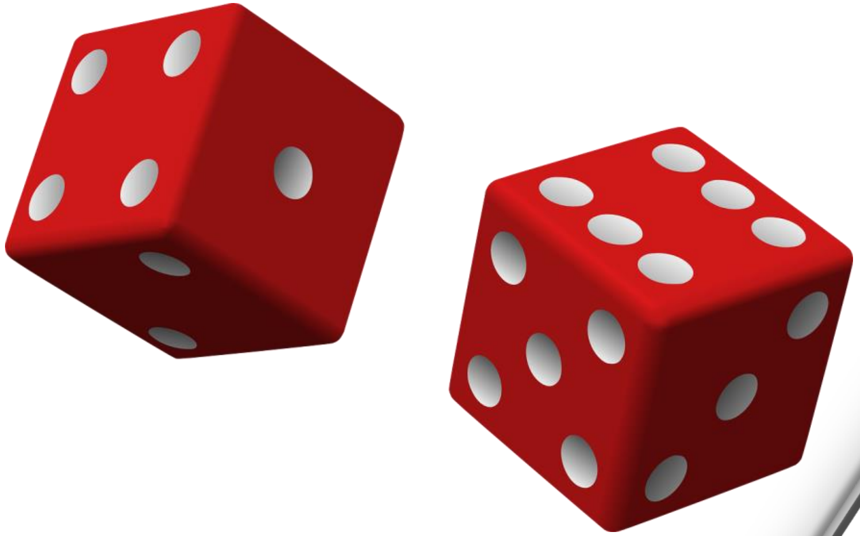
INTRODUCCIÓN A TEORÍA DE PROBABILIDADES

Estadística y probabilidades

S0200

UTEC
UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA Y TECNOLOGÍA

EXPERIMENTO ALEATORIO



Un experimento aleatorio, es un experimento cuyo resultado no está garantizado, aunque tomemos todas las precauciones necesarias para que las condiciones de su realización sean las mismas.

Un experimento aleatorio **depende del azar**, lo que pretendemos hacer con **teoría de probabilidades** es establecer un lenguaje que sirva para hablar, entender y **tratar de predecir los eventos** sujetos a la **incertidumbre**.

Desde el punto de vista formal, para describir un **experimento aleatorio** hacen falta tres ingredientes:

- El espacio de resultados, **universo** o **espacio muestral**: aquí van todos los resultados individuales pertinentes.
- La colección de todos los **eventos** relevantes: cada evento es un **subconjunto del universo**.
- Una función de **probabilidad**; una función que a cada evento le asigne **un número entre cero y uno.**

Estos tres ingredientes tienen definiciones específicas y los dos últimos están sujetos a una serie de condiciones técnicas.

Por ejemplo, necesitamos una garantía de que si tomamos unos eventos relevantes y hacemos operaciones sensatas sobre ellos, obtendremos un evento relevante. La estructura matemática que permite eso se conoce como σ-álgebra.

Esta lámina ignorarlo.

σ-ÁLGEBRA

$* \ \emptyset \cup \Omega = \Omega$

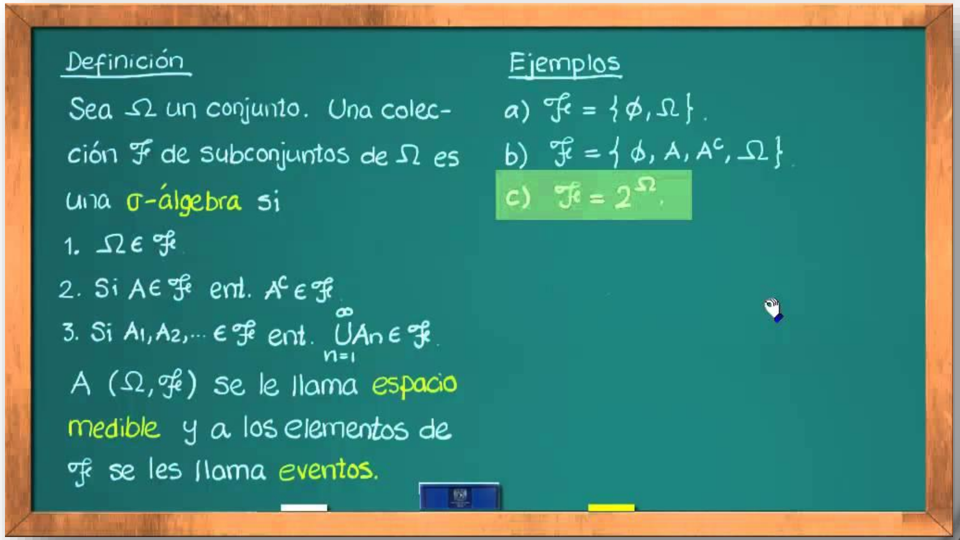
- Complemento de $\emptyset = \Omega$
- complemento de $\Omega = \emptyset$

Dado un **conjunto** $\boldsymbol{\Omega}$, se obtiene un $\sigma - \acute{A}lgebra$, formando una colección $\boldsymbol{F}$ de subconjuntos de Ω, tal que:

1) $\emptyset \in \boldsymbol{F}$, **entonces tambien** $\boldsymbol{\Omega}$

2) **Si** $\boldsymbol{A}$ **está en** $\boldsymbol{F}$ entonces, también **su complemento** $\boldsymbol{\Omega - A}$ **está en** $\boldsymbol{F}$.

3) **La unión** contable **de elementos de** $\boldsymbol{F}$, también **está en** $\boldsymbol{F}$.



Ejemplo:

Al **lanzar un dado** se obtiene el siguiente conjunto de todos los posibles resultados

$$\boldsymbol{\Omega} = \{\mathbf{1, 2, 3, 4, 5, 6}\}$$ espacio muestral ó universo.

Indique cual de los siguientes es $\sigma - \acute{A}lgebra$ de Ω

a) $F_1 = \{\emptyset, \{2; 4{,}6\}, \{1; 3; 5\}, \boldsymbol{\Omega}\}$

b) $F_2 = \{\{1; 2; 3\}, \{4; 5; 6\}, \boldsymbol{\Omega}\}$ ➔ no es. (**porque no contiene al conjunto vacío**)

Completar para obtener un $\sigma - \acute{A}lgebra$ de Ω.

a) $\boldsymbol{F_3} = \{\emptyset, \{\mathbf{1; 2; 3; 4}\}, \ \ldots \ \}$ ➔ $\boldsymbol{F_3} = \{\emptyset, \{\mathbf{1; 2; 3; 4}\}$, Ω, {5, 6} }

b) $\boldsymbol{F_4} = \{\emptyset, \{\mathbf{1; 2}\}, \{\mathbf{3; 4}\}, \ \ldots \}$ ➔ $\boldsymbol{F_4} = \{\emptyset, \{\mathbf{1; 2}\}, \{\mathbf{3; 4}\}$, Ω, {3, 4, 5, 6}, {1, 2, 5, 6}, {1, 2, 3, 4}, {5, 6} }

ESPACIO MUESTRAL Y EVENTOS

En la definición de $\sigma - Algebra$ de Ω, se denomina **espacio muestral a Ω**.
De forma mas simple, se puede decir que un espacio muestral *Ω*, es el conjunto donde están incluidos todas las posibilidades que se obtendrían en el experimento aleatorio.

Cada uno de los elementos del $\sigma - Algebra$ de Ω, es denominado $\boldsymbol{evento}$.
De forma mas simple, un evento es una parte del espacio muestral. Es la parte que nos interesa.

EJEMPLO:

$Experimento\ aleatorio$: **Se lanzan 3 monedas.**

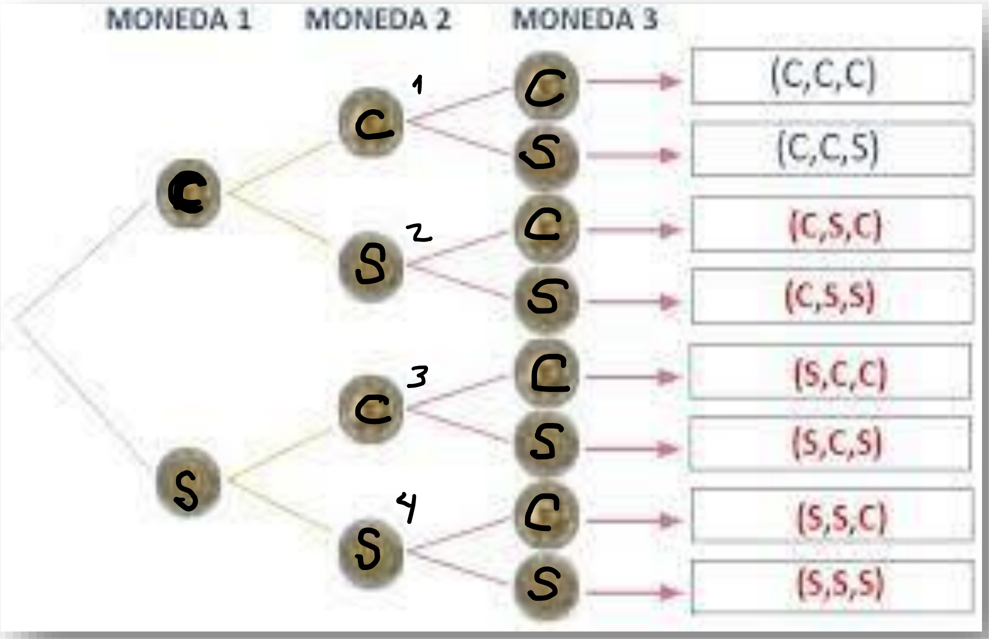
¿ $Espacio\ muestral$? $\Omega=\{ccc, ccs, csc, css, sss, ssc, scs, scc\} \rightarrow n(\Omega)=8$

Si ahora deseamos obtener máximo una cara

¿ $cu\acute{a}l\ es\ el\ evento$?

$A=\{css, scs, ssc, sss\} \Rightarrow n(A)=4$

$P(A)=\frac{4}{8}=0.5$



EJEMPLO:

$Experimento\ aleatorio$: Se lanza 1 moneda y un dado.

¿ $Espacio\ muestral$?

$\Omega=\{c1, c2, c3, c4, c5, c6, s1, s2, s3, s4, s5, s6\} \Rightarrow n(\Omega)=12$

$evento$: No obtener cara ni número primo

$B=\{s1, s4, s6\} \Rightarrow n(B)=3$ $\quad P(B)=\frac{3}{12}=0.25$

Ejercicio

Indicar cuales de los experimentos son aleatorios:

a) Número de personas que serán atendidas en la ventanilla de un banco, en 1 hora. → A
b) Lanzamiento de dos monedas → A
c) Soltar una piedra en el aire → ~~A~~
d) Tiempo de duración del viaje en el auto para llegar a la universidad. → A
e) Aprobar o desaprobar un curso → ~~A~~
f) Número de accidentes en la intersección de dos avenidas, en el lapso de una hora. → A
g) Número de llamadas telefónicas que llegan a tu celular, en dos horas. → A
h) Combinar dos moléculas de hidrogeno con una de oxigeno → ~~A~~

PRINCIPIO DE ADICIÓN Y MULTIPLICACIÓN

Carlondo debe matricularse en ambos cursos.

ESTAD → 4 horarios

FISICA → 5 horarios

ESTAD y Fis.

$4 \times 5 = 20$

Principio de la adición

Si un evento A puede realizarse de "m" maneras y otro evento B se realiza de "n" maneras, y si no es posible que ambos se realicen en forma simultánea entonces **el evento A o B** ocurrirá de **m + n** maneras.

Ejemplo

Un ingeniero de telecomunicaciones está proyectando un viaje a una provincia para instalar una antena parabólica, debe decidir el viaje por bus **o** por tren. Si hay tres rutas para el bus y dos para el tren ¿de cuántas maneras posibles puede realizar el viaje?

Bus ó Tren

$3 + 2 = 5$ posibilidades

Principio de la multiplicación

Si un evento A puede realizarse de "m" maneras y otro evento B se realiza de "n" maneras, entonces **el evento A y B** (uno seguido del otro) ocurrirá de **m x n** maneras o formas.

Ejemplo

Un ensamblador de computadoras tiene 4 microprocesadores de diferentes marcas y 3 memorias de diferentes marcas ¿de cuántas maneras posibles puede ensamblar ambas a una computadora?

Microp y Memoria

$4 \times 3 = 12$ posib.

Ejercicio

1) Determinar el número de posibilidades al lanzar 6 monedas.

1ª y 2ª y 3ª y 4ª y 5ª y 6ª

2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 ⇒ 64 posib.

2) Ordenar 6 personas que esperan en una cola para pagar en el banco.

personas: A, B, C, D, E, F ⇒ 1° y 2° y 3° y 4° y 5° y 6°

6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 720.

3) Juan **debe matricularse solo en un curso**. Física tiene 2 horarios posibles, Cálculo tiene 3 horarios y Estadística tiene 4 horarios. Si ninguno de los horarios se cruza ¿cuántos horarios posibles tiene Juan, para elegir un curso?

solo en 1 curso ⇒ F o E o C

2 + 4 + 3 = 9 posibilidades

Si fuera para matricularse en los 3 cursos, entonces si sería el producto: 2x3x4= 24 posibilidades

Si fuera para matricularse en 2 cursos, entonces:

F y C o F y E o C y E ➔ 2x3 + 2x4 + 3x4 = 26 posibilidades.

COMBINACION

Se usa cuando se desea **contar el número de grupos** (sin orden) de K elementos, que se puede obtener teniendo un total de n elementos diferentes. (n>=k)

n:El total, k: el grupo

$$C_k^n = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

* tengo : A, B, C, D, E
* formar 1 grupo de 2

AB BC CD DE
AC BD CE
AD BE
AE

10 posibilidades

PALABRAS CLAVE:

Agrupar, seleccionar, sacar, elegir. → Combinar:

En R-Studio, el comando es:

$\boldsymbol{choose}(n, k)$

$C_2^5 = \frac{5!}{2!\,3!} = 10.$

Al combinar, no hay orden: AB=BA

XYZ = ZYX = YZX = XZY

Ejemplo:

Seleccionar 4 bolas de un **total de 10 bolas** diferentes.

$$\boldsymbol{k = 4}$$

$$\boldsymbol{n = 10}$$

$$C_4^{10} = \frac{10!}{4!\,6!} = 210$$

Para sacar 4 bolitas de 10 bolitas, se tiene 210 posibilidades.

.

En combinación no existe orden ➔ AB=BA,   XYZ=ZXY

No hay un primero, ni un ultimo.

UTEC

EJERCICIOS

1) Seleccionar 2 vocales, de las 5 vocales.

$C^{5}_{2} = \frac{5!}{2!\,3!} = 10.$

2) De 10 bolitas de diferente color, elegir 4 bolitas.

$C^{10}_{4} = \frac{10!}{4!\,6!} = 210.$

3) De 50 alumnos seleccionar dos grupos de 5, para un concurso de Estadística.

se quiere ⇒ 1 grupo de 5 y otro grupo de 5 ⇒ $C^{50}_{5} \times C^{45}_{5}$

4) De 50 alumnos donde hay 20 mujeres, elegir un grupo de 5, que contenga obligatoriamente 3 mujeres.

se quiere → 3 Mujeres y 2 Hombres

$C^{20}_{3} \times C^{30}_{2}$

5) De 50 alumnos, conformar 5 grupos de 10 alumnos cada uno. →

Grupo 1 y Grupo 2 y Grupo 3 y Grupo 4 y Grupo 5

$C^{50}_{10} \times C^{40}_{10} \times C^{30}_{10} \times C^{20}_{10} \times C^{10}_{10}.$

6) De 50 alumnos, donde hay 20 mujeres y en total 40 no son de Lima, se conoce que 4 alumnas son limeñas. ¿De cuantas maneras se puede seleccionar una pareja de hombres limeños y una pareja de mujeres que no sean de Lima?

	Lima	No Lima	total
Hombres	6	24	30
mujeres	4	16	20
total	10	40	50

2HL y 2ML'

$C^{6}_{2} \times C^{16}_{2}.$

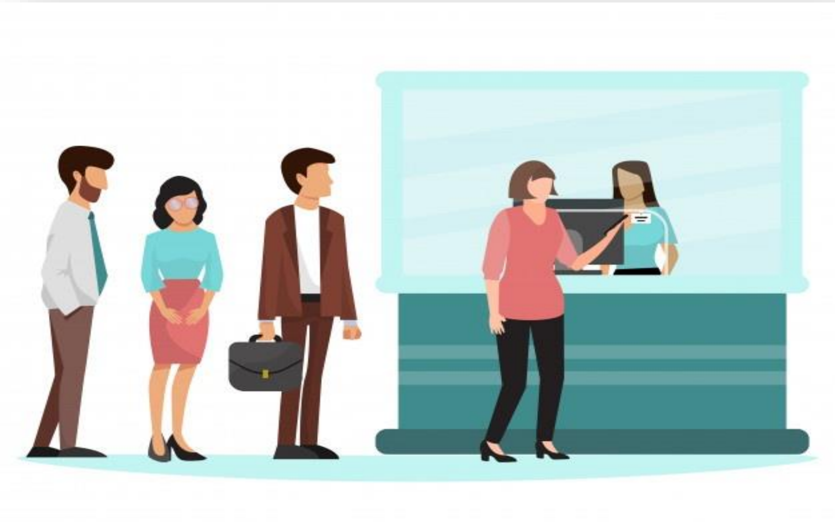
UTEC

PERMUTACIÓN

Se utiliza en casos en los que se quiera **contar el número de ordenamientos,** de un total de n elementos diferentes.

1) **Ordenar n elementos diferentes:** → $\boxed{n!}$ Con R Studio: $\boldsymbol{factorial}(n)$

2) **Ordenar k elementos de un total de n elementos diferentes**: (n>=k) → $\boxed{P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}}$



Ejemplo: *ordenar 4 personas que están en una cola de un banco.

4! = 24

*ORDENAR 4 Libros de 6 Libros distintos:

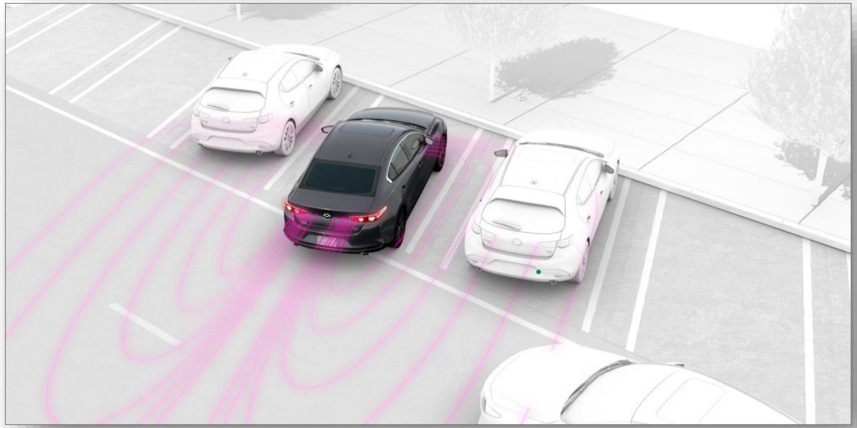
$P_4^6 = \frac{6!}{2!} = 360.$

En permutación si interesa el orden: **ABC ≠ BAC**

Se usa permutación en:

Colas o Filas , asientos, ubicación, códigos, contraseñas, palabras

EJERCICIOS



1) Ordenar 3 vehículos en 5 lugares de estacionamiento, que están disponibles.

Tengo 3 vehículos y se desea colocarlo en 5 lugares:

Vehículos ➔ 1°_ 2°_ 3°_

Lugares ➔ 5 X 4 X 3 = 60

2) Si hay 5 estacionamientos disponibles para 4 vehículos, pero dos de ellos son conducidos por Juan y Juana, quienes desean estacionarse juntos. ¿Cuántas formas distintas hay para que se cumpla lo que ambos desean?

Los vehículos de Juan y Juana cuentan como si fuera 1 solo (pegados) ➔ ellos tienen 4 posibilidades para estacionarse y el siguiente vehículo tendrá 3 lugares y el ultimo tendrá 2 lugares posibles . Pero juan y Juana se ordenan de dos formas. Respuesta: 2(4x3x2)=48 posibilidades.

3) Se tiene 6 vehículos numerados con 1, 2, 3, 4, 5, 6. Para estacionarse disponen de los lugares 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. ¿De cuántas maneras se pueden estacionar los vehículos pares en los lugares pares y los vehículos impares en los lugares impares?

Solución:

Hay 3 vehículos pares que se deben estacionar en 3 lugares pares ➔ 3!=6

Hay 3 vehículos impares que se estacionan en 4 lugares impares ➔ 4x3x2

Rpta: 6x(24)=144

FUNCIÓN DE PROBABILIDAD

Lunes 03/10

Una función de probabilidad es una función que asigna a cada elemento del conjunto de eventos relevantes (elementos de la σ-álgebra de eventos) un número real de acuerdo a los siguientes axiomas:

- **A1**: La probabilidad de todo evento es mayor o igual a cero.
- **A2**: La probabilidad del universo (espacio muestral) es uno.
- **A3**: La probabilidad de la unión infinita contable de eventos disjuntos es la suma sus probabilidades.

De estos axiomas se derivan **todas** las propiedades de la probabilidad.

Es conveniente que se familiaricen con algunas demostraciones de estas propiedades ya que le permitirán entender la forma de operar con eventos y probabilidades.

Es fundamental entender que los axiomas han sido establecidos para permitir las interpretaciones habituales y de sentido común.

La intuición puede fallar estrepitosamente en algunos casos, es importante practicar con los axiomas y propiedades de la probabilidad; tener un buen conocimiento sobre las diversas operaciones de conjuntos es imprescindible.

FUNCIÓN DE PROBABILIDAD

Para calcular probabilidades, se necesita:

1) Un experimento aleatorio
2) Un espacio muestral Ω (el conjunto que tiene a todas las posibilidades)
3) Un evento E (subconjunto del espacio muestral: **contiene solo lo que quiero**)
4) Hacer un conteo de los casos en que ocurren Ω y E.
5) **PROBABILIDAD DE UN EVENTO:**

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)}$$

PROPIEDADES DE PROBABILIDADES

1) $P(\emptyset) = 0$
2) $P(\Omega) = 1$
3) **Si E es un evento:** $0 \leq P(E) \leq 1$

4) PROPIEDAD DEL COMPLEMENTO:

$$P(E') = 1 - P(E)$$

5) PROPIEDAD DE LA UNIÓN:

$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$

6) EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUYENTES:

Dos eventos son excluyentes si no se pueden realizar simultáneamente.

Es decir: $P(E \cap F) = 0$

EJERCICIOS

1) **Al lanzar 2 dados** ¿cuál es la probabilidad de **obtener una suma de puntos que sea primo impar**?

Experimento: Lanzar 2 dados.

Espacio muestral: Lanzo el 1° y Lanzo el 2° ➔ 6 posib. X 6 posib. = 36 posib.=$n(\Omega)$

Evento: E=suma de puntos primo impar.➔ Suma=3 o 5 o 7 o 11.

➔(2;1),(4;1), (3;2),(6;1), (5;2),(4;3),(6;5) ➔ cada uno: 2 casos ➔ **14 posib.=$n(E)$**

Probabilidad: $P(E)=\frac{14}{36}$.

2) **Se desea escribir un número de 4 cifras** ¿Cuál es la probabilidad de formar un número de 4 cifras diferentes?

Experimento: escribir números de 4 cifras

Espacio muestral: $\overline{abcd}$➔a=9 posib y b=10 posib y c=10 posib y d=10 posib =**9000 posib = $n(\Omega)$**

Evento: E= # de 4 cifras distintas ➔ a=9 pos y b=9 pos y c=8 pos y d=7 pos= **9x9x8x7=$n(E)$**

Probabilidad: $P(E)=\frac{9x9x8x7}{9000}$=0,504.

3) **La placa de un auto está formado por 3 letras diferentes y 3 dígitos diferentes.** Calcule la probabilidad de que la placa contenga 3 vocales diferentes y 3 dígitos diferentes impares. (considere 26 letras diferentes)

Experimento: Formar placas: $\overline{ABCmnp}$

Espacio muestral: A=26, B=25, C=24, m=10, n=9, p=8 ➔ $n(\Omega)=26x25x24x10x9x8$

Evento: E=3 vocales distintas y 3 dígitos impares distintos ➔ $n(E)=5x4x3x5x4x3$

Probabilidad: $P(E)=\frac{5x4x3x5x4x3}{26x25x24x10x9x8}=0,00032$

EJERCICIOS

4) **En una caja se tiene 6 bolillas verdes y 4 bolillas azules**. Si se selecciona al azar 5 bolillas ¿Cuál es la probabilidad de conseguir una bolilla azul mas que las verdes? $A = V + 1$

$A + V = 5$ $\Big\}$ $A=3$, $V=2$

a) **Sin reemplazo= Sin reposición (sacar y no devolverlo) ➔ combinar**

Experimento: sacar 5 bolillas de un total de 10 bolillas

Espacio muestral:➔$\boldsymbol{n(\Omega) = C_5^{10}}$

Evento: E=**3A** y **2V** ➔ ➔$\boldsymbol{n(E) = C_3^4} \times C_2^6$

Probabilidad: $P(E) = \frac{C_3^4 \times C_2^6}{C_5^{10}}$

b) **Con reemplazo: (sacar y devolverlo) ➔ es un conteo usando " rayitas"**

Experimento: sacar 5 bolillas **con reemplazo** ➔ las cantidades iniciales, no cambian.

Espacio muestral: saco 5➔ _ y _ y _ y _ y _ ➔$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$➔$n(\Omega) = 10^5$

Evento: E=3A y 2V➔ **AAAVV**➔$\mathbf{4} \times \mathbf{4} \times \mathbf{4} \times \mathbf{6} \times \mathbf{6}$ pero los **3A** se combinan en 5 lugares➔C_3^5 ➔ $n(E) = 4^3 . 6^2 . C_3^5$

Probabilidad: $P(E) = \frac{4^3 . 6^2 . C_3^5}{10^5}$ o tambien: $P(E) = C_3^5 . 0{,}4^3 . 0{,}6^2$

5) **Cuatro vehículos se van a estacionar y disponen de 7 lugares consecutivos.** Calcule la probabilidad de que se estacionen de tal manera que haya un lugar vació entre cada par de vehículos.

Experimento: Estacionar 4 vehículos en 7 lugares.

Espacio muestral: $\boldsymbol{n(\Omega) = P_4^7} = \frac{7!}{3!} = 7 \times 6 \times 5 \times 4$

Evento: E=alternar vehículos con vacíos ➔ A V A V A V A

Auto 1 y Auto 2 y Auto 3 y Auto 4

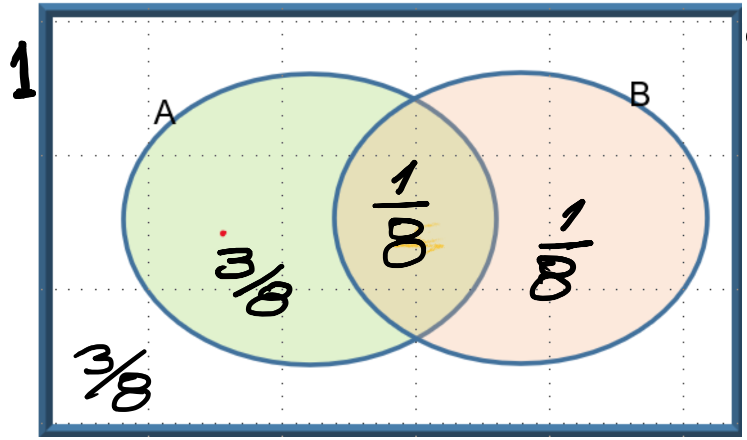
$4 \times 3 \times 2 \times 1$

Probabilidad $= \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{7 \times 6 \times 5 \times 4}$

UTEC UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA Y TECNOLOGÍA

EJERCICIOS

Leyes de MORGAN $\Rightarrow \begin{cases} (A\cap B)' = A'\cup B' \quad \ldots (*) \\ (A\cup B)' = A'\cap B' \end{cases}$



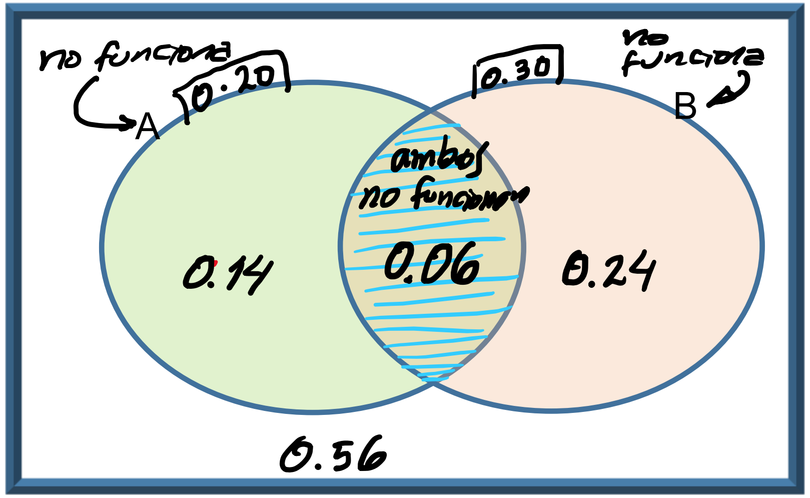
6) Si se sabe que: $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{4}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$, calcule

a) $P(A \cup B) = 3/8 + 1/8 + 1/8 = 5/8.$

b) $P(A - B) = 3/8$ (La parte verde)

c) $\underbrace{P(A' \cup B')}_{\text{MORGAN } (*)} = P(A\cap B)' = 1 - \underbrace{P(A\cap B)}_{1/8} = 7/8.$

7) El aeropuerto de Cusco tiene dos puntos de seguridad. Denotamos por A el evento "el primer punto de seguridad está indisponible", y por B el evento "el segundo punto de seguridad está indisponible". Si sabemos que el primer punto de seguridad está disponible 80 % del tiempo, que el segundo punto está disponible 70 % del tiempo, y que los puntos se encuentran ambos indisponibles 6 % del tiempo. Calcular la probabilidad de que ningún punto sea indisponible.



A: el primer punto es indisponible (no funciona)

B: el segundo punto es indisponible (no funciona)

$P(\text{el } 1^{\circ}\ \underbrace{\text{esté disponible}}_{\text{funciona}}) = 0.8 \rightarrow \underbrace{P(\text{el } 1^{\circ} \text{ indisp.})}_{A} = 0.2$

$P(\text{el } 2^{\circ}\ \underbrace{\text{esté disponible}}_{\text{funciona}}) = 0.7 \rightarrow \underbrace{P(\text{el } 2^{\circ} \text{ indisp})}_{B} = 0.3$

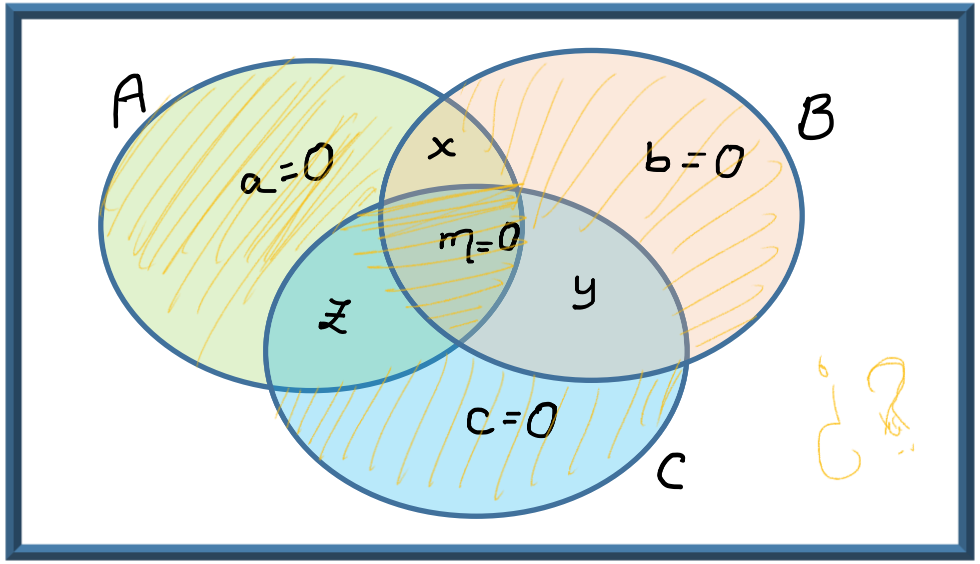
$\underbrace{P(\text{ninguno indisponible})}_{\text{Ambos funcionan}} = 0.56$

UTEC

EJERCICIOS

8) Un cinema tiene actualmente solo 3 películas y ofrece a sus clientes VIP, un paquete de exactamente 2 películas por 15 soles. Por ello, los clientes compran el paquete o no compran nada. Haciendo una evaluación de las películas se tiene que la proporción de clientes que solicitó A, B y **C** es ¼, 1/3 y **5/12** respectivamente. ¿Cuál es la probabilidad de no solicitar ninguna película?

$$P(A)=\frac{1}{4},\quad P(B)=\frac{1}{3},\quad P(C)=\frac{5}{12}$$



$P(A) = x + z = 1/4$

$P(B) = x + y = 1/3$

$P(C) = y + z = 5/12$

Sumar: $2x + 2y + 2z = 1$

$x + y + z = 0.5$

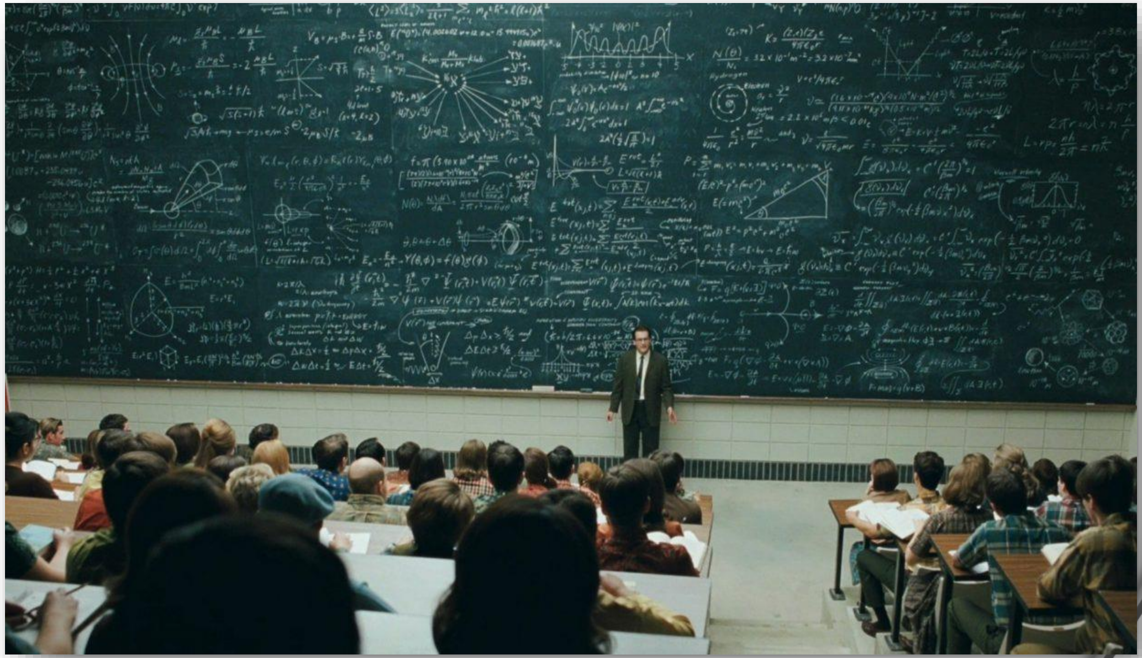
Se pide, $\underbrace{P(A' \cap B' \cap C')}_{\text{Afuera de los 3 círculos}} = 1 - P\underbrace{(\text{Adentro de los círculos})}_{(x+y+z)} = 1 - 0.5 = 0.5$

EJERCICIOS

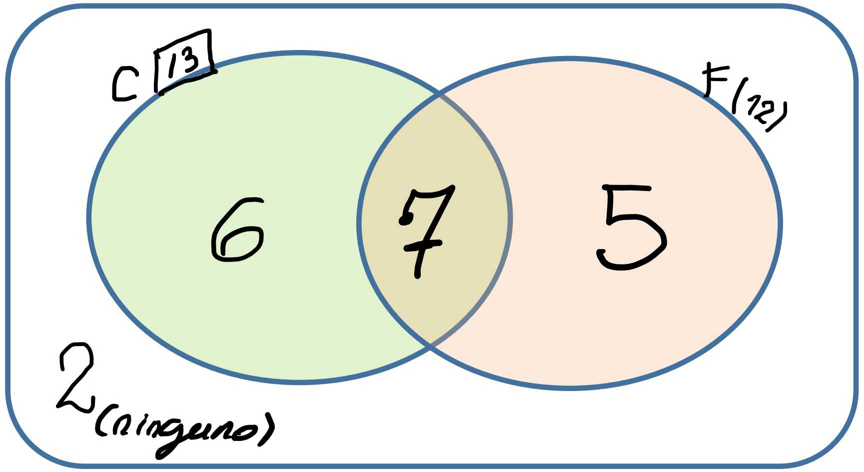
9) Se encuesta a 20 estudiantes, acerca de su preferencia por 2 cursos. De ellos 12 manifiestan que les agrada Física, 13 indican que les agrada Cálculo y 2 estudiantes indicaron que no les agrada ninguno de los cursos,

a) Si se selecciona un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que le agrade ambos cursos?

b) Si se selecciona 4 estudiantes, ¿cuál es la probabilidad de que solo a 2 de ellos les guste Física?



TOTAL = 20



a) Seleccionar 1 estudiante $\Rightarrow n(\Omega) = C_1^{20} = 20$

Evento: E = le agrada C y F $\Rightarrow n(E) = C_1^7 = 7$

$$P(E) = \frac{7}{20} = 0.35.$$

b) Seleccionar 4 estudiantes $\Rightarrow n(\Omega) = C_4^{20}$

Evento: A = solo a 2 les gusta F = 2F y 2 F'

$$\Rightarrow n(A) = C_2^{12} \times C_2^{8}$$

$$P(A) = \frac{C_2^{12} \times C_2^{8}}{C_4^{20}}$$

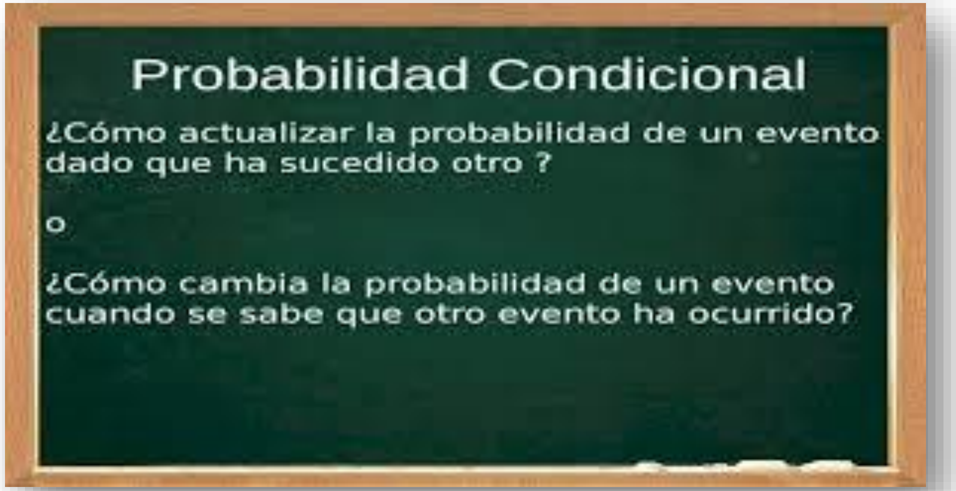
UTEC

PROBABILIDAD CONDICIONAL

Sean los eventos U y V.

U: Evento que se desea que suceda.

V: Evento que ya sucedió y del cual se tiene información.



U/V: **U sabiendo V**
U dado V

PROBABILIDAD DE U DADO *V*:

$$P(U|V) = \frac{P(U \cap V)}{P(V)}$$

$P(A') = \frac{3}{4}$

1) Se conoce: $\underbrace{P(A) = \frac{1}{4}}$, $P(B) = \frac{1}{8}$, $P(A|B) = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{\underbrace{P(B)}_{1/8}} = \frac{2}{3} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{12}$

a) Calcule $P(B|A)$

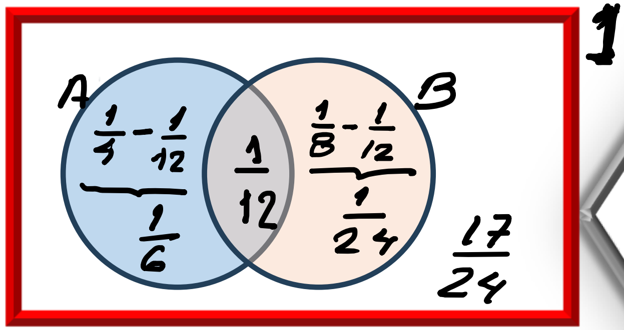
$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{1/12}{1/4} = \frac{1}{3} = 0.333\ldots$$

b) Calcule $P(B|A')$

$$P(B/A') = \frac{P(B \cap A')}{P(A')} = \frac{1/24}{3/4} = \frac{1}{18}$$

c) Calcule $P(B|(A \cup B))$

$$P(B/A \cup B) = \frac{P(B \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{\overbrace{\frac{1}{12} + \frac{1}{24}}^{P(B)}}{\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24}\right)}$$



PROBABILIDAD CONDICIONAL

PROBABILIDAD DE A DADO B:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

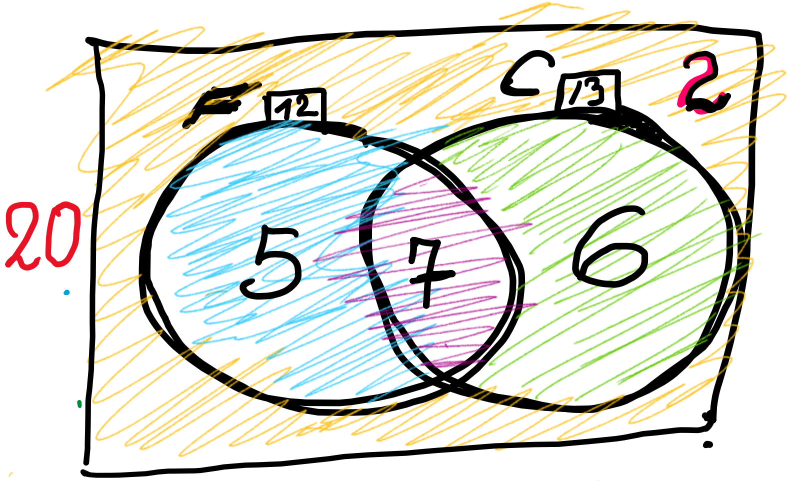
A: lo q' se quiere
B: lo q' se sabe

2) Se encuesta a 20 estudiantes, acerca de su preferencia por 2 cursos. De ellos 12 manifiestan que les agrada Física, 13 indican que les agrada Cálculo y 2 estudiantes indicaron que no les agrada ninguno de los cursos,

a) Se seleccionó un estudiante al azar. Si **se sabe que le agrada alguno de los 2 cursos** ¿cuál es la probabilidad de que **le agrade ambos cursos**?

b) Al seleccionar un estudiante **se sabe que no le agrada Cálculo**, ¿cuál es la probabilidad de que le guste Física?

12F, 13C, 2 NINGUNO



a) A: Que le agrade ambos cursos
B: le agrada alguno de los 2 cursos = F∪C

$$P(A/B) = \frac{P(\underbrace{A\cap B}_{F\cap C})}{P(B)} = \frac{\frac{7}{20}}{\frac{18}{20}} = \frac{7}{18}$$

$P(B) \Downarrow P(F\cup C)$

b) $P(F/C') = \frac{P(F\cap C')}{P(C')} = \frac{\frac{5}{20}}{\frac{5+2}{20}} = \frac{5}{7}$

sí Física   no cálculo

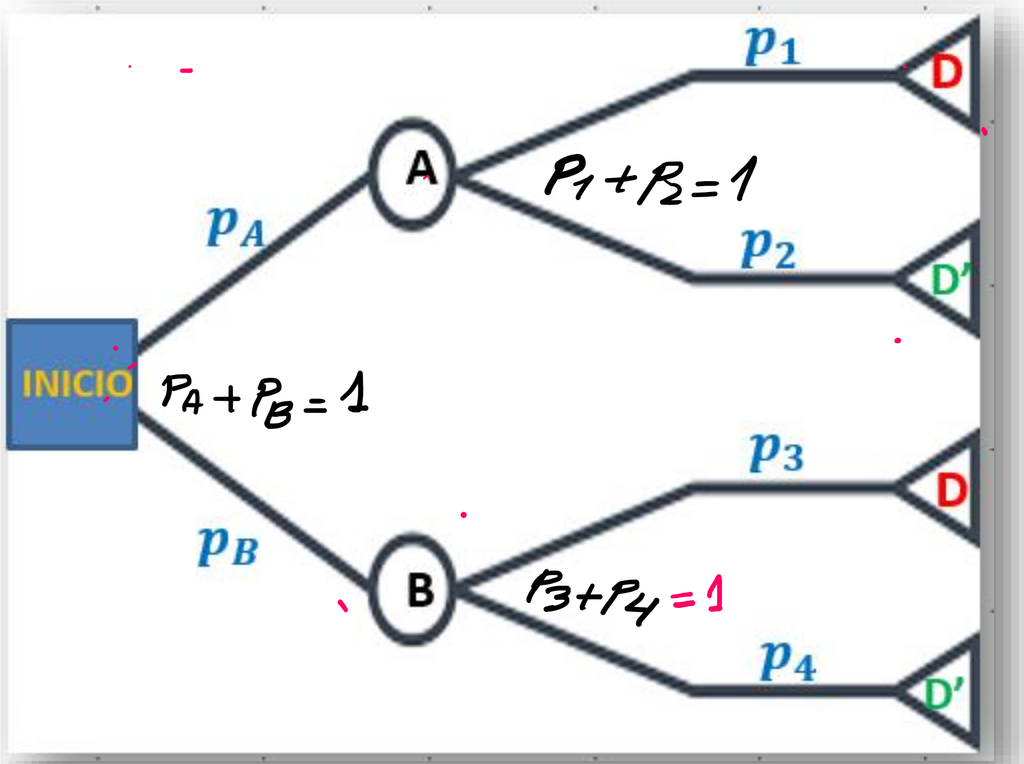
PROBABILIDAD TOTAL Y TEOREMA DE BAYES

En ARBOL:
* O → +
* y → ×

Equipo de ciencias

Según **el árbol** de la figura:

Eventos finales



¿Cuál es la probabilidad del evento D?

¿Cuál es la probabilidad del evento D?

PROBABILIDAD TOTAL:

$$P(D) = p_A.p_1 + p_B.p_3$$
$$P(D') = p_A.p_2 + p_B.p_4$$

PROBABILIDAD DE BAYES: Se tiene cuando se conoce la ocurrencia de uno de los eventos finales y se desea que haya ocurrido uno de los eventos primarios.

Si ocurre el evento **D** ¿Cuál es la probabilidad de que haya ocurrido el evento A?

$$P(A|D) = \frac{P(A\cap D)}{P(D)} = \frac{p_A.p_1}{p_A.p_1 + p_B.p_3}$$

Si ocurre el evento **D'** ¿Cuál es la probabilidad de que haya ocurrido el evento B?

$$P(B|D') = \frac{P(B\cap D')}{P(D')} = \frac{p_B.p_4}{p_A.p_2 + p_B.p_4}$$

* Separación de caminos ⇒ sumar probab.
* Caminos consecutivos ⇒ multiplicar probab.

UTEC

TEOREMA DE BAYES

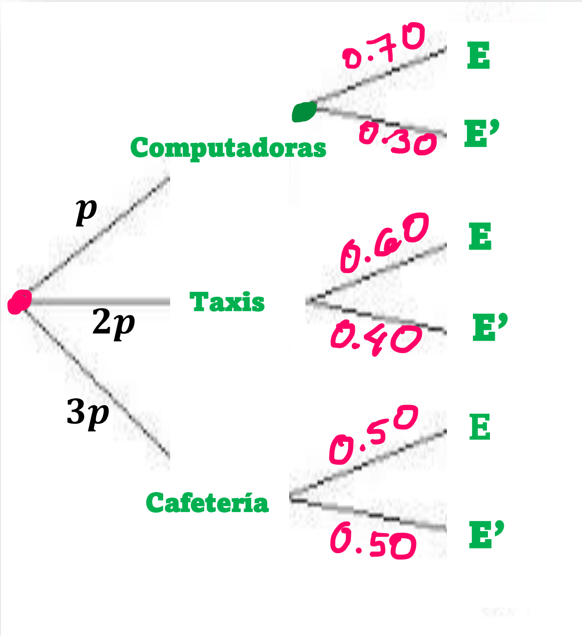
PROBABILIDAD DE U DADO V:

$$P(U|V)=\frac{P(U\cap V)}{P(V)}$$

V → Lo q' ya se sabe
U → Lo q' se quiere

3) El señor Gonzales tiene un capital y desea realizar una inversión. Tiene 3 posibilidades.
Invertir en un negocio de computadoras, con el cual el éxito se logra un 70% de las veces.
Invertir en Taxis, con el cuál el 60% de las veces se logra el éxito.
Invertir en una cafetería, con el cual el 50% de las veces se logra el éxito.
Por la información que dispone, él considera que las probabilidades de invertir en una cafetería, en taxis y en computadoras, son proporcionales a 3, 2 y 1.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga éxito al hacer una inversión?
b) Si **tuvo éxito** ¿cuál es la probabilidad de que haya invertido en cafetería?
c) Si **no tuvo éxito** ¿cuál es la probabilidad de que haya invertido en taxis?
d) Si tuvo éxito ¿cuál es la probabilidad de que no haya invertido en computadoras?



$3p+2p+1p=1 \Rightarrow p=1/6$

a) $P(E)=\frac{1}{6}.0,7+\frac{1}{3}.0,6+\frac{1}{2}.0,5=0,567.$ PROB. TOTAL

b) $P(cafe|\acute{e}xito)=\frac{P(caf\acute{e}\cap exito)}{P(\acute{e}xito)}=\frac{0,5\times 0,5}{0,567}$**=0,441**

c) $P(taxis|no\ \acute{e}xito)=\frac{P(taxis\cap no\ exito)}{P(no\ \acute{e}xito)}=\frac{\frac{1}{3}\times 0,4}{1-0,567}=\mathbf{0,308}$

d) $P(no\ computadora|\acute{e}xito)=\frac{P(no\ compu\cap exito)}{P(\acute{e}xito)}=\frac{\frac{1}{3}\times 0,6+\frac{1}{2}\times 0,5}{0,567}=$ $\mathbf{0,794}$

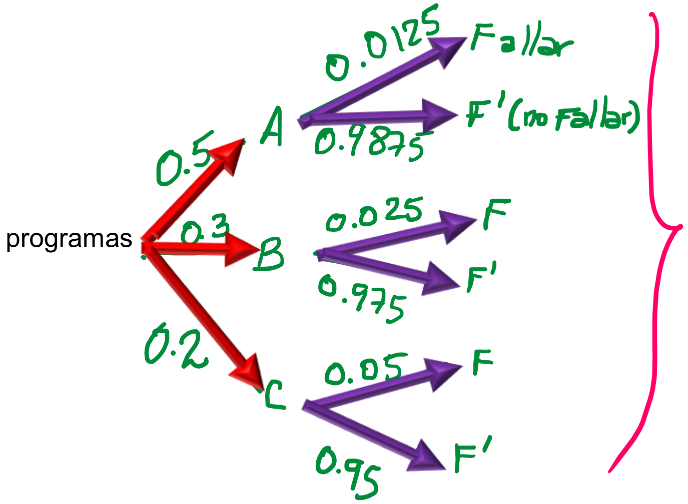
NOTA: $P(A|B)+P(A'|B)=1$

TEOREMA DE BAYES

4) En una empresa que desarrolla software los programadores han sido clasificados en tres categorías: A, B y C. Se sabe que aproximadamente uno de cada 80 programas codificados por los programadores de la categoría A presentan fallas durante su ejecución. La probabilidad que un programa codificado por los programadores de la categoría B no falle es 0,975 y la probabilidad que un programa codificado por los programadores de la categoría C no falle es 0,95. Si de todos los programas desarrollados, el 50% es codificado por los programadores de la categoría A y el 30% son codificados por los programadores de la categoría B. Si se elige un programa al azar:

a. ¿Cuál es la probabilidad que presente fallas durante su ejecución?

b. Si el programa elegido presenta fallas durante su ejecución, ¿cuál es la probabilidad que haya sido codificado por un programador de la categoría C?



Esto es una probabilidad total

$a)\ P(F) = 0,5 \times 0,0125 + 0,3 \times 0,025 + 0,2 \times 0,05 = 0,02375$

$b)\ P(C|F) = \frac{P(C \cap F)}{P(F)} = \frac{0,2 \times 0,05}{0,02375} = 0,421.$

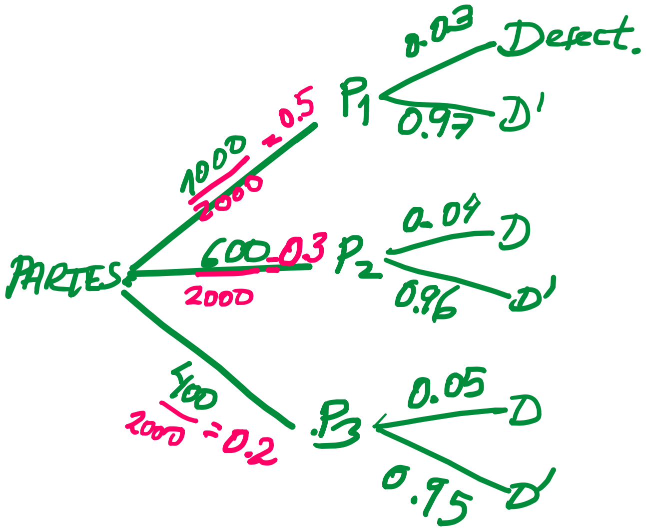
UTEC

TEOREMA DE BAYES

5) Un ensamblador de computadoras usa partes que provienen de tres proveedores P_1, P_2, y P_3. Para ensamblarlas solo se usa de un proveedor. De 2000 partes recibidas, 1000 provienen de P_1, 600 de P_2 y el resto de P_3. De experiencias pasadas, el ensamblador sabe que las partes defectuosas que provienen de P_1, P_2 y P_3 son respectivamente 3%, 4%, y 5%. Si se elige una computadora al azar:

a. ¿Cuál es la probabilidad de que contenga una parte defectuosa?

b. Si se observa que la computadora tiene una parte defectuosa, ¿Cuál es la probabilidad de que proceda del proveedor tres?



Probabilidad total

a) $P(D) = 0.5 \times 0.03 + 0.3 \times 0.04 + 0.2 \times 0.05 = 0.037$

b) $P(P_3 | D) = \dfrac{P(P_3 \cap D)}{P(D)} = \dfrac{0.2 \times 0.05}{0.037}$

$* \; P(U/V) = \dfrac{P(U \cap V)}{P(V)}$

EVENTOS INDEPENDIENTES

Si 2 eventos A y B son independientes, también lo son, los eventos que contienen sus complementos:

Si A y B independientes, entonces:
A' y B son independientes; A y B' son independientes y A' y B' son independientes.

NOTA:

EVENTOS INDEPENDIENTES ➔ La ocurrencia de uno de ellos, no afecta al otro ➔ $\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A).P(B)}$

EVENTOS EXCLUYENTES ➔ Los dos eventos no pueden ocurrir simultáneamente➔ $\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$

EVENTOS EQUIPROBABLES➔ Cuando los eventos INDIVIDUALES tienen la misma probabilidad.
Nota: Si en un experimento aleatorio, su espacio muestral es: **Ω=**$\{\boldsymbol{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n}\}$ se llamará **Espacio Equiprobable,** cuando las probabilidades de ocurrencia de cada uno de sus eventos atómicos, es la misma:

$$P(e_1) = P(e_2) = P(e_3) = \cdots = P(e_n) = \mathrm{p} = \frac{1}{\mathrm{n}}.$$

Luego, la probabilidad de cualquier otro evento se halla solo sumando las probabilidades individuales.

EVENTOS INDEPENDIENTES

8) Ana, Beto y Ciro están en una misma sección de estadística.
La probabilidad de que aprueben el curso es 80%, 70% y 60% respectivamente.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que todos aprueben el curso?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que todos desaprueben?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que a lo más uno de ellos apruebe?

$A \to$ aprobar

$A' \to$ Desaprobar

$P(A_A)=0.80,\ P(A_B)=0.70,\ P(A_C)=0.60 \Rightarrow$ Ana, Beto, Ciro : Indep,

a) $P(A_A \cap A_B \cap A_C) = P(A_A) \times P(A_B) \times P(A_C) = 0.8 \times 0.7 \times 0.6 = 0.336$

b) $P(A'_A \cap A'_B \cap A'_C) = P(A'_A) \times P(A'_B) \times P(A'_C) = 0.2 \times 0.3 \times 0.4 = 0.024$

c) $P(\text{A lo más 1 aprobado}) = P(\text{0 aprobados} \vee \text{1 aprobado})$

$= \underbrace{P(\text{0 aprobados})}_{} + P(\text{1 aprobado})$

$= 0.024 + P(A_A \cap A'_B \cap A'_C \vee A'_A \cap A_B \cap A'_C \vee A'_A \cap A'_B \cap A_C)$

$= 0.024 + [0.8 \times 0.3 \times 0.4 + 0.2 \times 0.7 \times 0.4 + 0.2 \times 0.3 \times 0.6]$

EJERCICIO

9) El éxito de un proyecto de inversión depende del trabajo de un Ingeniero de Software, un administrador y un contador. Se sabe que la probabilidad de que el Ingeniero de Software falle en su labor es de 2%, la probabilidad de que el administrador falle es de 5% y la probabilidad de que el contador falle es de 7%. Para que el proyecto sea exitoso, ninguno de los 3 debe fallar. Asuma que las labores de los tres integrantes son independientes entre sí.

1.¿Cuál es la probabilidad de que el proyecto tenga éxito?

2.¿Cuál es la probabilidad de que en el proyecto solo dos fallan?

3.Cuál es la probabilidad de que fallen a lo mas dos de ellos?

F: FALLAR
F': NO FALLAR

$P(F_A) = 0.05$
$P(F_C) = 0.07$
$P(F_I) = 0.02$

1) $P(\text{Proy. Exitoso}) = P(F_A' \cap F_C' \cap F_I') = 0.95 \times 0.93 \times 0.98 = 0.86583$

2) $P(2\ \text{fallan}) = P(F_A \cap F_C \cap F_I' \text{ ó } F_A \cap F_C' \cap F_I \text{ ó } F_A' \cap F_C \cap F_I)$
$= 0.05 \times 0.07 \times 0.98 + 0.05 \times 0.93 \times 0.02 + 0.95 \times 0.07 \times 0.02 = 0.0057$

3) $P(\text{a lo mas } 2 \text{ fallas}) = 1 - P(3\ \text{fallas}) = 1 - P(F_A \cap F_C \cap F_I) = 1 - (0.05 \times 0.07 \times 0.02)$

UTEC
UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA Y TECNOLOGÍA

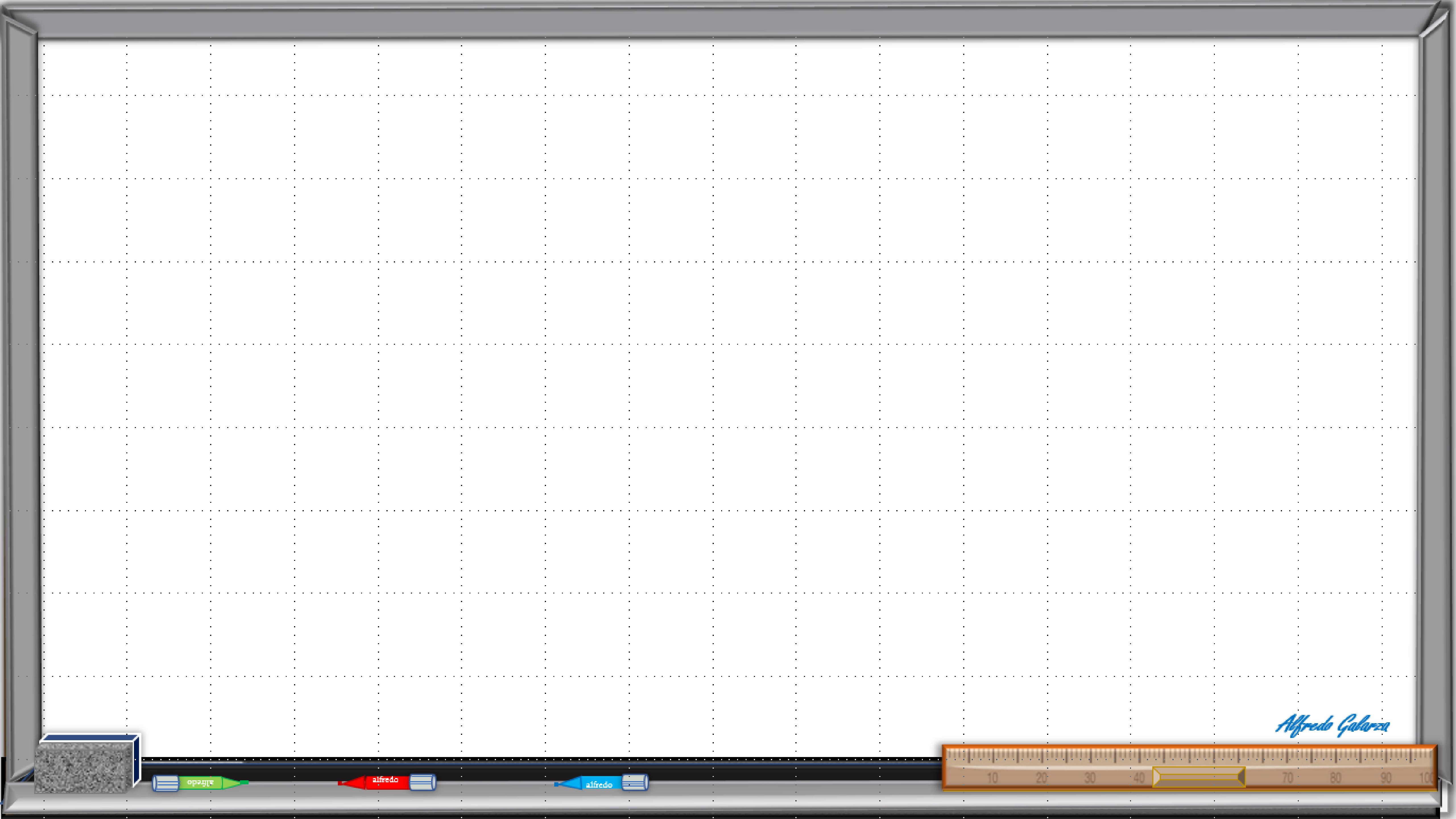
COMANDOS ÚTILES

Operaciones de conjuntos:

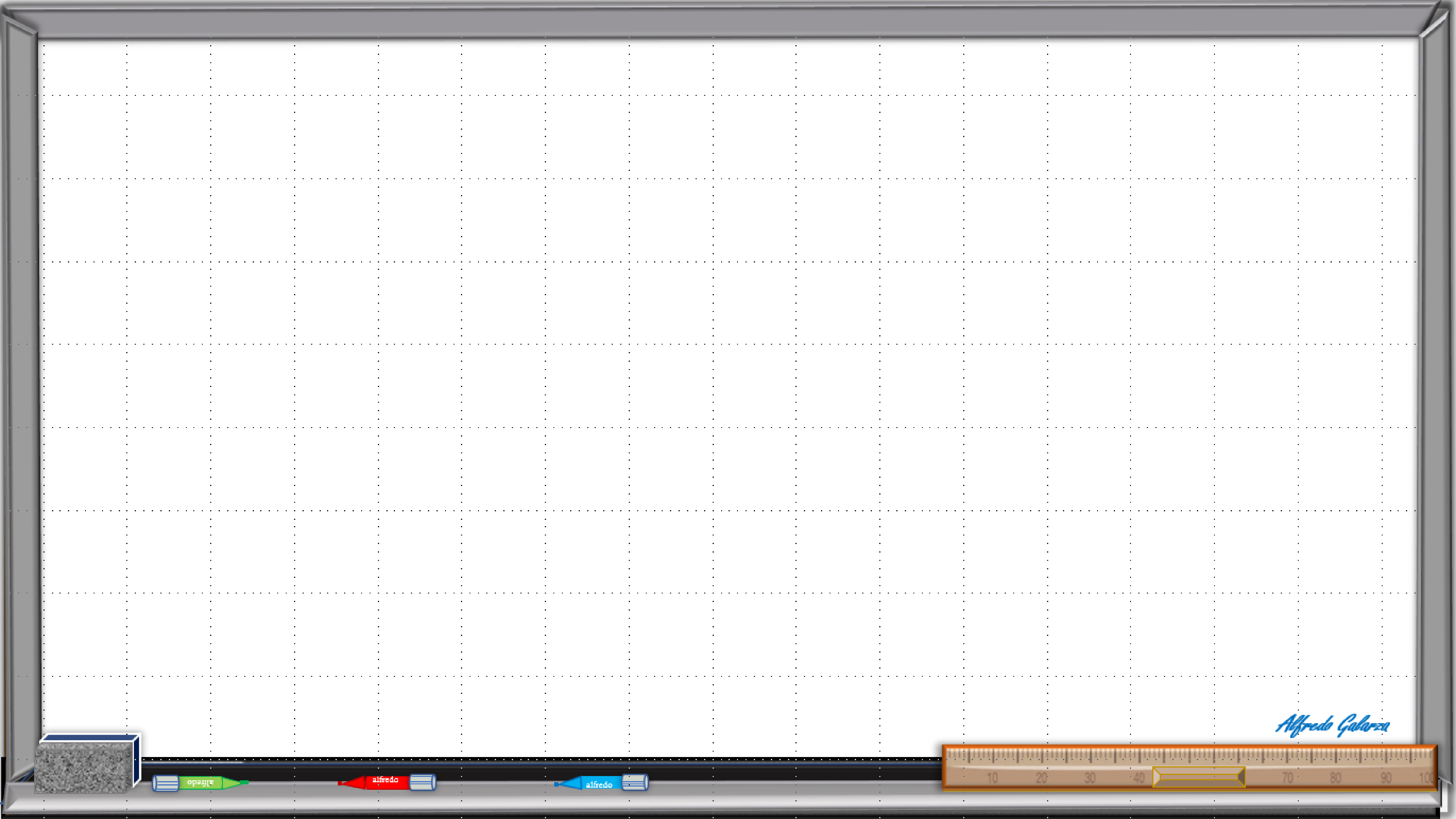
- `union`: unión de dos conjuntos.
- `intersect`: intersección de dos conjuntos.
- `setdiff`: diferencia de dos conjuntos.
- `seteq`: igualdad de conjuntos.
- `is.element`: pertenencia a un conjunto.

Conteo:

- `factorial`: calcula el factorial de un número, `factorial(n)` es más rápido y mejor que `prod(1:n)`.
- `choose`: calcula el combinatorio de n en k, es mejor que trabajar con los factoriales directamente.
- **`combn`** : lista de todas las combinaciones posibles sin orden y sin reemplazo; con la función `t` es útil para conteo.
- **`expand.grid`**: producto cartesiano en una tabla. Todas las posibilidades con orden y con reemplazo.



alfredo
alfredo
alfredo
Alfredo Galarza

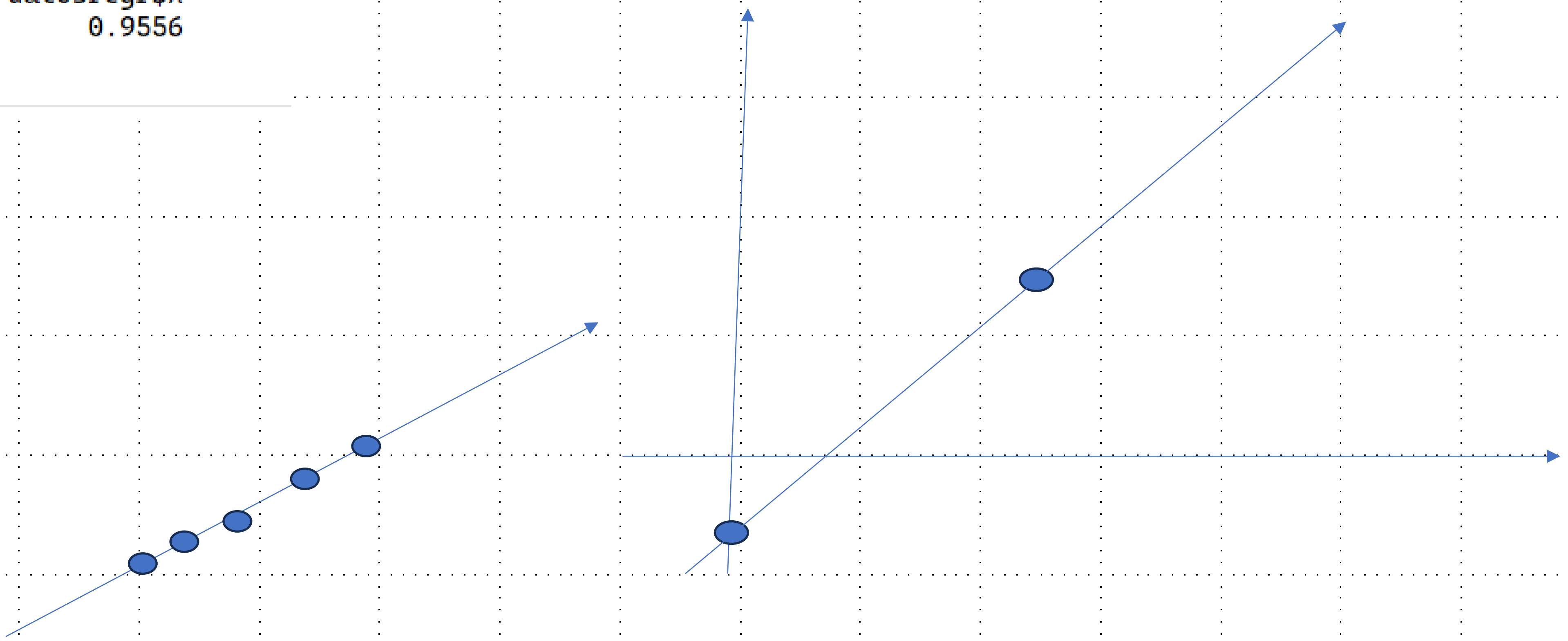

Alfredo Galarza
alfredo
alfredo
alfredo
10 20 30 40 70 80 90 100

Comandos

Estos son algunos comandos útiles, ejecutar algunos de los ejemplos puede ser ilustrativo.

- `is.na`: determina si un valor es un dato faltante, retornando `TRUE` es ese caso y `FALSE` en caso contrario.
- `complete.cases`: retorna verdadero para cada observación de la tabla que no tenga datos faltantes.
- `sum`: retorna la suma de los valores; en R los valores lógicos son numéricos, `TRUE` vale 1 y `FALSE` vale 0.
- `mean`: retorna el promedio de los valores; al colocar `na.rm = TRUE` descarta los valores faltantes.
- `median`: retorna una mediana de los valores; se usan convenciones para hablar de *la mediana*.
- `min`: retorna el mínimo de los valores; al colocar `na.rm = TRUE` descarta los valores faltantes.
- `max`: retorna el máximo de los valores; al colocar `na.rm = TRUE` descarta los valores faltantes.
- `var`: retorna la varianza muestral de los valores; tiene el parámetro `na.rm`.
- `sd`: retorna la desviación estándar muestral de los valores; tiene el parámetro `na.rm`.
- `table`: clasifica en una tabla de frecuencia absoluta los valores.
- `stripchart`: muestra una gráfica de puntos, puede ser útil para pocos valores; pueden apilarse los puntos.
- `hist`: muestra un histograma de los valores; clases automáticas o controladas con el parámetro `breaks`.
- `barplot`: muestra un diagrama de barras; se usa típicamente en conjunción con `table`.
- `boxplot`: muestra un diagrama de caja y bigotes; presentación gráfica de descriptores numéricos.
- `plot`: muestra un diagrama de dispersión; sirve para ver la relación entre dos variables numéricas.

```
Coefficients:
(Intercept)  datosregr$X
    -0.2258       0.9556
```



Alfredo Galarza