IOI2020 中国国家集训队第一阶段作业 解题报告

成都市第七中学 房励行

1 Present for Vitalik the Philatelist

1.1 试题来源

Codeforces Round #325 (Div. 1) E

1.2 试题大意

给出 n 个数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，求出有多少种方案可以从 n 个数中选出一个子集 s 和一个不在子集 s 中的数 x，满足 $\gcd(s) > 1$，$\gcd(s \cup \{x\}) = 1$。答案模质数。

1.3 数据范围

$2 \le n \le 5 \times 10^5$
$2 \le a_i \le 10^7$

1.4 时空限制

时间限制：5s
空间限制：256MB

1.5 算法介绍

首先考虑如何求出满足 $\gcd(s) = 1$ 的子集 s 的个数 A。可以使用 μ 函数进行容斥，设 $f(x)$ 表示所有数都含因子 x 的子集个数，则 $f(x) = 2^{cnt_x} - 1$（特别地，$f(1) = 2^n$），其中 cnt_x 表示是 x 的倍数的数的个数。

因此可以得到：

$$A = \sum_{i=1} \mu(i) f(i)$$

得到 A 后同样可以得到 $\gcd(s) > 1$ 的子集 s 的个数 B，即 $B = 2^n - A$。

解决了 s 的问题，现在的问题是如何选出一个 x 使得 $\gcd(s \cup \{x\}) = 1$。考虑枚举一个 x，那么 s 的选择需要从 B 中减去两部分：一部分是包含 x 的子集，另一部分是不含 x 但与 x 有公因子的子集。

观察发现包含 x 的子集一定含有 x 的因子，因此只需要从 B 中减去与 x 有公因子的子集。

这一部分仍然可以使用 μ 函数进行容斥。对于 x 的每个非 1 约数 d，再从 B 中减去含这个约数的子集个数，同样需要使用容斥，即此部分的答案为：

$$\text{answer of } x = B + \sum_{d|x, d\neq 1} \mu(d) f(d)$$

最后将所有枚举 x 所得到的答案求和，即是最终的答案。

对于求 cnt_x，观察发现因 $\mu(x) = 0$ 时 $f(x)$ 的值不产生影响，因此只需要求出不含平方因子的数的 cnt 值。可以考虑枚举 a_i，将 a_i 分解出 k 个不同质因子，然后在 $O(2^k)$ 时间内枚举出不含平方因子的因子。

由于值域有限制，分解质因子可以使用欧拉筛预处理。

总时间复杂度为 $O(V + n2^{\omega(n)})$，其中 $V = \max_{i=1}^{n} a_i$，$\omega(n)$ 为 $\leq n$ 的数中所含最多的不同质因子数。

2 Three Circuits

2.1 试题来源

AtCoder Grand Contest 032 C

2.2 试题大意

给定一张 N 个点 M 条边的简单无向连通图，判断能否将图分为三条回路，使得每条边恰在一个回路中。

2.3 数据范围

$1 \leq N, M \leq 10^5$

2.4 时空限制

时间限制：2s

空间限制：2048MB

2.5 算法介绍

本题需按照点的度数分情况讨论。

情况一：存在点度数为奇数 → 无解

因图为无向连通图，因此若能分为三条回路，将三条回路顺次连接可以得到一条回路。而由欧拉图的判定定理无向图存在点度为奇数时，不存在这样一条回路，因此该情况无解。

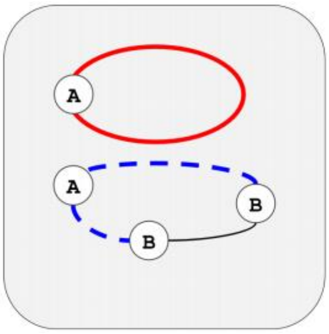
情况二：点度为偶数，存在点点度 ≥ 6 → 有解

因点度均为偶数，可以找出一条欧拉回路。假设存在点 A 度数 ≥ 6，那么 A 必定被经过至少三次。将这三次经过 A 点之间的路径分别各组成一条回路，即得到三条回路。

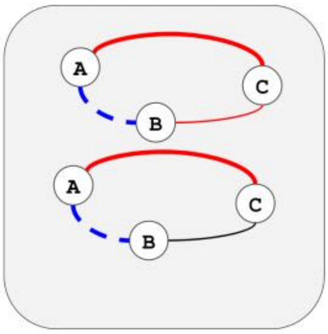
情况三：点度为偶数，存在至少三个点点度 $= 4$ → 有解

假设点度 $= 4$ 的三个点分别为 A、B 和 C，同样，因 A 在欧拉回路中被经过两次，可以将图分为两个包含 A 的环。

若其中一个环中除 A 外也有点被经过了两次，不妨设其为 B，如下图所示。那么将该环中 B 至 B 的部分单独取出即可将其再分为两个环，一共三个环。

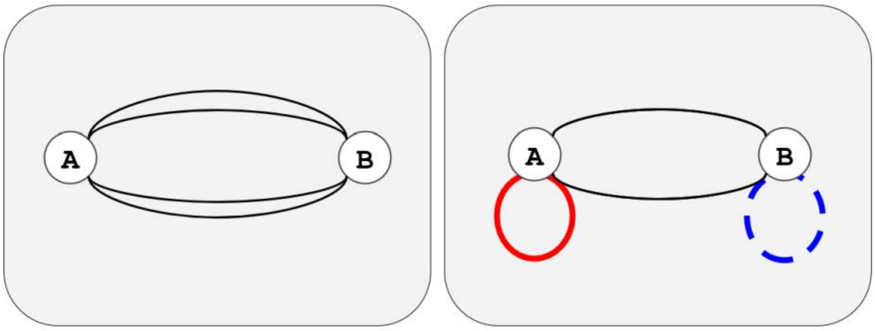


若两个环中的点均只经过一次，因 B 和 C 度数为 4，它们必定在两个环中都出现过，如下图所示。因此，将两个环中的 $A \to B$ 段组成一个环，$B \to C$ 段组成一个环，$C \to A$ 段组成一个环即可得到三个环。



情况四：点度为偶数，只有两个点点度 $= 4$ → 需再细分讨论

因只有两个点度数 $=4$，其余的度数均为 2，假设这两个点为 A、B，那么图有下列两种可能。



左图无法再分为三个环，而右图可以分为 $A\to A$，$A\to B\to A$，$B\to B$ 三个环。

因此在这种情况下，若存在 $A\to A$ 且不经过 B 的环，则问题有解，否则无解。

情况五：点度为偶数，不多于一个点点度 $=4\to$ 无解

当只有一个点点度为 4 时，原图只有两个环，无法拆分出三个环。

当所有点点度均为 2，原图为一个环，无法拆分出三个环。

综合以上所有情况，题目得以解决，时间复杂度为 $O(N+M)$。

3 01 on Tree

3.1 试题来源

AtCoder Grand Contest 023 F

3.2 试题大意

给定一棵 N 个点的有根外向树，每个点有一个权值 $V_i\in\{0,1\}$。现需要求出该外向树的一个拓扑序 P，使得序列 $V_{P_1},V_{P_2},\dots,V_{P_N}$ 的逆序对数量最小。

仅需求出这个最小的逆序对数。

3.3 数据范围

$1\le N\le 2\times 10^5$

3.4 时空限制

时间限制：2s

空间限制：256MB

3.5 算法介绍

从一个一般化的问题入手：如果每个节点上的权值 V 并非一个数字，而是一个 01 串，不考虑串内部的逆序对，求出拓扑序使得逆序对数最小化。

假设当前第 i 个节点上的 01 串是 V_i，其中含有 $C0_i$ 个 0 和 $C1_i$ 个 1。称一个点 i 的“零占比” $R_i = \frac{C0_i}{C1_i}$，其中当 $C1_i = 0$ 时，定义该节点的 $R_i = +\infty$。

直观上来看一个点的 R_i 越大那么这个点就越应该放到前面。可以证明，对于当前树上除根节点外 R_i 最大的点（如果有多个任选一个），一定存在一个使答案最小化的拓扑序，使得该点紧跟在它的父节点之后。下面给出结论的证明：

证明. 令当前 R 最大的非根节点为 v，其父节点为 u。

假设在拓扑序中 v 之前并非 u 而是 w，那么 w 与 v 之间的逆序对数为 $C1_w \times C0_v$。交换 w 与 v 后，w 与 v 间的逆序对数变为 $C1_v \times C0_w$，而除了 w 和 v 间的逆序对数之外，其余逆序对数都不变。因为 v 是 R 最大的节点，有 $R_v \geq R_w$，即 $\frac{C0_v}{C1_v} \geq \frac{C0_w}{C1_w}$，化简得 $C1_v \times C0_w \leq C1_w \times C0_v$，即交换 w 和 v 答案不会变劣。

因此将 v 置于 u 之后答案不会劣于最优答案。 □

至此可以得到一个朴素的算法是，对该树执行 $N-1$ 次下列操作。首先找到 R 最大的非根节点 v，然后将它与其父节点 u 合并，并在答案中加上 u 和 v 的贡献 $C1_u \times C0_v$。然而，该算法的时间复杂度是 $O(N^2)$ 的，并不能通过所有测试数据。

为了给该算法加速，可以使用并查集和优先队列。执行每次操作时，从优先队列中取出 R 最大的非根节点，然后合并两个节点时使用并查集进行合并，最后把修改后的 R 值重新放入优先队列。

用此种方法，每一步的时间复杂度均为 $O(\log N)$，因此总时间复杂度为 $O(N \log N)$。