APA - Problema 3

Josep de Cid

September 2017

Considerem un experiment aleatori en què mesurem una determinada variable aleatòria X, que segueix una distribució gaussiana univariada, cosa que escrivim $X\ N(\mu;\sigma^2)$. Prenem N mesures independents de X i obtenim una mostra aleatòria simple $x_1,...,x_N$, on cada x_n és una realització de X, per n = 1,...,N. Es demana:

1. Escriviu la funció de densitat de probabilitat per un x_n qualsevol i construïu la funció log-versemblança (negativa) de la mostra.

   La funció de densitat de probabilitat per a x_n en la distribució Normal és:

   $$\mathcal{N}(x_n,\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp(-\frac{x_n-\mu}{2\sigma})^2$$

   Per construïr la funció log-versemblaça (negativa) necessitem operar amb la probabilitat d'obenir $D = x_1...x_n$, a partir dels paràmetres θ, en el nostre cas, $\theta = \binom{\mu}{\sigma^2}$. El nostre objectiu és obtenir una estimació $\hat{\sigma}$ de σ, donat D, amb la funció de versemblança (*likelihood*), que va en funció dels paràmetres, intentant màximitzar $\mathcal{L}(\theta)$ respecte a θ:

   $$\mathcal{L}(\theta) = \prod_{i=1}^{N} p(x_i;\sigma) = \prod_{i=1}^{N}(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp(-\frac{x_n-\mu}{2\sigma})^2)$$

   Per simplificar el problema, operarem amb el ln de $\mathcal{L}$ negatiu, que no canviarà qualitativament el resultat del problema, però haurem de minimitzar $\mathcal{L}$ enlloc de maximitzar. Aplicant propietats dels logaritmes podem simplificar l'expressió resultant fins a obtenir la funció log-versemblança negativa de la mostra.

   $$\mathcal{L}(\theta) \xrightarrow{\text{log-likelihood}} l(\theta) = \ln \prod_{i=1}^{N} \mathcal{N}(x_i,\theta) = \sum_{i=1}^{N} \ln \mathcal{N}(x_i,\theta) =$$

   $$= \sum_{i=1}^{N} \ln(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp(-\frac{x_n-\mu}{2\sigma})^2) \xrightarrow{\text{negatiu}} -\sum_{i=1}^{N} \ln(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp(-\frac{x_n-\mu}{2\sigma})^2) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N}(\ln(\sigma\sqrt{2\pi}) + \frac{(x_n-\mu)^2}{(2\sigma)^2})$$

2. Trobeu els estimadors de màxima versemblança $\hat{\mu}$ i $\hat{\sigma}^2$ per μ i per σ^2, a partir de la mostra.

   Per obtenir els EMV $\hat{\mu}$ i $\hat{\sigma^2}$, hem de calcular la derivada parcial en μ i σ^2 respectivament.

$$\frac{\partial l}{\partial \mu} = \sum_{n=1}^{N}(0 + \frac{2\sigma^2 * 2(x_n-\mu)*(-1) - (x_n-\mu)^2 * 0}{(2\sigma^2)^2}) =$$

$$= \sum_{n=1}^{N}(\frac{2(x_n-\mu)*(-1)}{2\sigma^2}) = \sum_{n=1}^{N}(\frac{-x_n+\mu}{\sigma^2}) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{n=1}^{N}(-x_n+\mu)$$

   Un cop derivat respecte a μ necessitem aïllar-la per obtenir el valor de l'estimador:

$$\sum_{n=1}^{N}(-x_n+\mu) = \sigma^2 * 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{N}(-x_n+\mu) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{N}(\mu) = \sum_{n=1}^{N}(x_n) \Rightarrow N\mu = \sum_{n=1}^{N}(x_n) \Rightarrow \hat{\mu} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}x_n$$

   Repetim el procés derivant respecte a σ^2:

$$\frac{\partial l}{\partial \sigma^2} = \frac{N}{2\sigma^2} - \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{n=1}^{N}(x_n-\mu)^2$$

3. Demostreu que realment són mínims (i no extrems qualsevol).

   Per demostrar que són mínims, necessitem veure que la segona derivada és positiva: $\frac{\partial^2 l}{\partial^2 \mu}(\hat{\mu}) > 0$ i $\frac{\partial^2 l}{\partial^2 \sigma^2}(\hat{\sigma}^2) > 0$ respectivament:

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \mu}(\hat{\mu}) =$$

$\frac{\partial^2 l}{\partial \sigma}(\hat{\sigma}^2)=$

Calculeu els biaixos dels dos estimadors. Determineu si l'estimador per μ és consistent.

Calculeu la variança de l'estimador per μ, de 2 maneres (que han de coincidir), a triar de les 3 següents. Pista: useu que si X_n, X_m $N(\mu, \sigma^2)$, llavors:

1. Insertant directament el valor de l'estimador i utilitzant les propietats de la variança;

2. Usant la coneguda fòrmula $Var[\hat{\theta}] = 0$;
3. Utilizant la definició directa de la variança $Var[\hat{\theta}] = 0$;

Per determinar la velocitat màxima d'un prototip d'avió es van fer 15 proves independents (i caríssimes!) amb els resultats
422.2, 418.7, 425.6, 420.3, 425.8, 423.1, 431.5, 428.2, 438.3, 434.0, 411.3, 417.2, 413.5, 441.3, 423.0
on els valors venen expresats en m/s. Suposant que aquesta velocitat màxima és gaussiana, quins valors estimaríeu per a μ i per σ?

[R] Fixeu unes μ i σ^2 al vostre gust i genereu 1000 mostres aleatòries simples Gaussianes de mida N = 50 (noteu que no cal emmagatzemar-les); utilitzeu les mostres (que han de ser i.i.d i independents entre si) per estimar els biaixos i variances dels valors teòrics de μ i σ^2. Compareu els resultats respecte els valors teòrics dels estimadors.