

COMUNICACIONS ANALÒGIQUES I DIGITALS

Manual de Pràctiques

320107 - CAD - Grau en Enginyeria de Sistemes Audiovisuals
Escola Superior d'Enginyeries Industrial, Aeroespacial i Audiovisual de Terrassa
Universitat Politècnica de Catalunya

Professors: Francesc Molina i Josep Sala
E-mail: {francesc.molina, josep.sala}@upc.edu

Índex de Pràctiques

0	Repàs de MATLAB	2
1	Modulacions Digitals en Banda Base (I)	4
1.1	Mostratge	4
1.2	Digitalització	5
1.3	Codificació PAM	5
1.4	Conformació del Pols	6
2	Modulacions Digitals en Banda Base (II)	7
2.1	Generació de Senyal	7
2.2	Canal Additiu amb Soroll Gaussià Blanc	7
2.3	Filtrat Adaptat i Mostratge Òptim	8
2.4	Relació Senyal-a-Soroll	8
3	Modulacions Digitals en Banda Base (III)	9
3.1	Detector de Símbol 2-PAM	9
3.2	Detector de Símbol 4-PAM	10
3.3	Probabilitats d'Error de Símbol i de Bit	10
4	Modulacions Digitals Passabanda	12
4.1	Modulació i Desmodulació IQ: Anàlisi en Absència de Soroll	12
4.2	Modulació i Desmodulació IQ: Anàlisi en Presència de Soroll	14
4.3	Constel·lacions Passabanda	14
4.4	Canal Additiu amb Soroll Gaussià Blanc	15
4.5	Part Opcional: Canal Multiplicatiu en Absència de Soroll	15

COMUNICACIONS ANALÒGIQUES I DIGITALS

Pràctica 0: Repàs de MATLAB

L'objectiu d'aquesta pràctica és repassar coneixements bàsics de MATLAB, de Teoria i Laboratori de l'assignatura Senyals i Sistemes. Aquests coneixements, relatius a la generació i processament de senyals, s'utilitzaran en les pràctiques de Laboratori de l'assignatura Comunicacions Analògiques i Digitals.

Utilitzant els tutorials proporcionats a la pàgina web de l'assignatura es demana escriure un *script* de prova en un fitxer MATLAB executable (Pestanya Home > New Script) de nom "P0.m" que realitzi les següents operacions (si no li dóna temps pot acabar el programa en l'horari de lliure disponibilitat del laboratori).

RECORDI: És obligatori i necessari executar l'script de prova per verificar que les operacions que demana cada apartat es realitzen correctament! L'alumne/a haurà de realitzar la pràctica en les hores assignades per les sessions de laboratori per a que el professor pugui efectuar la corresponent supervisió i avaluació. Aquests requeriments són també d'aplicació a totes les pràctiques posteriors.

NOTA: Pot trobar ajut en la documentació en línia de MATLAB. Executant `help` accedeix als "toolbox" i funcions associades: les funcions més habituals les trobarà llistades en els primers "toolbox" del llistat.

Es recomana realitzar la pràctica mantenint la següent estructura de programa:

```
%% Ex 1.
```

Omplir aquí el codi necessari.

```
%% Ex 2.
```

Omplir aquí el codi necessari.

```
...
```

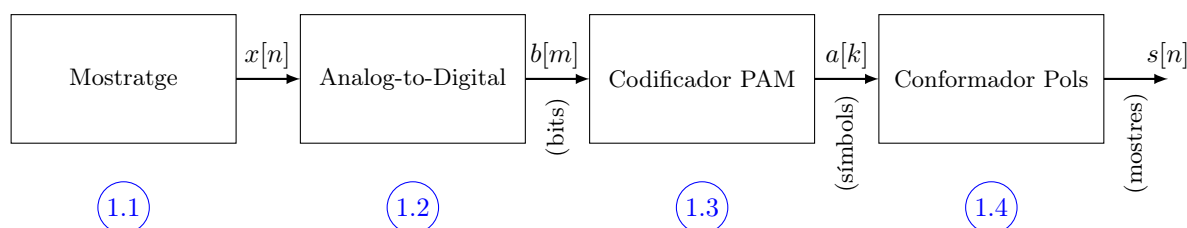
- 1) Assigni a la variable `x1` un vector de longitud `N1` amb tots els seus components a zero (assigni a la variable `N1` un nombre sencer arbitrari i més gran que 1 al començament del programa: com a regla general treballi sempre amb variables, evitant utilitzar números en el cos del programa, això li permetrà controlar el valor de la variable, en aquest cas `N1`, en un únic punt del programa).
- 2) Assigni a la variable `x2` un vector de longitud `N2` amb tots els seus components a 1.
- 3) Generi un nombre aleatori `x3` uniformement distribuït dins l'interval $(0, 1)$. (NOTA: llegeixi atentament la descripció de les funcions `rand` i `randn` executant `help rand` i `help randn`). Comprovi també com cada crida a les funcions `rand` i `randn` generen cada vegada nombres diferents.
- 4) Utilitzant la funció escollida en l'apartat 3, generi un nombre aleatori `x4` uniformement distribuït dins l'interval $(0, +10)$. Executi diverses vegades aquesta operació per assegurar-se que en cada cas es genera (aleatòriament) un nombre diferent.
- 5) Utilitzant la funció escollida en l'apartat 3, generi un nombre aleatori `x5` uniformement distribuït dins l'interval $(-10, +10)$. Executi diverses vegades aquesta operació per assegurar-se que en cada cas es genera (aleatòriament) un nombre diferent.
- 6) Assigni a la variable `x6` un vector de longitud `N6` on totes les seus components són nombres aleatoris uniformement distribuïts en l'interval $(0, 1)$. Extregui del vector `x6` la component situada en la posició 13 (caldrà escollir `N6 > 13`) i mostri-la per pantalla.

- 7) Obri una figura nova en blanc. Executi la instrucció diverses vegades per comprovar que en cada execució s'obre una figura nova.
- 8) Obri una figura nova en blanc i representi-hi el vector x_6 utilitzant les funcions `plot` i `stem`. Llegeixi atentament la descripció de les funcions anteriors en el help de MATLAB.
- 9) Assigni a la variable x_9 el nombre complex $2+3j$ i calculi els següents paràmetres mostrant-los per pantalla: (a) el mòdul de x_9 ; (b) l'argument de x_9 expressat en radians; (c) l'argument x_9 expressat en graus.
- 10) Assigni a la variable x_{10} un vector de longitud $N_{10}=N_6$ que conté, en cada posició, el respectiu component del vector x_6 elevat al quadrat. Llegeixi la operació "element-wise power" al help de MATLAB o bé accedeixi a "array power" al menú d'operadors fent `help ops`.
- 11) Assigni a la variable x_{11} un vector de longitud $N_{11}=1024$ que conté mostres d'un senyal cosinus de freqüència $f_x=100$ Hz mostrejat a una freqüència $f_s=900$ Hz.
- 12) Assigni a la variable x_{12} la transformada discreta de Fourier de $N_{\text{points}}=1024$ punts de la seqüència cosinus de l'apartat 11.
- 13) Llegeixi en la documentació de MATLAB l'operativa de la funció `subplot` per poder dividir una figura en subfigures.
- 14) Utilitzant la informació obtinguda en l'apartat anterior: (a) obri una figura en blanc; (b) representi en la meitat superior de la figura el senyal x_{11} ; (c) representi en la meitat inferior de la figura el mòdul de x_{12} .
- 15) Generi en x_{15} el senyal cosinus de l'apartat 11 amb un altre valor f_x mantenint la mateixa freqüència de mostreig, i visualitzi els gràfics (b) i (c) de l'apartat 14.
- 16) Assigni a la variable x_{16} un vector de $N_{16}=1000$ components aleatòries de distribució Gaussiana amb mitjana $\mu=10$ i variància 1. Calculi mitjana i variància empíricament fent ús de les funcions `mean` i `var`.
- 17) Assigni a la variable x_{17} un vector de $N_{17}=1000$ components aleatòries de distribució Gaussiana amb mitjana $\mu=10$ i variància $s=2$. Calculi mitjana i variància empíricament.
- 18) Assigni a la variable x_{18} una matriu de $N_{18}=2048$ files i $M_{18}=8$ columnes de components aleatoris independents i de distribució normal de mitjana 0 i variància 1.
- 19) Escrigui un llac `for` que representi, utilitzant la instrucció `subplot`, cadascuna de les columnes de la matriu x_{18} de l'apartat anterior.
- 20) Assigni a la variable x_{20} un vector que contingui tots els nombres senars de 1 fins a $N_{20}=100$ sense utilitzar un llac `for`. Consulti l'ús de l'operador colon ":" al help de MATLAB.
- 21) Assigni a la variable x_{21} un vector que contingui tots els nombres sencers de 1 fins a $N_{21}=100$ en salts de 5 sense utilitzar un llac `for`. Consulti l'ús de l'operador colon ":" al help de MATLAB.
- 22) Defineixi un pols rectangular discret p de $L=10$ mostres. Assigni a la variable x_{22} la convolució discreta de p amb ell mateix. Visualitzi el resultat utilitzant la funció `stem`.
- 23) Defineixi un vector t de 10^4+1 valors equiespaits en l'interval $[-1, +1]$. Defineixi, en la variable p , un pols rectangular analògic $p(t) = \Pi(t)$. Visualitzi p en funció de t . Assigni a la variable A l'autocorrelació de $p(t)$. Per fer-ho, calculi la convolució discreta de p i p , i escali el resultat per $D=t(2)-t(1)$. Defineixi un nou vector t_2 de $2 \cdot 10^4+1$ valors equiespaits en l'interval $[-2, +2]$. Visualitzi A en funció de t_2 .

COMUNICACIONS ANALÒGIQUES I DIGITALS

Pràctica 1: Modulacions Digitals en Banda Base (I)

L'objectiu d'aquesta pràctica és construir un transmissor en banda base amb font d'informació analògica que opera sota un esquema de modulació lineal M -ary Pulse Amplitude Modulation (PAM). El transmissor a construir consta de 4 blocs principals:



La idea principal és simular la transmissió de dades d'un dispositiu que recoll·lecta informació (mostratge d'un senyal analògic) $x[n]$, i l'envia, a través de $s[n]$ ($s(t)$ sota el model discret equivalent), a un altre dispositiu mitjançant una transmissió M-PAM. Per simplicitat, el bloc Analog-to-Digital es dona fet a través de la funció `analogToDigital.m`. Els blocs restants s'analitzen a continuació.

1.1 Mostratge

Suposi que es realitza el mostratge d'un senyal passabaixes $x(t)$ generat aleatòriament com a combinació de $K = 4$ sinusoides. Aleshores, el senyal mostrejat (seqüència) $x[n]$ es pot escriure com

$$x[n] = \sum_{k=1}^K A_k \cos(2\pi F_k n + \phi_k) \quad , \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.1)$$

- A_k és un nombre aleatori segons una funció de densitat de probabilitat uniforme en $(0, 1)$.
- F_k és un nombre aleatori segons una funció de densitat de probabilitat uniforme en $(0, B)$.
- ϕ_k és un nombre aleatori segons una funció de densitat de probabilitat uniforme en $(0, 2\pi)$.

1) Escriu una funció que generi la seqüència aleatòria x de N mostres amb K sinusoides i paràmetre B :

```

function [ n, x ] = genRndSignal( N, B, K )
    % N és el nombre de mostres.
    % B és el paràmetre que controla l'ample de banda.
    % K és el nombre de sinusoides superposades.
    % n és el vector columna 1,2,...,N.
    % x és un vector columna de N mostres.

    Omplir aquí el codi necessari.

end
  
```

- 2) Utilitzi la funció anterior per generar una seqüència aleatòria x de $N=200$ mostres a partir de $K=4$ sinusoides i paràmetre $B=0.1$.
- 3) Visualitzi la seqüència obtinguda en el domini temporal i freqüencial. Utilitzi la instrucció `subplot` per dibuixar a esquerra i dreta ambdues gràfiques. Comprovi que es tracta d'un senyal en banda base.

1.2 Digitalització

Un cop realitzat el mostratge del senyal analògic es procedeix a obtenir-ne una seqüència binària $b[n] \in \{0,1\}$.

- 4) Utilitzi la funció `analogToDigital` que es proporciona per obtenir la seqüència binària b associada al senyal d'entrada x generat en l'apartat anterior.

```
function [ b ] = analogToDigital( x )

    partition = linspace(-2, 2, 15);
    codebook = [0 0 0 0 ; 0 0 0 1 ; 0 0 1 0 ; 0 0 1 1 ; ...
                0 1 0 0 ; 0 1 0 1 ; 0 1 1 0 ; 0 1 1 1 ; ...
                1 0 0 0 ; 1 0 0 1 ; 1 0 1 0 ; 1 0 1 1 ; ...
                1 1 0 0 ; 1 1 0 1 ; 1 1 1 0 ; 1 1 1 1 ];
    b = zeros(4*length(x), 1);
    for i = 1:length(x)
        [a, ind] = find((x(i) - partition) < 0, 1);
        if isempty(ind), b((1:4)+4*(i-1)) = codebook(16, :)';
        else, b((1:4)+4*(i-1)) = codebook(ind, :)';
        end
    end
end
```

- 5) Per simplicitat, es treballarà únicament amb els primers 80 dígit de la seqüència b . Executi la instrucció `b=b(1:80);` per redefinir b . Visualitzi el resultat obtingut.

1.3 Codificació PAM

Després d'obtenir la seqüència binària $b[n]$, s'assigna a cada grup de dígit binaris un símbol de la constel·lació segons la codificació PAM emprada. En aquesta pràctica, es treballa amb les constel·lacions PAM següents:

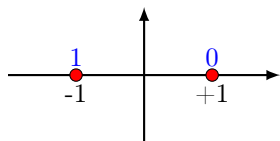


Figura 1.1: 2-PAM Polar.

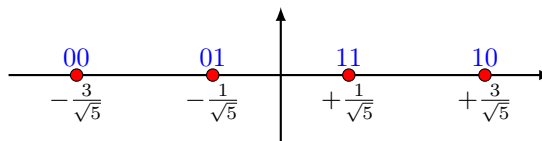


Figura 1.2: 4-PAM Polar.

En ambdues constel·lacions, els símbols són equiprobables. En blau apareixen les assignacions de dígit binaris a cadascun dels símbols de la constel·lació. En negre es mostra el valor de cada símbol PAM.

- 6) Calculi teòricament la potència de símbol de cadascuna de les constel·lacions anteriors.
- 7) Dedueixi quants símbols són necessaris per transmetre b utilitzant constel·lacions 2-PAM i 4-PAM.
- 8) Escrigui, per a cada constel·lació, una funció que assigni un símbol PAM a cada grup de dígit binaris segons l'assignació proposada en les figures anteriors.

```
function [ a ] = mapper2PAM( b )
    Omplir aquí el codi necessari.
end
```

```
function [ a ] = mapper4PAM( b )
    Omplir aquí el codi necessari.
end
```

- 9) Comprovi el correcte funcionament de les funcions anteriors codificant: (i) pel cas 2-PAM, la seqüència binària $b1=[0 \ 1 \ 1 \ 0]$; (ii) pel cas 4-PAM, la seqüència binària $b2=[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0]$.
- 10) Generi les seqüències de símbols a_2PAM i a_4PAM resultants d'aplicar les funcions de l'apartat 8) al senyal binari b . Representi els símbols de cada seqüència utilitzant la instrucció `stem`.
- 11) Comenti, des del punt de vista del transmissor, per quin motiu utilitzaria la constel·lació 4-PAM de la Figura 1.2 en comptes de la constel·lació 2-PAM de la Figura 1.1.
- 12) Comenti, des del punt de vista del receptor i segons les constel·lacions anteriors, què comporta més dificultat, la detecció de símbols 2-PAM o 4-PAM. Per quin motiu?

1.4 Conformació del Pols

Un cop generades la seqüències anteriors, cada símbol $a[k]$ es transmet sobre una versió desplaçada del mateix pols $p_L[n]$ (de L mostres) tal i com es mostra a la primera igualtat. Alternativament, i de manera més curta, es pot expressar $s[n]$ mitjançant la convolució discreta de la seqüència ampliada $\bar{a}[n]$ i el pols $p_L[n]$:

$$s[n] = \sum_k a[k]p_L(n - kN_{ss}) = \bar{a}[n] * p_L[n]. \quad (1.2)$$

N_{ss} és el nombre de mostres per símbol. En aquest cas, la seqüència ampliada $\bar{a}[n]$ conté cadascun dels símbols de $a[n]$ intercalats per $N_{ss}-1$ zeros: $a[1], 0_1, \dots, 0_{N_{ss}-1}, a[2], 0_1, \dots, 0_{N_{ss}-1}, a[3], 0_1, \dots, 0_{N_{ss}-1}, \dots$

- 13) Escrigui una funció `modula.m` que generi un senyal s segons l'equació anterior a partir d'un vector que conté la versió discreta del pols de conformació p . Per fer-ho:

Primer, generi la seqüència ampliada \bar{a} . Pot consultar el funcionament de la funció `upsample` al help de MATLAB.

Segon, realitzi la convolució discreta de la seqüència ampliada amb el pols. Consulti a la documentació de MATLAB quina és la funció més adient per realitzar tal convolució.

```
function [ s ] = modula( a, p, Nss )

% a és el vector de símbols.

% p és el vector que conté les mostres del pols.

% Nss és el nombre de mostres per símbol.

Omplir aquí el codi necessari.

end
```

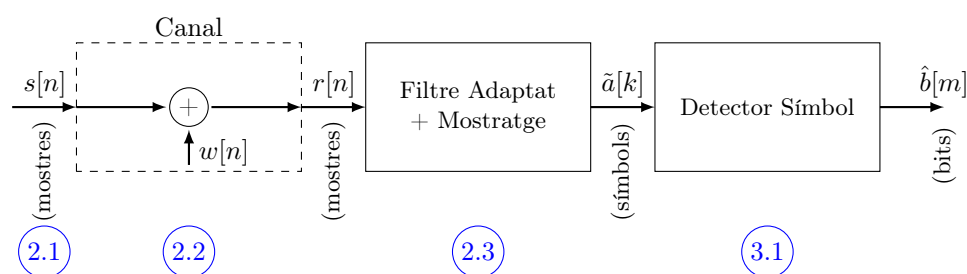
- 14) Generi un pols de conformació p rectangular de $L=4$ mostres i energia 1. Calculi l'energia del pols E_p . Obtingui s_2PAM i s_4PAM modulant les seqüències de símbols a_2PAM i a_4PAM amb la funció generada en l'apartat anterior i $Nss=4$ mostres per símbol.
- 15) Representi temporal i freqüencialment ambdós senyals modulats.

Ha de tenir clar que els senyals obtinguts s_2PAM i s_4PAM constitueixen transmissions en banda base utilitzades, per exemple, en alguns estàndards de comunicacions Ethernet. El corresponent receptor i la recuperació dels dígits transmesos es reserva per a pràctiques següents.

COMUNICACIONS ANALÒGIQUES I DIGITALS

Pràctica 2: Modulacions Digitals en Banda Base (II)

Aquesta pràctica continua la feina deixada a la pràctica anterior, on es dissenyava un transmissor banda base. Recuperi el script corresponent a la Pràctica 1. L'objectiu d'aquesta pràctica és construir el corresponent receptor banda base. El sistema receptor consta dels següents blocs:



A continuació s'analitza cadascun dels blocs. El detector de símbol PAM es reserva per a la pràctica següent.

2.1 Generació de Senyal

Tal com s'esmenta a l'inici de la pràctica, es continua amb el treball de la Pràctica 1. Suposi que el senyal $s[n]$ és el generat a partir de la funció `modula.m` creada a la pràctica anterior, amb un pols rectangular de $L=4$ mostres i a $N_{ss}=4$ mostres per símbol. Analitzi, en primer lloc, el senyal codificat amb 2-PAM. L'extensió del programa al cas 4-PAM és directa. Si ha acabat la pràctica anterior:

- 1) Recupere els vectors `b`, `a_2PAM`, `a_4PAM` i els senyals modulats `s_2PAM` i `s_4PAM`.

En cas de no haver finalitzat la Pràctica 1:

- 1) Escrigui les instruccions següents per tal de treballar amb 10 períodes de la seqüència 00011110:

```

b= repmat([0 0 0 1 1 1 1 0], 1, 10);
a_2PAM= repmat([+1 +1 +1 -1 -1 -1 -1 +1], 1, 10);
a_4PAM= repmat([-3 -1 +1 +3], 1, 10);
s_2PAM=0.5*[reshape( repmat(a_2PAM, 4, 1), [], 1)' zeros(1, 3)];
s_4PAM=0.5*[reshape( repmat(a_4PAM, 4, 1), [], 1)' zeros(1, 3)];
  
```

2.2 Canal Additiu amb Soroll Gaussià Blanc

Consideri que el senyal transmès travessa un canal sorollós tal que cada mostra del senyal transmès $s[n]$ és contaminada per soroll additiu Gaussià blanc de mitjana 0 i variància P_w .

- 2) Generi un vector aleatori w amb el mateix nombre de components que s_2PAM , de distribució Gaussiana amb mitjana 0 i variància $P_w=0.01$. Mesuri experimentalment mitjana i variància de w . Comprovi que coincideixen amb els valors teòrics.
- 3) Calculi el senyal rebut r_2PAM . Dibuixi utilitzant la instrucció `subplot`: (a) el senyal transmès s_2PAM a l'esquerra; i (b) el senyal rebut r_2PAM a la dreta. Utilitzi la comanda `ylim([-1, 1])` després de cada `plot` per visualitzar l'eix vertical d'ambdues gràfiques en la mateixa escala.
- 4) Repeteixi els 2 apartats anteriors utilitzant sorolls $w1$ i $w2$ de respectives variàncies $P_{w1}=0$ i $P_{w2}=0.50$. Extregui conclusions del resultat de les figures.

2.3 Filtrat Adaptat i Mostratge Òptim

Continuï analitzant el senyal r_2PAM de l'apartat 3. Per tal de maximitzar la relació senyal-a-soroll en recepció, s'aplica el filtre adaptat sobre el senyal rebut i posteriorment es mostreja. Atès que hem utilitzat com a pols de conformació el pols rectangular p , podem utilitzar-lo com a resposta impulsional del filtre adaptat: $h=p$.

- 5) Obtingui r_fil_2PAM convolucionant¹ r_2PAM amb el filtre adaptat h . Recordi que el filtre adaptat ha d'estar normalitzat per tenir energia² 1.
- 6) Determini l'instant òptim de mostratge per obtenir la seqüència de símbols rebuda a_reb_2PAM . Per fer-ho, realitzi el mostratge del senyal filtrat cada $N_{ss}=4$ mostres.
NOTA: Recordi que la conformació del pols i el filtrat adaptat han introduït mostres addicionals degut a les operacions de convolució. Haurà de tenir-ho en compte per determinar l'inici i el final del mostratge.
- 7) Visualitzi la seqüència rebuda a_reb_2PAM i sobreposi-hi³ la seqüència transmesa a_2PAM . Determini la causa de la discrepància entre els símbols rebuts i els símbols transmesos.
- 8) Repeteixi els apartats anteriors pels casos avaluats en l'apartat 4.

2.4 Relació Senyal-a-Soroll

Una magnitud molt rellevant en els sistemes de comunicació és la relació senyal-a-soroll, definida com el quocient entre la potència de senyal útil (sense soroll) i la potència del soroll. Calculi la relació senyal-a-soroll per a la seqüència de símbols a_reb_2PAM seguint els passos següents:

- 9) Realitzi el filtrat adaptat i el mostratge òptim sobre el senyal transmès s_2PAM i el soroll w per separat. Indiqueu-los per s_fm_2PAM i w_fm .
- 10) Calculi la potència⁴ P_{tx} de la seqüència s_fm_2PAM .
- 11) Calculi la potència P_{ww} del soroll w_fm .
- 12) Calculi la relació senyal-a-soroll snr i expressi-la en decibels snr_{dB} . Compari el resultat amb el seu valor teòric. No utilitzi cap funció nativa proporcionada per MATLAB.
- 13) Repeteixi els apartats anteriors per a calcular la relació senyal-a-soroll pels casos avaluats en 4) i 8).
- 14) Repeteixi els apartats 2-13 utilitzant el senyal s_4PAM .

¹Pot executar `help conv` per consultar l'ús de l'operador convolució discreta.

²Per un senyal discret real, l'energia és la suma dels quadrats de les seves mostres.

³Per exemple, pot utilitzar, entre altres, les comandes MATLAB `hold on` i `hold off`.

⁴Recordi que, per un senyal discret real, la potència és el valor mitjà de la suma dels quadrats de les seves mostres.

COMUNICACIONS ANALÒGIQUES I DIGITALS

Pràctica 3: Modulacions Digitals en Banda Base (III)

Aquesta pràctica continua la pràctica anterior en quant al disseny i anàlisi del detector de símbol PAM. El detector utilitzat estima quina ha estat la seqüència binària transmesa $\hat{b}[m]$ en funció de la seqüència de símbols rebuda $\tilde{a}[k]$ establint regions de decisió sobre la constel·lació en detecció. Les fronteres associades a les regions de decisió s'indiquen en línia discontinua per a les constel·lacions PAM següents:

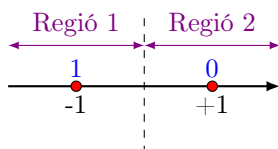


Figura 3.1: 2-PAM Polar.

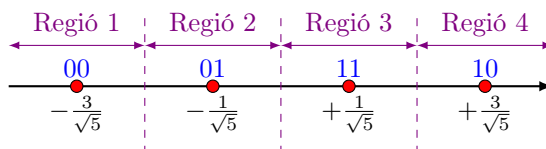


Figura 3.2: 4-PAM Polar.

Recuperi el script corresponent a la pràctica anterior. Si no l'ha acabat, recorri a l'Apèndix d'aquesta pràctica per generar les variables `b`, `a_2PAM`, `a_reb_2PAM`, `a_4PAM`, `a_reb_4PAM` necessàries per poder continuar. No obstant, es recomana realitzar l'Apèndix per no arrossegar possibles errors en pràctiques anteriors. Posteriorment, pot incorporar la feina d'aquesta pràctica a continuació de la pràctica anterior.

3.1 Detector de Símbol 2-PAM

Adoptem el detector 2-PAM òptim que actua com a detector de signe. Això és, si el símbol rebut és positiu s'assumeix que el dígit transmès era un 0. Altrament, s'assumeix que era un 1.

- 1) Escrigui la funció `detector2PAM` que modela tal comportament.

```
function [ b ] = detector2PAM( a )
    % a és el vector de símbols rebut.
    % b és el vector de díigits decidits.
    Omplir aquí el codi necessari.
end
```

- 2) Obtingui la seqüència de bits estimada `b_est_2PAM` aplicant el detector 2-PAM anterior sobre la seqüència de símbols rebuda `a_reb_2PAM`.
- 3) Visualitzi els díigits binaris estimats `b_est_2PAM` sobreposats als díigits transmesos `b`. Coincideixen?
- 4) Repeteixi els dos últims apartats per als casos avaluats en l'apartat 8 de la pràctica anterior. És a dir, quan la variància del soroll és $P_{w1}=0$ i $P_{w2}=0.50$. Raoni de quin(s) paràmetre(s) depèn que la seqüència de bits estimada (a la sortida del detector de símbol) i la seqüència transmesa `b` coincideixin.

3.2 Detector de Símbol 4-PAM

Suposem ara un detector 4-PAM que opera sota les regions de decisió de la Figura 3.2. Es demana:

- 5) Escriu la funció `detector4PAM` que modela tal comportament.

```
function [ b ] = detector4PAM( a )
    % a és el vector de símbols rebut.
    % b és el vector de dígit decidits.

    Omplir aquí el codi necessari.

end
```

- 6) Obtingui la seqüència de bits estimada `b_est_4PAM` aplicant el detector 4-PAM anterior sobre la seqüència de símbols rebuda `a_reb_4PAM`.
- 7) Visualitzi la seqüència binària estimada sobreposada a la seqüència transmesa.
- 8) Raoni per quin motiu utilitzaria una constel·lació 2-PAM en comptes d'una constel·lació 4-PAM.

3.3 Probabilitats d'Error de Símbol i de Bit

Com ja s'ha evidenciat, el detector de símbol comet errors en la decisió degut a l'aleatorietat imprevisible que afegeix el soroll de canal. En aquest apartat, es demana quantificar la probabilitat d'error de símbol (SER) i de bit (BER) en funció de la relació senyal-a-soroll. Per fer-ho, obviï el procés de conformació i el filtrat adaptat, assumint un model discret equivalent en que les operacions anteriors NO afegeixen errors sistemàtics. Per tant, treballi directament a nivell de símbol. Es demana:

- 9) Calculi teòricament la potència de símbol P_a de la constel·lació 2-PAM de la Figura 3.1.
- 10) Calculi teòricament la variància P_w que ha de tenir el soroll per treballar a la relació senyal-a-soroll snr .
- 11) Escriu la funció `calcularErrors2PAM` que modela tal comportament a partir de generar, modular, afegir soroll i detectar una seqüència de N símbols a una relació senyal-a-soroll snr . Es recomana seguir l'esquema proporcionat a continuació:

```
function [ ser, ber ] = calcularErrors2PAM( N, snr )
    % N és la longitud vector binari transmès.
    % snr és la relació senyal-a-soroll.
    % ser és la probabilitat d'error de símbol calculada.
    % ber és la probabilitat d'error de bit calculada.
    % 1. Generació d'un vector binari de N dígit.

    Omplir aquí el codi necessari.

    % 2. Codificació 2-PAM del vector binari.

    Omplir aquí el codi necessari.

    % 3. Generació d'un vector de soroll Gaussià amb variància  $P_w$ .

    Omplir aquí el codi necessari.

    % 4. Càlcul de la seqüència rebuda.

    Omplir aquí el codi necessari.
```

```
% 5. Detecció 2-PAM de la seqüència rebuda.
```

Omplir aquí el codi necessari.

```
% 6. Càlcul del nombre de símbols i de bits erròniament decidits.
```

Omplir aquí el codi necessari.

```
% 7. Càlcul de les respectives probabilitats d'error.
```

Omplir aquí el codi necessari.

```
end
```

- 12) Executi la funció anterior per a estimar les probabilitats d'error de símbol i de bit d'una seqüència de $N_d=100000$ dígit amb $\text{snr}=8$. Assumeixi que N_d és prou gran com per a considerar que els càlculs són estables numèricament.
- 13) Escrigui un llaç `for` per avaluar estimacions de les probabilitats d'error de símbol i de bit en 10 punts de relació senyal-a-soroll equiespaiats en l'interval $[1, 10]$.
- 14) Visualitzi, en escala logarítmica, les probabilitats d'error en funció de la relació senyal-a-soroll expressada en decibels. Sobreposi-hi els resultats teòrics

$$\text{SER}_{2\text{-PAM}} = \text{BER}_{2\text{-PAM}} = Q(\sqrt{\text{snr}}), \quad (3.1)$$

on, pel càlcul de $Q(\cdot)$ utilitzi la funció `qfunc` proporcionada per MATLAB.

- 15) Repeteixi els apartats anteriors per a la constel·lació 4-PAM mostrada en la Figura 3.2, i visualitzi les corbes de probabilitat d'error en funció de la relació senyal-a-soroll sobreposades a les anteriors. Pels càlculs teòrics avalui les expressions

$$\text{SER}_{4\text{-PAM}} = 2 \cdot \text{BER}_{4\text{-PAM}} = \frac{3}{2} \cdot Q\left(\sqrt{\frac{3 \cdot \text{snr}}{15}}\right). \quad (3.2)$$

Apèndix: Generació Aleatòria de Símbols 2-PAM i 4-PAM

Aquest apèndix només és d'utilitat si no ha acabat la pràctica anterior. L'objectiu és generar seqüències de símbols aleatoris 2-PAM i 4-PAM distorsionades per soroll additiu Gaussià. Treballi a nivell de símbol assumint el model discret equivalent. Es demana:

- 16) Generi un vector binari `b` de 80 dígit aleatoris equiprobables.
- 17) Generi el vector `a_2PAM` fent ús de la funció `mapper2PAM` programada a la Pràctica 1.
- 18) Generi un vector de soroll Gaussià `w` de mitjana nul·la i variància $P_w=0.01$. Comprovi mitjana i variància empíricament fent ús de les funcions `mean` i `var`.
- 19) Generi la seqüència de símbols rebuda `a_reb_2PAM` afegint a `a_2PAM` el soroll generat `w`.
- 20) Repeteixi els apartats anteriors i faci les modificacions pertinents per generar les seqüències `a_4PAM` i `a_est_4PAM` corresponents a una constel·lació 4-PAM polar.

COMUNICACIONS ANALÒGIQUES I DIGITALS

Pràctica 4: Modulacions Digitals Passabanda

En pràctiques anteriors s'han treballat sistemes de comunicacions en banda base utilitzats, per exemple, en la transmissió de dades per Ethernet. En aquesta pràctica, adoptem esquemes de transmissió passabanda típicament utilitzats en escenaris de comunicacions inalàmbriques. Aquesta pràctica consta de dos objectius principals. En primer lloc, testejar el funcionament del modulador i desmodulador IQ. En segon lloc, avaluar l'efecte que provoquen diferents canals de comunicacions en constel·lacions de tipus phase-shift keying (PSK).

4.1 Modulació i Desmodulació IQ: Anàlisi en Absència de Soroll

Iniciem aquesta secció analitzant el modulador i desmodulador IQ en absència de soroll. A continuació es presenten els esquemes corresponents a ambdues estructures.

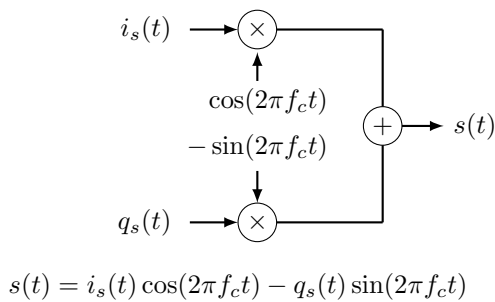


Figura 4.1: Modulador IQ.

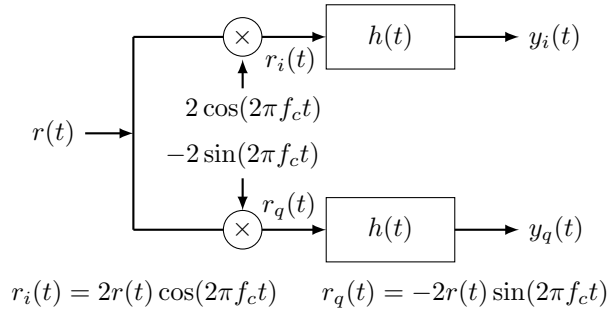


Figura 4.2: Desmodulador IQ.

En aquesta part de la pràctica es comprovarà el correcte funcionament del modulador i desmodulador IQ. Assumeixi la transmissió d'un únic símbol $a = 1 - j$ (això és, “+1” per la component en fase, i “-1” per la component en quadratura) mitjançant el pols arrel quadrada de cosinus alçat $p(t)$ (4.1) amb paràmetres $r_s = 1$ i $\beta = 0.2$. En recepció, s'utilitza el filtre passabaixes ideal amb resposta impulsional $h(t) = 2B_h \text{sinc}(2B_h t)$.

$$p(t) = \frac{\sin(\pi r_s t(1 - \beta)) + 4\beta r_s t \cos(\pi r_s t(1 + \beta))}{\pi t \sqrt{r_s} [1 - (4\beta r_s t)^2]} \quad (4.1)$$

4.1.1 Modulador IQ

Analitzi primer l'esquema modulador IQ de la Figura 4.1 en el domini temporal. Es demana:

- 1) Utilitzi la instrucció `linspace` per definir el vector t de 10^4 valors equiespaiats en $[-10, +10]^1$.
- 2) Defineixi el pols de conformació p i visualitzi'l. Calculi teòricament el seu ample de banda B_p .
- 3) Defineixi els senyals en fase i quadratura i_s i q_s multiplicant les respectives components del símbol transmès pel pols de conformació. Visualitzi cadascun dels senyals per separat.

¹En cas de d'utilitzar un altre instrucció o interval, asseguri's que, per tal d'obviar les discontinuïtats evitables que presenta (4.1), els valors $t = \pm 1/(4\beta r_s)$ no estan inclosos dins el vector de temps definit.

- 4) Escriu una funció que moduli les components i_s i q_s a la freqüència f_c segons l'esquema IQ anterior.

```
function [ s ] = modIQ( is, qs, fc, t )
    % is és la component en fase.
    % qs és la component en quadratura.
    % fc és la freqüència de la portadora.
    % t és el vector de temps.
    % s és el senyal modulat.

    Omplir aquí el codi necessari.

end
```

- 5) Executa la funció anterior per modular les components i_s i q_s anteriors a la freqüència $f_c=100$ Hz. Calcula l'ample de banda de $s(t)$, B_s , en funció de l'ample de banda del pols $p(t)$, B_p .

4.1.2 Desmodulador IQ

Per últim, analitza, en absència de soroll, l'esquema desmodulador IQ presentat a la Figura 4.2. Es demana:

- 6) Calcula el paràmetre B_h necessari per ajustar l'ample de banda del filtre $h(t)$ a l'ample de banda del pols utilitzat. Defineixi la resposta impulsional del filtre passa-baixes $h(t)$, h .
- 7) Escriu una funció que permeti desmodular el senyal rebut r en components y_i i y_q segons l'esquema IQ de la Figura 4.2. Per fer-ho:

Primer, calcula els senyals $r_i(t)$ i $r_q(t)$ segons l'esquema de la Figura 4.2. Denoti'ls r_i i r_q .

Segon, realitza les convolucions analògiques dels senyals $r_i(t)$ i $r_q(t)$ amb el filtre $h(t)$. Aproxima tals convolucions per la convolució discreta de r_i i r_q amb h , i escali el resultat per $D=t(2)-t(1)^2$. Utilitzi el paràmetre "same" com a argument de la convolució discreta per obviar les cues de la convolució.

```
function [ yi, yq ] = dmodIQ( r, fc, h, t )
    % r és el senyal rebut.
    % fc és la freqüència de la portadora.
    % h és la resposta impulsional del filtre passa baixes.
    % t és el vector de temps.
    % yi és la component en fase desmodulada.
    % yq és la component en quadratura desmodulada.
    % 1. Components  $r_i$  i  $r_q$ .

    Omplir aquí el codi necessari.

    % 2. Components  $y_i$  i  $y_q$ .

    Omplir aquí el codi necessari.

end
```

- 8) Executa la funció anterior per a desmodular el senyal rebut r , i visualitza y_i i y_q sobreposats a i_s i q_s .
- 9) Raona si l'esquema IQ proposat permet recuperar, de forma fidedigna, els senyals i_s i q_s a partir de r .

²L'escalat no correspon a cap concepte nou de l'assignatura. Únicament s'utilitza per aproximar la convolució analògica per la convolució discreta multiplicant pel factor D .

4.2 Modulació i Desmodulació IQ: Anàlisi en Presència de Soroll

En esquemes de comunicacions reals, el senyal rebut és contaminat per soroll additiu en la banda de treball. En aquesta secció, s'avaluarà la presència del soroll a l'entrada del receptor. Per simplificar el procediment, suposi que el filtre passabanda $h_R(t)$ vist a teoria elimina totalment el soroll fora de la banda de treball, i que el seu anàlisi resulta equivalent a afegir soroll additiu Gaussià a les components $r_i(t)$ i $r_q(t)$ abans de filtrar.

- 10) Escrigui una nova funció

```
function [ yi, yq ] = noisymodIQ( r, fc, h, t, Pw )
```

modificant lleugerament la funció anterior. En concret, generi vectors w_i i w_q amb components aleatòries de distribució Gaussiana amb mitjana 0 i variància marginal P_w , i afegeixi'ls als senyals r_i i r_q .

- 11) Executi la funció anterior per desmodular el senyal rebut r amb la variància de soroll $P_w=10$, i visualitzi els senyals desmodulats sobreposats als senyals transmesos i_s i q_s .

Després del desmodulador, procedeixi amb el filtrat adaptat i el mostratge abans de l'observació de símbol.

- 12) Defineixi la resposta impulsional del filtre adaptat h_d . Apliqui el filtre adaptat a cadascuna de les components del senyal rebut. Operi en el domini analògic. Tingui present el segon comentari de 7).
- 13) Visualitzi la sortida del filtre adaptat en el domini temporal, i determini quin és l'instant òptim de mostratge. Recordi que el canal considerat no introdueix cap retard.
- 14) Calculi la diferència entre el símbol transmès i el símbol rebut en l'instant òptim de mostratge.

4.3 Constel·lacions Passabanda

Si ha realitzat correctament la secció anterior haurà pogut comprovar que l'esquema IQ anterior permet recuperar dos senyals modulats en fase i quadratura de forma eficaç sempre i quan la variància del soroll sigui acceptable. En tot cas, el més important és que disposem d'un esquema fàcilment implementable que permet multiplexar dos senyals analògics en un mateix canal de comunicacions i a la mateixa freqüència.

Assumint que les operacions involucrades en la modulació i desmodulació IQ són ideals, treballi directament a nivell de símbol. A continuació, es dibuixen, en el pla complex, les constel·lacions més utilitzades:

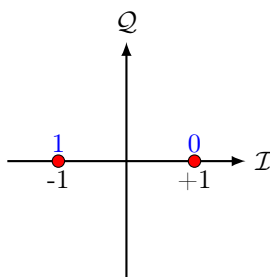


Figura 4.3: Phase-Shift Keying Binària (BPSK).

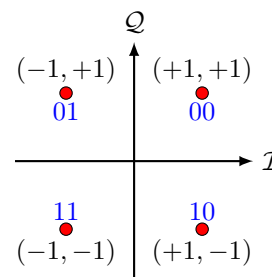


Figura 4.4: Phase-Shift Keying Quaternària (QPSK).

- 15) Escrigui, per cadascuna de les constel·lacions, una funció que generi una seqüència s de N símbols aleatoris d'acord amb les constel·lacions anteriors.

```
function [ s ] = rndBPSK( N )
    Omplir aquí el codi necessari.
end
```

```
function [ s ] = rndQPSK( N )
    Omplir aquí el codi necessari.
end
```

- 16) Generi vectors de $N=100$ símbols aleatoris equiprobables a_{BPSK} i a_{QPSK} corresponents a les constel·lacions anteriors. Visualitzi el resultat de dues formes:
- A nivell de constel·lació, fent ús de `plot(complex(a_BPSK), "o")` i `plot(a_QPSK, "o")`.
 - A nivell temporal, com a seqüència de símbols, dibuixant-la en funció de l'índex $1, 2, \dots, N$ fent ús de la instrucció `stem`. Per a modulacions complexes, visualitzi les parts real i imaginària per separat.

4.4 Canal Additiu amb Soroll Gaussià Blanc

En aquest apartat, s'estudia l'efecte de soroll Gaussià additiu sobre la constel·lació rebuda. Al llarg de la pràctica, es treballa a nivell de símbol assumint un model discret equivalent que no incorpora errors sistemàtics.

Suposi que es transmeten les seqüències generades en la secció anterior a_{BPSK} i a_{QPSK} . Es demana:

- 17) Per al senyal BPSK, generi un vector de soroll w_{BPSK} amb components aleatòries reals de distribució Gaussiana amb mitjana 0 i variància $P_w=0.1$. Comprovi mitjana i variància experimentalment.
- 18) Per al senyal QPSK, generi un vector de soroll w_{QPSK} amb components aleatòries complexes de distribució Gaussiana amb mitjana 0 i variància marginal $P_w=0.1$. Comprovi mitjana i variància experimentalment.
- 19) Generi les seqüències de símbols rebudes r_{BPSK} i r_{QPSK} afegint a les seqüències transmeses els corresponents vectors de soroll generats en l'apartat anterior.
- 20) Visualitzi, per a cadascuna de les seqüències rebudes i en gràfiques separades, la seqüència rebuda a nivell de constel·lació. Sobreposi-hi la seqüència transmesa a nivell de constel·lació.
- 21) Repeteixi els apartats anteriors utilitzant vectors de soroll amb variàncies $P_{w1}=0.01$ i $P_{w2}=1$. Quin efecte causa el paràmetre P_w sobre la constel·lació rebuda?

4.5 Part Opcional: Canal Multiplicatiu en Absència de Soroll

L'objectiu d'aquest apartat és avaluar l'efecte que provoca un canal multiplicatiu sense soroll en la constel·lació rebuda. Suposi que la seqüència de N símbols $s[n]$ es transmet per un canal (multiplicatiu) tal que la seqüència rebuda $r[n]$ es pot expressar com

$$r[n] = \sqrt{h}e^{j\phi} \cdot s[n], \quad (4.2)$$

on $h > 0$ és el guany/atenuació del canal i $-\pi \leq \phi \leq \pi$ el desfasament introduït.

Realitzi, per a les seqüències a_{BPSK} i a_{QPSK} , els següents experiments:

- 22) **Efecte de h .** Fixi la fase a $\phi = 0$ (canal sense desfasament). Calculi el senyal rebut per als 3 valors $h_1=0.5$, $h_2=1$ i $h_3=2$, i anomeni'ls r_{XPSK_h1} , r_{XPSK_h2} i r_{XPSK_h3} .
Visualitzi els senyals rebuts a nivell de constel·lació. Utilitzi la instrucció `subplot` per dibuixar: a l'esquerra, les constel·lacions associades a les modulacions BPSK; i a la dreta, les associades a les modulacions QPSK. Raoni l'efecte que provoca h sobre la constel·lació rebuda.
- 23) **Efecte de ϕ .** Fixi $h = 1$ (canal sense guany/atenuació). Calculi el senyal rebut per als valors de fase $\phi_1=\pi/4$, $\phi_2=-\pi/4$ i $\phi_3=\pi/2$, i anomeni'ls $r_{\text{XPSK}_\phi1}$, $r_{\text{XPSK}_\phi2}$ i $r_{\text{XPSK}_\phi3}$.
Visualitzi la seqüència de símbols transmesa i rebuda a nivell de constel·lació. Raoni l'efecte que provoca ϕ sobre la constel·lació rebuda.
- 24) **Efecte conjunt de h, ϕ .** En base als resultats obtinguts en els apartats anteriors, raoni quin efecte provoca un conjunt arbitrari $\{h', \phi'\}$ sobre la constel·lació rebuda.