display.max_rows', 5000)
pd.set_option('display.max_columns', 1000)
pd.set_option('display.width', 2000)
pd.set_option("display.precision", 5)

# FI LLIBRERIES

def conv(A, B, c, i, tipus): # tres tipus de convolucions a executar
    if tipus == 1:
        suma = [np.conj(A[k, i]) * B[c - k, i] for k in range(1, c + 1)]
        return sum(suma)
    elif tipus == 2:
        suma = [A[k, i] * B[c - 1 - k, i] for k in range(1, c)]
        return sum(suma)
    elif tipus == 3:
        suma = [A[k, i] * np.conj(B[c - k, i]) for k in range(1, c)]
        return sum(suma)

# DEFINICIÓ D'OBJECTES INICIALS
df_top = pd.read_excel('IEEE30.xlsx', sheet_name='Topologia') # dades de topologia
df_bus = pd.read_excel('IEEE30.xlsx', sheet_name='Busos') # dades dels busos

n = df_bus.shape[0] # nombre de busos, inclou l'oscil·lant
nl = df_top.shape[0] # nombre de línies
```

```

A = np.zeros((n, nl), dtype= int) # matriu d'incidència, formada per 1, -1 i 0
L = np.zeros((nl, nl), dtype= complex) # matriu amb les branques
np.fill_diagonal(L, [1 / (df_top.iloc[i, 2] + df_top.iloc[i, 3] * 1j) for i in range(nl)])
A[df_top.iloc[ range(nl), 0], range(nl)] = 1
A[df_top.iloc[ range(nl), 1], range(nl)] = -1

Yseries = np.dot(np.dot(A, L), np.transpose(A)) # matriu de les branques sèrie, es reduirà
Yseries_real = np.zeros((n, n), dtype= complex)
Yseries_real[:, :] = Yseries[:, :] # també contindrà les admitàncies amb el bus oscil·lant

for i in range(nl): # emplenar matriu quan hi ha trafo de relació variable
    tap = df_top.iloc[i, 5]
    ang_tap = df_top.iloc[i, 6]
    tap = abs(tap) * np.cos(ang_tap) + abs(tap) * np.sin(ang_tap) * 1j
    if tap != 1:
        Yseries[df_top.iloc[i, 0], df_top.iloc[i, 0]] += -1 / (df_top.iloc[i, 2] + df_top.iloc
[i, 3] * 1j) \
            + 1 / (df_top.iloc[i, 2] + df_top.iloc[i, 3] * 1j) / (tap ** 2)
        Yseries[df_top.iloc[i, 1], df_top.iloc[i, 1]] += -1 / (df_top.iloc[i, 2] + df_top.iloc
[i, 3] * 1j) \
            + 1 / (df_top.iloc[i, 2] + df_top.iloc[i, 3] * 1j)
        Yseries[df_top.iloc[i, 0], df_top.iloc[i, 1]] += +1 / (df_top.iloc[i, 2] + df_top.iloc
[i, 3] * 1j) \
            + -1 / (df_top.iloc[i, 2] + df_top.iloc[i, 3] * 1j) / np.conj(tap)
        Yseries[df_top.iloc[i, 1], df_top.iloc[i, 0]] += +1 / (df_top.iloc[i, 2] + df_top.iloc
[i, 3] * 1j) \
            + -1 / (df_top.iloc[i, 2] + df_top.iloc[i, 3] * 1j) / tap

Yseries = csc_matrix(Yseries) # a dispersa
Yseries_real = csc_matrix(Yseries_real)

vec_Pi = np.zeros(n, dtype= float) # dades de potència activa
vec_Qi = np.zeros(n, dtype= float) # dades de potència reactiva
vec_Vi = np.zeros(n, dtype= float) # dades de tensió
vec_Wi = np.zeros(n, dtype= float) # tensió al quadrat

pq = [] # índexs dels busos PQ
pv = [] # índexs dels busos PV
sl = [] # índexs dels busos slack
vec_Pi[:] = np.nan_to_num(df_bus.iloc[:, 1]) # emplenar el vector de números
vec_Qi[:] = np.nan_to_num(df_bus.iloc[:, 2])
vec_Vi[:] = np.nan_to_num(df_bus.iloc[:, 3])
V_sl = [] # tensions dels oscil·lants

for i in range(n): # cerca per guardar els índexs
    if df_bus.iloc[i, 5] == 'PQ':
        pq.append(i)
    elif df_bus.iloc[i, 5] == 'PV':

```

```

        pv.append(i)
    elif df_bus.iloc[i, 5] == 'Slack':
        V_sl.append(df_bus.iloc[i, 3]*(np.cos(df_bus.iloc[i, 4])+np.sin(df_bus.iloc[i, 4])*1j)
    )
    sl.append(i)

pq = np.array(pq) # índexs en forma de vector
pv = np.array(pv)
npq = len(pq) # nombre de busos PQ
npv = len(pv) # nombre de busos PV

if npv > 0 and npq > 0: # ordenar els índexs
    pqpv = np.sort(np.r_[pq, pv])
elif npq > 0:
    pqpv = np.sort(pq)
elif npv > 0:
    pqpv = np.sort(pv)

pq_x = pq # guardar els índexs originals
pv_x = pv

npqpv = npq + npv # nombre de busos incògnita
nsl = n - npqpv # nombre de busos oscil·lants

vec_P = vec_Pi[ppqv] # agafar la part del vector necessària
vec_Q = vec_Qi[ppqv]
vec_V = vec_Vi[ppqv]

factor_carrega = 1.0 # factor de càrrega de les potències de tots els busos
vec_P = factor_carrega * vec_P
vec_Q = factor_carrega * vec_Q

vecx_shunts = np.zeros((n, 1), dtype=
    complex) # vector amb admitàncies shunt, canviat de signe
for i in range(nl):
    if df_top.iloc[i, 5] == 1: # si la relació de transformació és unitària
        vecx_shunts[df_top.iloc[i, 0], 0] += df_top.iloc[i, 4] * -1j # es donen en forma d'
        admitàncies
        vecx_shunts[df_top.iloc[i, 1], 0] += df_top.iloc[i, 4] * -1j
    else:
        vecx_shunts[df_top.iloc[i, 0], 0] += df_top.iloc[i, 4] * -1j / (df_top.iloc[i, 5] **
        2)
        vecx_shunts[df_top.iloc[i, 1], 0] += df_top.iloc[i, 4] * -1j

for i in range(n): # afegir les càrregues d'admitància constant
    vecx_shunts[df_bus.iloc[i, 0], 0] += df_bus.iloc[i, 6] * -1
    vecx_shunts[df_bus.iloc[i, 0], 0] += df_bus.iloc[i, 7] * -1j

vec_shunts = vecx_shunts[ppqv] # reduïda

```



```

df = pd.DataFrame(data=np.c_[vecx_shunts, vec_Pi, vec_Qi, vec_Vi], columns=['Ysh', 'P0', 'Q0',
    'V0'])
print(df) # imprimir dades inicials

Yslx = np.zeros((n, n), dtype= complex) # admitàncies que connecten als oscil·lants

for i in range(nl):
    tap = df_top.iloc[i, 5]
    ang_tap = df_top.iloc[i, 6]
    tap = abs(tap) * np.cos(ang_tap) + abs(tap) * np.sin(ang_tap) * 1j
    if tap == 1:
        if df_top.iloc[i, 0] in sl:
            Yslx[df_top.iloc[i, 1], df_top.iloc[i, 0]] = 1 / (df_top.iloc[i, 2] + df_top.iloc[
i, 3] * 1j) + \
                                                    Yslx[df_top.iloc[i, 1], df_top.
iloc[i, 0]]
        elif df_top.iloc[i, 1] in sl:
            Yslx[df_top.iloc[i, 0], df_top.iloc[i, 1]] = 1 / (df_top.iloc[i, 2] + df_top.iloc[
i, 3] * 1j) + \
                                                    Yslx[df_top.iloc[i, 0], df_top.
iloc[i, 1]]
    else:
        if df_top.iloc[i, 0] in sl:
            Yslx[df_top.iloc[i, 1], df_top.iloc[i, 0]] += +1 / (df_top.iloc[i, 2] + df_top.
iloc[i, 3] * 1j) / \
                                                    (np.conj(tap))
        elif df_top.iloc[i, 1] in sl:
            Yslx[df_top.iloc[i, 0], df_top.iloc[i, 1]] += +1 / (df_top.iloc[i, 2] + df_top.
iloc[i, 3] * 1j) / tap

Ysl1 = Yslx[:, sl]
Ysl = Ysl1[pqp, :] # reduïda al que veuen els busos PQ i PV
# FI DEFINICIÓ OBJECTES INICIALS

# PREPARACIÓ DE LA IMPLEMENTACIÓ
prof = 30 # nombre de coeficients de les sèries

U = np.zeros((prof, npqp), dtype= complex) # sèries de voltatges
U_re = np.zeros((prof, npqp), dtype= float) # part real de voltatges
U_im = np.zeros((prof, npqp), dtype= float) # part imaginària de voltatges
X = np.zeros((prof, npqp), dtype= complex) # tensió inversa conjugada
X_re = np.zeros((prof, npqp), dtype= float) # part real d'X
X_im = np.zeros((prof, npqp), dtype= float) # part imaginària d'X
Q = np.zeros((prof, npqp), dtype= complex) # sèries de potències reactives

vec_W = vec_V * vec_V # mòdul de les tensions al quadrat
dimensions = 2 * npq + 3 * npv # nombre d'incògnites

```

```

Yred = Yseries[np.ix_(pqpv, pqpv)] # reduir per deixar de banda els oscil·lants
G = np.real(Yred) # part real de la matriu
B = np.imag(Yred) # part imaginària de la matriu

nsl_compt = np.zeros(n, dtype= int) # nombre de busos oscil·lants trobats abans d'un bus
compt = 0
for i in range(n):
    if i in sl:
        compt += 1
        nsl_compt[i] = compt
if npv > 0 and npq > 0:
    pq_ = pq - nsl_compt[pq]
    pv_ = pv - nsl_compt[pv]
    pqpv_ = np.sort(np.r_[pq_, pv_])
elif npq > 0:
    pq_ = pq - nsl_compt[pq]
    pqpv_ = np.sort(pq_)
elif npv > 0:
    pv_ = pv - nsl_compt[pv]
    pqpv_ = np.sort(pv_)
# FI PREPARACIÓ DE LA IMPLEMENTACIÓ

# TERMES [0]
if nsl > 1:
    U[0, :] = spsolve(Yred, Ysl.sum(axis=1)) # solucionar el sistema
else:
    U[0, :] = spsolve(Yred, Ysl)

X[0, :] = 1 / np.conj(U[0, :])
U_re[0, :] = U[0, :].real
U_im[0, :] = U[0, :].imag
X_re[0, :] = X[0, :].real
X_im[0, :] = X[0, :].imag
# FI TERMES [0]

# TERMES [1]
valor = np.zeros(npqpv, dtype= complex)

prod = np.dot((Ysl[pqpv_, :]), V_sl[:]) # intensitat que injecten els oscil·lants

if npq > 0:
    valor[pq_] = prod[pq_] \
        - Ysl[pq_].sum(axis=1) + (vec_P[pq_] - vec_Q[pq_] * 1j) * X[0, pq_] \
        + U[0, pq_] * vec_shunts[pq_, 0]
if npv > 0:
    valor[pv_] = prod[pv_] \
        - Ysl[pv_].sum(axis=1) \
        + (vec_P[pv_]) * X[0, pv_] \
        + U[0, pv_] * vec_shunts[pv_, 0]

```

```

RHS = np.r_[valor.real,
            valor.imag,
            vec_W[pv_] - np.real(U[0, pv_] * np.conj(U[0, pv_]))] # vector de la dreta
del sistema d'equacions

VRE = coo_matrix((2 * U_re[0, pv_], (np.arange(npv), pv_)), shape=(npv, npqpvp)).tocsc() #
matriu COO a compr.
VIM = coo_matrix((2 * U_im[0, pv_], (np.arange(npv), pv_)), shape=(npv, npqpvp)).tocsc()
XIM = coo_matrix((-X_im[0, pv_], (pv_, np.arange(npv))), shape=(npqpvp, npv)).tocsc()
XRE = coo_matrix((X_re[0, pv_], (pv_, np.arange(npv))), shape=(npqpvp, npv)).tocsc()
EMPTY = csc_matrix((npv, npv)) # matriu dispera comprimida

MAT = vstack((hstack((G, -B, XIM)),
               hstack((B, G, XRE)),
               hstack((VRE, VIM, EMPTY))), format='csc')

else:
    RHS = np.r_[valor.real,
                valor.imag]
    MAT = vstack((hstack((G, -B)),
                  hstack((B, G))), format='csc')

MAT_LU = factorized(MAT.tocsc()) # matriu factoritzada, només cal fer-ho una vegada
LHS = MAT_LU(RHS) # vector amb les solucions

U_re[1, :] = LHS[:npqpvp] # actualització de les incògnites
U_im[1, :] = LHS[npqpvp:2 * npqpvp]
if npv > 0:
    Q[0, pv_] = LHS[2 * npqpvp:]

U[1, :] = U_re[1, :] + U_im[1, :] * 1j
X[1, :] = (-X[0, :] * np.conj(U[1, :])) / np.conj(U[0, :])
X_re[1, :] = X[1, :].real
X_im[1, :] = X[1, :].imag
# FI TERMES [1]

# TERMES [c>=2]
range_pqpvp = np.arange(npqpvp) # tots els busos ordenats

for c in range(2, prof): # c és la profunditat actual
    if npq > 0:
        valor[pq_] = (vec_P[pq_] - vec_Q[pq_] * 1j) * X[c - 1, pq_] + U[c - 1, pq_] *
        vec_shunts[pq_, 0]
    if npv > 0:
        valor[pv_] = conv(X, Q, c, pv_, 2) * -1j + U[c - 1, pv_] * vec_shunts[pv_, 0] + X[c -
        1, pv_] * vec_P[pv_]
        RHS = np.r_[valor.real,

```

```

        valor.imag,
        -conv(U, U, c, pv_, 3).real] # vector de la dreta del sistema d'equacions
else:
    RHS = np.r_[valor.real,
               valor.imag]

    LHS = MAT_LU(RHS) # vector amb les solucions

    U_re[c, :] = LHS[:npqp] # actualització de les incògnites
    U_im[c, :] = LHS[npqp:2 * npqp]
    if npv > 0:
        Q[c - 1, pv_] = LHS[2 * npqp:]

    U[c, :] = U_re[c, :] + 1j * U_im[c, :]
    X[c, range_pqp] = -conv(U, X, c, range_pqp, 1) / np.conj(U[0, range_pqp])
    X_re[c, :] = np.real(X[c, :])
    X_im[c, :] = np.imag(X[c, :])
# FI TERMES [c>=2]

# RESULTATS
Pfi = np.zeros(n, dtype= complex) # potència activa final
Qfi = np.zeros(n, dtype= complex) # potència reactiva final
U_sum = np.zeros(n, dtype= complex) # tensió a partir la suma de coeficients
U_pa = np.zeros(n, dtype= complex) # tensió amb aproximants de Padé
U_th = np.zeros(n, dtype= complex) # tensió amb aproximants de Thévenin
U_ait = np.zeros(n, dtype= complex) # tensió amb Delta d'Aitken
U_shanks = np.zeros(n, dtype= complex) # tensió amb transformacions de Shanks
U_rho = np.zeros(n, dtype= complex) # tensió amb Rho de Wynn
U_eps = np.zeros(n, dtype= complex) # tensió amb Èpsilon de Wynn
U_theta = np.zeros(n, dtype= complex) # tensió amb Theta de Brezinski
U_eta = np.zeros(n, dtype= complex) # tensió amb Eta de Bauer
Q_eps = np.zeros(n, dtype= complex)
Q_ait = np.zeros(n, dtype= complex)
Q_rho = np.zeros(n, dtype= complex)
Q_theta = np.zeros(n, dtype= complex)
Q_eta = np.zeros(n, dtype= complex)
Q_sum = np.zeros(n, dtype= complex)
Q_shanks = np.zeros(n, dtype= complex)
Sig_re = np.zeros(n, dtype= complex) # part real de sigma
Sig_im = np.zeros(n, dtype= complex) # part imaginària de sigma

Ybus = Yseries - diags(vecx_shunts[:, 0]) # matriu d'admitàncies total

from Funcions import pade4all, thevenin, Sigma, aitken, shanks, rho, epsilon, theta, eta #
importar funcions

# SUMA
U_sum[pqp] = np.sum(U[:, pqp:], axis=0)
U_sum[sl] = V_sl

```

```

if npq > 0:
    Q_sum[pq] = vec_Q[pq_]
if npv > 0:
    Q_sum[pv] = np.sum(Q[:, pv_], axis=0)
Q_sum[sl] = np.nan
# FI SUMA

# PADÉ
Upa = pade4all(prof, U[:, :], 1)
if npv > 0:
    Qpa = pade4all(prof-1, Q[:, pv_], 1) # trobar reactiva amb Padé
U_pa[sl] = V_sl
U_pa[pqp] = Upa
Pfi[pqp] = vec_P[pqp_]
if npq > 0:
    Qfi[pq] = vec_Q[pq_]
if npv > 0:
    Qfi[pv] = Qpa
Pfi[sl] = np.nan
Qfi[sl] = np.nan
# FI PADÉ

limit = 12 # límit per no utilitzar tots els coeficients
if limit > prof:
    limit = prof - 1

# SIGMA
Ux1 = np.copy(U)
Sig_re[pqp] = np.real(Sigma(Ux1, X, prof - 1, V_sl))
Sig_im[pqp] = np.imag(Sigma(Ux1, X, prof - 1, V_sl))
Sig_re[sl] = np.nan
Sig_im[sl] = np.nan

arrel = np.zeros(n, dtype= float) # discriminant
arrel[sl] = np.nan
arrel[pqp] = 0.25 + np.abs(Sig_re[pqp]) - np.abs(Sig_im[pqp]) ** 2
# FI SIGMA

# THÉVENIN
Ux2 = np.copy(U)
for i in pq:
    U_th[i] = thevenin(Ux2[:limit, i - nsl_compt[i]], X[:limit, i - nsl_compt[i]])
# FI THÉVENIN

# RECURRENTS
Ux = np.copy(U)
Qx = np.copy(Q)

for i in range(npqp):

```

```

    U_ait[i] = aitken(Ux[:, i], limit)
    U_shanks[i] = shanks(Ux[:, i], limit)
    U_rho[i] = rho(Ux[:, i], limit)
    U_eps[i] = epsilon(Ux[:, i], limit)
    U_theta[i] = theta(Ux[:, i], limit)
    U_eta[i] = eta(Ux[:, i], limit)

    if i in pq_:
        Q_ait[i + nsl_compt[i]] = vec_Q[i]
        Q_shanks[i + nsl_compt[i]] = vec_Q[i]
        Q_rho[i + nsl_compt[i]] = vec_Q[i]
        Q_eps[i + nsl_compt[i]] = vec_Q[i]
        Q_theta[i + nsl_compt[i]] = vec_Q[i]
        Q_eta[i + nsl_compt[i]] = vec_Q[i]

    elif i in pv_:
        Q_ait[i + nsl_compt[i]] = aitken(Qx[:, i], limit)
        Q_shanks[i + nsl_compt[i]] = shanks(Qx[:, i], limit)
        Q_rho[i + nsl_compt[i]] = rho(Qx[:, i], limit)
        Q_eps[i + nsl_compt[i]] = epsilon(Qx[:, i], limit)
        Q_theta[i + nsl_compt[i]] = theta(Qx[:, i], limit)
        Q_eta[i + nsl_compt[i]] = eta(Qx[:, i], limit)

U_ait[pqpv] = U_ait[pqpv_]
U_ait[sl] = V_sl
Q_ait[sl] = np.nan
U_shanks[pqpv] = U_shanks[pqpv_]
U_shanks[sl] = V_sl
Q_shanks[sl] = np.nan
U_rho[pqpv] = U_rho[pqpv_]
U_rho[sl] = V_sl
Q_rho[sl] = np.nan
U_eps[pqpv] = U_eps[pqpv_]
U_eps[sl] = V_sl
Q_eps[sl] = np.nan
U_theta[pqpv] = U_theta[pqpv_]
U_theta[sl] = V_sl
Q_theta[sl] = np.nan
U_eta[pqpv] = U_eta[pqpv_]
U_eta[sl] = V_sl
Q_eta[sl] = np.nan
# FI RECURRENTS

Ybus = Ybus.todense()

# ERRORS
S_out_sum = np.asarray(U_sum) * np.conj(np.asarray(np.dot(Ybus, U_sum)))
S_in_sum = (Pfi[:] + 1j * Q_sum[:])
error_sum = S_in_sum - S_out_sum

```

```

S_out = np.asarray(U_pa) * np.conj(np.asarray(np.dot(Ybus, U_pa)))
S_in = (Pfi[:] + 1j * Qfi[:])
error = S_in - S_out # error final de potències amb Padé

S_out_ait = np.asarray(U_ait) * np.conj(np.asarray(np.dot(Ybus, U_ait)))
S_in_ait = (Pfi[:] + 1j * Q_ait[:])
error_ait = S_in_ait - S_out_ait

S_out_shanks = np.asarray(U_shanks) * np.conj(np.asarray(np.dot(Ybus, U_shanks)))
S_in_shanks = (Pfi[:] + 1j * Q_shanks[:])
error_shanks = S_in_shanks - S_out_shanks

S_out_rho = np.asarray(U_rho) * np.conj(np.asarray(np.dot(Ybus, U_rho)))
S_in_rho = (Pfi[:] + 1j * Q_rho[:])
error_rho = S_in_rho - S_out_rho

S_out_eps = np.asarray(U_eps) * np.conj(np.asarray(np.dot(Ybus, U_eps)))
S_in_eps = (Pfi[:] + 1j * Q_eps[:])
error_eps = S_in_eps - S_out_eps

S_out_theta = np.asarray(U_theta) * np.conj(np.asarray(np.dot(Ybus, U_theta)))
S_in_theta = (Pfi[:] + 1j * Q_theta[:])
error_theta = S_in_theta - S_out_theta

S_out_eta = np.asarray(U_eta) * np.conj(np.asarray(np.dot(Ybus, U_eta)))
S_in_eta = (Pfi[:] + 1j * Q_eta[:])
error_eta = S_in_eta - S_out_eta
# FI ERRORS

df = pd.DataFrame(
    np.c_[np. abs(U_sum), np.angle(U_sum), np.
    abs(U_pa), np.angle(U_pa), np.real(Sig_re), np.real(Sig_im),
    np. abs(error[0, :])], columns=['|V| sum', 'A. sum', '|V| Padé', 'A. Padé', 'Sigma
    re', 'Sigma im', 'S error'])
print(df)

print('Error màxim amb suma: ', max( abs(np.r_[error_sum[0, pqpv]])))
print('Error màxim amb Padé: ', max( abs(np.r_[error[0, pqpv]])))
print('Error màxim amb Delta d\'Aitken: ', max( abs(np.r_[error_ait[0, pqpv]])))
print('Error màxim amb transformacions de Shanks: ', max( abs(np.r_[error_shanks[0, pqpv]])))
print('Error màxim amb Rho de Wynn: ', max( abs(np.r_[error_rho[0, pqpv]])))
print('Error màxim amb Èpsilon de Wynn: ', max( abs(np.r_[error_eps[0, pqpv]])))
print('Error màxim amb Theta de Brezinski: ', max( abs(np.r_[error_theta[0, pqpv]])))
print('Error màxim amb Eta de Bauer: ', max( abs(np.r_[error_eta[0, pqpv]])))

```

B.2. MIH formulació original

```
# LLIBRERIES
```

```

import numpy as np
from mpmath import mp # per tenir més decimals
mp.dps = 50
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.sparse import csc_matrix, coo_matrix
from scipy.sparse import lil_matrix, diags, hstack, vstack
from scipy.sparse.linalg import spsolve, factorized

np.set_printoptions(linewidth=2000, edgeitems=1000, suppress=True)
pd.set_option('display.max_rows', 5000)
pd.set_option('display.max_columns', 1000)
pd.set_option('display.width', 2000)
pd.set_option("display.precision", 5)
# FI LLIBRERIES

# DEFINICIÓ D'OBJECTES INICIALS
df_top = pd.read_excel('IEEE30.xlsx', sheet_name='Topologia') # dades de la topologia
df_bus = pd.read_excel('IEEE30.xlsx', sheet_name='Busos') # dades dels busos

n = df_bus.shape[0] # nombre de busos, inclou l'oscil·lant
nl = df_top.shape[0] # nombre de línies

A = np.zeros((n, nl), dtype= int) # matriu d'incidència, formada per 1, -1 i 0
L = np.zeros((nl, nl), dtype= complex) # matriu amb les branques
np.fill_diagonal(L, [1 / (df_top.iloc[i, 2] + df_top.iloc[i, 3] * 1j) for i in range(nl)])
A[df_top.iloc[ range(nl), 0], range(nl)] = 1
A[df_top.iloc[ range(nl), 1], range(nl)] = -1

Yseries = np.dot(np.dot(A, L), np.transpose(A)) # matriu de les branques sèrie, es reduirà
Yseries_slack = np.zeros((n, n), dtype= complex)
Yseries_slack[:, :] = Yseries[:, :] # també contindrà les admitàncies amb el bus oscil·lant

Ytap = np.zeros((n, n), dtype= complex) # agrupa les asimètries
for i in range(nl): # emplenar matriu quan hi ha trafo de relació variable
    tap = df_top.iloc[i, 5]
    ang_tap = df_top.iloc[i, 6]
    tap = abs(tap) * np.cos(ang_tap) + abs(tap) * np.sin(ang_tap) * 1j
    if tap != 1 or ang_tap != 0:
        Ytap[df_top.iloc[i, 0], df_top.iloc[i, 0]] += 1 / (df_top.iloc[i, 2] + df_top.iloc[i,
3] * 1j) / \
                                                    (tap * np.conj(tap)) - 1 / (
                                                    df_top.iloc[i, 2] + df_top.
iloc[i, 3] * 1j)
        Ytap[df_top.iloc[i, 1], df_top.iloc[i, 1]] += 1 / (df_top.iloc[i, 2] + df_top.iloc[i,
3] * 1j) \
                                                    - 1 / (df_top.iloc[i, 2] + df_top.iloc
[i, 3] * 1j)
        Ytap[df_top.iloc[i, 0], df_top.iloc[i, 1]] += - 1 / (df_top.iloc[i, 2] + df_top.iloc[i

```



```

, 3] * 1j) / \
                                (np.conj(tap)) + 1 / (
                                df_top.iloc[i, 2] + df_top.

iloc[i, 3] * 1j)
    Ytap[df_top.iloc[i, 1], df_top.iloc[i, 0]] += - 1 / (df_top.iloc[i, 2] + df_top.iloc[i
, 3] * 1j) / \
                                (tap) + 1 / (
                                df_top.iloc[i, 2] + df_top.

iloc[i, 3] * 1j)

vec_Pi = np.zeros(n, dtype= float) # dades de potència activa
vec_Qi = np.zeros(n, dtype= float) # dades de potència reactiva
vec_Vi = np.zeros(n, dtype= float) # dades de tensió
vec_Wi = np.zeros(n, dtype= float) # tensió al quadrat

pq = [] # índexs dels busos PQ
pv = [] # índexs dels busos PV
sl = [] # índexs dels busos oscil·lants
vec_Pi[:] = np.nan_to_num(df_bus.iloc[:, 1]) # emplenar el vector de números
vec_Qi[:] = np.nan_to_num(df_bus.iloc[:, 2])
vec_Vi[:] = np.nan_to_num(df_bus.iloc[:, 3])
V_sl = [] # tensions dels oscil·lants

for i in range(n): # cerca per guardar els índexs
    if df_bus.iloc[i, 5] == 'PQ':
        pq.append(i)
    elif df_bus.iloc[i, 5] == 'PV':
        pv.append(i)
    elif df_bus.iloc[i, 5] == 'Slack':
        sl.append(i)
        V_sl.append(df_bus.iloc[i, 3] * (np.cos(df_bus.iloc[i, 4]) + np.sin(df_bus.iloc[i, 4])
        * 1j))

pq = np.array(pq) # índexs en forma de vector
pv = np.array(pv)
sl = np.array(sl)
npq = len(pq) # nombre de busos PQ
npv = len(pv) # nombre de busos PV
nsl = len(sl) # nombre de busos oscil·lants
npqp = npq + npv # nombre de busos incògnita

pqpv_x = np.sort(np.r_[pq, pv]) # ordenar els vectors amb incògnites
pqpv = []
[pqpv.append(int(pqpv_x[i])) for i in range(len(pqpv_x))] # convertir els índexs a enters

pq_x = pq # guardar els índexs originals
pv_x = pv

vec_P = vec_Pi[pqpv] # agafar la part del vector necessària

```

```

vec_Q = vec_Qi[pqpv]
vec_V = vec_Vi[pqpv]

factor_carrega = 1.0 # factor de càrrega de les potències de tots els busos
vec_P = factor_carrega * vec_P
vec_Q = factor_carrega * vec_Q

Yshunts = np.zeros(n, dtype= complex) # admitàncies en paral·lel, degudes a les capacitats
for i in range(nl):
    if df_top.iloc[i, 5] == 1: # si la relació de transformació és unitària
        Yshunts[df_top.iloc[i, 0]] += df_top.iloc[i, 4] * 1j # es donen en forma d'admitàncies
        Yshunts[df_top.iloc[i, 1]] += df_top.iloc[i, 4] * 1j
    else:
        Yshunts[df_top.iloc[i, 0]] += df_top.iloc[i, 4] * 1j / (df_top.iloc[i, 5] ** 2)
        Yshunts[df_top.iloc[i, 1]] += df_top.iloc[i, 4] * 1j

for i in range(n): # afegir les càrregues d'admitància constant
    Yshunts[df_bus.iloc[i, 0]] += df_bus.iloc[i, 6] * 1
    Yshunts[df_bus.iloc[i, 0]] += df_bus.iloc[i, 7] * 1j

Yshunts_slack = np.zeros(n, dtype= complex) # inclou els busos oscil·lants, no es redueix
Yshunts_slack[:] = Yshunts[:]

df = pd.DataFrame(data=np.c_[Yshunts, vec_Pi, vec_Qi, vec_Vi], columns=['Ysh', 'P0', 'Q0', 'V0'])
print(df) # imprimir dades inicials

Yslack = Yseries_slack[:, sl] # les columnes pertanyents als oscil·lants
# FI DEFINICIÓ OBJECTES INICIALS

# PREPARACIÓ DE LA IMPLEMENTACIÓ
prof = 60 # nombre de coeficients de les sèries

U = np.zeros((prof, npqp), dtype= complex) # sèries de voltatges
U_re = np.zeros((prof, npqp), dtype= float) # part real de voltatges
U_im = np.zeros((prof, npqp), dtype= float) # part imaginària de voltatges
X = np.zeros((prof, npqp), dtype= complex) # tensió inversa conjugada
X_re = np.zeros((prof, npqp), dtype= float) # part real d'X
X_im = np.zeros((prof, npqp), dtype= float) # part imaginària d'X
Q = np.zeros((prof, npqp), dtype= complex) # sèries de potències reactives

W = vec_V * vec_V # mòdul de les tensions al quadrat
dim = 2 * npq + 3 * npv # nombre d'incògnites
Yseries = Yseries[np.ix_(pqp, pqp)] # reduir per deixar de banda els oscil·lants
Ytaps = Ytap[np.ix_(pqp, pqp)] # reduir per deixar de banda els oscil·lants
Ytapslack = Ytap[np.ix_(pqp, sl)] # columnes de la matriu d'admitàncies asimètrica per als oscil·lants

```

```

G = np.real(Yseries) # part real de la matriu simètrica
B = np.imag(Yseries) # part imaginària de la matriu simètrica
Yshunts = Yshunts[pqp_v] # reduir per deixar de banda els slack
Yslack = Yslack[pqp_v, :] # enllaç amb els busos PQ i PV

nsl_compt = np.zeros(n, dtype= int) # nombre de busos oscil·lants trobats abans d'un bus
compt = 0
for i in range(n):
    if i in sl:
        compt += 1
        nsl_compt[i] = compt
if npq > 0:
    pq_ = pq - nsl_compt[pq]
else:
    pq_ = []
if npv > 0:
    pv_ = pv - nsl_compt[pv]
else:
    pv_ = []
if nsl > 0:
    sl_ = sl - nsl_compt[sl]

pqp_v_x = np.sort(np.r_[pq_, pv_]) # ordenar els nous índexs dels busos PQ i PV
pqp_v_ = []
[pqp_v_.append( int(pqp_v_x[i])) for i in range( len(pqp_v_x))] # convertir els índexs a enters
# FI PREPARACIÓ DE LA IMPLEMENTACIÓ

# TERMES [0]
U_re[0, pqp_v_] = 1 # estat de referència
U_im[0, pqp_v_] = 0
U[0, pqp_v_] = U_re[0, pqp_v_] + U_im[0, pqp_v_] * 1j
X[0, pqp_v_] = 1 / np.conj(U[0, pqp_v_])
X_re[0, pqp_v_] = np.real(X[0, pqp_v_])
X_im[0, pqp_v_] = np.imag(X[0, pqp_v_])
Q[0, pv_] = 0
# FI TERMES [0]

# TERMES [1]
range_pqp_v = np.arange(npqp_v) # tots els busos ordenats
valor = np.zeros(npqp_v, dtype= complex)

prod = np.dot((Yslack[pqp_v_, :]), V_sl[:]) # intensitat que injecten els slack
prod2 = np.dot((Ytaps[pqp_v_, :]), U[0, :]) # intensitat amb la matriu asimètrica

valor[pq_] = - prod[pq_] \
    + np. sum(Yslack[pq_, :], axis=1) \
    - Yshunts[pq_] * U[0, pq_] \
    + (vec_P[pq_] - vec_Q[pq_] * 1j) * X[0, pq_] \
    - prod2[pq_] \

```

```

- np. sum(Ytapslack[pq_, :], axis=1)

valor[pv_] = - prod[pv_] \
    + np. sum(Yslack[pv_, :], axis=1) \
    - Yshunts[pv_] * U[0, pv_] \
    + vec_P[pv_] * X[0, pv_] \
    - prod2[pv_] \
    - np. sum(Ytapslack[pv_, :], axis=1)

RHS = np.r_[valor.real, valor.imag, W[pv_] - 1] # vector de la drete del sistema d'equacions

VRE = coo_matrix((2 * U_re[0, pv_], (np.arange(npv), pv_)), shape=(npv, npqpv)).tocsc() #
    matriu dispersa COO a compr.
VIM = coo_matrix((2 * U_im[0, pv_], (np.arange(npv), pv_)), shape=(npv, npqpv)).tocsc()
XIM = coo_matrix((-X_im[0, pv_], (pv_, np.arange(npv))), shape=(npqpv, npv)).tocsc()
XRE = coo_matrix((X_re[0, pv_], (pv_, np.arange(npv))), shape=(npqpv, npv)).tocsc()
BUI = csc_matrix((npv, npv)) # matriu dispersa comprimida

MATx = vstack((hstack((G, -B, XIM)),
    hstack((B, G, XRE)),
    hstack((VRE, VIM, BUI))), format='csc')

MAT_LU = factorized(MATx.tocsc()) # matriu factoritzada, només cal fer-ho una vegada
LHS = MAT_LU(RHS) # vector amb les solucions

U_re[1, :] = LHS[:npqpv] # actualització de les incògnites
U_im[1, :] = LHS[npqpv:2 * npqpv]
Q[1, pv_] = LHS[2 * npqpv:]

U[1, :] = U_re[1, :] + U_im[1, :] * 1j
X[1, :] = (-X[0, :] * np.conj(U[1, :])) / np.conj(U[0, :])
X_re[1, :] = X[1, :].real
X_im[1, :] = X[1, :].imag
# FI TERMES [1]

def convqx(q, x, i, cc): # convolució entre Q i X
    suma = 0
    for k in range(cc):
        suma += q[k, i] * x[cc - k, i]
    return suma

def convv(u, i, cc): # convolució entre U i U conjugada
    suma = 0
    for k in range(1, cc):
        suma += u[k, i] * np.conj(u[cc - k, i])
    return np.real(suma)

```

```

def convx(u, x, i, cc): # convolució entre U i X
    suma = 0
    for k in range(1, cc + 1):
        suma += np.conj(u[k, i]) * x[cc - k, i]
    return suma

# TERMES [2]
prod2 = np.dot((Ytaps[pqp_v_, :]), U[1, :]) # intensitat amb l'asimètrica pels PQ i PV
prod3 = np.dot((Ytapslack[pqp_v_, :]), V_sl[:]) # intensitat amb l'asimètrica pels oscil·lants
c = 2 # profunditat actual

valor[pq_] = - Yshunts[pq_] * U[c - 1, pq_] \
    + (vec_P[pq_] - vec_Q[pq_] * 1j) * X[c - 1, pq_] \
    - prod2[pq_] \
    - np.sum(Ytapslack[pq_, :], axis=1) * (-1) \
    - prod3[pq_]

valor[pv_] = - Yshunts[pv_] * U[c - 1, pv_] \
    + vec_P[pv_] * X[c - 1, pv_] \
    - 1j * convx(Q, X, pv_, c) \
    - prod2[pv_] \
    - np.sum(Ytapslack[pv_, :], axis=1) * (-1) \
    - prod3[pv_]

RHS = np.r_[valor.real, valor.imag, -convv(U, pv_, c)] # vector de la dreta del sistema d'
    equacions

LHS = MAT_LU(RHS) # vector amb les solucions

U_re[c, :] = LHS[:npqp_v] # actualització d'incògnites
U_im[c, :] = LHS[npqp_v:2 * npqp_v]
Q[c, pv_] = LHS[2 * npqp_v:]

U[c, :] = U_re[c, :] + U_im[c, :] * 1j
X[c, :] = - convx(U, X, range_npqp_v, c) / np.conj(U[0, :])
X_re[c, :] = X[c, :].real
X_im[c, :] = X[c, :].imag
# FI TERMES [2]

# TERMES [c>=3]
for c in range(3, prof):
    prod2 = np.dot((Ytaps[pqp_v_, :]), U[c - 1, :]) # intensitat amb l'asimètrica dels PQ i PV

    valor[pq_] = - Yshunts[pq_] * U[c - 1, pq_] \
        + (vec_P[pq_] - vec_Q[pq_] * 1j) * X[c - 1, pq_] \
        - prod2[pq_]

```

```

valor[pv_] = - Yshunts[pv_] * U[c - 1, pv_] \
              + vec_P[pv_] * X[c - 1, pv_] \
              - 1j * convqx(Q, X, pv_, c) \
              - prod2[pv_]

RHS = np.r_[valor.real, valor.imag, -convv(U, pv_, c)] # vector de la dreta del sistema d
'equacions

LHS = MAT_LU(RHS) # vector amb les solucions

U_re[c, :] = LHS[:npqpv] # actualització de les incògnites
U_im[c, :] = LHS[npqpv:2 * npqpv]
Q[c, pv_] = LHS[2 * npqpv:]

U[c, :] = U_re[c, :] + U_im[c, :] * 1j
X[c, :] = - convx(U, X, range_pqpv, c) / np.conj(U[0, :])
X_re[c, :] = X[c, :].real
X_im[c, :] = X[c, :].imag

# FI TERMES [c>3]

# RESULTATS
Pfi = np.zeros(n, dtype= complex) # potència activa final
Qfi = np.zeros(n, dtype= complex) # potència reactiva final
U_sum = np.zeros(n, dtype= complex) # tensió a partir la suma de coeficients
U_pa = np.zeros(n, dtype= complex) # tensió amb aproximants de Padé
U_th = np.zeros(n, dtype= complex) # tensió amb aproximants de Thévenin
U_ait = np.zeros(n, dtype= complex) # tensió amb Delta d'Aitken
U_shanks = np.zeros(n, dtype= complex) # tensió amb transformacions de Shanks
U_rho = np.zeros(n, dtype= complex) # tensió amb Rho de Wynn
U_eps = np.zeros(n, dtype= complex) # tensió amb Èpsilon de Wynn
U_theta = np.zeros(n, dtype= complex) # tensió amb Theta de Brezinski
U_eta = np.zeros(n, dtype= complex) # tensió amb Eta de Bauer
Q_eps = np.zeros(n, dtype= complex)
Q_ait = np.zeros(n, dtype= complex)
Q_rho = np.zeros(n, dtype= complex)
Q_theta = np.zeros(n, dtype= complex)
Q_eta = np.zeros(n, dtype= complex)
Q_sum = np.zeros(n, dtype= complex)
Q_shanks = np.zeros(n, dtype= complex)
Sig_re = np.zeros(n, dtype= complex) # part real de sigma
Sig_im = np.zeros(n, dtype= complex) # part imaginària de sigma

Ybus = Yseries_slack + diags(Yshunts_slack) + Ytap # matriu d'admitàncies total

from Funcions import pade4all, epsilon, eta, theta, aitken, rho, thevenin, Sigma, shanks #
importar funcions

# SUMA
U_sum[pqpv] = np. sum(U[:, pqpv_], axis=0)

```

```

U_sum[sl] = V_sl
if npq > 0:
    Q_sum[pq] = vec_Q[pq_]
if npv > 0:
    Q_sum[pv] = np. sum(Q[:, pv_], axis=0)
# FI SUMA

# PADÉ
Upa = pade4all(prof, U[:, :], 1)
Qpa = pade4all(prof, Q[:, pv_], 1)
U_pa[sl] = V_sl
U_pa[pqp] = Upa
Pfi[pqp] = vec_P[pqp_]
if npq > 0:
    Qfi[pq] = vec_Q[pq_]
if npv > 0:
    Qfi[pv] = Qpa
Pfi[sl] = np.nan
Qfi[sl] = np.nan
# FI PADÉ

limit = 12 # límit de coeficients per no utilitzar tots els coeficients
if limit > prof:
    limit = prof - 1

# SIGMA
Ux1 = np.copy(U)
Sig_re[pqp] = np.real(Sigma(Ux1, X, prof - 1, V_sl))
Sig_im[pqp] = np.imag(Sigma(Ux1, X, prof - 1, V_sl))
Sig_re[sl] = np.nan
Sig_im[sl] = np.nan

arrel = np.zeros(n, dtype= float) # discriminant
arrel[sl] = np.nan
arrel[pqp] = 0.25 + np. abs(Sig_re[pqp]) - np. abs(Sig_im[pqp]) ** 2
# FI SIGMA

# THÉVENIN
Ux1 = np.copy(U)
for i in pq: # només pels busos PQ
    U_th[i] = thevenin(Ux1[:limit, i - nsl_compt[i]], X[:limit, i - nsl_compt[i]])
# FI THÉVENIN

# RECURRENTS
Ux = np.copy(U)
Qx = np.copy(Q)

for i in range(npqp):
    U_ait[i] = aitken(Ux[:, i], limit)

```

```

    U_shanks[i] = shanks(Ux[:, i], limit)
    U_rho[i] = rho(Ux[:, i], limit)
    U_eps[i] = epsilon(Ux[:, i], limit)
    U_theta[i] = theta(Ux[:, i], limit)

    if i in pq_:
        Q_ait[i + nsl_compt[i]] = vec_Q[i]
        Q_shanks[i + nsl_compt[i]] = vec_Q[i]
        Q_rho[i + nsl_compt[i]] = vec_Q[i]
        Q_eps[i + nsl_compt[i]] = vec_Q[i]
        Q_theta[i + nsl_compt[i]] = vec_Q[i]

    elif i in pv_:
        Q_ait[i + nsl_compt[i]] = aitken(Qx[:, i], limit)
        Q_shanks[i + nsl_compt[i]] = shanks(Qx[:, i], limit)
        Q_rho[i + nsl_compt[i]] = rho(Qx[:, i], limit)
        Q_eps[i + nsl_compt[i]] = epsilon(Qx[:, i], limit)
        Q_theta[i + nsl_compt[i]] = theta(Qx[:, i], limit)

U_ait[pqp] = U_ait[pqp_]
U_ait[sl] = V_sl
Q_ait[sl] = np.nan
U_shanks[pqp] = U_shanks[pqp_]
U_shanks[sl] = V_sl
Q_shanks[sl] = np.nan
U_rho[pqp] = U_rho[pqp_]
U_rho[sl] = V_sl
Q_rho[sl] = np.nan
U_eps[pqp] = U_eps[pqp_]
U_eps[sl] = V_sl
Q_eps[sl] = np.nan
U_theta[pqp] = U_theta[pqp_]
U_theta[sl] = V_sl
Q_theta[sl] = np.nan
# FI RECURRENTS

# ERRORS
S_out_sum = np.asarray(U_sum) * np.conj(np.asarray(np.dot(Ybus, U_sum)))
S_in_sum = (Pfi[:] + 1j * Q_sum[:])
error_sum = S_in_sum - S_out_sum

S_out = np.asarray(U_pa) * np.conj(np.asarray(np.dot(Ybus, U_pa)))
S_in = (Pfi[:] + 1j * Qfi[:])
error = S_in - S_out # error final de potències amb Padé

S_out_ait = np.asarray(U_ait) * np.conj(np.asarray(np.dot(Ybus, U_ait)))
S_in_ait = (Pfi[:] + 1j * Q_ait[:])
error_ait = S_in_ait - S_out_ait

```



```

S_out_shanks = np.asarray(U_shanks) * np.conj(np.asarray(np.dot(Ybus, U_shanks)))
S_in_shanks = (Pfi[:] + 1j * Q_shanks[:])
error_shanks = S_in_shanks - S_out_shanks

S_out_rho = np.asarray(U_rho) * np.conj(np.asarray(np.dot(Ybus, U_rho)))
S_in_rho = (Pfi[:] + 1j * Q_rho[:])
error_rho = S_in_rho - S_out_rho

S_out_eps = np.asarray(U_eps) * np.conj(np.asarray(np.dot(Ybus, U_eps)))
S_in_eps = (Pfi[:] + 1j * Q_eps[:])
error_eps = S_in_eps - S_out_eps

S_out_theta = np.asarray(U_theta) * np.conj(np.asarray(np.dot(Ybus, U_theta)))
S_in_theta = (Pfi[:] + 1j * Q_theta[:])
error_theta = S_in_theta - S_out_theta
# FI ERRORS

df = pd.DataFrame(
    np.c_[np. abs(U_sum), np.angle(U_sum), np.
    abs(U_pa), np.angle(U_pa), np.real(Sig_re), np.real(Sig_im),
    np. abs(error[0, :])], columns=['|V| sum', 'A. sum', '|V| Padé', 'A. Padé', 'Sigma
    re', 'Sigma im', 'S error'])
print(df)

print('Error màxim amb suma: ', max( abs(np.r_[error_sum[0, pqpv]])))
print('Error màxim amb Padé: ', max( abs(np.r_[error[0, pqpv]])))
print('Error màxim amb Delta d\'Aitken: ', max( abs(np.r_[error_ait[0, pqpv]])))
print('Error màxim amb transformacions de Shanks: ', max( abs(np.r_[error_shanks[0, pqpv]])))
print('Error màxim amb Rho de Wynn: ', max( abs(np.r_[error_rho[0, pqpv]])))
print('Error màxim amb Èpsilon de Wynn: ', max( abs(np.r_[error_eps[0, pqpv]])))
print('Error màxim amb Theta de Brezinski: ', max( abs(np.r_[error_theta[0, pqpv]])))

```

B.3. Funcions: Padé, Thévenin, Sigma i mètodes recursius

```

import numpy as np
import numba as nb

# PADÉ

def pade4all(ordre, coeff_mat, s):
    """
    ordre: profunditat seleccionada
    coeff_mat: matriu o vector de coeficients
    s: valor en el qual s'avalua la sèrie, sovint s=1
    """

    if coeff_mat.ndim > 1: # nombre de columnes
        nbus = coeff_mat.shape[1]

```

```

else:
    nbus = coeff_mat.ndim

voltatges = np.zeros(nbus, dtype= complex) # resultats finals

if ordre % 2 != 0:
    nn = int(ordre / 2)
    L = nn
    M = nn
    for d in range(nbus):
        if nbus > 1:
            rhs = coeff_mat[L + 1:L + M + 1, d] # vector de la dreta, conegut
        else:
            rhs = coeff_mat[L + 1:L + M + 1]

        C = np.zeros((M, M), dtype= complex) # matriu del sistema
        for i in range(M):
            k = i + 1
            if nbus > 1:
                C[i, :] = coeff_mat[L - M + k:L + k, d]
            else:
                C[i, :] = coeff_mat[L - M + k:L + k]

        b = np.zeros(rhs.shape[0] + 1, dtype= complex) # denominador
        x = np.linalg.solve(C, -rhs)
        b[0] = 1
        b[1:] = x[::-1]

        a = np.zeros(L + 1, dtype= complex) # numerador
        if nbus > 1:
            a[0] = coeff_mat[0, d]
        else:
            a[0] = coeff_mat[0]

        for i in range(L): # completar numerador
            val = complex(0)
            k = i + 1
            for j in range(k + 1):
                if nbus > 1:
                    val += coeff_mat[k - j, d] * b[j]
                else:
                    val += coeff_mat[k - j] * b[j]
            a[i + 1] = val

        p = complex(0)
        q = complex(0)
        for i in range(len(a)): # avaluar numerador i denominador
            p += a[i] * s ** i
        for i in range(len(b)):

```

```

        q += b[i] * s ** i

    voltatges[d] = p / q

    ppb = np.poly1d(b) # convertir a polinomi
    ppa = np.poly1d(a)
    ppbr = ppb.r # pols
    ppar = ppa.r # zeros

else:
    nn = int(ordre / 2)
    L = nn
    M = nn - 1
    for d in range(nbus):
        if nbus > 1:
            rhs = coeff_mat[M + 2: 2 * M + 2, d] # vector de la dreta, conegut
        else:
            rhs = coeff_mat[M + 2: 2 * M + 2]

        C = np.zeros((M, M), dtype= complex) # matriu del sistema
        for i in range(M):
            k = i + 1
            if nbus > 1:
                C[i, :] = coeff_mat[L - M + k:L + k, d]
            else:
                C[i, :] = coeff_mat[L - M + k:L + k]

        b = np.zeros(rhs.shape[0] + 1, dtype= complex) # denominador
        x = np.linalg.solve(C, -rhs)
        b[0] = 1
        b[1:] = x[:-1]

        a = np.zeros(L + 1, dtype= complex) # numerador
        if nbus > 1:
            a[0] = coeff_mat[0, d]
        else:
            a[0] = coeff_mat[0]

        for i in range(1, L): # completar numerador
            val = complex(0)
            for j in range(i + 1):
                if nbus > 1:
                    val += coeff_mat[i - j, d] * b[j]
                else:
                    val += coeff_mat[i - j] * b[j]
            a[i] = val

        val = complex(0)
        for j in range(L):

```

```

        if nbus > 1:
            val += coeff_mat[M - j + 1, d] * b[j]
        else:
            val += coeff_mat[M - j + 1] * b[j]
    a[L] = val

    p = complex(0)
    q = complex(0)
    for i in range( len(a)): # avaluar numerador i denominador
        p += a[i] * s ** i
    for i in range( len(b)):
        q += b[i] * s ** i

    voltatges[d] = p / q

    ppb = np.poly1d(b) # convertir a polinomi
    ppa = np.poly1d(a)
    ppbr = ppb.r # pols
    ppar = ppa.r # zeros

    return voltatges

# THÉVENIN

@nb.jit
def thevenin(U, X):
    """
    U: vector de coeficients de tensió
    X: vector de coeficients de la tensió inversa conjugada
    """

    complex_type = nb.complex128
    n = len(U)

    r_3 = np.zeros(n, complex_type)
    r_2 = np.zeros(n, complex_type)
    r_1 = np.zeros(n, complex_type)
    r_0 = np.zeros(n, complex_type)

    T_03 = np.zeros(n, complex_type)
    T_02 = np.zeros(n, complex_type)
    T_01 = np.zeros(n, complex_type)
    T_00 = np.zeros(n, complex_type)
    T_13 = np.zeros(n, complex_type)
    T_12 = np.zeros(n, complex_type)
    T_11 = np.zeros(n, complex_type)
    T_10 = np.zeros(n, complex_type)
    T_23 = np.zeros(n, complex_type)

```

```

T_22 = np. zeros(n, complex_type)
T_21 = np. zeros(n, complex_type)
T_20 = np. zeros(n, complex_type)

r_0[0] = -1 # inicialització de residus
r_1[0:n - 1] = U[1:n] / U[0]
r_2[0:n - 2] = U[2:n] / U[0] - U[1] * np.conj(U[0]) / U[0] * X[1:n - 1]

T_00[0] = -1 # inicialització de polinomis
T_01[0] = -1
T_02[0] = -1
T_10[0] = 0
T_11[0] = 1 / U[0]
T_12[0] = 1 / U[0]
T_20[0] = 0
T_21[0] = 0
T_22[0] = -U[1] * np.conj(U[0]) / U[0]

for l in range(n): # càlculs successius
    a = (r_2[0] * r_1[0]) / (- r_0[1] * r_1[0] + r_0[0] * r_1[1] - r_0[0] * r_2[0])
    b = -a * r_0[0] / r_1[0]
    c = 1 - b
    T_03[0] = b * T_01[0] + c * T_02[0]
    T_03[1:n] = a * T_00[0:n - 1] + b * T_01[1:n] + c * T_02[1:n]
    T_13[0] = b * T_11[0] + c * T_12[0]
    T_13[1:n] = a * T_10[0:n - 1] + b * T_11[1:n] + c * T_12[1:n]
    T_23[0] = b * T_21[0] + c * T_22[0]
    T_23[1:n] = a * T_20[0:n - 1] + b * T_21[1:n] + c * T_22[1:n]
    r_3[0:n-2] = a * r_0[2:n] + b * r_1[2:n] + c * r_2[1:n - 1]

    if l == n - 1: # si és l'última iteració
        t_0 = T_03
        t_1 = T_13
        t_2 = T_23

    r_0[:] = r_1[:] # actualització de residus
    r_1[:] = r_2[:]
    r_2[:] = r_3[:]

    T_00[:] = T_01[:] # actualització de polinomis
    T_01[:] = T_02[:]
    T_02[:] = T_03[:]
    T_10[:] = T_11[:]
    T_11[:] = T_12[:]
    T_12[:] = T_13[:]
    T_20[:] = T_21[:]
    T_21[:] = T_22[:]
    T_22[:] = T_23[:]

```

```

    r_3 = np.zeros(n, complex_type)
    T_03 = np.zeros(n, complex_type)
    T_13 = np.zeros(n, complex_type)
    T_23 = np.zeros(n, complex_type)

    usw = -np. sum(t_0) / np. sum(t_1)
    sth = -np. sum(t_2) / np. sum(t_1)

    sigma_bo = sth / (usw * np.conj(usw))

    u = 0.5 + np.sqrt(0.25 + np.real(sigma_bo) - np. imag(sigma_bo)**2) + np.imag(sigma_bo)*1j
    # branca estable
    #u = 0.5 - np.sqrt(0.25 + np.real(sigma_bo) - np.imag(sigma_bo) ** 2) + np.imag(sigma_bo)
    * 1j # branca inestable

    ufinal = u * usw # resultat final

    return ufinal

# SIGMA

def Sigma(coeff_matU, coeff_matX, ordre, V_slack):
    """
    coeff_matU: matriu de coeficients de tensió
    coeff_matX: matriu de coeficients de la tensió inversa conjugada
    ordre: profunditat seleccionada
    V_slack: tensions dels busos oscil·lants
    """

    if len(V_slack) > 1:
        print('Els valors poden no ser correctes')

    V0 = V_slack[0] # tensió del bus oscil·lant de referència
    coeff_A = np.copy(coeff_matU) # adaptar els coeficients per a la funció racional
    coeff_B = np.copy(coeff_matX)

    coeff_A[0, :] = 1
    for i in range(1, coeff_matU.shape[0]):
        coeff_A[i, :] = coeff_matU[i, :] - (V0 - 1) * coeff_A[i-1, :]
    coeff_B[0, :] = 1
    for i in range(1, coeff_matX.shape[0]):
        coeff_B[i, :] = coeff_matX[i, :] + (V0 - 1) * coeff_B[i-1, :]

    nbus = coeff_matU.shape[1]
    sigmes = np.zeros(nbus, dtype= complex)

    if ordre % 2 == 0:

```

```

    M = int(ordre / 2) - 1
else:
    M = int(ordre / 2)

for d in range(nbus): # emplenar objectes del sistema d'equacions
    a = coeff_A[1:2 * M + 2, d]
    b = coeff_B[0:2 * M + 1, d]
    C = np.zeros((2 * M + 1, 2 * M + 1), dtype= complex) # matriu del sistema
    for i in range(2 * M + 1):
        if i < M:
            C[1 + i:, i] = a[:2 * M - i]
        else:
            C[i - M:, i] = - b[:3 * M - i + 1]

    lhs = np.linalg.solve(C, -a)
    sigmes[d] = np.sum(lhs[M:]) / (np.sum(lhs[:M]) + 1)

return sigmes

# DELTA D'AITKEN

@nb.jit
def aitken(U, limit):
    """
    U: vector de coeficients de tensió
    limit: profunditat seleccionada
    """

    def S(Um, k): # funció de sumes parcials
        suma = np.sum(Um[:k + 1])
        return suma

    complex_type = nb.complex128
    Um = U[:limit]
    n = limit
    T = np.zeros(n-2, complex_type)

    for i in range(len(T)): # emplenar el vector
        T[i] = S(Um, i+2) - (S(Um, i + 1) - S(Um, i))**2 / ((S(Um, i + 2) - S(Um, i + 1)) - (S(Um, i + 1) - S(Um, i)))

    return T[-1] # l'últim element, que en principi és la millor aproximació

# TRANSFORMACIONS DE SHANKS

```

```

@nb.jit
def shanks(U, limit):
    """
    U: vector de coeficients de tensió
    limit: profunditat seleccionada
    """

    def S(Um, k): # funció de sumes parcials
        suma = np. sum(Um[:k + 1])
        return suma

    complex_type = nb.complex128
    Um = U[:limit + 1]
    n = limit
    n_trans = 3 # nombre de transformacions
    T = np.zeros((n, n_trans), complex_type)

    for lk in range(n_trans): # emplenar la taula
        for i in range(n - 2 * lk):
            if lk == 0:
                T[i, lk] = S(Um, i + 2) - (S(Um, i + 1) - S(Um, i))**2 / ((S(Um, i + 2) - S(Um, i + 1)) - (S(Um, i + 1) - S(Um, i)))
            else:
                T[i, lk] = T[i + 2, lk - 1] - (T[i + 2, lk - 1] - T[i + 1, lk - 1])**2 / \
                    ((T[i + 2, lk - 1] - T[i + 1, lk - 1]) - (T[i + 1, lk - 1] - T[i, lk - 1]))

    return T[n - 2 * (n_trans - 1) - 1, n_trans - 1]

# RHO DE WYNN

@nb.jit
def rho(U, limit):
    """
    U: vector de coeficients de tensió
    limit: profunditat seleccionada
    """

    def S(Um, k): # funció de sumes parcials
        suma = np. sum(Um[:k + 1])
        return suma

    complex_type = nb.complex128
    Um = U[:limit]

```



```

n = limit

mat = np.zeros((n, n + 1), complex_type)
for i in range(n):
    mat[i, 1] = S(Um, i) # emplenar de sumes parcials
for j in range(2, n + 1): # completar la resta de columnes
    for i in range(0, n + 1 - j):
        mat[i, j] = mat[i + 1, j - 2] + (j - 1) / (mat[i + 1, j - 1] - mat[i, j - 1])

if limit % 2 == 0:
    return mat[0, n - 1]
else:
    return mat[0, n]

# ÈPSILON DE WYNN

@nb.jit
def epsilon(U, limit):
    """
    U: vector de coeficients de tensió
    limit: profunditat seleccionada
    """

    def S(Um, k): # funció de sumes parcials
        suma = np.sum(Um[:k + 1])
        return suma

    complex_type = nb.complex128
    Um = U[:limit]
    n = limit

    mat = np.zeros((n, n + 1), complex_type)
    for i in range(n):
        mat[i, 1] = S(Um, i) # emplenar de sumes parcials
    for j in range(2, n + 1): # completar la resta de columnes
        for i in range(0, n + 1 - j):
            mat[i, j] = mat[i + 1, j - 2] + 1 / (mat[i + 1, j - 1] - mat[i, j - 1])

    if limit % 2 == 0:
        return mat[0, n - 1]
    else:
        return mat[0, n]

# THETA DE BREZINSKI

```

```

@nb.jit
def theta(U, limit):
    """
    U: vector de coeficients de tensió
    limit: profunditat seleccionada
    """

    def S(Um, k): # funció de sumes parcials
        suma = np.sum(Um[:k + 1])
        return suma

    complex_type = nb.complex128
    n = limit
    Um = np.zeros(n, complex_type)
    Um[:] = U[:limit]

    mat = np.zeros((n, n + 1), complex_type) # inicialització de la matriu
    for i in range(n):
        mat[i, 1] = S(Um, i) # emplenar de sumes parcials
    for j in range(2, n + 1): # completar la resta de columnes
        if j % 2 == 0:
            for i in range(0, n + 1 - j):
                mat[i, j] = mat[i + 1, j - 2] + 1 / (mat[i + 1, j - 1] - mat[i, j - 1])
        else:
            for i in range(0, n + 1 - j):
                mat[i, j] = mat[i + 1, j - 2] + ((mat[i + 2, j - 2] - mat[i + 1, j - 2]) * (
mat[i + 2, j - 1] - mat[i + 1, j - 1])) \
                    / (mat[i + 2, j - 1] - 2 * mat[i + 1, j - 1] + mat[i, j - 1])

    if limit % 2 == 0:
        return mat[0, n - 1]
    else:
        return mat[0, n]

# ETA DE BAUER

@nb.jit
def eta(U, limit):
    """
    U: vector de coeficients de tensió
    limit: profunditat seleccionada
    """

    complex_type = nb.complex128
    n = limit
    Um = np.zeros(n, complex_type)

```

```

Um[:] = U[:limit]

mat = np.zeros((n, n+1), complex_type)
mat[:, 0] = np.inf # infinit
mat[:, 1] = Um[:]

for j in range(2, n + 1): # emplenar la taula
    if j % 2 == 0:
        for i in range(0, n + 1 - j):
            mat[i, j] = 1 / (1 / mat[i + 1, j - 2] + 1 / (mat[i + 1, j - 1]) - 1 / (mat[i,
j - 1]))
        else:
            for i in range(0, n + 1 - j):
                mat[i, j] = mat[i + 1, j - 2] + mat[i + 1, j - 1] - mat[i, j - 1]

return np. sum(mat[0, 1:])

```

B.4. Padé-Weierstrass

```

s0 = [0.5, 0.7, 1] # vector de les s parcials
ng = len(s0) # nombre de graons menys 1

s0p = [] # producte de les (1-s0)
s0p.append(1)
Vs0p = [] # producte dels V(s0)
Vs0p.append(1)
for i in range(1, ng):
    s0p.append(s0p[i - 1] * (1 - s0[i - 1]))

Vw = V_sl[0] # voltatge del bus oscil·lant, només se n'admet 1
Vs = np.zeros((ng, 2), dtype= complex) # auxiliar per trobar Vs0
Vs0 = np.zeros(ng, dtype= complex) # tensions del bus oscil·lant a cada graó
Vs[:, 0] = 1
Vs[0, 1] = s0p[0] * (Vw - 1)
Vs0[0] = Vs[0, 0] + s0[0] * Vs[0, 1]
Vs0p.append(Vs0p[0] * Vs0[0])
for i in range(1, ng):
    Vs[i, 1] = s0p[i] * (Vw - 1) / Vs0p[i]
    Vs0[i] = Vs[i, 0] + s0[i] * Vs[i, 1]
    Vs0p.append(Vs0p[i] * Vs0[i])

prof_pw = prof # profunditat de les sèries del P-W

Up = np.zeros((prof_pw, npqpv, ng), dtype= complex) # tensions prima incògnita
Up_re = np.zeros((prof_pw, npqpv, ng), dtype= float)
Up_im = np.zeros((prof_pw, npqpv, ng), dtype= float)
Xp = np.zeros((prof_pw, npqpv, ng), dtype= complex) # invers conjugat de la tensió prima
Xp_re = np.zeros((prof_pw, npqpv, ng), dtype= float)
Xp_im = np.zeros((prof_pw, npqpv, ng), dtype= float)

```

```

Qp = np.zeros((prof_pw, npqpv, ng), dtype= complex) # potència reactiva prima incògnita
Us0 = np.zeros((n, ng), dtype= complex) # tensions parcials
Qs0 = np.zeros((n, ng), dtype= complex) # potències reactives parcials

gamma_x = 0 # variable que agrupa els termes que no depenen de la s^(r)
Yahat = np.copy(Ytap) # admitàncies asimètriques, de trafos de rel. variable
Ybhat = np.copy(Yseries_slack) # admitàncies simètriques

for kg in range(ng - 1): # calcular cada graó
    Us0[sl, kg] = Vs0[kg] # completar columna del bus oscil·lant
    if kg == 0: # si és el primer graó, utilitzar els objectes del MIH bàsic
        Us0[pqpv, kg] = pade4all(prof - 1, U[:, pqpv_], s0[kg])
        if npv > 0:
            Qs0[pv, kg] = pade4all(prof - 1, Q[:, pv_], s0[kg])
    else: # si no és el primer graó, calcular la solució parcial anterior
        Us0[pqpv, kg] = pade4all(prof_pw - 1, Up[:, pqpv_, kg - 1], s0[kg])
        if npv > 0:
            Qs0[pv, kg] = pade4all(prof_pw - 1, Qp[:, pv_, kg - 1], s0[kg])

    Yahat = np.copy(Ytap)
    Ybhat = np.copy(Yseries_slack)
    for i in range(n):
        if i not in sl: # per la fila del bus oscil·lant no cal fer-ho
            for j in range(n):
                Yahat[i, j] = Yahat[i, j] * np.prod(Us0[j, :kg + 1], axis=0) * np.prod(np.conj
                (Us0[i, :kg + 1]), axis=0)
                Ybhat[i, j] = Ybhat[i, j] * np.prod(Us0[j, :kg + 1], axis=0) * np.prod(np.conj
                (Us0[i, :kg + 1]), axis=0)

    gamma_x += s0[kg] * s0p[kg] # actualització

Ybtilde = np.copy(Ybhat) # matriu simètrica evolucionada
if npq > 0:
    Ybtilde[pq, pq] += gamma_x * Yshunts_slack[pq] * np.prod(
    abs(Us0[pq, :kg + 1]) ** 2, axis=1) \
    - gamma_x * (Pfi[pq] - Qfi[pq] * lj)
if npv > 0:
    Ybtilde[pv, pv] += gamma_x * Yshunts_slack[pv] * np.prod(
    abs(Us0[pv, :kg + 1]) ** 2, axis=1) \
    - gamma_x * Pfi[pv] + np.sum(Qs0[pv, :], axis=1) * lj

Ybtilde[:, :] += gamma_x * Yahat[:, :] # part que no s'incrusta amb s'
Yahat[:, :] = (1 - gamma_x) * Yahat[:, :] # part que no s'incrusta amb s'

# TERMES [0]
Up[0, :, kg] = 1 # estat de referència
Qp[0, :, kg] = 0 # estat de referència

Up_re[0, :, kg] = np.real(Up[0, :, kg])

```

```

Up_im[0, :, kg] = np.imag(Up[0, :, kg])
Xp[0, :, kg] = 1 / Up[0, :, kg]
Xp_re[0, :, kg] = np.real(Xp[0, :, kg])
Xp_im[0, :, kg] = np.imag(Xp[0, :, kg])
# FI TERMES [0]

Yahatred = Yahat[np.ix_(pqpv, pqpv)] # asimètrica sense el bus oscil·lant
Yahatw = Yahat[np.ix_(pqpv, sl)] # asimètrica de l'oscil·lant
Ybtilderred = Ybtilderred[np.ix_(pqpv, pqpv)] # simètrica sense l'oscil·lant
Ybtildew = Ybtilderred[np.ix_(pqpv, sl)] # simètrica amb l'oscil·lant

# TERMES [1]
prod1 = np.dot(Ybtildew[pqpv_, 0], Vs[kg + 1, 1]) # producte de la simètrica amb el bus
# oscil·lant
prod2 = np.dot(Yahatred[pqpv_, :], Up[0, :, kg]) # producte de l'asimètrica amb la tensió
# incògnita
prod3 = np.dot(Yahatw[pqpv_, 0], Vs[kg + 1, 0]) # producte de l'asimètrica amb el bus
# oscil·lant

if npq > 0:
    valor[pq_] = - prod1[pq_] \
        - prod2[pq_] \
        - prod3[pq_] \
        - (1 - gamma_x) * Yshunts[pq_] * Up[0, pq_, kg] * np.prod(
abs(Us0[pq, :kg + 1]), axis=1) ** 2 \
        + (1 - gamma_x) * (Pfi[pq] - Qfi[pq] * 1j) * Xp[0, pq_, kg]

if npv > 0:
    valor[pv_] = - prod1[pv_] \
        - prod2[pv_] \
        - prod3[pv_] \
        - (1 - gamma_x) * Yshunts[pv_] * Up[0, pv_, kg] * np.prod(
abs(Us0[pv, :kg + 1]), axis=1) ** 2 \
        + (1 - gamma_x) * Pfi[pv] * Xp[0, pv_, kg]

RHS = np.r_[valor.real, valor.imag, W[pv_] / np.prod(
abs(Us0[pv, :kg + 1]), axis=1) ** 2 - 1] # vector de la drete del sistema d'equacions
else:
    RHS = np.r_[valor.real, valor.imag]

gamma = np.zeros(npqpv, dtype= complex)
if npq > 0:
    gamma[pq_] = gamma_x * (Pfi[pq] - Qfi[pq] * 1j) # gamma pels busos PQ
if npv > 0:
    gamma[pv_] = gamma_x * Pfi[pv] - np.
sum(Qs0[pv, :], axis=1) * 1j # gamma pels busos PV

Gf = np.real(Ybtilderred) # part real de la matriu simètrica reduïda
Bf = np.imag(Ybtilderred) # part imaginària de la matriu simètrica reduïda

```

```

VRE = coo_matrix((2 * Up_re[0, pv_, kg], (np.arange(npv), pv_)), shape=(npv, npqpvp)).tocsc()
# en forma de blocs
VIM = coo_matrix((2 * Up_im[0, pv_, kg], (np.arange(npv), pv_)), shape=(npv, npqpvp)).tocsc()
XIM = coo_matrix((-Xp_im[0, pv_, kg], (pv_, np.arange(npv))), shape=(npqpvp, npv)).tocsc()
XRE = coo_matrix((Xp_re[0, pv_, kg], (pv_, np.arange(npv))), shape=(npqpvp, npv)).tocsc()
BUI = csc_matrix((npv, npv))

M1 = np.copy(Gf)
M2 = np.copy(-Bf)
M3 = np.copy(Bf)
M4 = np.copy(Gf)

for i in range(npqpvp):
    for j in range(npqpvp):
        if i == j:
            M1[i, j] += np.real(2 * gamma[i]) # emplenar amb gamma
            M3[i, j] += np.imag(2 * gamma[i])

MAT = vstack((hstack((M1, M2, XIM)),
               hstack((M3, M4, XRE)),
               hstack((VRE, VIM, BUI))), format='csc')

MAT_LU = factorized(MAT.tocsc()) # factoritzar, només cal una vegada
LHS = MAT_LU(RHS) # vector amb les solucions del graó

Up_re[1, :, kg] = LHS[:npqpvp] # emplenar les incògnites
Up_im[1, :, kg] = LHS[npqpvp: 2 * npqpvp]
Qp[1, pv_, kg] = LHS[2 * npqpvp:]

Up[1, :, kg] = Up_re[1, :, kg] + Up_im[1, :, kg] * 1j
Xp[1, :, kg] = - np.conj(Up[1, :, kg]) * Xp[0, :, kg] / np.conj(Up[0, :, kg])
Xp_re[1, :, kg] = np.real(Xp[1, :, kg])
Xp_im[1, :, kg] = np.imag(Xp[1, :, kg])
# FI TERMES [1]

def convxv(xp, up, i, cc, kkg): # convolució entre X i U primes
    suma = 0
    for k in range(1, cc):
        suma = suma + xp[k, i, kkg] * np.conj(up[cc - k, i, kkg])
    return suma

def convqx(qp, xp, i, cc, kkg): # convolució entre Q i X primes
    suma = 0
    for k in range(1, cc):
        suma = suma + qp[k, i, kkg] * xp[cc - k, i, kkg]

```

```

    return suma

def convu(up, i, cc, kkg): # convolució entre U prima i ella mateixa
    suma = 0
    for k in range(1, cc):
        suma = suma + up[k, i, kkg] * np.conj(up[cc - k, i, kkg])
    return suma

def convxx(u, x, i, cc, kkg): # convolució entre U i X primes, pel càlcul de les Xp
    suma = 0
    for k in range(1, cc + 1):
        suma += np.conj(u[k, i, kkg]) * x[cc - k, i, kkg]
    return suma

# TERMES [2]
prod2 = np.dot(Yahatred[pqp_v_, :], Up[1, :, kg]) # producte entre asimètrica reduïda i
# tensions dels PQ i PV
prod3 = np.dot(Yahatw[pqp_v_, 0], Vs[kg + 1, 1]) # producte entre asimètrica de l'
# oscil·lant i tensió d'aquest

if npq > 0:
    valor[pq_] = - prod2[pq_] \
        - prod3[pq_] \
        - (1 - gamma_x) * Yshunts[pq_] * Up[1, pq_, kg] * np.prod(
abs(Us0[pq, :kg + 1]), axis=1) ** 2 \
        + (1 - gamma_x) * (Pfi[pq] - Qfi[pq] * 1j) * Xp[1, pq_, kg] \
        + gamma_x * (Pfi[pq] - Qfi[pq] * 1j) * (- convxx(Xp, Up, pq_, 2, kg))

if npv > 0:
    valor[pv_] = - prod2[pv_] \
        - prod3[pv_] \
        - (1 - gamma_x) * Yshunts[pv_] * Up[1, pv_, kg] * np.prod(
abs(Us0[pv, :kg + 1]), axis=1) ** 2 \
        + (1 - gamma_x) * Pfi[pv] * Xp[1, pv_, kg] \
        - convxx(Qp, Xp, pv_, 2, kg) * 1j \
        + gamma[pv_] * (- convxx(Xp, Up, pv_, 2, kg))
    RHS = np.r_[valor.real, valor.imag, np.real(-convu(Up, pv_, 2, kg))] # vector de la
# drete del sistema d'equacions
else:
    RHS = np.r_[valor.real, valor.imag]

LHS = MAT_LU(RHS) # vector amb les solucions del graó

Up_re[2, :, kg] = LHS[:npqpv] # actualització de les incògnites
Up_im[2, :, kg] = LHS[npqpv: 2 * npqpv]
Qp[2, pv_, kg] = LHS[2 * npqpv:]

```

```

Up[2, :, kg] = Up_re[2, :, kg] + Up_im[2, :, kg] * 1j
Xp[2, :, kg] = - convxx(Up, Xp, range_pqpv, 2, kg) / np.conj(Up[0, :, kg])
Xp_re[2, :, kg] = np.real(Xp[2, :, kg])
Xp_im[2, :, kg] = np.imag(Xp[2, :, kg])
# .....FI TERMES [2] .....

# .....TERMES [c>=3] .....
for c in range(3, prof_pw):
    prod2 = np.dot(Yahatred[pqpv_, :], Up[c - 1, :, kg]) # producte entre asimètrica redu
ida i tensions dels PQ i PV

    if npq > 0:
        valor[pq_] = - prod2[pq_] \
            - (1 - gamma_x) * Yshunts[pq_] * Up[c - 1, pq_, kg] * np.prod(
abs(Us0[pq, :kg + 1]),
axis=1)

        ** 2 \
            + (1 - gamma_x) * (Pfi[pq] - Qfi[pq] * 1j) * Xp[c - 1, pq_, kg] \
            + gamma_x * (Pfi[pq] - Qfi[pq] * 1j) * (- convxv(Xp, Up, pq_, c, kg))

    if npv > 0:
        valor[pv_] = - prod2[pv_] \
            - (1 - gamma_x) * Yshunts[pv_] * Up[c - 1, pv_, kg] * np.prod(
abs(Us0[pv, :kg + 1]),
axis=1)

        ** 2 \
            + (1 - gamma_x) * Pfi[pv] * Xp[c - 1, pv_, kg] \
            - convqx(Qp, Xp, pv_, c, kg) * 1j \
            + gamma[pv_] * (- convxv(Xp, Up, pv_, c, kg))

    RHS = np.r_[valor.real, valor.imag, np.real(-convu(Up, pv_, c, kg))] # vector de
la dreta del sistema d'equacions
    else:
        RHS = np.r_[valor.real, valor.imag]

LHS = MAT_LU(RHS) # vector amb les solucions del graó

Up_re[c, :, kg] = LHS[:npqpv] # actualització de les incògnites
Up_im[c, :, kg] = LHS[npqpv: 2 * npqpv]
Qp[c, pv_, kg] = LHS[2 * npqpv:]

Up[c, :, kg] = Up_re[c, :, kg] + Up_im[c, :, kg] * 1j
Xp[c, :, kg] = - convxx(Up, Xp, range_pqpv, c, kg) / np.conj(Up[0, :, kg])
Xp_re[c, :, kg] = np.real(Xp[c, :, kg])
Xp_im[c, :, kg] = np.imag(Xp[c, :, kg])

Upfinal = np.zeros(n, dtype= complex) # tensió prima final amb Padé
Xpfinal = np.zeros(n, dtype= complex) # X prima final amb Padé
Qpfinal = np.zeros(n, dtype= complex) # potència reactiva prima final amb Padé

```



```

Upfinal[pqpv] = pade4all(prof_pw - 1, Up[:, pqpv_, ng - 2], 1)
Upfinal[sl] = V_sl[0]
Xpfinal[pqpv] = pade4all(prof_pw - 1, Xp[:, pqpv_, ng - 2], 1)
Xpfinal[sl] = 1 / np.conj(V_sl[0])

if npv > 0:
    Qpfinal[pv] = pade4all(prof_pw - 1, Qp[:, pv_, ng - 2], 1)
    Qpfinal[sl] = np.nan

Ufinalx = Upfinal[pqpv] * np.prod(Us0[pqpv, :ng - 1], axis=1) # tensió final
if npv > 0:
    Qfinalx = Qpfinal[pv] + np.sum(Qs0[pv, :], axis=1)
    Qfi[pv] = Qfinalx # potència reactiva definitiva
Ufinal = np.zeros(n, dtype=complex) # tensió definitiva per a tots els busos
Ufinal[sl] = V_sl[0]
Ufinal[pqpv] = Ufinalx[:]

S_out = np.asarray(Ufinal) * np.conj(np.asarray(np.dot(Ybus, Ufinal))) # potència que surt
    dels busos
S_in = (Pfi[:] + 1j * Qfi[:]) # potència que entra als busos

errorx = S_in - S_out # error de potències
err = max(abs(np.r_[errorx[0, pqpv]])) # màxim error de potències amb P-W
print('Error P-W amb Padé: ', abs(err))

# TEST DE CONVERGÈNCIA DELS APROXIMANTS DE PADÉ
col = ng - 2 # columna de la qual mirem la convergència
Us0x = np.copy(Us0)

if col == 0: # si les tensions anteriors són del MIH bàsic
    Us0[pqpv, col] -= pade4all(prof - 3, U[:, pqpv_, s0[col]) # la diferència entre ara i
        amb 2 coeficients menys
else: # si les tensions anteriors són del P-W
    Us0[pqpv, col] -= pade4all(prof_pw - 3, Up[:, pqpv_, col - 1], s0[col])

tol = 1e-10 # tolerància arbitrària
falla = False
ik = 1
while falla is False and ik < npqpv: # es comprova la tolerància
    if abs(Us0[ik, col]) > tol and ik not in sl:
        falla = True
    ik += 1

if falla is True:
    print('Incorrecte, massa error')
else:
    print('Correcte, poc error')

```

B.5. Matriu com a imatge, Domb-Sykes, gràfic Sigma

VISUALITZACIÓ DE LA MATRIU

```
import matplotlib.pyplot as plt
from pylab import *
from scipy.sparse import coo_matrix
import numpy as np

Amm = abs(MATx.todense()) # convertir a densa
figure(1)
f = plt.figure()
imshow(Amm, interpolation='nearest', cmap=plt.get_cmap('gist_heat'))

plt.gray() # en escala de grisos
plt.show()
plt.spy(Amm) # en blanc i negre
plt.show()


f.savefig("matriu.pdf", bbox_inches='tight')
Bmm = coo_matrix(MATx) # convertir a dispersa
density = Bmm.getnnz() / np.prod(Bmm.shape) * 100 # càlcul de densitat
print('Densitat: ' + str(density) + ' %')
```

DOMB-SYKES

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

bb = np.zeros((prof, npqpv), dtype= complex)
for j in range(npqpv):
    for i in range(3, len(U) - 1):
        bb[i, j] = (U[i, j]) / (U[i - 1, j]) # primer gràfic de Domb-Sykes
        #bb[i, j] = np.abs(np.sqrt((U[i + 1, j] * U[i - 1, j] - U[i, j] ** 2) / (U[i, j] * U[i
        - 2, j] - U[i - 1, j] ** 2)))) # variació de Domb-Sykes

vec_ln = np.zeros(prof)
for i in range(3, prof):
    vec_ln[i] = i # primer gràfic de Domb-Sykes
    #vec_ln[i] = 1 / i # variació de Domb-Sykes

bus = 1 # gràfic  omb-Sykes d'aquest bus

plt.plot(vec_ln[3: len(U) - 1], abs(bb[3: len(U) - 1, bus]), 'ro ', markersize=2)
plt.show()

# GRÀFIC SIGMA
```

```

import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

a = []
b = []
c = []

x = np.linspace(-0.25, 1, 1000) # valors que pren la x
y = np.sqrt(0.25 + x) # punt corresponent de la paràbola
a.append(x)
b.append(y)
c.append(-y)

plt.plot(np.real(Sig_re), np.real(Sig_im), 'ro', markersize=2) # representació dels punts de
    Sigma
plt.plot(x, y) # paràbola
plt.plot(x, -y)

plt.ylabel('Sigma im')
plt.xlabel('Sigma re')
plt.title('Gràfic Sigma')
plt.show()

```

B.6. Díode amb càrrega a potència constant

```

import numpy as np
import math
import matplotlib.pyplot as plt

U = 5 # equival a l'E
R = 2 # equival a R1
R2 = 3
P = 1.2
Vt = 0.026
Is = 0.000005

n = 200 # profunditat

Vd = np.zeros(n) # sèries
Vl = np.zeros(n)
I1 = np.zeros(n)

I1[0] = U / R # inicialització de les sèries
Vd[0] = Vt * math.log(1 + I1[0] / Is)
Vl[0] = P / I1[0]

```

```

def convVd(Vd, I, i): # convolució pel càlcul de Vd[i]
    suma = 0
    for k in range(1, i):
        suma += k * Vd[k] * I[i - k]
    return suma

def convVlI(Vl, Il, i): # convolució pel càlcul de Vl[i]
    suma = 0
    for k in range(i):
        suma = suma + Vl[k] * Il[i-k]
    return suma

for i in range(1, n): # càlcul dels coeficients
    Il[i] = (1 / R + 1 / R2) * (-Vd[i - 1] - Vl[i - 1])
    Vd[i] = (i * Vt * Il[i] - convVd(Vd, Il, i)) / (i * (Is + Il[0]))
    Vl[i] = -convVlI(Vl, Il, i) / Il[0]

If = sum(Il) # resultats finals
Vdf = sum(Vd)
Vlf = sum(Vl)

print('Il: ' + str(If))
print('Vd: ' + str(Vdf))
print('Vl: ' + str(Vlf))
print('P: ' + str(Vlf * If))

Vdfinal = np.zeros(n) # per tal de veure com evoluciona la tensió del díode
for j in range(n):
    Vdfinal[j] = np.sum([Vd[: (j+1)]])

```

B.7. Làmpada de descàrrega amb MIH

```

import numpy as np
from mpmath import *

n = 100 # profunditat

Z1 = 0.1 + 0.5 * 1j # impedàncies
Z2 = 0.02 + 0.13 * 1j
Z3 = 0.023 + 0.1 * 1j
Zp = -10 * 1j

Y1 = 1 / Z1 # admitàncies
Y2 = 1 / Z2
Y3 = 1 / Z3
Yp = 1 / Zp

```

```

P = -1 # dades
Q = -0.1
Va = 1.1

van = 0.5 # dades de la làmpada
lam = 2 * np.sqrt(2) / np.pi
In = np.sqrt(1 - van * van * (2 - lam * lam)) * 1
ang = -np.pi / 2 + np.arctan((van * np.sqrt(lam * lam - van * van)) / (1 - van * van))

Vb = np.zeros(n, dtype= complex) # sèries a calcular
Vc = np.zeros(n, dtype= complex)
R = np.zeros(n, dtype= complex)
X = np.zeros(n, dtype= complex)
F = np.zeros(n, dtype= complex)
L = np.zeros(n, dtype= complex)
Y = np.zeros(n, dtype= complex)
M = np.zeros(n, dtype= complex)
B = np.zeros(n, dtype= complex)
INL = np.zeros(n, dtype= complex)

Vb[0] = Va # inicialització de les sèries
Vc[0] = (-Va * Y1 - Vb[0] * Y3) / (-Y1 - Y3)
R[0] = 1 / conj(Vb[0])
X[0] = 1 / np.real(Vc[0])
F[0] = np.imag(Vc[0]) * X[0]
B[0] = 1 + F[0] * F[0]
L[0] = np.sqrt(B[0])
Y[0] = 1 / L[0]
M[0] = F[0] * Y[0]
INL[0] = In * 1 * (cos(ang) * Y[0] - sin(ang) * M[0]) + In * 1 * (sin(ang) * Y[0] + cos(ang) *
    M[0])*1j

sumatori1 = 0
sumatori2 = 0

from Funcions import pade4all

def sumaR(R, Vb, i): # convolució entre R i Vb
    suma = 0
    for k in range(i):
        suma += R[k] * conj(Vb[i - k])
    return suma

def sumaX(X, Vc, i): # convolució entre X i Vc real
    suma = 0
    for k in range(i):

```

```

        suma += X[k] * np.real(Vc[i - k])
    return suma

def sumaF(Vc, X, i): # convolució entre X i Vc imaginari
    suma = 0
    for k in range(i + 1):
        suma += np.imag(Vc[k]) * X[i - k]
    return suma

def sumaY(Y, L, i): # convolució entre Y i L
    suma = 0
    for k in range(i):
        suma += Y[k] * L[i - k]
    return suma

def sumaM(F, Y, i): # convolució entre F i Y
    suma = 0
    for k in range(i + 1):
        suma += F[k] * Y[i - k]
    return suma

def sumaB(F, i): # convolució entre F i la mateixa F
    suma = 0
    for k in range(i + 1):
        suma += F[k] * F[i - k]
    return suma

def sumaL(L, i): # convolució entre L i la mateixa L
    suma = 0
    for k in range(1, i):
        suma += L[k] * L[i - k]
    return suma

for i in range(1, n): # càlcul dels coeficients de les sèries
    Vb[i] = ((P - Q*1j) * R[i - 1] - Y3 * (Vb[i - 1] - Vc[i - 1]) - Vb[i - 1] * Yp) / Y2
    Vc[i] = (INL[i - 1] - Vb[i] * Y3) / (-Y1 - Y3)
    R[i] = - sumaR(R, Vb, i) / conj(Vb[0])
    X[i] = - sumaX(X, Vc, i) / np.real(Vc[0])
    F[i] = sumaF(Vc, X, i)
    B[i] = sumaB(F, i)
    L[i] = (B[i] - sumaL(L, i)) / (2 * L[0])
    Y[i] = - sumaY(Y, L, i) / L[0]
    M[i] = sumaM(F, Y, i)

```

```

INL[i] = In * (cos(ang) * Y[i] - sin(ang) * M[i]) + In * (sin(ang) * Y[i] + cos(ang) * M[i]
) * 1j

I1 = (Va - pade4all(i, Vc, 1)) / Z1
I2 = (Va - pade4all(i, Vb, 1)) / Z2
I3 = (pade4all(i, Vb, 1) - pade4all(i, Vc, 1)) / Z3
Ipq = np.conj((-P - Q*1j) / (pade4all(i, Vb, 1)))
Ip = (pade4all(i, Vb, 1)) / Zp

sumatori1 = I2 - (Ip + I3 + Ipq) # balanços d'intensitat
sumatori2 = I1 + I3 - np.sum(INL)

print('Balanç 1: ' + str(sumatori1))
print('Balanç 2: ' + str(sumatori2))

angvc = np.angle(np.sum(Vc)) # angle de la tensió Vc fonamental

for h in (3, 5, 7, 9): # càlcul dels harmònics
    Z1 = 0.1 + 0.5 * 1j * h # noves impedàncies
    Z2 = 0.02 + 0.13 * 1j * h
    Z3 = 0.023 + 0.1 * 1j * h
    Zp = -10 * 1j / h

    Ih = 2 * np.sqrt(2) * 0.5 / (np.pi * h**2) # intensitat harmònica de la làmpada
    angh = h * np.arcsin(0.5 / h) + angvc

    Yadm = [[1 / Zp + 1 / Z1 + 1 / Z2, -1 / Z2, -1 / Z1], [-1 / Z2, 1 / Z2 + 1 / Z3 + 1 / Zp,
    -1 / Z3], [-1 / Z1, -1 / Z3, 1 / Z1 + 1 / Z3]]
    Yadm = np.array(Yadm) # matriu d'admitàncies
    Ivec = [[0], [0], [- (Ih * np.cos(angh) + Ih * np.sin(angh)*1j)]]
    Ivec = np.array(Ivec) # vector d'intensitats
    Vsol = np.dot(np.linalg.inv(Yadm), Ivec) # vector de tensions

```

B.8. Làmpada de descàrrega amb GS

```

import numpy as np
from mpmath import *

n = 100 # nombre d'iteracions

Z1 = 0.1 + 0.5*1j # impedàncies
Z2 = 0.02 + 0.13*1j
Z3 = 0.023 + 0.1*1j
Zp = -10*1j

Y1 = 1 / Z1 # admitàncies
Y2 = 1 / Z2
Y3 = 1 / Z3

```

```

Yp = 1 / Zp

P = -1 # dades
Q = -0.1
Va = 1.1

Vb = np.zeros(n, dtype= complex) # incògnites
Vc = np.zeros(n, dtype= complex)
Vb[0] = 1
Vc[0] = 1

van = 0.5 # dades de la làmpada
lam = 2 * np.sqrt(2) / np.pi
In = np.sqrt(1 - van * van * (2 - lam * lam)) * 1
ang = -np.pi / 2 + np.arctan((van * np.sqrt(lam * lam - van * van)) / (1 - van * van)) + np.
    angle(Vc[0])
Inl = In * cos(ang) + In * sin(ang)*1j

for i in range (1, n): # iterar per calcular les incògnites
    Vb[i] = (Va * Y2 + Vc[i - 1] * Y3 + (P - Q*1j) / (np.conj(Vb[i - 1]))) / (Yp + Y2 + Y3)
    Vc[i] = (-Inl + Vb[i] * Y3 + Va * Y1) / (Y1 + Y3)

    ang = -np.pi / 2 + np.arctan((van * np.sqrt(lam * lam - van * van)) / (1 - van * van)) +
        np.angle(Vc[i])
    Inl = In * cos(ang) + In * sin(ang) * 1j
    I1 = (Va - Vc[i - 1]) / Z1
    I2 = (Va - Vb[i - 1]) / Z2
    I3 = (Vb[i - 1] - Vc[i - 1]) / Z3
    Ipq = np.conj((-P - Q * 1j) / Vb[i - 1])
    Ip = Vb[i - 1] / Zp

    sumatori1 = I2 - (Ip + Ipq + I3) # balanços d'intensitat
    sumatori2 = I1 + I3 - Inl

I1 = (Va - Vc[n - 1]) / Z1 # càlcul final de corrents
I2 = (Va - Vb[n - 1]) / Z2
I3 = (Vb[n - 1] - Vc[n - 1]) / Z3
Ipq = np.conj((-P - Q * 1j) / Vb[n - 1])
Ip = Vb[n - 1] / Zp

sumatori1 = I2 - (Ip + Ipq + I3)
sumatori2 = I1 + I3 - Inl
print('Balanç 1: ' + str(sumatori1))
print('Balanç 2: ' + str(sumatori2))

```