

Contents

1 Introduzione	4
1.1 La carica elettrica e la forza di Coulomb	4
1.1.1 La cariche elettriche ed il loro moto	4
1.2 Densità volumetrica di carica	5
1.2.1 Densità di corrente J	5
1.3 Corrente elettrica	6
1.4 Tensione elettrica e differenza di potenziale elettrico	6
1.5 Legge di Ampere-Prima legge di Maxwell	7
1.6 Legge dell'induzione di Faraday-Seconda legge di Maxwell	7
1.7 Conservazione della carica elettrica	8
1.8 Legge di Gauss	8
1.9 Forza elettromotrice	8
1.10 Leggi dell'Elettromagnetismo in forma integrale	9
1.11 Leggi dell'Elettromagnetismo in forma locale	9
1.12 Relazioni materiale	9
1.13 SI Units	11
1.13.1 Unità derivate SI	11
1.13.2 Prefissi SI	12
2 Circuiti elettrici	12
2.1 Introduzione	12
2.1.1 Convenzione del generatore e dell'utilizzatore	13
2.2 Risolvere un circuito	13
2.2.1 Prima legge (LKT)	13
2.2.2 Seconda legge (LKC)	14
2.2.3 Teorema di Tellegen	14
2.3 Elementi circuituali passivi	14
2.3.1 Resistore	15
2.3.2 Condensatore	15
2.3.3 Induttore	16
2.3.4 Dispositivi in serie e in parallelo	17
2.4 Elementi circuituali attivi	17
2.4.1 Generatore indipendente di tensione	17
2.4.2 Generatore indipendente di corrente	18
2.4.3 Generatori dipendenti	19
2.5 Circuiti nel dettaglio	19
2.5.1 Circuiti aperti e chiusi	19
2.5.2 Esempio 1	20
2.5.3 Partitore di tensione	20
2.5.4 Partitore di corrente	21
2.5.5 Collegamenti di resistori a stella e a triangolo	21
3 Metodi di analisi	23
3.1 Metodo di Tanenblau	23
3.1.1 Esempio	24
3.2 Metodo dei potenziali di nodo	25
3.3 Esempio	25
3.4 Teoremi di rete	25
3.5 Sovrapposizione degli effetti	26
3.5.1 Esempio	26
3.5.2 Esempio 2	27
3.6 Teorema di Thevenin	27
3.6.1 Esempio	28
3.6.2 Esercizio	29
3.7 Teorema di Norton	30
3.7.1 Esempio	30
3.8 Teorema del massimo trasferimento di potenza	31

3.9	Teorema di Millman	31
3.9.1	Esempio 1	32
3.9.2	Esempio 2	33
4	Analisi del transitorio	33
4.1	Formule notevoli	33
4.1.1	Condensatore	33
4.1.2	Induttore	33
4.2	Introduzione	34
4.3	Il problema di Cauchy	35
4.3.1	Principio di conservazione dell'energia	35
4.4	Circuito del primo ordine: Circuito RC	35
4.5	Circuito del primo ordine: Circuito RL	38
4.6	Confronto tra circuito RC e circuito RL	39
4.7	Circuiti del secondo ordine: Circuito RLC	40
4.8	Esercizi in regime transitorio	42
4.8.1	Esercizio 1: Circuito RC	43
4.8.2	Esercizio 2: Circuito RL	44
4.8.3	Esercizio 3: Circuito RLC complesso	45
4.8.4	Esercizio 4: Circuito RLC complesso	47
5	Regime sinusoidale	49
5.1	Introduzione	49
5.1.1	Segnali periodici	49
5.2	Sinusoide	50
5.2.1	Potenza media dissipata da una resistenza	50
5.2.2	Segnali isofrequenziali	51
5.3	Fasori	52
5.4	Trasformata di Steinmetz	53
5.4.1	Operazioni sui numeri complessi	54
5.5	Metodo simbolico	55
5.5.1	Impedenza e ammettenza - Legge di Ohm simbolica	55
5.5.2	Formule simboliche di resistore, induttore e condensatore	57
5.5.3	Equazioni costitutive in forma simbolica	57
5.5.4	Il metodo	59
5.6	Potenza elettrica nel regime sinusoidale	59
5.6.1	Potenza istantanea	59
5.6.2	Potenza attiva	60
5.6.3	Potenza reattiva	60
5.6.4	Potenza complessa	60
5.6.5	Formule notevoli	61
5.6.6	Potenza apparente	61
5.6.7	Additività delle potenze	61
5.6.8	Fattore di potenza	61
5.7	Esercizi	62
5.7.1	Esercizio 1	62
5.7.2	Esercizio 2	64
5.7.3	Esercizio metodo delle potenze 1	65
5.7.4	Esercizio metodo delle potenze 2	67
6	Risposta in frequenza	68
6.1	Filtro passa-basso	68
6.1.1	Filtro passa-basso RL	69
6.2	Filtro passa-alto	69
6.2.1	Filtro passa-alto RC	70
6.3	Filtro passa-banda	70
6.4	Filtro arresta banda	71
6.5	Filtri ideali	72

7 Sistemi trifase	72
7.1 Introduzione	72
7.2 Correnti e tensioni nei sistemi trifase	73
7.2.1 Sistema delle tensioni simmetrico	73
7.2.2 Sistema equilibrato delle correnti	74
7.2.3 Sistema delle tensioni di linea e di fase simmetrico	74
7.3 Impedenze di carico	75
7.3.1 Impedenze collegate a stella	75
7.3.2 Impedenze collegate a triangolo	76
7.3.3 Impedenze collegate a una rete trifase	76
7.4 Sistemi trifase bilanciati	76
7.5 Introduzione	76
7.6 Sistemi trifase con neutro	76
7.6.1 Potenza istantanea trifase	77
7.7 Differenze tra sistemi trifase bilanciati e non bilanciati	78
7.7.1 Potenza attiva e potenza reattiva	78
8 Circuiti e forze magnetiche	78
8.1 Introduzione	78
8.2 Dai campi ai circuiti magnetici	79
8.2.1 Legge di Hopkinson	79
8.2.2 Differenze tra circuiti elettrici e circuiti magnetici	80
8.3 Circuiti magnetici nel dettaglio	80
8.3.1 Leggi di Kirchhoff per i circuiti magnetici e equazione di ramo magnetico	81
8.4 Analisi di un circuito magnetico	81
8.5 Energia magnetica	83
8.5.1 Energia magnetica di correnti concatenate	83
8.6 Isteresi magnetica	84
8.6.1 Materiali ferromagnetici e ferrimagnetici morbidi	85
8.6.2 Materiali ferromagnetici e ferrimagnetici duri	85
9 Trasformatore	86
9.1 Introduzione	86
9.2 Conversione elettromeccanica dell'energia	86
9.3 Il trasformatore nel dettaglio	87
9.3.1 Differenze con macchine elettriche	87
9.3.2 Struttura	87
9.3.3 Trasformatore ideale	88
9.4 Perdite energetiche	88
9.4.1 Perdite nel ferro	88
9.5 Il sistema di potenza elettrico: produzione, trasmissione, distribuzione, utilizzo	89

Elettrotecnica

Giuseppe Bumma

August 24, 2023

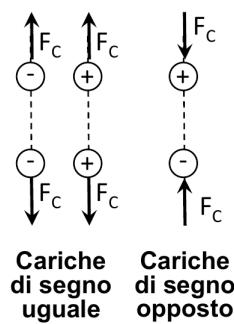
1 Introduzione

1.1 La carica elettrica e la forza di Coulomb

Se due particelle caricate, supposte puntiformi, di carica q_0 e q_1 , siano a una distanza finita fra loro nel vuoto, la **legge di Coulomb** descrive la forza elettrostatica interagente fra loro:

$$|F_C| \propto \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

con r distanza tra le due cariche.



La forza di Coulomb F_C è diretta nella direzione di r . Quando q_1 e q_2 hanno lo stesso segno la forza di Coulomb è repulsiva. Quando sono di segno opposto la forza è attrattiva.

L'unità di misura, nel Sistema Internazionale (SI), della forza di Coulomb è il newton [N] ed il coefficiente di proporzionalità è $1/(4\pi\epsilon_0)$ dove ϵ_0 è la costante dielettrica del vuoto [$\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} C^2/(Nm^2)$].

L'unità di misura della carica elettrica nel sistema di misura SI è il **coulomb** [C]. La carica elementare nel SI è e ove

$$e = 1,6021 \times 10^{-19} C$$

Protone ed elettrone hanno carica di valore assoluto e . Due protoni o due elettroni si respingono. Un protone ed un elettrone si attraggono. Per convenzione la carica del protone è positiva ($+e$) e quella dell'elettrone negativa ($-e$).

In natura esistono solamente cariche multiple di e . Non può esistere una carica sottomultiplo di e .

1.1.1 La cariche elettriche ed il loro moto

Forza che agisce su una particella carica:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$$

\vec{F} : forza [N]

\vec{q} : carica elettrica [C]

\vec{u} : velocità della carica [m/s]

\vec{E} : campo elettrico

\vec{B} : vettore induzione magnetica

- Se $\vec{B} = 0$ si ha la cosiddetta **Forza elettrostatica**

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

Quindi il campo elettrico $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$ è una forza per unità di carica [N/C].

Campo elettrico e forza elettrostatica da cui esso deriva hanno la stessa direzione. Perciò il campo produce un'accelerazione della carica lungo la propria direzione.

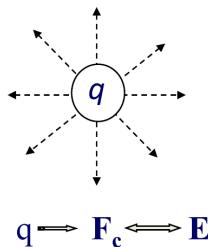
Nel SI l'unità di misura di \vec{E} è: $N/C = V/m = m \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot C^{-1}$.

- Se $\vec{E} = 0$ si ha la **Forza di Lorentz**

$$\vec{F} = q(\vec{u} \times \vec{B})$$

Quindi il vettore induzione magnetica \vec{B} è una forza per unità di carica e di velocità [Ns/Cm]. Campo elettrico e forza elettrostatica da cui esso deriva hanno la stessa direzione. Perciò il campo produce un'accelerazione della carica lungo la propria direzione. Nel SI l'unità di misura di \vec{E} è: $N/C = V/m = m \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot C^{-1}$.

Una particella carica induce una forza sulle cariche che la circondano. Tale forza può essere attrattiva o repulsiva. Essa è la forza Coulombiana F_C (o forza elettrostatica). In ogni punto della regione attorno alla carica o in presenza ad una distribuzione di cariche vi è un campo elettrico $\vec{E}(x, y, z)$ definito dalla forza indotta su una carica di prova puntiforme unitaria posta nel punto considerato.



Qualora su una carica in moto si induca una forza deviante perpendicolare al moto, tale forza è la forza magnetica o forza di Lorentz F_L . Il campo di induzione magnetica $\vec{B}(x, y, z)$, legato a \vec{F}_L , è dato dalla forza indotta su una carica unitaria in moto per unità di velocità della carica stessa. La direzione del campo \vec{B} è perpendicolare alla velocità ed alla forza \vec{F}_L . Il campo \vec{B} è perpendicolare alla velocità della carica ed alla forza indotta.

1.2 Densità volumetrica di carica

La carica elettrica non può essere creata o distrutta (legge della conservazione della carica elettrica). Può solo essere trasferita. Pertanto, la carica elettrica totale di un sistema isolato non può variare.

La densità volumetrica di carica (o distribuzione di carica) è definita da:

$$\rho_C(x, y, z) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta \tau} = \frac{dt}{dq}$$

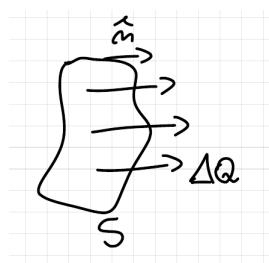
dove $d\tau$ è l'elemento infinitesimo di volume.

1.2.1 Densità di corrente J

La densità di corrente elettrica \vec{J} è il vettore il cui modulo è la quantità di carica che attraversa una superficie unitaria perpendicolare alla velocità \vec{u} delle cariche. La direzione ed il verso di \vec{J} sono la direzione ed il verso di \vec{u} :

$$\vec{J} \cdot \hat{n} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S \Delta t}$$

\vec{J} : densità di corrente $[\frac{C}{m^2 \cdot s}] = [\frac{A}{m^2}]$



$\vec{J}(x, y, z)$ definisce un campo vettoriale ed è la densità di flusso delle cariche. La corrente elettrica i è il flusso di carica attraverso una superficie S :

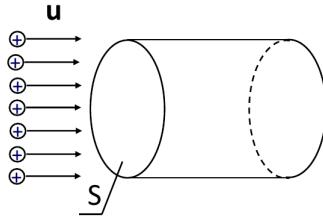
$$i = \iint_S \vec{J} \cdot \hat{n} \, dS$$

1.3 Corrente elettrica

La corrente elettrica i che attraversa una superficie è la quantità di carica che attraversa la superficie nell'unità di tempo:

$$i = \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

Se si considera un cavo conduttore, ad esempio, la corrente nel conduttore è la quantità di carica che attraversa una sezione del cavo nell'unità di tempo.



L'unità di misura SI è l'ampere [A] dove $A = \frac{C}{s}$

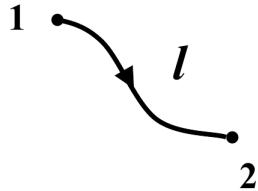
La **corrente elettrica istantanea** è:

$$i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$$

1.4 Tensione elettrica e differenza di potenziale elettrico

La **tensione elettrica** e_{12} fra i punti 1 e 2 lungo il percorso l , è il lavoro $L_{q=1}^{1 \rightarrow 2, l}$ che il campo elettrico $\vec{E}(x, y, z)$ compie per portare una carica unitaria dal punto 1 al punto 2 lungo l :

$$e_{12} = \int_{1,l}^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



Per spostare la carica q dal punto 1 al 2 il lavoro è:

$$L_q^{1 \rightarrow 2, l} = q \cdot e_{12}$$

L'unità di misura SI di e_{12} è il volt [V] dove $V = \frac{J}{C} = m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot C^{-1}$. Qualora la tensione e_{12} dipenda dai valori di una funzione $v(x, y, z)$ definita in una regione che contiene la linea l essa diviene:

$$e_{12} = \int_{1,l}^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{1,l}^2 dv = v_1 - v_2 = v_{12}$$

dove $v(x, y, z)$ è la **funzione potenziale elettrico** e v_{12} è la **differenza di potenziale elettrico**.

Poiché v_{12} è la differenza fra i valori che la funzione $v(x, y, z)$ assume nel punto iniziale e nel punto finale di l , v_{12} non dipende dal percorso che unisce i due punti. Quindi il campo \vec{E} è un **vettore conservativo**¹ con $\vec{E} = \vec{\nabla} \cdot v(x, y, z)$.

Per un percorso chiuso l_c contenuto nella regione ove \vec{E} è conservativo, si ha:

$$e_l = \oint_{l_c} \vec{E} \cdot d\vec{l}_c = - \oint_{l_c} \vec{\nabla} \cdot v \, d\vec{l}_c = 0$$

¹un campo conservativo è un campo il cui integrale lineare è indipendente dalla traiettoria

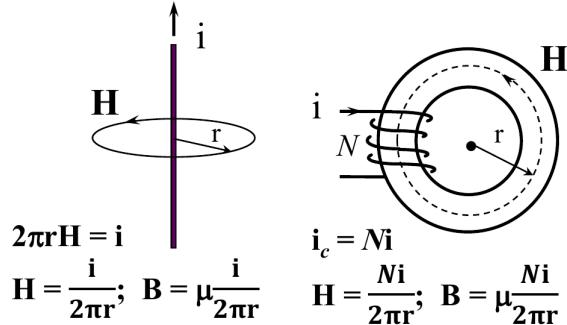
1.5 Legge di Ampere-Prima legge di Maxwell

La grandezza vettoriale campo magnetico \vec{H} è definito dalla legge di Ampere (prima legge di Maxwell)

$$\oint_{l_c} \vec{H} \cdot d\vec{l}_c = i_t$$

dove la corrente totale $i_t = i + i_s$.

In questo caso la corrente totale i_t è il flusso del vettore J_t in ovunque solenoidale ($J_t = J + \partial D / \partial t$). Perciò i_t è il flusso concatenato con la linea chiusa l_C contorno della superficie che attraversa. Il verso di percorrenza di l è determinato con regola della vite destrogiara.



L'unità di misura SI di \vec{H} è l'ampere su metro [$\frac{A}{m}$]. Per materiali lineari: $\vec{B} = \mu \vec{H}$ ove μ è la permeabilità magnetica del materiale. Per mezzi non lineari $\vec{B} = f(\vec{H})$. Solitamente per i materiali magnetici non lineari f è una funzione **isteretica** (materiali ferromagnetici).

$$\begin{aligned} \oint_{l_c} \vec{H} \cdot d\vec{l} &= \iint_S \left(\vec{J} + \frac{\partial D}{\partial t} \right) \hat{n} \, dS \\ &= \underbrace{\iint_S \vec{J} \cdot \hat{n} \, dS}_{\text{corrente di conduzione } I} + \underbrace{\iint_S \frac{\partial D}{\partial t} \cdot \hat{n} \, dS}_{\iint_S \partial D \cdot \hat{n} \, dS = \vec{\Phi}(D)} = \\ &= I + \underbrace{\frac{\partial \vec{\Phi}(D)}{\partial t}}_{\text{corrente di spostamento}} \end{aligned}$$

Immaginiamo di descrivere due superfici S_1 e S_2 sulla linea chiusa l_C

$$\oint_{l_c} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_{S_1} \left(\vec{J} + \frac{\partial D}{\partial t} \right) \hat{n}_1 \, dS_1 = \iint_{S_2} \left(\vec{J} + \frac{\partial D}{\partial t} \right) \hat{n}_2 \, dS_2$$

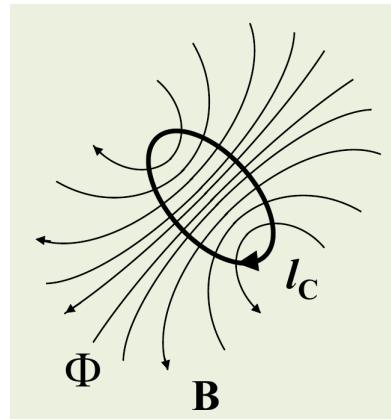
Prendiamo una superficie chiusa S_C su S_2 , allora

$$\oint_{S_C} \underbrace{\left(\vec{J} + \frac{\partial D}{\partial t} \right)}_{\text{vettore solenoidale}} \cdot \hat{n}_C \, dS_C = \iint_{S_2} \left(\vec{J} + \frac{\partial D}{\partial t} \right) \hat{n}_2 \, dS_2 - \iint_{S_1} \left(\vec{J} + \frac{\partial D}{\partial t} \right) \hat{n}_1 \, dS_1 = 0$$

1.6 Legge dell'induzione di Faraday-Seconda legge di Maxwell

La legge dell'induzione (o legge di Faraday od anche seconda legge di Maxwell) stabilisce che:

$$e_{l_C} = \oint_{l_C} \vec{E} \cdot d\vec{l}_C = -\frac{d\Phi}{dt}$$

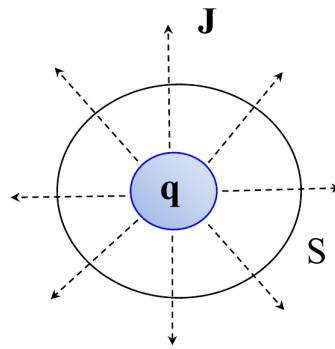


ove Φ è il flusso magnetico concatenato con la linea chiusa l_c . (direzione di l_c data dalla regola della vite destrogiro). e_{l_c} è la tensione elettrica indotta sulla linea chiusa dalla variazione del flusso magnetico concatenato con l_c ; essa è detta **forza elettromotrice** (f.e.m.).

N.B. In questo caso \vec{E} non è conservativo.

1.7 Conservazione della carica elettrica

La carica elettrica non si crea né si distrugge. Perciò la diminuzione della carica elettrica all'interno di un volume τ corrisponde alle cariche che lasciano τ fluendo attraverso la superficie chiusa S , superficie esterna di τ .



La **legge di conservazione della carica elettrica** afferma questo ed è espressa dall'espressione:

$$\oint_S \vec{J} \cdot \hat{n} dS = -\frac{dQ}{dt}$$

si ha variazione di cariche solo se c'è passaggio di corrente.

1.8 Legge di Gauss

Il campo di induzione elettrica o campo spostamento elettrico è definito dalla legge di Gauss. Considerando una superficie chiusa S , che delimita il volume V ; sia \hat{n} il versore normale alla superficie. La legge di Gauss afferma che:

$$\oint_S \vec{D} \cdot \hat{n} dS = \iiint_V \rho dV = Q$$

1.9 Forza elettromotrice

\vec{E} e \vec{B} descrivono le forze prodotte dal fenomeno elettromagnetico sulle cariche (forza elettrica per unità di carica e forza magnetica per unità di carica e di velocità della carica). Esse descrivono ciò che viene prodotto dal fenomeno EM. Ne descrivono l'**effetto**.

\vec{D} ed \vec{H} descrivono ciò che produce il fenomeno EM (la carica elettrica nel primo caso e la corrente totale nel secondo). Ne descrivono la **causa**.

1.10 Leggi dell'Elettromagnetismo in forma integrale

$\oint_{l_c} \vec{H} \cdot d\vec{l}_c = i_t$	1° legge di Maxwell
$\oint_{l_c} \vec{E} \cdot d\vec{l}_c = \frac{d\Phi}{dt}$	2° legge di Maxwell
$\oint \vec{J} \cdot \hat{n} dS = -\frac{dq}{dt}$	legge di conservazione della carica
$\oint \vec{D} \cdot \hat{n} dS = q$	legge di Gauss
$\oint \vec{J}_t \cdot \hat{n} dS = 0$	\vec{J}_t ovunque solenoidale
$\text{t} \oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS = 0$	\vec{B} ovunque solenoidale

Tre di queste sei equazioni sono linearmente indipendenti, le altre tre si ottengono dalle prime tre.

1.11 Leggi dell'Elettromagnetismo in forma locale

$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	1° legge di Maxwell (dal teorema di Stokes)
$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	2° legge di Maxwell (dal teorema di Stokes)
$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho_c}{\partial t}$	legge di conservazione della carica (teor. divergenza)
$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_c$	legge di Gauss (dal teorema della divergenza)
$\nabla \cdot \vec{J}_t = 0$	\vec{J}_t ovunque solenoidale (dal teorema della divergenza)
$\nabla \cdot \vec{B} = 0$	\vec{B} ovunque solenoidale (dal teorema della divergenza)

Tre di queste sei equazioni sono linearmente indipendenti, le altre tre si ottengono dalle prime tre.

1.12 Relazioni materiale

\vec{E} e D , \vec{B} ed \vec{H} descrivono i fenomeni dell'EM in modo diverso. \vec{E} e \vec{D} si riferiscono al fenomeno Elettrico, \vec{B} ed \vec{H} al fenomeno magnetico. \vec{D} ed \vec{H} descrivono i due fenomeni misurando ciò che li origina: la carica il primo, ed il moto della carica il secondo. Gli effetti misurati da \vec{E} e da \vec{B} sono in entrambe i casi le forze indotte. Essi dipendono da come i diversi materiali reagiscono. Inoltre, dipendentemente dalla proprietà del materiale, ad un certo valore del campo \vec{E} si induce un determinato moto di carica misurato da \vec{J} . Le relazioni fra queste descrizioni spesso sono lineari. A volte però non lo sono con relazioni anche di tipo isteretico.

Materiali lineari	Materiali non lineari
$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$	$\vec{D} = f_1(\vec{E})$
$\vec{B} = \mu \vec{H}$	$\vec{B} = f_2(\vec{H})$
$\vec{J} = \sigma \vec{E}$	$\vec{J} = f_3(\vec{E})$

con ϵ costante dielettrica, μ permeabilità magnetica e σ conducibilità termica.

la costante dielettrica (permittività elettrica) ϵ , e la permeabilità magnetica μ di un materiale sono espresse per mezzo dei loro valori relativi ϵ_r ed μ_r in riferimento al loro valore nel vuoto ϵ_0 ed μ_0 :

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$$

$$\text{dove } \epsilon_0 = 8,856 \times 10^{-12} \text{ Farad/metro} \left[\frac{F}{m} \right]$$

$$\mu = \mu_r \mu_0$$

$$\text{dove } \mu_0 = 1,256 \times 10^{-6} \text{ Henry/metro} \left[\frac{H}{m} \right]$$

Riporto alcuni valori di ϵ_r

	ϵ_r
vuoto	1
aria	$\simeq 1$
plastica	2-5
vetro	4-8
acqua	80

Molto diverse sono le variazioni per materiali differenti della conducibilità elettrica, della permeabilità magnetica e della costante dielettrica. Per la conducibilità elettrica σ vi è una variazione anche di 10^{23} (23 ordini di grandezza) fra materiali isolanti e materiali conduttori. Per la permeabilità magnetica μ la variazione raggiunge al massimo un valore di circa 10^5 (5 ordini di grandezza). Per la costante dielettrica ϵ la variazione massima si riduce ad un valore massimo di circa 10^3 (3 ordini di grandezza).

La relazione fra \vec{J} ed \vec{E} è anche definita dalla resistività elettrica ρ :

$$\vec{E} = \rho \vec{J}$$

dove $\rho = \frac{1}{\sigma}$ σ è in Siemens/metro $[\frac{S}{M}]$ e ρ in Ohm/metro $[\frac{\Omega}{m}]$.

1.13 SI Units

1.13.1 Unità derivate SI

Grandezza	Simbolo (nome)	Unità SI non di base	Unità SI di base
Carica elettrica	C (Coulomb)		$s \times A$
Tensione elettrica e differenza di potenziale elettrico	V (Volt)	$\frac{W}{A}$	$m^2 \times kg \times s^{-3} \times A^{-1}$
Forza	N (Newton)		$m \times kg \times s^{-2}$
Energia/Lavoro	J (Joule)	$N \times m$	$m^2 \times kg \times s^{-2}$
Potenza	W (Watt)	$\frac{J}{s}$	$m^2 \times kg \times s^{-3}$
Flusso magnetico	Wb (Weber)	$V \times s$	$m^2 \times kg \times s - 2 \times A^{-1}$
Induzione magnetica	T (Tesla)	$\frac{Wb}{m^2}$	$kg \times s^{-2} \times A^{-1}$
Resistenza elettrica	Ω (Ohm)	$\frac{V}{A}$	$m^2 \times kg \times s^{-3} \times A^{-2}$
Conduttanza elettrica	S (Siemens)	$\frac{A}{V}$	$m^{-2} \times kg^{-1} \times s^3 \times A^2$
Capacità	F (Farad)	$\frac{C}{V}$	$m^{-2} \times kg^{-1} \times s^4 \times A^2$
Induttanza	H (Henry)	$\frac{Wb}{A}$	$m^2 \times kg \times s^{-2} \times A^{-2}$
Frequenza	Hz (Hertz)		s^{-1}

1.13.2 Prefissi SI

Factor	Name	Symbol
10^{-24}	yocto	y
10^{-21}	zepto	z
10^{-18}	atto	a
10^{-15}	femto	f
10^{-12}	pico	p
10^{-9}	nano	n
10^{-6}	micro	μ
10^{-3}	milli	m
10^{-2}	centi	c
10^{-1}	deci	d
10^1	deca	da
10^2	hecto	mh
10^6	mega	M
10^9	giga	G
10^{12}	tera	T
10^{15}	peta	P
10^{18}	exa	E
10^{21}	zetta	Z
10^{24}	yotta	Y

2 Circuiti elettrici

2.1 Introduzione

I circuiti elettrici sono degli elementi interconnessi tra loro e le connessioni possono essere considerate dei conduttori ideali.

Ipotesi:

- $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ o $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$

- $L_c \ll \lambda$ (lunghezza d'onda)

Ricordiamo che $\lambda = \frac{c}{f} = \left[\frac{\text{velocità onda}}{\text{frequenza onda}} \right]$.

Esempio

La rete elettrica ha frequenza $f = 50\text{Hz}$

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{50} \simeq 6000\text{km}$$

infatti la linea di trasmissione della corrente elettrica è $L_c = 10^3\text{km}$.

Gli elementi del circuito vengono chiamati *multipoli*; di seguito si riporta la lista:

- Nodo: punto di intersezione tra 2 o più elementi;
- Maglia: linea chiusa all'interno del circuito;

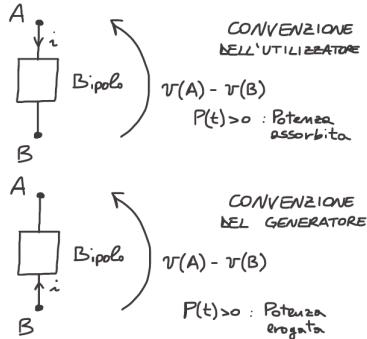
- Ramo: componenti insieme ai suoi morsetti

Le formule fondamentali per i circuiti sono:

$$\underbrace{P(t) = v(t) \cdot i(t)}_{\text{potenza}} \quad \underbrace{W(t) = \int P(t) dt}_{\text{energia}}$$

2.1.1 Convenzione del generatore e dell'utilizzatore

Per ogni circuito esistono due convenzioni per il verso della corrente



- negli utilizzatori tensione e corrente sono discordi
- nei generatori tensione e corrente sono concordi (si fa riferimento ai generatori di corrente e di tensione)

Ad esempio, nel caso di una batteria ricaricabile, se si utilizza la convenzione del generatore:

Scarica	$v = 1,5V$	$i = 1A$	$P = v \cdot i = 1,5W > 0$
Carica	$v = 1,5V$	$i = -1A$	$P = v \cdot i = -1,5W < 0$

mentre se si utilizza la convenzione dell'utilizzatore i segni di corrente e ,propedeuticamente, di potenza sono invertiti

Scarica	$v = 1,5V$	$i = -1A$	$P = v \cdot i = -1,5W < 0$
Carica	$v = 1,5V$	$i = 1A$	$P = v \cdot i = 1,5W > 0$

2.2 Risolvere un circuito

Risolvere un circuito vuol dire calcolare le tensioni e le correnti di tutti i componenti.

2.2.1 Prima legge (LKT)

Usando le leggi di Kirchhoff e le leggi costitutive

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = \iint_{H_p} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \hat{n} dS = 0$$

ne consegue che il campo elettrico è conservativo e dunque si può definire una differenza di potenziale.

$$\int_l \vec{E} d\vec{l} = v(A) - v(B) = v_{AB}$$

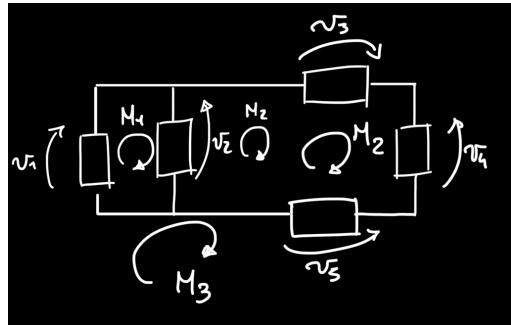
$$\begin{aligned} \underbrace{\oint \vec{E} d\vec{l}}_0 &= \int_A^B \vec{E} d\vec{l} + \int_B^C \vec{E} d\vec{l} + \int_C^A \vec{E} d\vec{l} \\ &= v_{BA} + v_{CB} + v_{AC} \\ &= 0 \end{aligned}$$

da qui la 1^a legge di Kirchhoff per le tensioni:

$$\sum_{k=1}^n v_k = 0$$

nella singola maglia.

Esempio



$$\begin{cases} M_1 : & v_1 - v_2 = 0 \\ M_2 : & v_2 + v_3 - v_4 - v_5 = 0 \\ M_3 : & v_1 + v_3 - v_4 - v_5 = 0 \end{cases}$$

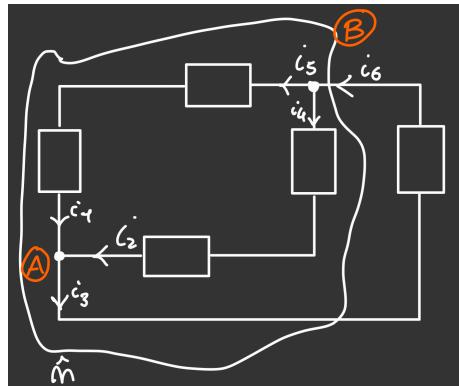
I versi delle differenze di potenziale sono date dal testo dell'esercizio, il verso di percorrenza della maglia è scelto arbitrariamente. Il segno positivo o negativo delle tensioni è determinato in base al verso di percorrenza (positivo se concorde, negativo se discorda).

2.2.2 Seconda legge (LKC)

$$\oint \oint \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \hat{n} dS = 0 \implies \oint \oint \vec{J} \hat{n} dS = 0$$

“La somma delle correnti entranti ed uscenti da un componente è nulla (in un componente, entra ed esce la stessa quantità di corrente).”

Prendiamo in esame il seguente circuito



Sapendo che il segno di ogni corrente è negativo se entra in un nodo e positivo se ne esce, non è difficile calcolare le correnti nei nodi A e B

$$A : -i_1 - i_2 + i_3 = 0$$

$$B : -i_5 - i_4 + i_3 = 0$$

2.2.3 Teorema di Tellegen

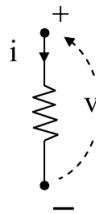
Combinando la LKT e la LKC su un circuito è possibile verificare che la somma delle potenze dei generatori è pari alla somma delle potenze degli utilizzatori.

$$\sum_{k=1}^{n^o \text{ generatori}} p_k = \sum_{j=1}^{n^o \text{ utilizzatori}} p_j$$

2.3 Elementi circuituali passivi

Gli elementi circuituali passivi sono elementi che (nel caso ideale) restituiscono la stessa energia che ricevono.

2.3.1 Resistore



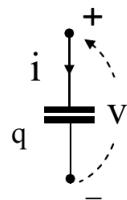
$$\underbrace{v(t) = R \cdot i(t)}_{1^a \text{ legge di Ohm}} \implies i(t) = \frac{1}{R} \cdot v(t)$$

$$\underbrace{R = \rho \cdot \frac{l}{S}}_{2^a \text{ legge di Ohm}} = \rho \cdot \frac{[\text{lunghezza filo}]}{[\text{sezione filo}]}$$

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = R \cdot i^2(t) > 0$$

Il resistore assorbe sempre potenza, non può erogarla.

2.3.2 Condensatore



$$i = C \cdot \frac{dv}{dt} \xrightarrow{i = \frac{dq}{dt}} \frac{dq}{dt} = C \cdot \frac{dv}{dt}$$

quindi $Q = C \cdot V$.

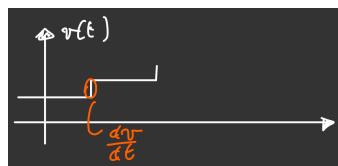
Un condensatore (ideale) è non dissipativo: eroga sempre la stessa quantità di potenza che ha assorbito.

$$\begin{aligned} \underbrace{w(t)}_{\text{energia}} &= \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} Cv \frac{dv}{dt} dt \\ &= C \int_{t_1}^{t_2} v dv \\ &= \frac{1}{2} C [v^2(t_2) - v^2(t_1)] \end{aligned}$$

quindi se consideriamo $t_1 = 0$ e la tensione v calcolata in un istante finale t_f

$$w(0, t_f) = \frac{1}{2} Cv^2$$

v è la variabile di stato del condensatore.



in quel punto $\frac{dv}{dt} = \infty \Rightarrow i(t) = \infty \Rightarrow p(t) = \infty$, ma è impossibile avere potenza infinita, quindi non possiamo avere una variazione istantanea di tensione (il grafico della tensione di un condensatore non può avere discontinuità).

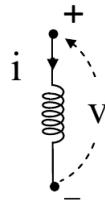
$$\begin{aligned} i(t) dt = C \cdot \frac{dv}{dt} &\Rightarrow \int_{-\infty}^t \underbrace{\frac{i(t)}{C} dt}_{v(t)} = \int_{-\infty}^t \frac{dv}{dt} dt \Rightarrow v(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{C} \cdot i(t) dt \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^0 \frac{1}{C} \cdot i(t) dt}_{v_0} + \int_0^t \frac{1}{C} \cdot i(t) dt \end{aligned}$$

A differenza del resistore, per conoscere la tensione non ho bisogno solo della corrente nell'istante corrente, ma anche della tensione iniziale; per questo il condensatore è un **elemento con memoria**.

Un **condensatore reale** è semplicemente un condensatore messo in parallelo con un resistore.

2.3.3 Induttore

L'induttore è un componente elettrico che genera un campo magnetico al passaggio di corrente elettrica.



$$v = L \frac{di}{dt}$$

Sappiamo che la corrente genera un flusso:

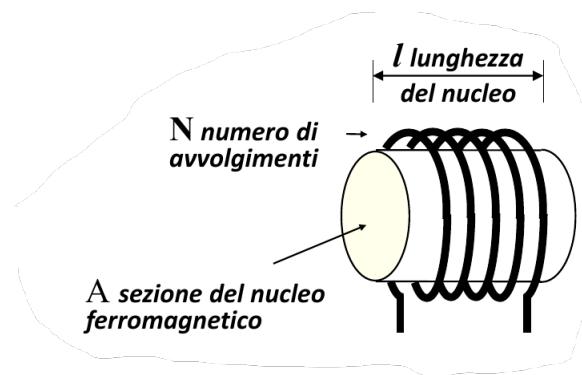
$$\underbrace{\Phi = L \cdot i}_{I^a \text{ equazione di Maxwell}} \quad v = \underbrace{\frac{d\Phi}{dt}}_{\text{legge di Faraday}} = L \frac{di}{dt}$$

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = L \cdot i(t) \frac{di}{dt} \begin{cases} > 0 & \text{assorbita} \\ < 0 & \text{erogata} \end{cases}$$

L'induttore è un elemento **non dissipativo**.

$$\begin{aligned} w(t) &= \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt \\ &= L \int_{t_1}^{t_2} i(t) \frac{di}{dt} dt \\ &= \frac{1}{2} L [i^2(t_2) - i^2(t_1)] \\ w(0, t_f) &= \frac{1}{2} L \cdot I_f^2 \end{aligned}$$

Anche per l'induttore le variazioni istantanee di tensione non sono possibili.



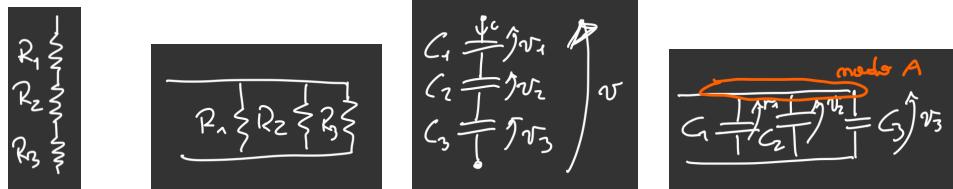
$$L = \frac{\mu N^2 A}{l}$$

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(t) dt \\ &= \underbrace{\frac{1}{L} \int_{-\infty}^0 v(t) dt}_{i_0} + \frac{1}{L} \int_0^t v(t) dt \end{aligned}$$

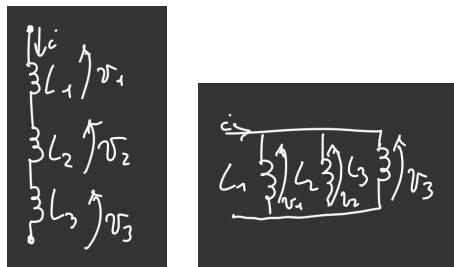
Si vede che anche l'induttore è un elemento **con memoria**.

Un induttore reale è un induttore in serie con un resistore.

2.3.4 Dispositivi in serie e in parallelo



$$R_{eq} = \sum_{k=1}^n R_k \quad R_{eq} = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k} \right)^{-1} \quad C_{eq} = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k} \right)^{-1} \quad C_{eq} = \sum_{k=1}^n C_k$$

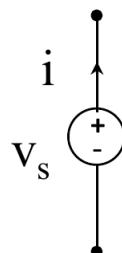


$$L_{eq} = \sum_{k=1}^n L_k \quad L_{eq} = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k} \right)^{-1}$$

2.4 Elementi circuituali attivi

Gli elementi attivi sono elementi che possono generare (e fornire) energia elettrica.

2.4.1 Generatore indipendente di tensione

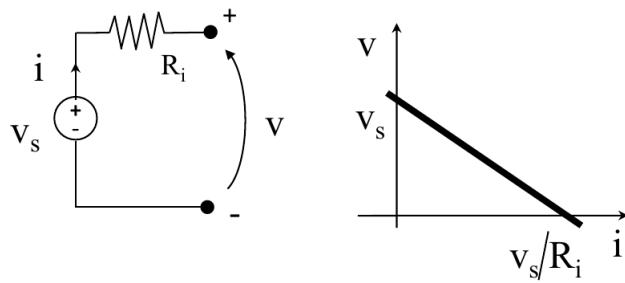


Il *generatore di tensione ideale* mantiene la tensione tra i suoi terminali indipendentemente dalla corrente che lo attraversa, quindi la tensione ai capi V è uguale alla tensione interna e (N.B. nel disegno la v_s è la tensione interna e).

$$p(t) = V \cdot i = e \cdot i \begin{cases} > 0 & \text{eroga} \\ < 0 & \text{assorbe} \end{cases}$$

Essendo e fisso, la potenza dipende solo da i (variabile di stato).

Per simulare un generatore di tensione reale (ad es. una batteria) si considera un resistenza interna R_i in serie con il generatore ideale:



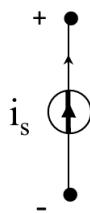
$$V = e - R \cdot i$$

In realtà nella formula della tensione di una batteria ci sono anche termini dipendenti da altri piccoli condensatori nella stessa.

Se si hanno più generatori di tensione **in serie**, la tensione totale è semplicemente la somma delle tensioni dei vari generatori. I generatori di tensione **non sono collegabili in parallelo**: se così fosse si avrebbero, nella stessa maglia, due differenti tensioni, ma questo non è possibile perché non viene soddisfatta la LKT.

In un generatore di tensione reale, nel caso in cui la resistenza $R \rightarrow \infty \Rightarrow i = \frac{V}{R} = 0$, mentre se $R \rightarrow 0 \Rightarrow i = \frac{V}{R} = \infty$.

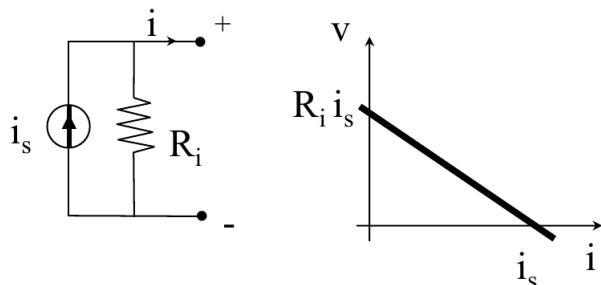
2.4.2 Generatore indipendente di corrente



Il *generatore di corrente ideale* mantiene la corrente che lo attraversa al valore A indipendentemente dalla differenza di potenziale fra i suoi terminali (N.B. nel disegno la i_s è la corrente interna A).

$$p(t) = V \cdot i = V \cdot A \begin{cases} > 0 & \text{eroga} \\ < 0 & \text{assorbe} \end{cases}$$

Un imprecisa approssimazione di un generatore di corrente reale è un pannello fotovoltaico, dotato di resistenza interna in parallelo con il generatore ideale



$$i = A - \frac{v}{R}$$

2.4.3 Generatori dipendenti

Gli elementi attivi visti prima possono essere "controllati" in tensione o in corrente.

Il **generatore dipendente di tensione** è controllato in tensione $V = v_c \cdot \mu$, o in corrente $V = r \cdot i_c$.

Il **generatore dipendente di corrente** è controllato in tensione $i = g \cdot v_c$, o in corrente $i = \alpha \cdot i_c$.

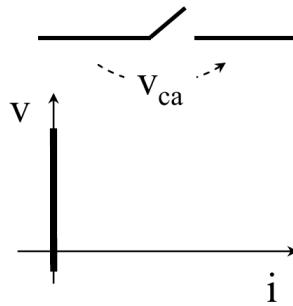
2.5 Circuiti nel dettaglio

2.5.1 Circuiti aperti e chiusi

Un ramo in circuito aperto si può considerare nei due seguenti modi:

- Un generatore di corrente con: $A = 0$
- Un resistore con: $R = +\infty$

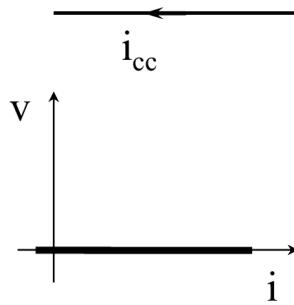
L'equazione dell'elemento circuitale è $i = 0, \forall v$.

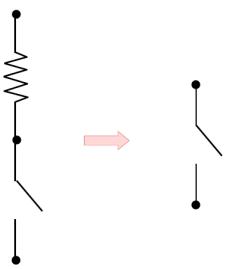


Un ramo in circuito chiuso si può considerare nei due seguenti modi:

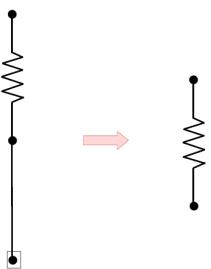
- Un generatore di tensione con: $e = 0$
- Un resistore con: $R = 0$

L'equazione dell'elemento circuitale è $v = 0, \forall i$.



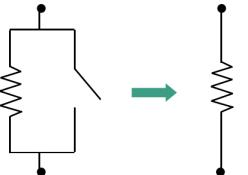


Resistori in serie con uno in circuito aperto

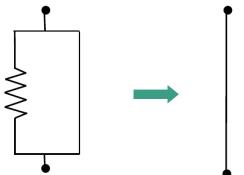


Resistori in serie con uno in circuito chiuso

$$R_{eq} = n R$$



Resistori in parallelo con uno in circuito aperto

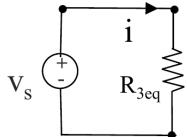
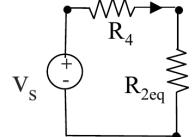
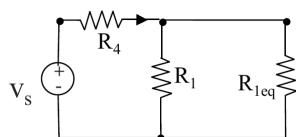
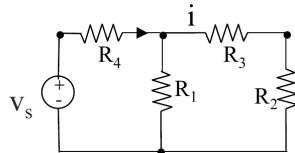


Resistori in parallelo con uno in circuito chiuso

$$R_{eq} = R/n$$

n resistori in parallelo con ugual resistenza R

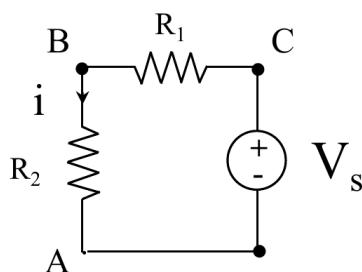
2.5.2 Esempio 1



$$R_{1eq} = R_2 + R_3 \quad R_{2eq} = \frac{R_1 R_{1eq}}{R_1 + R_{1eq}} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_{1eq}} \right)^{-1} \quad R_{3eq} = R_4 + R_{2eq}$$

2.5.3 Partitore di tensione

Un partitore di tensione è un tipo di circuito costituito da due o più componenti passivi collegati in serie ai capi dei quali, se viene applicata una tensione, essa si ripartirà sulle stesse componenti in base al loro valore. La legge generale si ottiene moltiplicando il valore della tensione applicata alla serie per il rapporto tra la resistenza ai capi della quale si vuole conoscere la tensione e la somma delle resistenze componenti la serie.



$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

$$i = \frac{V_s}{R_{eq}} = \frac{V_s}{R_1 + R_2}$$

Dalla LKT si ha

$$v_1 + v_2 - V_s = 0 \implies$$

sostituisco i

$$v_1 = V_s - v_2 = V_s - R_2 i$$

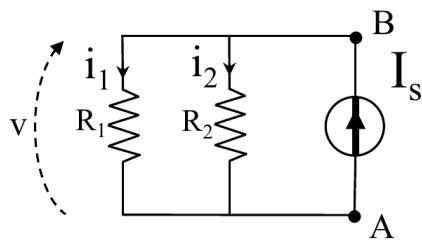
$$v_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_s$$

$$v_2 = V_s - v_1 = V_s - R_1 i$$

$$v_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_s$$

2.5.4 Partitore di corrente

Il partitore di corrente è un circuito utilizzato per ottenere la corrente elettrica che scorre attraverso un'impedenza o attraverso un circuito quando esso viene connesso in parallelo con un'altra impedenza. La differenza sostanziale con il partitore di tensione è che in questo caso, nella formula, al denominatore della frazione va la resistenza che non si sta considerando.



$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

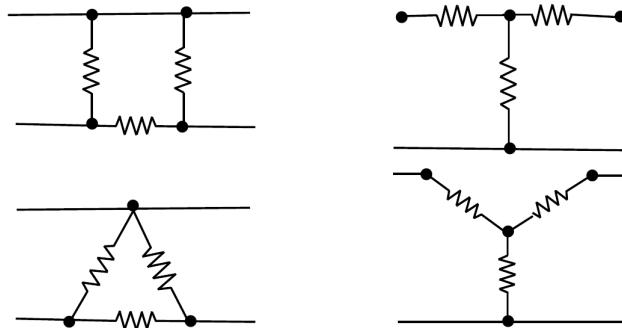
$$v = R_{eq} I_s = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} I_s$$

Dalla LKC si ha

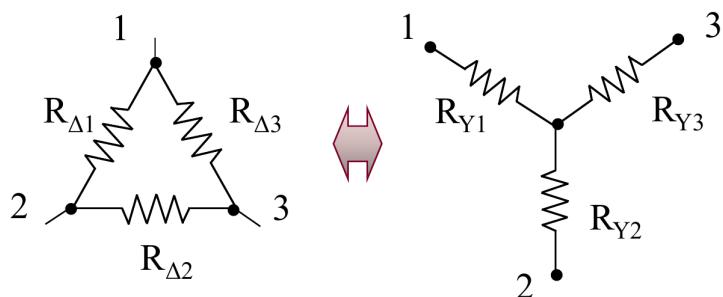
$$\begin{aligned} i_1 + i_2 - I_s &= 0 \implies i_1 = I_s - i_2 = I_s - \frac{v}{R_2} \\ &\stackrel{\text{sostituisco } v}{\implies} i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I_s \quad i_2 = I_s - i_1 = I_s - \frac{v}{R_1} \\ &\quad i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I_s \end{aligned}$$

2.5.5 Collegamenti di resistori a stella e a triangolo

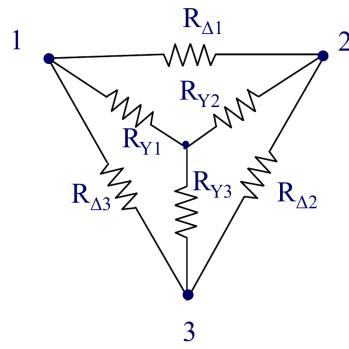
Un sistema di tre resistenze può essere collegato a triangolo o a stella. Può essere meglio per l'analisi circuitale una connessione a stella invece che un triangolo o viceversa. Da sottolineare che una rete a stella può essere equivalente ad una rete a triangolo.



Colleg. a triangolo Colleg. a stella



Ciò significa che le stesse tensioni v_{12} , v_{23} e v_{31} tra i nodi 1 e 2, i nodi 2 e 3 e i nodi 3 e 1 inducono le stesse correnti entranti nella stella e nel triangolo rispettivamente al nodo 1, al nodo 2 ed al nodo 3. Ora vediamo come passare da stella a triangolo e viceversa.



Ogni resistenza della stella è il prodotto dei due resistori del triangolo collegati allo stesso nodo, diviso per la somma dei resistori a triangolo.

$$R_{Y1} = \frac{R_{\Delta 1} R_{\Delta 3}}{R_{\Delta 1} + R_{\Delta 2} + R_{\Delta 3}} \quad R_{Y2} = \frac{R_{\Delta 1} R_{\Delta 2}}{R_{\Delta 1} + R_{\Delta 2} + R_{\Delta 3}} \quad R_{Y3} = \frac{R_{\Delta 2} R_{\Delta 3}}{R_{\Delta 1} + R_{\Delta 2} + R_{\Delta 3}}$$

Ogni resistenza del triangolo è la somma dei prodotti a due a due di tutti i resistori della stella, divisa per la resistenza nel ramo opposto della stella.

$$R_{\Delta 1} = \frac{R_{Y1} R_{Y2} + R_{Y2} R_{Y3} + R_{Y3} R_{Y1}}{R_{Y3}} \quad R_{\Delta 2} = \frac{R_{Y1} R_{Y2} + R_{Y2} R_{Y3} + R_{Y3} R_{Y1}}{R_{Y1}} \quad R_{\Delta 1} = \frac{R_{Y1} R_{Y2} + R_{Y2} R_{Y3} + R_{Y3} R_{Y1}}{R_{Y2}}$$

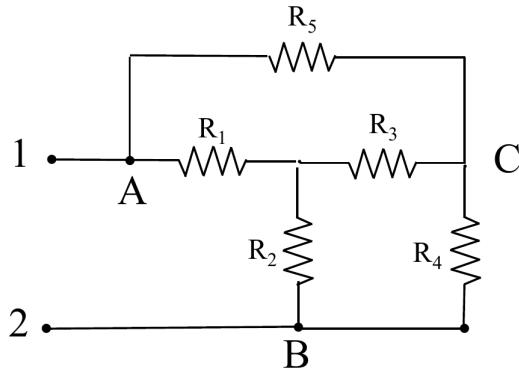
Per $R_{Y1} = R_{Y2} = R_{Y3} = R_Y$ risulta $R_{\Delta 1} = R_{\Delta 2} = R_{\Delta 3} = R_\Delta$ e viceversa:

$$R_Y = R_\Delta / 3$$

$$R_\Delta = 3R_Y$$

Esempio 2

Determinare la resistenza equivalente del seguente circuito



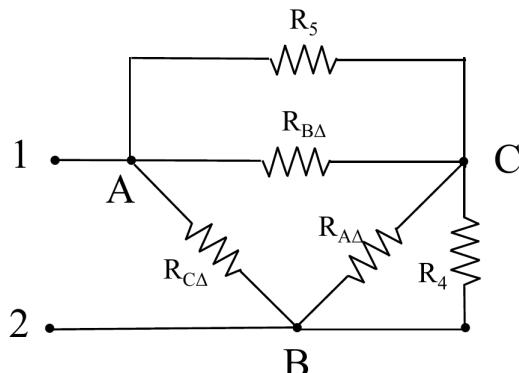
$$R_1 = 3\Omega$$

$$R_4 = 2\Omega$$

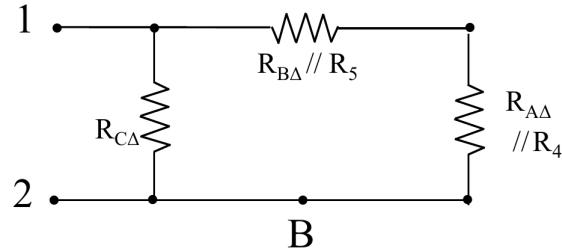
$$R_2 = 3\Omega$$

$$R_5 = 2\Omega$$

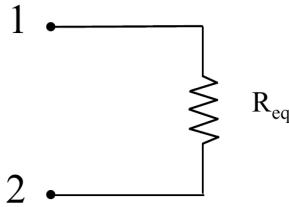
$$R_3 = 3\Omega$$



$$R_{A\Delta} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_1} = 9\Omega \quad R_{B\Delta} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_2} = 9\Omega \quad R_{c\Delta} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_3} = 9\Omega$$



$$R_{B\Delta//R_5} = \frac{R_{B\Delta} R_5}{R_{B\Delta} + R_5} = 1,6364\Omega \quad R_{A\Delta//R_4} = \frac{R_{A\Delta} R_4}{R_{A\Delta} + R_4} = 1,6364\Omega$$

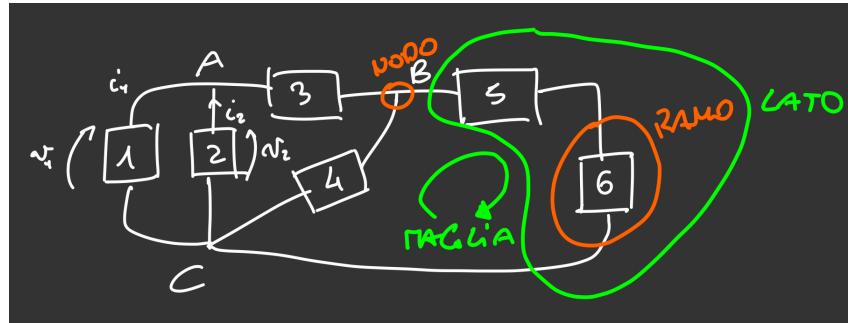


$$R_{eq} = R_{C\Delta} // (R_{B\Delta} // R_5 + R_{A\Delta} // R_4) = (9) // (3,272) = 2,41\Omega$$

3 Metodi di analisi

3.1 Metodo di Tanenblau

Prendiamo un circuito di riferimento

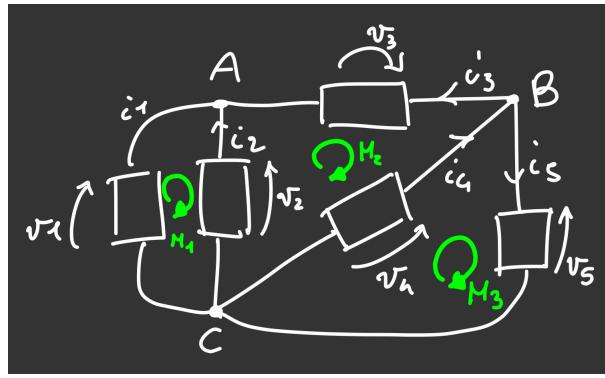


Definiamo

- Nodo: intersezione tra 3 o più fili
- Ramo: Parte di circuito compresa tra due nodi
- Maglia: qualsiasi percorso chiuso del circuito
- Lato: connessione in successione di più rami

Possiamo riformulare la definizione di risoluzione di un circuito: calcolare tutte le tensioni di lato e tutte le correnti di lato. Quindi se L è il numero di lati, avremo L tensioni e L correnti in un circuito; in totale si hanno $2L$ incognite, che necessitano di $2L$ equazioni indipendenti.

Possiamo scrivere L equazioni costitutive dei componenti, le altre L equazioni di ricavano da LKC e LKT.



$$\begin{aligned} A(LKC) : i_1 + i_3 - i_2 &= 0 \\ B(LKC) : i_4 - i_3 - i_5 &= 0 \end{aligned} \quad + = -i_2 = i_5 + i_1 + i_4$$

$$C(LKC) : i_2 + i_5 - i_1 - i_4 = 0$$

La somma delle prime due equazioni è uguale alle terza con segni invertiti, quindi le tre equazioni non sono indipendenti, solo due di esse lo sono.

Le equazioni che servono per risolvere un circuito sono:

- L equazioni costitutive
- $N - 1$ LKC
- $L - N + 1$ LKT (maglie non intersecate da rami)

Infatti per il circuito avremo

$$M_1 : v_1 - v_2 = 0$$

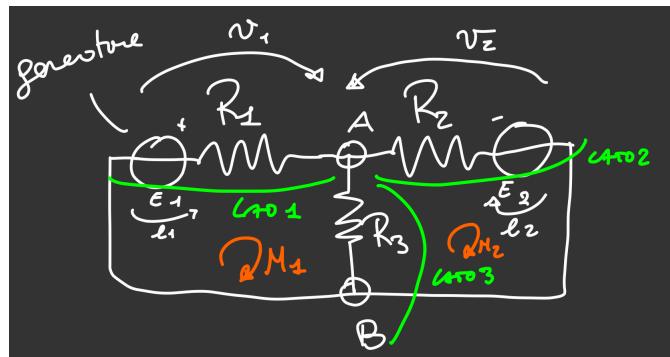
$$M_2 : v_4 - v_5 = 0$$

$$M_3 : v_2 + v_3 - v_4 = 0$$

Passaggi

1. individuare N nodi e L lati
2. individuare $2L$ incognite (v, i)
3. scrivere le L equazioni di lato
4. scrivere le $N - 1$ LKC e $L - N + 1$ LKT
5. Risolvere il sistema di equazioni

3.1.1 Esempio



Equazioni di lato	Equazioni topologiche
Lato 1: $\begin{cases} e_1 = E_1 \\ v_{R_1} = R_1 \cdot i_1 \end{cases}$	LKC(A): $i_1 + i_2 - i_3 = 0$
Lato 2: $\begin{cases} e_2 = E_2 \\ v_{R_2} = R_2 \cdot i_2 \end{cases}$	LKT(M_1): $v_1 - v_3 = 0$
Lato 3: $v_{R_3} = R_3 \cdot i_3$	LKT(M_2): $v_3 - v_2 = 0$

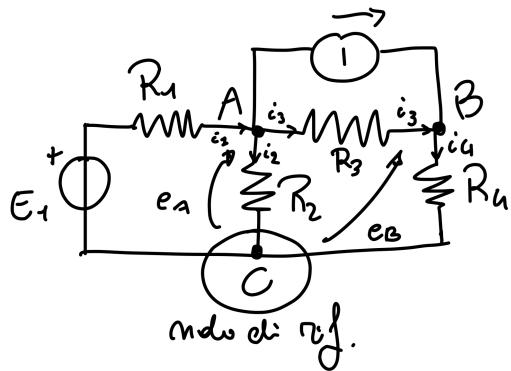
Ora effettuiamo la sostituzione:

$$\begin{cases} v_1 - v_3 = E_1 - R_1 i_1 - R_3 i_3 = 0 \\ v_3 - v_2 = R_3 i_3 - E_2 + R_2 i_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_1 + i_2 - i_3 = 0 \\ R_1 i_1 + R_3 i_3 = E_1 \\ R_2 i_2 + R_3 i_3 = E_2 \end{cases}$$

3.2 Metodo dei potenziali di nodo

1. scegliere un nodo di riferimento
2. assegniamo le tensioni agli altri nodi
3. LKC ai nodi non di riferimento
4. scrivere le correnti in funzione dei potenziali di nodo
5. risolvere infine il sistema di equazioni

3.3 Esempio



Sceglieremo come nodo di riferimento il nodo C

$$\text{LKC(A): } i_1 - i_2 - I - i_3 = 0$$

$$\text{LKC(B): } i_3 + I - i_4 = 0$$

$$i_1 = \frac{E_1 - e_A}{R_1}$$

$$i_2 = \frac{e_A}{R_2}$$

$$i_3 = \frac{e_A - e_B}{R_3}$$

3.4 Teoremi di rete

Ipotesi di linearità

$f(x_1 + x_2)$ è lineare

additività: $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

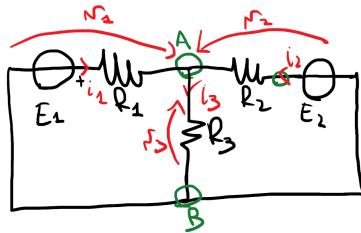
omogeneità: $f(ax_1) = af(x_1)$

3.5 Sovrapposizione degli effetti

Ipotesi: circuito lineare.

Le variabili di rete (effetti) si possono ottenere come sovrapposizione delle risposte dovute alle singole cause.

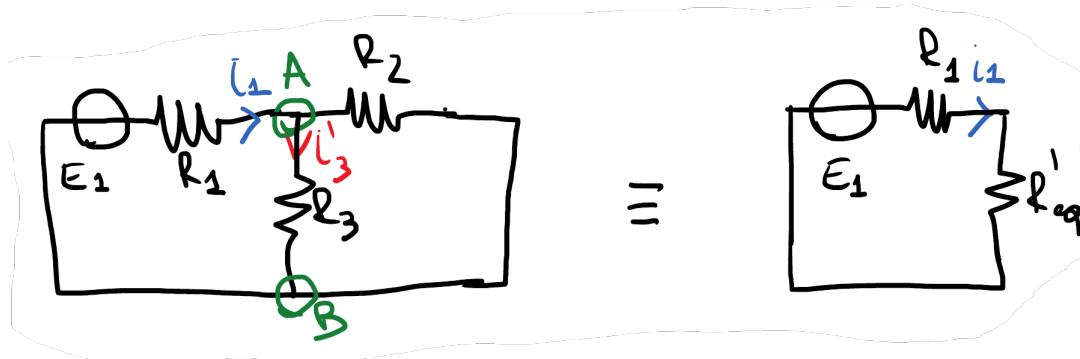
3.5.1 Esempio



Calcoliamo i_3 .

Bisogna considerare una causa alla volta, quindi passivare alcuni generatori: passivando un generatore di tensione si ottiene un corto-circuito (quindi il circuito è chiuso), mentre se si passiva un generatore di corrente il circuito risultante è aperto. Per calcolare v_3 utilizzeremo la formula del partitore di tensione.

Causa E_1



$$i'_3 = i_1 \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3} = \frac{E_1}{R_1 + R'_{eq}} \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3}$$

$$R'_{eq} = R_2 // R_3 = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}$$

$$i_1 = \frac{E_1}{R_1 + R'_{eq}}$$

Calcoli alternativi (più esplicativi):

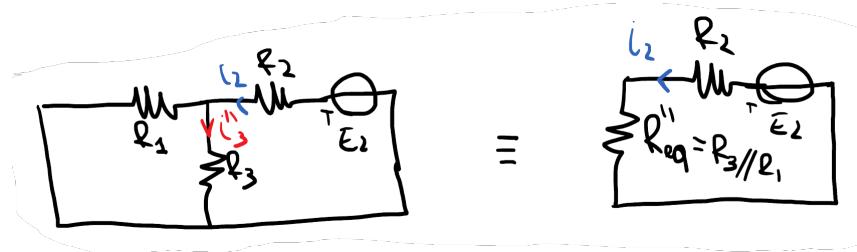
$$i_1 = \frac{E_1}{R_1 + R'_{eq}}$$

$$R'_{eq} = R_2 // R_3 = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}$$

$$v_3 = \frac{R'_{eq}}{R_1 + R'_{eq}} \cdot E_1 = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} \cdot \frac{E_1}{R_1 + R'_{eq}} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} \cdot i_1$$

$$i'_3 = \frac{v_3}{R_3} = \frac{R_2}{R_2 + R_3} \cdot i_1$$

Causa E_2



$$i_2 = \frac{E_2}{R_2 + R'_{eq}}$$

$$i''_3 = i_2 \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_3}$$

Calcoli alternativi (più esplicativi):

$$i_2 = \frac{E_2}{R_2 + R''_{eq}}$$

$$R''_{eq} = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3}$$

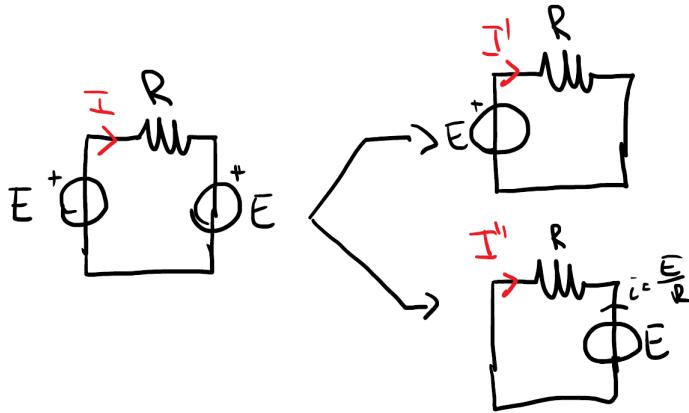
$$v_3 = \frac{R''_{eq}}{R_2 + R''_{eq}} \cdot E_2 = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3} \cdot \frac{E_2}{R_2 + R''_{eq}} = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3} \cdot i_2$$

$$i''_3 = \frac{v_3}{R_3} = \frac{R_1}{R_1 + R_3} \cdot i_2$$

Ora possiamo calcolare i_3 :

$$i_3 = i'_3 + i''_3$$

3.5.2 Esempio 2



$$I' = \frac{E}{R}$$

$$I'' = -\frac{E}{R}$$

$$I = I' + I'' = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} = 0$$

$$P = RI^2 = 0$$

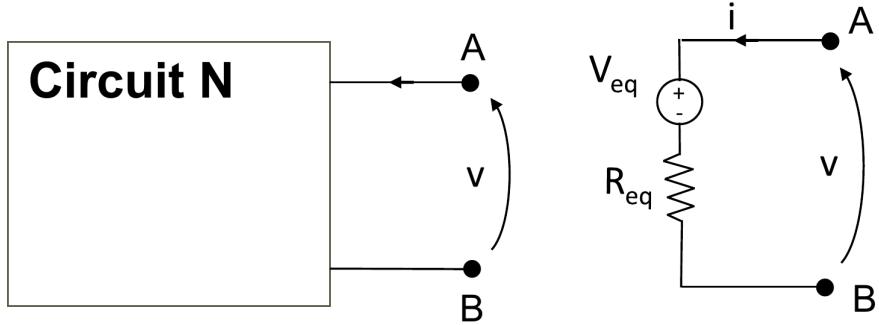
$$\begin{aligned} P &= P' + P'' \\ &= R(I')^2 + R(I'')^2 \\ &= R\left(\frac{E}{R}\right)^2 + R\left(-\frac{E}{R}\right)^2 \\ &= R\frac{E^2}{R^2} + R\frac{E^2}{R^2} \neq 0 \end{aligned}$$

3.6 Teorema di Thevenin

In un circuito lineare tempo-indipendente è messa in evidenza una porta. Il circuito N visto dalla porta, è equivalente ad un circuito formato dalla serie di un generatore indipendente di tensione ed un resistore. La tensione del generatore è data dalla tensione a vuoto della porta AB del circuito N. Il resistore è il resistore equivalente di N visto dalla porta AB quando tutti i generatori indipendenti interni al circuito N sono spenti.

Ipotesi:

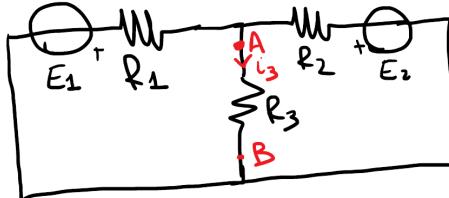
- circuito lineare
- il carico non è accoppiato con la rete da semplificare



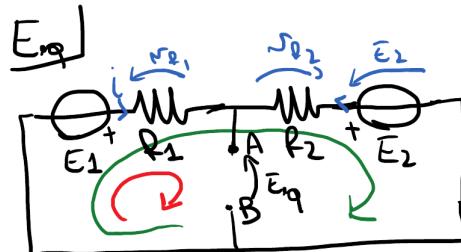
E_{eq} è la tensione vista ai morsetti A e B a circuito aperto.

R_{eq} è la resistenza equivalente vista da A e B passivando i generatori indipendenti.

3.6.1 Esempio



Applichiamo il teorema di Thevenin ai morsetti A e B:



Utilizzando l'LKT sulla maglia più grande:

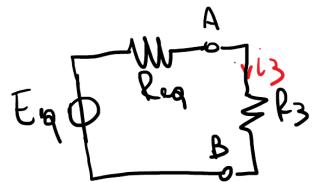
$$\begin{aligned}
 E_1 - v_{R_1} + v_{R_2} - E_2 = 0 &\Rightarrow E_1 - R_1 i - R_2 i - E_2 = 0 \\
 &\Rightarrow E_1 - E_2 = R_1 i + R_2 i \\
 &\Rightarrow E_1 - E_2 = (R_1 + R_2) i \\
 &\Rightarrow i = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2}
 \end{aligned}$$

mentre l'LKT sulla maglia più piccola a sinistra:

$$\begin{aligned}
 E_1 - R_1 i - E_{eq} = 0 &\Rightarrow E_{eq} = E_1 - R_1 \cdot \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2} \\
 &= \frac{E_1 R_1 + E_1 R_2 - R_1 E_1 + R_1 E_2}{R_1 + R_2} \\
 &= \frac{E_1 R_2 + E_2 R_1}{R_1 + R_2}
 \end{aligned}$$



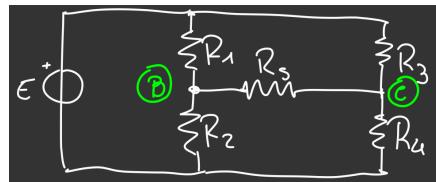
$$R_{eq} = R_1 // R_2 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$



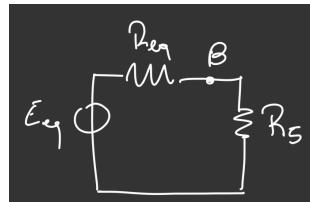
$$i_3 = \frac{E_{eq}}{R_3 + R_{eq}} = \frac{E_1 R_2 + E_2 R_1}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{R_3 + R_{eq}}$$

3.6.2 Esercizio

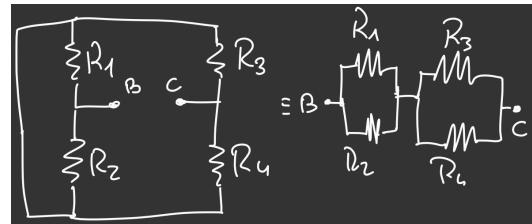
Si consideri il seguente circuito:



Vogliamo calcolare la corrente nella resistenza R_5 ; utilizzando il teorema di Thevenin otteniamo il circuito

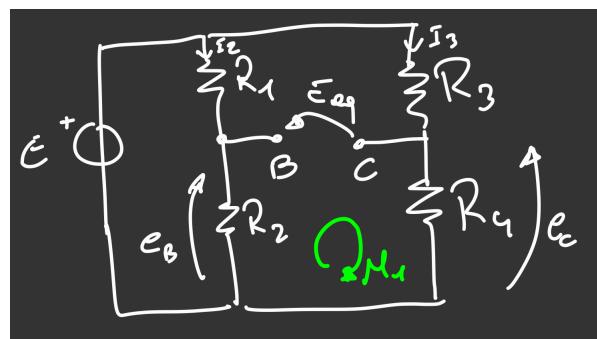


e il circuito della R_{eq} è il seguente



Da notare che le resistenze R_1 e R_2 (come anche R_3 e R_4) sono in serie viste da B e C, cosa non vera nel circuito ottenuto corto-circuitando la resistenza R_5 .

$$R_{eq} = (R_1 + R_2) // (R_3 + R_4)$$

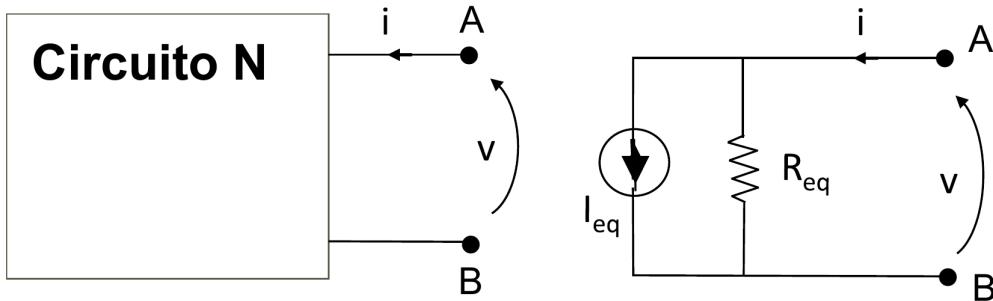


Per calcolare E_{eq} consideriamo la maglia M_1 nel circuito ottenuto corto-circuitando la resistenza R_5 ; è evidente che e_B è concorde a essa, mentre e_C è discorde, quindi (chiamando la tensione del circuito aperto E_{CA})

$$\begin{aligned} M_1 : e_B - E_{CA} - e_C &= 0 \implies E_{CA} = e_B - e_C \\ &= R_2 I_2 - R_4 I_3 \\ &= R_2 \frac{E}{R_1 + R_2} - R_4 \frac{E}{R_3 + R_4} = E_{eq} \\ I_5 &= \frac{E_{eq}}{R_{eq} + R_5} \end{aligned}$$

3.7 Teorema di Norton

In un circuito N lineare tempo-indipendente è messa in evidenza una porta. Visto dalla porta il circuito è equivalente ad un circuito formato dal parallelo di un generatore indipendente di corrente ed un resistore. La corrente del generatore è data dalla corrente di cortocircuito della porta AB del circuito N. Il resistore è il resistore equivalente di N visto dalla porta AB quando tutti i generatori indipendenti interni al circuito N sono spenti.



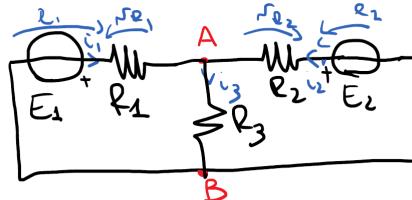
Ipotesi:

- circuito lineare
- il carico non è accoppiato con la rete da semplificare

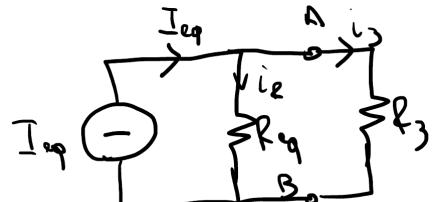
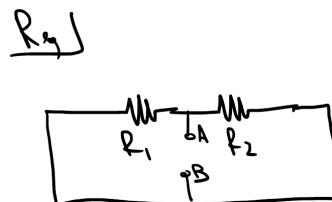
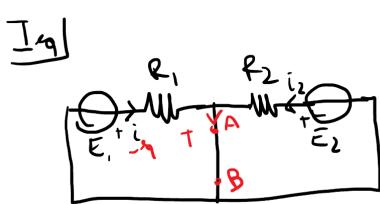
I_{eq} è la corrente tra A e B quando vi è un corto-circuito.

R_{eq} è resistenza vista ai morsetti A e B passivando i generatori indipendenti.

3.7.1 Esempio



Vogliamo calcolare i_3 . Quindi applichiamo il teorema di Norton, utilizzando la formula del partitore di corrente per calcolare i_3 :



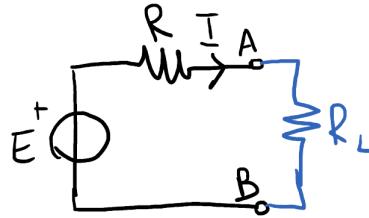
$$I_{eq} = i_1 + i_2 = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}$$

$$R_{eq} = R_1 // R_2 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

$$i_3 = I_{eq} \cdot \frac{R_{eq}}{R_{eq} + R_3}$$

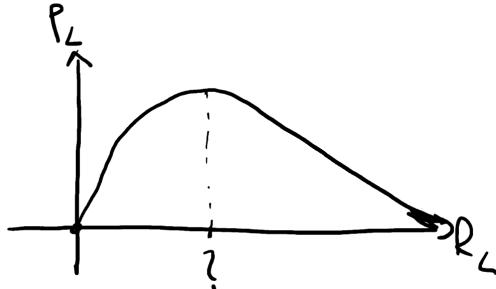
3.8 Teorema del massimo trasferimento di potenza

Consideriamo il seguente circuito



Qual è il valore di R_L che massimizza il trasferimento di potenza? Proviamo a calcolarlo.

$$\begin{aligned} P_L &= I \cdot V_L \\ &= R_L \cdot I^2 \\ &= R_L \left(\frac{E}{R + R_L} \right)^2 \begin{cases} R_L = 0 \Rightarrow P_L = 0 \\ R_L \rightarrow \infty \Rightarrow P_L = 0 \text{ (circuito aperto)} \end{cases} \end{aligned}$$



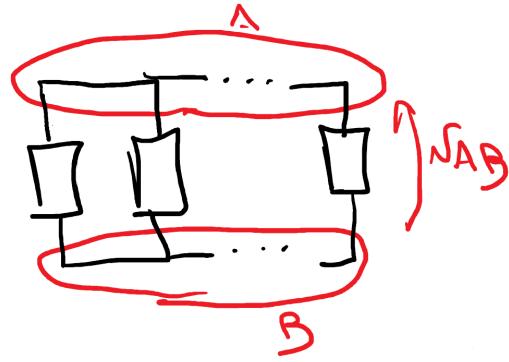
Per trovare il massimo poniamo la derivata della potenza a 0; sapendo che $P_L = E^2 \frac{R_L}{(R + R_L)^2}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_L}{\partial R_L} &= 0 \Rightarrow E^2 \frac{(R + R_L)^2 - 2R_L(R + R_L)}{(R + R_L)^4} = 0 \\ &\Rightarrow R^2 + R_L^2 + 2RR_L - 2RR_L - 2R_L^2 = 0 \\ &\Rightarrow R = R_L \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{L,Max} &= R \frac{E^2}{(R + R)^2} \\ &= R \frac{E^2}{4R^2} \\ &= \frac{E^2}{4R} \end{aligned}$$

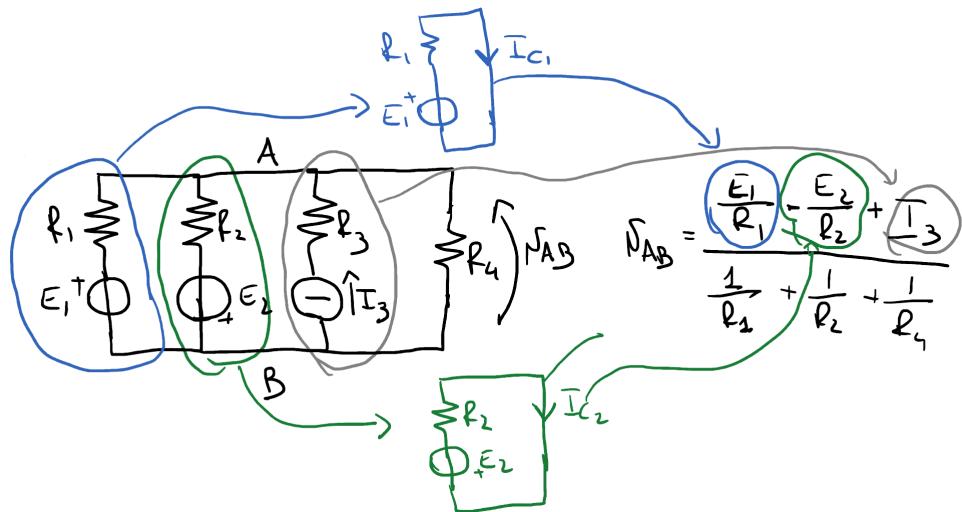
3.9 Teorema di Millman

Data una rete con due o più lati in parallelo, la tensione ai capi della rete è pari al rapporto delle correnti di corto-circuito di ogni singolo lato e la sommatoria delle conduttanze di ogni lato.



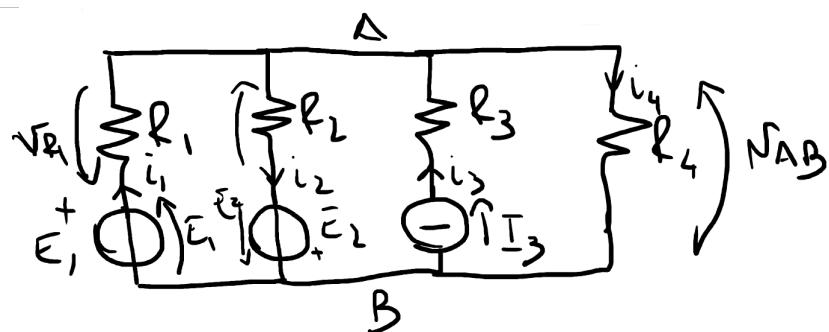
$$v_{AB} = \frac{\sum_k \frac{v_k}{R_k} + \sum_j i_j}{\sum_n \frac{1}{R_n}}$$

3.9.1 Esempio 1



$$v_{AB} = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + I_3}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

Dimostriamo che questa formula è vera utilizzando il metodo dei potenziali di nodo (applicato al nodo B):



$$v_{AB} = E_1 - R_1 i_1 \Rightarrow i_1 = \frac{E_1 - v_{AB}}{R_1} \quad (1)$$

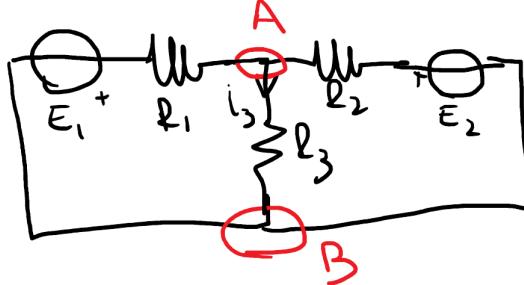
$$v_{AB} = -E_2 + R_2 i_2 \Rightarrow i_2 = \frac{E_2 + v_{AB}}{R_2} \quad (2)$$

$$i_3 = I_3 \quad (3)$$

$$i_4 = \frac{v_{AB}}{R_4} \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
\text{LKC: } i_1 - i_2 + i_3 - i_4 = 0 &\Rightarrow \frac{E_1 - v_{AB}}{R_1} - \frac{E_2 + v_{AB}}{R_2} + I_3 - \frac{v_{AB}}{R_4} = 0 \\
&\Rightarrow \frac{E_1}{R_1} - \frac{v_{AB}}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} - \frac{v_{AB}}{R_2} + I_3 - \frac{v_{AB}}{R_4} = 0 \\
&\Rightarrow v_{AB} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) = \frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} + I_3 \\
&\Rightarrow v_{AB} = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + I_3}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}
\end{aligned}$$

3.9.2 Esempio 2



Calcoliamo i_3 :

$$v_{AB} = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} \Rightarrow i_3 = \frac{v_{AB}}{R_3}$$

4 Analisi del transitorio

4.1 Formule notevoli

4.1.1 Condensatore

Condensatore lineare

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \quad C = \mathcal{E} \cdot \frac{S}{d}$$

dove C è la capacità in farad, \mathcal{E} la permittività elettrica assoluta dell'isolante in farad su metro, S la superficie delle due armature in metri quadrati e d la distanza fra le armature in metri.

Energia immagazzinata

$$\begin{aligned}
dW = V \ dq &= \frac{q}{C} \ dq & U &= \frac{1}{2} CV^2 \\
W &= \frac{1}{2} C V^2 = U
\end{aligned}$$

L'energia immagazzinata da un condensatore è uguale al lavoro W ; U è l'energia potenziale.

Equazione caratteristica

$$v(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau + v(t_0) \quad i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C \frac{dv(t)}{dt}$$

4.1.2 Induttore

Energia

$$W = \frac{1}{2} LI^2$$

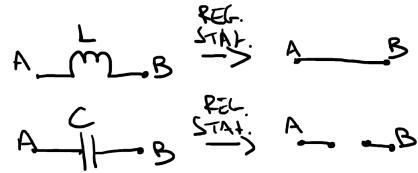
Equazione differenziale

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

Campo magnetico prodotto da un solenoide

$$B = \mu \frac{N}{l} I$$

Una cosa importantissima da tenere a mente sono i circuiti equivalenti di conduttore e induttore in regime stazionario:



4.2 Introduzione

Fin'ora abbiamo usato delle sorgenti costanti, quindi abbiamo fatto esercizi con circuiti DC (circuiti con corrente continua). Consideriamo ora invece la variabile tempo; i nostri circuiti subiranno delle variazioni:

- avremo generatori variabili nel tempo
- si possono presentare dei guasti nel circuito
- il circuito sarà dotato di un interruttore:
 - se aperto $i = 0 \Rightarrow$ circuito aperto
 - se chiuso $v = 0 \Rightarrow$ cortocircuito

Per il **resistore** $v = R \cdot i$, vi è un legame istantaneo, viene chiamato legame **adinamico** (senza memoria).

Per **induttori e condensatori** il legame è integro-differenziale, viene chiamato legame **dinamico** (con memoria).

Induttore

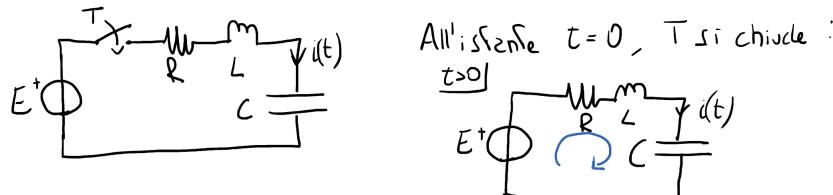
$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} L \cdot I^2$$

Condensatore

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} C \cdot V^2$$

Per l'induttore la variabile di stato è la corrente, mentre per il condensatore la variabile di stato è la tensione.

Ovviamente valgono ancora le formule LKC, LKT e le equazioni costitutive.



$$\text{LKT: } \begin{cases} E - v_R - v_L - v_C = 0 \\ v_R = Ri \\ v_L = L \frac{di}{dt} \\ i = C \frac{v_L}{dt} \Rightarrow v_C = \frac{1}{C} \int i \, dt \end{cases}$$

$$E = Ri - L \frac{di}{dt} - \frac{1}{C} \int i \, dt = 0$$

Ecco che dobbiamo risolvere un'equazione differenziale.

Per i circuiti lineari, quindi con equazioni differenziali ordinarie (ODE) a coefficienti costanti, utilizzeremo il metodo di Cauchy. La soluzione finale sarà la somma di due contributi:

- la soluzione dell'omogenea associata $o(t)$
- la soluzione particolare $p(t)$

4.3 Il problema di Cauchy

In generale la soluzione sarà un'espressione di questo tipo

$$a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = b(t)$$

- $b(t)$ è il termine noto
- $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ sono i coefficienti costanti
- $x(t)$ è l'incognita

La condizione iniziale del problema di Cauchy è $x(t=0) = X_0$; rappresenta lo stato energetico del sistema prima che si inneschi il transitorio. Per risolvere il problema di Cauchy non solo serve sapere quest'ultimo, ma anche le variabili di stato prima che si inneschi il transitorio.

L'integrale particolare $p(t)$ ha la stessa evoluzione di $b(t)$; ad esempio se $b(t)$ è costante allora anche $p(t)$ è costante ($b(t)$ dipende solo dai generatori).

L'integrale dell'omogenea associata $o(t)$ è la soluzione dell'ODE quando il termine noto è nullo, cioè si passivano i generatori. Esso rappresenta l'**evoluzione libera**:

$$a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = 0$$

il **polinomio associato** all'integrale dell'omogenea è

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \underset{\text{soluzioni}}{\implies} \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$$

$$o(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + k_n e^{\lambda_n t} \quad \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n < 0$$

Costante di tempo:

$$\tau_n = -\frac{1}{\lambda_n} [s]$$

4.3.1 Principio di conservazione dell'energia

Al fine di inibire variazioni istantanee dell'energia immagazzinata, nei condensatori la variazione istantanea della tensione è nulla e negli induttori la variazione istantanea della corrente è nulla. L'energia immagazzinata da un elemento non può variare bruscamente

Induttore

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} L \cdot I^2$$

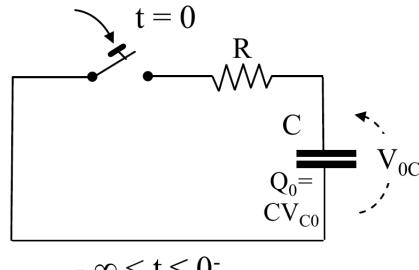
Nell'induttore variazioni istantanee di i non sono possibili

Condensatore

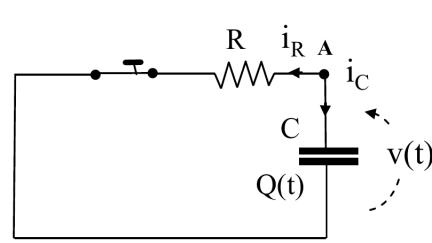
$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} C \cdot V^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

Nel condensatore variazioni istantanee di V e Q non sono possibili

4.4 Circuito del primo ordine: Circuito RC



$-\infty < t \leq 0^-$



$0^+ \leq t < +\infty$

$$\text{LKT: } \begin{cases} E - v_R - v_C = 0 \\ v_R = R \cdot i \\ i = C \frac{dv_C}{dt} \end{cases} \implies E - RC \frac{dv_C}{dt} - v_C = 0$$

$$\implies \frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{RC} = \frac{E}{RC}$$

Perveniamo a una equazione differenziale del primo ordine. Per risolverla dobbiamo trovare la soluzione dell'omogenea associata e la soluzione particolare.

1. Soluzione dell'omogenea associata

$$\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{RC} = 0$$

il polinomio associato è

$$\lambda + \frac{1}{RC} = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{RC}$$

quindi la soluzione è

$$o(t) = Ae^{-t/RC}$$

$\frac{t}{RC}$ è detto numero puro, e la costante di tempo è $\tau = RC$. Si può pervenire alla soluzione dell'omogenea associata anche in un altro modo: riprendiamo l'omogenea associata e poniamo sotto integrale ambo i membri:

$$\begin{aligned} \frac{dv_C}{dt} = -\frac{v_C}{RC} &\Rightarrow \int \frac{dv_C}{dt} = -\int \frac{v_C}{RC} \\ &\Rightarrow \ln(v_C) + k_1 = -\frac{t}{RC} + k_2 \\ &\Rightarrow \ln(v_C) = -\frac{t}{RC} + \underbrace{(k_2 - k_1)}_{k_3} \\ &\Rightarrow v_C = e^{-t/RC + k_3} \\ &\Rightarrow v_C = e^{-t/RC} \underbrace{e^{k_3}}_A \\ &\Rightarrow v_C = Ae^{-t/RC} \end{aligned}$$

2. Soluzione particolare

Siccome $p(t)$ si comporta come $b(t)$ e $b(t) = \frac{E}{RC}$ (una costante), allora $p(t)$ sarà una costante

$$\cancel{\frac{dp(t)}{dt}} + \frac{p(t)}{RC} = \frac{E}{RC} \Rightarrow p(t) = E$$

3.

$$v_C = o(t) + p(t) = Ae^{-t/RC} + E$$

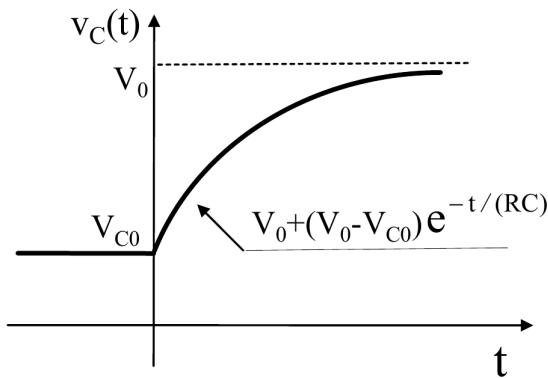
4. Consideriamo la condizione iniziale

$$\begin{aligned} v_C(t=0^-) = V_{C0} & \qquad v_C(t=0^+) = Ae^{-0/RC} + E = V_{C0} \\ & \Rightarrow A + E = V_{C0} \\ & \Rightarrow A = V_{C0} - E \end{aligned}$$

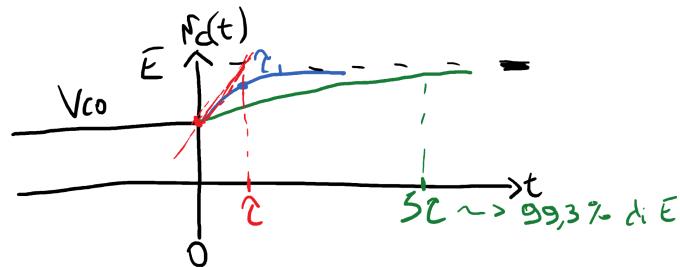
5.

$$v_C(t) = \underbrace{(V_{C0} - E)e^{-t/RC}}_{\text{Risposta transitoria}} + \underbrace{E}_{\substack{\text{Risposta} \\ \text{a regime}}} = \underbrace{V_{C0} \cdot e^{-t/RC}}_{\text{Evoluzione libera}} + \underbrace{E(1 - e^{-t/RC})}_{\text{Risposta formata}}$$

Ricordiamo che $\tau = -\frac{1}{\lambda}$, quindi in questo caso $\tau = RC$

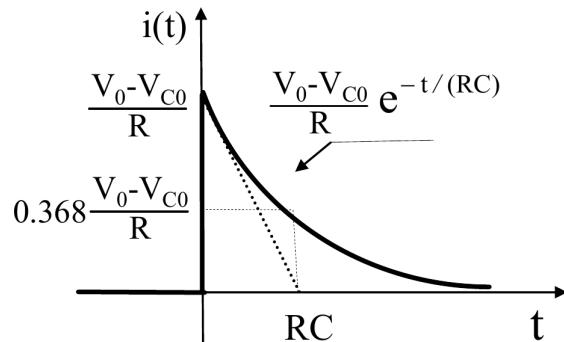


N.B. nel grafico la V_0 è E .



Dal grafico si può facilmente vedere che $\tau_1 < \tau_2$, quindi la tensione è continua.

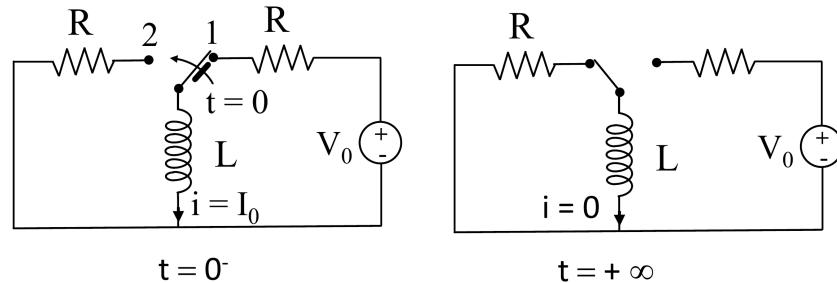
$$e^{-t/\tau} \begin{cases} \text{Analiticamente è 0 con } t \rightarrow \infty \\ \text{Praticamente: } e^{-5\tau/\tau} = e^{-5} = \frac{1}{e^5} = 0,0067 \end{cases}$$



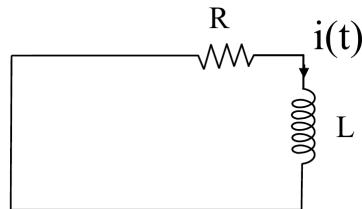
$$\begin{aligned} i(t) &= C \frac{dv_C}{dt} \\ &= C \frac{d}{dt} \left[(V_{C0} - E) e^{-t/RC} + E \right] \\ &= \cancel{C} - \left(\frac{1}{RC} \right) (V_{C0} - E) e^{-t/RC} \\ &\Rightarrow i(t) = \frac{E - V_{C0}}{R} e^{-t/RC} \end{aligned}$$

Dal grafico è evidente che la corrente non varia con continuità.

4.5 Circuito del primo ordine: Circuito RL



L'obiettivo è determinare la risposta naturale del circuito RL (che si ha alla chiusura del derivatore da 1 a 2). Il circuito risultante è il seguente:



$$\text{LKT : } \begin{cases} E - v_R - v_L = 0 \\ v_R = R \cdot i \\ v_L = L \frac{di}{dt} \end{cases} \Rightarrow E - R \cdot i - L \frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{E}{L}$$

Siamo arrivati a una equazione differenziale del primo ordine.

1. Soluzione dell'omogenea associata

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = 0$$

il polinomio associato è

$$\lambda + \frac{R}{L} = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{R}{L}$$

quindi la soluzione è

$$o(t) = A e^{\lambda t} = A e^{-\frac{R}{L} t}$$

$\frac{t}{RC}$ è il numero puro, e la costante di tempo è $\tau = \frac{L}{R}$.

2. Soluzione particolare

Siccome $p(t)$ si comporta come $b(t)$ e $b(t) = \frac{E}{RC}$ (una costante), allora $p(t)$ sarà una costante

$$\cancel{\frac{dp(t)}{dt}} + \frac{R}{L} p = \frac{E}{L} \Rightarrow p(t) = \frac{E}{R}$$

3.

$$i(t) = o(t) + p(t) = A e^{-\frac{R}{L} t} + \frac{E}{R}$$

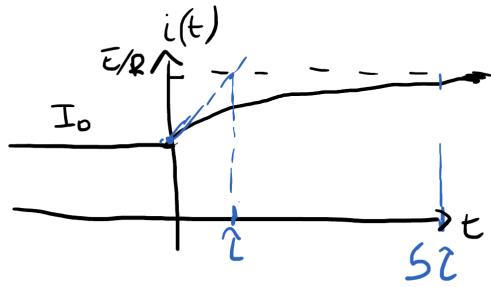
4. Consideriamo le condizioni iniziali

$$\begin{aligned} i(t = 0^-) &= I_0 \\ i(0) &= A e^{-\frac{R}{L} 0} + \frac{E}{R} = I_0 \\ \Rightarrow A &= I_0 - \frac{E}{R} \end{aligned}$$

$$i(t = 0^+) = I_0$$

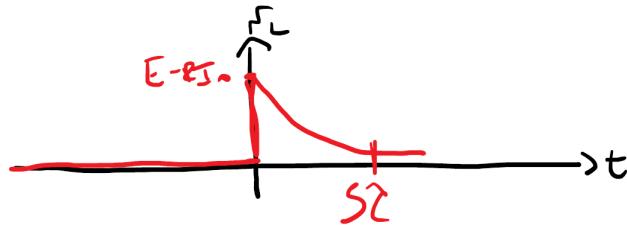
5.

$$i(t) = \underbrace{\left(I_0 - \frac{E}{R} \right) e^{-\frac{R}{L}t}}_{\text{Risposta transitoria}} + \underbrace{\frac{E}{R}}_{\text{Risposta a regime}} = \underbrace{I_0 \cdot e^{-\frac{R}{L}t}}_{\text{Evoluzione libera}} + \underbrace{\frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})}_{\text{Risposta formata}}$$



La corrente varia con continuità.

$$\begin{aligned} v_L &= L \frac{di}{dt} \\ &= L \frac{d}{dt} \left[\left(I_0 - \frac{E}{R} \right) e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R} \right] \\ &= L \left(-\frac{R}{L} \right) \left(I_0 - \frac{E}{R} \right) e^{-\frac{R}{L}t} \\ \Rightarrow v_L &= (E - RI_0) e^{-\frac{R}{L}t} \end{aligned}$$



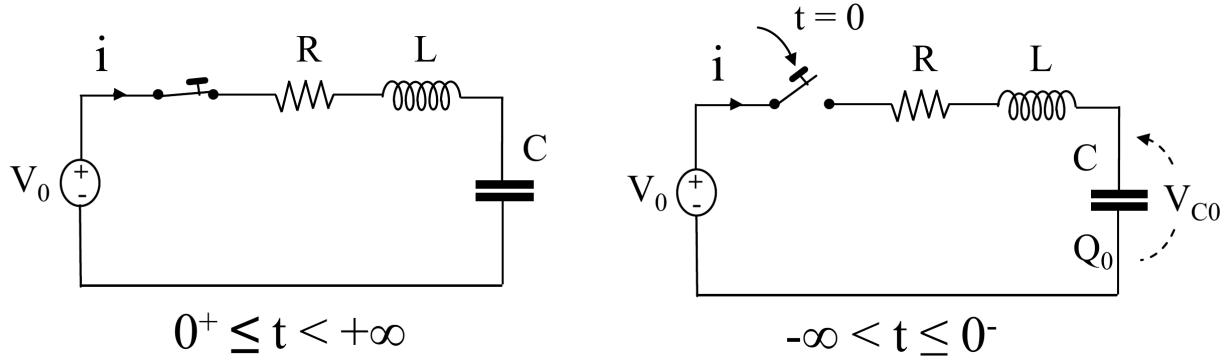
La tensione non varia con continuità.

4.6 Confronto tra circuito RC e circuito RL

RC	RL
$\frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{RC} = \frac{E}{RC}$	$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}$
$\frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{\tau} = \frac{E}{RC}$	$\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = \frac{E}{L}$
$\frac{dx(t)}{dt} + \frac{x(t)}{\tau} = X_F$	
$x(t) = o(t) + p(t) = \underbrace{X_n(t)}_{\text{Evoluzione libera}} + X_F$	
$\begin{cases} x(t) = \underbrace{ke^{-t/\tau}}_{\text{Transitorio}} + \underbrace{X_\infty}_{\text{Regime}} \\ x(t=0^-) = x(t=0^+) = X_0 \end{cases}$	

$$\begin{aligned} x(0) &= k + X_\infty = X_0 \\ \Rightarrow k &= X_0 - X_\infty \\ \Rightarrow x(t) &= (X_0 - X_\infty) e^{-t/\tau} + X_\infty \end{aligned}$$

4.7 Circuiti del secondo ordine: Circuito RLC



$$\begin{aligned} \text{LKT: } & \begin{cases} E - v_R - v_L - v_C = 0 \\ v_R = Ri \\ v_L = L \frac{di}{dt} \\ v_C = \frac{1}{C} \int i(\tau) d\tau \end{cases} \\ & \Rightarrow E - Ri - L \frac{di}{dt} - \frac{1}{C} \int i(\tau) d\tau = 0 \\ & \stackrel{\substack{\text{derviamo} \\ \text{in } dt}}{\Rightarrow} R \frac{di}{dt} + L \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{C} i = 0 \\ & \Rightarrow \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0 \end{aligned}$$

Siamo arrivati a un'equazione differenziale del secondo ordine.

Soluzione dell'omogenea associata

$$i(t) = A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t}$$

il polinomio associato è

$$\lambda^2 + \frac{R}{L} \lambda + \frac{1}{LC} = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$\begin{aligned} \frac{R}{2L} &= \alpha: \text{ coefficiente di smorzamento} \\ \frac{1}{LC} &= \omega_0^2: \text{ pulsazione di risonanza} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \\ \Rightarrow \Delta &= \alpha^2 - \omega_0^2 \begin{cases} > 0 \rightarrow \text{soluzioni reali distinte} \\ = 0 \rightarrow \text{soluzioni reali coincidenti} \\ < 0 \rightarrow \text{soluzioni complesse coniugate} \end{cases} \end{aligned}$$

- $\Delta > 0$

$$\alpha^2 > \omega_0^2 \Rightarrow \alpha > \omega_0$$

$$i(t) = A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t}$$

Analizziamo le condizioni iniziali:

$$\begin{aligned} i(0^-) &= i(0^+) = 0 \\ \Rightarrow i(0) &= 0 \\ \Rightarrow A + B &= 0 \\ \Rightarrow A &= -B \end{aligned}$$

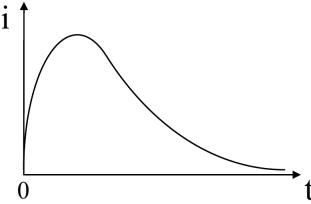
$$\begin{aligned}
v_C(0) &= V_{C0} \\
\Rightarrow E - \underbrace{Ri(0)}_0 - L \frac{di}{dt} - V_{C0} &= 0 \\
\Rightarrow E - L \frac{di}{dt} \Big|_0 - V_{C0} &= 0 \\
\Rightarrow \frac{di}{dt} \Big|_0 &= \frac{E - V_{C0}}{L}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{di}{dt} \Big|_0 &= (A\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + B\lambda_2 e^{\lambda_2 t}) \Big|_0 \\
&= A\lambda_1 + B\lambda_2 \\
\Rightarrow A\lambda_1 + \underbrace{B}_{-A} \lambda_2 &= \frac{E - V_{C0}}{L} \\
\Rightarrow A(\lambda_1 - \lambda_2) &= \frac{E - V_{C0}}{L} \\
\Rightarrow A &= \frac{E - V_{C0}}{L(\lambda_1 - \lambda_2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i(t) &= \frac{E - V_{C0}}{L(\lambda_1 - \lambda_2)} (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}) \\
&= \frac{E - V_{C0}}{2L(\alpha^2 - \omega_0^2)} \left(e^{(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2})t} - e^{(-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2})t} \right) \\
&= \frac{E - V_{C0}}{2L(\alpha^2 - \omega_0^2)} \left(e^{(\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2})t} - e^{(-\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2})t} \right) e^{-\alpha t}
\end{aligned}$$

Risposta sovrasmorzata:

$$i(t) = \frac{E - V_{C0}}{2L(\alpha^2 - \omega_0^2)} \left(e^{(\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2})t} - e^{(-\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2})t} \right) e^{-\alpha t}$$



- $\Delta = 0$

$$\begin{aligned}
\alpha^2 &= \omega^2 \Rightarrow \alpha = \omega \\
\Rightarrow \lambda_1 &= \lambda_2 = \lambda = -\alpha \\
&\text{Risposte reali coincidenti}
\end{aligned}$$

$$i(t) = (A + Bt) e^{\lambda t} = (A + Bt) e^{-\alpha t}$$

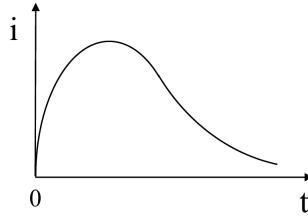
Utilizziamo le condizioni iniziali

$$\begin{aligned}
i(t = 0^-) &= i(t = 0^+) = 0 \\
\Rightarrow i(0) &= A = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_C(t = 0^-) &= v_C(t = 0^+) = V_{C0} & \frac{di}{dt} \Big|_0 &= (-\alpha(Bt)e^{-\alpha t} + Be^{-\alpha t}) \Big|_0 \\
\Rightarrow E - Ri(0) - L \frac{di}{dt} - V_{C0} &= 0 & &= B = \frac{E - V_{C0}}{L} \\
\Rightarrow \frac{di}{dt} \Big|_0 &= \frac{E - V_{C0}}{L}
\end{aligned}$$

Smorzamento critico:

$$i(t) = \frac{E - V_{C0}}{L} t \cdot e^{-\alpha t}$$



- $\Delta < 0$

$$\begin{aligned}\alpha^2 &< \omega_0^2 \\ \Rightarrow \alpha &< \omega_0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \\ &= -\alpha + \sqrt{-\underbrace{(\omega_0^2 - \alpha^2)}_{\text{Pulsazione nat. smorzata}}} \\ &= -\alpha + j\omega_d \\ \lambda_2 &= -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \\ &= -\alpha - j\omega_d\end{aligned}$$

$$i(t) = \frac{E - V_{C0}}{2Lj\omega_d} (e^{j\omega_dt} - e^{-j\omega_dt}) e^{-\alpha t}$$

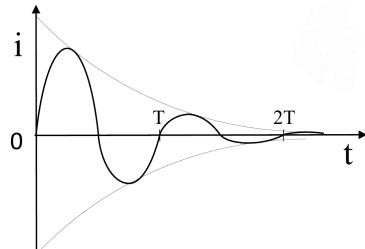
Utilizziamo le formule di eulero:

$$\begin{aligned}e^{j\theta} &= \cos \theta + j \sin \theta \\ e^{-j\theta} &= \cos \theta - j \sin \theta\end{aligned}$$

$$i(t) = \frac{E - V_{C0}}{2L\cancel{j}\omega_d} \cancel{j} 2 \sin(\omega_d t) e^{-\alpha t}$$

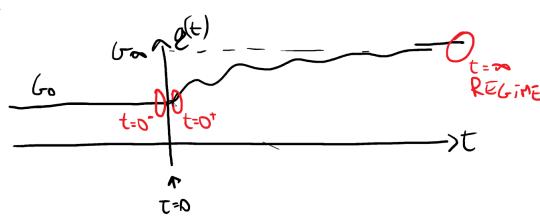
Risposta sottosmorzata:

$$i(t) = \frac{E - V_{C0}}{L\omega_d} \sin(\omega_d t) e^{-\alpha t}$$



4.8 Esercizi in regime transitorio

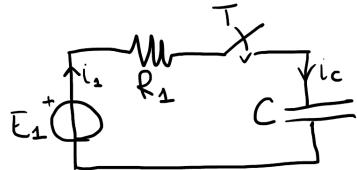
Risolvere un'equazione differenziale di ordine superiore al secondo è complesso; in questi casi si usa il **metodo per ispezione**.



Siamo interessati a

- $t = 0^-$: istante immediatamente prima che si instauri il transitorio
- $t = 0^+$: istante immediatamente dopo l'instaurasi del transitorio
- $t = \infty$: regime

4.8.1 Esercizio 1: Circuito RC



$$R_1 = 100\Omega$$

$$C_1 = 100F$$

$$E_1 = 10V$$

T si chiude a $t = 0$; il condensatore è inizialmente scarico.

Dobbiamo trovare:

- $P_{E_1, max}$ e $t_{P_{E_1, max}}$
- $P_{E_1}(t = \infty)$
- $t_{P_E^*}$ e $P_E^* = \frac{1}{2}P_{E, max}$

$$P_{E_1} = E_1 \cdot i_1$$

$$t = 0^- : v_C(t = 0^-) = 0V$$

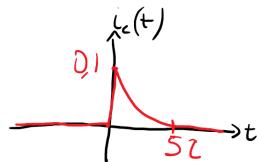
$$t = 0^+ : v_C(t = 0^+) = v_C(t = 0^-) = 0V$$

$$t = \infty : v_C(t = \infty) = E_1 = 10V$$

Ricordiamo la formula trovata dal confronto tra circuito RC e RL:

$$x(t) = (X_0 - X_\infty) e^{-t/\tau} + X_\infty$$

$$\begin{aligned} v_C(t) &= (0 - 10)e^{-t/\tau} + 10V & i_C &= C \frac{dv_C}{dt} & \tau &= R_1 C \\ &= 10(1 - e^{-t/\tau}) & &= C \frac{d}{dt} [10(1 - e^{-t/\tau})] & &= 10ms \\ & & &= C \cdot 10 \cdot \frac{1}{\tau} \cdot e^{-t/\tau} & & \\ & & &= \frac{10}{R} e^{-t/\tau} & & \\ & & &= 0,1e^{-t/\tau}[A] & & \end{aligned}$$



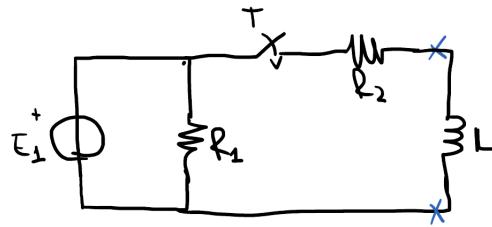
La corrente ha il suo massimo in $t = 0$, dopo diminuisce in maniera esponenziale $\Rightarrow I_{1,max} = 0,1A$

$$\begin{aligned} P_{E_1,max} &= E_1 \cdot I_{1,max} \\ &= 10V \cdot 0,1A \\ &= 1W \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{E_1}(t = \infty) &= E_1 \cdot I_1(t = \infty) \\ &= 10V \cdot 0A \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{\delta_1} &= E_1 \cdot i_C \\ &= E_1 \cdot 0,1e^{-t_{P_\delta^*}/\tau} \\ &= \frac{P_{\delta_1,max}}{2} \\ &= 0,5W \end{aligned} \quad \begin{aligned} e^{-t_{P_\delta^*}/\tau} &= 0,5 \\ \Rightarrow -\frac{t_{P_\delta^*}}{RC} &= \ln(0,5) \\ &= RC(0,69) \\ &= 0,01 \cdot (0,69) \\ &= 6,9ms \end{aligned} \quad \begin{aligned} t_{P_\delta^*} &= -RC \ln(0,5) \\ &= RC(0,69) \\ &= 0,01 \cdot (0,69) \\ &= 6,9ms \end{aligned}$$

4.8.2 Esercizio 2: Circuito RL

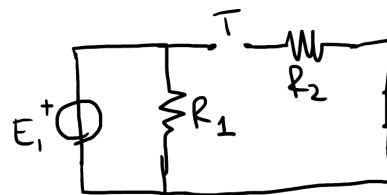


$$\begin{aligned} E_1 &= 12V \\ R_1 &= R_2 = 10\Omega \\ L &= 0,5H \end{aligned}$$

L'induttanza inizialmente è scarica; T si chiude in $t = 0$. Bisogna trovare:

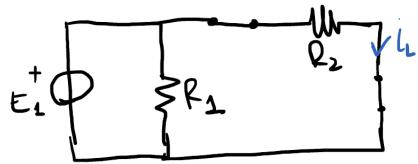
1. $I_{E_1}(t = 0^-)$
2. $I_{E_1}(t = \infty)$
3. Espressione analitica di P_{E_1}

(1) $t = 0^-$



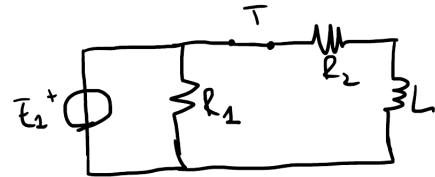
$$\begin{aligned} I_{E_1}(t = 0^-) &= \frac{E_1}{R_1} \\ &= 1,2A \end{aligned}$$

(2) $t = \infty$



$$\begin{aligned}
 I_{E_2}(t = \infty) &= \frac{E_1}{R_1 // R_2} & i_L(t = \infty) &= \frac{E_1}{R_2} \\
 &= \frac{12V}{5\Omega} & &= 1,2A \\
 &= 2,4A
 \end{aligned}$$

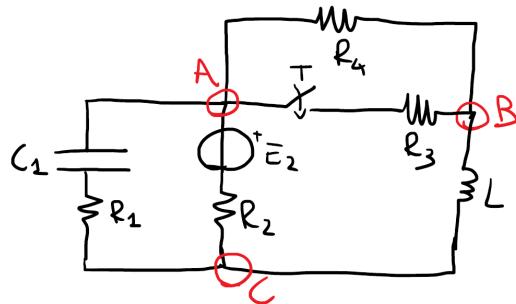
(3) $P_{E_1} = E_1 \cdot i_1 = E_1[i_{R_1} + i_L]$



$$\begin{aligned}
 i_L(t) &= (I_{L,0} - I_{L,\infty}) e^{-t/\tau} + I_{L,\infty} & \tau &= \frac{L}{R} \\
 &= (0 - 1,2)e^{-t/\tau} + 1,2 & &= \frac{0,5H}{10\Omega} \\
 &= 1,2(1 - e^{-t/\tau}) & &= 50ms
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{E_1} &= E_1 \left[\frac{E_1}{R_1} + 1,2(1 - e^{-t/\tau}) \right] \\
 &= 12[1,2 + 1,2 - 1,2e^{-t/\tau}] \\
 &= 12[2,4 - 1,2e^{-t/\tau}] \\
 &= 28,8 - 14,4e^{-t/\tau} W
 \end{aligned}$$

4.8.3 Esercizio 3: Circuito RLC complesso



$$\begin{aligned}
 E_2 &= 12V \\
 R_1 &= R_2 = 2\Omega \\
 R_3 &= R_4 = 4\Omega \\
 C_1 &= 10\mu F \\
 L_1 &= 2mH
 \end{aligned}$$

T si chiude in $t = 0$.

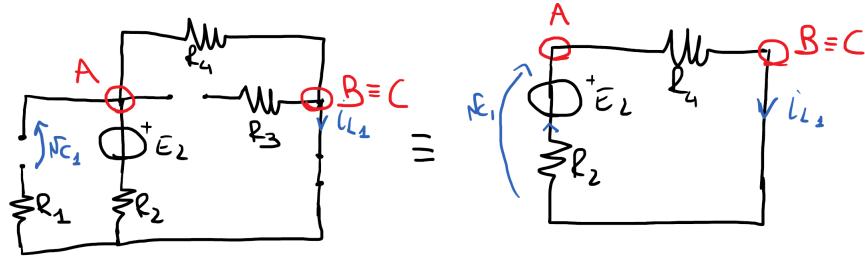
Bisogna trovare:

$$1. \ t = 0^- : Q_{C_1}$$

$$2. \ t = 0^+ : i_{C_1}; \frac{di_L}{dt}$$

$$3. \ t = \infty : \mathcal{E}_{L_1}; \mathcal{E}_{C_1}$$

(1) $t = 0^-$ siamo in regime stazionario, quindi $\frac{\partial}{\partial t} = 0$



$$\begin{aligned} i_{L_1}(t = 0^-) &= \frac{E_2}{R_2 + R_4} \\ &= 2A \end{aligned}$$

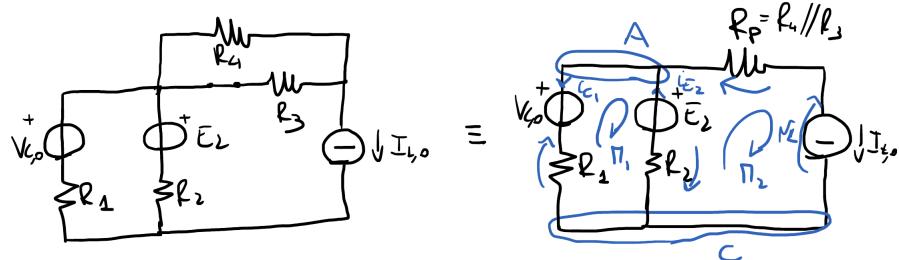
$$\begin{aligned} v_{C_1}(t = 0^-) &= R_4 \cdot i_{L_1} \\ &= 8V \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{C_1}(t = 0^-) &= C_1 \cdot v_{C_1}(t = 0^-) \\ &= 10\mu F \cdot 8V \\ &= 8 \cdot 10^{-5} C \end{aligned}$$

(2) $t = 0^+$

$$\begin{aligned} i_{L_1}(t = 0^+) &= i_{L_1}(t = 0^-) \\ &= I_{L,0} \\ &= 2A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{C_1}(t = 0^+) &= v_{C_1}(t = 0^-) \\ &= V_{C,0} \\ &= 8V \end{aligned}$$



$$M1 : v_{R_1} + V_{C,0} - E_2 + v_{R_2} = 0$$

$$M2 : -v_{R_2} + E_2 - v_{R_P} - v_L = 0$$

$$LKC : I_{L,0} + i_{C_1} - i_{E_2}$$

$$R_1 \cdot i_{C_1} + V_{C,0} - E_2 + R_2 (I_{L,0} + i_C) = 0$$

$$-R_2 \cdot i_{E_2} + E_2 - R_P \cdot I_{L,0} - v_L = 0$$

$$I_{L,0} + i_{C_1} - i_{E_2} = 0$$

$$\Rightarrow i_{E_2} = I_{L,0} + i_{C_1}$$

Sostituisco i_{E_2} nella prima equazione

$$\begin{aligned} R_1 \cdot i_{C_1} + V_{C,0} - E_2 + R_2 (I_{L,0} + i_C) &= 0 \\ \Rightarrow i_{C_1} (R_1 + R_2) &= E_2 - V_{C,0} - R_2 I_{L,0} \\ \Rightarrow i_{C_1} &= \frac{E_2 - V_{C,0} - R_2 I_{L,0}}{R_1 + R_2} \\ \Rightarrow i_{C_1} &= \frac{12V - 8V - 2 \cdot 2}{2\Omega + 2\Omega} \\ \Rightarrow i_{C_1} &= 0A \end{aligned}$$

Quindi $i_{E_2} = I_{L,0}$; sostituisco questo nell'equazione della seconda maglia

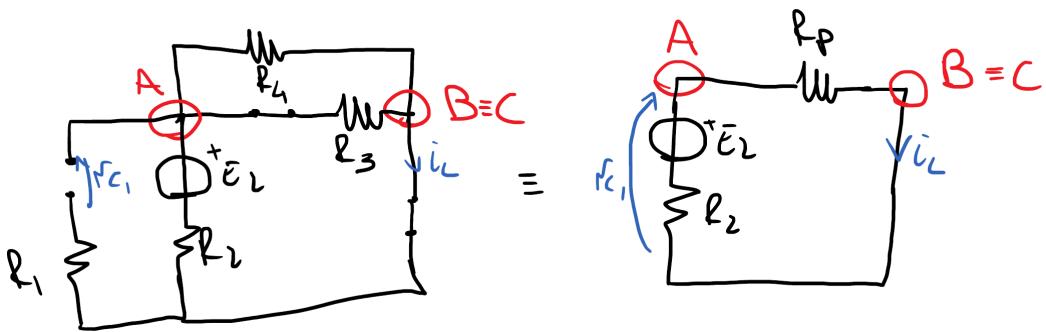
$$\begin{aligned}-R_2 \cdot I_{L,0} + E_2 - R_P \cdot I_{L,0} - v_L &= 0 \\ \Rightarrow v_L &= E_2 - (R_2 + R_P)I_{L,0} \\ &= 4V\end{aligned}$$

Ricordando l'equazione differenziale dell'induttore $v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$, da essa si può calcolare la derivata della corrente

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{v(t)}{L}$$

$$\begin{aligned}\frac{di_L}{dt}(t=0^+) &= \frac{v_L(t=0^+)}{L} \\ &= \frac{4V}{2 \cdot 10^{-3}H} \\ &= 2 \text{ kA/s}\end{aligned}$$

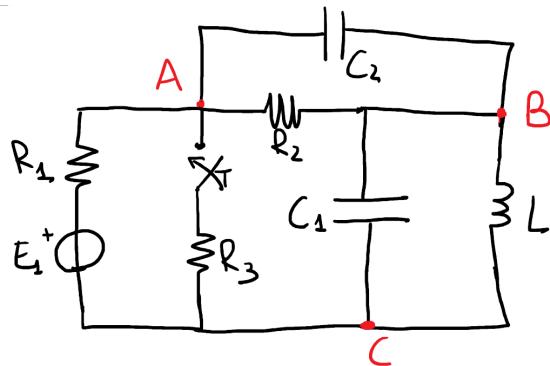
(3) $t = \infty$



$$\begin{aligned}i_L(t=\infty) &= \frac{E_2}{R_2 + R_P} \\ &= 3A\end{aligned} \quad \begin{aligned}v_{C_1}(t=\infty) &= R_P \cdot i_L \\ &= 6V\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_L &= \frac{1}{2}LI^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \times 10^{-3} \cdot (3)^2 \\ &= 9 \text{ mJ}\end{aligned} \quad \begin{aligned}\mathcal{E}_C &= \frac{1}{2}CV^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 10 \times 10^{-6} \cdot (6)^2 \\ &= 180 \mu J\end{aligned}$$

4.8.4 Esercizio 4: Circuito RLC complesso



T si chiude all'istante $t = 0$.
Dobbiamo calcolare

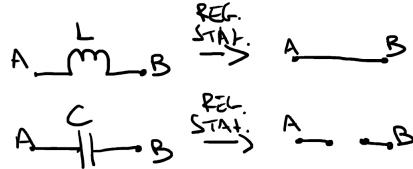
$$1. \ t = 0^- : \mathcal{E}_{C_2}$$

$$2. \ t = 0^+ : \frac{di_L}{dt}; \ P_{E_1}$$

$$3. \ t = \infty : \mathcal{E}_{C_1}; \ \mathcal{E}_{C_2}; \ \mathcal{E}_L$$

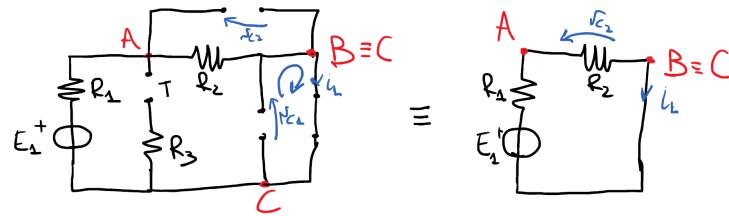
Il generatore di tensione E_1 è costante, quindi abbiamo un regime stazionario.

$$\textcircled{(1)} \quad t = 0^- \text{ Siccome T è aperto e siamo in un regime stazionario } \frac{\partial}{\partial t} = 0$$



$$v_L = L \frac{di}{dt} \Big|_{\frac{\partial}{\partial t}=0} \Rightarrow v_L = 0$$

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt} \Big|_{\frac{\partial}{\partial t}=0} \Rightarrow i_C = 0$$



Come prima cosa calcoliamo le variabili di stato all'istante $t = 0^-$:

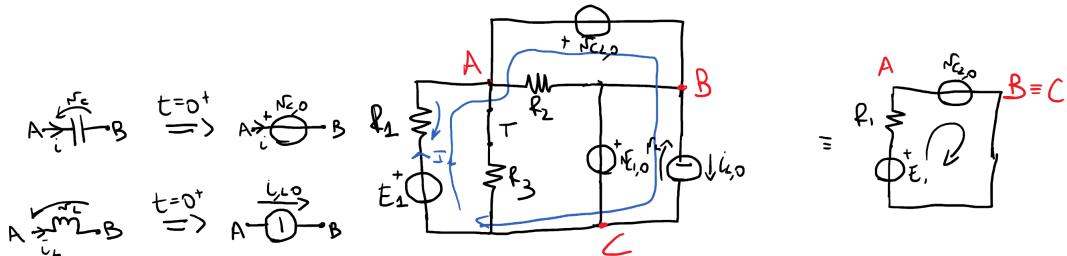
$$v_{C_1}(t = 0^-) = 0V \quad i_L(t = 0^-) = \frac{E_1}{R_1 + R_2} \quad v_{C_2}(t = 0^-) = v_{R_2} = R_2 \cdot i_L \\ = E_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\mathcal{E}_{C_2} = \frac{1}{2} V_C^2 = \frac{1}{2} C \left(E_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right)$$

$$\textcircled{(2)} \quad t = 0^+$$

$$v_{C_1}(t = 0^+) = v_{C_1}(t = 0^-) = 0V \quad v_{C_2}(t = 0^+) = v_{C_2}(t = 0^-) = v_{C_{2,0}} \\ = E_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad i_L(t = 0^+) = i_L(t = 0^-) = i_{L,0} \\ = \frac{E_1}{R_1 + R_2}$$

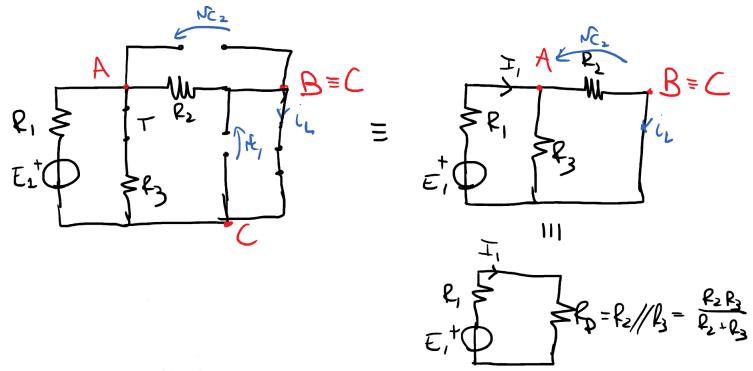
Manteniamo la convenzione dell'utilizzatore



$$\left. \frac{di_L}{dt} \right|_{t=0^+} = \left. \frac{v_L}{L} \right|_{t=0^+} = \left. \frac{v_{C_{1,0}}}{L} \right|_{t=0^+} = 0$$

$$P_{E_1} = E_1 \cdot I_1 \\ = E_1 \left(\frac{E_1 - v_{C_{2,0}}}{R_1} \right)$$

(3) $t = \infty$, siamo sempre in regime stazionario



$$v_{C_1}(t = \infty) = 0V$$

$$I_1 = \frac{E_1}{R_1 + R_P}$$

$$i_L(t = \infty) = \frac{E_1}{R_1 + R_P} \cdot \frac{R_3}{R_2 + R_3}$$

$$i_L = I_1 \frac{R_3}{R_2 + R_P}$$

$$v_{C_2}(t = \infty) = R_2 \cdot i_L$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{C_1} &= \frac{1}{2} C_1 V_{C_1}^2 \\ &= \frac{1}{2} C_1(0)^2 \\ &= 0 \text{ J} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{C_2} &= \frac{1}{2} C_2 V_{C_2}^2 \\ &= \frac{1}{2} C_2 (R_2 \cdot i_L)^2 [\text{J}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_L &= \frac{1}{2} L \cdot I_L^2 \\ &= \frac{1}{2} L \left(\frac{E_1}{R_1 + R_P} \cdot \frac{R_3}{R_2 + R_3} \right) [\text{J}] \end{aligned}$$

La R per la quale ho smorzamento critico è

$$\begin{aligned} \alpha &= \omega_0 \\ \Rightarrow \frac{R}{2L} &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ \Rightarrow R &= \frac{2L}{\sqrt{LC}} \end{aligned}$$

5 Regime sinusoidale

5.1 Introduzione

5.1.1 Segnali periodici

Una grandezza temporale $a(t)$ si definisce periodica quando si ripete a ogni periodo T

$$a(t) = a(t + nT) \quad \forall t$$

dove:

- T è il *periodo*, in [s];
- $f = \frac{1}{T}$ è la *frequenza*, in Hz (numero di periodi nell'unità di tempo)
- $A_m = \frac{1}{T} \int_0^T a(t) dt$ è il *valore medio*
- $A_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T a^2(t) dt}$

5.2 Sinusoide

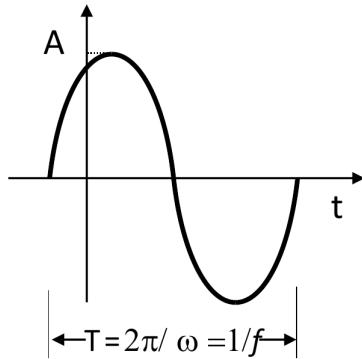
Si definisce come grandezza sinusoidale nel tempo quanto segue:

$$a(t) = \hat{A} \cos(\omega t + \theta)$$

dove:

- \hat{A} è l'ampiezza, il massimo di $a(t)$, reale positivo;
- ω è la *frequenza angolare*, in $[s^{-1}]$, reale positivo;
- θ è la *fase*, in [rad];
- $T = \frac{2\pi}{\omega}$ è il *periodo*, in [s];
- $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ è la *frequenza naturale*, in [Hz];
- $A_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \hat{A}^2 \cos^2(\omega t + \theta) dt} = \frac{\hat{A}}{\sqrt{2}} = 0,707 \hat{A}$ è il *valore efficace*, o radice della media dei quadrati, in inglese *root mean square*, abbreviato in RMS

$$\begin{aligned} a(t) &= A \cos(\omega t + \theta) \\ &= \sqrt{2} A_e \cos(\omega t + \theta) \end{aligned}$$



Usiamo il cappello (\hat{A}) per distinguere il valore di picco dal valore efficace.

5.2.1 Potenza media dissipata da una resistenza

$$p(t) = R \cdot i^2(t)$$

$$i(t) = \hat{I} \cos(\omega t + \alpha)$$

la potenza media dissipata è

$$\begin{aligned} \langle p(t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T R \cdot i^2(t) dt \\ &= R \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}_{I_{eff}^2} \\ &= RI_{eff}^2 \end{aligned}$$

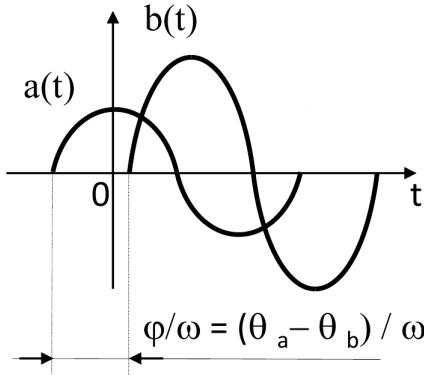
Una corrente DC di 1A comporta una potenza dissipata sul resistore pari a quella di una corrente sinusoidale id valore efficace pari a 1A.

5.2.2 Segnali isofrequenziali

Una sinusode è completamente definita da 3 parametri:

- valore massimo \hat{A} o valore efficace $A_{eff} = \frac{\hat{A}}{\sqrt{2}}$;
- pulsazione ω o frequenza f o periodo T : $f = \frac{1}{T}$; $\omega = 2\pi f$;
- fase α

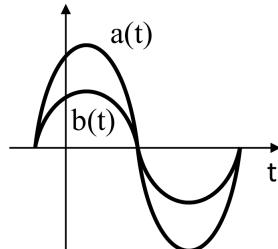
$$\left. \begin{array}{l} a(t) = \hat{A} \cos(\omega t + \alpha) \\ b(t) = \hat{B} \cos(\omega t + \beta) \end{array} \right\} \begin{array}{c} \text{Segnali} \\ \text{isofrequenziali} \end{array}$$



Viene definito *sfasamento* o *differenza di fase*:

$$\phi = \alpha - \beta$$

- $\phi = 0$: $a(t)$ e $b(t)$ sono **in fase**



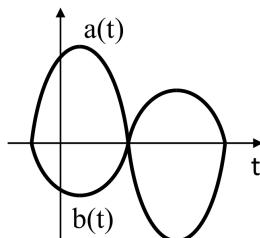
- $\phi > 0$:

- $a(t)$ è in **anticipo** rispetto a $b(t)$
- $b(t)$ è **ritardo** rispetto a $a(t)$

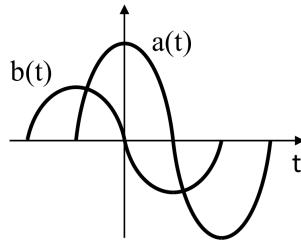
- $\phi < 0$:

- $a(t)$ è in **ritardo** rispetto a $b(t)$
- $b(t)$ è **anticipo** rispetto a $a(t)$

- $\phi = \pm\pi$: $a(t)$ e $b(t)$ sono in **opposizione di fase**



- $\phi = \pm \frac{\pi}{2}$: $a(t)$ e $b(t)$ sono in **quadratura**



nella figura $b(t)$ è in quadratura in ritardo

5.3 Fasori

I *fasori* rappresentano una grandezza sinusoidale tramite un numero complesso (un vettore) **Identità di Eulero**:

$$e^{jx} = \cos(x) + j \sin(x)$$

l'espressione caratteristica di un fasore così diventa

$$a(t) = \hat{A} \cos(\omega t + \alpha) = \operatorname{Re} [\hat{A} e^{j(\omega t + \alpha)}]$$

l'argomento della parte reale è un vettore rotante nel piano complesso

Nella figura:

- l'asse orizzontale della circonferenza è l'asse dei numeri *immaginari*, l'asse verticale è l'asse dei numeri *reali*;
- il grafico disegnato sopra è il nostro $a(t)$

Prendiamo dei fasori isofrequenziali:

$$\begin{array}{lll} a_1 = \hat{A}_1 \cos(\omega t + \alpha_1) & \longleftrightarrow & \hat{A}_1 e^{j(\omega t + \alpha_1)} = \hat{A}_1 \underline{e^{j\omega t}} e^{j\alpha_1} = \sqrt{2} A_{1,e} \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\alpha_1} \\ a_2 = \hat{A}_2 \cos(\omega t + \alpha_2) & \longleftrightarrow & \hat{A}_2 e^{j(\omega t + \alpha_2)} = \hat{A}_2 \underline{e^{j\omega t}} e^{j\alpha_2} = \sqrt{2} A_{2,e} \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\alpha_2} \\ \dots & & \dots \\ \dots & & \dots \\ a_n = \hat{A}_n \cos(\omega t + \alpha_n) & \longleftrightarrow & \hat{A}_n e^{j(\omega t + \alpha_n)} = \hat{A}_n \underline{e^{j\omega t}} e^{j\alpha_n} = \sqrt{2} A_{n,e} \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\alpha_n} \end{array}$$

Il valore sottolineato è chiamato **fattore rotante**.

Tutti i vettori ruotano alla stessa pulsazione in senso antiorario nel piano complesso; un fasore può essere scritto nella forma

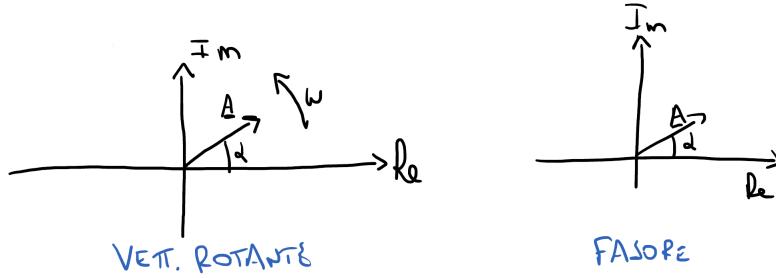
$$\vec{A} = A_e \cdot e^{j\alpha}$$

- \vec{A} è il vettore nel piano complesso

- A_e è il valore efficace

- α è la fase iniziale

Il metodo fasoriale (?) vale per segnali isofrequenziali.



5.4 Trasformata di Steinmetz

$$S[a(t)] = \frac{\sqrt{2}}{T} \int_0^T a(t) e^{-j\omega t} dt$$

siccome $a(t) = \hat{A} \cos(\omega t + \alpha)$

$$\begin{aligned} S[a(t)] &= \frac{\sqrt{2}}{T} \int_0^T \hat{A} \cos(\omega t + \alpha) e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{T} \hat{A} \int_0^T \frac{e^{j(\omega t + \alpha)} + e^{-j(\omega t + \alpha)}}{2} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{T} \frac{\hat{A}}{2} \int_0^T [e^{j(\omega t + \alpha)} + e^{-j(\omega t + \alpha)}] e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{T} \frac{\hat{A}}{2} \left[\int_0^T e^{j\alpha} dt + \int_0^T e^{-2j\omega t - j\alpha} dt \right] \xleftarrow[\text{periodo con } \omega \neq 0 \text{ vale 0}]{} \\ &= \frac{\hat{A}}{\sqrt{2}T} e^{j\alpha} T \\ &= \frac{\hat{A}}{\sqrt{2}} e^{j\alpha} \\ &= \underbrace{A_e \cdot e^{j\alpha}}_{\text{Fasore}} \end{aligned}$$

La *trasformata di Steinmetz* associa a una grandezza nel dominio dei tempi una grandezza nel dominio fasoriale.

La trasformata di Steinmetz è un operatore lineare:

$$S[ma(t) + nb(t)] = mS[a(t)] + nS[b(t)]$$

$$S\left[\frac{da(t)}{dt}\right] = \frac{\sqrt{2}}{T} \int_0^T \frac{da(t)}{dt} e^{-j\omega t} dt$$

integrandi per parti:

$$\begin{aligned} S\left[\frac{da(t)}{dt}\right] &= \frac{\sqrt{2}}{T} \left[\underbrace{[a(t)e^{-j\omega t}]_0^T}_{\text{integrandi per parti}} - \int_0^T a(t) \cdot (-j\omega e^{-j\omega t}) dt \right] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{T} \left[j\omega \int_0^T a(t) e^{-j\omega t} dt \right] \\ &= j\omega \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{T} \int_0^T a(t) e^{-j\omega t} dt}_{S[a(t)]} \end{aligned}$$

$$S \left[\frac{da(t)}{dt} \right] = j\omega S[a(t)]$$

$j\omega$ è lo sfasamento.

5.4.1 Operazioni sui numeri complessi

Un fasore può essere rappresentato in due modi:

- rappresentazione cartesiana: $\underline{A} = A_R + jA_I$
- rappresentazione polare: $\underline{A} = A_e \cdot e^{j\alpha}$

$Ae^{j\alpha} \longrightarrow \begin{cases} A_R = A \cos(\alpha) \\ A_I = A \sin(\alpha) \end{cases}$	$A_R + jA_I \longrightarrow \begin{cases} A = \sqrt{A_R^2 + A_I^2} \\ \alpha = \arctan\left(\frac{A_I}{A_R}\right) \end{cases}$
---	---

$$\underline{A} = A_R + jA_I = Ae^{j\alpha}$$

$$\mathbf{B} = B_R + jB_I = Be^{j\beta}$$

Somma

$$\begin{aligned} \underline{C} &= \underline{A} + \underline{B} \\ &= A_R + jA_I + B_R + jB_I \\ &= \underbrace{(A_R + B_R)}_{C_R} + j \underbrace{(A_I + B_I)}_{C_I} \end{aligned}$$

Prodotto

$$\begin{aligned} \underline{C} &= \underline{A} \cdot \underline{B} \\ &= Ae^{j\alpha} \cdot Be^{j\beta} \\ &= \underbrace{A \cdot B}_{C} e^{j(\alpha + \beta)} \end{aligned}$$

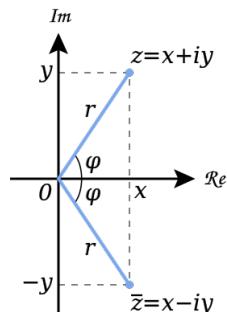
Rapporto

$$\begin{aligned} \underline{C} &= \frac{\underline{A}}{\underline{B}} \\ &= \frac{Ae^{j\alpha}}{Be^{j\beta}} \\ &= \underbrace{\frac{A}{B}}_C e^{j(\alpha - \beta)} \end{aligned}$$

Complesso coniugato

Se $\underline{A} = A_R + jA_I$ allora il suo complesso coniugato è

$$\underline{A}^* = A_R - jA_I = Ae^{-j\alpha}$$



5.5 Metodo simbolico

Utilizziamo Steinmetz sulle equazioni differenziali per ottenere delle equazioni algebriche:

$$\begin{array}{ll} \text{LKT: } \sum_{i=1}^m v_i(t) = 0 & \implies \sum_{i=1}^m \underline{V}_i = 0 \\ \text{LKC: } \sum_{i=1}^n i(t) = 0 & \implies \sum_{i=1}^m \underline{I}_i = 0 \end{array}$$

Possiamo scrivere ora le equazioni costitutive in **forma simbolica**:

- resistore:

$$\begin{aligned} v(t) &= R \cdot i(t) & S[v(t)] &= S[R \cdot i(t)] \\ S[v(t)] &= \underline{V} & &= R \cdot S[i(t)] \\ & & &= R \cdot \underline{I} \end{aligned}$$

$$\underline{V} = R \cdot \underline{I}$$

- induttore:

$$\begin{aligned} v(t) &= L \frac{di}{dt} & S[v(t)] &= S \left[L \frac{di}{dt} \right] \\ S[v(t)] &= \underline{V} & &= L \cdot S \left[\frac{di}{dt} \right] \\ & & &= L j \omega \cdot S[i(t)] \end{aligned}$$

$$\underline{V} = j \omega L \underline{I}$$

- condensatore:

$$\begin{aligned} i(t) &= C \frac{dv}{dt} & \underbrace{S[i(t)]}_{\underline{I}} &= S \left[C \frac{dv}{dt} \right] & \underline{I} = j \omega C \underline{V} \implies \underline{V} &= \frac{1}{j \omega C} \underline{I} \\ & & &= C \cdot S \left[\frac{dv}{dt} \right] & &= -\frac{j}{\omega C} \underline{I} \\ & & &= C \cdot S[j \omega \cdot v(t)] & & \\ & & &= j \omega C \underline{V} & & \\ & & & & & \\ \underline{V} &= -\frac{j}{\omega C} \underline{I} & & & & \end{aligned}$$

Le equazioni simboliche di tensione e corrente sono:

$$e(t) = \sqrt{2}E \cos(\omega t + \alpha) \longrightarrow S[e(t)] = \underline{E}$$

$$i(t) = \sqrt{2}I \cos(\omega t + \beta) \longrightarrow S[i(t)] = \underline{I}$$

5.5.1 Impedenza e ammettenza - Legge di Ohm simbolica

Definiamo l'*impedenza* Z

$$\underline{Z} = \frac{\underline{V}}{\underline{I}}$$

Ad esempio se $\underline{V} = V e^{j\alpha}$ e $\underline{I} = I e^{j\beta}$:

$$\underline{Z} = \frac{V e^{j\alpha}}{I e^{j\beta}} = \underbrace{\frac{V}{I}}_Z e^{j(\alpha - \beta)}$$

ϕ è detto *sfasamento*, cioè la differenza di fase tra tensione e corrente introdotta dal componente.

- $\phi > 0 \rightarrow \alpha_V > \alpha_I$, la tensione è in anticipo rispetto alla corrente
- $\phi < 0 \rightarrow \alpha_V < \alpha_I$, la tensione è in ritardo rispetto alla corrente

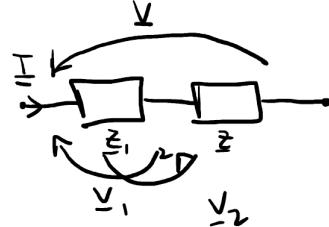
Definiamo l'*ammettenza* Y

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$$

Definiamo la *legge di Ohm simbolica*

$$\underline{V} = \underline{Z}\underline{I}$$

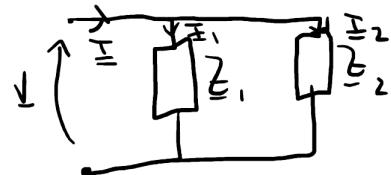
Impedenze in serie



$$\begin{aligned}\underline{V} &= \underline{V}_1 + \underline{V}_2 \\ &= \underline{Z}_1 \underline{I} + \underline{Z}_2 \underline{I} \\ &= (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) \underline{I}\end{aligned}$$

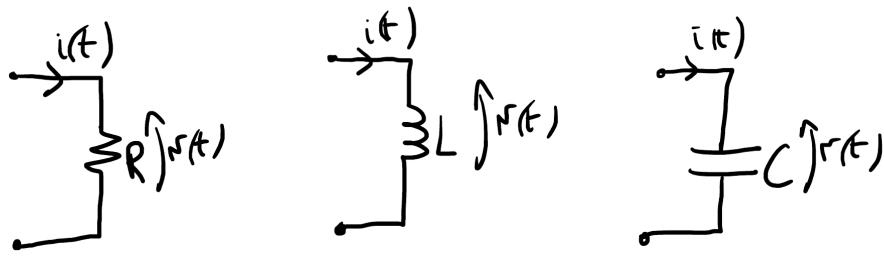
$$\begin{aligned}\underline{Z}_1 &= Z_{R_1} + jZ_{I_1} & \underline{Z}_{eq} &= (Z_{R_1} + Z_{R_2}) + j(Z_{I_1} + Z_{I_2}) \\ \underline{Z}_2 &= Z_{R_2} + jZ_{I_2}\end{aligned}$$

Impedenze in parallelo



$$\begin{aligned}\underline{I} &= \underline{I}_1 + \underline{I}_2 \\ &= \frac{\underline{V}}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{V}}{\underline{Z}_2} \\ &= \underbrace{\left(\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} \right)}_{\underline{Z}_{eq} = \frac{1}{Y_{eq}}} \underline{V}\end{aligned}$$

5.5.2 Formule simboliche di resistore, induttore e condensatore



$$\underline{V} = R \underline{I}$$

$$\underline{V} = j\omega L \underline{I}$$

$$\underline{V} = -\frac{j}{\omega C} \underline{I}$$

$$\underline{Z} = R$$

$$\underline{Z} = j\omega L$$

$$\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C}$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{V}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{V}}{R}$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{V}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{V}}{j\omega L}$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{V}}{\underline{Z}} = j\omega C \underline{V}$$

$$I = \frac{V}{R}$$

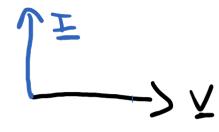
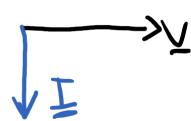
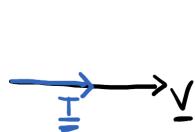
$$I = \frac{V}{\omega L}$$

$$I = \omega C V$$

$$\alpha_V = 0, \phi = 0 \rightarrow \alpha_I = 0$$

$$\alpha_V = 0, \alpha_I = -\frac{\pi}{2}$$

$$\alpha_V = 0, \alpha_I = \frac{\pi}{2}$$



5.5.3 Equazioni costitutive in forma simbolica

Resistore

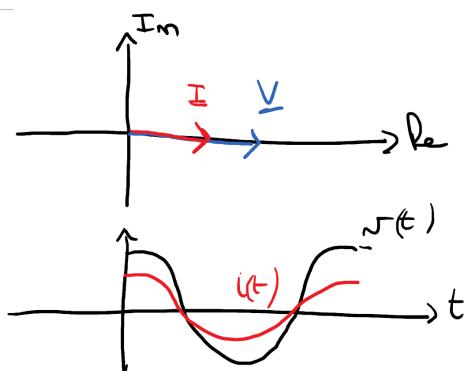
$$v(t) = R \cdot i(t) \xrightarrow{S[] \underline{V}} \underline{V} = R \underline{I} \longrightarrow \underline{Z} = \frac{\underline{V}}{\underline{I}} = R$$

$$\begin{cases} Z_R = R \\ Z_I = 0 \end{cases} \quad \text{è solamente reale}$$

$$\begin{cases} |Z| = R \\ \phi = 0 \end{cases}$$

Supponiamo $\alpha_V = 0$

$$\begin{aligned} \phi &= \alpha_V - \alpha_I \\ \Rightarrow \alpha_I &= -\phi = 0 \end{aligned}$$



Induttore

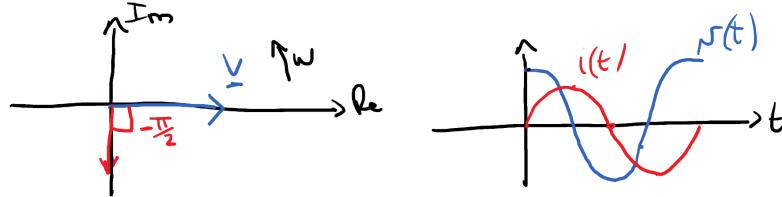
$$v(t) = L \frac{di}{dt} \xrightarrow{\text{SII}} \underline{V} = j\omega L \underline{I} \longrightarrow \underline{Z} = \frac{\underline{V}}{\underline{I}} = j\omega L = \omega L e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$\begin{cases} Z_R = 0 \\ Z_I = \omega L \end{cases} \quad \text{è solamente immaginaria}$$

$$\begin{cases} |Z| = \omega L \\ \phi = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Supponiamo $\alpha_V = 0$

$$\begin{aligned} \phi &= \alpha_V - \alpha_I \\ \implies \alpha_I &= -\phi = -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$



Condensatore

$$\begin{aligned} i(t) &= C \frac{dv}{dt} \xrightarrow{\text{SII}} \underline{I} = j\omega C \underline{V} \longrightarrow \underline{Z} = \frac{\underline{V}}{\underline{I}} = \frac{1}{j\omega C} \\ &= -\frac{j}{\omega C} \\ &= \frac{1}{\omega C} \underbrace{e^{-j\pi}}_{\text{per il meno}} \underbrace{e^{j\frac{\pi}{2}}}_{\text{per la } j} \\ &= \frac{1}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

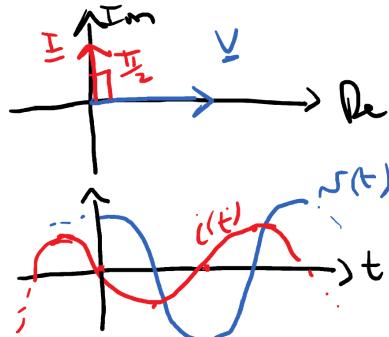
N.B. lo stesso risultato si ottiene se si utilizzano le formule del passaggio da coordinate cartesiane a coordinate polari.

$$\begin{cases} Z_R = 0 \\ Z_I = -\frac{1}{\omega C} \end{cases} \quad \text{solo parte immaginaria negativa}$$

$$\begin{cases} |Z| = \omega C \\ \phi = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Supponiamo $\alpha_V = 0$

$$\begin{aligned} \phi &= \alpha_V - \alpha_I \\ \implies \alpha_I &= -\phi = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\underline{Z} &= Z_R + jZ_I \\ &= R + j \underbrace{X}_{\text{Reattanza}}\end{aligned}$$

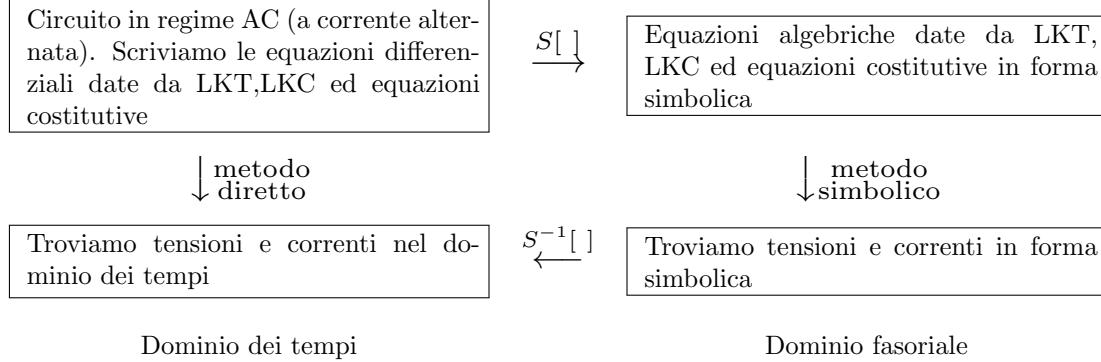
La reattanza può essere di due tipi

- reattanza induttiva: $X_L = \omega L$

- reattanza capacitiva: $X_C = -\frac{1}{\omega C}$

$X = f(\omega)$ è la **risposta in frequenza**.

5.5.4 Il metodo



5.6 Potenza elettrica nel regime sinusoidale

5.6.1 Potenza istantanea

La potenza istantanea è data da

$$p(t) = v(t)i(t)$$

Assumendo $\alpha_V = 0$, da cui $\alpha_I = -\phi$ si ha:

$$\begin{aligned}v(t) &= V \cos(\omega t) \\ i(t) &= I \cos(\omega t - \phi) \\ &= I(\cos(\omega t) \cos(\phi) + \sin(\omega t) \sin(\phi)) \\ &= I \cos(\omega t) \cos(\phi) + I \sin(\omega t) \sin(\phi) \\ &= i_a(t) + i_r(t)\end{aligned}$$

dove

- $i_a(t) = I \cos(\omega t) \cos(\phi)$ è la **corrente attiva**, la componente in fase con la tensione
- $i_r(t) = I \sin(\omega t) \sin(\phi)$ è la **corrente reattiva**, componente in quadratura rispetto alla tensione

$$\begin{aligned}p(t) &= v(t)i(t) \\ &= v(t)i_a(t) + v(t)i_r(t) \\ &= p_a(t) + p_r(t)\end{aligned}$$

dove

- $p_a(t) = v(t)i_a(t)$ è la **potenza attiva istantanea**
- $p_r(t) = v(t)i_r(t)$ è la **potenza reattiva istantanea**

$$\begin{aligned}p_a(t) &= v(t)i_a(t) \\ &= V \cos(\omega t) I \cos(\omega t) \cos(\phi) \\ &= VI \cos(\phi) \cos^2(\omega t)\end{aligned}$$

La **potenza istantanea attiva** $p_a(t)$ è dovuta alla componente attiva della corrente che è in fase con la tensione. La corrente attiva è quindi dovuta alla componente resistiva dell'elemento circuitale. La potenza istantanea attiva è sempre positiva. Quindi è una potenza che fluisce nell'elemento circuitale ed è dissipato dalla sua componente resistiva. Essa quindi viene utilizzata dall'elemento circuitale ed, in particolare, dalla sua resistenza che costituisce un carico del circuito.

$$\begin{aligned} p_r(t) &= v(t)i_r(t) \\ &= V \cos(\omega t) I \sin(\omega t) \sin(\phi) \\ &= \frac{1}{2} VI \sin(\phi) \sin(2\omega t) \end{aligned}$$

La **potenza istantanea reattiva** $p_r(t)$ è dovuta alla componente reattiva della corrente che è in quadratura con la tensione. La corrente reattiva è quindi dovuta alla reattanza dell'elemento circuitale. La potenza istantanea reattiva media è nulla. Quindi è una potenza che entra nell'elemento circuitale per un quarto di periodo ($T/4 = \pi/(2\omega)$) ed esce per il quarto di periodo successivo. È quindi una componente della potenza che non viene dissipata dagli elementi circuitali ma viene immagazzinata e poi rilasciata dagli elementi con memoria del circuito.

5.6.2 Potenza attiva

La **potenza attiva P** è definita come la media della potenza $p(t)$ sul periodo T

$$P = \frac{1}{T} \int_{T_0}^{t_0+T} p(t') dt' = V_e I_e \cos(\phi)$$

dove V_e è la tensione efficace e I_e è la corrente efficace; $\cos(\phi)$ è il **fattore di potenza**.

5.6.3 Potenza reattiva

La **potenza reattiva Q** è definita come

$$\begin{aligned} Q &= [p_r(t)]_{max} \cdot \text{sgn}(\phi) \\ &= \frac{1}{2} VI \sin(\phi) \\ &= V_e I_e \sin(\phi) \end{aligned}$$

dove ϕ è l'angolo di sfasamento fra tensione e corrente. Q quindi è il valore massimo della potenza scambiata dagli elementi circuitali con memoria nel circuito.

Q può essere positivo o negativo a seconda del segno di j . Per un carico induttivo Q è positivo, per un carico capacitivo Q è negativo.

Nel Sistema SI delle Unità Q è misurato in volt-ampere reattivi [VAR].

5.6.4 Potenza complessa

La potenza complessa \dot{N} è definita come:

$$\dot{N} = \frac{1}{2} \dot{V} \dot{I}^* = \dot{V}_e \dot{I}_e^*$$

dove \dot{I}^* è il complesso coniugato del fasore \dot{I}

$$\begin{aligned} \dot{I} &= I e^{j\alpha} \\ \implies \dot{I}^* &= I e^{-j\alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{N} &= \dot{V}_e \dot{I}_e^* \\ &= V_e e^{j\alpha_v} I_e e^{-j\alpha_i} \\ &= V_e I_e e^{j(\alpha_v - \alpha_i)} \\ &= V_e I_e e^{j\phi} \\ &= V_e I_e \cos(\phi) + j V_e I_e \sin(\phi) \\ &= P + jQ \end{aligned}$$

inoltre poiché $\dot{V}_e = \dot{Z} \dot{I}_e$

$$\begin{aligned} P + jQ &= \dot{N} = \dot{V}_e \dot{I}_e^* \\ &= \dot{Z} \dot{I}_e \dot{I}_e^* \\ &= \dot{Z} I_e^2 \\ &= (R + jX) I_e^2 \\ &= \underbrace{RI_e^2}_P + j \underbrace{XI_e^2}_Q \end{aligned}$$

$$P = RI_e^2$$

$$Q = XI_e^2$$

5.6.5 Formule notevoli

$$\begin{aligned} \dot{N} &= \frac{1}{2} \dot{V} \dot{I}^* \\ &= P + jQ \\ &= RI_e^2 + jXI_e^2 \\ P &= \frac{1}{2} VI \cos(\phi) \\ &= V_e I_e \cos(\phi) \\ &= \frac{1}{2} RI^2 \\ &= RI_e^2 \\ &= \frac{V^2}{R} \\ Q &= \frac{1}{2} VI \sin(\phi) \\ &= V_e I_e \sin(\phi) \\ &= \frac{1}{2} XI^2 \\ &= XI_e^2 \\ &= Im\left(\frac{V^2}{Z^*}\right) \end{aligned}$$

5.6.6 Potenza apparente

La potenza apparente N è definita come:

$$N = \frac{1}{2} VI = V_e I_e$$

Nel sistema di unità SI la potenza apparente è misurata in volt-ampere [VA].

Dalla definizione di P e di N risulta:

$$P = N \cos(\phi) \quad N = \frac{P}{\cos(\phi)}$$

Poiché P è la componente della potenza utilizzata ed N riporta i volt-ampere che devono essere forniti alla rete dal generatore, le espressioni prodotte mettono in risalto l'importanza del fattore di potenza $\cos(\phi)$ che deve essere il più vicino possibile all'unità e l'angolo sfasamento j il più ridotto possibile.

5.6.7 Additività delle potenze

Per un circuito, indipendentemente dal fatto che le impedenze siano collegate in serie o in parallelo, o siano presenti entrambi i collegamenti, la potenza totale fornita dal/dai generatore/i è uguale alla somma delle potenze utilizzate dai singoli r elementi circuitali passivi

$$\dot{N} = \sum_{k=1}^r \dot{N}_k$$

5.6.8 Fattore di potenza

Il fattore di potenza $\cos(\phi)$, con $\phi = \alpha_v - \alpha_i$, angolo di sfasamento fra tensione e corrente, determina il rapporto fra potenza attiva, componente della potenza utilizzata, e potenza apparente, definita dal prodotto dei valori efficaci di corrente e tensione che devono essere forniti dai generatori.

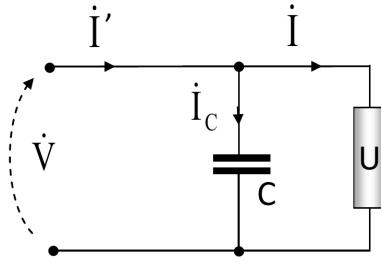
È necessario che il fattore di potenza sia il più possibile vicino all'unità e perciò che l'angolo di sfasamento sia il più piccolo possibile (molte compagnie elettriche fanno pagare per il $\cos(\phi) < 0,9$ corrispondente a $\phi > 25,8^\circ$)

$$\begin{aligned} P &= V_e I_e \cos(\phi) = N \cos(\phi) & \Rightarrow & \cos(\phi) = \frac{P}{V_e I_e} = \frac{P}{N} \\ I_e &= \frac{P}{V_e \cos(\phi)} \end{aligned}$$

fissati P e V_e , se il $\cos(\phi)$ diminuisce I_e e N aumentano.

Correzione dell'angolo di sfasamento

La maggior parte dei carichi sono induttivi e funzionano con un angolo di sfasamento ϕ positivo (corrente in ritardo sulla tensione).

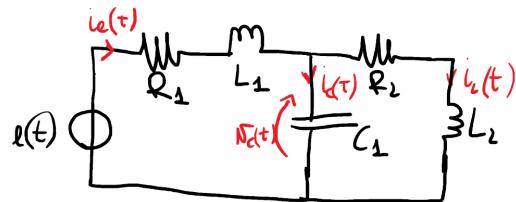


$$\left. \begin{array}{l} P = V_e I_e \cos(\phi) \\ Q = V_e I_e \sin(\phi) \end{array} \right\} \Rightarrow Q = P \tan(\phi)$$

Per ridurre ϕ e portarlo a ϕ' ($\cos(\phi') = 0,9$) si pone un condensatore in parallelo con il circuito dell'utilizzatore. Il condensatore richiede una potenza reattiva negativa che compensa la potenza reattiva positiva dovuta alla reattanza di tipo induttivo dell'utilizzatore.

5.7 Esercizi

5.7.1 Esercizio 1



$$e(t) = \sqrt{2} \cdot 230 \cdot \sin(\omega t + 30^\circ)$$

$$f = 50 \text{ Hz}$$

$$R_1 = 0,1 \Omega$$

$$R_2 = 5,2 \Omega$$

$$L_1 = 0,64 \text{ mH}$$

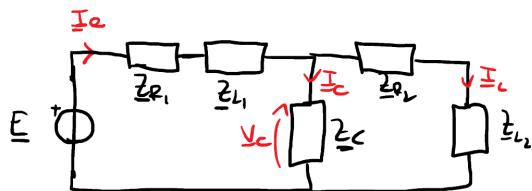
$$L_2 = 12 \text{ mH}$$

$$C_1 = 180 \mu F$$

Bisogna trovare:

- le correnti in ogni ramo
- $v_C(t)$

(1) Passiamo da dominio nei tempi a dominio fasoriale



Ricordando che $S[a(t)] = A_e \cdot e^{j\alpha}$ e che $e(t) = \sqrt{2}E \cos(\omega t + \alpha)$

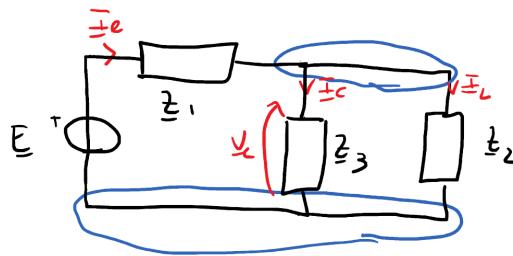
$$E = 230 \cdot e^{j\alpha}$$

e $\omega = 2\pi f = 314,26 \text{ rad/s}$.

Calcoliamo le impedenze:

$$\begin{aligned}\underline{Z}_{R_1} &= R_1 \\ &= 0,1 \Omega \\ \underline{Z}_{L_1} &= jX_{L_1} \\ &= j\omega L_1 \\ &= j \cdot 314,16 \cdot 0,64 \times 10^{-3} \\ &= j0,2 \Omega \\ \underline{Z}_C &= jX_C \\ &= -\frac{j}{\omega C} \\ &= -j17,66 \Omega\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{Z}_{R_2} &= R_2 \\ &= 5,2 \Omega \\ \underline{Z}_{L_2} &= jX_{L_2} \\ &= j\omega L_2 \\ &= j \cdot 314,16 \cdot 1,2 \times 10^{-3} \\ &= j3,77 \Omega\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\underline{Z}_1 &= \underline{Z}_{R_1} + \underline{Z}_{L_1} \\ &= 0,1 + j0,2 [\Omega] \\ \underline{Z}_2 &= \underline{Z}_{R_2} + \underline{Z}_{L_2} \\ &= 5,2 + j3,77 [\Omega] \\ \underline{Z}_3 &= \underline{Z}_C \\ &= -j17,66 [\Omega]\end{aligned}$$

(2) Risolviamo il circuito (nel dominio fasoriale)

Applichiamo Millman:

$$\begin{aligned}V_C &= \frac{\frac{E}{\underline{Z}_1}}{\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3}} \\ &= 197,68 + j108,58 [V] \\ \text{passaggio da coo. cartesiane a polari} &\implies \underbrace{E}_{E} \underbrace{28,78^\circ}_{\alpha} [V]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{I}_C &= \frac{V_C}{\underline{Z}_3} \\ &= 12,76 \boxed{118,78^\circ} [A] \\ \underline{I}_L &= \frac{V_C}{\underline{Z}_2} \\ &= 35,11 \boxed{-7,16^\circ} [A]\end{aligned}$$

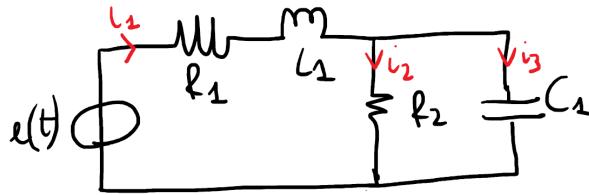
$$\begin{aligned}\text{LKC: } \underline{I}_e &= \underline{I}_C + \underline{I}_L \\ &= 29,49 \boxed{13,34^\circ}\end{aligned}$$

(3) Passaggio da dominio fasoriale a dominio nei tempi

Applico l'antitrasformata $S^{-1}[\cdot]$ ai fasori trovati

$$\begin{aligned} \underline{V}_C &= \underbrace{225, 53}_{E} \underbrace{[28, 78^\circ]}_{\alpha} & \xrightarrow{S^{-1}[\cdot]} & v_C(t) = \sqrt{2} \cdot 225, 53 \cdot \sin(\omega t + 28, 78^\circ) \\ \underline{I}_C &= \underbrace{12, 76}_{I_C} \underbrace{[118, 78^\circ]}_{\alpha} & \xrightarrow{S^{-1}[\cdot]} & i_C(t) = \sqrt{2} \cdot 12, 76 \cdot \sin(\omega t + 118, 78^\circ) \\ \underline{I}_L &= 35, 11 [-7, 16^\circ] & \xrightarrow{S^{-1}[\cdot]} & i_L(t) = \sqrt{2} \cdot 35, 11 \cdot \sin(\omega t + -7, 16^\circ) \\ \underline{I}_e &= 28, 49 [13, 34^\circ] & \xrightarrow{S^{-1}[\cdot]} & i_e(t) = \sqrt{2} \cdot 28, 49 \cdot \sin(\omega t + 13, 34^\circ) \end{aligned}$$

5.7.2 Esercizio 2



$$e(t) = \sqrt{2} \cdot 10 \cdot \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$R_1 = 2 \Omega$$

$$L_1 = 1 \text{ mH}$$

$$\omega = 10^3 \text{ rad/s}$$

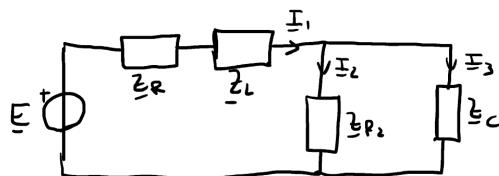
$$R_2 = 1 \Omega$$

$$C_1 = 500 \mu F$$

Bisogna trovare:

- $i_1(t)$
- $i_2(t)$
- $i_3(t)$

(1) Passiamo da dominio nei tempi a dominio fasoriale

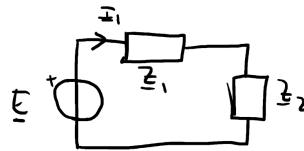


Ricordando che $S[a(t)] = A_e \cdot e^{j\alpha}$ e che $e(t) = \sqrt{2}E \cos(\omega t + \alpha)$

$$\underline{E} = 10 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$$

Calcoliamo le impedenze:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{R_1} &= R_1 & \underline{Z}_L &= jX_{L_1} & \underline{Z}_C &= jX_{C_1} & \underline{Z}_{R_2} &= R_2 \\ &= 2\Omega & &= j\omega L_1 & &= -\frac{j}{\omega C} & &= 1 \Omega \\ & & &= j \cdot 10^3 \cdot 10^{-3} & &= -j \frac{1}{10^3 \cdot 500 \times 10^{-6}} & & \\ & & &= j & & & &= -j \cdot 2 \end{aligned}$$



$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L \\ = 2 + j$$

$$\begin{aligned}\underline{Z}_2 &= \underline{Z}_{R_2} // \underline{Z}_C \\ &= \frac{\underline{Z}_{R_2} \cdot \underline{Z}_C}{\underline{Z}_{R_2} + \underline{Z}_C} \\ &= \frac{1 \cdot (-2j)}{1 - 2j} \\ &= -\frac{2j}{1 - 2j} \cdot \frac{1 + 2j}{1 + 2j} \\ &= -2j \cdot \frac{1 + 2j}{1 + 4} \\ &= -\frac{2j - 4}{5} \\ &= \frac{4}{5} - j\frac{2}{5} \\ &= 0,8 - 0,4j\end{aligned}$$

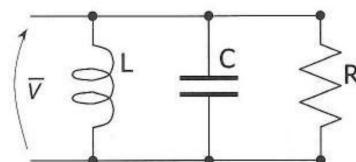
$$\begin{aligned}\underline{I}_1 &= \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \\ &= \frac{\underline{E}}{2,8 + 0,6j} \\ &= \frac{10j}{2,8 + 0,6j} \\ &= 0,73 + 3,41j \\ &= 3,49 \boxed{77,9^\circ} \\[10pt]\underline{I}_2 &= \underline{I}_1 \cdot \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_{R_1} + \underline{Z}_{R_2}} \\ &= 1,95 + 2,44j \\ &= 3,12 \boxed{51,34^\circ} \\[10pt]\underline{I}_3 &= \underline{I}_1 \cdot \frac{\underline{Z}_{R_2}}{\underline{Z}_{R_2} + \underline{Z}_C} \\ &= -1,22 + 0,92j \\ &= 1,56 \boxed{141^\circ}\end{aligned}$$

(2) Passaggio da dominio fasoriale a dominio nei tempi

Applico l'antitrasformata $S^{-1}[\]$ ai fasori trovati

$$\begin{array}{lll}\underline{I}_1 = 3,49 \boxed{77,9^\circ} & \xrightarrow[S^{-1}[\]]{\quad} & i_1(t) = \sqrt{2} \cdot 3,49 \cdot \sin(\omega t + 77,9^\circ) \\ \underline{I}_2 = 3,12 \boxed{51,34^\circ} & \xrightarrow[S^{-1}[\]]{\quad} & i_2(t) = \sqrt{2} \cdot 3,12 \cdot \sin(\omega t + 51,34^\circ) \\ \underline{I}_3 = 1,56 \boxed{141^\circ} & \xrightarrow[S^{-1}[\]]{\quad} & i_3(t) = \sqrt{2} \cdot 1,56 \cdot \sin(\omega t + 141^\circ)\end{array}$$

5.7.3 Esercizio metodo delle potenze 1



Dati:

$$R = 10 \Omega$$

$$L = 0,1 \text{ H}$$

$$C = 100 \mu F$$

$$V = 230 \text{ V}$$

Bisogna trovare:

- corrente elettrica

- P, Q

Metodo 1

Si calcolano le impedenze in C ed L :

$$\begin{aligned}\underline{Z}_C &= -\frac{j}{\omega C} & \underline{Z}_L &= j\omega L \\ &= -j31,83 \Omega & &= j31,416\Omega\end{aligned}$$

Quindi l'impedenza totale risulta:

$$\begin{aligned}\underline{Z}_{eq} &= 10/-0,24^\circ \\ \underline{I} &= \frac{\underline{V}}{\underline{Z}_{eq}} = 23/-0,237^\circ\end{aligned}$$

Per il calcolo di P e Q si usa la formula:

$$\begin{aligned}\dot{N} &= P + jQ \\ &= \underline{V} \cdot \underline{I}^* \\ &= 5290/0,237^\circ \\ &= 5290 + j21,9\end{aligned}$$

quindi

$$P = 5290 \text{ W} \quad Q = 21,8 \text{ Var}$$

Metodo 2

Calcoliamo la potenza assorbita da R nel modo classico:

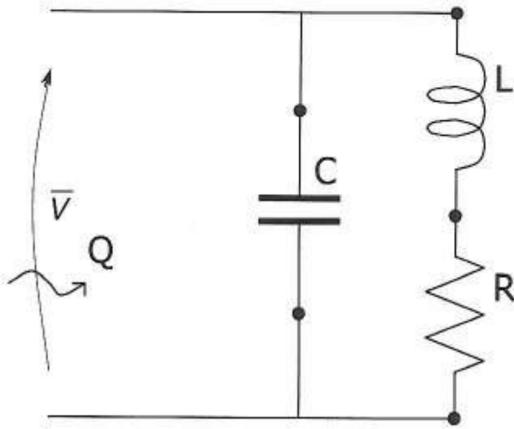
$$\begin{aligned}P &= \frac{V^2}{R} \\ &= \frac{230^2}{10} \\ &= 5,29 \text{ kW}\end{aligned}$$

Mentre per la potenza reattiva di C ed L si usa la formula $Q = Im\left(\frac{V^2}{Z^*}\right)$:

$$\begin{aligned}Q_C &= Im\left(\frac{V^2}{Z_C^*}\right) & Q_L &= Im\left(\frac{V^2}{Z_L^*}\right) \\ &= -1661,95 \text{ Var} & &= 1683,86 \text{ Var}\end{aligned}$$

$$Q_{tot} = 21,9 \text{ Var}$$

5.7.4 Esercizio metodo delle potenze 2



Dati:

$$R = 1\Omega$$

$$V = 320 \text{ V}$$

$$L = 10 \text{ mH}$$

$$Q = 10 \text{ kVAr}$$

Bisogna trovare

- P e Q del rame RL
- Q del condensatore
- C
- corrente assorbita

Calcoliamo le impedenze di R e L :

$$\begin{aligned} \underline{Z}_L &= j\omega L \\ &= j3.14 \Omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{Z}_R &= R \\ &= 1 \Omega \end{aligned}$$

$$\underline{Z}_{RL} = 1 + j3,14 \Omega$$

$$\begin{aligned} \dot{N}_{RL} &= \underline{V} \cdot \underline{I}^* \\ &= \frac{V^2}{\underline{Z}_{RL}} \\ &= \underbrace{4,87}_P + j \underbrace{15,3}_Q \text{ kVA} \end{aligned}$$

quindi

$$P = 4,87 \text{ kW}$$

$$Q = 15,3 \text{ kVAr}$$

$$Q_C = Q - Q_{RL} = -5,3 \text{ kVAr}$$

Ora dobbiamo calcolare la capacità del condensatore; sappiamo che

$$\underline{Z}_C = -\frac{j}{\omega C}$$

$$Q_C = Im \left(\frac{V^2}{\underline{Z}_C} \right)$$

ma l'operatore "immagine" si può omettere nella formula della potenza reattiva perché la frazione al suo interno dà come risultato un numero puramente immaginario, quindi

$$\begin{aligned} Q_C &= \frac{V^2}{\underline{Z}_C^*} \\ &= \frac{V^2}{\frac{j}{\omega C}} \\ &= \frac{V^2 \omega C}{j} \end{aligned}$$

isolando il termine C si arriva all'equazione

$$\begin{aligned} C &= \frac{Q_C \cdot j}{V^2 \omega} \\ &= \frac{-j \cdot 5300 \cdot j}{(230)^2 \cdot 314,16} \\ &= 319 \mu F \end{aligned}$$

La formula della potenza complessa totale è:

$$\dot{N}_{tot} = 4,87 + j10 \text{ kVA}$$

quindi l'angolo del fattore di potenza è uguale a

$$\phi = \arctan \left(\frac{Q_{tot}}{P_{tot}} \right) = 64^\circ$$

ora possiamo determinare la corrente assorbita nel circuito:

$$\begin{aligned} I &= \frac{P}{V \cos(\phi)} \\ &= 48,3 \text{ A} \end{aligned}$$

6 Risposta in frequenza

Definiamo la **funzione di trasferimento** $\dot{H}(\omega)$

$$\dot{H}(\omega) = \frac{\dot{Y}(\omega)}{\dot{X}(\omega)}$$

In relazione al tipo di ingresso e risposta (se corrente o tensione) si hanno quattro tipi di funzioni di trasferimento:

- Guadagno di tensione

$$\dot{\alpha}(\omega) = \frac{\dot{V}_{out}}{\dot{V}_{in}} = \alpha(\omega) e^{j\phi}$$

- Guadagno di corrente

$$\dot{\beta}(\omega) = \frac{\dot{I}_{out}}{\dot{I}_{in}} = \beta(\omega) e^{j\phi}$$

- Impedenza di trasferimento

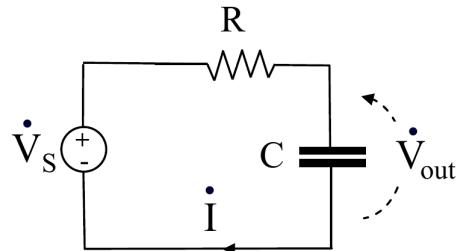
$$\dot{z}(\omega) = \frac{\dot{V}_{out}}{\dot{I}_{in}} = Z(\omega) e^{j\phi}$$

- Ammettenza di trasferimento

$$\dot{y}(\omega) = \frac{\dot{I}_{out}}{\dot{V}_{in}} = Y(\omega) e^{j\phi}$$

Dove $\alpha(w), \beta(w), Z(w)$ e $Y(w)$ sono le ampiezze delle funzioni di trasferimento e ϕ è lo sfasamento fra l'output e l'input.

6.1 Filtro passa-basso



Nel circuito RC con funzione di filtro passa-basso, a un segnale di ingresso $v_S(t) = V \cos(\omega t)$ il segnale di uscita è dato dalla tensione sul condensatore:

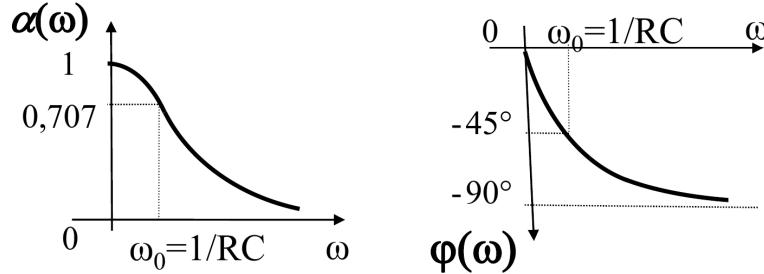
$$\dot{V}_S = \dot{V}_{in} = \left[R - j \frac{1}{\omega C} \right] \dot{I} \quad \dot{V}_{out} = -j \frac{1}{\omega C} \dot{I}$$

il guadagno di tensione è:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}(\omega) &= \alpha(\omega) e^{j\phi} \\ &= \frac{\dot{V}_{out}}{\dot{V}_{in}} \\ &= \frac{-\frac{j}{\omega C}}{R - \frac{j}{\omega C}} \\ &= \frac{1 - j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2} \end{aligned}$$

dove $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ è la **frequenza di taglio**. L'ampiezza e la fase del guadagno sono:

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}} \quad \phi = \tan^{-1} \left(-\frac{\omega}{\omega_0} \right)$$



$\frac{\omega}{\omega_0}$	0	1	2	3	10	20	100
α	1	0.71	0.45	0.32	0.1	0.05	0.01
ϕ	0	-45°	-63°	-72°	-84°	-87°	-90°

Poiché questo filtro è di soli elementi passivi, il valore massimo del guadagno è pari all'unità.

6.1.1 Filtro passa-basso RL

Il filtro RL può assumere la funzione di filtro passa-basso, se \dot{V}_{out} è la caduta di tensione sul resistore:

$$\dot{\alpha}(\omega) = \frac{R}{R + j\omega L}$$

6.2 Filtro passa-alto

Nel circuito RL con funzione di filtro passa-alto, a un segnale di ingresso $v_S(t) = V \cos(\omega t)$ il segnale di uscita è dato dalla tensione dell'induttore:

$$\dot{V}_S = \dot{V}_{in} = [R + j\omega L] \dot{I} \quad \dot{V}_{out} = j\omega L \dot{I}$$

Il guadagno è:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}(\omega) &= \alpha(\omega)e^{j\phi} \\ &= \frac{\dot{V}_{out}}{\dot{V}_{in}} \\ &= \frac{j\omega L}{R + j\omega L} \\ &= \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}\end{aligned}$$

dove $\omega_0 = \frac{R}{L}$ è la **frequenza di taglio**. L'ampiezza e la fase del guadagno del filtro *RL passa-alto*, come visto, sono:

$$\alpha(\omega) = \frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \quad \phi = \tan^{-1} \frac{\omega_0}{\omega}$$

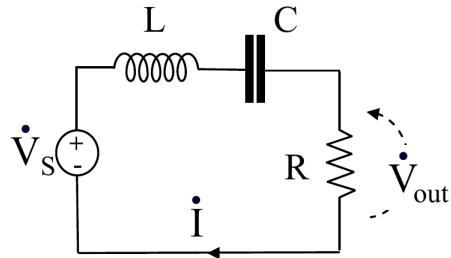
Poiché questo filtro è di soli elementi passivi, il valore massimo del guadagno è pari all'unità.

6.2.1 Filtro passa-alto RC

Il filtro RC può assumere la funzione di filtro passa-alto, se \dot{V}_{out} è la caduta di tensione sul resistore:

$$\dot{\alpha}(\omega) = \frac{\dot{V}_{out}}{\dot{V}_{in}} = \frac{R}{R - \frac{j}{\omega C}}$$

6.3 Filtro passa-banda



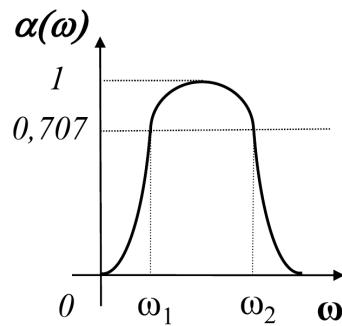
Nel circuito RLC con funzione di filtro passa-banda, ad un segnale di ingresso $v_S(t) = V \cos(\omega t)$ il segnale di uscita è dato dalla tensione sul resistore:

$$\dot{V}_S = \dot{V}_{in} = \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] I \quad \dot{V}_{out} = R I$$

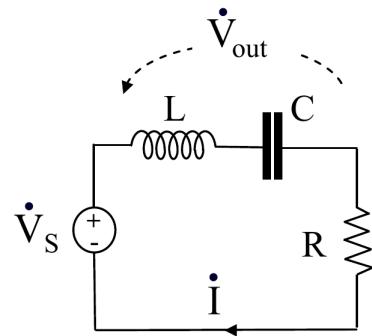
Il guadagno è:

$$\dot{\alpha}(\omega) = \alpha(\omega)e^{j\phi} = \frac{\dot{V}_{out}}{\dot{V}_{in}} = \frac{R}{R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}$$

La frequenza di centro-banda è $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Si definiscono anche ω_1 e ω_2 frequenze di taglio limiti di banda. I segnali con frequenze $\omega_1 < \omega < \omega_2$ sono lasciati passare, i segnali con $\omega < \omega_1$ e con $\omega > \omega_2$ sono fermati.



6.4 Filtro arresta banda



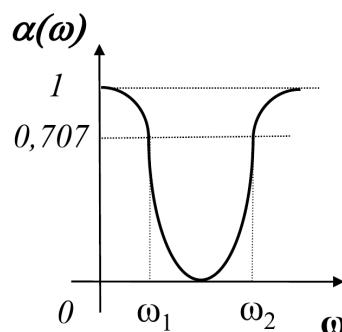
Nel circuito RLC con funzione di filtro arresta-banda, ad un segnale di ingresso $v_S(t) = V \cos(\omega t)$ il segnale di uscita è data dalla tensione sul resistore:

$$\dot{V}_S = \dot{V}_{in} = \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] I \quad \dot{V}_{out} = j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) I$$

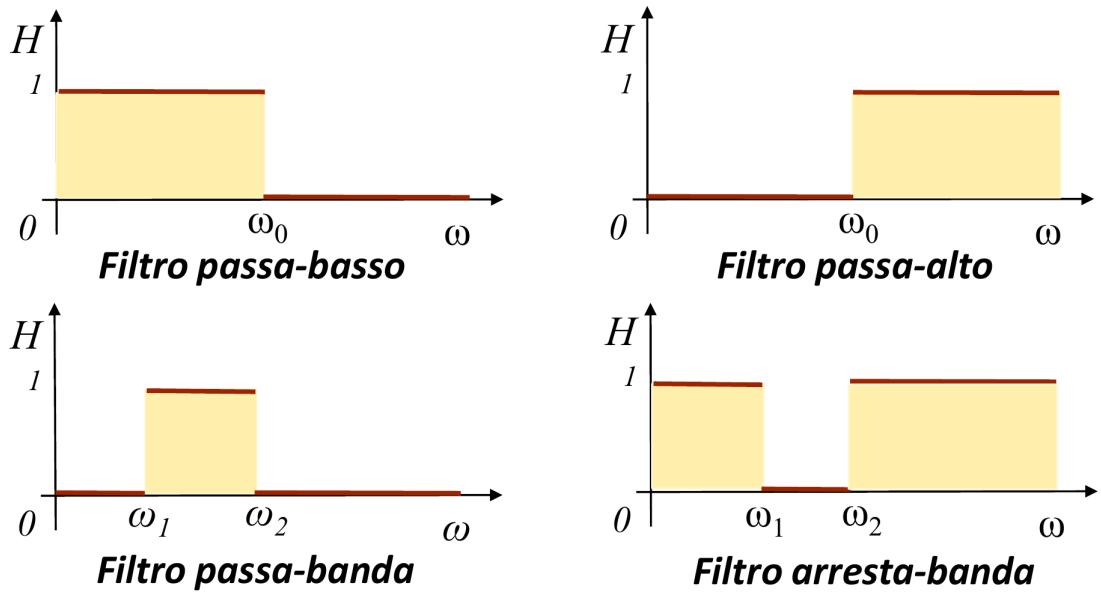
Il guadagno è:

$$\dot{\alpha}(\omega) = \alpha(\omega) e^{j\phi} = \frac{\dot{V}_{out}}{\dot{V}_{in}} = \frac{j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}{R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}$$

La frequenza di centro-banda è $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Si definiscono anche ω_1 e ω_2 frequenze di taglio limiti di banda. I segnali con frequenze $\omega_1 < \omega < \omega_2$ non sono lasciati passare, i segnali con $\omega < \omega_1$ e con $\omega > \omega_2$ sono lasciati passare.



6.5 Filtri ideali

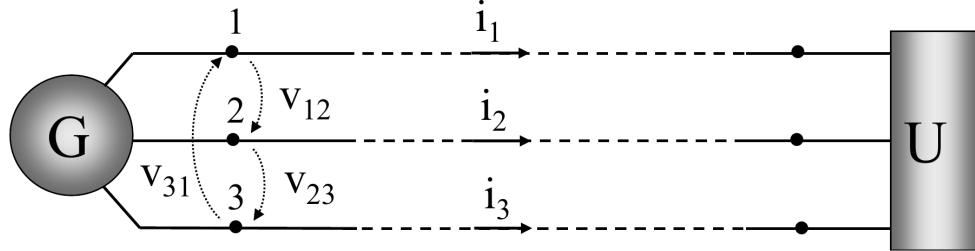


I **filtri passivi** sono costituiti solo da elementi passivi (R, L e C). Il loro guadagno non può essere maggiore di 1 in quanto gli elementi passivi non possono fornire energia alla rete. Essi per lo più richiedono elementi ingombranti e costosi; si comportano male alle basse frequenze.

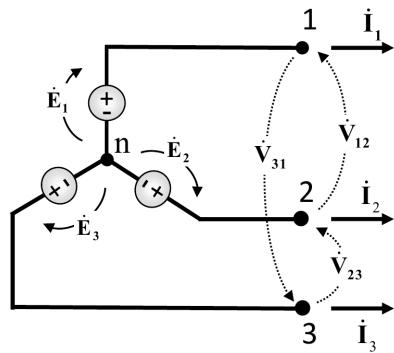
I **filtri attivi** contengono elementi attivi come transistori ed operazionali.

7 Sistemi trifase

7.1 Introduzione



La generazione e la distribuzione di energia è in genere realizzata mediante *sistemi trifase*. Questi sistemi sono costituiti da tre cavi conduttori collegati ad un alternatore (macchina elettrica che trasforma energia meccanica in energia elettrica), che può essere considerato composto da tre generatori indipendenti di tensione in regime alternato, con la stessa ampiezza della tensione, l'una sfasata rispetto all'altra di 120° .



Frequenza e tensione efficace sono di 50 Hz, 314 rad/s e 230 - 400 V in Europa, buona parte dell'Asia ed in Australia, mentre sono di 60 Hz, 377 rad/s, 120 - 210 V in Nord America.

Tre sono le motivazioni principali per l'utilizzo dei sistemi trifase:

- La maggior parte di energia elettrica è generata da macchine elettriche rotanti a tre fasi (alternatori)
- Nei sistemi a tre fasi bilanciati la **potenza istantanea totale** è costante nel tempo (le tre fasi si bilanciano nel tempo). Ciò si traduce in una trasmissione uniforme con meno vibrazioni lungo la linea
- Per la stessa quantità di energia trasportata, un sistema a tre fasi è più economico di uno singola fase

7.2 Correnti e tensioni nei sistemi trifase

Le correnti di linea $i_1(t)$, $i_2(t)$ e $i_3(t)$ sono le correnti che fluiscono in ciascuna delle tre linee. Dalla LKC segue che:

$$i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = 0$$

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0$$

Le tensioni concatenate $v_{12}(t)$, $v_{23}(t)$ e $v_{31}(t)$ sono le tensioni fra linea e linea. Dalla LKT segue:

$$v_{12}(t) + v_{23}(t) + v_{31}(t) = 0$$

$$\dot{V}_{12} + \dot{V}_{23} + \dot{V}_{31} = 0$$

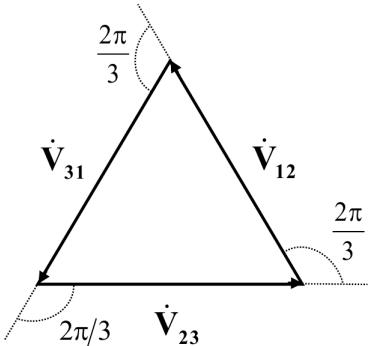
Anche per le tensioni di fase, $e_1(t)$, $e_2(t)$ e $e_3(t)$, le tensioni fra il centro stella dei tre generatori e ciascuna linea, si ha:

$$e_1(t) + e_2(t) + e_3(t) = 0$$

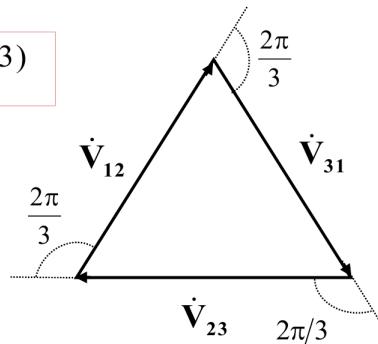
$$\dot{E}_1 + \dot{E}_2 + \dot{E}_3 = 0$$

Da questo se ne deduce che i fasori delle tensioni e delle correnti soddisfano le leggi di Kirchhoff. Nel piano complesso perciò sono rappresentati da triangoli: il triangolo delle tensioni concatenate, il triangolo delle tensioni di linea ed il triangolo delle correnti di linea.

7.2.1 Sistema delle tensioni simmetrico



$$\dot{\alpha} = e^{j(2\pi/3)}$$



Sistema delle tensioni concatenate simmetrico con sequenza positiva – terna diretta (verso dell'orologio nel passaggio da \dot{V}_{12} a \dot{V}_{23} e da \dot{V}_{23} a \dot{V}_{31}):

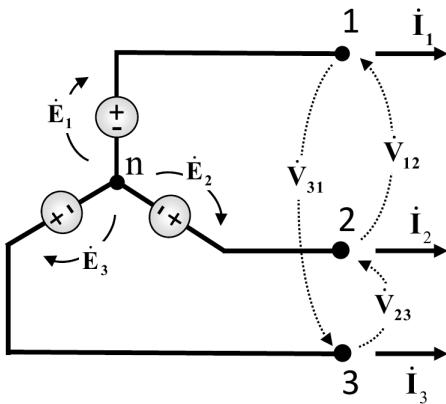
$$\dot{V}_{12}; \dot{V}_{23} = \dot{V}_{12} e^{-j2\pi/3}; \dot{V}_{31} = \dot{V}_{12} e^{j2\pi/3}$$

$$\dot{V}_{12}; \dot{V}_{23} = \dot{\alpha}^2 \dot{V}_{12}; \dot{V}_{31} = \dot{\alpha} \dot{V}_{12}$$

Sistema delle tensioni concatenate simmetrico con sequenza negativa – terna inversa (verso dell'orologio inverso nel passaggio da \dot{V}_{12} a \dot{V}_{23} e da \dot{V}_{23} a \dot{V}_{31}):

$$\dot{V}_{12}; \dot{V}_{23} = \dot{V}_{12} e^{j2\pi/3}; \dot{V}_{31} = \dot{V}_{12} e^{-j2\pi/3}$$

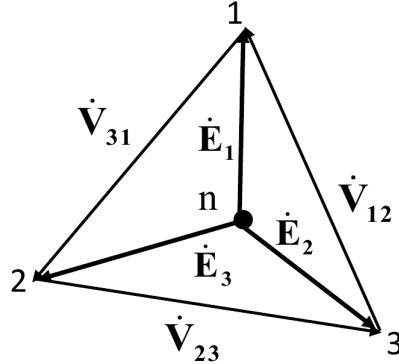
$$\dot{V}_{12}; \dot{V}_{23} = \dot{\alpha} \dot{V}_{12}; \dot{V}_{31} = \dot{\alpha}^2 \dot{V}_{12}$$



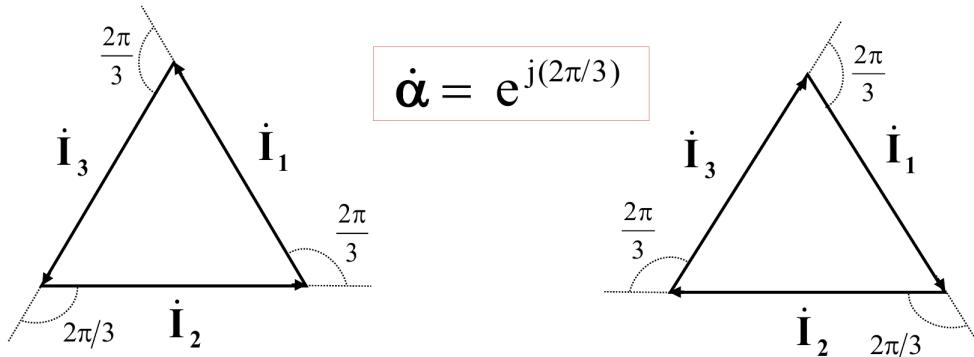
Le tensioni di fase \dot{E}_1 , \dot{E}_2 ed \dot{E}_3 sono collegate a stella tra un centro stella n e i terminali 1, 2 e 3. Le tensioni concatenate \dot{V}_{12} , \dot{V}_{23} e \dot{V}_{31} sono la differenza di potenziale tra i terminali 1 e 2, 2 e 3 e 3 e 1. Le relazioni tra esse, date dalla LKT, sono:

$$\begin{aligned}\dot{V}_{12} &= \dot{E}_1 - \dot{E}_2 \\ \dot{V}_{23} &= \dot{E}_2 - \dot{E}_3 \\ \dot{V}_{31} &= \dot{E}_3 - \dot{E}_1\end{aligned}$$

Il nodo n può essere un qualsiasi punto del piano complesso per il quale viene individuata una terna di tensioni di fase che soddisfa le tre relazioni precedenti per le stesse tre tensioni di linea. Pertanto ci sono ∞^2 serie di tensioni di fase corrispondenti allo stessa terna di tensioni di linea.



7.2.2 Sistema equilibrato delle correnti



Sistema equilibrato delle correnti di linea con sequenza positiva – terna diretta (verso dell'orologio nel passaggio da \dot{I}_1 a \dot{I}_2 e da \dot{I}_2 a \dot{I}_3):

$$\dot{I}_1; \dot{I}_2 = \dot{I}_1 e^{-j2\pi/3}; \dot{I}_3 = \dot{I}_1 e^{j2\pi/3}$$

$$\dot{I}_1; \dot{I}_2 = \dot{\alpha}^2 \dot{I}_1; \dot{I}_3 = \dot{\alpha} \dot{I}_1$$

Sistema equilibrato delle correnti di linea con sequenza negativa – terna inversa (verso dell'orologio inverso nel passaggio da \dot{I}_1 a \dot{I}_2 e da \dot{I}_2 a \dot{I}_3):

$$\dot{I}_1; \dot{I}_2 = \dot{I}_1 e^{j2\pi/3}; \dot{I}_3 = \dot{I}_1 e^{-j2\pi/3}$$

$$\dot{I}_1; \dot{I}_2 = \dot{\alpha} \dot{I}_1; \dot{I}_3 = \dot{\alpha}^2 \dot{I}_1$$

7.2.3 Sistema delle tensioni di linea e di fase simmetrico

Un sistema di tensioni di linea simmetrico con sequenza positiva ed il corrispondente sistema simmetrico di tensioni di fase, anch'esso con sequenza positiva sono:

$$\dot{V}_{12} = V$$

$$\dot{V}_{23} = \dot{\alpha}^2 \dot{V}_{12}$$

$$\dot{V}_{31} = \dot{\alpha} \dot{V}_{12}$$

$$= V e^{-j2\pi/3}$$

$$= V e^{j2\pi/3}$$

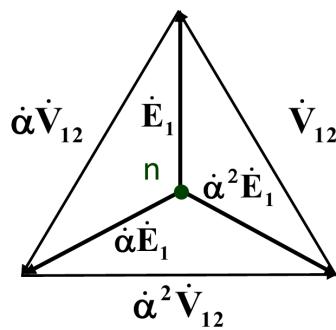
$$= -\frac{V}{2} (1 + j\sqrt{3})$$

$$= \frac{V}{2} (1 + j\sqrt{3})$$

$$\dot{E}_1 = E e^{-j\pi/6}$$

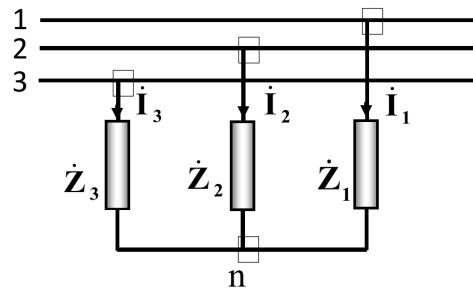
$$\begin{aligned}\dot{E}_2 &= E e^{-j\pi/6} e^{-j2\pi/3} \\ &= E e^{-j5\pi/6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{E}_3 &= E e^{-j4\pi/6} e^{-j4\pi/3} \\ &= E e^{-j9\pi/6}\end{aligned}$$



7.3 Impedenze di carico

7.3.1 Impedenze collegate a stella



Ci sono ∞^2 serie di impedenze collegate a stella che inducono ∞^2 serie di tensioni di fase che possono essere collegate alla stessa serie di tensioni di linea.

$$\dot{V}_{12} = \dot{Z}_1 \dot{I}_1 - \dot{Z}_2 \dot{I}_2$$

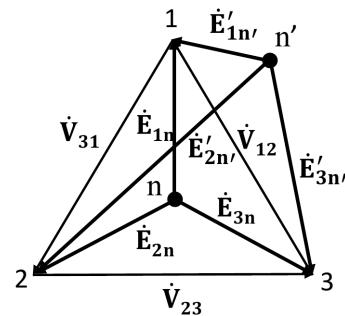
$$\dot{V}_{23} = \dot{Z}_2 \dot{I}_2 - \dot{Z}_3 \dot{I}_3$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0$$

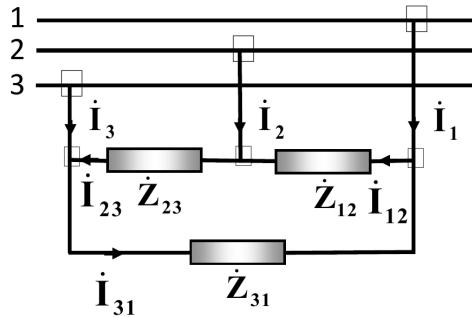
$$\dot{E}_1 = \dot{Z}_1 \dot{I}_1$$

$$\dot{E}_2 = \dot{Z}_2 \dot{I}_2$$

$$\dot{E}_3 = \dot{Z}_3 \dot{I}_3$$



7.3.2 Impedenze collegate a triangolo



$$\dot{V}_{12} = \dot{Z}_{12} \dot{I}_{12}$$

$$\dot{V}_{23} = \dot{Z}_{23} \dot{I}_{23}$$

$$\dot{V}_{31} = \dot{Z}_{31} \dot{I}_{31}$$

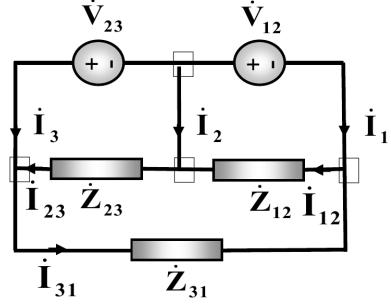
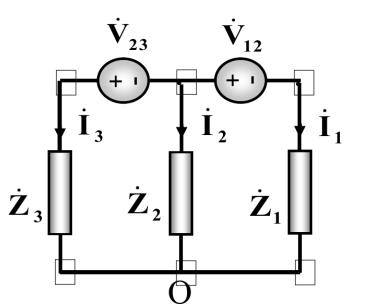
$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{12} - \dot{I}_{31}$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_{23} - \dot{I}_{12}$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_{31} - \dot{I}_{23}$$

7.3.3 Impedenze connesse a una rete trifase

Impedenze a stella connesse a una rete trifase Impedenze a triangolo connesse a una rete trifase



7.4 Sistemi trifase bilanciati

7.5 Introduzione

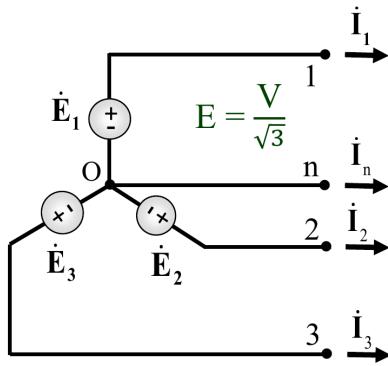
Qualora si abbia un sistema di impedenze \dot{Z}_1, \dot{Z}_2 , e \dot{Z}_3 a stella o a triangolo uguali (cioè con uguale resistenza e uguale reattanza), il sistema è un **sistema di impedenze di carico bilanciato**.

Qualora un sistema trifase simmetrico (con tensioni simmetriche) sia collegato ad un sistema di impedenze di carico bilanciato, il sistema delle correnti è equilibrato. Il sistema trifase con tensioni simmetriche e correnti equilibrate si definisce **sistema trifase bilanciato**.

7.6 Sistemi trifase con neutro

Un generatore trifase di un sistema simmetrico (un alternatore) equivale a tre generatori monofase collegati a stella che generano un sistema simmetrico di tensioni di fase con centro O. In un *sistema trifase con neutro* il centro O della connessione a stella è collegato a una quarta linea. La relazione tra le tensioni di fase E , simmetriche, e le tensioni di linea V , anch'esse simmetriche, è:

$$E = \frac{V}{\sqrt{3}}$$

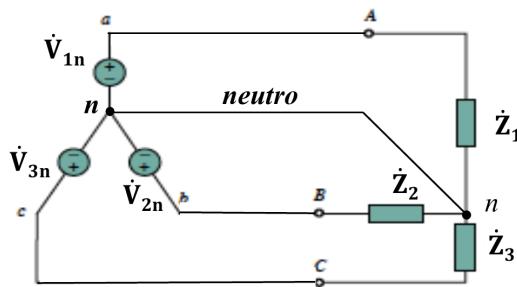


Nel sistema trifase con neutro il triangolo delle correnti è sostituito da un quadrilatero delle correnti dato dall'equazione (LKC):

$$I_1 + I_2 + I_n + I_3 = 0$$

La tensione di fase efficace $E_e = 230V$ si ottiene per mezzo di un sistema simmetrico di tensioni di linea, con un valore efficace $V_e = 400V$.

In un sistema trifase senza neutro ci sono ∞^2 serie di tensioni di fase, indotte da sistemi di impedenze di carico non equilibrati. Le tensioni di fase sono ottenute dalla serie simmetrica di tensioni concatenate generata dall'alternatore.



Per avere sempre un sistema simmetrico di tensioni di fase, viene utilizzato il sistema trifase con neutro. Il conduttore detto "neutro" connette il centro dei tre generatori a stella (terna di generatori monofase equivalenti dell'alternatore) con il centro del sistema di carico a stella. In tal modo ciascuna fase delle tensioni di fase, generata da uno dei tre generatori equivalenti all'alternatore, alimenta una fase del sistema delle impedenze collegate a stella.

In un sistema trifase simmetrico con una sequenza positiva le tensioni di fase sono:

$$e_1(t) = \sqrt{2}E \sin(\omega t) \quad e_2(t) = \sqrt{2}E \sin(\omega t - \frac{2\pi}{3}) \quad e_3(t) = \sqrt{2}E \sin(\omega t - \frac{4\pi}{3})$$

dove E è il valore efficace della tensione di fase con $E = \frac{V}{\sqrt{3}}$ (V valore efficace della tensione della linea).

7.6.1 Potenza istantanea trifase

Con un carico a stella bilanciato, con le correnti della stella in ritardo di un angolo ϕ rispetto alle tensioni di fase si ha:

$$i_1(t) = \sqrt{2}I \sin(\omega t - \phi) \quad i_2(t) = \sqrt{2}I \sin\left(\omega t - \phi - \frac{2\pi}{3}\right) \quad i_3(t) = \sqrt{2}I \sin\left(\omega t - \phi - \frac{4\pi}{3}\right)$$

dove I è il valore efficace delle correnti. La potenza istantanea totale assorbita dal carico allora è:

$$\begin{aligned} p(t) &= e_1(t)i_1(t) + e_2(t)i_2(t) + e_3(t)i_3(t) \\ &= 2EI \left[\sin(\omega t) \sin(\omega t - \phi) + \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \sin\left(\omega t - \phi - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \sin\left(\omega t - \phi - \frac{4\pi}{3}\right) \right] \\ &= EI \left[3 \cos(\phi) - \cos(2\omega t - \phi) - \cos\left(2\omega t - \phi - \frac{4\pi}{3}\right) - \cos\left(2\omega t - \phi - \frac{8\pi}{3}\right) \right] \end{aligned}$$

Le tre sinusoidi a pulsazione 2ω a ultimo membro costituiscono una terna simmetrica diretta ed hanno quindi somma nulla in ogni istante, sicché la potenza istantanea si riduce al solo addendo costante:

$$p(t) = 3EI \cos(\phi)$$

Dunque la potenza istantanea in un sistema trifase simmetrico ed equilibrato è costante nel tempo, a differenza di quanto si verifica in un sistema monofase. Questa è una delle motivazioni principali per cui, per la generazione e la distribuzione della potenza elettrica in corrente alternata, vengono utilizzati sistemi trifase.

7.7 Differenze tra sistemi trifase bilanciati e non bilanciati

7.7.1 Potenza attiva e potenza reattiva

La potenza attiva P e la potenza reattiva Q in un sistema trifase bilanciato, detti E_e , V_e ed I_e rispettivamente i valori efficaci delle tensioni di fase, delle tensioni di linea e delle correnti di linea, sono:

$$P = 3E_e I_e \cos(\phi) = \sqrt{3}V_e I_e \cos(\phi) \quad Q = 3E_e I_e \sin(\phi) = \sqrt{3}V_e I_e \sin(\phi)$$

Potenza apparente e potenza complessa sono:

$$N = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad \dot{N} = P + jQ$$

Il fattore di potenza è:

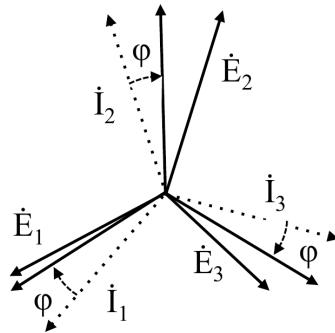
$$\cos(\phi) = \cos\left(\tan^{-1}\frac{Q}{P}\right)$$

In un sistema non bilanciato l'angolo di sfasamento tra la tensione e la corrente linea solitamente è diverso per ogni fase. In questo caso il rifasamento (correzione dell'angolo di sfasamento) deve essere fatto per ogni singola fase.

Per il sistema non bilanciato il fattore di potenza è:

$$\cos(\phi) = \cos\left(\tan^{-1}\frac{Q}{P}\right) = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} = \frac{P}{Q}$$

Per i sistemi bilanciati e non, la rotazione del sistema trifase di correnti di un angolo ϕ (arco-coseno del fattore di potenza) fa sì che la potenza attiva assorbita dal circuito sia massimizzata.



8 Circuiti e forze magnetiche

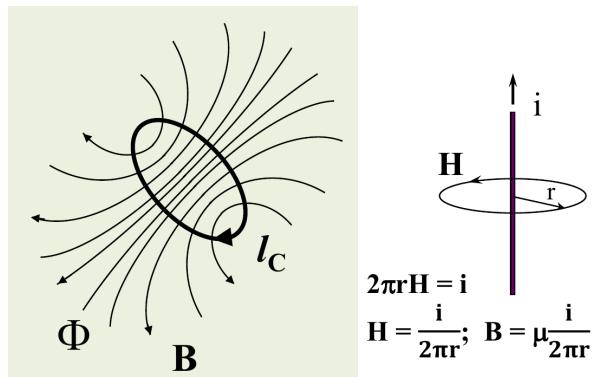
8.1 Introduzione

Il campo magnetico \mathbf{H} è definito dalla prima legge di Maxwell (L. Ampere):

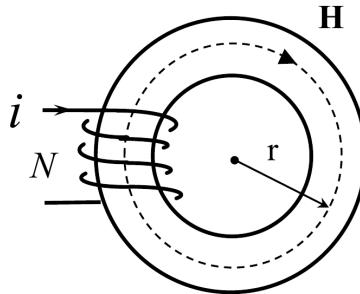
$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = i_c$$

dove i_c è il flusso di \mathbf{J}_t (corrente di conduzione e spostamento) attraverso una superficie con contorno l . il cui verso è determinato dalla regola della vite destrogiro.

In un filo conduttore rettilineo percorso dalla corrente i viene indotto un campo \mathbf{H} le cui linee di flusso sono in piani normali al conduttore, circolari col conduttore al centro.



8.2 Dai campi ai circuiti magnetici



Considerato il sistema toroidale di figura, il campo magnetico è indotto da un conduttore percorso dalla corrente i ed avvolto attorno al toro con N spire. Il flusso della densità di corrente concatenato con l'asse interno al toro, di lunghezza $2\pi r$, è $i_c = Ni$. Per le linee di flusso di \mathbf{H} interne al toro, assunte parallele all'asse del toro, si ha:

$$2\pi r \mathbf{H} = Ni \quad \rightarrow \quad \mathbf{H} = \frac{Ni}{2\pi r}$$

Per un materiale lineare il campo di induzione magnetica \mathbf{B} è proporzionale ad H ($B = \mu H$). Nel caso in esame si ha:

$$\frac{\mathbf{B}}{\mu} = \frac{Ni}{2\pi r} \quad \rightarrow \quad \mathbf{B} = \frac{\mu Ni}{2\pi r}$$

8.2.1 Legge di Hopkinson

Il campo di induzione magnetica \mathbf{B} presenta notevoli *analogie* con il campo di conduzione stazionaria J . Anzitutto, essendo entrambi i campi solenoidali, le loro linee vettoriali sono chiuse e danno luogo a tubi di flusso chiusi. Inoltre le linee vettoriali di entrambi i campi possono essere ben canalizzate utilizzando, nel caso di \mathbf{J} , materiali ad elevata conducibilità (conduttori) circondati da altri a bassissima conducibilità (isolanti), mentre, nel caso di \mathbf{B} , utilizzando materiali ad elevata permeabilità (*ferromagnetici*) circondati da altri a bassa permeabilità (*amagnetici*).

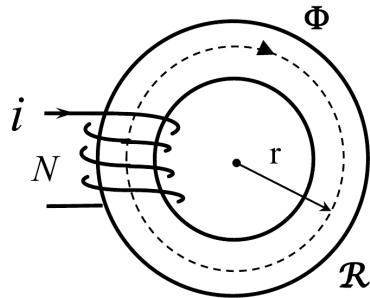
In considerazione di tali analogie, come un campo di corrente solenoidale ben canalizzato costituisce un circuito elettrico (o rete elettrica), così un campo di induzione ben canalizzato è detto **circuito magnetico** (o rete magnetica).

Fra due sezioni S trasversali 1 e 2 di un tubo di **flusso magnetico** Φ , qualora fra 1 e 2 non vi siano correnti concatenate, si ha (con \mathcal{T} tensione magnetica):

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_2 \\ &= \int_1^2 \mathbf{H} dl \\ &= \int_1^2 \frac{1}{\mu} \mathbf{B} dl \\ &= \int_1^2 \frac{\mathbf{B} S}{\mu S} dl \\ &= \Phi \int_1^2 \frac{1}{\mu S} dl \\ &= \mathcal{R} \Phi \end{aligned}$$

dove, come nel caso elettrico, $\mathbf{H} = -\nabla\mathcal{T}$. Se si considera il circuito magnetico in figura, il circuito elettrico concatenato genera una forza magneto-motrice (f.m.m.), quindi $\mathcal{T} = Ni$. Si ottiene per il circuito magnetico la *legge di Hopkinson*:

$$Ni = \mathcal{R}\Phi$$



dove la *rilettanza* \mathcal{R} per una lunghezza l e una sezione trasversale S del tubo è $\mathcal{R} = \frac{l}{S\mu}$.

Possiamo quindi evidenziare le seguenti similitudini con i circuiti elettrici:

Legge di Ohm	Legge di Hopkinson
$V_s = Ri$	$Ni = \mathcal{R}\Phi$
V_s f.e.m.	Ni f.m.m.
i corrente elettrica	Φ flusso magnetico
R resistenza	\mathcal{R} rilettanza

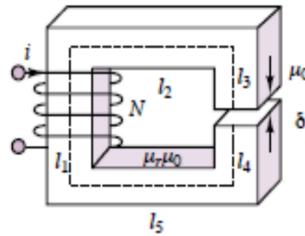
8.2.2 Differenze tra circuiti elettrici e circuiti magnetici

La principale differenza fra i circuiti elettrici ed i circuiti magnetici è dovuta alle caratteristiche dei materiali.

Nel caso elettrico vi sono materiali isolanti e materiali conduttori con differenze di resistività elettrica dell'ordine di 10^{20} . Nei materiali isolanti infatti il flusso di \mathbf{J}_t può essere considerato nullo.

Nel caso magnetico invece i materiali con elevata resistività magnetica non sono completamente isolanti magnetici, per questo sono sempre presenti dei **flussi magnetici dispersi** fuori dal circuito magnetico.

8.3 Circuiti magnetici nel dettaglio



I materiali ferromagnetici usati nei circuiti magnetici sono ghisa, acciaio fuso e lamiera di acciaio.

Questi materiali non sono lineari, ma sotto un valore critico $B < B_S$ (con B_S campo di saturazione) il materiale si può considerare lineare con elevati valori della permeabilità magnetica μ (bassa resistività magnetica). Di conseguenza anche la **permeabilità relativa** di questi materiali è elevata:

$$\mu_r \gg 1$$

Per la determinazione della riluttanza magnetica nel caso in alto essa viene ottenuta come somma delle riluttanze dei tronchi del circuito magnetico:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_1 &= \frac{l_1}{S\mu} & \mathcal{R}_2 &= \frac{l_2}{S\mu} & \mathcal{R}_3 &= \frac{l_3}{S\mu} \\ \mathcal{R}_4 &= \frac{l_4}{S\mu} & \mathcal{R}_5 &= \frac{l_5}{S\mu} & \mathcal{R}_{tf} &= \frac{\delta}{S\mu_0}\end{aligned}$$

Nel ferro $\mathcal{R}_{tr} > \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3, \mathcal{R}_4, \mathcal{R}_5$, Quindi di solito le riluttanze dei rami ferromagneticci sono trascurate rispetto a quelle dei traferri (un traferro è un'interruzione dell'anello di materiale ferromagnetico).

In un circuito magnetico si distinguono rami e nodi. Φ_k è il flusso magnetico del ramo k , \mathcal{T}_k è la tensione magnetica del ramo (differenza di potenziale magnetico fra i capi del ramo), \mathcal{R}_k è la riluttanza del ramo e $N_k i_k$ è la f.m.m., generatore indipendente di tensione magnetica del ramo ove N_k è il numero di spire che avvolgono il ramo e i_k è la corrente elettrica che scorre nell'avvolgimento.

8.3.1 Leggi di Kirchhoff per i circuiti magnetici e equazione di ramo magnetico

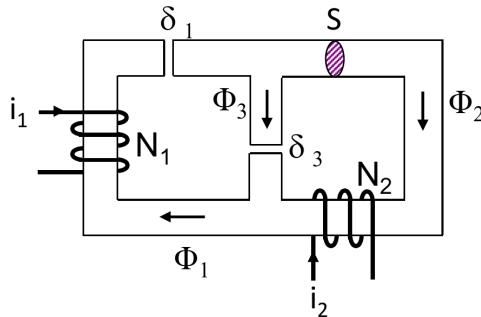
Dalla prima legge di Maxwell si ottiene la legge di Kirchhoff delle tensioni magnetiche LKT e per la solenoidalità di \mathbf{B} si perviene alla legge di Kirchhoff dei flussi magnetici LKF. Inoltre per la legge di Hopkinson si ottiene l'equazione di ramo magnetico. In un circuito magnetico di r rami ed n nodi si ha quindi:

$$\begin{aligned}\text{LKF: } \sum_{k=1}^n \Phi_k &= 0 & \text{per } n-1 \text{ nodi} \\ \text{LKT: } \sum_{k=1}^m \mathcal{T}_k &= 0 & \text{per } r-n+1 \text{ maglie} \\ \text{ER: } \mathcal{T}_k &= \mathcal{R}_k \Phi_k - N_k i_k & \text{per gli } r \text{ rami}\end{aligned}$$

Utilizzando il metodo di sostituzione delle tensioni si ha:

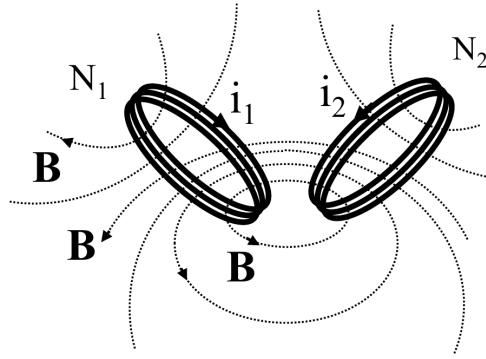
$$\begin{aligned}\text{LKF: } \sum_{k=1}^n \Phi_k &= 0 & \text{per } n-1 \text{ nodi} \\ \text{LKT - ER: } \sum_{k=1}^m \mathcal{R}_k \Phi_k - N_k i_k &= 0 & \text{per } r-n+1 \text{ maglie}\end{aligned}$$

8.4 Analisi di un circuito magnetico



Equazioni del sistema:

$$N_1 i_1 = R_1 \Phi_1 + R_3 \Phi_3 \quad N_2 i_2 = R_3 \Phi_3 \quad \Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_3 = 0$$



Il flusso magnetico Φ_{C1} concatenato con il circuito 1, è generato sia da i_1 che da i_2 :

$$\Phi_{C1} = \Phi_1(i_1) + \Phi_1(i_2)$$

Per un induttore lineare tempo-invariante Φ_{C1} diviene:

$$\Phi_{C1} = L_1 i_1 + M_{12} i_2$$

con L_1 auto-induttanza e M_{12} mutua-induttanza.

Analogamente per flusso magnetico Φ_{C2} concatenato con il circuito 2, si ha:

$$\Phi_{C2} = \Phi_2(i_1) + \Phi_2(i_2)$$

$$\Phi_{C2} = L_2 i_2 + M_{21} i_1$$

con $M_{12} = M_{21}$.

Le componenti dei flussi del circuito sono:

$$N_1 \Phi_1(i_1) = L_1 i_1$$

$$N_2 \Phi_2(i_2) = L_2 i_2$$

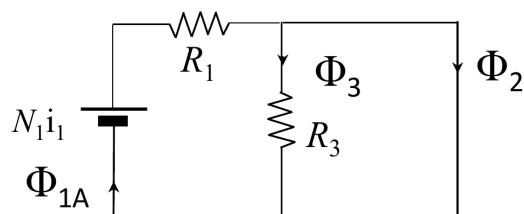
$$N_1 \Phi_1(i_2) = M_{12} i_2$$

$$N_2 \Phi_2(i_1) = M_{21} i_1$$

Per determinare $L - 1$ e M_{12} è necessario calcolare $\Phi_1(i_1)$ e $\Phi_1(i_2)$.

Il contributo del flusso $\Phi_1(i_1)$ concatenato a i_1 e generato da i_1 è il valore di Φ_1 quando la f.m.m. $N_1 i_1$ è accesa e la f.m.m. $N_2 i_2$ è spenta:

$$L_1 = \frac{N_1 \Phi_1(i_1)}{i_1}$$

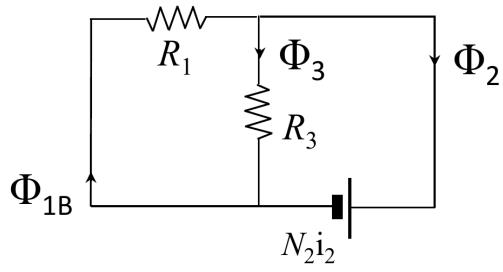


nel nostro caso:

$$\Phi_1(i_1) = \underbrace{\frac{N_1 i_1}{R_1}}_{Ni = \mathcal{R}\Phi} = \underbrace{\frac{L_1 i_1}{N_1}}_{N_1 \Phi_1(i_1) = L_1 i_1} \implies L_1 = \frac{N_1^2}{R_1}$$

Il contributo del flusso $\Phi_1(i_2)$ concatenato a i_1 e generato da i_2 è il valore di Φ_1 quando la f.m.m. $N_1 i_1$ è spenta e la f.m.m. $N_2 i_2$ è accesa:

$$M_{12} = \frac{N_1 \Phi_1(i_2)}{i_2}$$



nel nostro caso:

$$\Phi_1(i_1) = -\frac{N_2 i_2}{R_1} = \underbrace{\frac{M_{12} i_2}{N_1}}_{N_1 \Phi_1(i_2) = M_{12} i_2} \implies M_{12} = -\frac{N_1 N_2}{R_1}$$

8.5 Energia magnetica

L'energia magnetica \mathcal{E}_M è utilizzata per generare il flusso Φ per mezzo della corrente i che scorre in un avvolgimento di N spire attorno a Φ ($\Phi_C = N\Phi$).

L'energia magnetica infinitesima $d\mathcal{E}_M$ assorbita dal campo magnetico all'aumento di Φ nell'intervallo di tempo dt è:

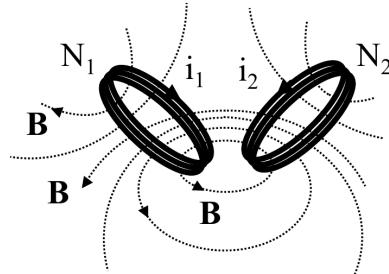
$$\begin{aligned} d\mathcal{E}_M &= P_M dt \\ &= i \cdot v dt \\ &= i \frac{d\Phi_C}{dt} dt \\ &= i \cdot d\Phi_C \end{aligned}$$

dove P_M è la potenza magnetica.

All'istante t l'energia accumulata dal campo magnetico quindi è:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_M(-\infty, t) &= \int_{-\infty}^t i \cdot v dt \\ &= \int_{-\infty}^t i \cdot d\Phi_C \\ \xrightarrow{\text{caso lineare } \Phi = L \cdot i} &= \int_{-\infty}^t i \cdot d(Li) \\ \xrightarrow{L \text{ costante}} &= \int_{-\infty}^t L \cdot i \cdot di \\ &= \frac{1}{2} L \cdot i^2 \end{aligned}$$

8.5.1 Energia magnetica di correnti concatenate



L'energia magnetica infinitesima $d\mathcal{E}_M$ assorbita dal campo magnetico all'aumento di Φ prodotto dalle correnti i_1 e i_2 nell'intervallo di tempo dt è:

$$\begin{aligned} d\mathcal{E}_M &= P_{M1} dt + P_{M2} dt \\ &= i_1 \cdot v_1 dt + i_2 \cdot v_2 dt \\ &= i_1 d\Phi_{C1} + i_2 d\Phi_{C2} \end{aligned}$$

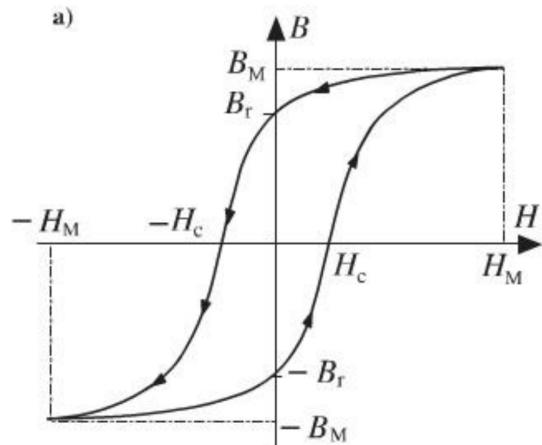
All'istante t l'energia accumulata dal campo magnetico quindi è:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_M(-\infty, t) &= \int_{-\infty}^t [i_1 \cdot v_1 + i_2 \cdot v_2] dt \\
 &= \int_{-\infty}^t \left[i_1 \frac{d\Phi_{C1}}{dt} + i_2 \frac{d\Phi_{C2}}{dt} \right] dt \\
 &= \int_{-\infty}^t \left[L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} + M_{12} i_1 \frac{di_2}{dt} + M_{12} i_2 \frac{di_1}{dt} + L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} \right] dt \\
 &= \int_{-\infty}^t d \left[\frac{1}{2} L_1(i_1)^2 + M_{12} i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2(i_2)^2 \right] \\
 &= \frac{1}{2} L_1 i_1(t)^2 + M_{12} i_1(t) i_2(t) + \frac{1}{2} L_2 i_2(t)^2
 \end{aligned}$$

8.6 Isteresi magnetica

I materiali **ferromagnetici** sono caratterizzati dalla capacità di magnetizzarsi molto intensamente sotto l'azione di un campo magnetico esterno e di restare a lungo magnetizzati quando il campo si annulla, diventando così magneti. Invece i materiali **ferrimagnetici** sono caratterizzati da una magnetizzazione spontanea.

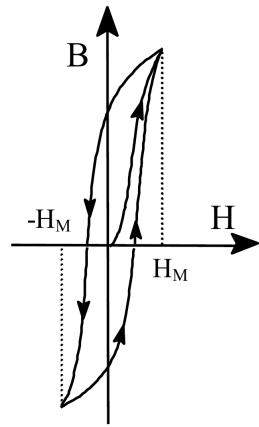
I materiali ferromagnetici e ferrimagnetici per temperature inferiori alla temperatura di Curie hanno per la suscettività magnetica un comportamento **isteretico**. Perciò la relazione $\mathbf{B} = f(\mathbf{H})$ è una **funzione isterica**.



Nella figura è raffigurato un **ciclo di isteresi**: dopo una *curva di prima magnetizzazione*, al materiale vengono applicati il campo magnetico \mathbf{H}_{max} e l'induzione magnetica \mathbf{B}_{max} ; riducendo il campo magnetico fino ad annullarlo, l'induzione non si annulla, ma raggiunge il valore \mathbf{B}_r (*retentivity, induzione residua*). Per ridurre ulteriormente l'induzione è necessario invertire il verso del campo magnetico, applicando valori di $\mathbf{H} < 0$. L'induzione si annulla quando si raggiunge il valore $-\mathbf{H}_c$ (*coercitivity, campo magnetico coercitivo*). Quando, aumentando ulteriormente il modulo di \mathbf{H} , si raggiunge il valore $-\mathbf{H}_{max}$, l'induzione assume il valore $-\mathbf{B}_{max}$. Se si fanno variare ciclicamente i due campi tra valori estremi opposti \mathbf{H}_{max} e $-\mathbf{H}_{max}$, la curva \mathbf{H}, \mathbf{B} descrive un *ciclo di isteresi simmetrico*.

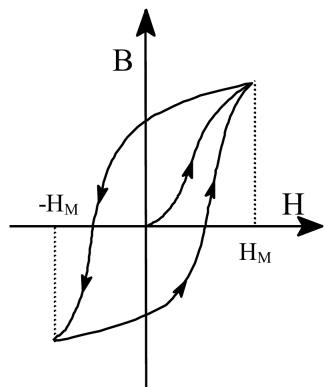
Si dimostra che la densità di energia dissipata per isteresi è data dall'area del ciclo di isteresi.

8.6.1 Materiali ferromagnetici e ferrimagnetici morbidi



I materiali ferromagnetici (o ferrimagnetici) morbidi hanno alti valori di permeabilità magnetica e un piccolo campo coercitivo ($\mathbf{H}_c < 10^3 A/m$). Pertanto la superficie del ciclo di isteresi è piccola (quindi hanno delle perdite per isteresi ridotte). Questi materiali sono utilizzati per ridurre le correnti necessarie per produrre e controllare il flusso magnetico con perdite per isteresi contenute (nuclei elettromagnetici, nuclei di trasformatori, rotori e statori di macchine rotanti). Tipici materiali morbidi sono il ferro e le sue leghe di nichel, cobalto e silicio, acciaio a basso contenuto di carbonio e leghe di ferro dolce.

8.6.2 Materiali ferromagnetici e ferrimagnetici duri

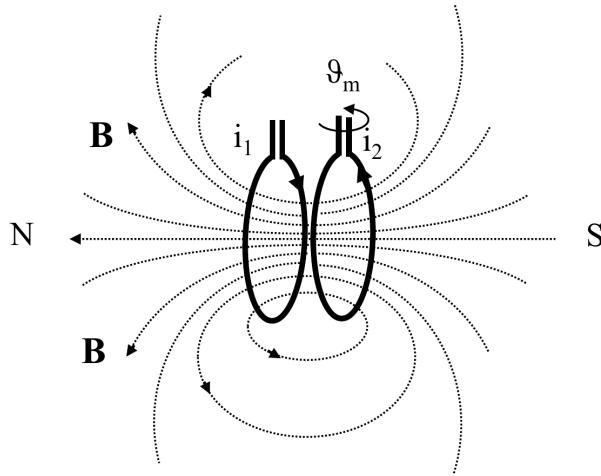


I materiali *ferromagnetici* (o ferrimagnetici) *duri* hanno un'alta densità di flusso magnetico residua (\mathbf{B}_r) e un campo coercitivo elevato ($\mathbf{H}_c > 10^4 A/m$). Pertanto la superficie del ciclo di isteresi è grande (dunque hanno delle perdite per isteresi elevate). Questi materiali sono usati per realizzare magneti permanenti.

I materiali utilizzati per loro sono leghe e terre rare con un grande campo coercitivo.

9 Trasformatore

9.1 Introduzione



Una **macchina elettrica** è costituita da due circuiti elettrici accoppiati da un flusso magnetico concatenato ad entrambi. Il flusso magnetico generato dalla corrente i_1 , se varia nel tempo rispetto al circuito 2, induce in esso una tensione (f.e.m.) v_2 e quindi una corrente i_2 . La corrente i_2 , a sua volta, genera un flusso magnetico che interagisce con il flusso prodotto da i_1 , con l'induzione di una forza fra i due campi: si realizza così la conversione della potenza elettrica in potenza meccanica.

9.2 Conversione elettromeccanica dell'energia

Si considerino n circuiti che possono ruotare uno rispetto all'altro. Il circuito j è percorso dalla corrente i_j ha resistenza R_j , angolo di rotazione ϑ_j e flusso magnetico Φ_{C_j} concatenato al circuito

$$\Phi_{C_j} = \Phi_{C_j}(i_k, \vartheta_k)$$

Il flusso concatenato col circuito j è generato dalle correnti i_1, i_2, \dots, i_n . La f.e.m. indotta nel circuito j è dovuta alla variazione nel tempo delle correnti i_k ed alla variazione nel tempo della posizione di ogni circuito k rispetto al j -esimo.

La variazione Φ_{C_j} al variare delle correnti e delle posizioni reciproche dei circuiti è:

$$\begin{aligned} d\Phi_{C_j} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial \Phi_{C_j}}{\partial i_k} di_k + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \Phi_{C_j}}{\partial \vartheta_k} d\vartheta_k \\ &= \sum_{k=1}^n L_{jk} di_k + \sum_{k=1}^n i_j \frac{\partial L_{jk}}{\partial \vartheta_k} d\vartheta_k i_k \end{aligned}$$

per $k = j$ è $L_{jk} = L_j$, per $k \neq j$ è $L_{jk} = M_{jk}$.

La tensione indotta nel circuito j perciò diviene:

$$v_j = R_j i_j + \sum_{k=1}^n L_{jk} \frac{di_k}{dt} + \underbrace{\sum_{k=1, k \neq j}^n i_k \frac{\partial L_{jk}}{\partial \vartheta_k} \omega_{jk}}_{\text{termo di induzione}}$$

dove ω_{jk} è la velocità di rotazione del circuito k rispetto al circuito j .

Considerando un sistema di due circuiti di materiale lineare con relative correnti, uno in moto con velocità angolare ω rispetto all'altro, si ha:

$$d\Phi_{C_1} - L_1 di_1 + M_{12} di_2 + i_2 \frac{\partial M_{12}}{\partial \vartheta} d\vartheta \quad d\Phi_{C_2} - L_2 di_2 + M_{21} di_1 + i_1 \frac{\partial M_{21}}{\partial \vartheta} d\vartheta$$

Le tensioni ai capi dei due circuiti sono:

$$v_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{12} \frac{di_2}{dt} + i_2 \frac{\partial M_{12}}{\partial \vartheta} \omega \quad v_2 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M_{21} \frac{di_1}{dt} + i_1 \frac{\partial M_{21}}{\partial \vartheta} \omega$$

Nell'espressione della tensione indotta dalla variazione del flusso magnetico concatenato coi circuiti 1 e 2, si distinguono due meccanismi diversi che danno luogo alla f.e.m.:

- le f.e.m. **trasformatoriche** indotte nel circuito e nel circuito 2

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{12} \frac{di_2}{dt}$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} + M_{12} \frac{di_1}{dt}$$

- le f.e.m. **mozionali** indotte nel circuito 1 e nel circuito 2

$$i_2 \frac{\partial M_{12}}{\partial \vartheta} \omega$$

$$i_1 \frac{\partial M_{12}}{\partial \vartheta} \omega$$

In un sistema di n circuiti, la f.e.m. indotta nel circuito j dalla variazione del flusso con esse concatenato è data da:

$$\underbrace{\sum_{k=1}^n L_{jk} \frac{di_k}{dt}}_{\text{f.e.m. trasformatorica}} + \underbrace{\sum_{k=1}^n i_k \frac{\partial L_{jk}}{\partial \vartheta_k} \omega_{jk}}_{\text{f.e.m. ozionale}}$$

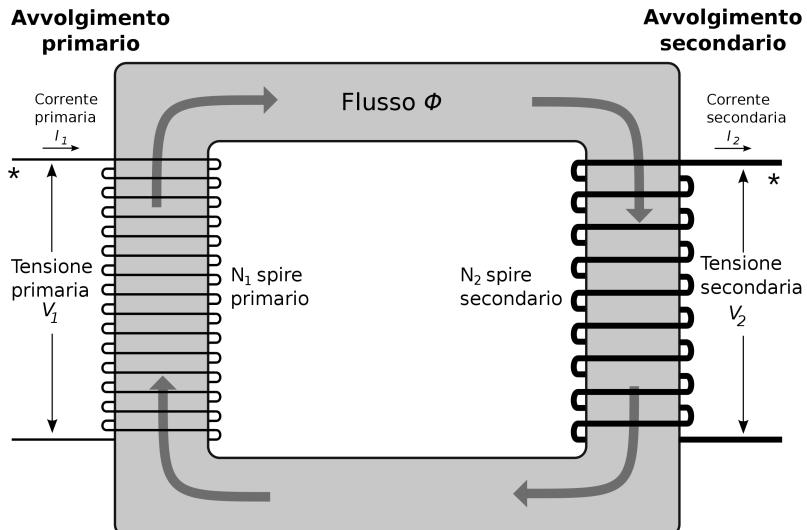
9.3 Il trasformatore nel dettaglio

9.3.1 Differenze con macchine elettriche

Prima di tutto evidenziamo le differenze tra trasformatore e macchine elettriche rotanti:

- Nel trasformatore la velocità meccanica reciproca dei circuiti ω_m è nulla e le correnti i_1 e i_2 sono correnti sinusoidali
- Nelle macchine elettriche rotanti la velocità meccanica reciproca dei circuiti ω_m è non nulla e le correnti variano in base al tipo di macchina:
 - per **macchine asincrone** lo statore i_1 è trifase, il rotore i_2 è trifase
 - per **macchine sincrone** lo statore i_1 è trifase, il rotore i_2 è una corrente continua
 - per **macchine in corrente continua** lo statore i_1 e il rotore i_2 sono in corrente continua

9.3.2 Struttura



Il trasformatore consiste in due circuiti (primario e secondario) accoppiati magneticamente. I due circuiti sono immobili e la f.e.m. è indotta dalla variazione da correnti sinusoidali. In questo caso quindi la f.e.m. è trasformatorica. Le tensioni ai capi dei due circuiti sono:

$$v_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{12} \frac{di_2}{dt} + i_2 \frac{\partial M_{12}}{\partial \vartheta} \omega$$

$$v_2 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M_{12} \frac{di_1}{dt} + i_1 \frac{\partial M_{12}}{\partial \vartheta} \omega$$

Se i_1 ed i_2 sono in un sistema isofrequenziale nello spazio delle fasi si ha:

$$\dot{\mathbf{V}}_1 = (R_1 + j\omega L_1) \dot{\mathbf{I}}_1 + j\omega M_{12} \dot{\mathbf{I}}_2$$

$$\dot{\mathbf{V}}_2 = (R_2 + j\omega L_2) \dot{\mathbf{I}}_2 + j\omega M_{12} \dot{\mathbf{I}}_1$$

9.3.3 Trasformatore ideale

Nell'ipotesi di trasformatore ideale i due circuiti si considerano **perfettamente accoppiati magneticamente**. Il flusso generato da un avvolgimento è completamente concatenato con l'altro, e si ritengono nulli i flussi dispersi. Inoltre non vi sono perdite nel rame dei due avvolgimenti ($R_1 = R_2 = 0$) e nel ferro del circuito magnetico.

Si definisce il **rappporto spire**:

$$K = \frac{N_1}{N_2}$$

dove N_1 ed N_2 sono il numero di spire degli avvolgimenti 1, primario, e 2, secondario. In un trasformatore ideale quindi per V_1 e V_2 risulta:

$$\begin{aligned} V_1 &= N_1 \frac{d\Phi}{dt} & V_2 &= N_2 \frac{d\Phi}{dt} & \Rightarrow & \frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2} = K \\ p_1 = p_2 \implies V_1 I_1 &= V_2 I_2 & \Rightarrow & \frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{K} \end{aligned}$$

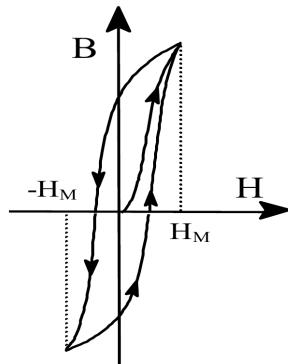
9.4 Perdite energetiche

Le perdite nelle macchine elettriche sono di due tipologie:

- **perdite nel rame:** queste perdite si verificano nei circuiti elettrici e sono perdite per effetto Ohm dovute alla resistenza elettrica dei circuiti, che è non-nulla;
- **perdite nel ferro:** sono dovute a isteresi magnetica e correnti parassite.

9.4.1 Perdite nel ferro

Perdite per isteresi



L'energia elettromagnetica w_B dissipata per unità di volume di ferro a causa dell'isteresi dipende dall'area del ciclo di isteresi $\mathbf{H} - \mathbf{B}$ ed è proporzionale al numero di cicli per unità di tempo (alla frequenza f):

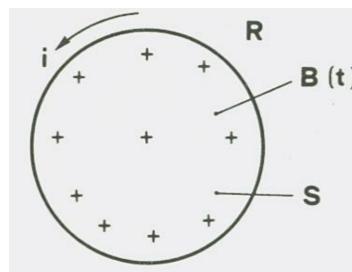
$$w_B = \mathbf{H} \times d\mathbf{B}$$

Una formulazione semi-empirica afferma che la potenza dissipata per isteresi P_{DH} è:

$$P_{DH} = k_H f B_M^\alpha$$

B_M è il valore massimo della induzione magnetica nel ciclo dell'isteresi, k_H è un coefficiente di proporzionalità, l'esponente α è circa 2.

Perdite per correnti parassite



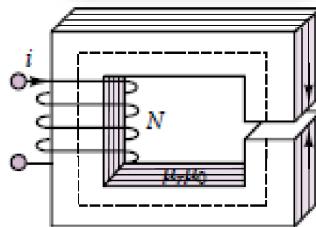
Nei nuclei in ferro, a causa della variazione nel tempo dell'induzione magnetica \mathbf{B} , viene indotta una f.e.m. perpendicolare a \mathbf{B} . Di conseguenza, per l'elevata conduttività elettrica del ferro, vengono generate *correnti parassite* nel ferro. Perciò viene dissipata energia elettromagnetica per effetto Joule.

Assumendo il regime sinusoidale e, conseguentemente un campo $\mathbf{B}(t) = \mathbf{B}_M \cos \omega t$, detta S la sezione di un tubo di flusso sul cui contorno si forma un circuito nel ferro per la corrente parassita e detta R la resistenza del circuito in ferro, la potenza dissipata per correnti parassite P_{DP} è data da:

$$P_{DP} = \frac{S^2 \mathbf{B}_M^2 \omega^2}{2R} = k_H f^2 \mathbf{B}_M^2$$

dove k_H è un coefficiente di proporzionalità.

Al fine di ridurre le perdite per correnti parassite vengono utilizzate per il nucleo leghe speciali (ad esempio ferro-silicio ad elevata resistività) e viene adottato il processo di **laminazione** con il nucleo in ferro sostituito da lamierini di ferro di ridotto spessore ($\delta \approx 1 \text{ mm}$) fra loro isolati (vedi figura) per aumentare la resistenza e diminuire la sezione del flusso magnetico prodotto dalle correnti parassite riducendo quindi la f.e.m. indotta.



Laminazione del nucleo in ferro

9.5 Il sistema di potenza elettrico: produzione, trasmissione, distribuzione, utilizzo

La **produzione** di potenza in una centrale elettrica generalmente è di $320 - 640 \text{ MVA}$ in generatori di tensione trifase (alternatori) con valori efficaci della tensione concatenata di $10 - 25 \text{ kV}$ (valore di media tensione MT).

La **trasmissione** fra la località della centrale e la zona del suo utilizzo copre distanze dell'ordine di 100-1000 km. La trasmissione avviene ad alta tensione (AT con $V_e = 400 \text{ kV}$).

Nel luogo di utilizzo si ha prima la **distribuzione** dell'energia elettrica in media tensione (MT).

La corrente poi viene **utilizzata** a bassa tensione: BT con $V_e = 400 \text{ V}$ in sistemi trifase e $V_e = 220 \text{ V}$ in sistemi monofase (questi ultimi sono ottenuti da trifase con neutro).

Il passaggio fra MT a AT dalla produzione alla trasmissione, fra AT a MT dalla trasmissione alla distribuzione e fra MT a BT fra distribuzione ed utilizzo avviene attraverso l'utilizzo di trasformatori.

La **trasmissione** avviene in AT poiché a parità di potenza trasmessa $P = VI$ elevare la tensione riduce la corrente e la potenza dissipata per effetto Joule, dato che la potenza dissipata è $P = RI^2$.

Il passaggio da MT della produzione ad AT per la trasmissione, da AT ad MT per la distribuzione e quindi a BT per l'utilizzo è fatto con trasformatori trifase.