

Servicio Social

Diferencias Finitas

Fecha: 3 de junio de 2021

Dada la dificultad numérica de usar la ecuación

$$\sqrt{\frac{l^2}{b^2} - \frac{l^2}{r^2} + \frac{2Ml^2}{r^3}} = \frac{dr}{d\lambda}, \quad (1)$$

debido a la aparición de una raíz cuadrada, se hizo el cambio de variable $r = 1/u \Rightarrow u = 1/r$ en la ecuación para obtener otra EDO más fácil de resolver numéricamente.

Así elevando a (1) al cuadrado, aplicando el cambio de variable se obtiene y siendo el parámetro ϕ con respecto al que se deriva se obtiene

$$\left(\frac{d(1/u)}{d\tau}\right)^2 = \frac{l^2}{b^2} - l^2 u^2 + 2Ml^2 u^3. \quad (2)$$

Resolviendo el lado izquierdo de la ecuación

$$\left(\frac{1/u}{d\tau}\right)^2 = \frac{\left(-\frac{du}{d\tau}\right)^2}{u^4}. \quad (3)$$

Sustituyendo en (2)

$$\left(\frac{du}{d\tau}\right)^2 = u^4 \left(\frac{l^2}{b^2} - l^2 u^2 + 2Ml^2 u^3\right). \quad (4)$$

La expresión para el momento angular de un fotón en una trayectoria circular, en el plano ecuatorial $\theta = \pi/2$ es

$$l^2 = \left(r^2 \frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 = \left(\frac{1}{u^2} \frac{d\phi}{d\tau}\right)^2. \quad (5)$$

Sustituyendo, siendo $\lambda = \tau$, se obtiene

$$\boxed{\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \left(\frac{1}{b^2} - u^2 + 2Mu^3\right)}. \quad (6)$$

La cual es la expresión para la EDO de primer orden para u .

Para obtener la EDO de segundo orden basta derivar la expresión anterior, así

$$\frac{(u')^2}{d\phi} = \frac{(1/b^2 - u^2 + 2Mu^3)}{d\phi}. \quad (7)$$

$$\Rightarrow 2u'u'' = 0 - 2uu' + 6Mu^2u'. \quad (8)$$

dividiendo entre 2 y u' se obtiene

$$\boxed{u'' = -u + 3Mu^2}. \quad (9)$$

La cual es la ecuación que vamos a discretizar mediante diferencias finitas de segundo orden centrada.

La expresión para diferencias finitas de la segunda derivada es

$$u_i'' \approx \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{(\Delta\phi)^2}. \quad (10)$$

Sustituyendo en (9) se obtiene

$$u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} = (\Delta\phi)^2(3Mu_i^2 - u_i). \quad (11)$$

Obteniendo así una expresión para calcular u_{i+1}

$$\boxed{u_{i+1} = (\Delta\phi)^2(3Mu_i^2 - u_i) + 2u_i - u_{i-1}}. \quad (12)$$

Aquí existe el problema de que dado u_0 no es posible obtener el valor de u_{-1} , valor necesario para el primer paso del método, la presencia de un punto fantasma, así que recurrimos a usar la EDO de primer orden para u , dada por (6), recordando la expresión

$$u_i' \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2(\Delta\phi)}. \quad (13)$$

Nota: Aquí haremos uso de una extrapolación lineal aproximando el punto fantasma de $u_{-1/2} \approx u_0$.

La expresión para $u_{-1/2}$ es

$$u_{-1/2}' = \frac{u_0 - u_{-1}}{2(\Delta\phi/2)} = \frac{(u_0 - u_{-1})}{(\Delta\phi)}. \quad (14)$$

Sustituyendo en (6) y haciendo uso de la aproximación mencionada, se obtiene

$$\frac{1}{(\Delta\phi)^2}(u_0 - u_{-1})^2 = \frac{1}{b^2} - (1 - 2Mu_0)u_0^2. \quad (15)$$

Aquí se quiere resolver para u_{-1} , así, despejando se obtiene

$$u_{-1}^2 - 2u_0u_{-1} + \left(u_0^2 - (\Delta\phi)^2 \left[\frac{1}{b^2} - (1 - 2Mu_0)u_0^2\right]\right) = 0. \quad (16)$$

Esto posee la similar forma de una ecuación de tipo $ax^2 + bx + c = 0$ la cual se resolvió usando la fórmula general.

Así

$$\begin{aligned} u_{-1} &= \frac{2u_0 \pm \sqrt{4u_0^2 - (4u_0^2 - 4(\Delta\phi)^2[1/b^2 - (1 - 2Mu_0)u_0^2])}}{2} \\ &= \frac{2u_0 \pm |2|(\Delta\phi)\sqrt{1/b^2 - (1 - 2Mu_0)u_0^2}}{2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Obteniendo así una expresión para calcular u_{-1} , la cual es necesaria para el primer paso de la integración. (Se usará el signo negativo de la expresión dado que el punto fantasma se encuentra fuera de la recta hacia la izquierda).

El código regresa tres arreglos, el primero de U vs Φ , el segundo de R vs Φ y por último, X vs Y . La forma de parametrizar la curva obtenida en X vs Y , fue de la forma habitual en coordenadas polares.

$$x = r \cos(\theta). \quad (18)$$

$$y = r \sin(\theta). \quad (19)$$

A continuación se muestran las curvas obtenidas para distintos valores de b (parámetro de impacto), una resolución de 2000 pasos, masa $m = 1$, en el plano ecuatorial y condiciones de frontera $x_{max} = 10$, $x_{min} = -10$, $y_{max} = 10$ y $y_{min} = -10$.

Los radios del agujero negro, así como del anillo de fotones están dados en función de masa por las siguientes relaciones

$$r_{agujero} = 2m. \quad (20)$$

$$r_{anillo} = 3m. \quad (21)$$

Trayectoria de fotones (En el plano ecuatorial).

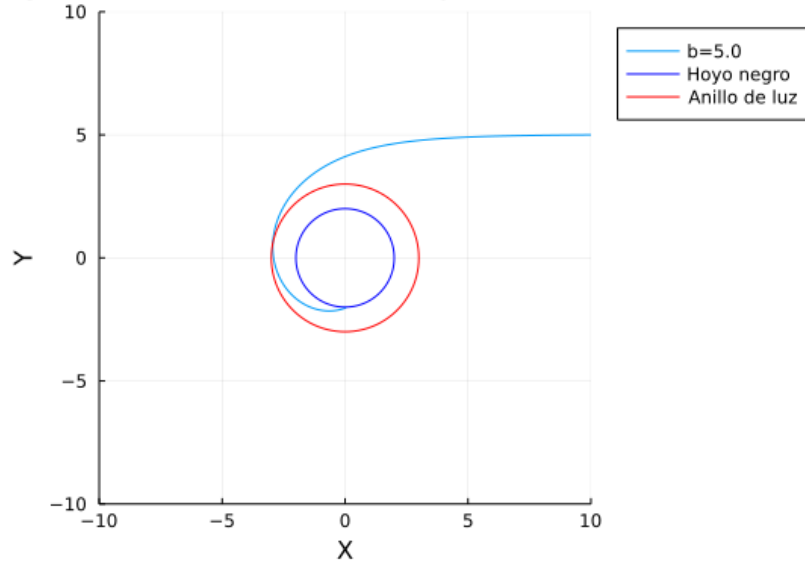


Figura 1: Curva de trayectoria para $b = 5.0$.

Trayectoria de fotones (En el plano ecuatorial).

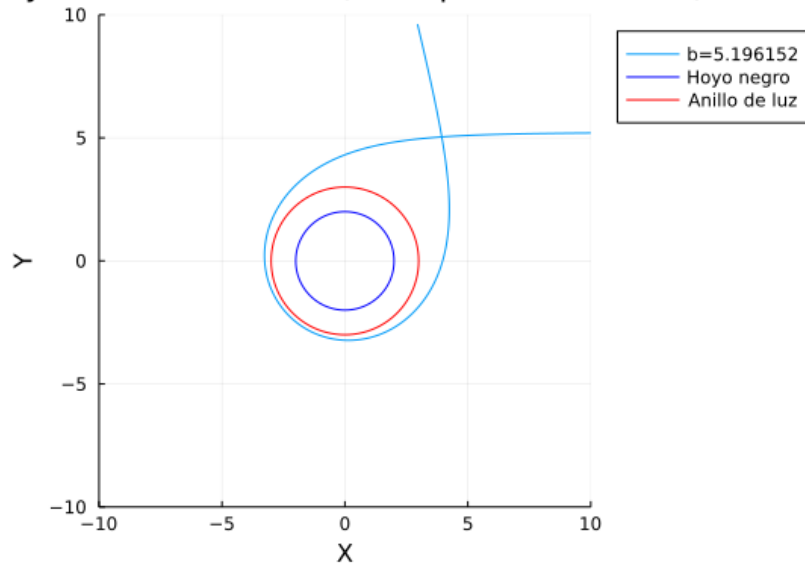


Figura 2: Curva de trayectoria para $b = 5.196152$.

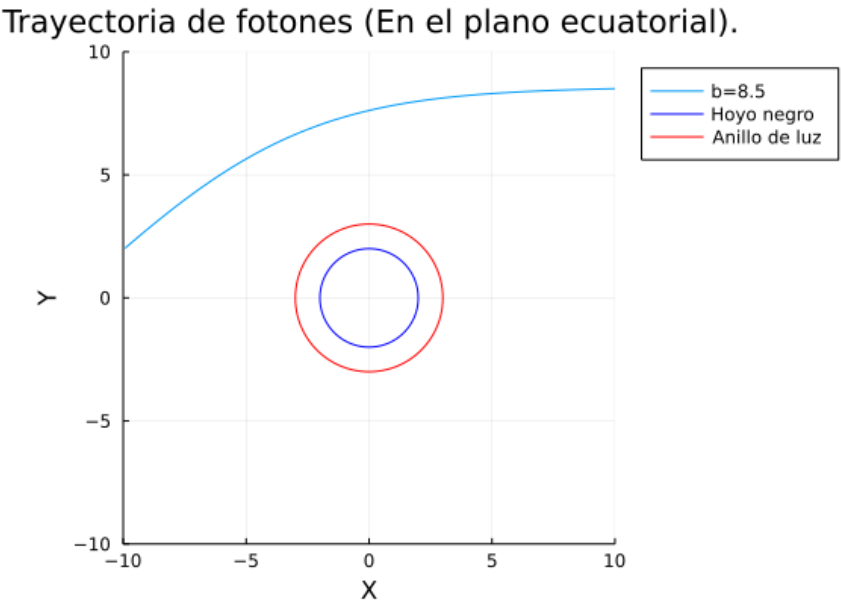


Figura 3: Curva de trayectoria para $b = 8.5$