

# COMUNICACIONS ANALÒGIQUES I DIGITALS

Apunts de Teoria:  
Sistemes de Comunicacions Banda Base

Grau en Enginyeria de Sistemes Audiovisuals  
Escola Superior d'Enginyeries Industrial, Aeroespacial i Audiovisual de Terrassa  
Universitat Politècnica de Catalunya

Professors: Josep Sala Álvarez i Francesc Molina Oliveras  
E-mail: {josep.sala, francesc.molina}@upc.edu

# Índex

<b>1</b>	<b>Comunicacions Banda Base</b>	<b>3</b>
1.1	Introducció	3
1.2	Sistema de Transmissió Banda Base	4
1.2.1	Codificació de Símbol (Banda Base)	6
1.2.2	Conformació de Pols	8
1.3	Caracterització de Senyals de Comunicacions	11
1.3.1	Paràmetres Bàsics de Senyals: Mitjana i Potència	12
1.3.2	Variable Aleatòria	16
1.4	Potència i Densitat Espectral de Potència en Transmissió	20
1.4.1	Potència en Transmissió	20
1.4.2	Densitat Espectral de Potència (DEP) en Transmissió	21
1.4.3	Exemples de Càlcul: potència i DEP de senyals M-PAM	21
1.5	El Receptor	23
1.5.1	Filtratge en Recepció	23
1.5.2	Mostratge en Recepció: Observació de Símbol	26
1.5.3	Filtratge Òptim en Recepció: Filtre Adaptat	27
1.5.4	Model Discret Equivalent	34
1.6	Disseny de Polsos de Conformació: Polsos de Nyquist	36
1.6.1	Construcció de Polsos de Nyquist	38
1.6.2	Polsos de Nyquist Cosinus Alçat	40
1.7	Detecció i Probabilitat d'Error	42
1.7.1	Introducció al Càlcul de Probabilitats d'Error: el cas 2-PAM polar	47
1.7.2	Càlcul de la Probabilitat d'Error: el cas 4-PAM polar	54
1.7.3	Càlcul de la Probabilitat d'Error: el cas $M$ -PAM polar	57
1.8	Apèndixs	58
1.8.1	Esperança Estadística: Definició i Propietats	58
1.8.2	Apèndix: Càlcul de la Potència Transmesa	59

# Índex de figures

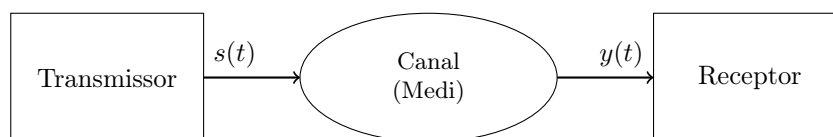
1.1	Cadena de comunicacions punt a punt. . . . .	3
1.2	Canal ideal. . . . .	4
1.3	Diagrama de blocs d'un modulador PAM en banda base amb font d'informació analògica. . . . .	5
1.4	Diagrama de blocs d'un modulador PAM en banda base amb font d'informació digital. . . . .	6
1.5	2-PAM polar. . . . .	7
1.6	4-PAM polar. . . . .	7
1.7	2-PAM unipolar. . . . .	7
1.8	4-PAM unipolar. . . . .	7
1.9	Pols Return-to-Zero rectangular. . . . .	8
1.10	Pols Non-Return-to-Zero rectangular. . . . .	8
1.11	Pols sinc. . . . .	9
1.12	Resposta freqüencial $ P_c(f) $ corresponent als polsos RZ, NRZ i sinc. . . . .	10
1.13	Seqüència de símbols $a[k] = [+A/2, +A/2, -A/2]$ conformada amb pols RZ. . . . .	12
1.14	Senyal cosinus $s(t) = \cos(2\pi f_0 t - \pi/2)$ i el seu quadrat $s^2(t)$ . . . . .	14
1.15	Funció de densitat de probabilitat d'una distribució Gaussiana per a diferents valors de $P_n$ . . . . .	18
1.16	Interpretació gràfica de la DEP. . . . .	22
1.17	Diagrama de blocs corresponent al receptor. . . . .	23
1.18	Filtratge en recepció. . . . .	24
1.19	Pols NRZ, filtre adaptat causal $h_D(t) = p^*(T_s - t)$ i sortida $g(t) = p(t) * h_D(t) = R_p(t - T_s)$ . . . . .	32
1.20	Pols NRZ, filtre adaptat no-causal $h_D(t) = p^*(-t)$ i sortida $g(t) = p(t) * h_D(t) = R_p(t)$ . . . . .	33
1.21	Pols sinc, filtre adaptat no-causal $h_D(t) = p^*(-t)$ i sortida $g(t) = p(t) * h_D(t) = R_p(t - T_s)$ . . . . .	34
1.22	Pols $p(t)$ doble sinc (blau) i polsos sinc component (vermell). . . . .	35
1.23	Pols $g(t) = p(t) * p^*(-t)$ associat al pols $p(t)$ de la figura 1.22 i polsos sinc component. . . . .	35
1.24	Polsos $G(f - kr_s)$ pels valors de $k = -1$ a $k = 2$ respecte la freqüència normalitzada $f/r_s$ . . . . .	39
1.25	Polsos $G(f)$ corresponents als roll-offs: $\alpha = 0$ (blau), $\alpha = 0.5$ (vermell) i $\alpha = 1$ (magenta). . . . .	40
1.26	Representació de 400 observacions realitzades pel cas d'una constel·lació 2-PAM. . . . .	42
1.27	Dispersió de les observacions deguda al soroll Gaussià. . . . .	43
1.28	Representació de 400 observacions realitzades pel cas d'una constel·lació 4-PAM. . . . .	44
1.29	Representació de les 400 observacions de la figura 1.26 junt amb el llindar de decisió $\gamma = 0$ . . . . .	47
1.30	Representació del càlcul de les probabilitats $p(\epsilon_s a_1)$ i $p(\epsilon_s a_2)$ per $\beta a_1 = -1$ i $\beta a_2 = +1$ . . . . .	49
1.31	Representació de la f.d.p. del soroll $n_D$ pels valors de $\sigma_{n_D}$ de la figura 1.26. . . . .	50
1.32	Representació del càlcul de les probabilitats $p(\epsilon_s a_1)$ i $p(\epsilon_s a_2)$ per $\beta a_1 = -1$ i $\beta a_2 = +1$ . . . . .	51
1.33	Representació de $p(\epsilon_s)$ per 2-PAM en funció de la relació EsNo. . . . .	53
1.34	Fronteres de decisió corresponents als llindars $\gamma_1 = -\beta A$ , $\gamma_2 = 0$ i $\gamma_3 = +\beta A$ per 4-PAM polar. . . . .	55
1.35	Representació de les f.d.p. de l'observació de símbol quan es transmeten els símbols $a_1$ i $a_4$ . . . . .	55
1.36	Representació de les f.d.p. de l'observació de símbol quan es transmeten els símbols $a_2$ i $a_3$ . . . . .	56
1.37	Representació del càlcul de les probabilitat d'error parcials realitzada sobre la f.d.p. del soroll. . . . .	57

# Tema 1: Comunicacions Banda Base

## 1.1 Introducció

En aquesta assignatura estudiarem dos tipus de sistemes de comunicacions digitals que detallarem més endavant: els sistemes banda base (primera part de l'assignatura) i els sistemes pas banda (segona part de l'assignatura). La present introducció tracta indistintament ambdós sistemes.

La definició d'un sistema de comunicacions, tal com es representa en la Figura 1.1, contempla les següents funcions de transmissió i recepció:



**Figura 1.1:** Cadena de comunicacions punt a punt.

### 1. La Transmissió d'Informació a través d'un Medi de Comunicacions:

- (a) Font d'Informació: pel que fa a la naturalesa de la informació que volem transmetre, distingim:
  - i. Font d'Informació Analògica: el senyal a transmetre és una funció de la variable temporal (continua)  $t$ ,  $x(t)$ , amb una determinada potència i una determinada banda. En aquells casos en que el senyal  $x(t)$  *no es converteix* a una seqüència binària  $b[n]$  mitjançant un bloc de conversió analògica a digital (convertidor A/D), parlarem de Sistema de Comunicacions Analògiques.
  - ii. Font d'Informació Digital: el senyal a transmetre és una seqüència binària  $b[n]$ , una funció de l'índex de mostreig  $n \in \mathbb{Z}$  (conjunt dels nombres sencers<sup>1</sup>) dels bits de la seqüència. Exemples: un fitxer d'ordinador, un correu electrònic, la conversió a digital d'un senyal analògic, etc.. En aquest cas, parlarem sempre de Sistema de Comunicacions Digital atès que la informació del senyal analògic original  $x(t)$  està continguda en la seqüència binària  $b[n]$  que transmetrem.

L'especificació d'un transmissor de comunicacions consisteix en definir una forma d'ona  $s(t)$  adequada per a la transmissió a través del medi de comunicacions, i que codifiqui la Font d'Informació  $x(t)$  o  $b[n]$  de tal forma que sigui possible (en condicions ideals) la reconstrucció de  $x(t)$  o de  $b[n]$  a partir de  $s(t)$ . Anomenem *modulació* al procés que codifica  $x(t)$  o  $b[n]$  en la forma d'ona transmesa  $s(t)$ .

- (b) Medi de Comunicacions: ens referirem al medi de comunicacions com *Canal de Comunicacions*. Com a exemples de medi de comunicacions podem citar: comunicacions per cable telefònic, per cable coaxial, per fibra òptica, a través de la xarxa de subministrament elèctric o bé comunicacions sense fils com comunicacions ràdio (per l'espai lliure), comunicacions per infraroigs, comunicacions per ultrasons (submarines), etc.. En aquesta assignatura, treballarem amb models de canals de comunicacions que representen el senyal rebut  $y(t)$  en funció del senyal transmès  $s(t)$  de la següent forma:

$$y(t) = h_c(t) * s(t) + w(t). \quad (1.1)$$

---

<sup>1</sup> $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \dots\}$ .

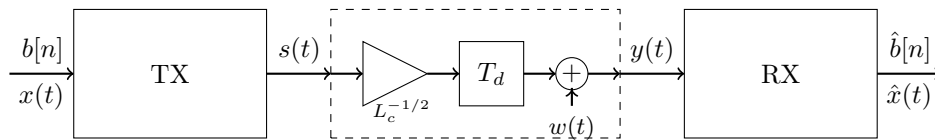


Figura 1.2: Canal ideal.

En l'expressió anterior:

- i.  $h_c(t)$  és una resposta impulsional que modela la propagació del senyal transmès  $s(t)$  a través del canal de comunicacions i que, per tant, pot distorsionar la forma d'ona transmesa. L'operació  $*$  correspon a la convolució de dos senyals. En condicions ideals, es contempla únicament una atenuació i un retard:  $y(t) = \alpha \cdot s(t - T_d) + w(t)$ , que corresponen a la resposta impulsional de canal  $h_c(t) = \alpha \cdot \delta(t - T_d)$ . Habitualment s'expressa el coeficient  $\alpha$  de *guany en amplitud del canal* en termes del factor  $L_c$  d'*atenuació en potència*<sup>2</sup> del canal de la forma:  $\alpha = L_c^{-1/2}$ . La Figura 1.2 mostra l'esquema de blocs pel canal ideal.
  - ii.  $w(t)$  és un senyal aleatori que anomenem *soroll de canal*, desconegut pel transmissor i pel receptor, la presència del qual degrada les prestacions de la comunicació. És a dir, provoca que a la pràctica sigui impossible recuperar a partir del senyal rebut  $y(t)$  la Font d'Informació original  $x(t)$  o  $b[n]$  amb absoluta fidelitat. En aquesta assignatura, estudiarem com es pot caracteritzar el senyal  $w(t)$  de forma adequada per analitzar i dissenyar sistemes de comunicacions.
2. **La Recepció** d'Informació a partir de la sortida  $y(t)$  del canal de comunicacions, entesa com una arquitectura de processament del senyal  $y(t)$  que permet reconstruir (amb una determinada fidelitat que depèn de les condicions del canal) la informació original  $x(t)$  o  $b[n]$  generada a l'entrada del sistema transmissor. Com s'ha mencionat anteriorment, la recuperació perfecte de la informació original no és possible per la presència del soroll  $w(t)$  a la sortida del canal. Per aquest motiu resulta necessari:
- (a) definir Criteris de Qualitat per la informació recuperada. Per exemple, pel cas de Comunicacions Digitals que ens ocuparà principalment, treballarem la *Probabilitat d'Error de Bit* o probabilitat que el receptor efectui una decisió errònia sobre quin bit de la seqüència original  $b[n]$  s'ha transmès en un determinat instant discret  $n$ .
  - (b) dissenyar una estructura adequada pels blocs de Transmissió i Recepció per optimitzar el Criteri de Qualitat escollit per un canal de comunicacions concret. Aquest disseny haurà de contemplar determinades restriccions pràctiques entre les que citem com a exemple les més habituals: potència màxima en transmissió a la que podem recórrer, amplada de banda màxima en transmissió que pot ocupar el senyal  $s(t)$ , etc..

En aquesta assignatura estudiarem sistemes de comunicacions digitals des del punt de vista anterior, utilitzant models senzills pels tres blocs que constitueixen el que s'anomena la **Cadena de Comunicacions Punt a Punt** representada en la Figura 1.1: Transmissor, Canal, i Receptor.

## 1.2 Sistema de Transmissió Banda Base

En aquesta secció veurem com podem transmetre una seqüència binària  $b[n]$  mitjançant una forma d'ona analògica  $s(t)$ . Ens referirem a aquesta forma d'ona  $s(t)$  com a *senyal de comunicacions digitals*. Al llarg d'aquest document, tractarem formes d'ona de dos tipus:

1. **Formes d'ona  $s(t)$  de naturalesa passa-baixes:** parlarem en aquest cas de *comunicacions digitals banda base* i iniciarem el seu estudi en aquest tema.

<sup>2</sup>Si el canal presenta una atenuació (en potència) de  $L_c = 20$  dB, això correspon a un factor  $L_c = 100$  en escala lineal. És a dir, tenim que  $L_c[\text{dB}] = 10 \cdot \log_{10}(L_c)$ . Per tant,  $\alpha = \sqrt{0.01} = 0.1$ .

## 2. Formes d'ona $s(t)$ de naturalesa passa-banda: parlarem en aquest cas de comunicacions digitals pas banda i les tractarem en un tema posterior.

Dins de les comunicacions digitals banda base considerarem únicament l'estudi d'un tipus particular de senyal  $s(t)$ , però no obstant, de molt àmplia aplicació en sistemes reals de comunicacions: les modulacions lineals basades en polsos de conformació. Aquestes modulacions (enteses com el format o estructura del senyal) vénen donades per la següent expressió:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a[k]p(t - kT_s). \quad (1.2)$$

En l'expressió anterior,  $a[k]$  constitueix una seqüència de símbols que entendrem com nivells d'amplitud. Aquests nivells d'amplitud modifiquen el nivell d'amplitud dels polsos  $p(t - kT_s)$ , de forma que el símbol  $a[k]$  es transmet "sobre" el pols  $p(t - kT_s)$ . El paràmetre  $T_s$ , anomenat període de símbol, ens defineix cada quants segons transmetem un nou símbol  $a[k]$  sobre el seu pols  $p(t - kT_s)$  corresponent. És a dir, utilitzem versions retardades un temps  $kT_s$  d'un pols bàsic  $p(t)$  per transmetre el símbol  $k$ -èssim de la seqüència de símbols  $a[k]$ . El ritme o velocitat al/la qual transmetem símbols es denota amb el paràmetre  $r_s$ , l'anomenem velocitat de símbol o de senyalització, i es defineix com

$$r_s = \frac{1}{T_s}. \quad (1.3)$$

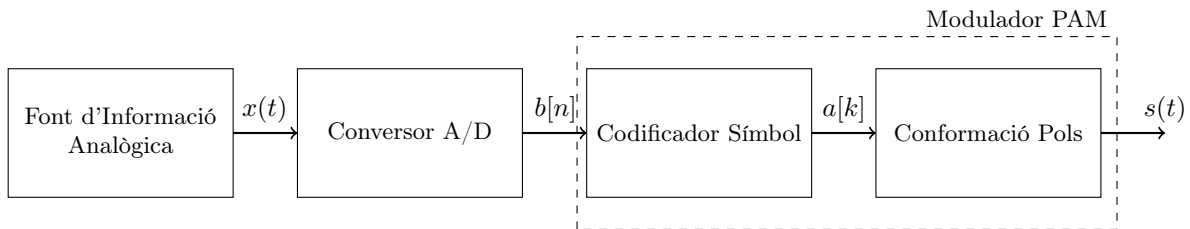
La seva unitat és el baud o símbol per segon. Per exemple, una velocitat de símbol de 10 kbaud equival a transmetre  $10^4$  símbols per segon.

**Exemple:** considerem la transmissió d'una seqüència binària  $b[n]$ . Codifiquem el bit 0 amb una amplitud de símbol  $-1$  i el bit 1 amb una amplitud de símbol  $+1$ . Aleshores, la transmissió del paquet de bits 001011 es faria amb el següent senyal (suposant l'origen de temps  $t = 0$  pel primer bit)

$$s(t) = -p(t) - p(t - T_s) + p(t - 2T_s) - p(t - 3T_s) + p(t - 4T_s) + p(t - 5T_s), \quad (1.4)$$

on:  $b[0] = 0 \Rightarrow a[0] = -1$ ,  $b[1] = 0 \Rightarrow a[1] = -1$ ,  $b[2] = 1 \Rightarrow a[2] = +1$  i així successivament. Per aquest senyal, si es genera un bit cada  $T_b$  segons, prendríem  $T_s = T_b$ .

En general, la seqüència de bits  $b[n]$  es codifica sobre la seqüència de símbols  $a[k]$ . El bloc responsable d'aquesta funció s'anomena Codificador de Símbol. L'estructura, o diagrama de blocs, corresponent al modulador banda base és, per un modulador en banda base amb font d'informació analògica, la representada en la Figura 1.3.



**Figura 1.3:** Diagrama de blocs d'un modulador PAM en banda base amb font d'informació analògica.

En referència al model de senyal de l'equació (1.2) i a l'exemple anterior, en que consideràvem únicament la transmissió de sis bits, podem distingir entre dos modes de transmissió segons l'escenari de comunicacions (l'exemple proporcionat per cada mode correspon, no obstant, a sistemes de comunicacions pas banda),

1. Transmissió Continua: es transmet una seqüència binària  $b[n]$  infinitament llarga. Aquest és el mode que adoptarem en aquesta assignatura i que és representatiu d'escenaris que estan contínuament difonent

informació, per exemple: ràdio-difusió de televisió.

2. Transmissió a Ràfegues (*burst*): es transmeten aïlladament seqüències binàries  $b[n]$  finites d'una determinada longitud. Aquest mode és representatiu d'aplicacions en que els usuaris transmeten esporàdicament, per exemple: telèfons mòbils, sensors o estacions de tele-mesura.

En referència a la codificació de símbol, entendrem que ve definida a partir dels següents punts:

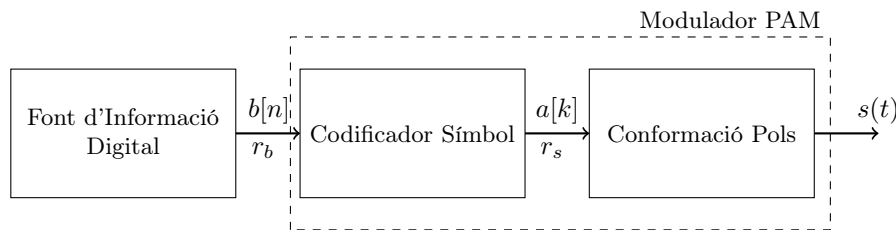
1. La seqüència binària  $b[n]$  utilitza un índex temporal discret  $n$  que anomenem temps de bit i que pren valors sencers des de menys a més infinit:  $n \in \{\dots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \dots\}$ .
2. La seqüència de símbols  $a[k]$  utilitza un índex temporal discret  $k$  que anomenem temps de símbol i que pren valors sencers des de menys a més infinit:  $k \in \{\dots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \dots\}$ .
3. Només es transmeten un total de  $M$  símbols  $a[k]$  diferents i que s'extreuen d'un conjunt o constel·lació de símbols  $\mathcal{C} = \{a_1, a_2, \dots, a_M\}$ . És a dir,  $a[k] = a_i \in \mathcal{C}$ , on  $1 \leq i \leq M$  és l'índex del símbol en la constel·lació.
4. Considerem que s'escull un símbol  $a_i$  de la constel·lació  $\mathcal{C}$ , de dimensió  $M$ , per transmetre un conjunt de  $b$  bits consecutius de la seqüència binària  $b[n]$ . Per tant,  $M$  ha de ser una potència sencera de 2, complint-se que  $M = 2^b$  i que  $b = \log_2(M)$ . El paràmetre  $b$  s'anomena *nombre de bits per símbol*. L'estructura del codificador de símbol ve donada per l'*etiqueta binària* de  $b$  bits que s'assigna a cada símbol  $a_{1 \leq i \leq M}$ .

En referència a la transmissió de la seqüència binària  $b[n]$ , definim el paràmetre  $r_b$  anomenat velocitat de bit i que ens indica el nombre de bits per segon que es transmeten amb l'esquema de modulació definit. Per tant, tenim la següent relació entre  $r_b$  (velocitat de bit) i  $r_s$  (velocitat de símbol),

$$r_b[\text{bit/s}] = b[\text{bit/símbol}] \cdot r_s[\text{símbol/s}] = (\log_2(M)) \cdot r_s, \quad (1.5)$$

atès que per cada nou símbol es transmeten  $b$  nous bits. Podem veure l'esquema corresponent en la Figura 1.4 per a un modulador en banda base amb font d'informació digital. L'esquema proposat és equivalent a una transmissió amb font d'informació analògica on substituïm la font i el conversor A/D per una font digital equivalent. Destaquem que aquest esquemes corresponen al que es coneix com *codificació de símbol sense memòria* i que serà l'únic tipus de codificació de símbol que tractarem en aquesta assignatura:

- **Codificació de Símbol sense Memòria:** per generar cada nou símbol  $a[k]$  es pren un paquet de  $b$  nous bits consecutius adjacents al paquet de bits anterior. A més a més, la generació del nou símbol depèn *únicament* del nou paquet de  $b$  bits i no de cap estat anterior (memòria) del codificador. Per tant:  $r_b = b \cdot r_s$ .



**Figura 1.4:** Diagrama de blocs d'un modulador PAM en banda base amb font d'informació digital.

En les següents seccions passem a concretar la Codificació de Símbol i la Conformació de Pols.

### 1.2.1 Codificació de Símbol (Banda Base)

Considerarem els següents tipus de constel·lacions:

1. Constel·lacions  $M$ -PAM polars:

$$\mathcal{C}_{M\text{-PAM,polar}} = \{a_1, a_2 = a_1 + A, \dots, a_M = a_1 + (M-1)A\} \quad (1.6)$$

amb  $a_1 = -\frac{M-1}{2}A$ . Exemples 2-PAM i 4-PAM polars:

$$\mathcal{C}_{2\text{-PAM,polar}} = \left\{ -\frac{A}{2}, +\frac{A}{2} \right\} \quad (1.7a)$$

$$\mathcal{C}_{4\text{-PAM,polar}} = \left\{ -\frac{3A}{2}, -\frac{A}{2}, +\frac{A}{2}, +\frac{3A}{2} \right\} \quad (1.7b)$$

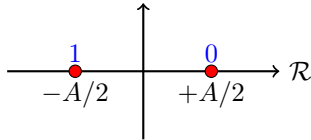


Figura 1.5: 2-PAM polar.

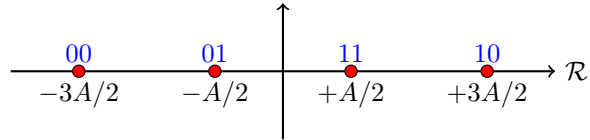


Figura 1.6: 4-PAM polar.

2. Constel·lacions  $M$ -PAM unipolars:

$$\mathcal{C} = \{a_1, a_2 = a_1 + A, \dots, a_M = a_1 + (M-1)A\} \quad (1.8)$$

amb  $a_1 = 0$ . Exemples 2-PAM i 4-PAM unipolars:

$$\mathcal{C}_{2\text{-PAM,unipolar}} = \{0, +A\} \quad (1.9a)$$

$$\mathcal{C}_{4\text{-PAM,unipolar}} = \{0, +A, +2A, +3A\} \quad (1.9b)$$

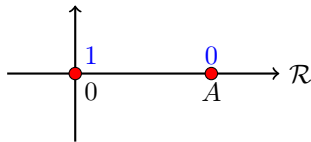


Figura 1.7: 2-PAM unipolar.

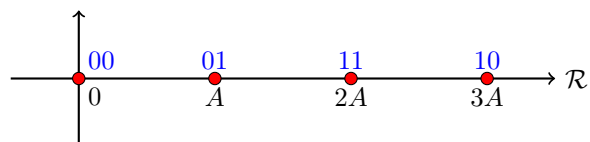


Figura 1.8: 4-PAM unipolar.

**Exemple: Elecció d'un Codificador de Símbol**

1. Plantejament: Desitgem transmetre vídeo no comprimit<sup>3</sup> (transmissió directa píxel a píxel) en blanc i negre i de baixa resolució per un sistema de comunicacions banda base. Per restriccions del canal, ens veiem obligats a utilitzar una modulació  $M$ -PAM a una velocitat de símbol que no superi  $r_s = 1$  Mbaud ( $10^6$  baud). Si el senyal de vídeo es mostreja amb 200 línies de 100 píxels cadascuna a 20 imatges per segon i cada píxel es codifica amb 8 bits, quina constel·lació  $M$ -PAM haurem d'utilitzar?

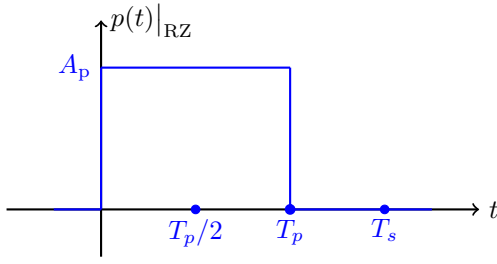
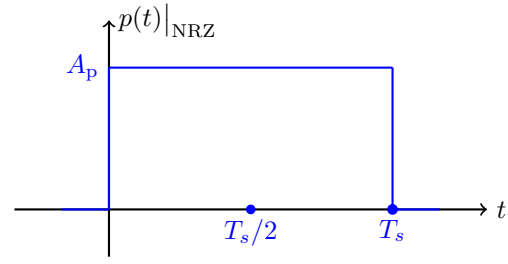
2. Resolució: Avaluem primer el nombre de píxels per segon:

$$\frac{200 \text{ línies}}{1 \text{ imatge}} \cdot \frac{100 \text{ píxels}}{1 \text{ línia}} \cdot \frac{20 \text{ imatges}}{1 \text{ segon}} = 4 \cdot 10^5 \frac{\text{píxels}}{\text{segon}}. \quad (1.10)$$

Cada píxel es codifica amb 8 bits, per tant, la font d'informació genera una velocitat de bit  $r_b = 8 \times 4 \cdot 10^5 = 3,2 \cdot 10^6$  bits/segon. El nombre de bits per símbol necessaris ve donat per la relació  $b = r_b/r_s$ . En aquest cas obtenim  $b = 3,2$  bits/símbol. Clarament, la codificació de símbol no pot utilitzar un nombre fraccional de bits, sinó que ha de resultar un nombre sencer. Per tant hauríem d'escollir  $b = 4$  i això ens donaria:

<sup>3</sup>En general, en qualsevol sistema de comunicacions transmetrem vídeo comprimit per reduir el nombre de bits a transmetre i optimitzar els recursos de transmissió (potència i amplada de banda requerides per  $s(t)$ ).



**Figura 1.9:** Pols Return-to-Zero rectangular.**Figura 1.10:** Pols Non-Return-to-Zero rectangular.

- (a) un nombre de símbols de la constel·lació  $M = 2^b = 16$ . Podríem escollir tant una constel·lació 16-PAM polar com una 16-PAM unipolar com qualsevol altra que contingui 16 símbols. Evidentment, l'elecció d'una constel·lació determinada té un impacte en paràmetres com la potència transmesa. Efectuarem la comparació més endavant quan haguem vist la teoria necessària.
- (b) una velocitat de bit total  $r'_b = b \cdot r_s = 4 \cdot 10^6$  bits/segon que excedeix la velocitat de bit  $r_b = 3,2 \cdot 10^6$  bits/segon requerida per la transmissió de vídeo. Això ens deixaria  $r'_b - r_b = 800$  kbps (kilobits/segon) disponibles per: transmetre informació addicional, afegir redundància (codis protectors d'errors) incloent bits de paritat que ajudin al receptor en la recuperació de la informació, afegir bits d'emplenament (*stuffing*) o qualsevol combinació de les anteriors.

### 1.2.2 Conformació de Pols

Distingirem els tres tipus següents de conformació de pols segons el pols a utilitzar:

1. Polsos RZ: els polsos RZ (Return-to-Zero) són polsos rectangulars amb duració  $T_p$  *estrictament* inferior al període de símbol  $T_s$ . Venen donats per l'expressió

$$p(t)|_{\text{RZ}} = A_p \cdot \Pi\left(\frac{t - T_p/2}{T_p}\right), \quad 0 < T_p < T_s. \quad (1.11)$$

Aquesta expressió correspon a un pols causal de duració  $T_p$  centrat a  $T_p/2$  (veure Figura 1.9).

2. Polsos NRZ: els polsos NRZ (Non-Return-to-Zero) són polsos rectangulars amb duració  $T_p = T_s$ , és a dir, idèntica al període de símbol  $T_s$ . Per tant, es mantenen a nivell  $A_p$  durant tota la transmissió del símbol. La seva expressió ve donada per la mateixa que la dels polsos RZ particularitzant per  $T_p = T_s$ ,

$$p(t)|_{\text{NRZ}} = A_p \cdot \Pi\left(\frac{t - T_s/2}{T_s}\right). \quad (1.12)$$

Aquesta expressió correspon a un pols causal de duració  $T_s$  centrat a  $T_s/2$  (veure Figura 1.10).

3. Polsos  $p(t)$  continus: els polsos RZ i NRZ anteriors presenten discontinuïtats que, com veurem més endavant, afecten a la distribució freqüencial de la potència del senyal transmès de tal forma que requereixen un ample de banda considerable per transmissió en relació a la velocitat de símbol  $r_s$ . Per evitar això, s'opta per polsos  $p(t)$  que tinguin un comportament continu i suau en temps, fet que redueix l'amplada de banda necessària per la seva transmissió. Més endavant estudiarem aquests polsos en més detall quan efectuem l'anàlisi del transmissor. Existeixen famílies de polsos d'aquest tipus que s'utilitzen habitualment en sistemes de comunicacions i que es caracteritzen per no estar limitats en temps, presentant cues que s'allarguen per totes dues bandes, més enllà de la duració estricta del símbol. Un exemple concret d'aquesta família seria el pols sinc especificat a continuació i mostrat en la Figura 1.11:

$$p(t) = A_p \cdot \text{sinc}(r_s t) = A_p \cdot \frac{\sin(r_s \pi t)}{\pi t}. \quad (1.13)$$

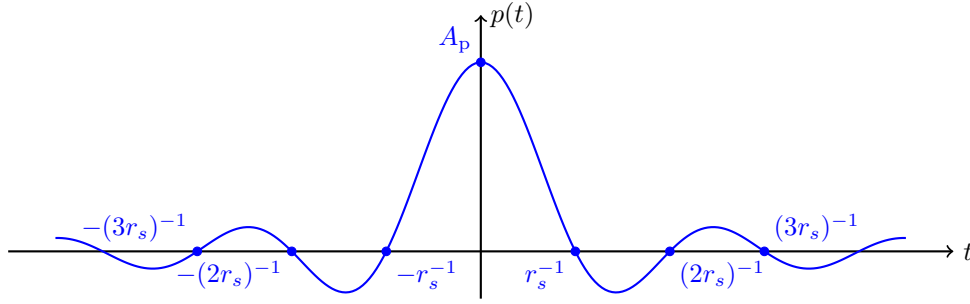


Figura 1.11: Pols sinc.

Aquesta expressió correspon a un pols no-causal centrat a l'origen i que presenta zeros a múltiples del període de símbol  $T_s = r_s^{-1}$ . Cal mencionar que, a la pràctica, s'utilitzen polsos  $p(t)$  amb una expressió més complicada que la de l'anterior pols sinc, però que presenten un decreixement més ràpid de les cues (major concentració temporal del pols).

### Exemple: Elecció d'un Pols de Conformació

- (a) Plantejament: hem de transmetre els polsos  $p(t - kT_s)$  (segons (1.2)) que modulen cada símbol  $a[k]$  a través d'un canal de comunicacions que presenta una resposta freqüencial  $H_c(f) = H_0 \cdot \Pi\left(\frac{f}{2B_h}\right)$ . És a dir, la resposta del filtre de canal anul·la tots els components freqüencials per sobre de  $B_h$  Hz. Ens cal escollir una forma de pols que resulti poc distorsionada pel canal. Quins polsos  $p(t)$  podem utilitzar i a quina velocitat de símbol  $r_s$  màxima ens permetran transmetre?
- (b) Resolució: hem d'avaluar com resultarà el pols de conformació de símbol a la sortida del canal de comunicacions en absència del terme de soroll  $w(t)$ . Per tant, suposem que la sortida del canal ve donada per  $y(t) = h_c(t) * s(t)$ , la convolució de la resposta impulsional que ens modela el canal amb el senyal transmès  $s(t)$ . Aleshores, el senyal  $y(t)$  ens quedarà expressat com

$$y(t) = h_c(t) * s(t) = h_c(t) * \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a[k] p(t - kT_s) \right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a[k] (h_c(t) * p(t - kT_s)). \quad (1.14)$$

És a dir, a la sortida del canal, cada símbol  $a[k]$  “viatja” sobre el pols filtrat<sup>4</sup>  $p(t - kT_s) * h_c(t) = p_c(t - kT_s)$ . Podem analitzar com queda modificada (distorsionada) la forma d'ona del pols  $p(t)$  examinant el pols  $p_c(t) = p(t) * h_c(t)$ , o el que és el mateix, calculant la seva resposta freqüencial  $P_c(f) = P(f)H_c(f)$ . Per tant, calculem les respostes freqüencials  $P_c(f)$  corresponents als polsos exemple anteriors: pols RZ, pols NRZ i pols sinc:

- i. Pols RZ: considerarem un pols amb  $T_p = \frac{1}{2}T_s$  (cicle útil del 50 %). Tenim que

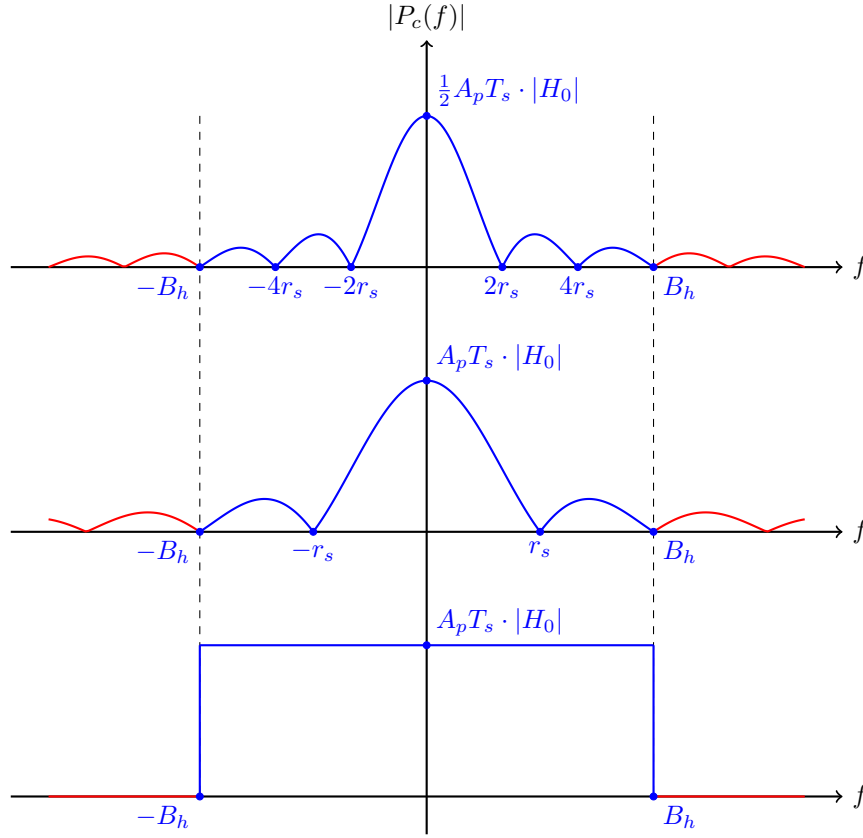
$$P_c(f)|_{\text{RZ}} = P(f)|_{\text{RZ}} \cdot H_c(f) = A_p T_p \text{sinc}(T_p f) e^{-j2\pi(T_p/2)f} \cdot H_0 \Pi\left(\frac{f}{2B_h}\right). \quad (1.15)$$

Per fer la comparativa amb la resta de polsos, els termes de retard no són importants. Per tant, farem la comparativa amb els mòduls quadrat de  $P_c(f)$  per eliminar el terme exponencial associat al retard  $T_p/2$  en la definició del pols causal original  $p(t)$ . Llavors, per  $T_p = T_s/2$  tenim

$$|P_c(f)|_{\text{RZ}}^2 = \frac{1}{4} A_p^2 T_s^2 \text{sinc}^2\left(\frac{1}{2}T_s f\right) \cdot |H_0|^2 \Pi\left(\frac{f}{2B_h}\right). \quad (1.16)$$

Veiem doncs, com es pot observar en la Figura 1.12, que per totes aquelles freqüències en la

<sup>4</sup>Tenim que el retard es pot expressar com una convolució de la següent forma:  $p(t - kT_s) = p(t) * \delta(t - kT_s)$ . Per tant,  $p(t - kT_s) * h_c(t) = (p(t) * \delta(t - kT_s)) * h_c(t) = (p(t) * h_c(t)) * \delta(t - kT_s)$ . Si definim  $p_c(t) = p(t) * h_c(t)$  tenim que el pols que modula el símbol  $a[k]$  a la sortida del canal és el pols  $p_c(t - kT_s) = p(t - kT_s) * h_c(t)$ .



**Figura 1.12:** Resposta freqüencial  $|P_c(f)|$  corresponent als polsos RZ, NRZ i sinc.

- banda  $|f| \leq B_h$ , apareixen zeros freqüencials a múltiples de l'invers de  $\frac{1}{2}T_s$ . És a dir, a les freqüències  $f_m = 2r_s \cdot m$  corresponents als múltiples parells de la velocitat de símbol  $r_s$ .
- ii. Pols NRZ: podem obtenir el mòdul quadrat de la resposta freqüencial del pols NRZ simplement substituint  $T_p = T_s$  en l'expressió de l'equació (1.16). Per tant,

$$|P_c(f)|_{\text{NRZ}}^2 = A_p^2 T_s^2 \text{sinc}^2(T_s f) \cdot |H_0|^2 \Pi\left(\frac{f}{2B_h}\right). \quad (1.17)$$

- Veiem doncs, com es pot observar en la Figura 1.12, que per totes aquelles freqüències en la banda  $|f| \leq B_h$ , apareixen zeros freqüencials a múltiples de l'invers de  $T_s$ . És a dir, a les freqüències  $f_m = r_s \cdot m$  corresponents als múltiples tant senars com parells de la velocitat de símbol  $r_s$ .
- iii. Pols sinc: pel pols sinc tenim la relació senzilla

$$P_c(f) = P(f) \cdot H_c(f) = A_p T_s \Pi(T_s f) \cdot H_0 \Pi\left(\frac{f}{2B_h}\right). \quad (1.18)$$

Fixem-nos que, per aquest pols, podem ajustar perfectament la banda del pols  $P(f)$  a la banda del canal: el propi pols és de banda limitada a  $\frac{1}{2}r_s$ . Per tant, igualem bandes:  $\frac{1}{2}r_s = B_h$ . D'aquí obtenim que  $r_s = 2B_h$  i representem el resultat de la Figura 1.12, pel qual,

$$|P_c(f)|^2 = A_p^2 T_s^2 \cdot |H_0|^2 \Pi\left(\frac{f}{2B_h}\right). \quad (1.19)$$

Finalment, estem en condicions d'efectuar la comparativa entre els tres polsos anteriors. Veiem com únicament el pols sinc és de banda limitada i continguda en la banda  $B_h$  disponible si  $r_s = 2B_h$ . En canvi, els polsos RZ i NRZ queden forçosament distorsionats a la sortida del canal degut a què lòbuls secundaris de la resposta freqüencial  $P(f)$  del pols queden fora de la banda disponible del canal.

En tots dos casos, com menys distorsionat<sup>5</sup> volem que quedi el pols, més gran ha de ser la relació  $B_h/r_s$ :  $B_h = 6r_s$  (pols RZ, deixant dos lòbuls secundaris en banda) i  $B_h = 2r_s$  (pols NRZ, deixant un lòbul secundari en banda). El pols sinc en canvi, ens ajusta perfectament a la banda disponible amb  $B_h = \frac{1}{2}r_s$  i no queda distorsionat a la sortida del canal. Com veurem més endavant, s'utilitzen altres polsos diferents al pols sinc atès que per aquest pols ideal no és viable la seva implementació pràctica degut a la discontinuïtat freqüencial de  $P(f)$  a l'extrem de la banda.

### 1.3 Caracterització de Senyals de Comunicacions

El disseny arquitectural i l'avaluació de prestacions de sistemes de comunicacions requereixen la caracterització dels senyals de comunicacions en termes de diversos paràmetres i distribucions. A títol introductori podem citar dos exemples d'aquests paràmetres: la mitjana i la potència d'un senyal, la definició dels quals així com de la resta de magnituds les anirem concretant al llarg de l'exposició. Adoptarem la següent classificació:

1. Senyals Deterministes: qualsevol senyal  $s(t)$  ja sigui un pols  $p(t)$  limitat en temps, un paquet o seqüència finita de diferents polsos superposats, un senyal periòdic, un senyal no limitat en temps (que ocupa tot l'eix temporal des de  $t > -\infty$  fins  $t < +\infty$ ), etc..
2. Senyals Aleatoris (Processos): parlarem de  $s(t)$  com d'un senyal aleatori o procés estocàstic quan ens defineix un procediment per generar de forma aleatòria (probabilística) diferents senyals  $s_i(t)$ . Anomenarem cadascun d'aquests senyals  $s_i(t)$  la realització número  $i$  o experiment  $i$ -èssim de generació de senyal associats al procés o senyal aleatori  $s(t)$ . Per entendre aquest concepte, considerem l'expressió de la modulació 2-PAM limitada a la transmissió d'un paquet de  $N_s = 3$  símbols

$$s(t) = a[0] \cdot p(t) + a[1] \cdot p(t - T_s) + a[2] \cdot p(t - 2T_s), \quad (1.20)$$

on  $p(t)$  és un pols o senyal determinista mentre que els tres símbols  $a[0], a[1], a[2]$  poden prendre, cadascun, el valor  $a_1 = -\frac{A}{2}$  o bé  $a_2 = +\frac{A}{2}$  que dependrà de quina seqüència concreta de 3 bits es transmeti. Per tant, si generem  $N$  realitzacions o experiments d'aquest senyal aleatori, podem obtenir:

$$s_1(t) = +\frac{A}{2} \cdot p(t) + \frac{A}{2} \cdot p(t - T_s) + \frac{A}{2} \cdot p(t - 2T_s) \quad (1.21a)$$

$$s_2(t) = -\frac{A}{2} \cdot p(t) + \frac{A}{2} \cdot p(t - T_s) - \frac{A}{2} \cdot p(t - 2T_s) \quad (1.21b)$$

$$s_3(t) = -\frac{A}{2} \cdot p(t) + \frac{A}{2} \cdot p(t - T_s) + \frac{A}{2} \cdot p(t - 2T_s) \quad (1.21c)$$

$$s_4(t) = +\frac{A}{2} \cdot p(t) - \frac{A}{2} \cdot p(t - T_s) - \frac{A}{2} \cdot p(t - 2T_s) \quad (1.21d)$$

$$s_5(t) = -\frac{A}{2} \cdot p(t) + \frac{A}{2} \cdot p(t - T_s) - \frac{A}{2} \cdot p(t - 2T_s) \quad (1.21e)$$

$$s_6(t) = +\frac{A}{2} \cdot p(t) + \frac{A}{2} \cdot p(t - T_s) - \frac{A}{2} \cdot p(t - 2T_s) \quad (1.21f)$$

$$\vdots \quad (1.21g)$$

$$s_N(t) = -\frac{A}{2} \cdot p(t) + \frac{A}{2} \cdot p(t - T_s) + \frac{A}{2} \cdot p(t - 2T_s) \quad (1.21h)$$

Per aquest senyal aleatori en concret i pel conjunt corresponent de  $N$  realitzacions generades, podem observar que obtenim algunes realitzacions idèntiques, com per exemple  $s_2(t)$  i  $s_5(t)$ . En general però, s'obtenen realitzacions diferents, sobretot a mesura que augmenta el nombre de símbols a transmetre  $N_s$ . Considerarem que el senyal  $s(t)$  de l'equació (1.20) és un senyal aleatori quan definim cada símbol  $a[k]$  com una Variable Aleatòria que pot prendre uns determinats valors amb unes determinades probabilitats. D'aquesta forma, la generació de realitzacions  $s_i(t)$  del senyal aleatori  $s(t)$  quedarà definida en un sentit

<sup>5</sup>Alternativament, hauríem d'adoptar un pols  $p(t)$  en transmissió que d'entrada ja estés retallat en freqüència: és a dir, amb els lòbuls secundaris en vermell de la figura 1.12 posats a zero. Llavors aquest pols ja no quedaria distorsionat per la resposta de canal i la seva forma d'ona passaria sense modificació a la sortida, excepte pel guany  $H_0$ .

probabilístic. És a dir, cada possible realització o experiment estarà associada a una determinada probabilitat. En conseqüència, i aquest és un fet que destaquem: *els diferents valors d'amplitud del senyal aleatori  $s(t)$  també estaran caracteritzats per les distribucions de probabilitat corresponents.*

- **Qüestió:** Perquè ens interessa doncs considerar senyals aleatoris en sistemes de comunicacions?
- **Resposta:** Quan dissenyem un sistema de comunicacions no sabem quin missatge en concret (seqüència de símbols) es generarà cada vegada que se'n faci ús. No obstant, haurem de garantir pels seus usuaris unes determinades prestacions enteses com a valors mitjans sobre tot el conjunt de senyals possibles  $s(t)$  que pot transmetre el sistema. Podrem calcular aquestes prestacions mitjanes caracteritzant el senyal de comunicacions  $s(t)$  com un senyal aleatori. Com a exemple de prestació mitjana tenim la probabilitat que el receptor decideixi erròniament quin símbol  $a[k]$  s'ha transmès en un instant discret  $k$  determinat: per això haurem de realitzar  $N \rightarrow \infty$  realitzacions  $s_i(t)$  del senyal aleatori  $s(t)$  i, tenint en compte que el canal ens afegirà per a cada realització  $s_i(t)$  un senyal de soroll  $w_i(t)$  diferent i desconegut per transmissor i receptor, avaluar la fracció de vegades (sobre els  $N$  experiments) en que el receptor s'equivoca en decidir quin símbol  $a[k]$  s'ha transmès.

### 1.3.1 Paràmetres Bàsics de Senyals: Mitjana i Potència

En aquesta secció definim els conceptes de mitjana i potència per senyals deterministes. Proposem uns quants exercicis (amb solució) perquè l'estudiant pugui adquirir pràctica en aquest tipus de càlculs. Pel que fa a senyals aleatoris, definim també de forma introductòria els conceptes equivalents de mitjana i potència. La pràctica i utilitat d'aquestes definicions en un context de comunicacions s'avaluarà en seccions posteriors.

#### Mitjana i Potència de Senyals Deterministes

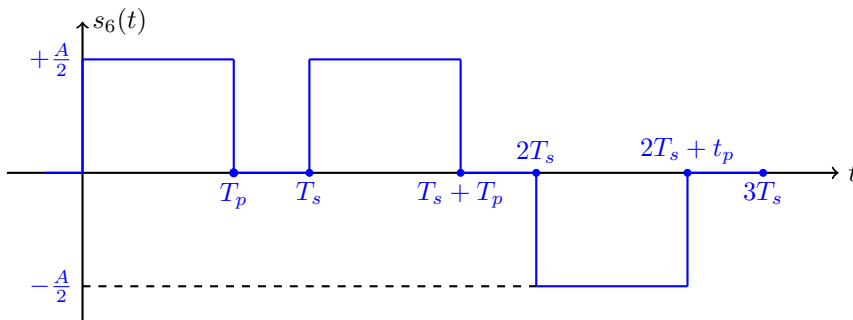
Per senyal deterministes definim els següents paràmetres:

1. Mitjana (temporal) d'un senyal determinista  $s(t)$ :

$$\mu_s = \overline{s(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} s(t) dt. \quad (1.22)$$

Aquesta definició ens dona el valor mitjà (*mitjana*) de les amplituds del senyal  $s(t)$ , el qual s'obté com l'altura d'un rectangle de base  $T$  (delimitada entre  $t = -\frac{T}{2}$  i  $t = +\frac{T}{2}$ ) que conté la mateixa àrea que el senyal  $s(t)$  (d'altura o amplitud variable) en l'interval  $(-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2})$ . Evidentment, si el senyal  $s(t)$  pren valors negatius en aquest interval, hi hauran contribucions d'àrea negatives. Per tant, es pot donar el cas en que la mitjana  $\mu_s$  pugui ser positiva, negativa o zero. Com veiem, en calcular-se la mitjana del senyal  $s(t)$  sobre l'eix temporal  $t$ , el resultat  $\mu_s$  no pot dependre del temps!

Realitzi els següents exercicis per familiaritzar-se amb el càlcul de la mitjana d'un senyal determinista:



**Figura 1.13:** Seqüència de símbols  $a[k] = [+A/2, +A/2, -A/2]$  conformada amb pols RZ.

- (a) **Exercici 1.** Demostri que pel senyal  $s(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi)$  la seva mitjana val  $\mu_s = 0$ .
- (b) **Exercici 2.** Demostri que pel senyal  $s(t) = A^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \phi)$  la seva mitjana val  $\mu_s = \frac{1}{2} A^2$ .
- (c) **Exercici 3.** Dibuixi<sup>6</sup> el senyal binari  $s(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sign}(\sin(2\pi f_0 t))$ . Demostri que té mitjana  $\mu_s = \frac{1}{2}$ .

## 2. Potència d'un senyal determinista $s(t)$ :

Estem familiaritzats amb el concepte de potència (física), entesa com el ritme temporal mitjà al qual es genera o es dissipa una determinada quantitat d'energia. La potència física s'expressa en unitats de Watt = Joule / segon, on el Joule constitueix la unitat d'energia. Per exemple, si tenim un voltatge  $v(t)$  variant en el temps a la sortida d'un generador de senyal, i hi connectem una resistència de valor  $R$ , la potència, en Watts, dissipada en un instant  $t$  concret ve donada per l'expressió  $\frac{1}{R} v^2(t)$ . La potència física és per tant *proporcional al valor al quadrat del voltatge* o senyal real  $v(t)$ . En un context de comunicacions, el senyal transmès  $s(t)$ , que codifica una determinada informació  $b[n]$ , es pot interpretar com un voltatge  $v(t)$  que s'haurà d'injectar en el canal de comunicacions. Elèctricament, el transmissor veu el canal com una resistència o impedància de càrrega  $R$ . Per tant, transmetre informació és equivalent a injectar potència (o energia) en el medi de comunicacions (canal), i això representa un cost energètic pel transmissor. Aquest cost es pot avaluar al llarg del temps com una magnitud proporcional al valor mitjà dels quadrats del senyal  $s(t) = v(t)$ , tal com s'expressa en la definició de potència  $p_s$  de la següent equació, que proporciona la mitjana temporal de la magnitud  $|s(t)|^2$  (segons la definició anterior de mitjana temporal),

$$p_s = \overline{|s(t)|^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |s(t)|^2 dt. \quad (1.23)$$

Per tant, adoptem una definició de potència que ja no és la potència física perquè prescindim de la impedància  $R$ . De fet, si  $s(t) = v(t)$  estariem avaluant el voltatge eficaç al quadrat de  $v(t)$ . Com s'anirà veient al llarg del temari, aquesta definició de potència ens resultarà útil pels següents propòsits:

- (a) avaluar el cost energètic per unitat d'informació (bit) transmesa.
- (b) avaluar les prestacions en la recepció d'informació.

Com veiem, la potència  $p_s$  s'ha definit com el valor mitjà del mòdul al quadrat de les amplituds del senyal. Per tant, podríem dir segons s'ha definit la mitjana d'un senyal que:  $p_s = \mu_{|s|^2}$ . En aquest punt de la definició cal aclarir el següent: en comunicacions banda base treballem sempre amb senyals reals i per tant podríem haver definit la potència com el valor mig de  $s^2(t)$  enlloc de  $|s(t)|^2$  (de fet ens donaria el mateix valor calculat de les dues formes). No obstant, en comunicacions pas banda treballarem amb senyals complexos  $s(t) = s_R(t) + j s_I(t)$ , amb part real  $s_R(t)$  i part imaginària  $s_I(t)$ . En aquest cas caldrà treballar amb el mòdul quadrat enlloc de amb valors al quadrat del senyal, els quals en general difereixen:  $|s(t)|^2 \neq s^2(t)$ , a no ser que la part imaginària sigui sempre  $s_I(t) = 0$ :

$$|s(t)|^2 = s_R^2(t) + s_I^2(t) \quad , \quad s^2(t) = s_R^2(t) - s_I^2(t) + 2j s_R(t) s_I(t). \quad (1.24)$$

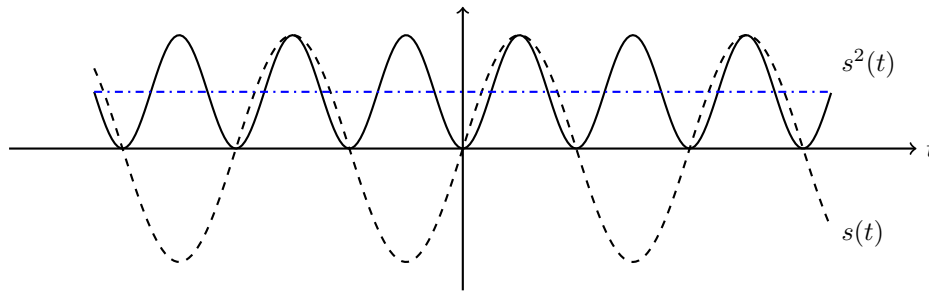
Veiem doncs, substituint l'expressió de l'esquerra en la definició de potència de l'equació (1.23), que en el cas de senyals  $s(t)$  complexos, la potència  $p_s$  es calcula com la suma de potències dels components real i imaginari del senyal

$$p_s = p_{s_R} + p_{s_I} = \left( \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} s_R^2(t) dt \right) + \left( \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} s_I^2(t) dt \right), \quad (1.25)$$

i que, per senyals  $s(t)$  reals podem utilitzar alternativament la definició amb el quadrat enlloc del mòdul

<sup>6</sup>Tingui en compte que la funció signe es defineix com:

$\text{sign}(x) = -1$  per quan  $x < 0$  (negativa),  $\text{sign}(x) = +1$  per quan  $x > 0$  (positiva) i  $\text{sign}(x) = 0$  per quan  $x = 0$  (zero).



**Figura 1.14:** Senyal cosinus  $s(t) = \cos(2\pi f_0 t - \pi/2)$  (línia discontinua) i el seu quadrat  $s^2(t)$  (línia contínua). La línia de punts i ratlles representa la mitjana temporal del senyal cosinus.

quadrat

$$p_s = \overline{s^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} s^2(t) dt. \quad (1.26)$$

Amb la definició anterior podem veure que la potència  $p_s$  d'un senyal sempre serà positiva perquè prové d'omitjar valors que són sempre positius o zero, mai negatius. Només podríem obtenir  $p_s = 0$  en el cas trivial de  $s(t) = 0$ , o bé, per molts senyals de tipus pols (limitats en temps).

Realitzi els següents exercicis per familiaritzar-se amb la potència d'un senyal determinista:

- (a) **Exercici 1.** Demostri que pel senyal  $s(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi)$  (Figura 1.14) la potència val  $p_s = \frac{1}{2} A^2$ .
- (b) **Exercici 2.** Demostri que pel senyal  $s(t) = A \cdot \Pi(t)$  (pols rectangular) la seva potència val  $p_s = 0$ . Quant valdria la mitja  $\mu_s$  d'aquest pols?
- (c) **Exercici 3.** Demostri que el senyal binari  $s(t) = \frac{A}{2} + \frac{A}{2} \cdot \text{sign}(\sin(2\pi f_0 t))$  té potència  $p_s = \frac{A^2}{2}$ .
- (d) **Exercici 4.** Demostri<sup>7</sup> que el senyal complex  $s(t) = A \cdot e^{j2\pi f_0 t}$  té potència  $p_s = A^2$ .
- (e) **Exercici 5.** Aquest exercici presenta una propietat important d'interès pràctic en el càlcul de potències de senyals deterministes. Es tracta de demostrar que si tenim un primer senyal determinista  $s(t)$  i un segon senyal determinista  $y(t)$  definit a partir d'un guany d'amplitud  $\alpha$  i d'un retard  $t_d$  a partir del primer:,  $y(t) = \alpha \cdot s(t - t_d)$ , aleshores la relació entre les potències d'ambdós ve donada per

$$p_y = |\alpha|^2 p_s. \quad (1.27)$$

És a dir, la potència d'un senyal amplificat i retardat, depèn únicament del guany d'amplitud  $\alpha$ , però mai del retard<sup>8</sup>. Ens referim a  $|\alpha|^2$  com al *guany en potència*, a diferència del coeficient  $\alpha$  (guany en amplitud). Particularitzant, un guany d'amplitud  $\alpha = \sqrt{2}$ , implica un guany en potència  $|\alpha|^2 = 2$ , és a dir, un guany d'aproximadament +3 dB (decibels):  $3[\text{dB}] \approx 10 \cdot \log_{10}(|\sqrt{2}|^2) = 10 \cdot \log_{10}(2)$ .

- (f) **Exercici 6.** Pels senyals deterministes  $s(t)$  i  $y(t)$  de l'exercici anterior, calculi les seves mitjanes respectives  $\mu_s$  i  $\mu_y$ . Verifiqui que es compleix

$$\mu_y = \alpha \cdot \mu_s. \quad (1.28)$$

És a dir, la mitjana del senyal  $y(t)$  tampoc depèn del retard  $t_d$ , només del guany en amplitud  $\alpha$ .

### Mitjana i Potència de Senyals Aleatoris

Partint de les dues definicions anteriors de mitjana i potència pel cas de senyals deterministes, per senyals aleatoris definirem conceptes equivalents. No obstant, haurem de contemplar el fet de que disposem de dos eixos o dues dimensions diferents sobre les que realitzar els amitjanats corresponents:

<sup>7</sup>Pot utilitzar la identitat d'Euler:  $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \sin(\theta)$ .

<sup>8</sup>atès que en la definició de potència apareix un amitjanat sobre tot l'eix temporal.

1. La dimensió temporal, representada per la variable temporal  $t$ , la qual és continua.
2. La dimensió estadística, representada per la variable discreta  $i$ , associada a cada realització o experiment  $s_i(t)$  generat pel senyal aleatori  $s(t)$ .

Pot visualitzar aquestes dues dimensions tenint en compte les equacions (1.21a)–(1.21h), les quals ens representen les diferents realitzacions d'un senyal de comunicacions: l'eix horitzontal correspon a la dimensió temporal i l'eix vertical a la dimensió estadística (una realització o experiment diferent per a cada valor de l'índex  $i$ ).

En conseqüència, definim les següents magnituds:

1. Mitjana instantània del senyal aleatori  $s(t)$ : valor mitjà del senyal aleatori  $s(t)$  a l'instant  $t$  quan amitjanem sobre moltes realitzacions o experiments  $s_i(t)$ , des de  $i = 1$  fins a  $i = N$ . Es defineix com

$$m_s(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{s_1(t) + s_2(t) + \cdots + s_N(t)}{N} = \mathbb{E}[s(t)], \quad (1.29)$$

on hem escrit  $m_s(t)$  com el *valor esperat*<sup>9</sup> del senyal  $s(t)$ :  $m_s(t) = \mathbb{E}[s(t)]$ . Aquesta magnitud és útil únicament com pas intermedi per definir el següent paràmetre d'interès pràctic en sistemes de comunicacions.

2. Mitjana del senyal aleatori  $s(t)$ : valor mitjà (temporal) de la mitjana instantània  $m_s(t)$

$$m_s = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} m_s(t) dt. \quad (1.30)$$

**Observació:** Aquesta magnitud resulta útil quan l'apliquem a senyals aleatoris  $s(t)$  actius durant tot l'eix temporal. Per exemple, senyals de comunicacions que transmeten una seqüència binària  $b[n]$  infinitament llarga com és el cas del mode Transmissió Continua mencionat a l'inici del tema.

Realitzi el següent exercici:

- (a) **Exercici 1.** Donats dos senyals aleatoris  $s(t)$  i  $y(t)$ , relacionats a partir d'un guany en amplitud  $\alpha$  i un retard  $t_d$ :  $y(t) = \alpha \cdot s(t - t_d)$ , mostri les següents relacions entre la mitjana instantània i la mitjana d'ambdós senyals:

$$m_y(t) = \alpha \cdot m_s(t - t_d) \quad , \quad m_y = \alpha \cdot m_s. \quad (1.31)$$

És a dir, la mitjana instantània  $m_y(t)$  queda afectada pel mateix retard  $t_d$ , però la mitjana  $m_y$  és invariant al retard, atès que s'obté de l'amitjanat temporal de l'anterior.

3. Potència instantània del senyal aleatori  $s(t)$ : valor mitjà del mòdul quadrat del senyal aleatori  $s(t)$  a l'instant  $t$  quan amitjanem sobre moltes realitzacions  $s_i(t)$ , des de  $i = 1$  fins a  $i = N$ . Es defineix com

$$P_s(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|s_1(t)|^2 + |s_2(t)|^2 + \cdots + |s_N(t)|^2}{N} = \mathbb{E}[|s(t)|^2], \quad (1.32)$$

on hem escrit  $P_s(t)$  com el *valor esperat* del senyal  $|s(t)|^2$  de la següent forma:  $P_s(t) = \mathbb{E}[|s(t)|^2]$ . Aquesta magnitud és útil únicament com pas intermedi per definir el següent paràmetre d'interès pràctic en sistemes de comunicacions.

4. Potència del senyal aleatori  $s(t)$ : valor mitjà (temporal) de la potència instantània  $P_s(t)$ :

$$P_s = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} P_s(t) dt. \quad (1.33)$$

<sup>9</sup>El valor esperat d' $s(t)$  vist com el valor mig sobre  $N \rightarrow \infty$  realitzacions diferents  $s_i(t)$  es pot interpretar considerant l'amplitud d' $s(t)$  a l'instant  $t$  com una Variable Aleatòria Continua tal com es defineix a la secció 1.3.2. Pot consultar la definició i propietats del valor esperat  $\mathbb{E}[X]$  o operador esperança aplicat a la Variable Aleatòria Continua  $X$  a l'apèndix 1.8.1



**Observació:** Idènticament a  $m_s$  (1.30), aquesta magnitud resulta útil quan l'apliquem a senyals aleatoris  $s(t)$  actius durant tot l'eix temporal. Per exemple, senyals de comunicacions que transmeten una seqüència binària  $b[n]$  infinitament llarga com és el cas del mode Transmissió Continua ja mencionat.

Realitzi el següent exercici:

- (a) **Exercici 1:** Donats dos senyals aleatoris  $s(t)$  i  $y(t)$ , relacionats a partir d'un guany en amplitud  $\alpha$  i un retard  $t_d$ :  $y(t) = \alpha \cdot s(t - t_d)$ , mostri les següents relacions entre la potència instantània i la potència d'ambdós senyals

$$P_y(t) = |\alpha|^2 \cdot P_s(t - t_d) \quad , \quad P_y = |\alpha|^2 \cdot P_s. \quad (1.34)$$

És a dir, la potència instantània  $P_y(t)$  queda afectada pel mateix retard  $t_d$ , però la potència  $P_y$  és invariant al retard, atès que s'obté d'omitir temporalment l'anterior. En relació a les potències dels senyals aleatoris  $s(t)$  i  $y(t)$ , apliquen idèntiques consideracions que les comentades a l'exercici corresponent per senyals deterministes.

Per anar introduint les eines bàsiques d'anàlisi de senyals de comunicacions adoptarem el següent enfoc:

1. Presentarem els conceptes bàsics de Variable Aleatòria Discreta i Continua a la següent secció 1.3.2 i els aplicarem al càlcul de la mitjana  $m_s$  d'un senyal de comunicacions  $s(t)$ .
2. Tot seguit, a la Secció 1.4, analitzarem el càlcul de la potència  $P_s$  d'un senyal de comunicacions  $s(t)$ .

### 1.3.2 Variable Aleatòria

En l'anàlisi de sistemes de comunicacions ens trobem variables aleatòries de dos tipus: Variable Aleatòries Discretes (VAD) i Variables Aleatòries Continues (VAC). Les primeres les utilitzarem per modelar estadísticament la seqüència de bits  $b[n]$  i la seqüència de símbols  $a[k]$ , mentre que les segones ens seran útils per modelar les magnituds del senyal de comunicacions  $s(t)$  i del senyal de soroll  $w(t)$ , permetent-nos calcular paràmetres com la mitjana i potència d'un senyal de comunicacions. Passem doncs a definir la caracterització d'aquestes variables.

1. **Variables Aleatòries Discretes:** una VAD  $A$  ens permet extreure (generar) valors d'un conjunt determinat o alfabet  $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_M\}$  amb unes determinades probabilitats  $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_M\}$  cadascun. És a dir, la probabilitat de que una realització determinada de la variable aleatòria  $A$  generi el valor  $a_i$  ve donada per  $p_i = \text{Prob}[A = a_i]$ . En aquest context, totes les probabilitats  $p_i$  estan restringides a l'interval  $[0, 1]$  i sumen sempre 1. Matemàticament, això és

$$p_1 + p_2 + \dots + p_M = 1. \quad (1.35)$$

Podem considerar els següents dos exemples de VAD en un context de comunicacions:

- (a) **Exemple 1.** Els bits  $b[n]$  de la seqüència binària d'informació. En aquest cas  $\mathcal{A} = \{0, 1\}$  i com a distribució de probabilitats més habitual considerem  $\mathcal{P} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$ , corresponents a bits equiprobables de la seqüència binària.
- (b) **Exemple 2.** Els caràcters ASCII d'un fitxer de text, codificats amb 8 bits/caràcter. En text escrit, no totes les lletres o símbols es donen amb igual probabilitat. En aquest cas tenim un alfabet  $\mathcal{A}$  de  $2^8 = 256$  símbols i probabilitats  $p_i$  del conjunt  $\mathcal{P}$  que no serien idèntiques. Sota aquestes condicions de distribució de probabilitat no uniforme, resulta possible comprimir<sup>10</sup> el fitxer de text a una seqüència binària de bits  $b[n]$  pràcticament equiprobables, amb la qual cosa convergim a l'exemple 1.

<sup>10</sup>La compressió de dades, coneguda com Codificació de Font, constitueix una disciplina que s'analiza sota el paraigua de la Teoria de la Informació (Claude Elwood Shannon, 1945). Les relacions de compressió a les que podem arribar, enteses com número de bits de la seqüència comprimida a número de bits de la seqüència original, venen determinades per la distribució de probabilitat dels símbols de la seqüència original (caràcters de text) en l'exemple que ens ocupa. Si  $p_i$  són les probabilitats de caràcter, podem comprimir a un valor mig de  $\sum_{i=1}^M p_i \log_2 p_i^{-1}$  bits/caràcter utilitzant els coneguts Codis de Huffman.

2. Variables Aleatòries Continues: una VAC  $X$  ens permet generar valors en l'interval  $(-\infty, +\infty)$  amb una determinada funció de distribució de probabilitat  $F_X(x)$ , amb la seva funció de densitat de probabilitat  $f_X(x)$  corresponent. Aquestes dues funcions venen definides per:

$$F_X(x) = \text{Prob}[X \leq x] = \int_{-\infty}^x f_X(\alpha) d\alpha \quad , \quad f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x). \quad (1.36)$$

És a dir, la funció de densitat és la derivada o pendent de la funció de distribució.

Aquestes funcions compleixen les següents propietats:

$$F_X(-\infty) = 0 \leq F_X(x) \leq 1 = F_X(+\infty) \quad , \quad f_X(x) \geq 0. \quad (1.37)$$

És a dir,  $F_X(x)$  mai decreix i està continguda a l'interval  $[0, 1]$  (perquè és una probabilitat) i  $f_X(x)$  mai és negativa, perquè és la pendent de  $F_X(x)$  que mai decreix. A més a més, l'àrea subtinguda per  $f_X(x)$  és sempre unitària. Això és

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1. \quad (1.38)$$

Podem considerar els següents exemples de VAC en un context de comunicacions, els quals permeten il·lustrar en termes quantitatius: (i) com es degrada la qualitat d'un senyal de comunicacions en recepció degut a la presència de soroll en el canal; (ii) com es caracteritza estadísticament una seqüència de símbols.

- (a) **Exemple 1:** suposem el model de cadena de comunicacions pel cas de canal ideal que es representa en la Figura 1.2 i per la qual fixem les condicions següents:

- es transmet un senyal continu  $s(t) = \frac{1}{2}A$  equivalent a modular la seqüència binària de longitud infinita tot-uns:  $b[n] = \dots 11111\dots$ , sobre un pols rectangular NRZ d'amplitud  $A_p = 1$ . (Si no transmetem senyal, equival a fixar  $A = 0$ ).
- els paràmetres de canal es fixen a  $L_c = 1$  (sense atenuació: 0 dB) i  $t_d = 0$  (sense retard).
- suposem que el receptor és simplement un filtre pas baix rectangular  $H_x(f)$  de guany unitari i d'ample de banda  $B_x$ .

El senyal  $y(t)$  de sortida del canal, a l'entrada del filtre receptor, és doncs

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{L_c}} s(t - t_d) + w(t) = \frac{1}{2}A + w(t). \quad (1.39)$$

El senyal rebut a la sortida del receptor és  $y_x(t) = h_x(t) * y(t)$ . Donat que el guany del filtre  $H_x(f)$  és 1 en  $|f| \leq B_x$ , el senyal  $y_x(t)$  és

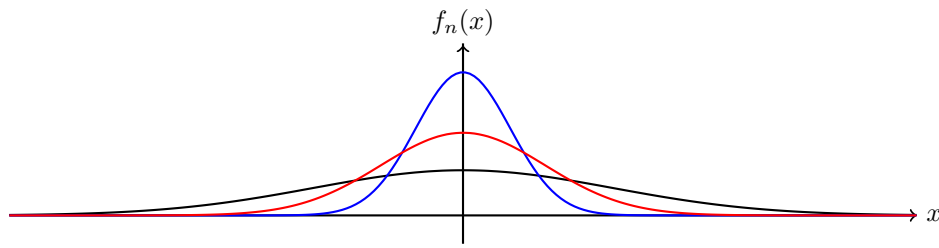
$$y_x(t) = \frac{1}{2}A + n(t) \quad , \quad n(t) = h_x(t) * w(t). \quad (1.40)$$

Per tant, estem recuperant el senyal transmès original  $\frac{1}{2}A$  junt amb fluctuacions associades al soroll  $n(t)$  a la sortida del filtre. Sota aquestes condicions, podem modelar<sup>11</sup> les fluctuacions sobre el senyal recuperat  $y_x(t)$  i degudes al soroll  $n(t)$ , en qualsevol instant de temps  $t$ , com una VAC de funció de densitat de probabilitat Gaussiana de mitjana nul·la i potència  $P_n = \mathbb{E}[n^2(t)] = N_0 B_x$ ,

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi P_n}} \exp\left(-\frac{x^2}{2P_n}\right) \quad , \quad x \geq 0. \quad (1.41)$$

Com podem observar, la major densitat de probabilitat es dona per valors de  $n(t)$  centrats a zero, i disminueix conforme  $|n(t)|$ , representat per la variable  $x$ , augmenta. De fet, a mesura que obrim

<sup>11</sup>Partint del model físic del soroll d'entrada  $w(t)$ , el qual es coneix com soroll tèrmic, i que està present en qualsevol sistema de comunicacions banda base (o pas banda en el cas de ràdio-comunicacions).



**Figura 1.15:** Funció de densitat de probabilitat d'una distribució Gaussiana per a diferents valors de  $P_n$ , on  $P_n = \sigma_n^2$  per ser una Gaussiana de mitjana nul·la (centrada a  $x = 0$ ). L'altura màxima de la Gaussiana és  $1/\sqrt{2\pi\sigma_n^2}$  i la seva amplada a una fracció  $\frac{1}{\sqrt{e}}$  del màxim és de  $(-\sigma_n, +\sigma_n)$ . És a dir, Gaussians amb un màxim més alt corresponen a un paràmetre  $\sigma_n$  més reduït; les fluctuacions aleatòries estan més concentrades al voltant de la mitjana (que és nul·la).

la banda  $B_x$  del filtre, ens entra cada cop més soroll, la potència del qual augmenta linealment amb la banda  $B_x$  del filtre receptor. El paràmetre  $N_0$  està associat al soroll d'entrada  $w(t)$ , tal com caracteritzarem més endavant. La Figura 1.15 mostra la funció de probabilitat (1.41) per a diferents valors de  $P_n$ .

- (b) **Exemple 2:** suposem una font d'informació  $x(t)$  que es mostreja a freqüència  $f_0 = \frac{1}{T}$ , generant mostres  $x[m] = x(mT)$ , amb  $T$  el temps de mostratge. Suposem que les mostres  $x[m]$  prenen valors aleatòriament en un interval  $(-A_{\max}, +A_{\max})$  amb una funció de densitat de probabilitat triangular

$$f_X(x) = \frac{1}{A_{\max}} \Lambda\left(\frac{x}{A_{\max}}\right). \quad (1.42)$$

Quantifiquem les mostres  $x[m]$  amb dos bits cadascuna, corresponents a quatre intervals de quantificació uniforme (d'identica longitud) delimitats per les fronteres:  $x_0 = -A_{\max}$ ,  $x_1 = -\frac{1}{2}A_{\max}$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = +\frac{1}{2}A_{\max}$ ,  $x_4 = +A_{\max}$ . La probabilitat de que una mostra  $x[m]$  caigui a un interval de quantificació  $(x_{i-1}, x_i)$  i que per tant es codifiqui amb una determinada parella de bit d'entre les  $2^2 = 4$  possibles vindrà donada per

$$p_i = \text{Prob}[x_{i-1} \leq x[m] \leq x_i] = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_X(x) dx. \quad (1.43)$$

És a dir, com l'àrea sota la funció de densitat en l'interval donat. Això ens permet caracteritzar amb quina probabilitat es dona cada parella de bits de la seqüència binària  $b[n]$  que codifica la seqüència de mostres  $x[m]$ . Per tant, si codifiquéssim cada parella de bits de  $b[n]$  amb una codificació de símbol 4-PAM, això ens permet caracteritzar la distribució de probabilitat (discreta) de cada símbol  $a[k]$ .

- i. **Exercici 1.** Pel quantificador anterior, avaluï les probabilitats de cada símbol (parella de bits). Demostri que:  $p_1 = p_4 = \frac{1}{8}$  i que  $p_2 = p_3 = \frac{3}{8}$ . Suposi que pels símbols  $\mathcal{C} = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$  de probabilitats  $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$  s'utilitza la codificació binària  $\mathcal{B} = \{00, 01, 11, 10\}$ . Calculi la distribució de probabilitats del primer bit  $b_1$  i del segon bit  $b_2$  de l'etiqueta binària  $b_1b_2$  d'un símbol qualsevol. Solució<sup>12</sup>.
- ii. **Exercici 2.** Per l'exemple anterior s'utilitza un quantificador no-uniforme enlloc de l'uniforme. Calculi quins intervals de quantificació  $\{x_i, 0 \leq i \leq 4\}$  s'han d'utilitzar per tenir símbols equiprobables. És a dir, amb  $p_i = \frac{1}{4}$ . Solució:  $x_1 = -A_{\max} \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}, \dots$

### Exemple d'Aplicació de Variable Aleatòria: Càlcul de la mitjana d'un senyal aleatori

Suposem un senyal de comunicacions  $s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a[k]p(t - kT_s)$  i modelem cada símbol  $a[k]$  com una VAD amb una constel·lació  $\mathcal{C} = \{a_1, \dots, a_M\}$  amb distribució de probabilitats  $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_M\}$ . Utilitzant les propietats de linealitat de l'operació esperança estadística descrites a la Secció 1.8.1, podem calcular la mitjana instantània del senyal  $s(t)$  de la següent forma:

$$m_s(t) = \mathbb{E}[s(t)] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a[k]p(t - kT_s)\right] \quad (1.44a)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}[a[k]] \cdot p(t - kT_s) \quad (1.44b)$$

$$= \mu_a \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(t - kT_s), \quad (1.44c)$$

on  $\mu_a$  és el valor esperat o mitjana de la variable aleatòria  $a[k]$  que es calcula, tal com es descriu a la Secció 1.8.1, com  $\mu_a = \mathbb{E}[a[k]] = \sum_{i=1}^M p_i a_i$ . Podem comprovar que si  $\mu_a \neq 0$  (mitjana dels símbols no nul·la), la mitjana instantània és un senyal periòdic de període igual al temps de símbol  $T_s$ . En general, per senyals de comunicacions acostumem a tenir símbols de mitjana nul·la (excepte, per exemple, quan volem facilitar les funcions de sincronització de senyal al receptor). Considerem el següents exemples:

<sup>12</sup> $\text{Prob}[b_1 = 1] = \text{Prob}[b_1 = 0] = \frac{1}{2}$ ;  $\text{Prob}[b_2 = 1] = 1 - \text{Prob}[b_2 = 0] = \frac{3}{4}$ .

1. **Exercici 1.** Suposi un pols de conformació NRZ:  $p(t) = \Pi\left(\frac{t}{T_s}\right)$ . Calculi i dibuixi la mitjana instantània  $m_s(t)$  en funció de  $\mu_a$ . Solució<sup>13</sup>.
2. **Exercici 2.** Suposi un pols de conformació RZ:  $p(t) = \Pi\left(\frac{t}{T_s/2}\right)$ . Calculi i dibuixi la mitjana instantània  $m_s(t)$  en funció de  $\mu_a$ . Comparant la mitjana instantània  $m_s(t)$  d'aquest senyal amb la de l'exercici anterior, quin senyal  $s(t)$  (NRZ o RZ) creu que seria més fàcil de sincronitzar en recepció? Interpretem la sincronització com el coneixement de l'instant de temps en que comença un símbol determinat. Suposem per tant que el receptor pot estimar la mitjana del senyal rebut  $y(t)$ , obtenint  $m_y(t) = \alpha \cdot m_s(t - t_d)$ . Considerem que  $t_d$  (el retard de canal) i  $\alpha$  (guany de canal) són desconeguts pel receptor, però que el receptor coneix  $m_s(t)$  perquè coneix quina modulació utilitza el transmissor.

## 1.4 Potència i Densitat Espectral de Potència en Transmissió

En aquesta secció calcularem la potència del senyal en transmissió i com es reparteix aquesta potència entre els diferents components freqüencials, avaluant el que anomenem *Densitat Espectral de Potència* (DEP) d'un senyal aleatori, en el nostre cas, el senyal de comunicacions banda base.

Partim de l'expressió del senyal de comunicacions banda base (definit anteriorment en (1.2))

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a[k]p(t - kT_s). \quad (1.45)$$

Hem vist que per modulacions banda base, els símbols  $a[k]$  i el pols de conformació  $p(t)$  són tots dos reals. No obstant, efectuarem els càlculs de potència i DEP suposant-los, en general, complexos. Això ens permetrà més endavant utilitzar les expressions que obtinguem pel cas de senyals de comunicacions pas banda, on veurem que és possible transmetre símbols complexos utilitzant un senyal real.

### 1.4.1 Potència en Transmissió

Pel càlcul de la potència  $P_s$  del senyal  $s(t)$  anterior necessitarem especificar primer la caracterització estadística dels símbols  $a[k]$  en transmissió. Un cop fixada, proporcionarem les expressions finals que s'obtenen per la potència  $P_s$  i també per la DEP del senyal  $s(t)$ . Atès que el càlcul detallat de  $P_s$  és en si una mica laboriós, l'inclouem apart en un apèndix (Secció 1.8.2) per poder-nos centrar, el més immediatament possible, en els conceptes més interessants des del punt de vista pràctic dels sistemes de comunicació banda base.

1. Caracterització Estadística dels símbols  $a[k]$ . Considerarem que els símbols  $a[k]$  del senyal  $s(t)$  estan caracteritzats estadísticament de la següent forma:
  - (a) els símbols  $a[k]$  s'extreuen aleatòriament d'una constel·lació  $\mathcal{C} = \{a_1, a_2, \dots, a_M\}$ .
  - (b) la probabilitat de generar el símbol  $a[k] = a_i$  ve donada per les probabilitats  $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_M\}$ , on els índexs  $i$  compleixen  $1 \leq i \leq M$  i  $p_i = \text{Prob}[a[k] = a_i]$ . Habitualment ens trobem en el cas de *símbols equiprobables*, amb  $p_i = \frac{1}{M}$ .
  - (c) els símbols  $a[k]$  tenen mitjana zero (el cas més habitual). És a dir,  $m_a = \sum_{i=1}^M p_i a_i = 0$ .
  - (d) els símbols  $a[k]$  tenen potència  $P_a = \sum_{i=1}^M p_i |a_i|^2$ .
  - (e) símbols  $a[k]$  i  $a[k']$  amb  $k \neq k'$  es generen de forma independent.
2. Càlcul de la Potència Transmesa. La potència transmesa  $P_s$  del senyal banda base  $s(t)$  es calcula com

$$P_s = \frac{P_a \cdot E_p}{T_s}, \quad E_p = \int_{-\infty}^{+\infty} |p(t)|^2 dt, \quad (1.46)$$

on el paràmetre  $E_p$  es defineix com l'*energia de pols*.

<sup>13</sup> $m_s(t) = \mu_a$ .

És a dir, la potència transmesa  $P_s$  adopta una forma molt senzilla únicament en termes de tres paràmetres:  $T_s$ ,  $P_a$  i  $E_p$ . El tercer paràmetre, el qual acabem de definir com energia de pols es pot calcular tant en el domini temporal com en el domini freqüencial fent ús del Teorema de Parseval:

$$E_p = \int_{-\infty}^{+\infty} |p(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |P(f)|^2 df, \quad (1.47)$$

on  $P(f)$  és la Transformada de Fourier de  $p(t)$ .

En la Secció 1.4.3 pot trobar exemples de càlcul de potència per senyals  $M$ -PAM.

### 1.4.2 Densitat Espectral de Potència (DEP) en Transmissió

A partir del plantejament i resultats de la Secció 1.4.1, estem ja en condicions de definir la DEP, Densitat Espectral de Potència, del senyal  $s(t)$ . Per això, adoptem l'expressió freqüencial pel càlcul de l'energia de pols (1.47) i escrivim la potència transmesa de la següent forma:

$$P_s = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{P_a}{T_s} \cdot |P(f)|^2 \right) df. \quad (1.48)$$

Observem que el terme de dins de l'integral mai és negatiu i que l'integrem sobre tot l'eix freqüencial. Això ens permet definir una distribució de potència sobre l'eix freqüencial que anomenem DEP. Concretament, per una Modulació Lineal basada en pols de conformació o senyal PAM,

$$S_s(f) = \frac{P_a}{T_s} \cdot |P(f)|^2, \quad (1.49)$$

de forma que la potència transmesa  $P_s$  es pot calcular com l'àrea subtinguda per l'espectre o DEP  $S_s(f)$  en tot l'eix freqüencial (tal i com es mostra a la Figura 1.16)

$$P_s = \int_{-\infty}^{+\infty} S_s(f) df. \quad (1.50)$$

**Observació:** tot i que l'expressió anterior ens diu com calcular la potència  $P_s$  d'un senyal PAM a partir de la seva DEP  $S_s(f)$ , aquesta fórmula la podem aplicar a una classe molt més àmplia de senyals aleatoris. Per exemple, els senyals de soroll que degraden els sistemes de comunicacions també tenen associada una DEP que ens permetrà calcular amb quina potència afecten al senyal d'interès rebut des del transmissor.

### 1.4.3 Exemples de Càlcul: potència i DEP de senyals $M$ -PAM

En aquesta secció proporcionem alguns exemples pràctics de càlcul de la potència i DEP de senyals aleatoris  $M$ -PAM.

#### Exemple 1

Calculem la potència i DEP d'un senyal que utilitza una modulació 2-PAM polar amb pols de conformació RZ i velocitat de símbol  $r_s$ . Calculem primer la potència de símbol com

$$P_a = \sum_{i=1}^M p_i |a_i|^2 = p_1 |a_1|^2 + p_2 |a_2|^2 \quad (1.51a)$$

$$= p_1 \cdot \left| -\frac{A}{2} \right|^2 + p_2 \cdot \left| +\frac{A}{2} \right|^2 = (p_1 + p_2) \frac{A^2}{4} \quad (1.51b)$$

$$= \frac{A^2}{4}, \quad (1.51c)$$

atès que  $p_1 + p_2 = 1$ . Si  $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$ , els símbols són de mitjana zero i, per tant, podem calcular la potència i DEP segons les expressions indicades anteriorment. Ens caldrà doncs calcular l'energia de pols  $E_p$  i la Transformada de Fourier  $P(f)$  del pols  $p(t)$ . Aleshores,

1. Per  $P(f)$  tenim que

$$p(t) = A_p \Pi\left(\frac{t - T_p/2}{T_p}\right) \quad \leftrightarrow \quad P(f) = A_p T_p \text{sinc}(T_p f) e^{-j2\pi(T_p/2)f}. \quad (1.52)$$

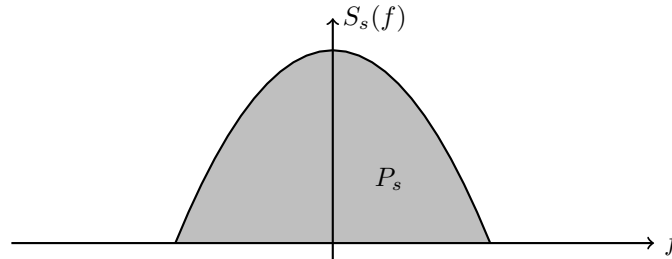
2. Per l'energia  $E_p$  tenim que

$$E_p = \int_{-\infty}^{+\infty} |p(t)|^2 dt = A_p^2 T_p. \quad (1.53)$$

Per tant, la DEP vindrà donada per

$$S_s(f) = \frac{P_a}{T_s} |P(f)|^2 = \frac{A_p^2 T_p^2}{4T_s} \text{sinc}^2(T_p f) = \left(\frac{A_p^2 E_p}{4T_s}\right) \cdot T_p \text{sinc}^2(T_p f), \quad (1.54)$$

on  $P_s = \frac{P_a E_p}{T_s} = \frac{A_p^2 E_p}{4T_s}$  és precisament la potència del senyal. La funció sinc anterior presenta nuls a múltiples no nuls de  $\frac{1}{T_p}$ . Pel cas del pols NRZ, pel qual  $T_p = T_s$ , tenim que els nuls apareixen a múltiples no nuls de la velocitat de símbol  $r_s = 1/T_s$ . Veiem doncs que per un pols RZ o NRZ, els lòbuls secundaris de l'espectre, els quals transporten part de la potència del senyal, ocupen tot l'espectre freqüencial, reduint-se progressivament a altes freqüències segons dicta el decreixement de les cues de la funció sinc al quadrat. És a dir, a freqüències molt per sobre de  $r_s$  seguim tenint densitat de potència del senyal que pot interferir en altres sistemes de comunicacions. De fet, l'envolupant dels lòbuls secundaris de la DEP (proporcional a una sinc al quadrat), decreix de forma inversament proporcional al quadrat de la freqüència: com  $S_s(f) \sim S(0) \cdot f^{-2}$ .



**Figura 1.16:** Interpretació gràfica de la DEP.

Realitzi els següents exercicis per aprofundir en el càlcul de la DEP amb diferents polsos de conformació.

1. **Exercici 1.** Dibuixi la DEP  $S_s(f)$  per un pols RZ amb  $T_p = \frac{1}{2}T_s$ . Representi en el dibuix totes les freqüències i nivells significatius de la DEP. Escrigui també un programa Matlab per verificar el dibuix teòric: quadri la posició dels zeros del `plot` de la figura amb els valor teòrics.
2. **Exercici 2.** Repeteixi l'exercici anterior pel pols NRZ fixant  $T_p = T_s$ . Compari la DEP d'ambdós polsos.

### Exemple 2

Aquest exemple el desenvoluparà l'estudiant com exercici:

1. Cerqui a Internet com es defineix la conformació de pols en la codificació Manchester.
2. Escrigui el model de senyal en termes del senyal  $M$ -PAM, indicant l'expressió analítica del pols  $p(t)$ .
3. Calculi l'expressió per la potència  $P_s$  i la DEP  $S_s(f)$  del senyal  $s(t)$ .
4. Dibuixi  $S_s(f)$  indicant tots els nivells i freqüències significatius.

## 1.5 El Receptor

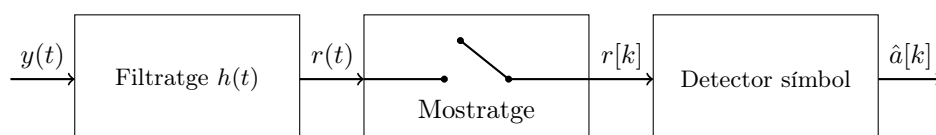
Fins aquest moment ens hem centrat principalment en l'estudi del senyal en transmissió. En aquesta secció completarem el model del senyal, que hem definit anteriorment, en recepció. No obstant, la caracterització estadística del soroll de canal també té un impacte important en el disseny del receptor i en les prestacions que podem obtenir en termes del Criteri de Qualitat que adoptem (relació senyal a soroll, probabilitat d'error de símbol o de bit, etc.). Destaquem per tant els següents conceptes:

- La caracterització completa del senyal rebut, incloent el terme útil del transmissor a la sortida del canal,  $y_u(t)$  i el soroll de canal  $w(t)$  ens permet determinar quines funcions haurà de realitzar el bloc receptor per reconstruir la seqüència binària original  $b[n]$  de forma fiable.
- Les funcions bàsiques a realitzar pel receptor consisteixen en les tres operacions que detallem a continuació:
  1. Filtratge del senyal rebut en l'etapa frontal del receptor: millora de la qualitat del senyal rebut, que s'ha degradat degut a la presència del soroll de canal.
  2. Mostratge del senyal de sortida del filtre frontal de recepció: obtenció d'una observació, encara que sorollosa, del símbol transmès  $a[k]$ .
  3. Decisió del símbol  $a[k]$  transmès: reconstrucció dels  $b$  bits corresponents de la seqüència  $b[n]$ .

És a dir, les tres operacions anteriors s'apliquen seqüencialment sobre el senyal de sortida de l'operació anterior  $y(t)$  tal i com es mostra a la Figura 1.17.

### 1.5.1 Filtratge en Recepció

Iniciem l'estudi del receptor analitzant la funció que tenen les operacions de filtratge en recepció com eines per millorar la qualitat del senyal rebut, degradat, essencialment, degut a la presència del soroll de canal  $w(t)$ . Partim del model de canal ideal, basat únicament en una atenuació, un retard i soroll additiu Gaussià blanc (Additive White Gaussian Noise, AWGN).



**Figura 1.17:** Diagrama de blocs corresponent al receptor.



- Model de Senyal Rebut. El senyal a l'entrada del receptor, especificant el component útil  $y_u(t)$ , és

$$y(t) = y_u(t) + w(t) = \frac{1}{\sqrt{L_c}} \cdot s(t - t_d) + w(t). \quad (1.55)$$

Pel soroll de canal  $w(t)$  (soroll tèrmic), adoptarem un model  $S_w(f)$  de DEP uniforme en freqüència, com el que s'expressa a continuació en termes del paràmetre  $N_0$

$$S_w(f) = \frac{N_0}{2}. \quad (1.56)$$

Aquest és un model aproximat de l'espectre real del soroll tèrmic, però suficientment precís per tots els sistemes pràctics de comunicacions banda base i pas banda (ràdio-comunicacions).

**Observació:** Quan un senyal qualsevol  $v(t)$  presenta una DEP uniforme en freqüència  $S_v(f) = \lambda$ , aleshores, es diu que  $v(t)$  és *blanc*. És per aquest motiu que anomenem a  $w(t)$  del canal AWGN soroll blanc.

### Necessitat del Filtratge en Recepció: Introducció a l'Avaluació d' SNR

En aquesta secció argumentem la necessitat del filtratge en recepció, i n'avaluem les seves prestacions en termes de la relació senyal-a-soroll (SNR) o la relació energia de símbol sobre la DEP de soroll ( $E_s N_0$ ).

Comencem comparant l'espectre del senyal útil  $y_u(t)$  amb l'espectre del soroll  $w(t)$ :

1. L'espectre  $S_{y_u}$  del senyal útil  $y_u(t)$  és de tipus pas baix i ve donat per l'expressió

$$S_{y_u}(f) = \frac{1}{L_c} \cdot \frac{P_a}{T_s} |P(f)|^2. \quad (1.57)$$

És a dir, la informació transmesa en el senyal  $y_u(t)$  (la seqüència binària  $b[n]$  codificada en la forma d'ona  $s(t)$ ) està continguda en la banda del pols  $p(t)$  o banda de transmissió  $B_T$  que ve determinada per aquella banda  $B_p$  que ocupa  $P(f)$ . És a dir,  $B_T = B_p$  (amplada de banda del pols).

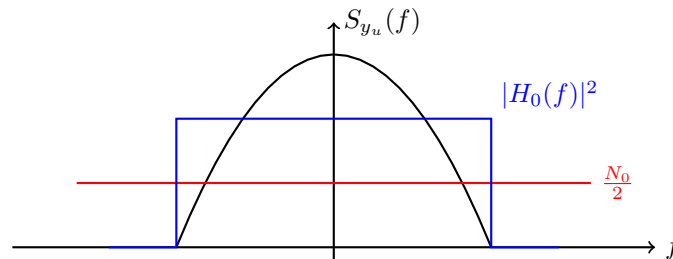
2. Comparant amb l'espectre  $S_w(f) = \frac{1}{2} N_0$  del soroll (amb el mateix valor a totes les freqüències), veiem que aquest últim conté components dins de la banda  $B_T$  útil del senyal, però també components fora de banda. Podem per tant eliminar molt fàcilment soroll filtrant el senyal rebut  $y(t)$  amb un filtre pas baix ideal que limiti com a màxim la banda a  $B_T$ . És a dir, tots aquells components per sobre de la banda  $B_T$  no contenen informació de senyal i es poden eliminar sense afectar al senyal útil  $y_u(t)$ .

En conseqüència, adoptem un filtre com el primer bloc constituent del receptor. Aquest primer filtre es defineix com un filtre pas baix ideal de banda  $B_T$  (limitat a la banda del senyal) i de guany unitari

$$H_0(f) = \Pi\left(\frac{f}{2B_T}\right), \quad (1.58)$$

i el senyal de sortida  $z_0(t)$  vindrà definit per

$$z_0(t) = h_0(t) * y(t) = y_u(t) + n_0(t) \quad , \quad n_0(t) = h_0(t) * w(t). \quad (1.59)$$



**Figura 1.18:** Filtratge (pas baix) en recepció.

En l'expressió de  $z_0(t)$  veiem com:

1. El senyal útil  $y_u(t)$  està present a la sortida sense canvis, atès que  $y_u(t) * h_0(t) = y_u(t)$  i per estar  $y_u(t)$  totalment contingut en la banda del filtre ideal de recepció.
2. El soroll  $n_0(t)$  a la sortida del filtre  $H_0(f)$  conté únicament les components freqüencials del soroll  $w(t)$  en la banda  $|f| \leq B_T$ , ja que tots els components fora de banda de pas han estat anul·lats.

Necessitarem calcular potències de soroll en diferents etapes del receptor a fi de determinar paràmetres de qualitat del senyal. Per això, ens caldrà la DEP del soroll filtrat  $n_0(t)$  que podem calcular mitjançant el resultat:

- **Densitat Espectral de Potència a la Sortida d'un Filtre.** Si un senyal  $x(t)$  té DEP  $S_x(f)$ , la DEP  $S_y(f)$  del senyal filtrat  $y(t) = h(t) * x(t)$  ve donada per

$$S_y(f) = |H(f)|^2 S_x(f), \quad (1.60)$$

on  $H(f)$  és la resposta freqüencial del filtre o Transformada de Fourier de la seva resposta impulsional  $h(t)$ . Pot verificar la validesa d'aquesta expressió amb el següent exercici.

**Exercici.** Suposi un senyal  $M$ -PAM del qual coneix la seva DEP  $S_s(f)$ . Filtri'l per  $h(t)$ . L'expressió obtinguda segueix sent un senyal  $M$ -PAM en el qual, el pols inicial ha quedat modificat pel pols un cop filtrat. Calculi la DEP corresponent i verifiqui que es compleix l'equació (1.60).

Utilitzant el resultat anterior, tenim que la DEP del soroll  $n_0(t)$  ve donada per

$$S_{n_0}(f) = S_w(f) |H_0(f)|^2 = \frac{N_0}{2} \cdot \Pi\left(\frac{f}{2B_T}\right), \quad (1.61)$$

i per tant, podem calcular la seva potència.

Arribats en aquest punt, estem en condicions de definir el següent Paràmetre de Qualitat per un senyal útil degradat per soroll additiu: la relació SNR, àmpliament utilitzada en comunicacions i habitualment expressada en escala decibèlica<sup>14</sup> com  $\text{SNR}[\text{dB}] = 10 \log_{10}(\text{SNR})$ .

- **Relació Senyal a Soroll (SNR):** la denominació SNR correspon a "Signal-to-Noise Power Ratio" i es defineix per un senyal *aleatori* útil  $x_u(t)$  afectat per soroll (aleatori) additiu  $n(t)$  com la relació entre la potència del senyal útil i la potència del soroll,

$$x(t) = x_u(t) + n(t) \quad \Rightarrow \quad \text{SNR} = \frac{P_{x_u}}{P_n}. \quad (1.62)$$

Totes dues potències es calculen a partir dels corresponents espectres de densitat de potència com

$$P_{x_u} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{x_u}(f) df, \quad P_n = \int_{-\infty}^{+\infty} S_n(f) df. \quad (1.63)$$

Si  $x_u(t)$  és un senyal determinista, utilitzem, enlloc de  $P_{x_u}$ , la potència  $p_{x_u}$  definida a l'equació (1.23).

En base a la definició anterior, la SNR del senyal a la sortida del filtre  $H_0(f)$  del receptor ve donada per

$$\text{SNR}_0 = \frac{P_{y_u}}{P_{n_0}} = \frac{(1/L_c) \cdot (P_a E_p / T_s)}{N_0 B_T}, \quad (1.64)$$

on  $P_{y_u}$  és la potència del senyal útil i  $P_{n_0}$  la potència del soroll filtrat:

<sup>14</sup>A tall d'exemple, una SNR de 13 dB equival, en escala lineal, a una relació de potències de  $10^{10/10} \cdot 10^{3/10} \simeq 10 \cdot 2 = 20$ , atès que  $13 = 10 + 3$ . És a dir, el senyal útil seria 20 vegades més potent que el soroll.

1. Potència del senyal útil  $y_u(t)$ . El senyal útil ve donat per  $y_u(t) = \alpha \cdot s(t - t_d)$ , amb  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{L_c}}$ . La potència d'un senyal (determinista o aleatori) no varia quan el senyal es retarda<sup>15</sup>, només quan es multiplica per una constant. Per tant, tenim que  $P_{y_u} = \alpha^2 P_s = (1/L_c) \cdot (P_a E_p / T_s)$ .
2. Potència del soroll  $n_0(t)$ . Partint de l'equació (1.64), tenim que

$$P_{n_0} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{n_0}(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} S_w(f) |H_0(f)|^2 df = \int_{-B_T}^{+B_T} \frac{N_0}{2} df = N_0 B_T. \quad (1.65)$$

És a dir, la potència del soroll a la sortida del filtre  $H_0(f)$  és proporcional a la banda  $B_T$ . Per tant, augmenta quan obrim la banda del filtre.

Procedim a analitzar l'expressió per la  $\text{SNR}_0$  de l'equació (1.64). Si utilitzem l'expressió  $r_s = \frac{1}{T_s}$  per la velocitat de símbol i reordenem factors, obtenim

$$\text{SNR}_0 = \frac{r_s}{B_T} \cdot \frac{P_a E_p / L_c}{N_0}. \quad (1.66)$$

Realitzem les següents observacions en la identitat anterior per  $\text{SNR}_0$ :

1. El factor  $r_s/B_T$  ens mesura l'eficiència amb la què el pols de conformació  $p(t)$  utilitza la banda  $B_T = B_p$ , en relació a la velocitat de símbol. En aquest sentit, és desitjable que el terme  $r_s/B_T$  sigui el més gran possible per una energia de pols  $E_p$  donada.
2. El factor  $P_a E_p$  és l'energia mitjana per símbol en transmissió, atès que s'obté de multiplicar la potència transmesa  $P_s$  per la duració  $T_s$  d'un símbol,

$$E_s^{\text{TX}} = P_s \cdot T_s = P_a E_p. \quad (1.67)$$

És a dir, ens representa el cost energètic de transmetre  $b = \log_2(M)$  bits de la seqüència  $b[n]$ .

3. El factor  $P_a E_p / L_c$  és l'energia mitjana per símbol en recepció, atès que el canal té una atenuació en potència  $L_c$ . Per tant, al receptor només li arriba una fracció de l'energia utilitzada en transmissió,

$$E_s^{\text{RX}} = \frac{1}{L_c} \cdot E_s^{\text{TX}} = \frac{P_a E_p}{L_c}. \quad (1.68)$$

Obtenim doncs la següent expressió final per la SNR del sistema de referència analitzat

$$\text{SNR}_0 = \frac{r_s}{B_T} \cdot \frac{E_s^{\text{RX}}}{N_0} \quad (1.69)$$

En conclusió, i com anirem observant, les relacions  $\frac{E_s^{\text{RX}}}{N_0}$  i les seves equivalents de bit  $\frac{E_b^{\text{RX}}}{N_0} = \frac{1}{b} \cdot \frac{E_s^{\text{RX}}}{N_0}$  són una mesura important de la qualitat del senyal en recepció. Concretament, s'utilitza la següent nomenclatura:

1. Relació EsNo (en Recepció): es defineix com el paràmetre  $E_s^{\text{RX}}/N_0$ .
2. Relació EbNo (en Recepció): es defineix com el paràmetre  $E_b^{\text{RX}}/N_0$ .

## 1.5.2 Mostratge en Recepció: Observació de Símbol

En la secció anterior hem avaluat la necessitat d'efectuar operacions de filtratge en recepció per millorar la qualitat d'un senyal, mesurada en termes de la seva SNR. No obstant, el receptor haurà d'efectuar en algun moment alguna mesura o observació sobre el senyal rebut quan aquest ha estat prèviament filtrat.

<sup>15</sup>Tal com es veu a l'explicació de les equacions (1.27) per la potència  $p_y$  de senyals deterministes i (1.34) per la potència  $P_y$  de senyals aleatoris.

La funció del receptor és reconstruir el més fidelment possible la seqüència binària  $b[n]$  transmesa (o bé com a pas intermedi, la seqüència  $a[k]$  de símbols transmesa). Per decidir, per exemple, quin símbol  $a[k]$  s'ha transmès en un instant concret  $k = k_0$ , serà necessària alguna variable de decisió. Anomenarem aquesta variable *observació de símbol*.

### Exemple d'observació de símbol pel cas en que es transmet un únic símbol

Per efectuar un primer anàlisi de com opera el procés d'observació de símbol, partirem de la situació simplificada en que el transmissor envia un únic símbol. Concretament, el símbol  $a[0]$  corresponent a l'instant  $k = 0$ . Sota aquestes condicions tenim, pel senyals transmès i rebut,

$$s(t) = a[0]p(t) \quad , \quad y(t) = \frac{1}{\sqrt{L_c}}a[0]p(t - t_d) + w(t). \quad (1.70)$$

Suposarem que s'efectua la mateixa operació de filtratge de l'apartat anterior, amb la qual cosa disposem del senyal  $z_0(t)$  amb SNR corresponent la  $\text{SNR}_0$  calculada. Definirem l'observació de símbol de la següent forma,

$$z[0] = z(t_0), \quad (1.71)$$

és a dir, com un mostratge del senyal  $z_0(t)$  en  $t = t_0$ . Per tant, serà d'interès utilitzar un  $t_0$  que ens proporcioni la màxima qualitat possible per la observació. Per tant, calcularem la SNR de l'observació  $z[0]$ . Cal remarcar que aquesta SNR (la d'una mostra del senyal en concret) no és la mateixa que la  $\text{SNR}_0$  calculada, la qual està associada a tot el senyal, no a una mostra concreta. A tots els efectes, l'observació  $z[0]$  serà una variable aleatòria, amb component útil i component de soroll expressades com

$$z[0] = \frac{1}{\sqrt{L_c}}a[0]p(t_0 - t_d) + n_0(t_0). \quad (1.72)$$

En aquest cas, definirem la SNR de l'observació com el quocient entre les potències de les dues variables aleatòries. Pel que fa a la component útil, l'únic terme aleatori és  $a[0]$ , i tota la resta són factors deterministes,

$$\text{SNR} = \frac{\mathbb{E} \left[ \left| \frac{1}{\sqrt{L_c}}a[0]p(t_0 - t_d) \right|^2 \right]}{\mathbb{E}[|n_0(t_0)|^2]} = \frac{\frac{1}{L_c}|p(t_0 - t_d)|^2 \mathbb{E}[|a[0]|^2]}{N_0 B_T}. \quad (1.73)$$

Reorganitzant termes a similitud de  $\text{SNR}_0$ , obtenim

$$\text{SNR} = \frac{r_s}{B_T} \cdot \frac{P_a E / L_c}{N_0} \quad , \quad E = \frac{T_s |p(t_0 - t_d)|^2}{E_p} \cdot E_p. \quad (1.74)$$

Clarament, aquesta SNR serà màxima si  $t_0$  s'escull per a que compleixi  $t_0 - t_d = t_{\max}$  i  $t_{\max}$  l'instant de temps en el qual  $|p(t)|$  és màxim. Això és

$$t_{\max} = \arg \max_t |p(t)|. \quad (1.75)$$

En altres paraules, mostregem en el punt de màxima amplitud del pols, obtenint una SNR, que en relació a la  $\text{SNR}_0$  de referència, ve donada en termes del valor màxim del pols  $p_{\max} = |p(t_{\max})|$  per

$$\text{SNR} = \text{SNR}_0 \cdot \frac{T_s |p_{\max}|^2}{E_p}. \quad (1.76)$$

### 1.5.3 Filtratge Òptim en Recepció: Filtre Adaptat

En aquesta secció ens plantejarem la optimització del filtratge en recepció segons les següents consideracions:

1. En la secció anterior hem avaluat l'instant òptim de mostratge i la SNR associada a la sortida del filtre

$h_0(t)$  en recepció (pas baix ideal limitat a la banda de transmissió) que deixa passar *sense modificació*<sup>16</sup> el pols de conformació  $p(t)$ . Hem vist que per realitzar la millor observació de símbol, ens cal mostrejar el senyal de sortida de  $h_0(t)$  a l'instant de temps en que el pols a la sortida de  $h_0(t)$  assoleix el seu màxim.

2. En aquesta secció determinarem, per un senyal PAM  $s(t)$  amb un pols de conformació  $p(t)$ , quin és el millor filtre de recepció que maximitza la relació SNR en un instant donat. És a dir, enlloc de fixar a priori el filtre  $h_0(t)$ , cercarem quina és la resposta temporal  $h_D(t)$  del filtre que cal utilitzar en el seu lloc. Per tant, calcularem:
  - (a) La resposta  $h_D(t)$  del filtre òptim, que anomenarem *filtre adaptat*.
  - (b) L'instant òptim de mostreig.
  - (c) La relació SNR corresponent.

Utilitzarem el següent resultat important<sup>17</sup> en les seves versions freqüencial i temporal per trobar el filtre òptim i analitzar les seves propietats:

- **Desigualtat d'Schwarz en el Domini Freqüencial**

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} A(f)B^*(f)df \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |A(f)|^2 df \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |B(f)|^2 df \quad (1.77)$$

La igualtat es dona només quan  $A(f) = c \cdot B(f)$ . És a dir, quan  $A(f)$  i  $B(f)$  són proporcionals, amb  $c \neq 0$  una constant arbitrària que podem fixar a  $c = 1$ .

- **Desigualtat d'Schwarz en el Domini Temporal**

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} a(t)b^*(t)dt \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |a(t)|^2 dt \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |b(t)|^2 dt \quad (1.78)$$

La igualtat es dona només quan  $a(t) = c \cdot b(t)$ . És a dir, quan  $a(t)$  i  $b(t)$  són proporcionals, amb  $c \neq 0$  una constant arbitrària que podem fixar a  $c = 1$ .

Per dur a terme l'exposició de la teoria i exemples del filtre adaptat, procedirem de la següent forma:

1. Es proporciona el model de senyal i desenvolupament matemàtic detallat en la secció següent (Model de Senyal i Càlcul del Filtre Adaptat).
2. Per facilitar la consulta durant la resolució d'exercicis, la secció posterior a aquesta (Resum del Filtre Adaptat: Definicions i Propietats) presenta un resum auto-contingut amb totes les definicions i propietats.
3. Es presenten exemples i exercicis en l'última secció (Filtre Adaptat: Exemples i Exercicis).

## Model de Senyal i Càlcul del Filtre Adaptat

Iniciem l'anàlisi del filtratge òptim o filtre adaptat. Aplicant el filtre de recepció  $h_D(t)$  al senyal rebut  $y(t)$ , obtenim el model de senyal a la sortida del filtre adaptat en termes dels seus components útil i de soroll ( $n_D(t)$ )

$$z(t) = y(t) * h_D(t) \quad (1.79a)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{L_c}} a[0] \cdot p(t - t_d) * h_D(t) + n_D(t) \quad , \quad n_D(t) = w(t) * h_D(t). \quad (1.79b)$$

Efectuem tot seguit els següents passos:

<sup>16</sup>No modifica la forma d'ona del pols  $p(t)$  excepte per un possible escalat d'amplitud o retard temporal.

<sup>17</sup>En el disseny de cadenes de comunicacions intentem sempre configurar els seus blocs constituents (per exemple, filtres) per proporcionar les millors prestacions. La desigualtat d'Schwarz és una de les eines bàsiques que ens permet trobar configuracions òptimes en operacions de filtratge.

1. Definim el pols a la sortida del filtre  $h_D(t)$  com

$$g(t) = p(t) * h_D(t). \quad (1.80)$$

2. El senyal de sortida  $z(t)$  ve donat llavors per l'expressió

$$z(t) = \frac{1}{\sqrt{L_c}} a[0] \cdot g(t - t_d) + n_D(t). \quad (1.81)$$

3. L'observació de símbol es defineix com  $z[0] = z(t_0)$ , on

$$z[0] = \frac{1}{\sqrt{L_c}} a[0] \cdot g(t_0 - t_d) + n_D(t_0). \quad (1.82)$$

4. La SNR de l'observació  $z[0]$  ve donada per la relació de potència útil a potència de soroll com

$$\text{SNR} = \frac{(P_a/L_c) \cdot |g(t_0 - t_d)|^2}{P_{n_D}} \leq \text{SNR}|_{t_{\max}} = \frac{(P_a/L_c) \cdot |g(t_{\max})|^2}{P_{n_D}}, \quad (1.83)$$

on hem aplicat que, per a un pols  $g(t)$  donat, podem maximitzar la relació anterior mostrejant en el màxim del pols  $g(t)$ ,  $t_0 - t_d = t_{\max}$ . Ens queda pendent encara trobar el millor pols  $g(t)$  tal que, maximitzi l'expressió anterior en  $t = t_{\max}$ . Atès que disposem d'una expressió per calcular potències de soroll en el domini freqüencial, escrivim tant la potència de la component útil com la del soroll en el mateix domini i de la següent forma:

- (a) Per avaluar la potència del terme útil, escrivim  $g(t)$  utilitzant la Transformada Inversa de Fourier

$$g(t_{\max}) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(f) \cdot e^{+j2\pi t_{\max} f} df = \int_{-\infty}^{+\infty} P(f) H_D(f) \cdot e^{+j2\pi t_{\max} f} df \quad (1.84)$$

a partir de la Transformada de Fourier  $G(f) = P(f) H_D(f)$  del pols  $g(t) = p(t) * h_D(t)$ .

- (b) Per avaluar la potència de soroll, escrivim

$$P_{n_D} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_w(f) |H_D(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |H_D(f)|^2 df. \quad (1.85)$$

5. Utilitzant la desigualtat de Schwarz en domini freqüencial (1.77) podem acotar la SNR en  $t_{\max}$  per

$$\text{SNR}|_{t_{\max}} = \frac{P_a/L_c}{N_0/2} \cdot \frac{\left| \int_{-\infty}^{+\infty} P(f) H_D(f) \cdot e^{+j2\pi t_{\max} f} df \right|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} |H_D(f)|^2 df} \quad (1.86a)$$

$$\leq \text{SNR}_{\max} = \frac{P_a/L_c}{N_0/2} \cdot \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |P(f)|^2 df \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |H_D(f)|^2 df}{\int_{-\infty}^{+\infty} |H_D(f)|^2 df} \quad (1.86b)$$

on hem pres  $A(f) = P(f) e^{+j2\pi t_{\max} f}$  i  $B(f) = H_D^*(f)$ . La fracció de la dreta es pot simplificar en numerador i denominador i obtenim l'expressió cercada per la màxima SNR

$$\text{SNR}_{\max} = \frac{P_a/L_c}{N_0/2} E_p, \quad (1.87)$$

on hem utilitzat l'expressió de l'equació (1.47) per l'energia de pols.

6. Finalment, podem calcular el filtre òptim  $h_D(t)$  prenent  $A(f) = B(f)$  per tal d'assolir la desigualtat

d'Schwarz amb igualtat. Això és

$$P(f)e^{+j2\pi t_{\max}f} = H_D^*(f) \quad (1.88a)$$

$$\Rightarrow H_D(f) = P^*(f) \cdot e^{-j2\pi t_{\max}f} \quad (1.88b)$$

$$\Rightarrow h_D(t) = p^*(t_{\max} - t) \quad (1.88c)$$

on arribem a la igualtat anterior aplicant propietats de l'operador Transformada de Fourier.

### Resum del Filtre Adaptat: Definicions i Propietats

Partint de la secció anterior, la caracterització del filtre adaptat o filtre de màxima SNR es resumeix en les següents definicions i resultats:

1. La resposta impulsional del filtre adaptat és  $h_D(t) = p^*(t_{\max} - t)$ .
2. El pols de sortida  $g(t)$  es defineix com la resposta del filtre adaptat al pols de conformació  $p(t)$ . És a dir,  $g(t) = p(t) * h_D(t)$ .
3. Definim  $t_{\max} = t_0 - t_d$  com l'instant en que el pols de sortida del filtre adaptat pren el seu valor absolut màxim, on  $t_0$  és l'instant en que fem la observació  $z[0]$  del símbol  $a[0]$  i  $t_d$  el retard de canal.
4. Per expressar el pols  $g(t)$  a la sortida del filtre adaptat, definim prèviament l'autocorrelació determinista  $R_p(t)$  del pols  $p(t)$ :

$$R_p(t) = p(t) * p^*(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t' + t)p^*(t')dt' \quad (1.89)$$

on tenim que  $R_p(t)$  compleix les següents propietats:

- (a) Particularitzant la integral de (1.89) en  $t = 0$ , obtenim que  $R_p(0) = E_p$  (l'energia del pols  $p(t)$ ).
- (b) Aplicant<sup>18</sup> la Desigualtat d'Schwarz en el domini temporal (1.78) a la mateixa equació (1.89), obtenim que  $|R_p(t)| \leq E_p = R_p(0)$ . És a dir:  $R_p(t)$  pren el seu valor màxim en  $t = 0$ .
- (c) La Transformada de Fourier  $S_p(f)$  de l'autocorrelació determinista  $R_p(t)$  es defineix com l'Espectre de Densitat d'Energia del pols  $p(t)$  i ve donada, a partir de l'equació (1.89), per

$$S_p(f) = |P(f)|^2, \quad E_p = \int_{-\infty}^{+\infty} S_p(f)df, \quad (1.90)$$

on la seva àrea en el domini freqüencial ens dona<sup>19</sup> també l'energia de pols  $p(t)$ .

- (d) El pols  $p(t - t_d)$  té la mateixa<sup>20</sup> autocorrelació determinista  $R_p(t)$  per qualsevol retard  $t_d$ .
- (e) Simetria Hermítica:  $R_p(t) = R_p^*(-t)$ . Es redueix a simetria parell per  $p(t)$  real:  $R_p(t) = R_p(-t)$ .

5. El pols  $g(t)$  a la sortida del filtre adaptat ve donat<sup>21</sup> per

$$g(t) = p(t) * h_D(t) = R_p(t - t_{\max}). \quad (1.91)$$

Per tant, donat que  $R_p(t)$  pren el seu valor absolut màxim en  $t = 0$ ,  $g(t)$  pren el seu valor absolut màxim en  $t = t_{\max}$ .

<sup>18</sup>Aplicant la Desigualtat d'Schwarz en el domini temporal (1.78) i prenent  $a(t') = p(t' + t)$  i  $b(t') = p^*(t')$ , tenim que:

$|R_p(t)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} p(t' + t)p^*(t')dt' \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |p(t' + t)|^2 dt' \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |p^*(t')|^2 dt' = E_p \cdot E_p = E_p^2$ . Per tant:  $|R_p(t)| \leq E_p$ .

<sup>19</sup>Aplicant el Teorema de Parseval:  $\int_{-\infty}^{+\infty} |p(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |P(f)|^2 df$ .

<sup>20</sup>Operem amb l'autocorrelació de  $p(t - t_d)$ :  $p(t - t_d) * p^*((-t) - t_d) = p(t - t_d) * p^*(-(t + t_d)) = p(t) * \delta(t - t_d) * p^*(-t) * \delta(t + t_d) = p(t) * p^*(-t) = R_p(t)$  perquè  $\delta(t - t_d) * \delta(t + t_d) = \delta(t)$ .

<sup>21</sup> $g(t) = p(t) * p^*(t_{\max} - t) = p(t) * p^*(-(t - t_{\max})) = p(t) * p^*(-t) * \delta(t - t_{\max}) = R_p(t) * \delta(t - t_{\max}) = R_p(t - t_{\max})$ .

6. L'observació del senyal  $z(t) = y(t) * h_D(t)$  a la sortida del filtre adaptat a l'instant  $t_0 = t_{\max} + t_d$  ens dona l'observació  $z[0] = z(t_0)$  del símbol  $a[0]$  transmès, on

$$z(t) = \frac{1}{\sqrt{L_c}} a[0] p(t - t_d) * p^*(-(t - t_{\max})) + w(t) * p^*(-(t - t_{\max})) \quad (1.92a)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{L_c}} a[0] R_p(t - t_0) + n_D(t) \quad (1.92b)$$

$$\Rightarrow z[0] = z(t_0) = \frac{1}{\sqrt{L_c}} a[0] E_p + n_D(t_0), \quad (1.92c)$$

on el soroll  $n_D(t_0)$  té potència  $P_{n_D(t_0)} = \frac{1}{2} N_0 E_p$ .

7. La SNR de l'observació  $z[0]$  del símbol  $a[0]$  a la sortida del filtre adaptat ve donada per la relació

$$\text{SNR}_{\max} = 2 \frac{E_s^{\text{RX}}}{N_0}, \quad (1.93)$$

on  $E_s^{\text{RX}} = P_a E_p / L_c$  és l'energia de símbol en recepció per un sistema banda base.

### Filtre Adaptat: Exemples i Exercicis

Considerem els següents exemples de filtrat adaptat:

1. **Exemple 1.** Definim el següent pols rectangular NRZ contingut a l'interval  $(0, T_s)$  i d'energia  $E_p$

$$p(t) = \sqrt{\frac{E_p}{T_s}} \cdot \Pi\left(\frac{t - \frac{1}{2}T_s}{T_s}\right). \quad (1.94)$$

Efectuarem els següents càlculs:

- (a) Plantejament: Determinació de la resposta impulsional  $h_D(t)$  del seu filtre adaptat en el receptor amb la restricció de que sigui un filtre causal. És a dir, que  $h_D(t) = 0$  per tots els temps  $t$  negatius. Resolució: Hem d'escollir un  $t_{\max}$  adequat que faci el filtre adaptat  $h_D(t) = p^*(t_{\max} - t)$  causal, on  $t_{\max}$  és l'instant en el qual el pols de sortida del filtre adaptat pren el seu valor absolut màxim. En qualsevol cas tenim que  $p(t)$  és real i podem prescindir del conjugat. Utilitzarem, en el càlcul, que  $\Pi(t) = \Pi(-t)$  (simetria parell del pols rectangular bàsic). Per tant, definint  $A_p = \sqrt{E_p / T_s}$ , tenim

$$h_D(t) = A_p \Pi\left(\frac{(t_{\max} - t) - \frac{1}{2}T_s}{T_s}\right) = A_p \Pi\left(\frac{t - t_c}{T_s}\right), \quad t_c = t_{\max} - \frac{1}{2}T_s. \quad (1.95)$$

Per a que  $h_D(t)$  sigui causal,  $t_c \geq \frac{1}{2}T_s$ . Això ens diu que  $t_{\max} \geq T_s$ . Per tant, prenem  $t_{\max} = T_s$ .

- (b) Plantejament: Determinació del pols de sortida  $g(t)$  del filtre adaptat pel valor anterior de  $t_{\max}$ . Resolució: Efectuem  $g(t) = p(t) * p^*(t_{\max} - t) = p(t) * p(-(t - T_s))$  i apliquem la simetria parell del pols rectangular bàsic,

$$g(t) = A_p \Pi\left(\frac{t - \frac{1}{2}T_s}{T_s}\right) * A_p \Pi\left(\frac{-(t - T_s) - \frac{1}{2}T_s}{T_s}\right) \quad (1.96a)$$

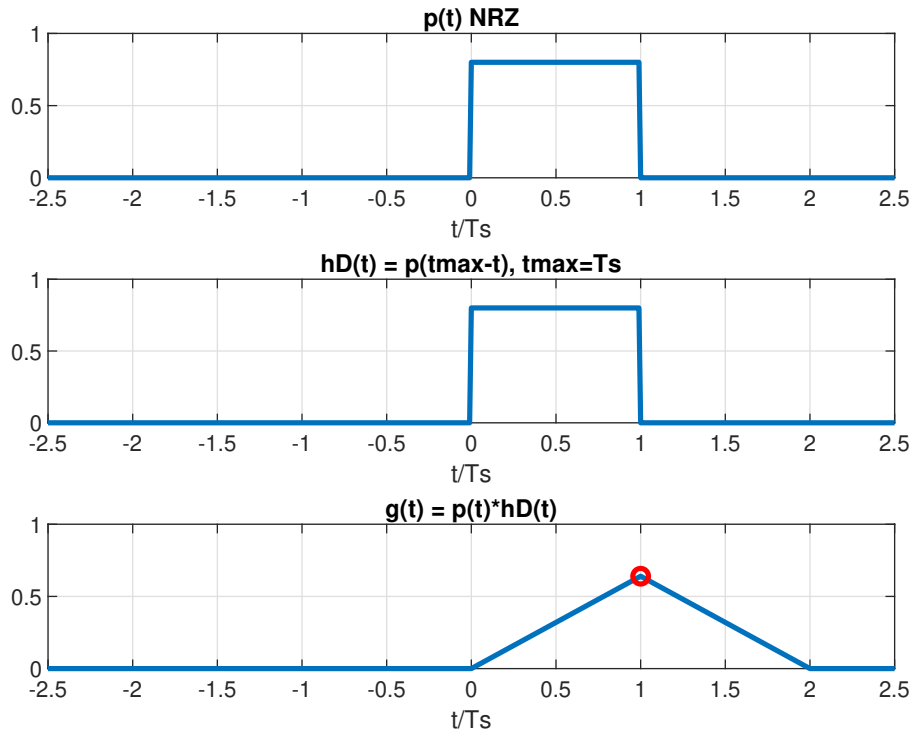
$$= A_p \Pi\left(\frac{t - \frac{1}{2}T_s}{T_s}\right) * A_p \Pi\left(\frac{(t - T_s) + \frac{1}{2}T_s}{T_s}\right) \quad (1.96b)$$

$$= A_p \Pi\left(\frac{t - \frac{1}{2}T_s}{T_s}\right) * A_p \Pi\left(\frac{t - \frac{1}{2}T_s}{T_s}\right) \quad (1.96c)$$

$$= E_p \cdot \Lambda\left(\frac{t - T_s}{T_s}\right), \quad E_p = A_p^2 T_s. \quad (1.96d)$$

És a dir, obtenim un pols triangular utilitzant la propietat  $\Pi\left(\frac{t}{T_s}\right) * \Pi\left(\frac{t}{T_s}\right) = T_s \Lambda\left(\frac{t}{T_s}\right)$ . Verifiquem també que en  $t_{\max} = T_s$ , el pols  $g(t)$  aconsegueix el seu valor màxim: l'energia de pols  $E_p$ .





**Figura 1.19:** Pols NRZ, filtre adaptat causal  $h_D(t) = p^*(T_s - t)$  i sortida  $g(t) = p(t) * h_D(t) = R_p(t - T_s)$ .

A més a més, podem calcular fàcilment l'autocorrelació determinista  $R_p(t) = p(t) * p^*(-t)$  del pols  $p(t)$  seguint idèntic procediment a l'anterior. Obtenim la següent expressió per  $R_p(t)$  i per la seva Transformada de Fourier o Especte de Densitat d'Energia,

$$R_p(t) = E_p \cdot \Lambda\left(\frac{t}{T_s}\right) \quad , \quad S_p(f) = \frac{E_p}{r_s} \cdot \text{sinc}^2\left(\frac{f}{r_s}\right). \quad (1.97)$$

És a dir, el màxim de  $R_p(t)$  (en  $t = 0$  ens dona l'energia de pols, i el màxim de  $S_p(f)$  (en  $f = 0$ ) ens dona efectivament el quocient Energia/Banda  $E_p/r_s$ , l'energia de pols sobre la velocitat de símbol. És a dir, una densitat espectral d'energia.

(c) Plantejament: Determinació de la SNR a l'instant òptim.

Resolució: La SNR a l'instant òptim ve donada per

$$\text{SNR}_{\max} = 2 \frac{E_s^{\text{RX}}}{N_0} = \frac{A_p^2 T_s / L_c}{N_0 / 2}. \quad (1.98)$$

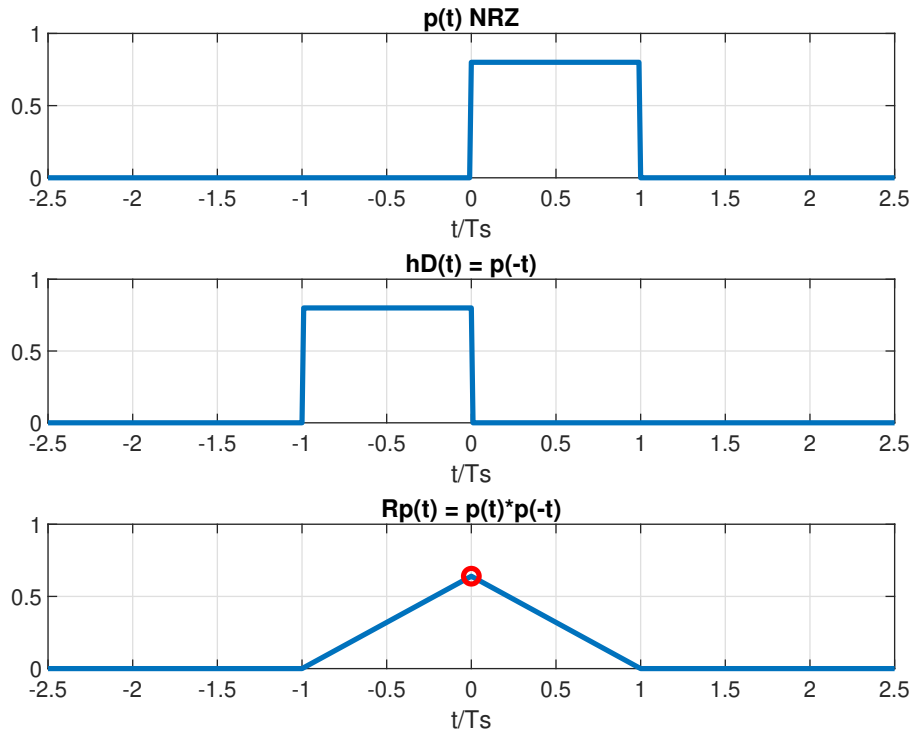
És a dir, l'energia de símbol que arriba al receptor normalitzada per  $N_0/2$  (nivell de densitat espectral de potència de soroll en el canal).

**2. Exemple 2:** Considerem un pols  $p(t)$  definit per

$$p(t) = A_p \cdot \text{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right). \quad (1.99)$$

**Exercici:** Repeteixi l'anàlisi de l'Exemple 1.

Podem veure en la Figura 1.21 com el pols  $g(t) = R_p(t)$  passa pels múltiples no nuls del temps de símbol. És a dir, tenim que  $g(mT_s) = E_p \delta[m]$ , amb  $g(0) = E_p$  (Energia de Pols). Gràcies a aquest fet veurem en la Secció 1.5.4 que l'observació del símbol no presenta interferència d'altres símbols quan es transmeten més símbols de la seqüència  $s[k]$ .



**Figura 1.20:** Pols NRZ, filtre adaptat no-causal  $h_D(t) = p^*(-t)$  i sortida  $g(t) = p(t) * h_D(t) = R_p(t)$ .

3. **Exemple 3:** Considerem un pols  $p(t)$  definit per dos senyals sinc desplaçats  $T = \frac{1}{2}T_s$ ,

$$p(t) = A_p \cdot \left( \text{sinc}\left(\frac{t - \frac{1}{2}T}{T}\right) + \text{sinc}\left(\frac{t + \frac{1}{2}T}{T}\right) \right). \quad (1.100)$$

**Exercici:** Repeteixi l'anàlisi de l'Exemple 1. Pot observar el pols  $p(t)$  a la Figura 1.22 per  $T = \frac{1}{2}T_s$ .

Podem veure en la Figura 1.23 com, per  $T = \frac{1}{2}T_s$ , el pols corresponent  $g(t) = R_p(t)$  passa pels múltiples no nuls del temps de símbol. Destaquen que presenta tres components sinc enlloc dels dos components del pols de conformació  $p(t)$ .

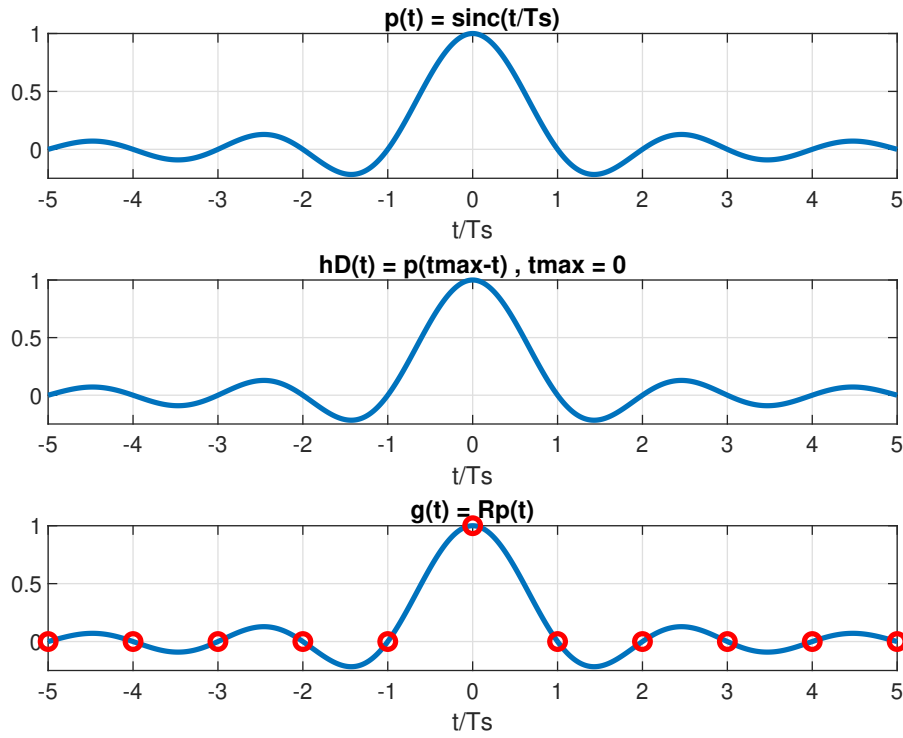
Realitzi també el següent exercici:

- (a) **Exercici 1:** Per l'exemple 3 compari el resultat de la SNR obtinguda amb el filtre adaptat amb la SNR que obtindria segons l'equació (1.76), corresponent a fer l'observació de símbol utilitzant un filtre  $H_0(f)$  uniforme en freqüència i limitat a la banda del pols  $p(t)$  doble sinc de l'equació (1.100). La nova SNR calculada ha de ser necessàriament menor ja que no s'està utilitzant el filtre adaptat.

Realitzi els següents exercicis de filtratge adaptat, repetint l'anàlisi de l'exemple:

1. **Exercici 1:** Repeteixi l'anàlisi dels exemples anteriors quan la resposta freqüencial  $P(f)$  del pols de conformació presenta dos nivells en freqüència i està limitat en banda,

$$P(f) = \begin{cases} P(0) & \text{si } |f| \leq \frac{1}{4}r_s \\ \frac{1}{\sqrt{2}}P(0) & \text{si } \frac{1}{4}r_s \leq |f| \leq \frac{3}{4}r_s \\ 0 & \text{si } |f| \geq \frac{3}{4}r_s \end{cases}. \quad (1.101)$$



**Figura 1.21:** Pols sinc, filtre adaptat no-causal  $h_D(t) = p^*(-t)$  i sortida  $g(t) = p(t) * h_D(t) = R_p(t - T_s)$ .

#### 1.5.4 Model Discret Equivalent

En les seccions anteriors hem suposat un model simplificat en el que el transmissor envia un únic símbol  $a[0]$  al receptor. En aquesta secció proporcionem el model complet de la cadena de comunicacions en que efectuem la recepció de tots els símbols de la seqüència  $a[k]$ .

**Model Discret Equivalent (MDE).** Aquest model ens proporciona l'expressió matemàtica i caracterització estadística de les observacions  $z[k]$  que el receptor realitza del símbol  $a[k]$ , basades en un procés de filtratge i mostreig, quan es transmeten conjuntament tots els símbols  $a[k]$  de la seqüència. L'interès principal del MDE consisteix en que abstruï tota la complexitat dels diferents subsistemes de la cadena de comunicacions, permetent calcular de forma compacte paràmetres de qualitat importants del sistema de comunicacions. En particular:

1. La probabilitat d'error de símbol (SER: Symbol Error Rate).
2. La probabilitat d'error de bit (BER: Bit Error Rate).

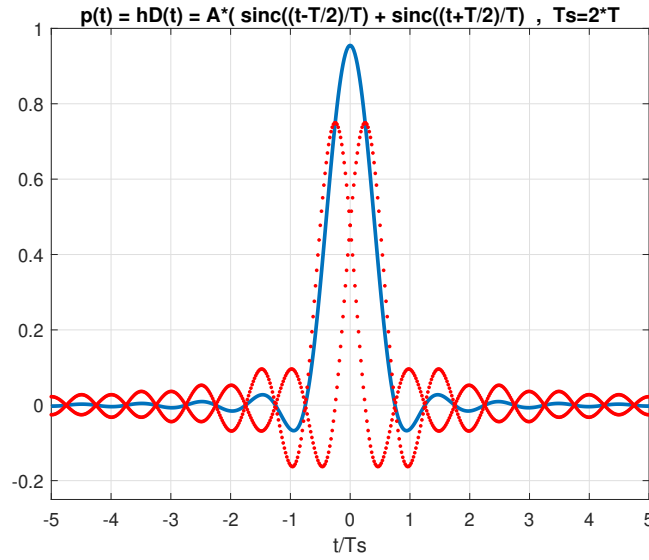
#### Obtenció del MDE

L'obtenció de l'MDE segueix els següents passos:

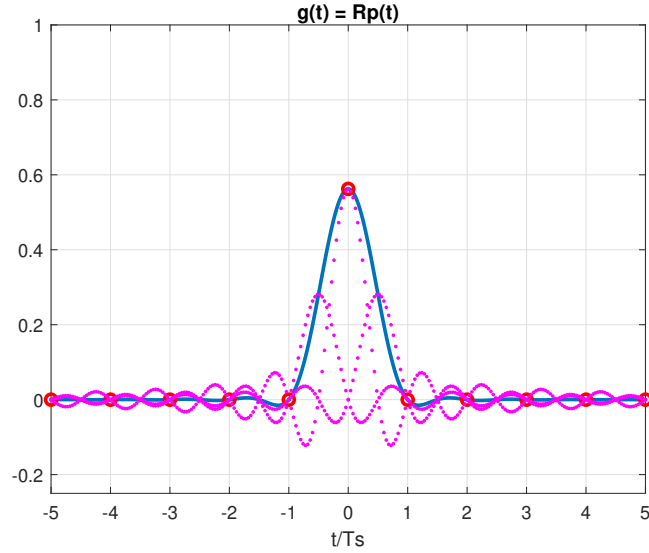
1. Es transmeten i reben els senyals  $s(t)$  i  $y(t)$ , respectivament,

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a[k]p(t - kT_s) \Rightarrow y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{a[k]}{\sqrt{L_c}} p(t - kT_s - t_d) + w(t). \quad (1.102)$$

2. En recepció, s'aplica el filtre adaptat  $h_D(t) = p^*(t_{\max} - t)$ , pel qual  $g(t) = p(t) * p^*(t_{\max} - t) = R_p(t - t_{\max})$  resulta el pols de sortida després del filtre adaptat (amb  $t_{\max} = t_0 - t_d$ ) i es defineix  $t_0$  com l'instant d'observació del símbol  $a[0]$ . Per més detalls, consulti la Secció 1.5.3.



**Figura 1.22:** Pols  $p(t)$  doble sinc (blau) i polsos sinc component (vermell).



**Figura 1.23:** Pols  $g(t) = p(t) * p^*(-t)$  associat al pols  $p(t)$  de la figura 1.22 i polsos sinc component.

3. El senyal de sortida  $z(t) = y(t) * h_D(t)$  esdevé

$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{a[k]}{\sqrt{L_c}} g(t - kT_s - t_d) + n_D(t) \quad , \quad n_D(t) = w(t) * h_D(t). \quad (1.103)$$

4. Si el símbol  $a[0]$  s'observa en  $t_0$ , el símbol  $a[m]$  s'observa en  $t_m = t_0 + mT_s$  ( $m$  símbols després). És a dir,  $t_m = (t_{\max} + t_d) + mT_s$ . Llavors, l'observació  $z[m] = z(t_m)$  del símbol  $a[m]$  ve donada, atès que  $g(t) = R_p(t - t_{\max})$ , per

$$z[m] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a[k] R_p((m - k)T_s) + n_D(t_m). \quad (1.104)$$

Aquesta equació constitueix el MDE, amb  $n_D(t_m)$  soroll Gaussià de mitjana zero, potència  $\frac{1}{2}N_0E_p$  i independent de les dades i d'altres mostres de soroll en instants  $t_{m'} \neq t_m$ .

En particular,

- (a) donat que  $R_p(0) = E_p$ , podem escriure

$$z[m] = \frac{a[m]}{\sqrt{L_c}} E_p + \left( \sum_{k \neq m} \frac{a[k]}{\sqrt{L_c}} R_p((m-k)T_s) \right) + n_D(t_m). \quad (1.105)$$

El segon terme, el qual només depèn dels símbols  $a[k \neq m]$  diferents del símbol observat  $a[m]$ , rep el nom de Interferència Inter-Simbòlica (ISI).

- (b) Per eliminar el terme ISI, ens interessarà dissenyar polsos  $p(t)$  tals que  $R_p(t) = p(t) * p^*(-t)$  passi per zero a múltiples del període de símbol  $T_s$ . És a dir,  $R_p(mT_s) = E_p \delta[m]$ . Aleshores, podem obtenir el MDE sense ISI com

$$z[m] = \frac{a[m]}{\sqrt{L_c}} E_p + n_D(t_m). \quad (1.106)$$

És a dir, observem únicament el símbol d'interès sense interferència de la resta de símbols de la seqüència, atès que han quedat anul·lats pels creuaments per zero del pols de sortida del filtre adaptat. A tall d'exemple, els polsos analitzats al final de la Secció 1.5.3 no generen ISI.

## 1.6 Disseny de Polsos de Conformació: Polsos de Nyquist

En aquesta secció presentem el disseny de polsos de conformació  $p(t)$  tals que, si el receptor es basa en el filtre adaptat, aleshores el MDE de les observacions de símbol  $z[m]$  ve donat per l'equació (1.106). És a dir, operem amb una cadena de comunicacions que no presenta ISI.

Establirem les següents condicions pel disseny dels polsos:

1. **Condició 1:** Considerem  $t_{\max} = 0$ . És a dir, el pols a la sortida del filtre adaptat esdevé

$$g(t) = p(t) * p^*(-t) = R_p(t). \quad (1.107)$$

2. **Condició 2:** El pols  $p(t)$  és de banda limitada a la banda  $B_p$  del pols. És a dir,

$$P(f) = 0 \quad , \quad |f| > B_p. \quad (1.108)$$

Per tant, aplicant Transformada de Fourier a la igualtat (1.107) de la Condició 1 per  $g(t)$  tenim que  $G(f) = P(f)P^*(f)$ . Això ens diu que  $g(t)$  també és de banda limitada, a la mateixa banda  $B_p$ .

3. **Condició 3:** El pols  $g(t)$  passa per zero a múltiples no nuls del temps de símbol,

$$g(mT_s) = E_p \delta[m]. \quad (1.109)$$

Aquesta condició és necessària per tenir ISI nul·la, tal com s'ha vist en la Secció 1.5.4.

Adoptem les següents definicions:

1. Polsos de Nyquist: polsos  $g(t)$  que compleixen les tres condicions anteriors. Són els polsos a la sortida del filtre adaptat a  $p(t)$ .
2. Polsos arrel quadrada de Nyquist: polsos  $p(t)$  que compleixen les tres condicions anteriors. Són els polsos<sup>22</sup> de conformació del transmissor.

<sup>22</sup>La denominació *arrel quadrada* prové de la relació freqüencial  $P(f) = \sqrt{G(f)}$ , on adoptem un  $G(f)$  real i no negatiu. Llavors  $P(f)$  és també real i no-negatiu. A més a més, com que tots els polsos  $p(t)$  són reals compleixen  $P(f) = P^*(-f)$ . Llavors  $P(f) = P^*(-f) = P(-f)$ . Aquesta simetria parell en freqüència equival a una simetria parell en temps pel pols de conformació:  $p(t) = p(-t)$ .

Un cop presentades les condicions que han de complir els polsos, podem passar al disseny del pols en si. Si examinem les condicions anteriors:

1. La condició 1 bàsicament ens diu que el pols  $g(t)$  tindrà simetria Hermítica segons les propietats enunciades anteriorment per l'autocorrelació determinista  $R_p(t)$ . És a dir, per polsos  $p(t)$  reals,  $g(t)$  és també real i de simetria parell:  $g(t) = g(-t)$ . Aquest fet implica que  $g(t)$  és un pols no-causal.
2. La condició 2 és molt fàcil de complir. Simplement cal utilitzar qualsevol plantilla freqüencial  $P(f)$  pel pols  $p(t)$  que sigui de banda limitada. El problema rau en que hem de garantir que es compleix *també* la condició 3 pel pols  $g(t)$ , el qual es determina a partir de  $p(t)$ .
3. La condició 3 és una condició en el domini temporal, mentre que la condició 2 es planteja en el domini freqüencial. Donat que la condició 2 és molt senzilla d'imposar en el domini freqüencial, ens proposem trobar quina condició en el domini freqüencial equival a la condició 3. Posteriorment, efectuarem el disseny exclusivament en el domini freqüencial.

Passem doncs a trobar la condició freqüencial equivalent a la condició 3:

1. Multipliquem  $g(t)$  per un senyal periòdic constituït per deltes situades a tots els múltiples del temps de símbol (aquest senyal s'anomena *tren de deltes*),

$$g(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_s) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(t) \delta(t - kT_s) \quad (1.110a)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(kT_s) \delta(t - kT_s) \quad (1.110b)$$

$$= g(0) \delta(t). \quad (1.110c)$$

Donat que la funció  $\delta(t - kT_s)$  té valor zero a tot arreu excepte en  $t = kT_s$ , veiem que selecciona el valor de  $g(t)$  en  $t = kT_s$ , el qual és zero en tots els múltiples no nuls de  $T_s$ , excepte per  $k = 0$  on  $g(t)$  pren el valor energia de pols  $E_p$  segons la condició 3.

2. Passem ara al domini freqüencial la identitat anterior. El tren de deltes temporal té com Transformada de Fourier un tren de deltes de període  $r_s = \frac{1}{T_s}$ . Per tant,

$$G(f) * \left( r_s \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kr_s) \right) = E_p, \quad (1.111)$$

on hem aplicat que  $g(0) = E_p$  i que  $E_p \delta(t)$  té Transformada de Fourier  $E_p$  (uniforme en freqüència).

3. Finalment, convolucionant  $G(f)$  amb el tren de deltes, obtenim:

**Condició 3 expressada respecte  $G(f)$ :**

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} G(f - kr_s) = \frac{E_p}{r_s}. \quad (1.112)$$

Com veiem, la magnitud de la dreta té dimensions de densitat espectral d'energia (energia/banda).

**Condició 3 expressada respecte  $P(f)$ :** Atès que  $G(f) = |P(f)|^2$ , tenim

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |P(f - kr_s)|^2 = \frac{E_p}{r_s}. \quad (1.113)$$

**Observació 1:** Aquestes dues condicions equivalents en el domini freqüencial s'han obtingut sense suposar que el pols  $p(t)$  sigui de banda limitada (condició 2). Per tant, són vàlides en general per qualsevol

pols d'energia  $E_p$  finita.

**Observació 2:** Per garantir absència de ISI no és necessari que el pols  $p(t)$  passi per zero a múltiples no nuls del temps de símbol, únicament que hi passi  $g(t)$ . De fet, en general,  $p(t)$  no tindrà zeros a múltiples no nuls del temps de símbol, encara que  $g(t)$  els tingui. És a dir,  $P(f)$  ha de complir l'equació (1.113), però no cal que compleixi l'equació (1.112) quan hi substituïm  $P(f)$  en lloc de  $G(f)$ . A mode d'exemple, pot veure en les Figures (1.22) i (1.23) com el pols  $p(t)$  de l'equació (1.100) no passa per zero a múltiples no nuls de  $T_s$ , però sí que ho fa el seu pols corresponent  $g(t)$ .

En la següent secció es desenvolupa un exemple d'aplicació d'aquest mètode.

### 1.6.1 Construcció de Polsos de Nyquist

Per construir polsos  $G(f)$  de banda limitada que compleixin la Condició 3 en el domini freqüencial, suposarem que estan definits sobre una banda tal que únicament dues de les infinites rèpliques desplaçades de  $G(f)$  tenen valor no nul a una freqüència  $f$  donada. Plantegem doncs el següent procediment:

1. Definim una  $G(f)$  limitada a una banda  $|f| \leq r_s$ . Per tant, suposem una freqüència  $f$  limitada a la meitat positiva de la banda:  $0 \leq f \leq r_s$ , amb rèpliques corresponents a  $k = 0$  ( $G(f)$ ) i a  $k = 1$  ( $G(f - r_s)$ ) activades en aquesta banda. Llavors,

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} G(f - kr_s) = G(f) + G(f - r_s) = \frac{E_p}{r_s}. \quad (1.114)$$

2. Centrem ara l'origen de freqüències en  $f = \frac{1}{2}r_s$  fent el canvi de variable  $f = \frac{1}{2}r_s + \Delta f$ . Per tant, l'interval de  $\Delta f$  compleix:  $-\frac{1}{2}r_s \leq \Delta f \leq +\frac{1}{2}r_s$ . L'expressió anterior queda doncs com segueix,

$$G\left(\frac{1}{2}r_s + \Delta f\right) + G\left(\frac{1}{2}r_s - \Delta f\right) = \frac{E_p}{r_s}. \quad (1.115)$$

3. De l'equació anterior, fent  $\Delta f = 0$  tenim que  $2G\left(\frac{1}{2}r_s\right) = E_p/r_s$ . Per tant, podem definir un increment  $\Delta G(\Delta f)$  respecte el punt  $G\left(\frac{1}{2}r_s\right) = \frac{1}{2}E_p/r_s$ ,

$$G(f) = \frac{1}{2} \frac{E_p}{r_s} + \Delta G(\Delta f). \quad (1.116)$$

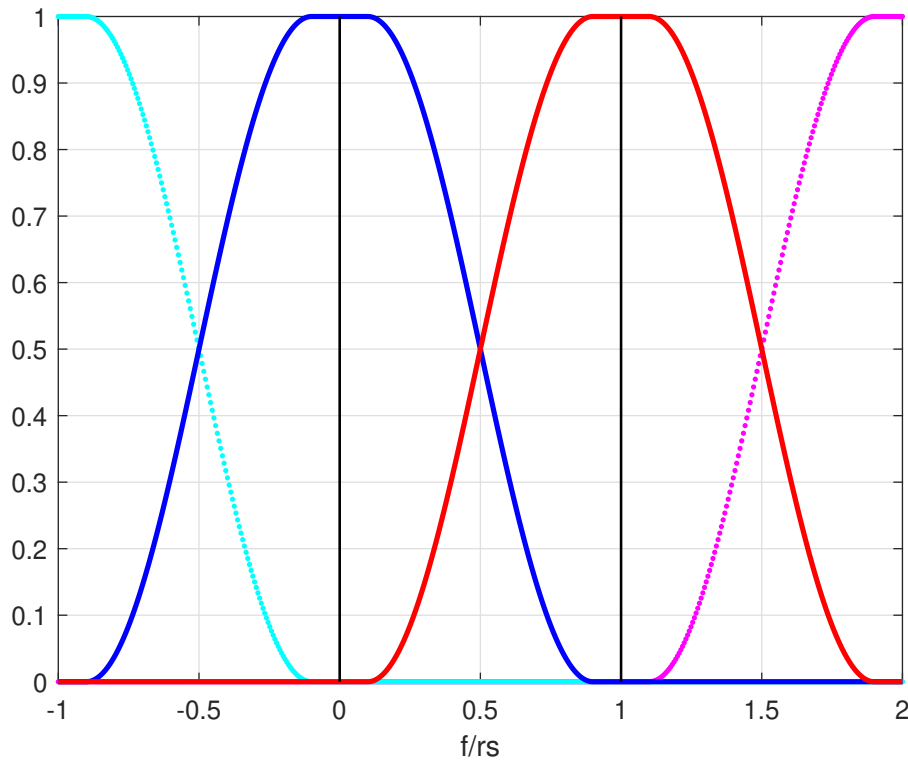
4. Finalment, trobem la relació que han de complir els polsos  $g(t)$  que dissenyem (polsos de Nyquist),

$$\Delta G(\Delta f) = -\Delta G(-\Delta f). \quad (1.117)$$

És a dir, l'increment  $\Delta G(\Delta f)$  és una funció de simetria senar que correspon a canviar l'origen de coordenades del punt  $(0, 0)$  al punt  $\left(\frac{1}{2}r_s, \frac{1}{2}E_p/r_s\right)$ . El diagrama corresponent es veu a la Figura 1.24.

Tot seguit, proposem un parell d'exercicis de polsos de conformació.

1. **Exercici 1.** Suposi que  $G(f)$  és un pols triangular en freqüència:  $G(f) = G(0)\Lambda\left(\frac{f}{r_s}\right)$ . Es demana:
  - (a) Dibuixi  $G(f)$  indicant tots els nivells i freqüències significatius. Demostri que  $G(f)$  compleix la condició 3 en freqüència i calculi el valor de  $G(0)$  en termes de paràmetres del senyal.
  - (b) Calculi  $\Delta G(\Delta f)$  i dibuixi'l respecte  $\Delta f$ .
  - (c) Calculi  $g(t)$  i verifiqui que passa per zero a múltiples no nuls del temps de símbol.



**Figura 1.24:** Polsos  $G(f - kr_s)$  pels valors de  $k = -1$  a  $k = 2$  respecte la freqüència normalitzada  $f/r_s$ . Les dues línies vertical delimiten l'interval de freqüència  $[0, r_s]$ . El gràfic blau correspon a  $G(f)$  i el vermell a  $G(f - r_s)$ . S'ha escollit un nivell de referència  $G(0) = 1$ . L'origen de coordenades per la representació de  $\Delta G(\Delta f)$  correspon al creuament de les gràfiques  $G(f)$  (blava) i  $G(f - r_s)$  (vermella). Respecte a aquest punt es pot observar la simetria senar de  $G(f)$  en la banda de transició.

2. **Exercici 2.** Suposi que  $G(f)$  ve donat per l'expressió

$$G(f) = G(0) \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{f}{r_s}\right) \cdot \Pi\left(\frac{f}{2r_s}\right). \quad (1.118)$$

Es demana:

- Dibuixi  $G(f)$  indicant tots els nivells i freqüències significatius. Demostris que  $G(f)$  compleix la condició 3 en freqüència i calculi el valor de  $G(0)$  en termes de paràmetres del senyal.
- Calculi  $\Delta G(\Delta f)$  i dibuixi'l respecte  $\Delta f$ .
- Calculi  $g(t)$  i verifiqui que passa per zero a múltiples no nuls del temps de símbol.
- Calculi<sup>23</sup>  $p(t)$ . Verifiqui que obté el pols doble sinc que es descriu a la secció de filtratge adaptat.

3. **Exercici 3.** Suposi el pols de conformació  $P(f)$  que es proporciona en (1.101). Es demana:

- Demostris que  $P(f)$  (és a dir,  $p(t)$ ) és un pols arrel quadrada de Nyquist i que per tant, verifica la Condició 3 en el domini freqüencial.
- Calculi el valor de  $P(0)$  en termes de l'energia de pols  $E_p$  i de la velocitat de símbol  $r_s$  aplicant la Condició 3 en el domini freqüencial.
- Calculi directament l'energia de pols  $E_p$  integrant  $|P(f)|^2$  en el domini freqüencial i demostris que aquest segon mètode també proporciona el mateix valor per  $P(0)$  que ha calculat en l'apartat anterior.

<sup>23</sup>Destaquem que a l'Exercici 1 no s'ha demanat calcular  $p(t)$  perquè no sempre resulta possible calcular-lo de forma senzilla: la Transformada Inversa de Fourier que s'ha de resoldre pot resultar un problema matemàtic força exigent.



### 1.6.2 Polsos de Nyquist Cosinus Alçat

En aquesta secció presentem els polsos  $g(t)$  Cosinus Alçat i el pols de conformació  $p(t)$  corresponent que anomenem Arrel Quadrada de Cosinus Alçat. La definició de la plantilla freqüencial  $G(f)$  parteix d'una generalització de l'Exercici 2 al final de la secció anterior. Definim:

- **Pols Cosinus Alçat:** Definim el paràmetre  $\alpha$  anomenat factor de roll-off i que es troba restringit a l'interval  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Aleshores,  $p(t)$  ve donat per la plantilla definida pels següents intervals freqüencials

$$G(f) = G(0) \quad , \quad |f| \leq \frac{1-\alpha}{2}r_s \quad (1.119a)$$

$$G(f) = G(0) \cdot \cos^2 \left( \frac{\pi}{2r_s\alpha} \left( |f| - \frac{1-\alpha}{2}r_s \right) \right) \quad , \quad \frac{1-\alpha}{2}r_s \leq |f| \leq \frac{1+\alpha}{2}r_s \quad (1.119b)$$

$$G(f) = 0 \quad , \quad |f| \geq \frac{1+\alpha}{2}r_s \quad (1.119c)$$

Podem trobar la seva representació gràfica en la Figura 1.25 per tres valors diferents del factor  $\alpha$ .

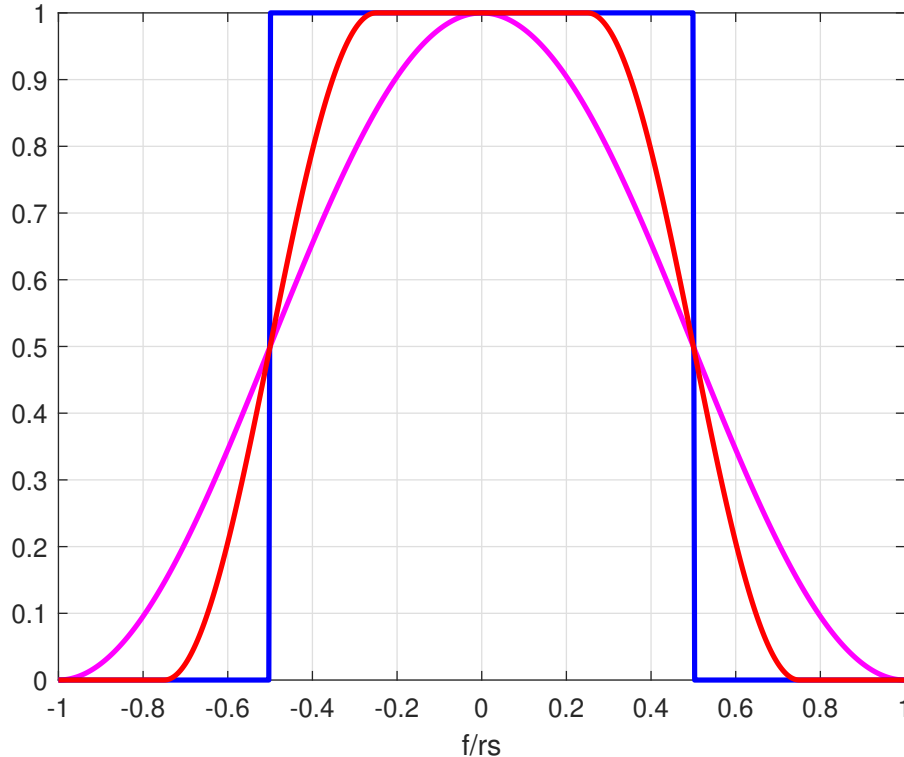
- **Pols Arrel Quadrada de Cosinus Alçat:** Correspon a  $P(f) = \sqrt{G(f)}$ .

En l'especificació de la plantilla freqüencial  $G(f)$  distingim tres trams,

1. Banda de pas uniforme: definit en la banda baixa:  $|f| \leq f_1 = \frac{1}{2}(1-\alpha)r_s$ .
2. Banda de transició o de roll-off: definit en la banda intermitja:  $\frac{1}{2}(1-\alpha)r_s = f_1 \leq |f| \leq f_2 = \frac{1}{2}(1+\alpha)r_s$ .
3. Banda eliminada: definit per  $|f| \geq f_2 = \frac{1}{2}(1+\alpha)r_s$ .

Per un sistema de comunicacions banda base, la banda total ocupada pel senyal o banda de transmissió  $B_T$  és precisament:  $B_T = f_2 = \frac{1}{2}(1+\alpha)r_s$ .

Observant la plantilla freqüencial cosinus alçat destaquem les següents característiques en funció del valor del factor de roll-off  $\alpha$ . La representació corresponent es pot veure a la figura (1.25),



**Figura 1.25:** Polsos  $G(f)$  corresponents als roll-offs:  $\alpha = 0$  (blau),  $\alpha = 0.5$  (vermell) i  $\alpha = 1$  (magenta).

1. La banda de transmissió és mínima per  $\alpha = 0$  (0 % d'excés de banda) i màxima per  $\alpha = 1$  (100 % d'excés de banda). Per tant, per un sistema de comunicacions banda base,

$$\frac{1}{2}r_s \leq B_T \leq r_s \quad (1.120)$$

2. Per  $\alpha = 0$ , la banda de transmissió desapareix i la banda de pas uniforme ocupa tota la banda de transmissió:  $G(f)$  esdevé un pols rectangular en freqüència i en conseqüència  $g(t) = E_p \text{sinc}(r_s t)$ .
3. Per  $\alpha = 1$ , la banda de pas uniforme desapareix i la banda de transició (roll-off) ocupa total la banda de transmissió. En aquest cas tenim un pols cosinus alçat com el de l'Exercici 2 anterior. En aquest cas,  $g(t)$  està més concentrat en temps que en el cas  $\alpha = 0$  atès que,
  - (a) la banda ocupada és el doble que pel cas  $\alpha = 0$ .
  - (b)  $G(f)$  no presenta cap discontinuïtat com pel cas  $\alpha = 0$  en  $f = \frac{1}{2}r_s$ .
4. En  $f = \frac{1}{2}r_s$ , tenim que  $G(f) = \frac{1}{2}G(0)$ , independentment del valor del factor de roll-off  $\alpha$ .
5. L'àrea sota  $G(f)$  és sempre l'energia de pols<sup>24</sup>  $E_p$ , independentment d'  $\alpha$ . De fet:  $G(0) = E_p/r_s$ , atès que  $G(f)$  compleix la condició 3 en el domini freqüencial.

En la pràctica habitual de sistemes de comunicacions, acostumem a trobar valors des de  $\alpha = 0.2$  a  $\alpha = 0.5$ .

Finalment, la plantilla freqüencial presentada per  $G(f)$  té l'avantatge de permetre calcular de forma tancada tant l'expressió analítica del pols  $g(t)$  com del pols  $p(t)$ . Arribem a les següents expressions,

1. Pols Cosinus Alçat;

$$g(t) = E_p \cdot \text{sinc}(r_s t) \cdot \frac{\cos(\pi \alpha r_s t)}{1 - (2\alpha r_s t)^2} \quad (1.121)$$

Podem observar fàcilment que el pols  $g(t)$  té zeros a múltiples no nuls del temps de símbol  $T_s$ .

Realitzi els següents exercicis,

- (a) **Exercici 1:** cerqui a Internet la representació gràfica del pols  $g(t)$  per diferents valors del factor de roll-off  $\alpha$ . Trobarà expressions analítiques diferents, però equivalents.
- (b) **Exercici 2:** Simplifiqui l'expressió de  $g(t)$  pels casos  $\alpha = 0$  i  $\alpha = 1$ .

2. Pols Arrel Quadrada de Cosinus Alçat;

$$p(t) = \sqrt{\frac{E_p}{r_s}} \cdot \frac{\sin(\pi r_s(1-\alpha)t) + 4\alpha r_s t \cdot \cos(\pi r_s(1+\alpha)t)}{\pi r_s t \cdot (1 - (4\alpha r_s t)^2)} \quad (1.122)$$

Podem observar que el pols  $p(t)$  no passa generalment per zero en múltiples no nuls del temps de símbol  $T_s$ .

Realitzi els següents exercicis,

- (a) **Exercici 1:** cerqui a Internet la representació gràfica del pols  $p(t)$  per diferents valors del factor de roll-off  $\alpha$ . Trobarà expressions analítiques diferents, però equivalents.
- (b) **Exercici 2:** Simplifiqui l'expressió de  $p(t)$  pels casos  $\alpha = 0$  i  $\alpha = 1$ . Compari el resultat amb les expressions corresponents del pols  $g(t)$ .
- (c) **Exercici 3:** manipuli algebràicament el pols  $p(t)$  doble sinc de l'equació (1.100) i comprovi que és igual (excepte en un factor d'amplitud) al pols  $p(t)$  de l'equació (1.122) pel cas  $\alpha = 1$ .

<sup>24</sup>Recordi que l'àrea es calcula com:  $\int_{-\infty}^{+\infty} G(f)df = \int_{-\infty}^{+\infty} |P(f)|^2 df = E_p$ .

## 1.7 Detecció i Probabilitat d'Error

En aquesta secció analitzarem com efectuar la Decisió de Símbol a partir de les observacions a la sortida del filtre adaptat a l'instant òptim de màxima SNR. Suposarem que treballem amb un Model Discret Equivalent (MDE) sense Interferència Inter-Simbòlica (ISI) segons s'ha presentat a la Secció 1.5.4. Reproduïm el MDE corresponent a continuació.

- **Model Discret Equivalent (MDE) sense ISI.** Les observacions de símbol  $z[m]$  venen donades per

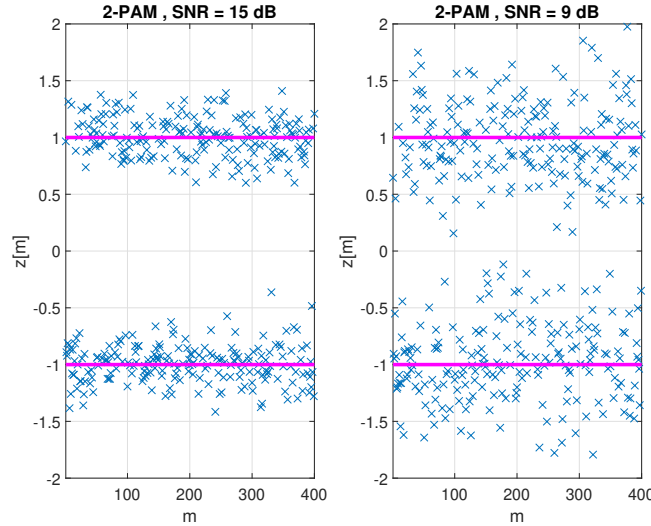
$$z[m] = \frac{a[m]}{\sqrt{L_c}} E_p + n_D[m], \quad (1.123)$$

on  $n_D[m] = n_D(t_m)$  és un soroll Gaussià real de mitjana zero i potència  $P_n = \frac{N_0}{2} E_p$ , estadísticament independent de la seqüència de símbols  $a[m]$  i de qualsevol altra mostra de soroll  $n_D[m']$  amb  $m' \neq m$ . Els paràmetres  $E_p$  i  $L_c$  són, respectivament, l'energia de pols i l'atenuació en potència del canal. La relació senyal-a-soroll (SNR) de l'equació anterior ve donada per

$$\text{SNR}_D = 2 \frac{E_s^{\text{RX}}}{N_0}, \quad (1.124)$$

on  $E_s^{\text{RX}} = P_a E_p / L_c$  és l'energia de símbol que arriba a l'entrada del receptor (entrada del filtre adaptat).  $P_a = \sum_{i=1}^M p_i |a_i|^2$  és la potència dels símbols de la constel·lació:  $a[m] \in \mathcal{C} = \{a_1, a_2, \dots, a_M\}$  i  $p_i$  les probabilitats *a priori* de cada símbol.

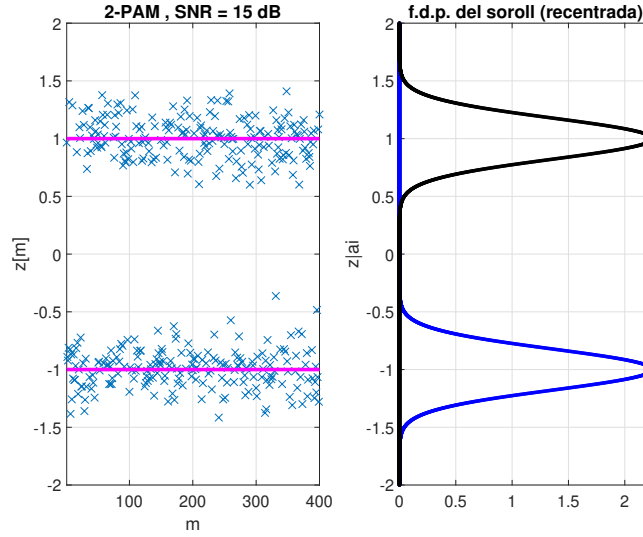
**Exemple 1:** a la figura 1.26 pot observar un exemple comparatiu per la modulació 2-PAM de dues realitzacions  $z[m]$  de la seqüència d'observacions de símbol a dues  $\text{SNR}_D$  diferents. A la figura 1.27 pot observar com la funció de densitat de probabilitat del soroll (una campana de Gauss) permet modelar la dispersió de les observacions  $z[m]$  deguda al soroll  $n_D[m]$ .



**Figura 1.26:** Representació de les  $N_s = 400$  observacions  $z[m]$  realitzades pel cas d'una constel·lació 2-PAM de constel·lació  $\mathcal{C} = \{-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\}$ , amb símbols equiprobables ( $p_i = \frac{1}{2}$ ). Les observacions de símbol  $z[m]$  apareixen com punts blaus, mentre que els símbols de referència de la constel·lació apareixen com una línia magenta. Observi que estem suposant  $E_p / \sqrt{L_c} = 2$ . A l'esquerra tenim una relació SNR de 15 dB i a la dreta de 9 dB. Observi com en aquest segon cas (SNR menor), els símbols observats  $z[m]$  presenten una major dispersió respecte el terme útil, degut a la major potència del soroll.

**Exemple 2:** a la figura 1.28 pot observar un exemple comparatiu per la modulació 4-PAM de dues realitzacions  $z[m]$  de la seqüència d'observacions de símbol a dues  $\text{SNR}_D$  diferents.

Començarem amb la discussió d'un exemple senzill.



**Figura 1.27:** Dispersió de les observacions deguda al soroll Gaussià  $n_D[m]$ . Al gràfic de la dreta, es representa sobre l'eix d'amplituds (vertical) la funció de densitat de probabilitat del soroll centrada en els valors de referència o símbols rebuts en absència de soroll. Noti com els punts de major concentració d'observacions coincideixen amb els punts de major densitat de probabilitat (eix horitzontal, gràfic de la dreta.)

- **Exemple.** Constel·lació 2-PAM polar. Considerem la següent *constel·lació en transmissió*

$$\mathcal{C} = \{a_1 = -\frac{1}{2}A, a_2 = +\frac{1}{2}A\}. \quad (1.125)$$

La *constel·lació en detecció* pels símbols útils rebuts és

$$\mathcal{C}_D = \{\beta a_1, \beta a_2\} \quad , \quad \beta = \frac{E_p}{\sqrt{L_c}}. \quad (1.126)$$

Suposem que s'ha transmès  $a[m] = a_1 = -\frac{1}{2}A$ . El receptor ho ignora i ho ha d'esbrinar a partir de l'observació de símbol  $z[m]$  que realitza. Per tant, ha de decidir una de les següents opcions,

$$z[m] = -\frac{1}{2}A \cdot \beta + n_{D1}, \quad (1.127a)$$

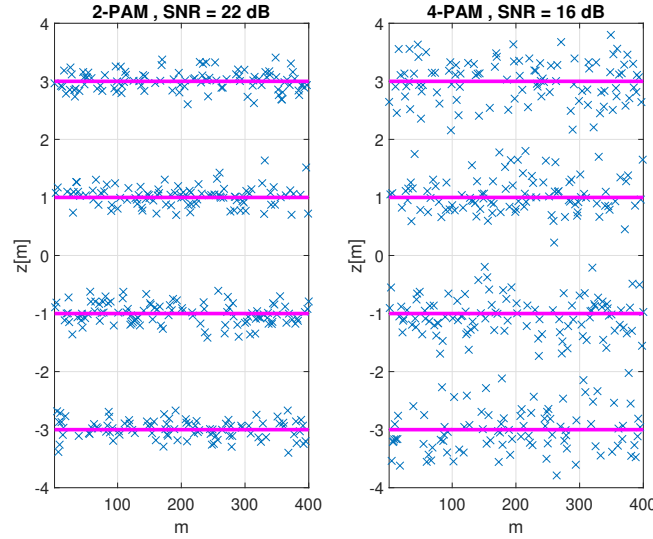
$$z[m] = +\frac{1}{2}A \cdot \beta + n_{D2}, \quad (1.127b)$$

on, de moment, suposem que el receptor coneix  $\beta$ . En el primer cas,  $n_{D1}$  és el valor de soroll que s'ha d'haver donat per generar l'observació  $z[m]$  si s'ha transmès  $a_1$ . En el segon cas,  $n_{D2}$  és el valor de soroll que s'ha d'haver donat per generar l'observació  $z[m]$  si s'ha transmès  $a_2$ . Per tant, el receptor ha de decidir entre les següents dues hipòtesis, donada l'observació  $z[m]$ :

1. Hipòtesi 1. S'ha transmès  $a_1$  i el soroll en detecció ha pres el valor  $n_{D1} = z[m] - \beta a_1$ .
2. Hipòtesi 2. S'ha transmès  $a_2$  i el soroll en detecció ha pres el valor  $n_{D2} = z[m] - \beta a_2$ .

Suposem que el receptor coneix les probabilitats de transmissió de cada símbol i que aquestes són idèntiques:  $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$ . Per tant, donada l'observació  $z[m]$ , aquest fet no li proporciona informació addicional per optar per una de les dues hipòtesis. En canvi, si les probabilitats fossin  $p'_1 = 0.9$  i  $p'_2 = 0.1$ , el símbol  $a_1$  parteix d'una major versemblança d'haver estat transmès (és a dir, les probabilitat a priori si que proporcionarien en aquest cas informació addicional a la de l'observació  $z[m]$  per decidir el símbol transmès). No obstant, en el nostre cas, donat que els símbols són equiprobables, el receptor només pot mesurar com de probable és que s'hagi donat una mostra de soroll  $n_{D1}$ , o bé una mostra de soroll  $n_{D2}$ . Per tant,

- per símbols equiprobables, el receptor decidirà en base a quina de les dues hipòtesis de soroll  $n_{D1}$  o  $n_{D2}$  té major densitat de probabilitat (atès que el soroll és una variable aleatòria continua).



**Figura 1.28:** Representació de les  $N_s = 400$  observacions  $z[m]$  realitzades pel cas d'una constel·lació 4-PAM de constel·lació  $\mathcal{C} = \{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}\}$ , amb símbols equiprobables ( $p_i = \frac{1}{4}$ ). Les observacions de símbol  $z[m]$  apareixen com punts blaus, mentre que els símbols de referència de la constel·lació apareixen com una línia magenta. Observi que estem suposant  $E_p/\sqrt{L_c} = 2$ . A l'esquerra tenim una relació SNR de 22 dB i a la dreta de 16 dB. Observi com en aquest segon cas (SNR menor), els símbols observats  $z[m]$  presenten una major dispersió respecte el terme útil, degut a la major potència del soroll.

**Observació:** per aquesta figura hem utilitzat el mateix senyal de soroll que per la figura 1.26. No obstant, com que la potència de la constel·lació 4-PAM és superior en un factor 5 a la de la constel·lació 2-PAM, les relacions SNR s'han incrementat en 7 dB  $\simeq 10 \cdot \log_{10}(5)$  en tots dos casos.

A la pràctica, el detector no avalua directament la funció de densitat de probabilitat  $f_{n_D}(n_{Di})$  per  $i = 1$  i  $i = 2$ , sino  $-\ln f_{n_D}(n_{Di})$ . Aquesta magnitud s'anomena *mètrica*. Per aquest exemple tindriem les següents dues mètriques:

$$L_1 = -\ln \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \exp \left( -\frac{n_{D1}^2}{2\sigma_n^2} \right) \right), \quad (1.128)$$

$$L_2 = -\ln \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \exp \left( -\frac{n_{D2}^2}{2\sigma_n^2} \right) \right). \quad (1.129)$$

Aplicant en cada cas que  $n_{Di} = z[m] - \beta a_i$  i operant amb el logaritme Neperià, obtenim

$$L_1 = \frac{1}{2} \ln(\pi\sigma_n^2) + \frac{(z[m] + \frac{1}{2}\beta A)^2}{2\sigma_n^2}, \quad (1.130)$$

$$L_2 = \frac{1}{2} \ln(\pi\sigma_n^2) + \frac{(z[m] - \frac{1}{2}\beta A)^2}{2\sigma_n^2}. \quad (1.131)$$

Com que el primer dels dos sumands de cada mètrica és el mateix, només cal que ens fixem en el segon sumand per comprovar quina de les dues mètriques és la més petita, fet que equival, en haver pres menys el logaritme Neperià de la densitat de probabilitat, a decidir la densitat de probabilitat més elevada. Per tant, només caldrà que ens fixem en les següents dues distàncies al quadrat,

$$D_1^2 = (z[m] + \frac{1}{2}\beta A)^2, \quad (1.132)$$

$$D_2^2 = (z[m] - \frac{1}{2}\beta A)^2. \quad (1.133)$$

Per tant, decidirem aquell símbol que correspongui a la distància més petita de l'observació  $z[m]$  al símbol

$\beta a_i$  de la constel·lació en detecció. Aquest esquema de detecció es formula matemàticament com segueix,

$$\widehat{a[m]} = \arg \min_{a_i \in \mathcal{C}} \left[ (z[m] - \beta a_i)^2 \right]. \quad (1.134)$$

És a dir, escollim com argument, d'entre tots els símbols de la constel·lació en transmissió  $\mathcal{C}$ , aquell que minimitza l'expressió entre claudàtors. Aquest criteri de detecció s'anomena doncs de **Distància Mínima**. El fet de que el símbol que més probablement s'hagi transmès sigui aquell més proper a la constel·lació en recepció, està directament relacionat amb el fet de que és més probable que es produeixin mostres de soroll de valor reduït que de valor elevat, tal com s'observa a partir de la Campana de Gauss que corresponen a la funció de densitat de probabilitat del soroll.

Un cop vist aquest exemple anem a presentar el següent criteri de detecció general i que relacionarem posteriorment amb el criteri de distància mínima que acabem de veure.

- **Criteri de Detecció MAP (Maximum a Posteriori).** El criteri de detecció MAP és el criteri que ens proporciona la decisió de quin símbol s'ha transmès de tal manera que la probabilitat d'equivocar-nos (en la decisió) sigui mínima. Per tant, és un criteri de mínima probabilitat d'error. El criteri MAP formula la detecció de símbol com segueix,

$$\widehat{a[m]}|_{\text{MAP}} = \operatorname{argmax}_{a_i \in \mathcal{C}} [\operatorname{Prob}[a[m] = a_i | z[m]]]. \quad (1.135)$$

És a dir, adopta com a símbol  $a_i$  decidit aquell que, d'entre tots els símbols de la constel·lació en transmissió  $\mathcal{C}$ , maximitza la probabilitat de que hagi estat el símbol transmès, condicionat al fet que l'observació ha estat el valor  $z[m]$ .

Operant amb l'equació (1.135), podem expressar el detector MAP a partir les mètriques  $L_i = -\ln f_{n_D}(n_{D,i})$  del CMD, on fem palesa la influència de les probabilitats a priori  $p_i$ ,

$$\widehat{a[m]}|_{\text{MAP}} = \operatorname{argmin}_{a_i \in \mathcal{C}} \left[ L_i|_{\text{CMD}} + \ln \frac{1}{p_i} \right] \quad (1.136)$$

Fem la següent observació important respecte al criteri MAP:

**Observació:** el criteri MAP sí depèn de les probabilitats a priori  $p_i$  de cada símbol. No obstant, si els símbols són equiprobables  $p_i = \frac{1}{M}$ , coincideix<sup>25</sup> amb el Criteri de Distància Mínima (CDM).

És a dir, el CDM és, per símbols equiprobables, un criteri de mínima probabilitat d'error.

Tot criteri de detecció porta associat un detector. Concretament, definim els següents tres conceptes: Detector de Símbol, Regió de Decisió i Frontera de Decisió:

1. **Detector de Símbol:** és la funció que, a partir de l'observació  $z[m]$ , ens genera el símbol decidit  $\widehat{a[m]}$ ,

$$\widehat{a[m]} = \text{DET}(z[m]). \quad (1.137)$$

La funció de detecció s'obté a partir del Criteri de Detecció. En el cas de comunicacions banda base, ens condueix de la recta real  $-\infty < z < +\infty$  a un conjunt discret: la constel·lació  $\mathcal{C}$  de símbols en transmissió.

**Exercici.** Demostri que aplicant el CMD a la constel·lació 2-PAM polar, la funció de detecció ve donada per l'operació signe  $\widehat{a[m]} = \frac{1}{2}A \cdot \text{sign}(z[m])$ . Pot representar la constel·lació en detecció  $\mathcal{C}_D$  en la recta real (observacions  $z[m]$ ) i fer un raonament geomètric.

2. **Regió de Decisió  $\mathcal{R}(a_i)$ :** és la regió de l'espai d'observacions  $z[m]$  associada a decidir el símbol  $a_i$ . És a dir, podem distingir dos casos:

<sup>25</sup>Pot trobar el desenvolupament del criteri MAP a la secció ?? dels apèndixs.

- (a) Sota el CMD i comunicacions banda base, és la regió o lloc geomètric de punts de la recta real que estan més aprop del punt  $\beta a_i$  que de qualsevol altre punt  $\beta a_{i' \neq i}$  de la constel·lació en detecció  $\mathcal{C}_D$ .
- (b) Sota un criteri diferent al CMD i comunicacions banda base (per exemple, pel criteri MAP amb símbols no-equiprobables)  $\mathcal{R}(a_i)$  és el lloc geomètric dels punts de la recta real  $z[m]$  pels quals la mètrica  $L_i$  corresponent és mínima respecte al reste de mètriques  $L_{i' \neq i}$  d'altres símbols de la constel·lació. Entenem les mètriques tal com es defineixen<sup>26</sup> pel criteri MAP.

**Exemple.** Hem vist que si apliquem el CMD al cas 2-PAM polar, el detector de símbol és bàsicament el signe de l'observació  $z[m]$ . Per tant, les dues regions de decisió vénen determinades per

$$\mathcal{R}(a_1) = (-\infty, 0) \quad (1.138a)$$

$$\mathcal{R}(a_2) = (0, +\infty) \quad (1.138b)$$

**Exercici 1.** Determini les quatre regions de decisió de la constel·lació 4-PAM polar i 4-PAM unipolar segons el CMD. Recordi que per definir aquestes regions de decisió ha de tenir en compte la constel·lació en detecció  $\mathcal{C}_D$  que conté els símbols  $\beta a_i$ .

3. **Frontera de Decisió:** la frontera de decisió entre dues regions de decisió  $\mathcal{R}(a_i)$  i  $\mathcal{R}(a_{i'})$  diferents és el lloc geomètric d'aquells punts que es troben a igual distància (segons el CMD) del punt  $\beta a_i$  i del punt  $\beta a_{i' \neq i}$  de la constel·lació en detecció  $\mathcal{C}_d$  o bé que tenen igual mètrica (segons el criteri MAP)  $L_i = L_{i' \neq i}$ .

**Exemple.** Pel mateix cas del CMD i la constel·lació 2-PAM polar, només hi ha una frontera de decisió entre les dues regions  $\mathcal{R}(a_1)$  i  $\mathcal{R}(a_2)$ . Aquesta frontera és el (únic) punt  $z = 0$ . Pel cas de comunicacions banda base, on les observacions  $z[m]$  són nombre reals, la determinació de si una observació  $z[m]$  pertany a una regió de decisió o a una altra es fa en base a llindars. Pel cas 2-PAM com que la frontera de decisió o llindar  $\gamma$  és el punt  $z = 0$ , establim un llindar  $\gamma = 0$  tal que,

- (a) si  $z[m] < \gamma$  decidirem  $\widehat{a[m]} = a_1$  ( $z[m]$  pertany a la regió de decisió  $\mathcal{R}(a_1)$ ).
- (b) si  $z[m] > \gamma$  decidirem  $\widehat{a[m]} = a_2$  ( $z[m]$  pertany a la regió de decisió  $\mathcal{R}(a_2)$ ).
- (c) el cas  $z[m] = \gamma$  és irrellevant perquè tot i que possible, es dona amb probabilitat nul·la. Si es donés el cas, decidíem aleatòriament entre  $a_1$  i  $a_2$  segons les seves probabilitats  $p_i$  que estem suposant  $p_i = \frac{1}{2}$  en aquest exemple.

A la Figura 1.29 es pot observar una seqüència d'observacions  $z[m]$  i com s'efectua la decisió en comparació al llindar  $\gamma$ .

Tot seguit, definim la probabilitat d'error associada al detector.

- **Probabilitat d'Error de Símbol:** es defineix en general com

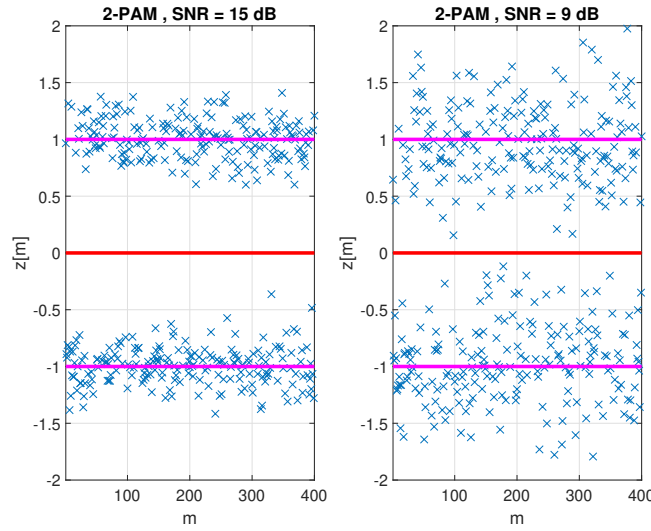
$$p(\epsilon_s) = \text{Prob} \left[ \widehat{a[m]} \neq a[m] \right]. \quad (1.139)$$

És a dir, la probabilitat de que el símbol decidit  $\widehat{a[m]}$  difereixi del símbol transmès  $a[m]$ . Aquesta probabilitat d'error (total) la calcularem com segueix a partir de les probabilitats d'error parcials associades a la transmissió d'un símbol  $a_i$  concret. Això és

$$p(\epsilon_s) = \sum_{i=1}^M p_i \cdot \text{Prob} \left[ \widehat{a[m]} \neq a_i | a[m] = a_i \right] \quad (1.140a)$$

$$= \sum_{i=1}^M p_i \cdot p(\epsilon_s | a_i) \quad (1.140b)$$

<sup>26</sup>Pel criteri MAP la mètrica es defineix com:  $L_i = -\ln(p_i) - \ln f_{n_D}(n_{Di})$ .



**Figura 1.29:** Representació de les  $N_s = 400$  observacions  $z[m]$  de la figura 1.26 junt amb el llindar de decisió  $\gamma = 0$  (vermell). El valor del llindar  $\gamma$  (associat a l'eix vertical d'amplituds) es repeteix per cada instant de temps. Si l'observació està a la part superior (amplituds positives), es decideix el símbol  $a_2$ . En cas contrari, es decideix el símbol  $a_1$ . Observi com en la figura de la dreta, associada a una  $\text{SNR}_D$  més baixa, algunes observacions  $z[m]$  s'apropen més al llindar  $\gamma = 0$  entre les dues regions de decisió.

on a partir d'ara ens referim a les probabilitats d'error parcials amb la notació simplificada  $p(\epsilon_s|a_i)$ .

**Observació 1.** L'expressió de l'equació 1.140a s'ha d'interpretar de la següent forma:

1. Cada probabilitat d'error parcial  $p(\epsilon_s|a_i)$  es calcula donant per fet que s'ha transmès el símbol  $a[m] = a_i$  i avaluant, per aquest cas, quina és la probabilitat que el soroll sigui prou elevat com per portar al detector de símbol a decidir un símbol diferent. Aquesta probabilitat s'avalua com la probabilitat que l'observació  $z[m]$  es situï fora de la regió de decisió  $\mathcal{R}(a_i)$  associada al símbol que es suposa transmès,

$$p(\epsilon_s|a_i) = \text{Prob}[z[m] \notin \mathcal{R}(a_i)|a[m] = a_i]. \quad (1.141)$$

2. Donat que es transmeten símbols  $a_i$  amb probabilitats  $p_i$ , cadascuna de les probabilitats parcials  $p(\epsilon_s|a_i)$  (les quals es calculen pel cas en que s'ha transmès el símbol  $a_i$ ) s'ha de ponderar per la probabilitat a priori de transmissió de cada símbol  $a_i$  per poder calcular la probabilitat d'error total  $p(\epsilon_s)$ . És a dir, tal com s'enuncia a l'equació (1.140a).

**Observació 2.** Pel cas de símbols equiprobables, la probabilitat d'error parcial coincideix amb la mitjana de les probabilitats d'error parcials, atès que  $p_i = \frac{1}{M}$ ,

$$p(\epsilon_s) \Big|_{p_i = \frac{1}{M}} = \frac{p(\epsilon_s|a_1) + p(\epsilon_s|a_2) + \dots + p(\epsilon_s|a_M)}{M}. \quad (1.142)$$

Per tant, el càlcul de la probabilitat d'error necessita en general<sup>27</sup> el càlcul de  $M$  probabilitats parcials.

### 1.7.1 Introducció al Càlcul de Probabilitats d'Error: el cas 2-PAM polar

En aquesta secció presentem les eines fonamentals del càlcul de probabilitats d'error. Ens centrarem en l'exemple de la constel·lació 2-PAM polar i símbols equiprobables, pel qual el CMD constitueix el criteri de mínima probabilitat d'error. Entendrem que les definicions i conceptes que es presenten en l'anàlisi del cas 2-PAM són generalitzables a tots els altres casos. Per tant, plantegem el següent procediment:

<sup>27</sup>En determinats casos, ens podem estalviar el càlcul d'algunes de les probabilitats parcials aprofitant simetries de la constel·lació



1. CMD per 2-PAM polar. La constel·lació en detecció és  $\{-\frac{1}{2}\beta A, +\frac{1}{2}\beta A\}$ . Per tant, el criteri de mínima distància ens proporciona una decisió de símbol  $\widehat{a[m]} = \frac{1}{2}A \cdot \text{sign}(z[m])$ .
2. Probabilitat d'error  $p(\epsilon_s)$ . Particularitzarem, per aquesta modulació, l'expressió de la secció anterior per la probabilitat d'error total. Tenim, per símbols equiprobables, que  $p_i = \frac{1}{2}$ . Per tant,

$$p(\epsilon_s) = \sum_{i=1}^2 p_i \cdot p(\epsilon_s|a_i) = \frac{1}{2}p(\epsilon_s|a_1) + \frac{1}{2}p(\epsilon_s|a_2). \quad (1.143)$$

3. Càlcul de les probabilitats d'error parcials  $p(\epsilon_s|a_i)$ . Hem de calcular ara les dues probabilitats d'error parcials  $p(\epsilon_s|a_1)$  i  $p(\epsilon_s|a_2)$ .

(a) Càlcul de  $p(\epsilon_s|a_1)$ . Suposem que el símbol transmès és  $a[m] = a_1 = -\frac{1}{2}A$ . Aleshores:

**Pas 1:** El soroll associat a aquesta hipòtesi és  $n_{D1} = z[m] - \beta a_1 = z[m] + \frac{1}{2}\beta A$ .

**Pas 2:** La probabilitat  $p(\epsilon_s|a_1)$  és la de que  $z[m]$  es situï fora de la regió de decisió del símbol  $a_1$ ,

$$p(\epsilon_s|a_1) = \text{Prob}[z[m] \notin \mathcal{R}(a_1)|a[m] = a_1]. \quad (1.144)$$

Per tant, com que en aquest cas només tenim dues regions de decisió, la probabilitat anterior es pot calcular com la probabilitat de que  $z[m]$  estigui a l'altre regió de decisió  $\mathcal{R}(a_2)$ . Per tant, calculem la probabilitat  $p(\epsilon_s|a_1)$  com

$$p(\epsilon_s|a_1) = \text{Prob}[z[m] \in \mathcal{R}(a_2)|a[m] = a_1], \quad (1.145)$$

on  $\mathcal{R}(a_2) = (0, +\infty)$ . Podem calcular per tant  $p(\epsilon_s|a_1)$  avaluant la probabilitat de que realitzacions de la variable aleatòria  $z[m]|a_1$  caiguin a la regió  $\mathcal{R}(a_2)$ . És a dir,

- A. Aquesta probabilitat es calcula com l'àrea sota la funció de densitat de probabilitat de  $z[m]$  suposant  $a_1$  transmès. Com que  $z[m] = \beta a_1 + n_D[m]$  i la funció de densitat de probabilitat del soroll  $n_D[m]$  és una Gaussiana  $f_{n_D}(n_D)$ , tenim que,

$$f_{z[m]|a_1}(z[m]|a_1) = f_{n_D}(z[m] - \beta a_1) \quad (1.146)$$

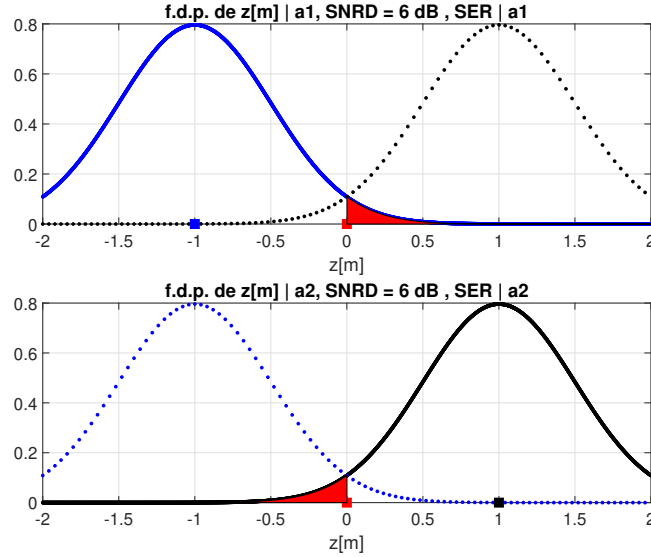
És a dir, serà la f.d.p. Gaussiana del soroll centrada a  $\beta a_1$ . Les funcions de densitat de probabilitat  $z[m]|a_1$  i  $z[m]|a_2$  corresponents a suposar transmesos els símbols  $a[m] = a_1$  i  $a[m] = a_2$  es representen a la figura 1.30 per una relació  $\text{SNR}_D = 6$  dB.

- B. A la figura 1.30 representem també el càlcul corresponent de les probabilitats d'error parcials  $p(\epsilon_s|a_1)$  i  $p(\epsilon_s|a_2)$ . Pel cas  $a[m] = a_1$  que ens ocupa en aquests moments, podem veure en vermell l'àrea corresponent a la probabilitat d'error parcial. És a dir, quan  $z[m] \in (0, +\infty)$ ,

$$p(\epsilon_s|a_1) = \int_0^{+\infty} f_{n_D}(z - \beta a_1) dz \quad (1.147)$$

En el punt B anterior, acabem avaluant la probabilitat d'error parcial com l'àrea sota una Gaussiana. No obstant, el que farem en el següent punt del procediment és avaluar aquesta àrea en termes dels valor que ha de prendre el soroll  $n_D[m]$  per provocar un error de detecció, enlloc de fer-ho en termes dels valors que ha de prendre l'observació de símbol  $z[m]$  per provocar aquest mateix error de detecció. D'aquesta manera, podem centrar les Gaussians de la figura 1.30 a zero enlloc de situar-les sobre cada símbol.

- Pas 3:** A partir de l'expressió  $n_{D1} = z[m] + \frac{1}{2}\beta A$  del primer punt i de l'expressió de  $p(\epsilon_s|a_1)$  del punt anterior, si  $z[m]$  ha de caure en  $\mathcal{R}(a_2) = (0, +\infty)$ , forçosament el soroll  $n_{D1}$  ha de ser superior a  $\frac{1}{2}\beta A$  (se li suma una  $z[m]$  positiva). Això és el que provoca que el detector de símbol (que es



**Figura 1.30:** Representació del càlcul de les probabilitats  $p(\epsilon_s|a_1)$  i  $p(\epsilon_s|a_2)$  per  $\beta a_1 = -1$  i  $\beta a_2 = +1$ . La Gaussiana blava correspon a la f.d.p. de  $z[m]$  quan transmetem  $a[m] = a_1$ . La Gaussiana negra a quan transmetem  $a[m] = a_2$ . En vermell apareix l'àrea corresponen a les probabilitats d'error parcials quan l'observació  $z[m]$  cau fora de la seva regió de decisió. El quadrat vermell representa la frontera entre les dues regions de decisió o llindar de detecció  $\gamma = 0$ .

basa en un detector de signe) avalui un signe per l'observació  $z[m]$  que és diferent del signe del símbol que es suposa transmès:  $a_1 = -\frac{1}{2}A$ .

**Pas 4:** A partir del punt anterior, podem avaluar  $p(\epsilon_s|a_1)$  partint de la probabilitat de que el soroll  $n_{D1}$  ens porti l'observació  $z[m]$  fora de la regió de decisió del símbol  $a_1$  suposat transmès. Per tant,

$$p(\epsilon_s|a_1) = \text{Prob}[n_{D1} > \frac{1}{2}\beta A]. \quad (1.148)$$

**Pas 5:** Podem calcular la probabilitat anterior atès que disposem de la funció de densitat de probabilitat del soroll. Per tant,

$$p(\epsilon_s|a_1) = \int_{\frac{1}{2}\beta A}^{+\infty} f_{n_D}(n) dn. \quad (1.149)$$

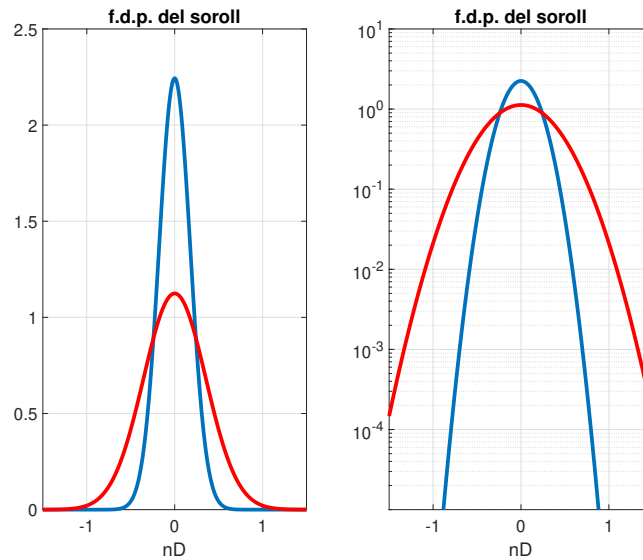
La funció de densitat de probabilitat (f.d.p.) del soroll,  $f_{n_D}(n_d)$ , apareix representada a la figura 1.31 pels dos valors de  $\sigma_{n_D} = \sqrt{P_{n_d}}$  que s'han utilitzat a l'exemple de la figura 1.26. Podem observar en escala logarítmica el decreixement molt ràpid (parabòlic) de les cues de la f.d.p. del soroll. Aquesta característica fa que, amb referència a una desviació  $\sigma_{n_D}$ , valors suficientment més grans es donin amb molt baixa densitat de probabilitat. És a dir, és poc probable que el soroll superi un determinat llindar  $\gamma > 0$  si  $n_D$  és positiu o que superi  $\gamma < 0$  per sota si  $n_D$  és negatiu, si aquest llindar (en valor absolut:  $|\gamma|$ ) es troba suficientment per sobre de  $\sigma_{n_D}$ .

La representació gràfica del càlcul de la probabilitat d'error parcial  $p(\epsilon_s|a_1)$  de l'equació (1.149) es troba a la figura 1.32, també pel cas  $p(\epsilon_s|a_2)$  que descriurem posteriorment. Pot comparar aquesta forma de càlcul amb l'equivalent que hem representat anteriorment a la figura 1.30.

**Pas 6:** Realitzem ara el càlcul de l'integral de l'equació (1.149). Hi substituïm l'expressió de la f.d.p. del soroll i efectuem el canvi de variable  $\lambda = n/\sigma_{n_D}$ ,

$$p(\epsilon_s|a_1) = \int_{\frac{1}{2}\beta A}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{n_D}} e^{-\frac{1}{2\sigma_{n_D}^2}n^2} dn = \int_{\frac{1}{2}(\beta A/\sigma_{n_D})}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\lambda^2} d\lambda \quad (1.150)$$

L'integral de la dreta no es pot calcular amb funcions elementals. Per tant, ens definim una nova



**Figura 1.31:** Representació de la f.d.p. del soroll  $n_D$  pels valors de  $\sigma_{n_D}$  de la figura 1.26. Esquerra: escala lineal. Dreta: escala logarítmica.

funció  $Q(\gamma)$  que utilitzarem àmpliament en el càlcul de probabilitats d'error,

- **Funció  $Q(\gamma)$ :** aquesta funció es defineix com l'àrea sota la cua de la f.d.p. Gaussiana de desviació  $\sigma = 1$ ,

$$Q(\gamma) = \int_{\gamma}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\lambda^2/2} d\lambda \quad (1.151)$$

Aquesta funció es troba disponible en moltes aplicacions de càlcul (p.ex., Matlab). També es pot expressar en termes de la funció d'error complementària  $\text{erfc}(x)$ .

Realitzi els següents exercicis:

- Exercici 1:** cerqui a Internet la funció d'error complementària i expressi la funció  $Q(\gamma)$  a partir d'ella. Demostri que:  $Q(\gamma) = \frac{1}{2} \text{erfc}(\gamma/\sqrt{2})$ . Representi gràficament la funció  $Q(\gamma)$  en Matlab.
- Exercici 2:** cerqui a Internet una aproximació asimptòtica (per valors grans d'  $x$ ) de la funció  $\text{erfc}(x)$ . Representi gràficament  $Q(\gamma)$  i l'aproximació que en resulta

**Pas 7:** Per tant, utilitzant la definició anterior de la funció  $Q(\gamma)$ , podem expressar finalment  $p(\epsilon_s|a_1)$  de la següent forma,

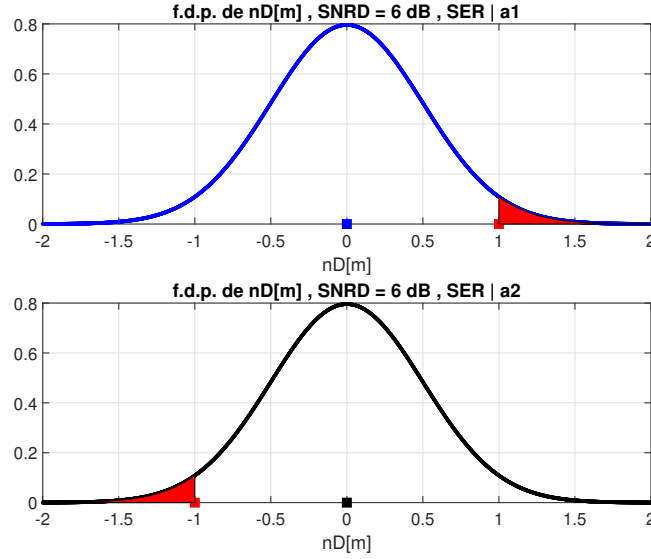
**Expressió final de  $p(\epsilon_s|a_1)$ :**

$$p(\epsilon_s|a_1) = Q\left(\frac{d'}{\sigma_{n_D}}\right), \quad d' = \frac{\beta A}{2} \quad (1.152)$$

on  $d' = \beta A/2$  és precisament la distància del símbol de la constel·lació en detecció (component útil de l'observació  $z[m]$ ) al llindar de decisió (frontera de decisió)  $\gamma = 0$ . Observi que el que és relevant en termes de probabilitat d'error és la relació entre  $d'$  i la desviació  $\sigma_{n_D}$  del soroll. En ésser  $Q(\cdot)$  una funció decreixent, com més augmenta aquesta relació, més disminueix la probabilitat d'error.

- Càlcul de  $p(\epsilon_s|a_2)$ :** suposem que el símbol transmès és  $a[m] = a_2 = +\frac{1}{2}A$ . Podríem calcular  $p(\epsilon_s|a_2)$  seguint exactament el mateix procediment que per  $p(\epsilon_s|a_1)$ . No obstant, podem simplificar el càlcul recorrent a simetries de la constel·lació,

**Pas 1:** El soroll associat a aquesta hipòtesi és  $n_{D2} = z[m] - \beta a_2 = z[m] - \frac{1}{2}\beta A$ .



**Figura 1.32:** Representació del càlcul de les probabilitats  $p(\epsilon_s|a_1)$  i  $p(\epsilon_s|a_2)$  per  $\beta a_1 = -1$  i  $\beta a_2 = +1$ . Les Gaussians corresponen a la f.d.p. de  $n_D[m]$ . En vermell apareix l'àrea corresponen a les probabilitats d'error parcials quan el soroll  $z[m]$  ens porta fora de la regió de decisió corresponent. El quadrat vermell representa la situació respecte del soroll  $n_D[m]$  de la frontera entre les dues regions de decisió o llindar de detecció  $\gamma = 0$ . Compari aquesta figura amb la figura equivalent 1.30.

**Pas 2:** Podem aplicar doncs la següent cadena d'igualtats:

$$p(\epsilon_s|a_2) = \text{Prob}[z[m] \notin \mathcal{R}(a_2)|a[m] = a_2] \quad (1.153a)$$

$$= \text{Prob}[z[m] \in \mathcal{R}(a_1)|a[m] = a_2] \quad (1.153b)$$

$$= \text{Prob}[n_{D2} < -\frac{1}{2}\beta A] \quad (1.153c)$$

És a dir, el soroll  $n_{D2}$  ha de ser negatiu i inferior a  $-\frac{1}{2}\beta A$  per produir un error de decisió.

**Pas 3:** En aquest moment en quan apliquem consideracions de simetria: com que la f.d.p. del soroll té simetria parell, podem escriure que,

$$p(\epsilon_s|a_2) = \text{Prob}[n_{D2} < -\frac{1}{2}\beta A] \quad (1.154a)$$

$$= \int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}\beta A} f_{n_D}(n) dn \quad (1.154b)$$

$$= \int_{\frac{1}{2}\beta A}^{+\infty} f_{n_D}(n) dn \quad (1.154c)$$

$$= p(\epsilon_s|a_1) \quad (1.154d)$$

És a dir, l'àrea sota la cua negativa de la f.d.p. és igual a l'àrea sota la cua positiva. Per tant totes dues probabilitats d'error són idèntiques.

**Pas 4:** Arribem doncs a l'expressió final cercada,

**Expressió final de  $p(\epsilon_s|a_2)$ :**

$$p(\epsilon_s|a_2) = Q\left(\frac{d'}{\sigma_{n_D}}\right) \quad , \quad d' = \frac{\beta A}{2} \quad (1.155)$$

4. Càlcul de la probabilitat d'error total  $p(\epsilon_s|a_1)$ : utilitzant l'equació (1.143) i les expressions anteriors finals per cadascuna de les dues probabilitats d'error parcials (les quals són idèntiques), arribem a l'expressió final per la probabilitat d'error total,

**Expressió final de  $p(\epsilon_s)$ :**

$$p(\epsilon_s) = Q\left(\frac{d'}{\sigma_{n_D}}\right) \quad , \quad d' = \frac{\beta A}{2} \quad (1.156)$$

És a dir, pel cas concret de la modulació 2-PAM amb símbols equiprobables, tenim que,

$$p(\epsilon_s) = p(\epsilon|a_1) = p(\epsilon|a_2) \quad (1.157)$$

Amés a més, com que per 2-PAM cada símbol es codifica amb un únic bit, obtenim de retruc l'expressió per la probabilitat d'error de bit  $p(\epsilon_b)$ ,

**Expressió final de  $p(\epsilon_b)$ :**

$$p(\epsilon_b) = Q\left(\frac{d'}{\sigma_{n_D}}\right) \quad , \quad d' = \frac{\beta A}{2} \quad (1.158)$$

Destaquem que, en general, no es dona una coincidència entre les probabilitats d'error de símbol i de bit.

**Probabilitats d'Error en funció de les relacions  $\frac{E_s^{\text{RX}}}{N_0}$  (EsNo) i  $\frac{E_b^{\text{RX}}}{N_0}$  (EbNo)**

En general, les probabilitats d'error s'expressen de la següent forma,

1. Probabilitat d'error de símbol: en funció de la relació EsNo.
2. Probabilitat d'error de bit: en funció de la relació EbNo.

En la secció anterior, per l'exemple de la modulació 2-PAM, hem acabat expressant la probabilitat d'error de símbol i la de bit en funció de la relació  $d'/\sigma_{n_D}$ . En aquesta secció, expressen aquest argument de la funció  $Q(\cdot)$  a partir de la relació  $EsNo$  o  $EbNo$ , segons pertogui. Tot seguit, finalitzem l'exemple de la modulació 2-PAM presentant el procediment que apliquem per altres modulacions,

1. Argument de la funció  $Q(\cdot)$ : examinem l'argument<sup>28</sup> de la funció  $Q(\cdot)$ . Sabem que en el denominador apareixerà sempre la desviació  $\sigma_{n_D}$  del soroll. Com que el seu quadrat és la potència de soroll:  $P_{n_D} = \sigma_{n_D}^2$  i sabem que a la sortida del filtre adaptat  $P_{n_D} = \frac{1}{2}N_0E_p$ , tenim que,

$$\frac{d'}{\sigma_{n_D}} = \sqrt{\frac{d'^2}{\sigma_{n_D}^2}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{4}\beta^2 A^2}{\frac{1}{2}N_0E_p}} = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{E_p^2 A^2 / L_c}{N_0E_p}} = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{E_p A^2 / L_c}{N_0}} \quad (1.159)$$

La idea bàsica serà sempre la d'expressar aquest argument de la funció  $Q(\cdot)$  com una arrel quadrada. Observi que també substituïm l'expressió  $\beta = E_p/\sqrt{L_c}$  perquè aparegui explícitament l'energia de pols. L'objectiu final és expressar aquest argument en termes de l'energia de símbol o de bit.

2. Potència Transmesa i Energia de Símbol o de Bit: partint de l'expressió de la potència transmesa, podem calcular l'energia de símbol o de bit en transmissió de forma general per qualsevol modulació com,

$$E_s^{\text{TX}} = b \cdot E_b^{\text{TX}} = P_s T_s \quad (1.160)$$

on  $b$  és el nombre de bits per símbol. Sabem que per un sistema de comunicacions banda base (sota les condicions examinades anteriorment) tenim que  $P_s = P_a E_p / T_s$ . En conseqüència,

$$E_s^{\text{TX}} = b \cdot E_b^{\text{TX}} = P_a E_p \Rightarrow E_p = \frac{E_s^{\text{TX}}}{A^2/4} = \frac{E_b^{\text{TX}}}{A^2/4} \quad (1.161)$$

<sup>28</sup>En el cas d'altres modulacions, els arguments de totes les funcions  $Q(\cdot)$  que puguin aparèixer en l'expressió de la probabilitat d'error.

on  $P_a = \sum_{i=1}^M p_i |a_i|^2$  és la potència de la constel·lació. Pel cas 2-PAM amb símbols equiprobables hem aplicat que  $P_a = \frac{1}{4}A^2$  i que  $b = 1$ . Un cop tenim l'energia de pols expressada en termes de l'energia de símbol de bit en transmissió, substituïm en l'equació final del punt anterior.

3. Expressió final: substituïm l'expressió de l'energia de pols en el primer punt (ens fixem només en l'energia de símbol), obtenint,

$$\frac{d'}{\sigma_{n_D}} = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{E_s^{\text{TX}}}{A^2/4} \frac{A^2}{L_c N_0}} \quad (1.162)$$

En aquest punt, reconeixem que l'energia de símbol que arriba al receptor s'expressa a partir de l'atenuació en potència  $L_c$  del canal com:  $E_s^{\text{RX}} = E_s^{\text{TX}}/L_c$ . Per tant, simplificant  $A^2$ ,

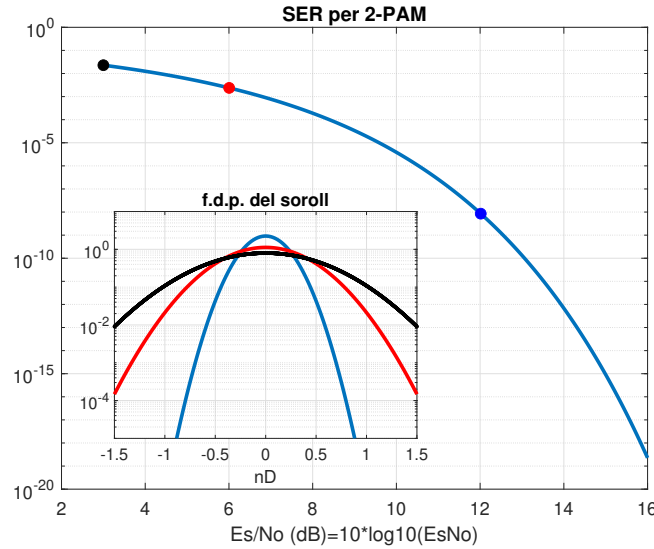
$$\frac{d'}{\sigma_{n_D}} = \sqrt{2 \frac{E_s^{\text{RX}}}{N_0}} = \sqrt{2 \frac{E_b^{\text{RX}}}{N_0}} \quad (1.163)$$

Finalment, obtenim l'expressió definitiva per les probabilitats d'error de símbol i de bit, determinades prèviament, substituint l'argument anterior de la funció  $Q(\cdot)$ ,

**Probabilitats d'Error: Expressions Definitives per 2-PAM:**

$$p(\epsilon_s) = Q\left(\sqrt{2 \frac{E_s^{\text{RX}}}{N_0}}\right) \quad , \quad p(\epsilon_b) = Q\left(\sqrt{2 \frac{E_b^{\text{RX}}}{N_0}}\right) \quad (1.164)$$

La gràfica de les probabilitats d'error de símbol (SER) corresponents a l'equació final (1.164) es presenten a la Figura 1.33 en la representació logarítmica habitual i en funció de la relació  $E_s/N_0$  en dB.



**Figura 1.33:** Representació de  $p(\epsilon_s)$  per 2-PAM en funció de la relació  $\frac{E_s^{\text{RX}}}{N_0}$  ( $E_s/N_0$ ). En el sub-gràfic es representen les f.d.p. del soroll corresponents als tres punts indicats.

Podem observar com la pendent de la probabilitat d'error de símbol (en eix logarítmic) augmenta ràpidament amb increments constants de la relació  $E_s/N_0$  en dB. Aquest efecte provoca que a partir d'un determinat punt, petits increments de potència (en dB) puguin fer decreixer molt la probabilitat d'error. Aquest efecte és encara molt més patent quan s'utilitzen tècniques de codificació de canal. Aquestes tècniques introdueixen bits de control de paritat en la seqüència binària, bits addicionals als pròpiament d'informació, que proporcionen al receptor certa capacitat correctora d'errors de transmissió.

Realitzi els següents exercicis:

1. **Exercici 1:** Volem transmetre un senyal 2-PAM per un canal de comunicacions que introdueix una atenuació  $L_c = 13$  dB. Les especificacions del sistema ens diuen que de mitjana només podem cometre 1 error de bit per Megabit transmès. Si el senyal no pot superar una banda de transmissió assignada de  $B_T = 2$  MHz, determini la màxima velocitat de bit  $r_b^{\max}$  a la que es podrà transmetre i a quina potència  $P_s$  ho haurà de fer. Suposi que s'escull un pols de conformació arrel quadrada de cosinus alçat amb factor de roll-off  $\alpha = 0.3$ . Pot utilitzar el gràfic de la Figura 1.33.

### 1.7.2 Càlcul de la Probabilitat d'Error: el cas 4-PAM polar

En aquesta secció analitzarem la detecció de senyals 4-PAM amb símbols equiprobables. Les constel·lacions en transmissió  $\mathcal{C}$  i en detecció  $\mathcal{C}_D$  venen donades per,

$$\mathcal{C} = \{a_1 = -\frac{3}{2}A, a_2 = -\frac{1}{2}A, a_3 = +\frac{1}{2}A, a_4 = +\frac{3}{2}A\} \quad (1.165)$$

$$\mathcal{C}_D = \{\beta a_1, \beta a_2, \beta a_3, \beta a_4\} \quad , \quad \beta = \frac{E_p}{\sqrt{L_c}} \quad (1.166)$$

El mètode descrit pel cas 2-PAM és fàcilment generalitzable i procedirem de forma més concisa. Establim les següents consideracions inicials,

1. En tenir símbols equiprobables, el criteri MAP, el qual proporciona mínima probabilitat d'error de símbol, és equivalent al CMD o criteri de mínima distància.
2. Les regions i fronteres de decisió associades al CMD es poden determinar fàcilment: la frontera de decisió entre dos símbols veïns es troba precisament en el punt mig entre tots dos símbols. Les quatre regions de decisió  $\mathcal{R}(a_i)$  venen donades pels intervals entre les següents tres fronteres o lindars de decisió,

$$\gamma_1 = -\beta A \quad , \quad \gamma_2 = 0 \quad , \quad \gamma_3 = +\beta A \quad (1.167)$$

És a dir,

$$\mathcal{R}(a_1) = (-\infty, \gamma_1) = (-\infty, -\beta A) \quad (1.168)$$

$$\mathcal{R}(a_2) = (\gamma_1, \gamma_2) = (-\beta A, 0) \quad (1.169)$$

$$\mathcal{R}(a_3) = (\gamma_2, \gamma_3) = (0, +\beta A) \quad (1.170)$$

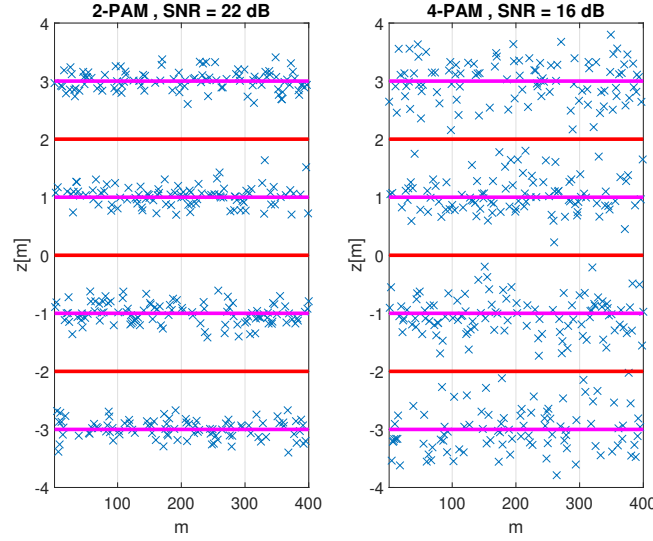
$$\mathcal{R}(a_4) = (\gamma_3, +\infty) = (+\beta A, +\infty) \quad (1.171)$$

A la figura 1.34 es poden observar els lindars de decisió sobre dues realitzacions de  $N_s = 400$  observacions de símbol a diferents  $\text{SNR}_D$ .

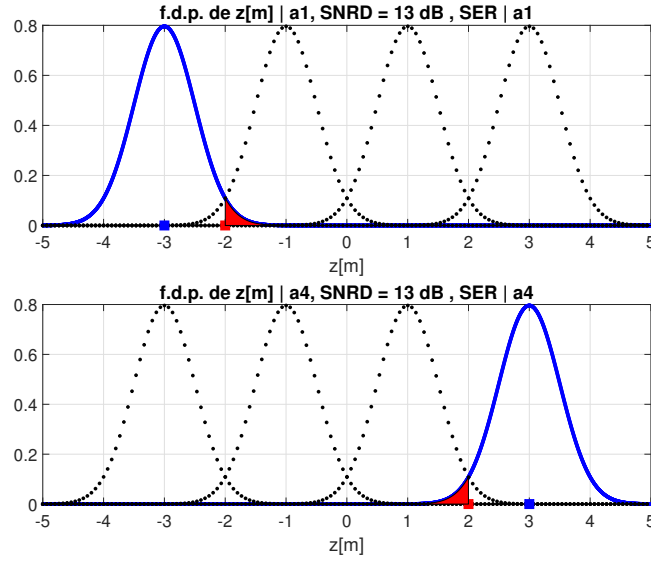
Com hem vist en la secció anterior, les probabilitats d'error parcials  $p(\epsilon_s|a_i)$  es poden determinar de les següents dues formes,

1. Centrant la f.d.p. del soroll  $n_D[m]$  en el símbol en detecció  $\beta a_i$  respectivament per construir la f.d.p. de l'observació  $z[m]$  condicionada a haver transmès  $a_i$ :  $f_{z[m]|a_i}(z[m]|a_i) = f_{n_D}(z[m] - \beta a_i)$ . Posteriorment avaluem l'àrea sota les cues de la corresponent Gaussiana centrada a  $\beta a_i$  que cauen fora de la regió de decisió  $\mathcal{R}(a_i)$  del símbol  $a_i$ . En el cas 4-PAM, tenim doncs la representació de la figura 1.35 pels dos símbols externs  $a_1$  i  $a_4$  i la de la figura 1.36 pel dos símbols interns  $a_2$  i  $a_3$ . Les àrees sota les respectives f.d.p.  $f_{z[m]|a_i}(z[m]|a_i)$  que s'utilitzen pel càlcul de cada probabilitat d'error parcial apareixen destacades en vermell.
2. Avaluant la magnitud de soroll  $n_D[m]$  que provoca un error de detecció quan es transmet cada símbol  $a_i$ . En aquest cas, a la figura 1.37 apareixen tant pels símbols interns com pels símbols externs de la constel·lació, les àrees (en vermell) sota la f.d.p. Gaussiana  $f_{n_D}(n_d)$  del soroll  $n_D[m]$  corresponents a

cada probabilitat d'error parcial. Aquestes àrees sota la f.d.p. Gaussiana del soroll s'avaluen sobre aquells intervals de soroll que provoquen en cada cas un error de detecció de símbol.



**Figura 1.34:** Fronteres de decisió (en vermell) corresponents als llindars  $\gamma_1 = -\beta A$ ,  $\gamma_2 = 0$  i  $\gamma_3 = +\beta A$  per 4-PAM polar. Escenari a partir de les dades de la figura 1.28.



**Figura 1.35:** Representació de les f.d.p. de l'observació de símbol  $z[m]$  quan es transmeten els dos símbols externs  $a_1$  i  $a_4$ . Els quadrats vermells representen les respectives fronteres de decisió i l'àrea vermella correspon a les probabilitats d'error parcials  $p(\epsilon_s|a_i)$  respectives. S'ha escollit  $A = 1$  i  $\beta = 2$ , amb una  $\text{SNR}_D$  de 13 dB, equivalent a una  $E_s N_0$  de 10 dB.

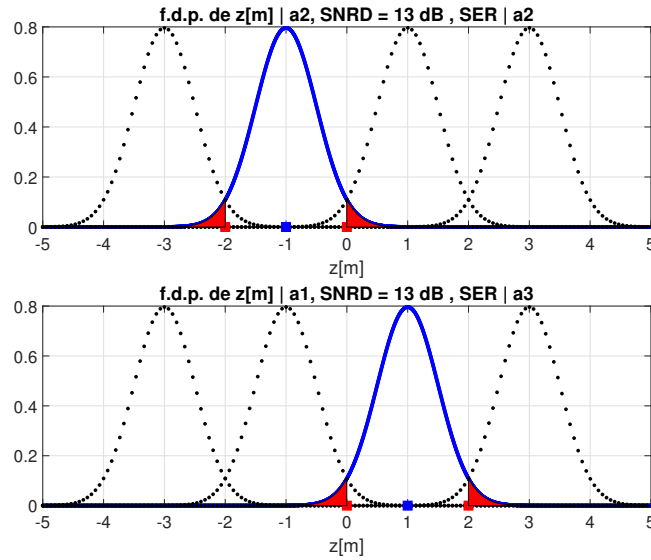
A partir de les figures, i basant-nos en l'exemple del cas 2-PAM, podem determinar fàcilment i de forma gràfica les quatre probabilitats d'error parcials  $p(\epsilon_s|a_i)$ ,

$$p(\epsilon_s|a_1) = p(\epsilon_s|a_4) = Q\left(\frac{d'}{\sigma_{n_D}}\right), \quad d' = \frac{1}{2}\beta A \quad (1.172)$$

$$p(\epsilon_s|a_2) = p(\epsilon_s|a_3) = 2Q\left(\frac{d'}{\sigma_{n_D}}\right) \quad (1.173)$$

on es palesa que els símbols interns tenen el doble de probabilitat d'error que els símbols externs degut al fet de tenir fronteres de decisió a totes dues bandes i a la mateixa distància. Finalment, aplicant la fórmula de la probabilitat d'error total i tenint en compte que els símbols són equiprobables:  $p_i = \frac{1}{M} = \frac{1}{4}$ , obtenim l'expressió





**Figura 1.36:** Representació de les f.d.p. de l'observació de símbol  $z[m]$  quan es transmeten els dos símbols interns  $a_2$  i  $a_3$ . Els quadrats vermells representen les respectives fronteres de decisió i l'àrea vermella correspon a les probabilitat d'error parcials  $p(\epsilon_s|a_i)$  respectives. Compari-ho amb la figura 1.36

de  $p(\epsilon_s)$  pel cas 4-PAM,

$$p(\epsilon_s) = \sum_{i=1}^M p_i p(\epsilon_s|a_i) = \frac{1+2+2+1}{4} Q\left(\frac{d'}{\sigma_{n_D}}\right) \quad (1.174)$$

$$= \frac{3}{2} Q\left(\frac{d'}{\sigma_{n_D}}\right) \quad (1.175)$$

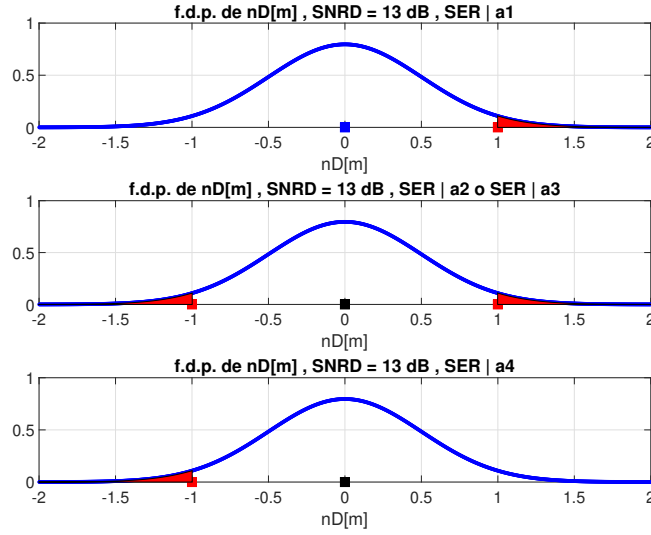
Només ens resta ara expressar el quocient  $d'/\sigma_{n_D}$  pel cas 4-PAM en termes de la relació  $E_s^{\text{RX}}/N_o$ . Es planteja doncs el següent exercici,

- **Exercici 1:** Determini la relació  $d'/\sigma_{n_D}$  pel cas 4-PAM en funció de la relació  $E_s^{\text{RX}}/N_o$ . Utilitzi com a guia el procediment emprat per 2-PAM.
- **Exercici 2:** Volem transmetre un senyal 4-PAM per un canal de comunicacions que introdueix una atenuació  $L_c = 13$  dB. Les especificacions del sistema ens diuen que de mitjana només podem cometre 1 error de bit per Megabit transmès (suposi que la probabilitat d'error de bit és la meitat de la de símbol). Si el senyal no pot superar una banda de transmissió assignada de  $B_T = 2$  MHz, determini la màxima velocitat de bit  $r_b^{\text{max}}$  a la que es podrà transmetre i a quina potència  $P_s$  ho haurà de fer. Suposi que s'escull un pols de conformació arrel quadrada de cosinus alçat amb factor de roll-off  $\alpha = 0.3$ . Com a jut,

1. pot utilitzar Matlab per avaluar la funció  $Q(\cdot)$  com  $Q(x) = \frac{1}{2} \text{erfc}(x/\sqrt{2})$ .
2. La inversa de la funció  $\text{erfc}$  de Matlab és la funció  $\text{erfcinv}$  (és a dir,  $y = \text{erfc}(x)$  vol dir que  $x = \text{erfcinv}(y)$ ).

Adicionalment, es demana:

1. Compari el resultat obtingut amb l'exercici equivalent pel cas 2-PAM.
2. Es vol utilitzar aquest sistema per transmetre video d'una càmera de seguretat amb resolució  $200 \times 200$  pixels, on cada pixel d'un frame (imatge) es codifica amb 256 nivells de gris (1 byte). Quants frames per segon podem transmetre i cada quants frames en tindrem algun (en mitjana) que contingui un pixel erroni en el receptor? O bé, quants pixels erronis tenim en mitjana per cada frame?



**Figura 1.37:** Representació del càlcul de les probabilitat d'error parcials de les figures 1.35 i 1.36 realitzada sobre la f.d.p. del soroll  $n_D[m]$ . Les posició relativa de les fronteres de decisió apareix com un quadrat vermell. El gràfic central correspon als dos símbols interns de la constel·lació en detecció. Els gràfics inferior i superior als símbols externs  $a_1$  i  $a_4$  respectivament.

### 1.7.3 Càlcul de la Probabilitat d'Error: el cas $M$ -PAM polar

Es plantegen els següents exercicis per analitzar el detector i la probabilitat d'error associada pel cas  $M$ -PAM polar amb símbols equiprobables,

1. **Exercici 1:** els símbols  $a_i$  de la constel·lació  $M$ -PAM venen donats per  $a_i = a_1 + (i - 1)A$ , amb  $a_1 = -\frac{M-1}{2}A$ . Utilitzant el CMD, representi les símbols de la constel·lació en detecció  $\mathcal{C}_D$  (recordi el factor  $\beta$ ), les regions de decisió  $\mathcal{R}(a_i)$  i indiqui en quins punts es troben les fronteres d'aquestes regions.
2. **Exercici 2:** Calculi les probabilitats d'error parcials  $p(\epsilon_s|a_i)$  pels  $M$  símbols de la constel·lació. Pot utilitzar el mateix procediment gràfic emprat per 4-PAM polar. Deixi el resultat en termes de la funció  $Q(d'/\sigma_{n_D})$  i defineixi la magnitud  $d'$  corresponent.
3. **Exercici 3:** A partir de les probabilitats d'error parcial calculades a l'exercici anterior, mostri que la probabilitat d'error total ve donada per

$$p(\epsilon_s) = 2 \left(1 - \frac{1}{M}\right) Q\left(\frac{d'}{\sigma_{n_D}}\right). \quad (1.176)$$

Pot comprovar que la fórmula anterior és coherent amb les expressions calculades anteriorment per 2-PAM i 4-PAM polars.

4. **Exercici 4** Expressi la relació  $d'/\sigma_{n_d}$  per  $M$ -PAM polar en funció de la relació  $E_s^{\text{RX}}/N_0$ . Li caldrà utilitzar la fórmula corresponent a la suma de quadrats de sencers,

$$\sum_{n=1}^N n^2 = \frac{1}{6}N(N+1)(2N+1) \quad (1.177)$$

Pot comprovar que és certa per  $N = 1, 2, 3, \dots$ . Quan hagi obtingut l'expressió demanada, comprovi que li dona el mateix que pels casos 2-PAM i 4-PAM polars quan fa la substitucions  $M = 2$  i  $M = 4$ , respectivament.

## 1.8 Apèndixs

En aquesta secció incloem els desenvolupaments matemàtics utilitzats per calcular algunes expressions anteriors. S'introdueixen en aquests apèndixs per facilitar en les exposicions anteriors la comprensió d'aspectes pràctics més essencials dels sistemes de comunicacions.

### 1.8.1 Esperança Estadística: Definició i Propietats

L'esperança estadística, valor esperat o mitja d'una variable aleatòria ve definida de la següent forma:

1. Variables Aleatòries Discretes amb alfabet  $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_M\}$  i probabilitats  $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_M\}$ :

$$\mathbb{E}[A] = \sum_{i=1}^M p_i a_i \quad (1.178)$$

És a dir, si fem  $N$  experiments en cadascun dels quals obtenim una realització  $a[k] \in \mathcal{A}$  de la variable aleatòria  $A$ , es compleix que la mitja sobre els experiments verifica,

$$\mathbb{E}[A] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} (a[1] + a[2] + \dots + a[N]) \quad (1.179)$$

2. Variables Aleatòries Continues amb funció de densitat de probabilitat  $f_X(x)$  definida per tota la recta real  $-\infty < x < +\infty$ :

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \quad (1.180)$$

És a dir, si fem  $N$  experiments en cadascun dels quals obtenim una realització  $x[k]$  de la variable aleatòria  $X$ , es compleix que la mitja sobre els experiments verifica,

$$\mathbb{E}[X] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} (x[1] + x[2] + \dots + x[N]) \quad (1.181)$$

L'operador esperança, ja sigui per una variable aleatòria discreta o continua, verifica les propietats següents:

1. Linealitat: Si  $A$  i  $B$  són variables aleatòries i  $\alpha$  i  $\beta$  factors deterministes (constants que no varien quan fem experiments) i, extraïem realitzacions diferents de la variable aleatòria  $S = \alpha A + \beta B$ , aleshores,

$$\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[\alpha A + \beta B] = \alpha \mathbb{E}[A] + \beta \mathbb{E}[B]. \quad (1.182)$$

És a dir, l'esperança de la combinació lineal de dues variables aleatòries (o de més) és sempre la mateixa combinació lineal de les esperances individuals de cadascuna de les variable aleatòries. Observem que els factors deterministes o constants, surten fora de l'operació esperança.

2. Esperança de la funció d'una variable aleatòria: si tenim una variable aleatòria  $Y$  funció d'una altra variable aleatòria  $X$ :  $Y = g(X)$ , llavors l'esperança d'  $Y$  es calcula com:

- (a) Variables Aleatòries Discretes:

$X$  amb alfabet  $\mathcal{A}_X = \{x_1, \dots, x_M\}$  i probabilitats  $\mathcal{P}_X = \{p_1, \dots, p_M\}$ .

$Y$  amb alfabet  $\mathcal{A}_Y = \{y_1 = g(x_1), \dots, y_M = g(x_M)\}$  i probabilitats  $\mathcal{P}_Y = \mathcal{P}_X$  és la variable aleatòria  $Y = g(X)$  resultat d'aplicar la funció  $g(\cdot)$  a cada possible valor de la variable aleatòria  $X$ .

El valor esperat d'  $Y$  es calcula com,

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{i=1}^M p_i y_i = \sum_{i=1}^M p_i g(x_i) \quad (1.183)$$

(b) Variables Aleatòries Continues (Teorema Fonamental de l'Esperança):

El valor esperat de la variable aleatòria  $Y = g(X)$  es calcula de la següent forma, en funció de les funcions de densitat de probabilitat respectives  $f_Y(y)$  i  $f_X(x)$ ,

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx \quad (1.184)$$

Observi el paral·lelisme amb el cas de la variable aleatòria discreta. Apliquem l'expressió de la dreta de la igualtat anterior quan  $f_Y(y)$  és desconeguda o complicada de calcular.

3. Esperança del producte de dues variables aleatòries  $X$  i  $Y$ : si i només si dues variables aleatòries  $X$  i  $Y$  són estadísticament independents, aleshores,

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]. \quad (1.185)$$

És a dir, l'esperança del producte de les variables és el producte de les esperances de cadascuna de les variables. L'afirmació recíproca no és en general certa.

### 1.8.2 Apèndix: Càlcul de la Potència Transmesa

Partim de la definició de potència aplicada al senyal de comunicacions  $s(t)$ , on calculem la mitja temporal de la potència instantània  $P_s(t)$  del senyal  $s(t)$ ,

$$P_s = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} P_s(t) dt \quad (1.186)$$

La potència temporal, com sabem, ve definida pel valor esperat del mòdul al quadrat del senyal aleatori  $s(t)$ . Per tant, podem escriure,

$$P_s(t) = \mathbb{E}[|s(t)|^2] = \mathbb{E}[s(t)s^*(t)] \quad (1.187)$$

I ara substituïm l'expressió per  $s(t)$  en la definició anterior,

$$P_s(t) = \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a[k] p(t - kTs) \right) \left( \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} a^*[k'] p^*(t - k'Ts) \right) \right] \quad (1.188)$$

Observi que en el lloc de  $s^*(t)$  hem conjugat els factors dins del sumatori i hem canviat l'índex del sumatori de  $k$  a  $k'$  a fi de poder distingir els termes que provenen del primer factor  $s(t)$  dels termes que provenen del segon factor  $s^*(t)$ . Tot seguit efectuem el producte dels dos sumatoris i reagrupem termes,

$$P_s(t) = \mathbb{E} \left[ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} a[k] a^*[k'] p(t - kTs) p^*(t - k'Ts) \right] \quad (1.189)$$

Ara podem passar l'operació esperança a l'interior dels dos sumatoris (utilitzant les propietats de l'operador esperança). Com que les variables aleatòries de l'expressió anterior estan agrupades en el primer factor  $a[k] a^*[k']$  i els termes deterministes en el segon factor  $p(t - kTs) p^*(t - k'Ts)$ , el segon factor pot sortir fora de l'operació esperança. Per tant, ens queda,

$$P_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}[a[k] a^*[k']] p(t - kTs) p^*(t - k'Ts) \quad (1.190)$$

Si ara examinem el terme  $\mathbb{E}[a[k] a^*[k']]$  en funció de la caracterització estadística dels símbols  $a[k]$  continguda a l'inici, observem el següent,

1. Per  $k' = k$  tenim que

$$\mathbb{E}[a[k]a^*[k']] \Big|_{k'=k} = \mathbb{E}[a[k]a^*[k]] = \mathbb{E}[|a[k]|^2] = P_a, \quad (1.191)$$

és la potència mitjana dels símbols  $a[k]$ .

2. Per  $k' \neq k$ , tenim que els símbols  $a[k]$  i  $a[k']$  són estadísticament independents. En conseqüència,

$$\mathbb{E}[a[k]a^*[k']] \Big|_{k' \neq k} = \mathbb{E}[a[k]] \mathbb{E}[a^*[k']] = m_a m_a^* = 0 \cdot 0 = 0. \quad (1.192)$$

Aplicant els dos resultats anteriors per  $\mathbb{E}[a[k]a^*[k']]$ , podem prescindir del sumatori intern en l'índex  $k'$  i utilitzant que  $p(t - kT_s)p^*(t - kT_s) = |p(t - kT_s)|^2$  podem simplificar l'expressió de  $P_s(t)$  a,

$$P_s(t) = P_a \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |p(t - kT_s)|^2 \quad (1.193)$$

Tot seguit, passem a calcular la mitja temporal de l'expressió anterior per obtenir la potència transmesa  $P_s$ ,

$$P_s = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} P_s(t) dt = P_a \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |p(t - kT_s)|^2 dt \quad (1.194)$$

En aquest punt observem que el senyal que apareix com integrand (terme que integrem),

$$q(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |p(t - kT_s)|^2, \quad (1.195)$$

és un senyal periòdic amb període  $T_s$ : es pot comprovar fàcilment verificant que  $q(t + T_s) = q(t)$ . Sabem també que per a un senyal periòdic, la seva mitja temporal coincideix amb la mitja sobre un període

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} q(t) dt = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} q(t) dt \quad (1.196)$$

Això últim ens permet eliminar el límit en el càlcul de la potència. Per tant,

$$P_s = P_a \cdot \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |p(t - kT_s)|^2 dt = \frac{P_a}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^{T_s} |p(t - kT_s)|^2 dt \quad (1.197)$$

Ara podem re-escriure l'integral amb el canvi de variable  $t' = t - kT_s$  amb el qual  $dt' = dt$ . Atès que amb el canvi de variable també canvien els límits d'integració, tenim que,

$$P_s = \frac{P_a}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-kT_s}^{T_s - kT_s} |p(t')|^2 dt' = \frac{P_a}{T_s} \int_{-\infty}^{+\infty} |p(t')|^2 dt' \quad (1.198)$$

En l'últim pas hem utilitzat que si superposem tots els intervals d'integració  $(-kT_s, -kT_s + T_s) = (-kT_s, -(k-1)T_s)$  els  $k$ , com que aquests intervals disjunts cobreixen tota la recta real, és equivalent a integrar sobre l'interval  $(-\infty, +\infty)$ . Finalment, obtenim el següent resultat pel càlcul de la potència transmesa,

- Càlcul de la Potència Transmesa:

$$P_s = \frac{P_a \cdot E_p}{T_s}, \quad E_p = \int_{-\infty}^{+\infty} |p(t)|^2 dt \quad (1.199)$$

on el paràmetre  $E_p$  es defineix com l'energia de pols i  $P_a = \sum_{i=1}^M p_i |a_i|^2$  és la potència de la constel·lació. Destaquem que en la definició d'  $E_p$  hem tornat a deixar la integral en termes de  $t$  enlloc de  $t'$ .