Contents

Elettrotecnica

Giuseppe Bumma

March 2, 2023

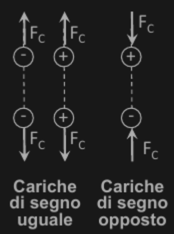
1 Introduzione

1.1 La carica elettrica e la forza di Coulomb

Se due particelle cariche, supposte puntiformi, di carica q_0 e q_1, siano a una distanza finita fra loro nel vuoto, la **legge di Coulomb** descrive la forza elettrostatica interagente fra loro:

$$|F_C| \propto \frac{q_1 q_2}{e^2}$$

con r distanza tra le due cariche.



La forza di Coulomb F_C è diretta nella direzione di r. Quando q_1 e q_2 hanno lo stesso segno la forza di Coulomb è repulsiva. Quando sono di segno opposto la forza è attrattiva.
L'unità di misura, nel Sistema Internazionale (SI), della forza di Coulomb è il newton [N] ed il coefficiente di proporzionalità è $1/(4\pi\epsilon_0)$ dove ϵ_0 è la costante dielettrica del vuoto [$\epsilon_0 = 8,854x10^{-12}C^2/(Nm^2)$].

L'unità di misura della carica elettrica nel sistema di misura SI è il **coulomb** [C]. La carica elementare nel SI è e ove

$$e = 1,6021x10^{-19}C$$

Protone ed elettrone hanno carica di valore assoluto e. Due protoni o due elettroni si respingono. Un protone ed un elettrone si attraggono. Per convenzione la carica del protone è positiva ($+e$) e quella dell'elettrone negativa (-e).
In natura esistano solamente cariche multiple di e. Non può esistere una carica sottomultiplo di e.

1.1.1 La cariche elettriche ed il loro moto

Forza che agisce su una particella carica:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$$

$\vec{F}$: forza [N] $\quad$ $\vec{q}$: carica elettrica [C] $\quad$ $\vec{u}$: velocità della carica [m/s]

$\vec{E}$: campo elettrico $\quad$ $\vec{B}$: vettore induzione magnetica

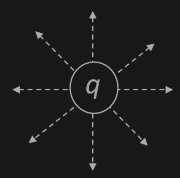
- Se $\vec{B} = 0$ si ha la cosiddetta **Forza elettrostatica**

  $$\vec{F} = q\vec{E}$$

  Quindi il campo elettrico $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$ è una forza per unità di carica [N/C].
  Campo elettrico e forza elettrostatica da cui esso deriva hanno la stessa direzione. Perciò il campo produce un'accelerazione della carica lungo la propria direzione.
  Nel SI l'unità di misura di $\vec{E}$ è: $N/C = V/m = m\ kg\ s^{-2}C^{-1}$.

- Se $\vec{E} = 0$ si ha la **Forza di Lorentz**
$$\vec{F} = q(\vec{u} \times \vec{B})$$
Quindi il vettore induzione magnetica $\vec{B}$ è una forza per unità di carica e di velocità $[Ns/Cm]$. Campo elettrico e forza elettrostatica da cui esso deriva hanno la stessa direzione. Perciò il campo produce un'accelerazione della carica lungo la propria direzione. Nel SI l'unità di misura di $\vec{E}$ è: $N/C = V/m = m \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot C^{-1}$.

Una particella carica induce una forza sulle cariche che la circondano. Tale forza può essere attrattiva o repulsiva. Essa è la forza Coulombiana F_C (o forza elettrostatica). In ogni punto della regione attorno alla carica o in presenza ad una distribuzione di cariche vi è un campo elettrico $\vec{E}(x, y, z)$ definito dalla forza indotta su una carica di prova puntiforme unitaria posta nel punto considerato.



q $\Longrightarrow$ $\mathbf{F_c}$ $\Longleftrightarrow$ $\mathbf{E}$

Qualora su una carica in moto si induca una forza deviante perpendicolare al moto, tale forza è la forza magnetica o forza di Lorentz F_L. Il campo di induzione magnetica $\vec{B}(x, y, z)$, legato a $\vec{F_L}$, è dato dalla forza indotta su una carica unitaria in moto per unità di velocità della carica stessa. La direzione del campo $\vec{B}$ è perpendicolare alla velocità ed alla forza $\vec{F}L$. Il campo $\vec{B}$ è perpendicolare alla velocità della carica ed alla forza indotta.

1.2 Densità volumetrica di carica

La carica elettrica non può essere creata o distrutta (legge della conservazione della carica elettrica). Può solo essere trasferita. Pertanto, la carica elettrica totale di un sistema isolato non può variare.
La densità volumetrica di carica (o distribuzione di carica) è definita da:

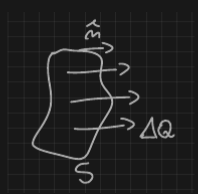
$$\rho_C(x, y, z) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta \tau} = \frac{dt}{dq}$$

dove $d\tau$ è l'elemento infinitesimo di volume.

1.2.1 Densità di corrente J

La densità di corrente elettrica $\vec{J}$ è il vettore il cui modulo è la quantità di carica che attraversa una superficie unitaria perpendicolare alla velocità $\vec{u}$ delle cariche. La direzione ed il verso di $\vec{J}$ sono la direzione ed il verso di $\vec{u}$:
$$\vec{J} \cdot \hat{n} = \lim_{\Delta S \to 0} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S \Delta t}$$

$\vec{J}$: densità di corrente $\left[\frac{C}{m^2 \cdot s}\right] = \left[\frac{A}{m^2}\right]$



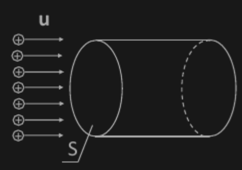
$\vec{J}(x, y, z)$ definisce un campo vettoriale ed è la densità di flusso delle cariche. La corrente elettrica i è il flusso di carica attraverso una superficie S:
$$i = \iint_S \vec{J} \cdot \hat{n} \; dS$$

1.3 Corrente elettrica

La corrente elettrica i che attraversa una superficie è la quantità di carica che attraversa la superficie nell'unità di tempo:

$$i = \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

Se si considera un cavo conduttore, ad esempio, la corrente nel conduttore è la quantità di carica che attraversa una sezione del cavo nell'unità di tempo.



L'unità di misura SI è l'ampere $[A]$ dove $A = \frac{C}{s}$

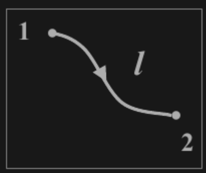
La **corrente elettrica istantanea** è:

$$i(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$$

1.4 Tensione elettrica e differenza di potenziale elettrico

La *tensione elettrica* e_{12} fra i punti 1 e 2 lungo il percorso l, è il lavoro $L_{q=1}^{1\to 2,l}$ che il campo elettrico $\vec{E}(x, y, z)$ compie per portare una carica unitaria dl punto 1 al punto 2 lungo l:

$$e_{12} = \int_{1,l}^{2} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



Per spostare la carica q dal punto 1 al 2 il lavoro è:

$$L_q^{1\to 2,l} = q \cdot e_{12}$$

L'unità di misura SI di e_{12} è il volt $[V]$ dove $V = \frac{J}{C} = m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot C^{-1}$. Qualora la tensione e 12 dipenda dai valori di una funzione $v(x, y, z)$ definita in una regione che contiene la linea l essa diviene:

$$e_{12} = \int_{1,l}^{2} \vec{E}\ d\vec{l} = -\int_{1,l}^{2} dv = v_1 - v_2 = v_{12}$$

dove $v(x, y, z)$ è la **funzione potenziale elettrico** e v_{12} è la **differenza di potenziale elettrico**.

Poiché v_{12} è la differenza fra i valori che la funzione $v(x, y, z)$ assume nel punto iniziale e nel punto finale di l, v_{12} non dipende dal percorso che unisce i due punti. Quindi il campo $\vec{E}$ è un **vettore conservativo** [1] con $\vec{E} = \vec{\nabla} \cdot v(x, y, z)$.

Per un percorso chiuso l_c contenuto nella regione ove $\vec{E}$ è conservativo, si ha:

$$e_l = \oint_{l_c} \vec{E} \cdot d\vec{l_c} = -\oint_{l_c} \vec{\nabla} \cdot v\ d\vec{l_c} = 0$$

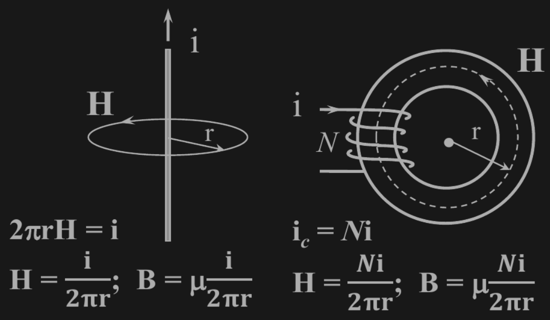
1.5 Legge di Ampere-Prima legge di Maxwell

La grandezza vettoriale campo magnetico H è definito dalla legge di Ampere (prima legge di Maxwell)

$$\oint_{l_c} \vec{H}\ d\vec{l_c} = i_t$$

[1] un campo conservativo è un campo il cui integrale lineare è indipendente dalla traiettoria

dove la corrente totale $i_t = i + i_s$.
In questo caso la corrente totale i_t è il flusso del vettore J_t i ovunque solenoidale ($J_t = J + \partial D/\partial t$). Perciò i_t è il flusso concatenato con la linea chiusa l_C contorno della superficie che attraversa. Il verso di percorrenza di l è determinato con regola della vite destrogira.



L'unità di misura SI di $\vec{H}$ è l'ampere su metro $[\frac{A}{m}]$. Per materiali lineari: $\vec{B} = \mu\vec{H}$ ove mu è la permeabilità magnetica del materiale. Per mezzi non lineari $\vec{B} = f(\vec{H})$. Solitamente per i materiali magnetici non lineari f è una funzione **isteretica** (materiali ferromagnetici).

$$\begin{aligned}
\oint_{l_C} \vec{H}\, d\vec{l} &= \iint_S \left(\vec{J} + \frac{\partial D}{\partial t}\right) \hat{n}\, dS \\
&= \underbrace{\iint_S \vec{J}\, \hat{n}\, dS}_{\text{corrente di conduzione } I} + \underbrace{\iint_S \frac{\partial D}{\partial t}\, \hat{n}\, dS}_{\iint_S \partial D\ \hat{n}\ dS = \vec{\Phi}(D)} = \\
&= I + \underbrace{\frac{\partial \vec{\Phi}(D)}{\partial t}}_{\text{corrente di spostamento}}
\end{aligned}$$

Immaginiamo di descrivere due superfici S_1 e S_2 sulla linea chiusa l_C

$$\oint_{l_C} \vec{H}\, d\vec{l} = \iint_{S_1} \left(\vec{J} + \frac{\partial D}{\partial t}\right) \hat{n}_1\, dS_1 = \iint_{S_2} \left(\vec{J} + \frac{\partial D}{\partial t}\right) \hat{n}_2\, dS_2$$

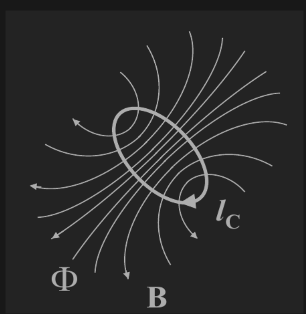
Prendiamo una superficie chiusa S_C su S_2, allora

$$\oint_{S_C} \underbrace{\left(\vec{J} + \frac{\partial D}{\partial t}\right)}_{\text{vettore solenoidale}} \hat{n}_C\, dS_C = \iint_{S_2} \left(\vec{J} + \frac{\partial D}{\partial t}\right) \hat{n}_2\, dS_2 - \iint_{S_1} \left(\vec{J} + \frac{\partial D}{\partial t}\right) \hat{n}_1\, dS_1 = 0$$

1.6 Legge dell'induzione di Faraday-Seconda legge di Maxwell

La legge dell'induzione (o legge di Faraday od anche seconda legge di Maxwell) stabilisce che:

$$e_{l_C} = \oint_{l_C} \vec{E}\, d\vec{l}_C = -\frac{d\Phi}{dt}$$

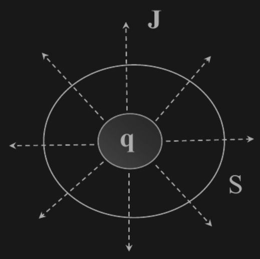


ove Φ è il flusso magnetico concatenato con la linea chiusa l_c. (direzione di l_C data dalla regola della vite destrogira).
e_{l_c} è la tensione elettrica indotta sulla linea chiusa dalla variazione del flusso magnetico concatenato con l_c; essa è detta **forza elettromotrice** (f.e.m.).

N.B. In questo caso $\vec{E}$ non à conservativo.

1.7 Conservazione della carica elettrica

La carica elettrica non si crea né si distrugge. Perciò la diminuzione della carica elettrica all'interno di un volume τ corrisponde alle cariche che lasciano τ fluendo attraverso la superficie chiusa S, superficie esterna di τ.



La ***legge di conservazione della carica elettrica*** afferma questo ed è espressa dall'espressione:

$$\oiint_S \vec{J}\ \hat{n}\ dS = -\frac{dQ}{dt}$$

si ha variazione di cariche solo se c'è passaggio di corrente.

1.8 Legge di Gauss

Il campo di induzione elettrica o campo spostamento elettrico è definito dalla legge di Gauss. Considerando una superficie chiusa S, che delimita il volume V; sia $\hat{n}$ il versore normale alla superficie. La legge di Gauss afferma che:

$$\oiint_S \vec{D}\ \hat{n}\ dS = \iiint_V \rho\ dV = Q$$

1.9 Forza elettromotrice

$\vec{E}$ e $\vec{B}$ descrivono le forze prodotte dal fenomeno elettromagnetico sulle cariche (forza elettrica per unità di carica e forza magnetica per unità di carica e di velocità della carica). Esse descrivono ciò che viene prodotto dal fenomeno EM. Ne descrivono l'**effetto**.

$\vec{D}$ ed $\vec{H}$ descrivono ciò che produce il fenomeno EM (la carica elettrica nel primo caso e la corrente totale nel secondo). Ne descrivono la **causa**.

1.10 Leggi dell'Elettromagnetismo in forma integrale

$\oint_{l_c} \vec{H}\ d\vec{l_c} = i_t$	1^o legge di Maxwell
$\oint_{l_c} \vec{E}\ d\vec{l_c} = \frac{d\Phi}{dt}$	2^o legge di Maxwell
$\oiint \vec{J}\ \hat{n} dS = -\frac{dq}{dt}$	legge di conservazione della carica
$\oiint \vec{D}\ \hat{n} dS = q$	legge di Gauss
$\oiint \vec{J_t}\ \hat{n} dS = 0$	$\vec{J}t$ ovunque solenoidale
t $\oiint_S \vec{B}\ \hat{n} dS = 0$	$\vec{B}$ ovunque solenoidale

Tre di queste sei equazioni sono linearmente indipendenti, le altre tre si ottengono dalle prime tre.

1.11 Leggi dell'Elettromagnetismo in forma locale

$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	1° legge di Maxwell (dal teorema di Stokes)
$\nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	2° legge di Maxwell (dal teorema di Stokes)
$\nabla \cdot \vec{J} = -\dfrac{\partial \rho_c}{\partial t}$	legge di conservazione della carica (teor. divergenza)
$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_c$	legge di Gauss (dal teorema della divergenza)
$\nabla \cdot \vec{J}_t = 0$	$\vec{J}_t$ ovunque solenoidale (dal teorema della divergenza)
$\nabla \cdot \vec{B} = 0$	$\vec{B}$ ovunque solenoidale (dal teorema della divergenza)

Tre di queste sei equazioni sono linearmente indipendenti, le altre tre si ottengono dalle prime tre.

1.12 Relazioni materiale

$\vec{E}$ e D, $\vec{B}$ ed $\vec{H}$ descrivono i fenomeni dell'EM in modo diverso. $\vec{E}$ e $\vec{D}$ si riferiscono al fenomeno Elettrico, $\vec{B}$ ed $\vec{H}$ al fenomeno magnetico. $\vec{D}$ ed $\vec{H}$ descrivono i due fenomeni misurando ciò che li origina: la carica il primo, ed il moto della carica il secondo. Gli effetti misurati da $\vec{E}$ e da $\vec{B}$ sono in entrambe i casi le forze indotte. Essi dipendono da come i diversi materiali reagiscono. Inoltre, dipendentemente dalla proprietà del materiale, ad un certo valore del campo $\vec{E}$ si induce un determinato moto di carica misurato da $\vec{J}$. Le relazioni fra queste descrizioni spesso sono lineari. A volte però non lo sono con relazioni anche di tipo Isteretico.

Materiali lineari	**Materiali non lineari**
$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$	$\vec{D} = f_1(\vec{E})$
$\vec{B} = \mu \vec{H}$	$\vec{B} = f_2(\vec{H})$
$\vec{J} = \sigma \vec{E}$	$\vec{J} = f_3(\vec{E})$

con ϵ costante dielettrica, μ permeabilità magnetica e σ conducibilità termica.

la costante dielettrica (permittività elettrica) ϵ, e la permeabilità magnetica μ di un materiale sono espresse per mezzo dei loro valori relativi ϵ_r ed μ_r in riferimento al loro valore nel vuoto ϵ_0 ed μ_0:

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 \qquad \text{dove } \epsilon_0 = 8,856x10^{-12} Farad/metro \left[\frac{F}{m}\right]$$

$$\mu = \mu_r \mu_0 \qquad \text{dove } \mu_0 = 1,256x10^{-6} Henry/metro \left[\frac{H}{m}\right]$$

Riporto alcuni valori di ϵ_r

	ϵ_r
vuoto	1
aria	$\simeq 1$
plastica	2-5
vetro	4-8
acqua	80

Molto diverse sono le variazioni per materiali differenti della conducibilità elettrica, della permeabilità magnetica e della costante dielettrica. Per la conducibilità elettrica σ vi è una variazione anche di 10^{23} (23 ordini di grandezza) fra materiali isolanti e materiali conduttori. Per la permeabilità magnetica μ la variazione raggiunge al massimo un valore di circa 10^5 (5 ordini di grandezza). Per la costante dielettrica ϵ la variazione massima si riduce ad un valore massimo di circa 10^3 (3 ordini di grandezza).

La relazione fra $\vec{J}$ ed $\vec{E}$ è anche definita dalla resistività elettrica ρ:

$$\vec{E} = \rho\vec{J}$$

dove $\rho = \frac{1}{\sigma}$ σ è in Siemens/metro $[\frac{S}{M}]$ e ρ in Ohm/metro $[\frac{\Omega}{m}]$.

1.13 SI Units

1.13.1 Unità derivate SI

Grandezza	Simbolo (nome)	Unità SI non di base	Unità SI di base
Carica elettrica	C (Coulomb)		$s \times A$
Tensione elettrica e differenza di potenziale elettrico	V (Volt)	$\frac{W}{A}$	$m^2 \times kg \times s^{-3} \times A^{-1}$
Forza	N (Newton)		$m \times kg \times s^{-2}$
Energia/Lavoro	J (Joule)	$N \times m$	$m^2 \times kg \times s^{-2}$
Potenza	W (Watt)	$\frac{J}{s}$	$m^2 \times kg \times s^{-3}$
Flusso magnetico	Wb (Weber)	$V \times s$	$m2 \times kg \times s - 2 \times A^{-1}$
Induzione magnetica	T (Tesla)	$\frac{Wb}{m^2}$	$kg \times s^{-2} \times A^{-1}$
Resistenza elettrica	Ω (Ohm)	$\frac{V}{A}$	$m^2 \times kg \times s^{-3} \times A^{-2}$
Conduttanza elettrica	S (Siemens)	$\frac{A}{V}$	$m^{-2} \times kg^{-1} \times s^3 \times A^2$
Capacità	F (Farad)	$\frac{C}{V}$	$m^{-2} \times kg^{-1} \times s^4 \times A^2$
Induttanza	H (Henry)	$\frac{Wb}{A}$	$m^2 \times kg \times s^{-2} \times A^{-2}$
Frequenza	Hz (Hertz)		s^{-1}

1.13.2 Prefissi SI

Factor	Name	Symbol
10^{-24}	yocto	y
10^{-21}	zepto	z
10^{-18}	atto	a
10^{-15}	femto	f
10^{-12}	pico	p
10^{-9}	nano	n
10^{-6}	micro	μ
10^{-3}	milli	m
10^{-2}	centi	c
10^{-1}	deci	d
10^{1}	deca	da
10^{2}	hecto	mh
10^{6}	mega	M
10^{9}	giga	G
10^{12}	tera	T
10^{15}	peta	P
10^{18}	exa	E
10^{21}	zetta	Z
10^{24}	yotta	Y

prova