

# Contents

<b>1 Introduzione</b>	<b>3</b>
1.1 La carica elettrica e la forza di Coulomb . . . . .	3
1.1.1 La cariche elettriche ed il loro moto . . . . .	3
1.2 Densità volumetrica di carica . . . . .	4
1.2.1 Densità di corrente $J$ . . . . .	4
1.3 Corrente elettrica . . . . .	5
1.4 Tensione elettrica e differenza di potenziale elettrico . . . . .	5
1.5 Legge di Ampere-Prima legge di Maxwell . . . . .	6
1.6 Legge dell'induzione di Faraday-Seconda legge di Maxwell . . . . .	6
1.7 Conservazione della carica elettrica . . . . .	7
1.8 Legge di Gauss . . . . .	7
1.9 Forza elettromotrice . . . . .	7
1.10 Leggi dell'Elettromagnetismo in forma integrale . . . . .	8
1.11 Leggi dell'Elettromagnetismo in forma locale . . . . .	8
1.12 Relazioni materiale . . . . .	8
1.13 SI Units . . . . .	10
1.13.1 Unità derivate SI . . . . .	10
1.13.2 Prefissi SI . . . . .	11
<b>2 Circuiti elettrici</b>	<b>11</b>
2.1 Introduzione . . . . .	11
2.1.1 Convenzione del generatore e dell'utilizzatore . . . . .	12
2.2 Risolvere un circuito . . . . .	12
2.2.1 Prima legge (LKT) . . . . .	12
2.2.2 Seconda legge (LKC) . . . . .	13
2.2.3 Teorema di Tellegen . . . . .	13
2.3 Elementi circuituali passivi . . . . .	13
2.3.1 Resistore . . . . .	14
2.3.2 Condensatore . . . . .	14
2.3.3 Induttore . . . . .	15
2.3.4 Dispositivi in serie e in parallelo . . . . .	16
2.4 Elementi circuituali attivi . . . . .	16
2.4.1 Generatore indipendente di tensione . . . . .	16
2.4.2 Generatore indipendente di corrente . . . . .	17
2.4.3 Generatori dipendenti . . . . .	18
2.5 Circuiti nel dettaglio . . . . .	18
2.5.1 Circuiti aperti e chiusi . . . . .	18
2.5.2 Esempio 1 . . . . .	19
2.5.3 Partitore di tensione . . . . .	19
2.5.4 Partitore di corrente . . . . .	20
2.5.5 Collegamenti di resistori a stella e a triangolo . . . . .	20
<b>3 Metodi di analisi</b>	<b>22</b>
3.1 Metodo di Tanenblau . . . . .	22
3.1.1 Esempio . . . . .	23
3.2 Metodo dei potenziali di nodo . . . . .	24
3.3 Esempio . . . . .	24
3.4 Teoremi di rete . . . . .	24
3.5 Sovrapposizione degli effetti . . . . .	25
3.5.1 Esempio . . . . .	25
3.5.2 Esempio 2 . . . . .	26
3.6 Teorema di Thevenin . . . . .	26
3.6.1 Esempio . . . . .	27
3.6.2 Esercizio . . . . .	28
3.7 Teorema di Norton . . . . .	29
3.7.1 Esempio . . . . .	29
3.8 Teorema del massimo trasferimento di potenza . . . . .	30

3.9	Teorema di Millman . . . . .	30
3.9.1	Esempio 1 . . . . .	31
3.9.2	Esempio 2 . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Analisi del transitorio</b>	<b>32</b>
4.1	Formule notevoli . . . . .	32
4.1.1	Condensatore . . . . .	32
4.1.2	Induttore . . . . .	32
4.2	Introduzione . . . . .	33
4.3	Il problema di Cauchy . . . . .	34
4.3.1	Principio di conservazione dell'energia . . . . .	34
4.4	Circuito del primo ordine: Circuito RC . . . . .	34
4.5	Circuito del primo ordine: Circuito RL . . . . .	37
4.6	Confronto tra circuito RC e circuito RL . . . . .	38
4.7	Circuiti del secondo ordine: Circuito RLC . . . . .	39
4.8	Esercizi in regime transitorio . . . . .	41
4.8.1	Esercizio 1: Circuito RC . . . . .	42
4.8.2	Esercizio 2: Circuito RL . . . . .	43
4.8.3	Esercizio 3: Circuito RLC complesso . . . . .	44
4.8.4	Esercizio 4: Circuito RLC complesso . . . . .	46
<b>5</b>	<b>Regime sinusoidale</b>	<b>48</b>
5.1	Introduzione . . . . .	48
5.1.1	Segnali periodici . . . . .	48
5.2	Sinusoide . . . . .	49
5.2.1	Potenza media dissipata da una resistenza . . . . .	49
5.2.2	Segnali isofrequenziali . . . . .	50
5.3	Fasori . . . . .	51
5.4	Trasformata di Steinmetz . . . . .	52
5.4.1	Operazioni sui numeri complessi . . . . .	53
5.5	Metodo simbolico . . . . .	54
5.5.1	Impedenza e ammettenza - Legge di Ohm simbolica . . . . .	54
5.5.2	Formule simboliche di resistore, induttore e condensatore . . . . .	56
5.5.3	Equazioni costitutive in forma simbolica . . . . .	56
5.5.4	Il metodo . . . . .	58
5.6	Potenza elettrica nel regime sinusoidale . . . . .	58
5.6.1	Potenza istantanea . . . . .	58
5.6.2	Potenza attiva . . . . .	59
5.6.3	Potenza reattiva . . . . .	59
5.6.4	Potenza complessa . . . . .	59
5.6.5	Formule notevoli . . . . .	60
5.6.6	Potenza apparente . . . . .	60
5.7	Esercizi . . . . .	60
5.7.1	Esercizio 1 . . . . .	60
5.7.2	Esercizio 2 . . . . .	62
5.7.3	Esercizio sulle potenze . . . . .	63
<b>6</b>	<b>Risposta in frequenza</b>	<b>64</b>

# Elettrotecnica

Giuseppe Bumma

August 11, 2023

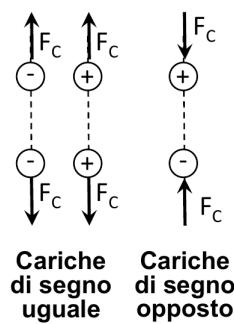
## 1 Introduzione

### 1.1 La carica elettrica e la forza di Coulomb

Se due particelle caricate, supposte puntiformi, di carica  $q_0$  e  $q_1$ , siano a una distanza finita fra loro nel vuoto, la **legge di Coulomb** descrive la forza elettrostatica interagente fra loro:

$$|F_C| \propto \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

con  $r$  distanza tra le due cariche.



La forza di Coulomb  $F_C$  è diretta nella direzione di  $r$ . Quando  $q_1$  e  $q_2$  hanno lo stesso segno la forza di Coulomb è repulsiva. Quando sono di segno opposto la forza è attrattiva.

L'unità di misura, nel Sistema Internazionale (SI), della forza di Coulomb è il newton [N] ed il coefficiente di proporzionalità è  $1/(4\pi\epsilon_0)$  dove  $\epsilon_0$  è la costante dielettrica del vuoto [ $\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} C^2/(Nm^2)$ ].

L'unità di misura della carica elettrica nel sistema di misura SI è il **coulomb** [C]. La carica elementare nel SI è  $e$  ove

$$e = 1,6021 \times 10^{-19} C$$

Protone ed elettrone hanno carica di valore assoluto  $e$ . Due protoni o due elettroni si respingono. Un protone ed un elettrone si attraggono. Per convenzione la carica del protone è positiva ( $+e$ ) e quella dell'elettrone negativa ( $-e$ ).

In natura esistono solamente cariche multiple di  $e$ . Non può esistere una carica sottomultiplo di  $e$ .

#### 1.1.1 La cariche elettriche ed il loro moto

Forza che agisce su una particella carica:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$$

$\vec{F}$  : forza [N]

$\vec{q}$  : carica elettrica [C]

$\vec{u}$  : velocità della carica [m/s]

$\vec{E}$  : campo elettrico

$\vec{B}$  : vettore induzione magnetica

- Se  $\vec{B} = 0$  si ha la cosiddetta **Forza elettrostatica**

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

Quindi il campo elettrico  $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$  è una forza per unità di carica [N/C].

Campo elettrico e forza elettrostatica da cui esso deriva hanno la stessa direzione. Perciò il campo produce un'accelerazione della carica lungo la propria direzione.

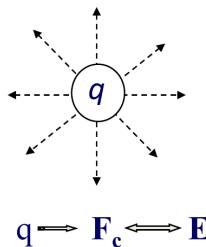
Nel SI l'unità di misura di  $\vec{E}$  è:  $N/C = V/m = m \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot C^{-1}$ .

- Se  $\vec{E} = 0$  si ha la **Forza di Lorentz**

$$\vec{F} = q(\vec{u} \times \vec{B})$$

Quindi il vettore induzione magnetica  $\vec{B}$  è una forza per unità di carica e di velocità [ $Ns/Cm$ ]. Campo elettrico e forza elettrostatica da cui esso deriva hanno la stessa direzione. Perciò il campo produce un'accelerazione della carica lungo la propria direzione. Nel SI l'unità di misura di  $\vec{E}$  è:  $N/C = V/m = m \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot C^{-1}$ .

Una particella carica induce una forza sulle cariche che la circondano. Tale forza può essere attrattiva o repulsiva. Essa è la forza Coulombiana  $F_C$  (o forza elettrostatica). In ogni punto della regione attorno alla carica o in presenza ad una distribuzione di cariche vi è un campo elettrico  $\vec{E}(x, y, z)$  definito dalla forza indotta su una carica di prova puntiforme unitaria posta nel punto considerato.



Qualora su una carica in moto si induca una forza deviante perpendicolare al moto, tale forza è la forza magnetica o forza di Lorentz  $F_L$ . Il campo di induzione magnetica  $\vec{B}(x, y, z)$ , legato a  $\vec{F}_L$ , è dato dalla forza indotta su una carica unitaria in moto per unità di velocità della carica stessa. La direzione del campo  $\vec{B}$  è perpendicolare alla velocità ed alla forza  $\vec{F}_L$ . Il campo  $\vec{B}$  è perpendicolare alla velocità della carica ed alla forza indotta.

## 1.2 Densità volumetrica di carica

La carica elettrica non può essere creata o distrutta (legge della conservazione della carica elettrica). Può solo essere trasferita. Pertanto, la carica elettrica totale di un sistema isolato non può variare.

La densità volumetrica di carica (o distribuzione di carica) è definita da:

$$\rho_C(x, y, z) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta \tau} = \frac{dt}{dq}$$

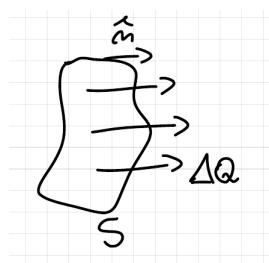
dove  $d\tau$  è l'elemento infinitesimo di volume.

### 1.2.1 Densità di corrente $J$

La densità di corrente elettrica  $\vec{J}$  è il vettore il cui modulo è la quantità di carica che attraversa una superficie unitaria perpendicolare alla velocità  $\vec{u}$  delle cariche. La direzione ed il verso di  $\vec{J}$  sono la direzione ed il verso di  $\vec{u}$ :

$$\vec{J} \cdot \hat{n} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S \Delta t}$$

$\vec{J}$ : densità di corrente  $[\frac{C}{m^2 \cdot s}] = [\frac{A}{m^2}]$



$\vec{J}(x, y, z)$  definisce un campo vettoriale ed è la densità di flusso delle cariche. La corrente elettrica  $i$  è il flusso di carica attraverso una superficie  $S$ :

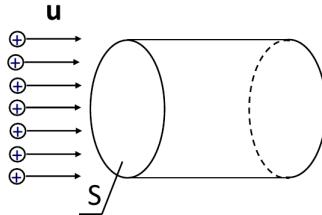
$$i = \iint_S \vec{J} \cdot \hat{n} \, dS$$

### 1.3 Corrente elettrica

La corrente elettrica  $i$  che attraversa una superficie è la quantità di carica che attraversa la superficie nell'unità di tempo:

$$i = \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

Se si considera un cavo conduttore, ad esempio, la corrente nel conduttore è la quantità di carica che attraversa una sezione del cavo nell'unità di tempo.



L'unità di misura SI è l'ampere [A] dove  $A = \frac{C}{s}$

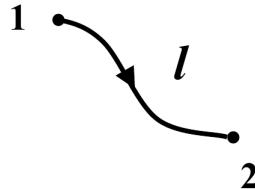
La **corrente elettrica istantanea** è:

$$i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$$

### 1.4 Tensione elettrica e differenza di potenziale elettrico

La **tensione elettrica**  $e_{12}$  fra i punti 1 e 2 lungo il percorso  $l$ , è il lavoro  $L_{q=1}^{1 \rightarrow 2, l}$  che il campo elettrico  $\vec{E}(x, y, z)$  compie per portare una carica unitaria dal punto 1 al punto 2 lungo  $l$ :

$$e_{12} = \int_{1,l}^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



Per spostare la carica  $q$  dal punto 1 al 2 il lavoro è:

$$L_q^{1 \rightarrow 2, l} = q \cdot e_{12}$$

L'unità di misura SI di  $e_{12}$  è il volt [V] dove  $V = \frac{J}{C} = m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot C^{-1}$ . Qualora la tensione  $e_{12}$  dipenda dai valori di una funzione  $v(x, y, z)$  definita in una regione che contiene la linea  $l$  essa diviene:

$$e_{12} = \int_{1,l}^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{1,l}^2 dv = v_1 - v_2 = v_{12}$$

dove  $v(x, y, z)$  è la **funzione potenziale elettrico** e  $v_{12}$  è la **differenza di potenziale elettrico**.

Poiché  $v_{12}$  è la differenza fra i valori che la funzione  $v(x, y, z)$  assume nel punto iniziale e nel punto finale di  $l$ ,  $v_{12}$  non dipende dal percorso che unisce i due punti. Quindi il campo  $\vec{E}$  è un **vettore conservativo**<sup>1</sup> con  $\vec{E} = \vec{\nabla} \cdot v(x, y, z)$ .

Per un percorso chiuso  $l_c$  contenuto nella regione ove  $\vec{E}$  è conservativo, si ha:

$$e_l = \oint_{l_c} \vec{E} \cdot d\vec{l}_c = - \oint_{l_c} \vec{\nabla} \cdot v \, d\vec{l}_c = 0$$

<sup>1</sup>un campo conservativo è un campo il cui integrale lineare è indipendente dalla traiettoria

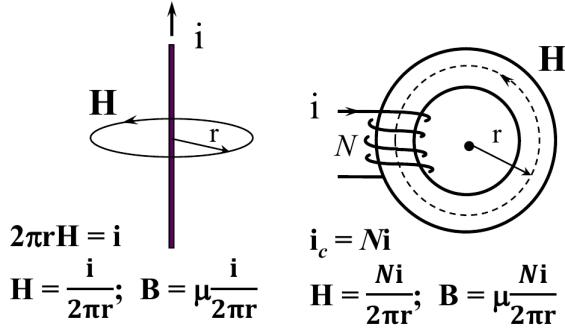
## 1.5 Legge di Ampere-Prima legge di Maxwell

La grandezza vettoriale campo magnetico  $\vec{H}$  è definito dalla legge di Ampere (prima legge di Maxwell)

$$\oint_{l_c} \vec{H} \cdot d\vec{l}_c = i_t$$

dove la corrente totale  $i_t = i + i_s$ .

In questo caso la corrente totale  $i_t$  è il flusso del vettore  $J_t$  in ovunque solenoidale ( $J_t = J + \partial D / \partial t$ ). Perciò  $i_t$  è il flusso concatenato con la linea chiusa  $l_C$  contorno della superficie che attraversa. Il verso di percorrenza di  $l$  è determinato con regola della vite destrogiara.



L'unità di misura SI di  $\vec{H}$  è l'ampere su metro [ $\frac{A}{m}$ ]. Per materiali lineari:  $\vec{B} = \mu \vec{H}$  ove  $\mu$  è la permeabilità magnetica del materiale. Per mezzi non lineari  $\vec{B} = f(\vec{H})$ . Solitamente per i materiali magnetici non lineari  $f$  è una funzione **isteretica** (materiali ferromagnetici).

$$\begin{aligned} \oint_{l_c} \vec{H} \cdot d\vec{l} &= \iint_S \left( \vec{J} + \frac{\partial D}{\partial t} \right) \hat{n} \, dS \\ &= \underbrace{\iint_S \vec{J} \cdot \hat{n} \, dS}_{\text{corrente di conduzione } I} + \underbrace{\iint_S \frac{\partial D}{\partial t} \cdot \hat{n} \, dS}_{\iint_S \partial D \cdot \hat{n} \, dS = \vec{\Phi}(D)} = \\ &= I + \underbrace{\frac{\partial \vec{\Phi}(D)}{\partial t}}_{\text{corrente di spostamento}} \end{aligned}$$

Immaginiamo di descrivere due superfici  $S_1$  e  $S_2$  sulla linea chiusa  $l_C$

$$\oint_{l_c} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_{S_1} \left( \vec{J} + \frac{\partial D}{\partial t} \right) \hat{n}_1 \, dS_1 = \iint_{S_2} \left( \vec{J} + \frac{\partial D}{\partial t} \right) \hat{n}_2 \, dS_2$$

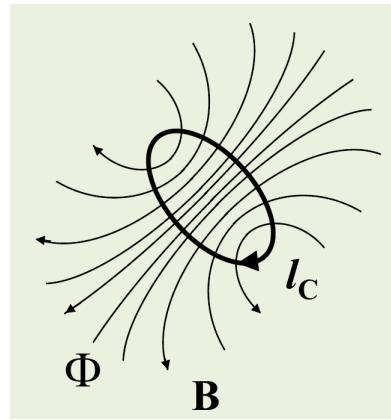
Prendiamo una superficie chiusa  $S_C$  su  $S_2$ , allora

$$\oint_{S_C} \underbrace{\left( \vec{J} + \frac{\partial D}{\partial t} \right)}_{\text{vettore solenoidale}} \cdot \hat{n}_C \, dS_C = \iint_{S_2} \left( \vec{J} + \frac{\partial D}{\partial t} \right) \hat{n}_2 \, dS_2 - \iint_{S_1} \left( \vec{J} + \frac{\partial D}{\partial t} \right) \hat{n}_1 \, dS_1 = 0$$

## 1.6 Legge dell'induzione di Faraday-Seconda legge di Maxwell

La legge dell'induzione (o legge di Faraday od anche seconda legge di Maxwell) stabilisce che:

$$e_{l_C} = \oint_{l_C} \vec{E} \cdot d\vec{l}_C = -\frac{d\Phi}{dt}$$

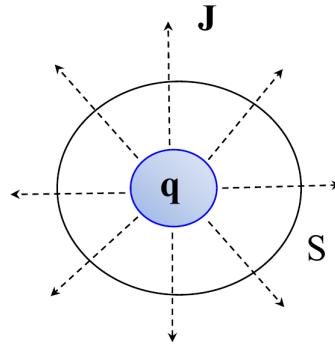


ove  $\Phi$  è il flusso magnetico concatenato con la linea chiusa  $l_c$ . (direzione di  $l_c$  data dalla regola della vite destrogiro).  $e_{l_c}$  è la tensione elettrica indotta sulla linea chiusa dalla variazione del flusso magnetico concatenato con  $l_c$ ; essa è detta **forza elettromotrice** (f.e.m.).

**N.B.** In questo caso  $\vec{E}$  non è conservativo.

## 1.7 Conservazione della carica elettrica

La carica elettrica non si crea né si distrugge. Perciò la diminuzione della carica elettrica all'interno di un volume  $\tau$  corrisponde alle cariche che lasciano  $\tau$  fluendo attraverso la superficie chiusa  $S$ , superficie esterna di  $\tau$ .



La **legge di conservazione della carica elettrica** afferma questo ed è espressa dall'espressione:

$$\oint_S \vec{J} \cdot \hat{n} dS = -\frac{dQ}{dt}$$

si ha variazione di cariche solo se c'è passaggio di corrente.

## 1.8 Legge di Gauss

Il campo di induzione elettrica o campo spostamento elettrico è definito dalla legge di Gauss. Considerando una superficie chiusa  $S$ , che delimita il volume  $V$ ; sia  $\hat{n}$  il versore normale alla superficie. La legge di Gauss afferma che:

$$\oint_S \vec{D} \cdot \hat{n} dS = \iiint_V \rho dV = Q$$

## 1.9 Forza elettromotrice

$\vec{E}$  e  $\vec{B}$  descrivono le forze prodotte dal fenomeno elettromagnetico sulle cariche (forza elettrica per unità di carica e forza magnetica per unità di carica e di velocità della carica). Esse descrivono ciò che viene prodotto dal fenomeno EM. Ne descrivono l'**effetto**.

$\vec{D}$  ed  $\vec{H}$  descrivono ciò che produce il fenomeno EM (la carica elettrica nel primo caso e la corrente totale nel secondo). Ne descrivono la **causa**.

## 1.10 Leggi dell'Elettromagnetismo in forma integrale

$\oint_{l_c} \vec{H} \cdot d\vec{l}_c = i_t$	1° legge di Maxwell
$\oint_{l_c} \vec{E} \cdot d\vec{l}_c = \frac{d\Phi}{dt}$	2° legge di Maxwell
$\oint \vec{J} \cdot \hat{n} dS = -\frac{dq}{dt}$	legge di conservazione della carica
$\oint \vec{D} \cdot \hat{n} dS = q$	legge di Gauss
$\oint \vec{J}_t \cdot \hat{n} dS = 0$	$\vec{J}_t$ ovunque solenoidale
$\text{t} \oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS = 0$	$\vec{B}$ ovunque solenoidale

Tre di queste sei equazioni sono linearmente indipendenti, le altre tre si ottengono dalle prime tre.

## 1.11 Leggi dell'Elettromagnetismo in forma locale

$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	1° legge di Maxwell (dal teorema di Stokes)
$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	2° legge di Maxwell (dal teorema di Stokes)
$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho_c}{\partial t}$	legge di conservazione della carica (teor. divergenza)
$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_c$	legge di Gauss (dal teorema della divergenza)
$\nabla \cdot \vec{J}_t = 0$	$\vec{J}_t$ ovunque solenoidale (dal teorema della divergenza)
$\nabla \cdot \vec{B} = 0$	$\vec{B}$ ovunque solenoidale (dal teorema della divergenza)

Tre di queste sei equazioni sono linearmente indipendenti, le altre tre si ottengono dalle prime tre.

## 1.12 Relazioni materiale

$\vec{E}$  e  $D$ ,  $\vec{B}$  ed  $\vec{H}$  descrivono i fenomeni dell'EM in modo diverso.  $\vec{E}$  e  $\vec{D}$  si riferiscono al fenomeno Elettrico,  $\vec{B}$  ed  $\vec{H}$  al fenomeno magnetico.  $\vec{D}$  ed  $\vec{H}$  descrivono i due fenomeni misurando ciò che li origina: la carica il primo, ed il moto della carica il secondo. Gli effetti misurati da  $\vec{E}$  e da  $\vec{B}$  sono in entrambe i casi le forze indotte. Essi dipendono da come i diversi materiali reagiscono. Inoltre, dipendentemente dalla proprietà del materiale, ad un certo valore del campo  $\vec{E}$  si induce un determinato moto di carica misurato da  $\vec{J}$ . Le relazioni fra queste descrizioni spesso sono lineari. A volte però non lo sono con relazioni anche di tipo isteretico.

Materiali lineari	Materiali non lineari
$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$	$\vec{D} = f_1(\vec{E})$
$\vec{B} = \mu \vec{H}$	$\vec{B} = f_2(\vec{H})$
$\vec{J} = \sigma \vec{E}$	$\vec{J} = f_3(\vec{E})$

con  $\epsilon$  costante dielettrica,  $\mu$  permeabilità magnetica e  $\sigma$  conducibilità termica.

la costante dielettrica (permittività elettrica)  $\epsilon$ , e la permeabilità magnetica  $\mu$  di un materiale sono espresse per mezzo dei loro valori relativi  $\epsilon_r$  ed  $\mu_r$  in riferimento al loro valore nel vuoto  $\epsilon_0$  ed  $\mu_0$ :

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$$

$$\text{dove } \epsilon_0 = 8,856 \times 10^{-12} \text{ Farad/metro} \left[ \frac{F}{m} \right]$$

$$\mu = \mu_r \mu_0$$

$$\text{dove } \mu_0 = 1,256 \times 10^{-6} \text{ Henry/metro} \left[ \frac{H}{m} \right]$$

Riporto alcuni valori di  $\epsilon_r$

	$\epsilon_r$
vuoto	1
aria	$\simeq 1$
plastica	2-5
vetro	4-8
acqua	80

Molto diverse sono le variazioni per materiali differenti della conducibilità elettrica, della permeabilità magnetica e della costante dielettrica. Per la conducibilità elettrica  $\sigma$  vi è una variazione anche di  $10^{23}$  (23 ordini di grandezza) fra materiali isolanti e materiali conduttori. Per la permeabilità magnetica  $\mu$  la variazione raggiunge al massimo un valore di circa  $10^5$  (5 ordini di grandezza). Per la costante dielettrica  $\epsilon$  la variazione massima si riduce ad un valore massimo di circa  $10^3$  (3 ordini di grandezza).

La relazione fra  $\vec{J}$  ed  $\vec{E}$  è anche definita dalla resistività elettrica  $\rho$ :

$$\vec{E} = \rho \vec{J}$$

dove  $\rho = \frac{1}{\sigma}$   $\sigma$  è in Siemens/metro  $[\frac{S}{M}]$  e  $\rho$  in Ohm/metro  $[\frac{\Omega}{m}]$ .

## 1.13 SI Units

### 1.13.1 Unità derivate SI

Grandezza	Simbolo (nome)	Unità SI non di base	Unità SI di base
Carica elettrica	$C$ (Coulomb)		$s \times A$
Tensione elettrica e differenza di potenziale elettrico	$V$ (Volt)	$\frac{W}{A}$	$m^2 \times kg \times s^{-3} \times A^{-1}$
Forza	$N$ (Newton)		$m \times kg \times s^{-2}$
Energia/Lavoro	$J$ (Joule)	$N \times m$	$m^2 \times kg \times s^{-2}$
Potenza	$W$ (Watt)	$\frac{J}{s}$	$m^2 \times kg \times s^{-3}$
Flusso magnetico	$Wb$ (Weber)	$V \times s$	$m^2 \times kg \times s - 2 \times A^{-1}$
Induzione magnetica	$T$ (Tesla)	$\frac{Wb}{m^2}$	$kg \times s^{-2} \times A^{-1}$
Resistenza elettrica	$\Omega$ (Ohm)	$\frac{V}{A}$	$m^2 \times kg \times s^{-3} \times A^{-2}$
Conduttanza elettrica	$S$ (Siemens)	$\frac{A}{V}$	$m^{-2} \times kg^{-1} \times s^3 \times A^2$
Capacità	$F$ (Farad)	$\frac{C}{V}$	$m^{-2} \times kg^{-1} \times s^4 \times A^2$
Induttanza	$H$ (Henry)	$\frac{Wb}{A}$	$m^2 \times kg \times s^{-2} \times A^{-2}$
Frequenza	$Hz$ (Hertz)		$s^{-1}$

### 1.13.2 Prefissi SI

Factor	Name	Symbol
$10^{-24}$	yocto	y
$10^{-21}$	zepto	z
$10^{-18}$	atto	a
$10^{-15}$	femto	f
$10^{-12}$	pico	p
$10^{-9}$	nano	n
$10^{-6}$	micro	$\mu$
$10^{-3}$	milli	m
$10^{-2}$	centi	c
$10^{-1}$	deci	d
$10^1$	deca	da
$10^2$	hecto	mh
$10^6$	mega	M
$10^9$	giga	G
$10^{12}$	tera	T
$10^{15}$	peta	P
$10^{18}$	exa	E
$10^{21}$	zetta	Z
$10^{24}$	yotta	Y

## 2 Circuiti elettrici

### 2.1 Introduzione

I circuiti elettrici sono degli elementi interconnessi tra loro e le connessioni possono essere considerate dei conduttori ideali.

**Ipotesi:**

- $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$  o  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$

- $L_c \ll \lambda$  (lunghezza d'onda)

Ricordiamo che  $\lambda = \frac{c}{f} = \left[ \frac{\text{velocità onda}}{\text{frequenza onda}} \right]$ .

**Esempio**

La rete elettrica ha frequenza  $f = 50\text{Hz}$

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{50} \simeq 6000\text{km}$$

infatti la linea di trasmissione della corrente elettrica è  $L_c = 10^3\text{km}$ .

Gli elementi del circuito vengono chiamati *multipoli*; di seguito si riporta la lista:

- Nodo: punto di intersezione tra 2 o più elementi;
- Maglia: linea chiusa all'interno del circuito;

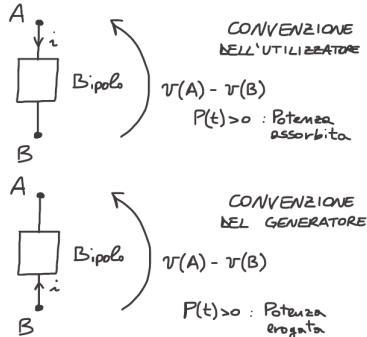
- Ramo: componenti insieme ai suoi morsetti

Le formule fondamentali per i circuiti sono:

$$\underbrace{P(t) = v(t) \cdot i(t)}_{\text{potenza}} \quad \underbrace{W(t) = \int P(t) dt}_{\text{energia}}$$

### 2.1.1 Convenzione del generatore e dell'utilizzatore

Per ogni circuito esistono due convenzioni per il verso della corrente



- negli utilizzatori tensione e corrente sono discordi
- nei generatori tensione e corrente sono concordi (si fa riferimento ai generatori di corrente e di tensione)

Ad esempio, nel caso di una batteria ricaricabile, se si utilizza la convenzione del generatore:

Scarica	$v = 1,5V$	$i = 1A$	$P = v \cdot i = 1,5W > 0$
Carica	$v = 1,5V$	$i = -1A$	$P = v \cdot i = -1,5W < 0$

mentre se si utilizza la convenzione dell'utilizzatore i segni di corrente e ,propedeuticamente, di potenza sono invertiti

Scarica	$v = 1,5V$	$i = -1A$	$P = v \cdot i = -1,5W < 0$
Carica	$v = 1,5V$	$i = 1A$	$P = v \cdot i = 1,5W > 0$

## 2.2 Risolvere un circuito

Risolvere un circuito vuol dire calcolare le tensioni e le correnti di tutti i componenti.

### 2.2.1 Prima legge (LKT)

Usando le **leggi di Kirchhoff** e le **leggi costitutive**

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = \iint_{H_p} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \hat{n} dS = 0$$

ne consegue che il campo elettrico è conservativo e dunque si può definire una differenza di potenziale.

$$\int_l \vec{E} d\vec{l} = v(A) - v(B) = v_{AB}$$

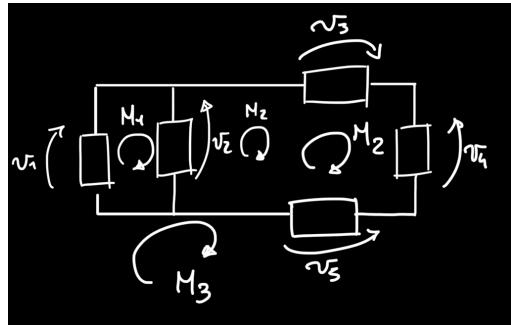
$$\begin{aligned} \underbrace{\oint \vec{E} d\vec{l}}_0 &= \int_A^B \vec{E} d\vec{l} + \int_B^C \vec{E} d\vec{l} + \int_C^A \vec{E} d\vec{l} \\ &= v_{BA} + v_{CB} + v_{AC} \\ &= 0 \end{aligned}$$

da qui la 1<sup>a</sup> legge di Kirchhoff per le tensioni:

$$\sum_{k=1}^n v_k = 0$$

nella singola maglia.

## Esempio



$$\begin{cases} M_1 : & v_1 - v_2 = 0 \\ M_2 : & v_2 + v_3 - v_4 - v_5 = 0 \\ M_3 : & v_1 + v_3 - v_4 - v_5 = 0 \end{cases}$$

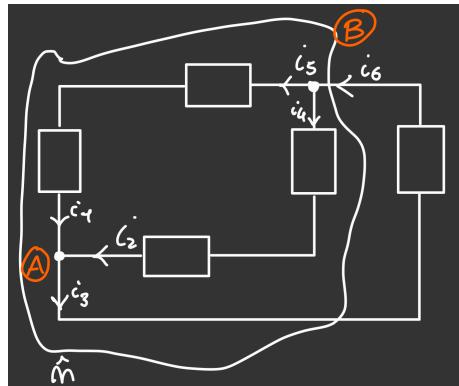
I versi delle differenze di potenziale sono date dal testo dell'esercizio, il verso di percorrenza della maglia è scelto arbitrariamente. Il segno positivo o negativo delle tensioni è determinato in base al verso di percorrenza (positivo se concorde, negativo se discorda).

### 2.2.2 Seconda legge (LKC)

$$\oint \oint \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \hat{n} dS = 0 \implies \oint \oint \vec{J} \hat{n} dS = 0$$

*“La somma delle correnti entranti ed uscenti da un componente è nulla (in un componente, entra ed esce la stessa quantità di corrente).”*

Prendiamo in esame il seguente circuito



Sapendo che il segno di ogni corrente è negativo se entra in un nodo e positivo se ne esce, non è difficile calcolare le correnti nei nodi A e B

$$A : -i_1 - i_2 + i_3 = 0$$

$$B : -i_5 - i_4 + i_3 = 0$$

### 2.2.3 Teorema di Tellegen

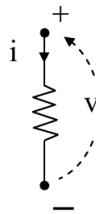
Combinando la LKT e la LKC su un circuito è possibile verificare che la somma delle potenze dei generatori è pari alla somma delle potenze degli utilizzatori.

$$\sum_{k=1}^{n^o \text{ generatori}} p_k = \sum_{j=1}^{n^o \text{ utilizzatori}} p_j$$

## 2.3 Elementi circuituali passivi

Gli elementi circuituali passivi sono elementi che (nel caso ideale) restituiscono la stessa energia che ricevono.

### 2.3.1 Resistore



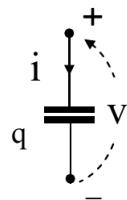
$$\underbrace{v(t) = R \cdot i(t)}_{1^a \text{ legge di Ohm}} \implies i(t) = \frac{1}{R} \cdot v(t)$$

$$\underbrace{R = \rho \cdot \frac{l}{S}}_{2^a \text{ legge di Ohm}} = \rho \cdot \frac{[\text{lunghezza filo}]}{[\text{sezione filo}]}$$

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = R \cdot i^2(t) > 0$$

Il resistore assorbe sempre potenza, non può erogarla.

### 2.3.2 Condensatore



$$i = C \cdot \frac{dv}{dt} \xrightarrow{i = \frac{dq}{dt}} \frac{dq}{dt} = C \cdot \frac{dv}{dt}$$

quindi  $Q = C \cdot V$ .

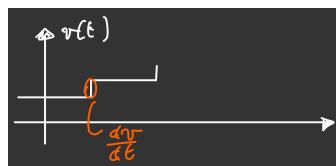
Un condensatore (ideale) è non dissipativo: eroga sempre la stessa quantità di potenza che ha assorbito.

$$\begin{aligned} \underbrace{w(t)}_{\text{energia}} &= \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} Cv \frac{dv}{dt} dt \\ &= C \int_{t_1}^{t_2} v dv \\ &= \frac{1}{2} C [v^2(t_2) - v^2(t_1)] \end{aligned}$$

quindi se consideriamo  $t_1 = 0$  e la tensione  $v$  calcolata in un istante finale  $t_f$

$$w(0, t_f) = \frac{1}{2} Cv^2$$

$v$  è la variabile di stato del condensatore.



in quel punto  $\frac{dv}{dt} = \infty \Rightarrow i(t) = \infty \Rightarrow p(t) = \infty$ , ma è impossibile avere potenza infinita, quindi non possiamo avere una variazione istantanea di tensione (il grafico della tensione di un condensatore non può avere discontinuità).

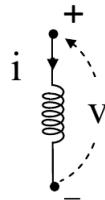
$$\begin{aligned} i(t) dt = C \cdot \frac{dv}{dt} &\Rightarrow \int_{-\infty}^t \underbrace{\frac{i(t)}{C} dt}_{v(t)} = \int_{-\infty}^t \frac{dv}{dt} dt \Rightarrow v(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{C} \cdot i(t) dt \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^0 \frac{1}{C} \cdot i(t) dt}_{v_0} + \int_0^t \frac{1}{C} \cdot i(t) dt \end{aligned}$$

A differenza del resistore, per conoscere la tensione non ho bisogno solo della corrente nell'istante corrente, ma anche della tensione iniziale; per questo il condensatore è un **elemento con memoria**.

Un **condensatore reale** è semplicemente un condensatore messo in parallelo con un resistore.

### 2.3.3 Induttore

L'induttore è un componente elettrico che genera un campo magnetico al passaggio di corrente elettrica.



$$v = L \frac{di}{dt}$$

Sappiamo che la corrente genera un flusso:

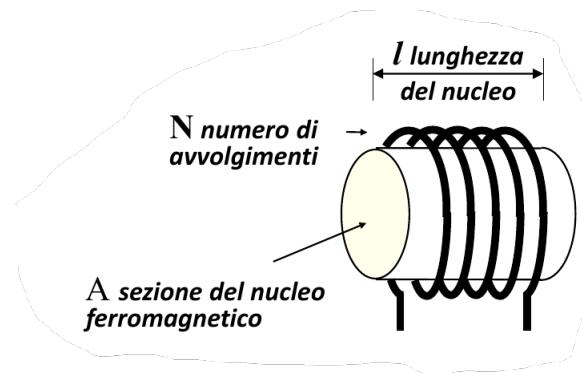
$$\underbrace{\Phi = L \cdot i}_{I^a \text{ equazione di Maxwell}} \quad v = \underbrace{\frac{d\Phi}{dt}}_{\text{legge di Faraday}} = L \frac{di}{dt}$$

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = L \cdot i(t) \frac{di}{dt} \begin{cases} > 0 & \text{assorbita} \\ < 0 & \text{erogata} \end{cases}$$

L'induttore è un elemento **non dissipativo**.

$$\begin{aligned} w(t) &= \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt \\ &= L \int_{t_1}^{t_2} i(t) \frac{di}{dt} dt \\ &= \frac{1}{2} L [i^2(t_2) - i^2(t_1)] \\ w(0, t_f) &= \frac{1}{2} L \cdot I_f^2 \end{aligned}$$

Anche per l'induttore le variazioni istantanee di tensione non sono possibili.



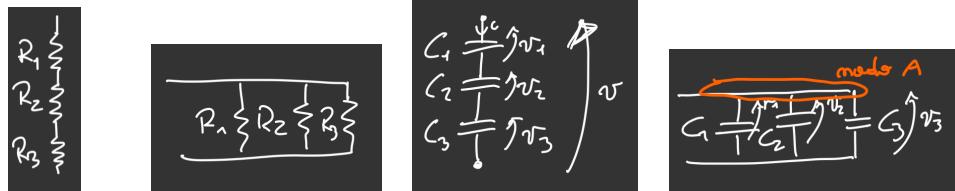
$$L = \frac{\mu N^2 A}{l}$$

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(t) dt \\ &= \underbrace{\frac{1}{L} \int_{-\infty}^0 v(t) dt}_{i_0} + \frac{1}{L} \int_0^t v(t) dt \end{aligned}$$

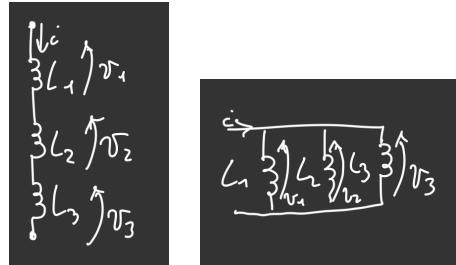
Si vede che anche l'induttore è un elemento **con memoria**.

Un induttore reale è un induttore in serie con un resistore.

#### 2.3.4 Dispositivi in serie e in parallelo



$$R_{eq} = \sum_{k=1}^n R_k \quad R_{eq} = \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k} \right)^{-1} \quad C_{eq} = \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k} \right)^{-1} \quad C_{eq} = \sum_{k=1}^n C_k$$

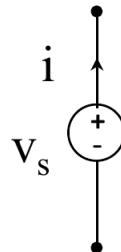


$$L_{eq} = \sum_{k=1}^n L_k \quad L_{eq} = \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k} \right)^{-1}$$

#### 2.4 Elementi circuituali attivi

Gli elementi attivi sono elementi che possono generare (e fornire) energia elettrica.

##### 2.4.1 Generatore indipendente di tensione

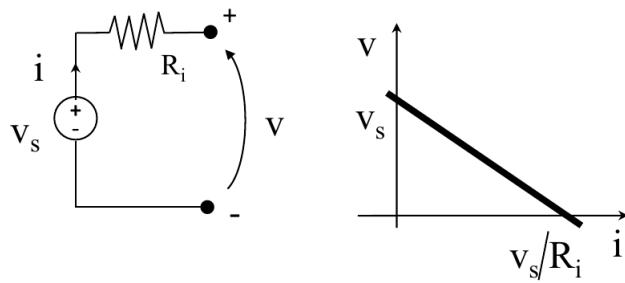


Il *generatore di tensione ideale* mantiene la tensione tra i suoi terminali indipendentemente dalla corrente che lo attraversa, quindi la tensione ai capi  $V$  è uguale alla tensione interna  $e$  (N.B. nel disegno la  $v_s$  è la tensione interna  $e$ ).

$$p(t) = V \cdot i = e \cdot i \begin{cases} > 0 & \text{eroga} \\ < 0 & \text{assorbe} \end{cases}$$

Essendo  $e$  fisso, la potenza dipende solo da  $i$  (variabile di stato).

Per simulare un generatore di tensione reale (ad es. una batteria) si considera un resistenza interna  $R_i$  in serie con il generatore ideale:



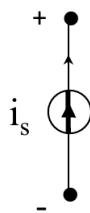
$$V = e - R \cdot i$$

In realtà nella formula della tensione di una batteria ci sono anche termini dipendenti da altri piccoli condensatori nella stessa.

Se si hanno più generatori di tensione **in serie**, la tensione totale è semplicemente la somma delle tensioni dei vari generatori. I generatori di tensione **non sono collegabili in parallelo**: se così fosse si avrebbero, nella stessa maglia, due differenti tensioni, ma questo non è possibile perché non viene soddisfatta la LKT.

In un generatore di tensione reale, nel caso in cui la resistenza  $R \rightarrow \infty \Rightarrow i = \frac{V}{R} = 0$ , mentre se  $R \rightarrow 0 \Rightarrow i = \frac{V}{R} = \infty$ .

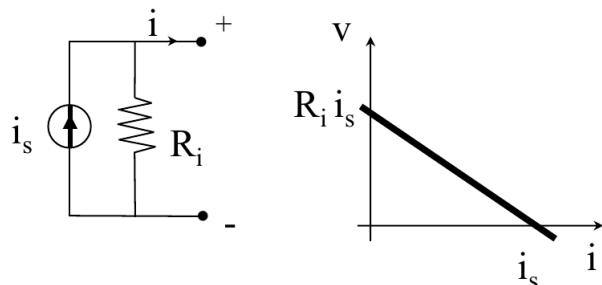
#### 2.4.2 Generatore indipendente di corrente



Il *generatore di corrente ideale* mantiene la corrente che lo attraversa al valore  $A$  indipendentemente dalla differenza di potenziale fra i suoi terminali (N.B. nel disegno la  $i_s$  è la corrente interna  $A$ ).

$$p(t) = V \cdot i = V \cdot A \begin{cases} > 0 & \text{eroga} \\ < 0 & \text{assorbe} \end{cases}$$

Un imprecisa approssimazione di un generatore di corrente reale è un pannello fotovoltaico, dotato di resistenza interna in parallelo con il generatore ideale



$$i = A - \frac{v}{R}$$

### 2.4.3 Generatori dipendenti

Gli elementi attivi visti prima possono essere "controllati" in tensione o in corrente.

Il **generatore dipendente di tensione** è controllato in tensione  $V = v_c \cdot \mu$ , o in corrente  $V = r \cdot i_c$ .

Il **generatore dipendente di corrente** è controllato in tensione  $i = g \cdot v_c$ , o in corrente  $i = \alpha \cdot i_c$ .

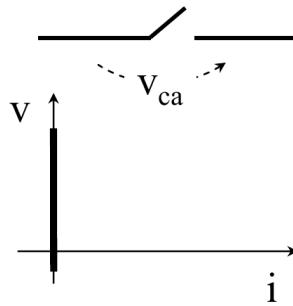
## 2.5 Circuiti nel dettaglio

### 2.5.1 Circuiti aperti e chiusi

Un ramo in circuito aperto si può considerare nei due seguenti modi:

- Un generatore di corrente con:  $A = 0$
- Un resistore con:  $R = +\infty$

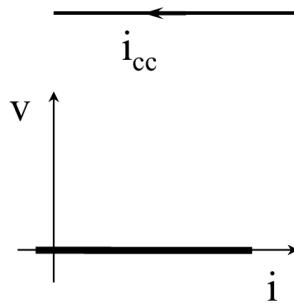
L'equazione dell'elemento circuitale è  $i = 0, \forall v$ .

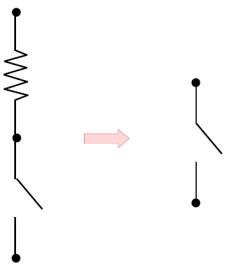


Un ramo in circuito chiuso si può considerare nei due seguenti modi:

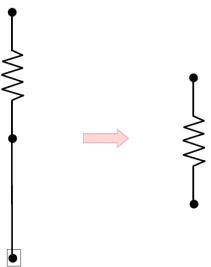
- Un generatore di tensione con:  $e = 0$
- Un resistore con:  $R = 0$

L'equazione dell'elemento circuitale è  $v = 0, \forall i$ .



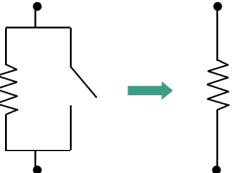


*Resistori in serie con uno in circuito aperto*

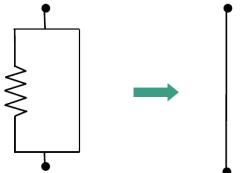


*Resistori in serie con uno in circuito chiuso*

$$R_{eq} = n R$$



*Resistori in parallelo con uno in circuito aperto*

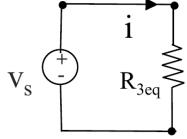
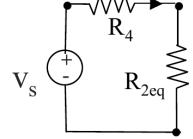
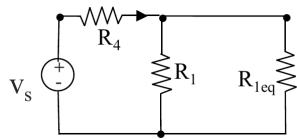
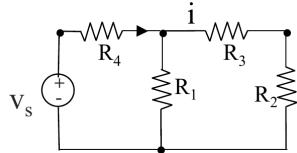


*Resistori in parallelo con uno in circuito chiuso*

$$R_{eq} = R/n$$

*n resistori in parallelo con ugual resistenza R*

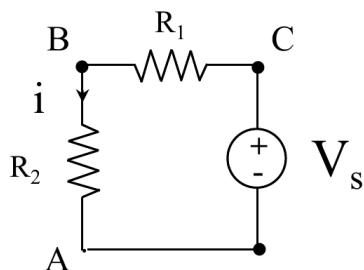
## 2.5.2 Esempio 1



$$R_{1eq} = R_2 + R_3 \quad R_{2eq} = \frac{R_1 R_{1eq}}{R_1 + R_{1eq}} = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_{1eq}} \right)^{-1} \quad R_{3eq} = R_4 + R_{2eq}$$

## 2.5.3 Partitore di tensione

Un partitore di tensione è un tipo di circuito costituito da due o più componenti passivi collegati in serie ai capi dei quali, se viene applicata una tensione, essa si ripartirà sulle stesse componenti in base al loro valore. La legge generale si ottiene moltiplicando il valore della tensione applicata alla serie per il rapporto tra la resistenza ai capi della quale si vuole conoscere la tensione e la somma delle resistenze componenti la serie.



$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

$$i = \frac{V_s}{R_{eq}} = \frac{V_s}{R_1 + R_2}$$

Dalla LKT si ha

$$v_1 + v_2 - V_s = 0 \implies$$

sostituisco  $i$

$$v_1 = V_s - v_2 = V_s - R_2 i$$

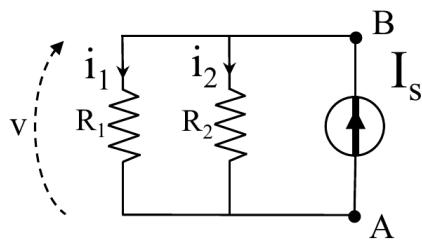
$$v_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_s$$

$$v_2 = V_s - v_1 = V_s - R_1 i$$

$$v_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_s$$

#### 2.5.4 Partitore di corrente

Il partitore di corrente è un circuito utilizzato per ottenere la corrente elettrica che scorre attraverso un'impedenza o attraverso un circuito quando esso viene connesso in parallelo con un'altra impedenza. La differenza sostanziale con il partitore di tensione è che in questo caso, nella formula, al denominatore della frazione va la resistenza che non si sta considerando.



$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

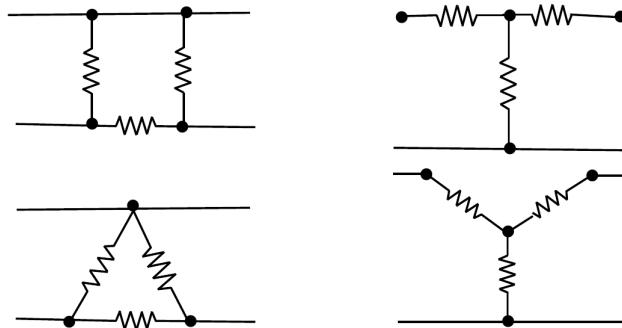
$$v = R_{eq} I_s = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} I_s$$

Dalla LKC si ha

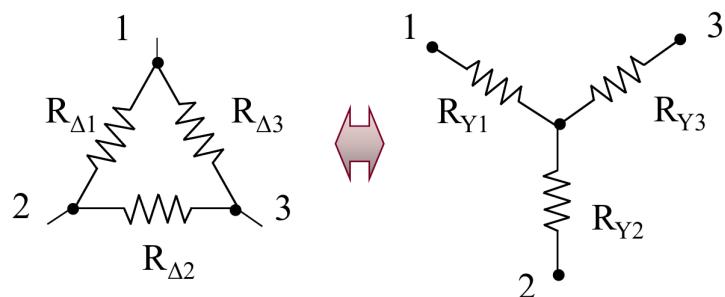
$$\begin{aligned} i_1 + i_2 - I_s &= 0 \implies i_1 = I_s - i_2 = I_s - \frac{v}{R_2} \\ &\stackrel{\text{sostituisco } v}{\implies} i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I_s \quad i_2 = I_s - i_1 = I_s - \frac{v}{R_1} \\ &\quad i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I_s \end{aligned}$$

#### 2.5.5 Collegamenti di resistori a stella e a triangolo

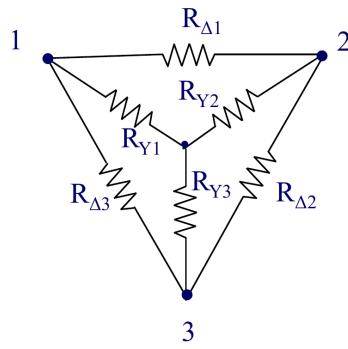
Un sistema di tre resistenze può essere collegato a triangolo o a stella. Può essere meglio per l'analisi circuitale una connessione a stella invece che un triangolo o viceversa. Da sottolineare che una rete a stella può essere equivalente ad una rete a triangolo.



**Colleg. a triangolo   Colleg. a stella**



Ciò significa che le stesse tensioni  $v_{12}$ ,  $v_{23}$  e  $v_{31}$  tra i nodi 1 e 2, i nodi 2 e 3 e i nodi 3 e 1 inducono le stesse correnti entranti nella stella e nel triangolo rispettivamente al nodo 1, al nodo 2 ed al nodo 3. Ora vediamo come passare da stella a triangolo e viceversa.



Ogni resistenza della stella è il prodotto dei due resistori del triangolo collegati allo stesso nodo, diviso per la somma dei resistori a triangolo.

$$R_{Y1} = \frac{R_{\Delta 1} R_{\Delta 3}}{R_{\Delta 1} + R_{\Delta 2} + R_{\Delta 3}} \quad R_{Y2} = \frac{R_{\Delta 1} R_{\Delta 2}}{R_{\Delta 1} + R_{\Delta 2} + R_{\Delta 3}} \quad R_{Y3} = \frac{R_{\Delta 2} R_{\Delta 3}}{R_{\Delta 1} + R_{\Delta 2} + R_{\Delta 3}}$$

Ogni resistenza del triangolo è la somma dei prodotti a due a due di tutti i resistori della stella, divisa per la resistenza nel ramo opposto della stella.

$$R_{\Delta 1} = \frac{R_{Y1} R_{Y2} + R_{Y2} R_{Y3} + R_{Y3} R_{Y1}}{R_{Y3}} \quad R_{\Delta 2} = \frac{R_{Y1} R_{Y2} + R_{Y2} R_{Y3} + R_{Y3} R_{Y1}}{R_{Y1}} \quad R_{\Delta 3} = \frac{R_{Y1} R_{Y2} + R_{Y2} R_{Y3} + R_{Y3} R_{Y1}}{R_{Y2}}$$

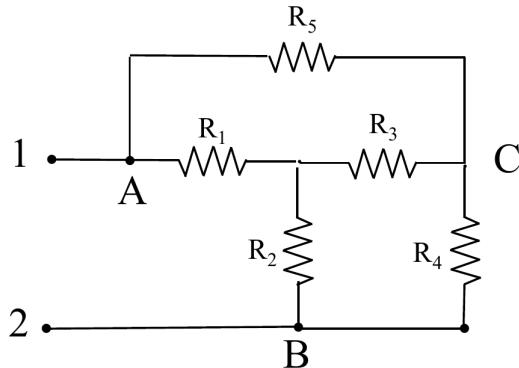
Per  $R_{Y1} = R_{Y2} = R_{Y3} = R_Y$  risulta  $R_{\Delta 1} = R_{\Delta 2} = R_{\Delta 3} = R_\Delta$  e viceversa:

$$R_Y = R_\Delta / 3$$

$$R_\Delta = 3R_Y$$

## Esempio 2

Determinare la resistenza equivalente del seguente circuito



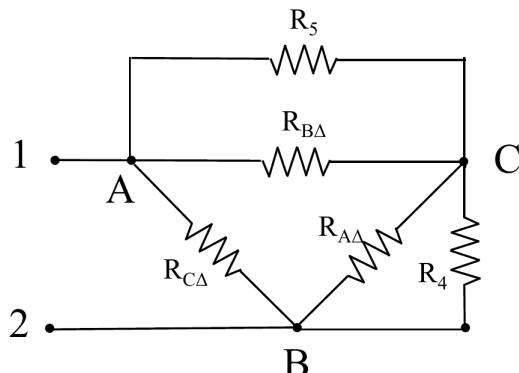
$$R_1 = 3\Omega$$

$$R_4 = 2\Omega$$

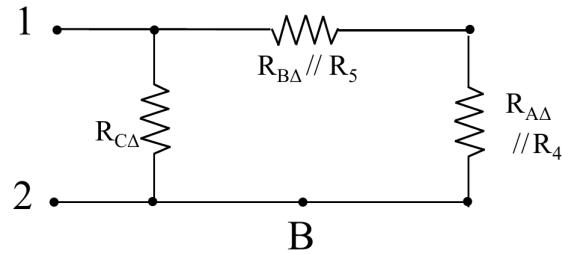
$$R_2 = 3\Omega$$

$$R_5 = 2\Omega$$

$$R_3 = 3\Omega$$

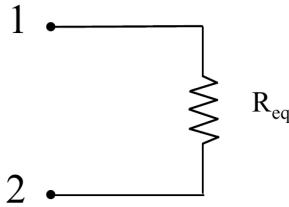


$$R_{A\Delta} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_1} = 9\Omega \quad R_{B\Delta} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_2} = 9\Omega \quad R_{c\Delta} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_3} = 9\Omega$$



$$R_{B\Delta//R_5} = \frac{R_{B\Delta} R_5}{R_{B\Delta} + R_5} = 1,6364\Omega$$

$$R_{A\Delta//R_4} = \frac{R_{A\Delta} R_4}{R_{A\Delta} + R_4} = 1,6364\Omega$$

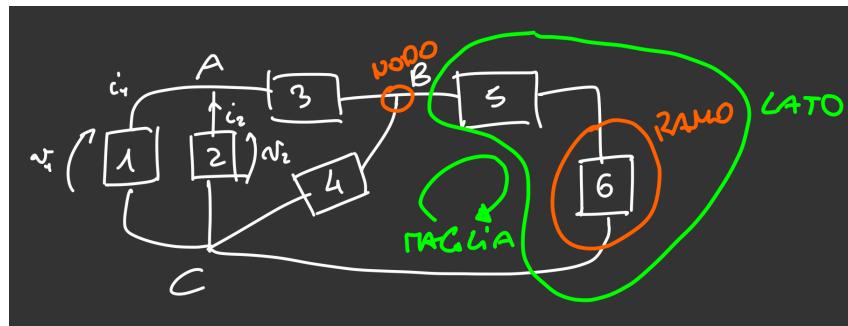


$$R_{eq} = R_{C\Delta} // (R_{B\Delta} // R_5 + R_{A\Delta} // R_4) = (9) // (3,272) = 2,41\Omega$$

### 3 Metodi di analisi

#### 3.1 Metodo di Tanenblau

Prendiamo un circuito di riferimento

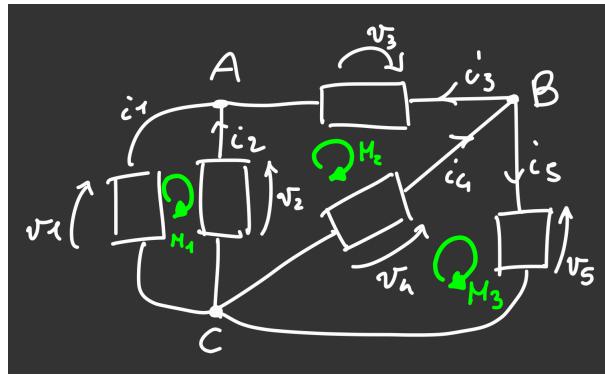


Definiamo

- Nodo: intersezione tra 3 o più fili
- Ramo: Parte di circuito compresa tra due nodi
- Maglia: qualsiasi percorso chiuso del circuito
- Lato: connessione in successione di più rami

Possiamo riformulare la definizione di risoluzione di un circuito: calcolare tutte le tensioni di lato e tutte le correnti di lato. Quindi se  $L$  è il numero di lati, avremo  $L$  tensioni e  $L$  correnti in un circuito; in totale si hanno  $2L$  incognite, che necessitano di  $2L$  equazioni indipendenti.

Possiamo scrivere  $L$  equazioni costitutive dei componenti, le altre  $L$  equazioni di ricavano da LKC e LKT.



$$\begin{aligned} A(LKC) : i_1 + i_3 - i_2 &= 0 \\ B(LKC) : i_4 - i_3 - i_5 &= 0 \end{aligned} \quad + = -i_2 = i_5 + i_1 + i_4$$

$$C(LKC) : i_2 + i_5 - i_1 - i_4 = 0$$

La somma delle prime due equazioni è uguale alle terza con segni invertiti, quindi le tre equazioni non sono indipendenti, solo due di esse lo sono.

Le equazioni che servono per risolvere un circuito sono:

- $L$  equazioni costitutive
- $N - 1$  LKC
- $L - N + 1$  LKT (maglie non intersecate da rami)

Infatti per il circuito avremo

$$M_1 : v_1 - v_2 = 0$$

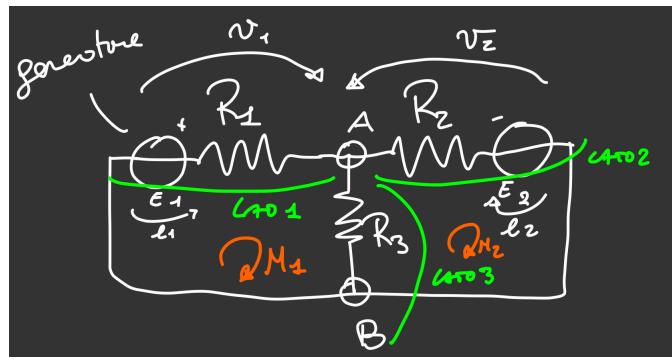
$$M_2 : v_4 - v_5 = 0$$

$$M_3 : v_2 + v_3 - v_4 = 0$$

## Passaggi

1. individuare  $N$  nodi e  $L$  lati
2. individuare  $2L$  incognite ( $v, i$ )
3. scrivere le  $L$  equazioni di lato
4. scrivere le  $N - 1$  LKC e  $L - N + 1$  LKT
5. Risolvere il sistema di equazioni

### 3.1.1 Esempio



Equazioni di lato	Equazioni topologiche
Lato 1: $\begin{cases} e_1 = E_1 \\ v_{R_1} = R_1 \cdot i_1 \end{cases}$	LKC(A): $i_1 + i_2 - i_3 = 0$
Lato 2: $\begin{cases} e_2 = E_2 \\ v_{R_2} = R_2 \cdot i_2 \end{cases}$	LKT( $M_1$ ): $v_1 - v_3 = 0$
Lato 3: $v_{R_3} = R_3 \cdot i_3$	LKT( $M_2$ ): $v_3 - v_2 = 0$

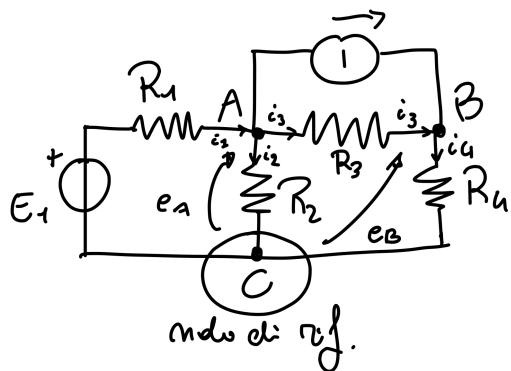
Ora effettuiamo la sostituzione:

$$\begin{cases} v_1 - v_3 = E_1 - R_1 i_1 - R_3 i_3 = 0 \\ v_3 - v_2 = R_3 i_3 - E_2 + R_2 i_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_1 + i_2 - i_3 = 0 \\ R_1 i_1 + R_3 i_3 = E_1 \\ R_2 i_2 + R_3 i_3 = E_2 \end{cases}$$

### 3.2 Metodo dei potenziali di nodo

1. scegliere un nodo di riferimento
2. assegniamo le tensioni agli altri nodi
3. LKC ai nodi non di riferimento
4. scrivere le correnti in funzione dei potenziali di nodo
5. risolvere infine il sistema di equazioni

### 3.3 Esempio



Sceglieremo come nodo di riferimento il nodo C

$$\text{LKC(A): } i_1 - i_2 - I - i_3 = 0$$

$$\text{LKC(B): } i_3 + I - i_4 = 0$$

$$i_1 = \frac{E_1 - e_A}{R_1}$$

$$i_2 = \frac{e_A}{R_2}$$

$$i_3 = \frac{e_A - e_B}{R_3}$$

### 3.4 Teoremi di rete

#### Ipotesi di linearità

$f(x_1 + x_2)$  è lineare

additività:  $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

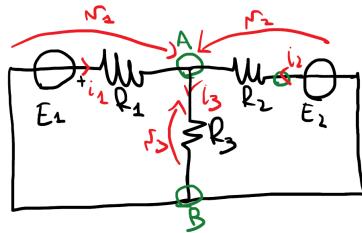
omogeneità:  $f(ax_1) = af(x_1)$

### 3.5 Sovrapposizione degli effetti

Ipotesi: circuito lineare.

Le variabili di rete (effetti) si possono ottenere come sovrapposizione delle risposte dovute alle singole cause.

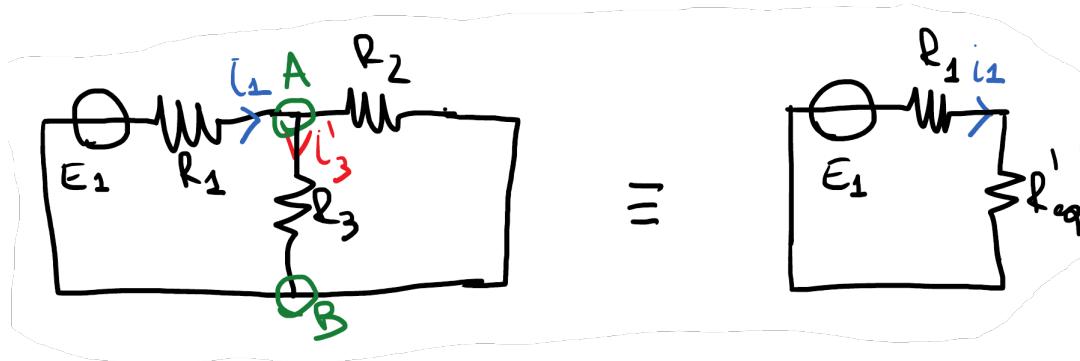
#### 3.5.1 Esempio



Calcoliamo  $i_3$ .

Bisogna considerare una causa alla volta, quindi passivare alcuni generatori: passivando un generatore di tensione si ottiene un corto-circuito (quindi il circuito è chiuso), mentre se si passiva un generatore di corrente il circuito risultante è aperto. Per calcolare  $v_3$  utilizzeremo la formula del partitore di tensione.

Causa  $E_1$



$$i'_3 = i_1 \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3} = \frac{E_1}{R_1 + R'_{eq}} \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3}$$

$$i_1 = \frac{E_1}{R_1 + R'_{eq}}$$

$$R'_{eq} = R_2 // R_3 = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}$$

Calcoli alternativi (più esplicativi):

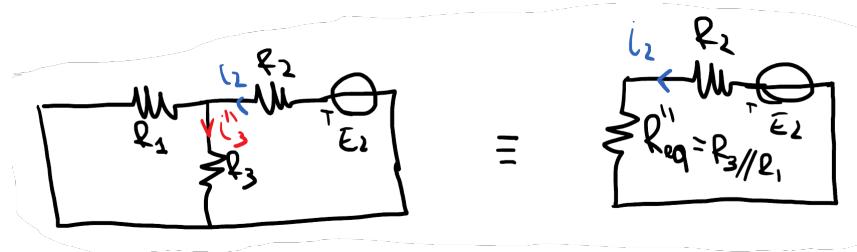
$$i_1 = \frac{E_1}{R_1 + R'_{eq}}$$

$$v_3 = \frac{R'_{eq}}{R_1 + R'_{eq}} \cdot E_1 = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} \cdot \frac{E_1}{R_1 + R'_{eq}} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} \cdot i_1$$

$$R'_{eq} = R_2 // R_3 = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}$$

$$i'_3 = \frac{v_3}{R_3} = \frac{R_2}{R_2 + R_3} \cdot i_1$$

Causa  $E_2$



$$i_2 = \frac{E_2}{R_2 + R'_{eq}}$$

$$i''_3 = i_2 \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_3}$$

Calcoli alternativi (più esplicativi):

$$i_2 = \frac{E_2}{R_2 + R''_{eq}}$$

$$R''_{eq} = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3}$$

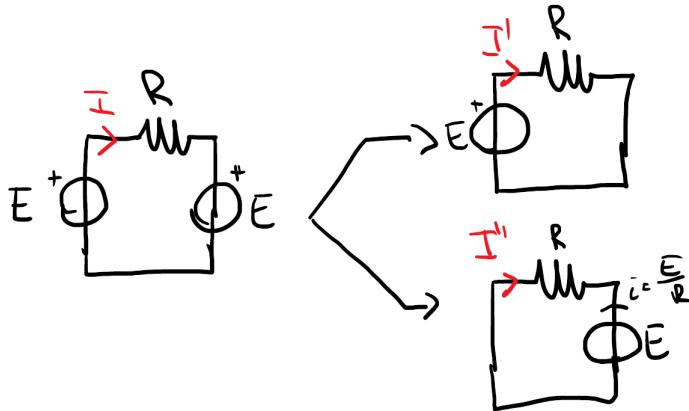
$$v_3 = \frac{R''_{eq}}{R_2 + R''_{eq}} \cdot E_2 = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3} \cdot \frac{E_2}{R_2 + R''_{eq}} = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3} \cdot i_2$$

$$i''_3 = \frac{v_3}{R_3} = \frac{R_1}{R_1 + R_3} \cdot i_2$$

Ora possiamo calcolare  $i_3$ :

$$i_3 = i'_3 + i''_3$$

### 3.5.2 Esempio 2



$$I' = \frac{E}{R}$$

$$I'' = -\frac{E}{R}$$

$$I = I' + I'' = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} = 0$$

$$P = RI^2 = 0$$

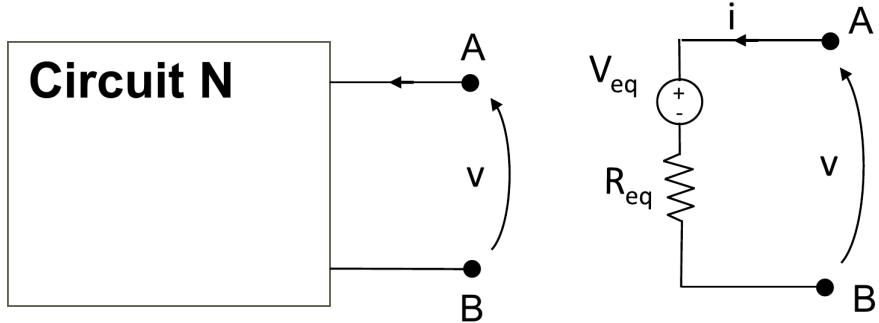
$$\begin{aligned} P &= P' + P'' \\ &= R(I')^2 + R(I'')^2 \\ &= R\left(\frac{E}{R}\right)^2 + R\left(-\frac{E}{R}\right)^2 \\ &= R\frac{E^2}{R^2} + R\frac{E^2}{R^2} \neq 0 \end{aligned}$$

### 3.6 Teorema di Thevenin

In un circuito lineare tempo-indipendente è messa in evidenza una porta. Il circuito N visto dalla porta, è equivalente ad un circuito formato dalla serie di un generatore indipendente di tensione ed un resistore. La tensione del generatore è data dalla tensione a vuoto della porta AB del circuito N. Il resistore è il resistore equivalente di N visto dalla porta AB quando tutti i generatori indipendenti interni al circuito N sono spenti.

Ipotesi:

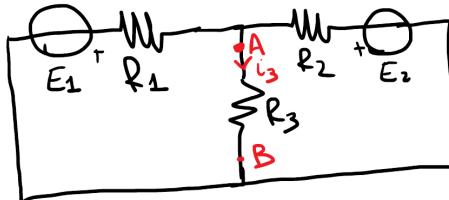
- circuito lineare
- il carico non è accoppiato con la rete da semplificare



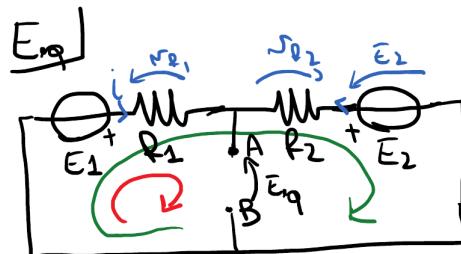
$E_{eq}$  è la tensione vista ai morsetti A e B a circuito aperto.

$R_{eq}$  è la resistenza equivalente vista da A e B passivando i generatori indipendenti.

### 3.6.1 Esempio



Applichiamo il teorema di Thevenin ai morsetti A e B:



Utilizzando l'LKT sulla maglia più grande:

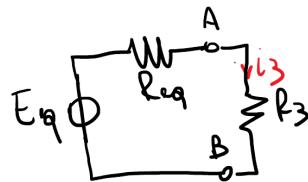
$$\begin{aligned}
 E_1 - v_{R_1} + v_{R_2} - E_2 &= 0 \Rightarrow E_1 - R_1 i - R_2 i - E_2 = 0 \\
 &\Rightarrow E_1 - E_2 = R_1 i + R_2 i \\
 &\Rightarrow E_1 - E_2 = (R_1 + R_2) i \\
 \Rightarrow i &= \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2}
 \end{aligned}$$

mentre l'LKT sulla maglia più piccola a sinistra:

$$\begin{aligned}
 E_1 - R_1 i - E_{eq} &= 0 \xrightarrow[i = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2}]{} E_{eq} = E_1 - R_1 \cdot \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2} \\
 &= \frac{E_1 R_1 + E_1 R_2 - R_1 E_1 + R_1 E_2}{R_1 + R_2} \\
 &= \frac{E_1 R_2 + E_2 R_1}{R_1 + R_2}
 \end{aligned}$$



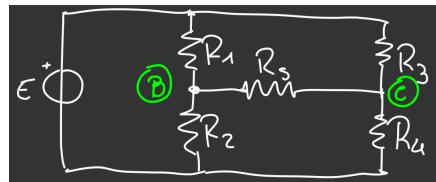
$$R_{eq} = R_1 // R_2 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$



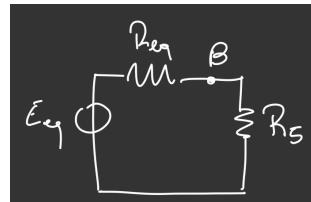
$$i_3 = \frac{E_{eq}}{R_3 + R_{eq}} = \frac{E_1 R_2 + E_2 R_1}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{R_3 + R_{eq}}$$

### 3.6.2 Esercizio

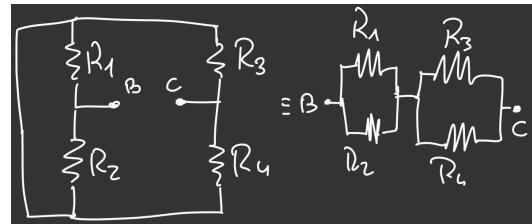
Si consideri il seguente circuito:



Vogliamo calcolare la corrente nella resistenza  $R_5$ ; utilizzando il teorema di Thevenin otteniamo il circuito

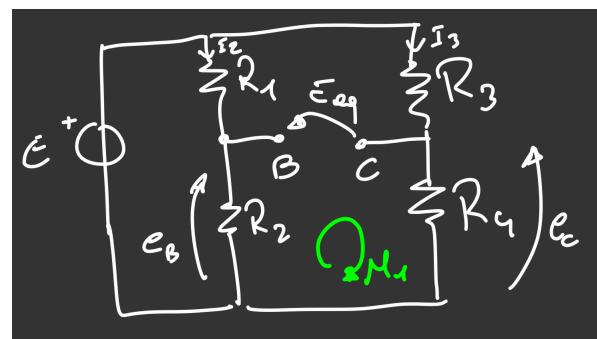


e il circuito della  $R_{eq}$  è il seguente



Da notare che le resistenze  $R_1$  e  $R_2$  (come anche  $R_3$  e  $R_4$ ) sono in serie viste da B e C, cosa non vera nel circuito ottenuto corto-circuitando la resistenza  $R_5$ .

$$R_{eq} = (R_1 + R_2) // (R_3 + R_4)$$

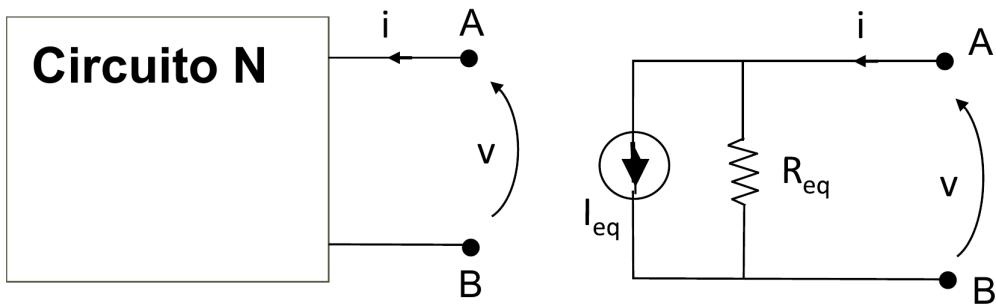


Per calcolare  $E_{eq}$  consideriamo la maglia  $M_1$  nel circuito ottenuto corto-circuitando la resistenza  $R_5$ ; è evidente che  $e_B$  è concorde a essa, mentre  $e_C$  è discorde, quindi (chiamando la tensione del circuito aperto  $E_{CA}$ )

$$\begin{aligned} M_1 : e_B - E_{CA} - e_C &= 0 \implies E_{CA} = e_B - e_C \\ &= R_2 I_2 - R_4 I_3 \\ &= R_2 \frac{E}{R_1 + R_2} - R_4 \frac{E}{R_3 + R_4} = E_{eq} \\ I_5 &= \frac{E_{eq}}{R_{eq} + R_5} \end{aligned}$$

### 3.7 Teorema di Norton

In un circuito N lineare tempo-indipendente è messa in evidenza una porta. Visto dalla porta il circuito è equivalente ad un circuito formato dal parallelo di un generatore indipendente di corrente ed un resistore. La corrente del generatore è data dalla corrente di cortocircuito della porta AB del circuito N. Il resistore è il resistore equivalente di N visto dalla porta AB quando tutti i generatori indipendenti interni al circuito N sono spenti.



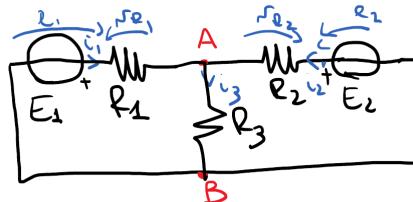
Ipotesi:

- circuito lineare
- il carico non è accoppiato con la rete da semplificare

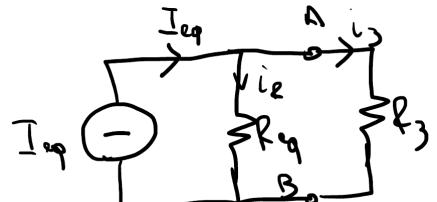
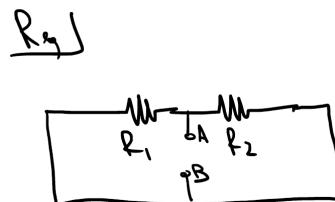
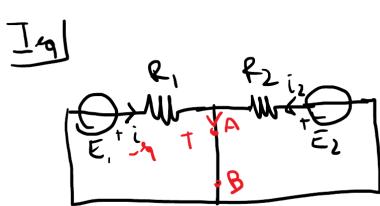
$I_{eq}$  è la corrente tra A e B quando vi è un corto-circuito.

$R_{eq}$  è resistenza vista ai morsetti A e B passivando i generatori indipendenti.

#### 3.7.1 Esempio



Vogliamo calcolare  $i_3$ . Quindi applichiamo il teorema di Norton, utilizzando la formula del partitore di corrente per calcolare  $i_3$ :



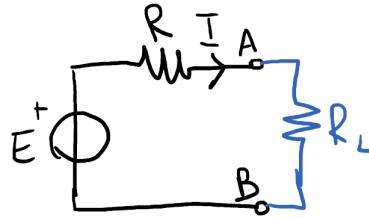
$$I_{eq} = i_1 + i_2 = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}$$

$$R_{eq} = R_1 // R_2 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

$$i_3 = I_{eq} \cdot \frac{R_{eq}}{R_{eq} + R_3}$$

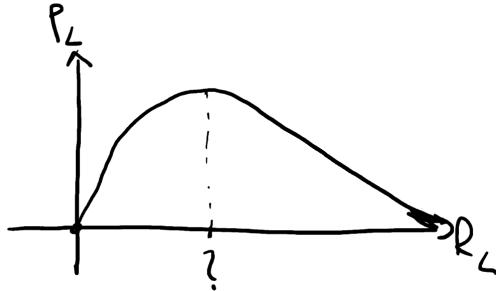
### 3.8 Teorema del massimo trasferimento di potenza

Consideriamo il seguente circuito



Qual è il valore di  $R_L$  che massimizza il trasferimento di potenza? Proviamo a calcolarlo.

$$\begin{aligned} P_L &= I \cdot V_L \\ &= R_L \cdot I^2 \\ &= R_L \left( \frac{E}{R + R_L} \right)^2 \begin{cases} R_L = 0 \Rightarrow P_L = 0 \\ R_L \rightarrow \infty \Rightarrow P_L = 0 \text{ (circuito aperto)} \end{cases} \end{aligned}$$



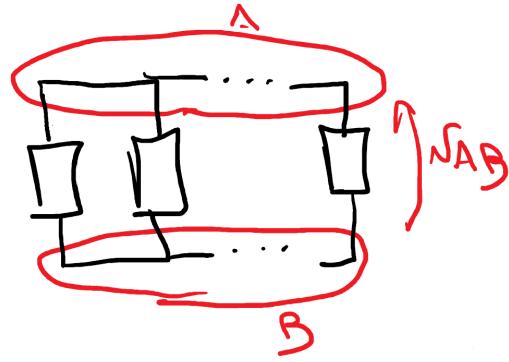
Per trovare il massimo poniamo la derivata della potenza a 0; sapendo che  $P_L = E^2 \frac{R_L}{(R + R_L)^2}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_L}{\partial R_L} &= 0 \Rightarrow E^2 \frac{(R + R_L)^2 - 2R_L(R + R_L)}{(R + R_L)^4} = 0 \\ &\Rightarrow R^2 + R_L^2 + 2RR_L - 2RR_L - 2R_L^2 = 0 \\ &\Rightarrow R = R_L \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{L,Max} &= R \frac{E^2}{(R + R)^2} \\ &= R \frac{E^2}{4R^2} \\ &= \frac{E^2}{4R} \end{aligned}$$

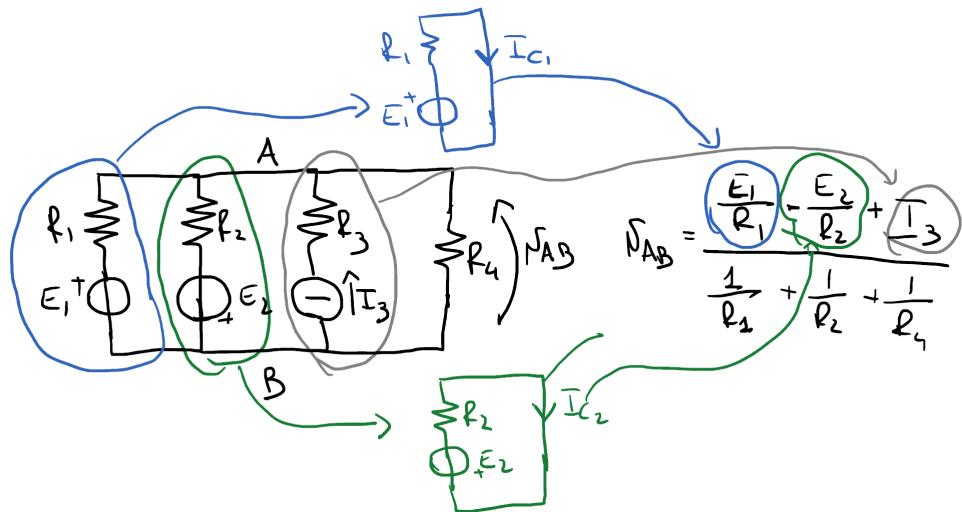
### 3.9 Teorema di Millman

Data una rete con due o più lati in parallelo, la tensione ai capi della rete è pari al rapporto delle correnti di corto-circuito di ogni singolo lato e la sommatoria delle conduttanze di ogni lato.



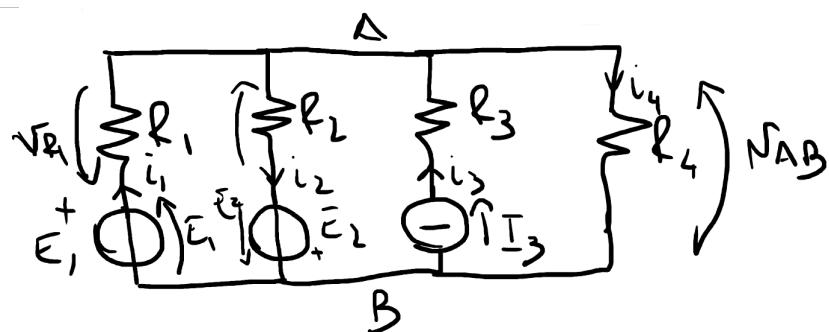
$$v_{AB} = \frac{\sum_k \frac{v_k}{R_k} + \sum_j i_j}{\sum_n \frac{1}{R_n}}$$

### 3.9.1 Esempio 1



$$v_{AB} = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + I_3}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

Dimostriamo che questa formula è vera utilizzando il metodo dei potenziali di nodo (applicato al nodo B):



$$v_{AB} = E_1 - R_1 i_1 \Rightarrow i_1 = \frac{E_1 - v_{AB}}{R_1} \quad (1)$$

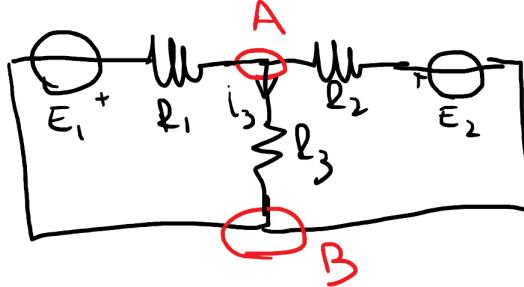
$$v_{AB} = -E_2 + R_2 i_2 \Rightarrow i_2 = \frac{E_2 + v_{AB}}{R_2} \quad (2)$$

$$i_3 = I_3 \quad (3)$$

$$i_4 = \frac{v_{AB}}{R_4} \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
\text{LKC: } i_1 - i_2 + i_3 - i_4 = 0 &\Rightarrow \frac{E_1 - v_{AB}}{R_1} - \frac{E_2 + v_{AB}}{R_2} + I_3 - \frac{v_{AB}}{R_4} = 0 \\
&\Rightarrow \frac{E_1}{R_1} - \frac{v_{AB}}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} - \frac{v_{AB}}{R_2} + I_3 - \frac{v_{AB}}{R_4} = 0 \\
&\Rightarrow v_{AB} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) = \frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} + I_3 \\
&\Rightarrow v_{AB} = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + I_3}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}
\end{aligned}$$

### 3.9.2 Esempio 2



Calcoliamo  $i_3$ :

$$v_{AB} = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} \Rightarrow i_3 = \frac{v_{AB}}{R_3}$$

## 4 Analisi del transitorio

### 4.1 Formule notevoli

#### 4.1.1 Condensatore

**Condensatore lineare**

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \quad C = \mathcal{E} \cdot \frac{S}{d}$$

dove  $C$  è la capacità in farad,  $\mathcal{E}$  la permittività elettrica assoluta dell'isolante in farad su metro,  $S$  la superficie delle due armature in metri quadrati e  $d$  la distanza fra le armature in metri.

**Energia immagazzinata**

$$dW = V \ dq = \frac{q}{C} \ dq \quad U = \frac{1}{2} CV^2$$

L'energia immagazzinata da un condensatore è uguale al lavoro  $W$ ;  $U$  è l'energia potenziale.

**Equazione caratteristica**

$$v(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau + v(t_0) \quad i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C \frac{dv(t)}{dt}$$

#### 4.1.2 Induttore

**Energia**

$$W = \frac{1}{2} LI^2$$

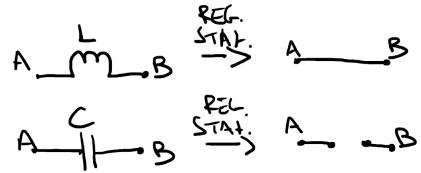
**Equazione differenziale**

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

**Campo magnetico prodotto da un solenoide**

$$B = \mu \frac{N}{l} I$$

Una cosa importantissima da tenere a mente sono i circuiti equivalenti di conduttore e induttore in regime stazionario:



## 4.2 Introduzione

Fin'ora abbiamo usato delle sorgenti costanti, quindi abbiamo fatto esercizi con circuiti DC (circuiti con corrente continua). Consideriamo ora invece la variabile tempo; i nostri circuiti subiranno delle variazioni:

- avremo generatori variabili nel tempo
- si possono presentare dei guasti nel circuito
- il circuito sarà dotato di un interruttore:
  - se aperto  $i = 0 \Rightarrow$  circuito aperto
  - se chiuso  $v = 0 \Rightarrow$  cortocircuito

Per il **resistore**  $v = R \cdot i$ , vi è un legame istantaneo, viene chiamato legame **adinamico** (senza memoria).

Per **induttori e condensatori** il legame è integro-differenziale, viene chiamato legame **dinamico** (con memoria).

Induttore

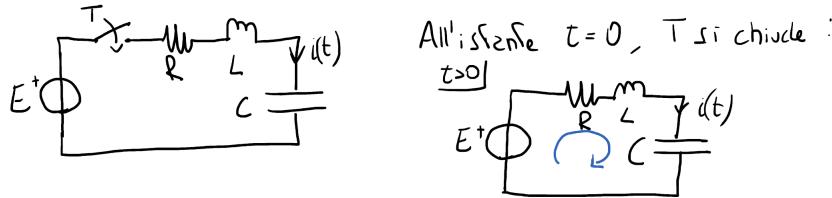
$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} L \cdot I^2$$

Condensatore

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} C \cdot V^2$$

Per l'induttore la variabile di stato è la corrente, mentre per il condensatore la variabile di stato è la tensione.

Ovviamente valgono ancora le formule LKC, LKT e le equazioni costitutive.



$$\text{LKT: } \begin{cases} E - v_R - v_L - v_C = 0 \\ v_R = Ri \\ v_L = L \frac{di}{dt} \\ i = C \frac{v_L}{dt} \Rightarrow v_C = \frac{1}{C} \int i \, dt \\ E = Ri - L \frac{di}{dt} - \frac{1}{C} \int i \, dt = 0 \end{cases}$$

Ecco che dobbiamo risolvere un'equazione differenziale.

Per i circuiti lineari, quindi con equazioni differenziali ordinarie (ODE) a coefficienti costanti, utilizzeremo il metodo di Cauchy. La soluzione finale sarà la somma di due contributi:

- la soluzione dell'omogenea associata  $o(t)$
- la soluzione particolare  $p(t)$

## 4.3 Il problema di Cauchy

In generale la soluzione sarà un'espressione di questo tipo

$$a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = b(t)$$

- $b(t)$  è il termine noto
- $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  sono i coefficienti costanti
- $x(t)$  è l'incognita

La condizione iniziale del problema di Cauchy è  $x(t=0) = X_0$ ; rappresenta lo stato energetico del sistema prima che si inneschi il transitorio. Per risolvere il problema di Cauchy non solo serve sapere quest'ultimo, ma anche le variabili di stato prima che si inneschi il transitorio.

L'integrale particolare  $p(t)$  ha la stessa evoluzione di  $b(t)$ ; ad esempio se  $b(t)$  è costante allora anche  $p(t)$  è costante ( $b(t)$  dipende solo dai generatori).

L'integrale dell'omogenea associata  $o(t)$  è la soluzione dell'ODE quando il termine noto è nullo, cioè si passivano i generatori. Esso rappresenta l'**evoluzione libera**:

$$a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = 0$$

il **polinomio associato** all'integrale dell'omogenea è

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \underset{\text{soluzioni}}{\implies} \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$$

$$o(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + k_n e^{\lambda_n t} \quad \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n < 0$$

**Costante di tempo:**

$$\tau_n = -\frac{1}{\lambda_n} [s]$$

### 4.3.1 Principio di conservazione dell'energia

Al fine di inibire variazioni istantanee dell'energia immagazzinata, nei condensatori la variazione istantanea della tensione è nulla e negli induttori la variazione istantanea della corrente è nulla. L'energia immagazzinata da un elemento non può variare bruscamente

Induttore

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} L \cdot I^2$$

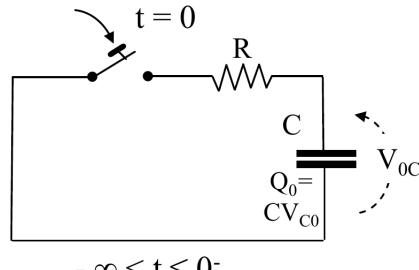
Nell'induttore variazioni istantanee di  $i$  non sono possibili

Condensatore

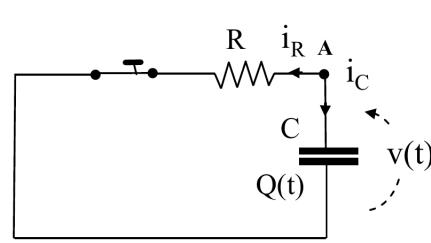
$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} C \cdot V^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

Nel condensatore variazioni istantanee di  $V$  e  $Q$  non sono possibili

## 4.4 Circuito del primo ordine: Circuito RC



$-\infty < t \leq 0^-$



$0^+ \leq t < +\infty$

$$\text{LKT: } \begin{cases} E - v_R - v_C = 0 \\ v_R = R \cdot i \\ i = C \frac{dv_C}{dt} \end{cases} \implies E - RC \frac{dv_C}{dt} - v_C = 0$$

$$\implies \frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{RC} = \frac{E}{RC}$$

Perveniamo a una equazione differenziale del primo ordine. Per risolverla dobbiamo trovare la soluzione dell'omogenea associata e la soluzione particolare.

### 1. Soluzione dell'omogenea associata

$$\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{RC} = 0$$

il polinomio associato è

$$\lambda + \frac{1}{RC} = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{RC}$$

quindi la soluzione è

$$o(t) = Ae^{-t/RC}$$

$\frac{t}{RC}$  è detto numero puro, e la costante di tempo è  $\tau = RC$ . Si può pervenire alla soluzione dell'omogenea associata anche in un altro modo: riprendiamo l'omogenea associata e poniamo sotto integrale ambo i membri:

$$\begin{aligned} \frac{dv_C}{dt} = -\frac{v_C}{RC} &\Rightarrow \int \frac{dv_C}{dt} = -\int \frac{v_C}{RC} \\ &\Rightarrow \ln(v_C) + k_1 = -\frac{t}{RC} + k_2 \\ &\Rightarrow \ln(v_C) = -\frac{t}{RC} + \underbrace{(k_2 - k_1)}_{k_3} \\ &\Rightarrow v_C = e^{-t/RC + k_3} \\ &\Rightarrow v_C = e^{-t/RC} \underbrace{e^{k_3}}_A \\ &\Rightarrow v_C = Ae^{-t/RC} \end{aligned}$$

### 2. Soluzione particolare

Siccome  $p(t)$  si comporta come  $b(t)$  e  $b(t) = \frac{E}{RC}$  (una costante), allora  $p(t)$  sarà una costante

$$\cancel{\frac{dp(t)}{dt}} + \frac{p(t)}{RC} = \frac{E}{RC} \Rightarrow p(t) = E$$

3.

$$v_C = o(t) + p(t) = Ae^{-t/RC} + E$$

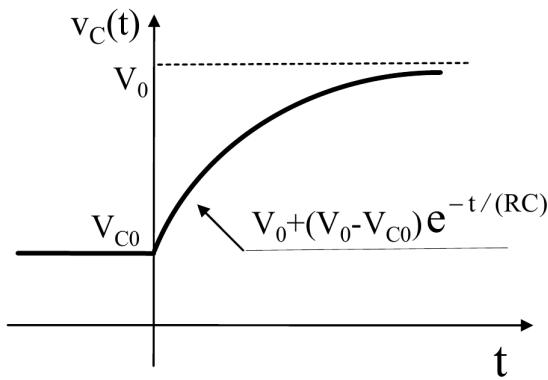
4. Consideriamo la condizione iniziale

$$\begin{aligned} v_C(t=0^-) = V_{C0} & \qquad v_C(t=0^+) = Ae^{-0/RC} + E = V_{C0} \\ & \Rightarrow A + E = V_{C0} \\ & \Rightarrow A = V_{C0} - E \end{aligned}$$

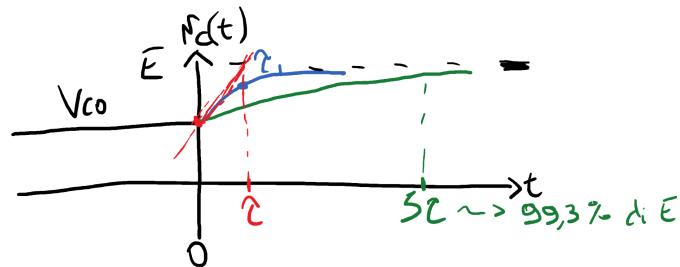
5.

$$v_C(t) = \underbrace{(V_{C0} - E)e^{-t/RC}}_{\text{Risposta transitoria}} + \underbrace{E}_{\substack{\text{Risposta} \\ \text{a regime}}} = \underbrace{V_{C0} \cdot e^{-t/RC}}_{\text{Evoluzione libera}} + \underbrace{E(1 - e^{-t/RC})}_{\text{Risposta formata}}$$

Ricordiamo che  $\tau = -\frac{1}{\lambda}$ , quindi in questo caso  $\tau = RC$

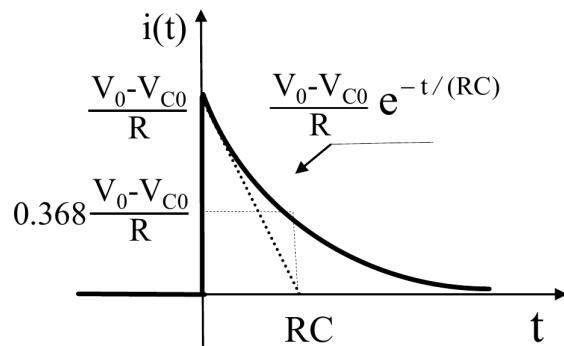


N.B. nel grafico la  $V_0$  è  $E$ .



Dal grafico si può facilmente vedere che  $\tau_1 < \tau_2$ , quindi la tensione è continua.

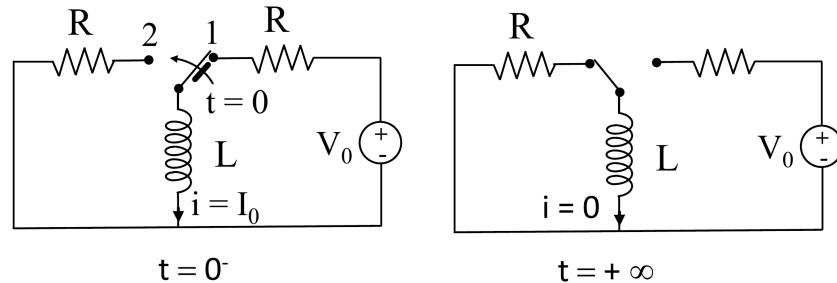
$$e^{-t/\tau} \begin{cases} \text{Analiticamente è 0 con } t \rightarrow \infty \\ \text{Praticamente: } e^{-5\tau/\tau} = e^{-5} = \frac{1}{e^5} = 0,0067 \end{cases}$$



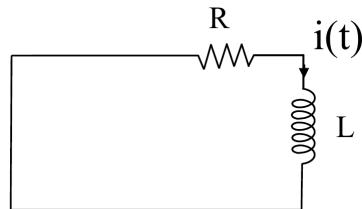
$$\begin{aligned} i(t) &= C \frac{dv_C}{dt} \\ &= C \frac{d}{dt} \left[ (V_{C0} - E) e^{-t/RC} + E \right] \\ &= \cancel{C} - \left( \frac{1}{RC} \right) (V_{C0} - E) e^{-t/RC} \\ \Rightarrow i(t) &= \frac{E - V_{C0}}{R} e^{-t/RC} \end{aligned}$$

Dal grafico è evidente che la corrente non varia con continuità.

## 4.5 Circuito del primo ordine: Circuito RL



L'obiettivo è determinare la risposta naturale del circuito RL (che si ha alla chiusura del derivatore da 1 a 2). Il circuito risultante è il seguente:



$$\text{LKT : } \begin{cases} E - v_R - v_L = 0 \\ v_R = R \cdot i \\ v_L = L \frac{di}{dt} \end{cases} \Rightarrow E - R \cdot i - L \frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{E}{L}$$

Siamo arrivati a una equazione differenziale del primo ordine.

### 1. Soluzione dell'omogenea associata

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = 0$$

il polinomio associato è

$$\lambda + \frac{R}{L} = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{R}{L}$$

quindi la soluzione è

$$o(t) = A e^{\lambda t} = A e^{-\frac{R}{L} t}$$

$\frac{t}{RC}$  è il numero puro, e la costante di tempo è  $\tau = \frac{L}{R}$ .

### 2. Soluzione particolare

Siccome  $p(t)$  si comporta come  $b(t)$  e  $b(t) = \frac{E}{RC}$  (una costante), allora  $p(t)$  sarà una costante

$$\cancel{\frac{dp(t)}{dt}} + \frac{R}{L} p = \frac{E}{L} \Rightarrow p(t) = \frac{E}{R}$$

3.

$$i(t) = o(t) + p(t) = A e^{-\frac{R}{L} t} + \frac{E}{R}$$

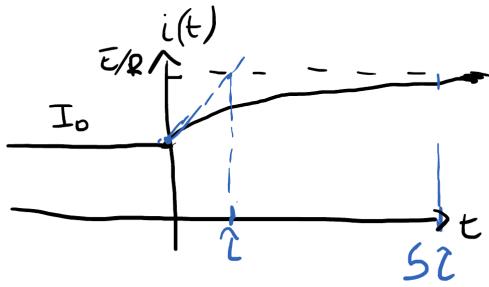
4. Consideriamo le condizioni iniziali

$$\begin{aligned} i(t = 0^-) &= I_0 \\ i(0) &= A e^{-\frac{R}{L} 0} + \frac{E}{R} = I_0 \\ \Rightarrow A &= I_0 - \frac{E}{R} \end{aligned}$$

$$i(t = 0^+) = I_0$$

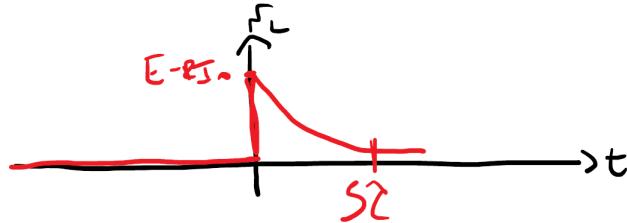
5.

$$i(t) = \underbrace{\left( I_0 - \frac{E}{R} \right) e^{-\frac{R}{L}t}}_{\text{Risposta transitoria}} + \underbrace{\frac{E}{R}}_{\text{Risposta a regime}} = \underbrace{I_0 \cdot e^{-\frac{R}{L}t}}_{\text{Evoluzione libera}} + \underbrace{\frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})}_{\text{Risposta formata}}$$



La corrente varia con continuità.

$$\begin{aligned} v_L &= L \frac{di}{dt} \\ &= L \frac{d}{dt} \left[ \left( I_0 - \frac{E}{R} \right) e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R} \right] \\ &= L \left( -\frac{R}{L} \right) \left( I_0 - \frac{E}{R} \right) e^{-\frac{R}{L}t} \\ \Rightarrow v_L &= (E - RI_0) e^{-\frac{R}{L}t} \end{aligned}$$



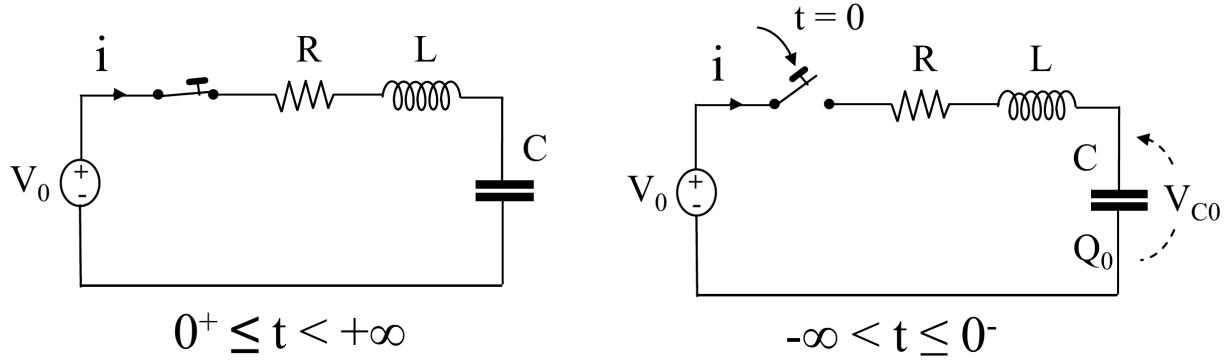
La tensione non varia con continuità.

#### 4.6 Confronto tra circuito RC e circuito RL

RC	RL
$\frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{RC} = \frac{E}{RC}$	$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}$
$\frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{\tau} = \frac{E}{RC}$	$\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = \frac{E}{L}$
$\frac{dx(t)}{dt} + \frac{x(t)}{\tau} = X_F$	
$x(t) = o(t) + p(t) = \underbrace{X_n(t)}_{\text{Evoluzione libera}} + X_F$	
$\begin{cases} x(t) = \underbrace{ke^{-t/\tau}}_{\text{Transitorio}} + \underbrace{X_\infty}_{\text{Regime}} \\ x(t=0^-) = x(t=0^+) = X_0 \end{cases}$	

$$\begin{aligned} x(0) &= k + X_\infty = X_0 \\ \Rightarrow k &= X_0 - X_\infty \\ \Rightarrow x(t) &= (X_0 - X_\infty) e^{-t/\tau} + X_\infty \end{aligned}$$

## 4.7 Circuiti del secondo ordine: Circuito RLC



$$\begin{aligned} \text{LKT: } & \begin{cases} E - v_R - v_L - v_C = 0 \\ v_R = Ri \\ v_L = L \frac{di}{dt} \\ v_C = \frac{1}{C} \int i(\tau) d\tau \end{cases} \\ & \Rightarrow E - Ri - L \frac{di}{dt} - \frac{1}{C} \int i(\tau) d\tau = 0 \\ & \stackrel{\substack{\text{derviamo} \\ \text{in } dt}}{=} R \frac{di}{dt} + L \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{C} i = 0 \\ & \Rightarrow \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0 \end{aligned}$$

Siamo arrivati a un'equazione differenziale del secondo ordine.

**Soluzione dell'omogenea associata**

$$i(t) = A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t}$$

il polinomio associato è

$$\lambda^2 + \frac{R}{L} \lambda + \frac{1}{LC} = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$\begin{aligned} \frac{R}{2L} &= \alpha: \text{coefficiente di smorzamento} \\ \frac{1}{LC} &= \omega_0^2: \text{pulsazione di risonanza} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \\ \Rightarrow \Delta &= \alpha^2 - \omega_0^2 \begin{cases} > 0 \rightarrow \text{soluzioni reali distinte} \\ = 0 \rightarrow \text{soluzioni reali coincidenti} \\ < 0 \rightarrow \text{soluzioni complesse coniugate} \end{cases} \end{aligned}$$

- $\Delta > 0$

$$\alpha^2 > \omega_0^2 \Rightarrow \alpha > \omega_0$$

$$i(t) = A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t}$$

Analizziamo le condizioni iniziali:

$$\begin{aligned} i(0^-) &= i(0^+) = 0 \\ &\Rightarrow i(0) = 0 \\ &\Rightarrow A + B = 0 \\ &\Rightarrow A = -B \end{aligned}$$

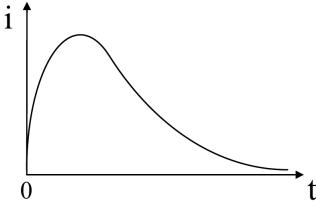
$$\begin{aligned}
v_C(0) &= V_{C0} \\
\Rightarrow E - \underbrace{Ri(0)}_0 - L \frac{di}{dt} - V_{C0} &= 0 \\
\Rightarrow E - L \frac{di}{dt} \Big|_0 - V_{C0} &= 0 \\
\Rightarrow \frac{di}{dt} \Big|_0 &= \frac{E - V_{C0}}{L}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{di}{dt} \Big|_0 &= (A\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + B\lambda_2 e^{\lambda_2 t}) \Big|_0 \\
&= A\lambda_1 + B\lambda_2 \\
\Rightarrow A\lambda_1 + \underbrace{B}_{-A} \lambda_2 &= \frac{E - V_{C0}}{L} \\
\Rightarrow A(\lambda_1 - \lambda_2) &= \frac{E - V_{C0}}{L} \\
\Rightarrow A &= \frac{E - V_{C0}}{L(\lambda_1 - \lambda_2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i(t) &= \frac{E - V_{C0}}{L(\lambda_1 - \lambda_2)} (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}) \\
&= \frac{E - V_{C0}}{2L(\alpha^2 - \omega_0^2)} \left( e^{(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2})t} - e^{(-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2})t} \right) \\
&= \frac{E - V_{C0}}{2L(\alpha^2 - \omega_0^2)} \left( e^{(\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2})t} - e^{(-\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2})t} \right) e^{-\alpha t}
\end{aligned}$$

**Risposta sovrasmorzata:**

$$i(t) = \frac{E - V_{C0}}{2L(\alpha^2 - \omega_0^2)} \left( e^{(\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2})t} - e^{(-\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2})t} \right) e^{-\alpha t}$$



- $\Delta = 0$

$$\begin{aligned}
\alpha^2 &= \omega^2 \Rightarrow \alpha = \omega \\
\Rightarrow \lambda_1 &= \lambda_2 = \lambda = -\alpha \\
&\text{Risposte reali coincidenti}
\end{aligned}$$

$$i(t) = (A + Bt) e^{\lambda t} = (A + Bt) e^{-\alpha t}$$

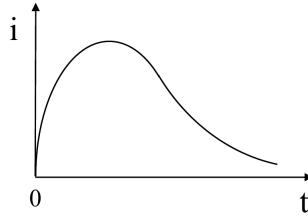
Utilizziamo le condizioni iniziali

$$\begin{aligned}
i(t = 0^-) &= i(t = 0^+) = 0 \\
\Rightarrow i(0) &= A = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_C(t = 0^-) &= v_C(t = 0^+) = V_{C0} & \frac{di}{dt} \Big|_0 &= (-\alpha(Bt)e^{-\alpha t} + Be^{-\alpha t}) \Big|_0 \\
\Rightarrow E - Ri(0) - L \frac{di}{dt} - V_{C0} &= 0 & &= B = \frac{E - V_{C0}}{L} \\
\Rightarrow \frac{di}{dt} \Big|_0 &= \frac{E - V_{C0}}{L}
\end{aligned}$$

**Smorzamento critico:**

$$i(t) = \frac{E - V_{C0}}{L} t \cdot e^{-\alpha t}$$



- $\Delta < 0$

$$\begin{aligned}\alpha^2 &< \omega_0^2 \\ \Rightarrow \alpha &< \omega_0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \\ &= -\alpha + \sqrt{-\underbrace{(\omega_0^2 - \alpha^2)}_{\text{Pulsazione nat. smorzata}}} \\ &= -\alpha + j\omega_d \\ \lambda_2 &= -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \\ &= -\alpha - j\omega_d\end{aligned}$$

$$i(t) = \frac{E - V_{C0}}{2Lj\omega_d} (e^{j\omega_d t} - e^{-j\omega_d t}) e^{-\alpha t}$$

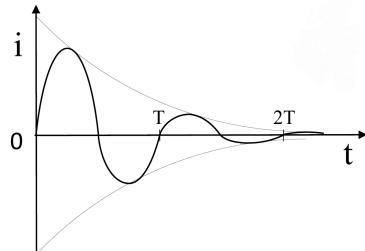
Utilizziamo le formule di eulero:

$$\begin{aligned}e^{j\theta} &= \cos \theta + j \sin \theta \\ e^{-j\theta} &= \cos \theta - j \sin \theta\end{aligned}$$

$$i(t) = \frac{E - V_{C0}}{2L\cancel{j}\omega_d} \cancel{j} 2 \sin(\omega_d t) e^{-\alpha t}$$

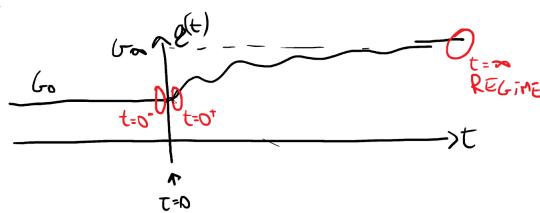
**Risposta sottosmorzata:**

$$i(t) = \frac{E - V_{C0}}{L\omega_d} \sin(\omega_d t) e^{-\alpha t}$$



## 4.8 Esercizi in regime transitorio

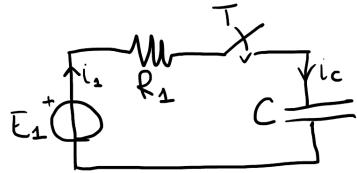
Risolvere un'equazione differenziale di ordine superiore al secondo è complesso; in questi casi si usa il **metodo per ispezione**.



Siamo interessati a

- $t = 0^-$ : istante immediatamente prima che si instauri il transitorio
- $t = 0^+$ : istante immediatamente dopo l'instaurarsi del transitorio
- $t = \infty$ : regime

#### 4.8.1 Esercizio 1: Circuito RC



$$R_1 = 100\Omega$$

$$C_1 = 100F$$

$$E_1 = 10V$$

T si chiude a  $t = 0$ ; il condensatore è inizialmente scarico.

Dobbiamo trovare:

- $P_{E_1, max}$  e  $t_{P_{E_1, max}}$
- $P_{E_1}(t = \infty)$
- $t_{P_E^*}$  e  $P_E^* = \frac{1}{2}P_{E, max}$

$$P_{E_1} = E_1 \cdot i_1$$

$$t = 0^- : v_C(t = 0^-) = 0V$$

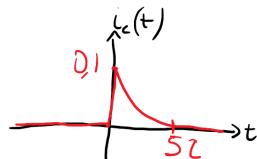
$$t = 0^+ : v_C(t = 0^+) = v_C(t = 0^-) = 0V$$

$$t = \infty : v_C(t = \infty) = E_1 = 10V$$

Ricordiamo la formula trovata dal confronto tra circuito RC e RL:

$$x(t) = (X_0 - X_\infty) e^{-t/\tau} + X_\infty$$

$$\begin{aligned} v_C(t) &= (0 - 10)e^{-t/\tau} + 10V & i_C &= C \frac{dv_C}{dt} & \tau &= R_1 C \\ &= 10(1 - e^{-t/\tau}) & &= C \frac{d}{dt} [10(1 - e^{-t/\tau})] & &= 10ms \\ & & &= C \cdot 10 \cdot \frac{1}{\tau} \cdot e^{-t/\tau} & & \\ & & &= \frac{10}{R} e^{-t/\tau} & & \\ & & &= 0,1e^{-t/\tau} [A] & & \end{aligned}$$



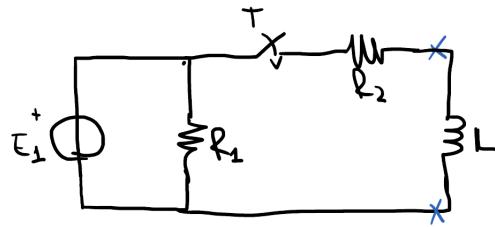
La corrente ha il suo massimo in  $t = 0$ , dopo diminuisce in maniera esponenziale  $\Rightarrow I_{1,max} = 0,1A$

$$\begin{aligned} P_{E_1,max} &= E_1 \cdot I_{1,max} \\ &= 10V \cdot 0,1A \\ &= 1W \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{E_1}(t = \infty) &= E_1 \cdot I_1(t = \infty) \\ &= 10V \cdot 0A \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{\delta_1} &= E_1 \cdot i_C \\ &= E_1 \cdot 0,1e^{-t_{P_\delta^*}/\tau} \\ &= \frac{P_{\delta_1,max}}{2} \\ &= 0,5W \end{aligned} \quad \begin{aligned} e^{-t_{P_\delta^*}/\tau} &= 0,5 \\ \Rightarrow -\frac{t_{P_\delta^*}}{RC} &= \ln(0,5) \\ &= RC(0,69) \\ &= 0,01 \cdot (0,69) \\ &= 6,9ms \end{aligned} \quad \begin{aligned} t_{P_\delta^*} &= -RC \ln(0,5) \\ &= RC(0,69) \\ &= 0,01 \cdot (0,69) \\ &= 6,9ms \end{aligned}$$

#### 4.8.2 Esercizio 2: Circuito RL

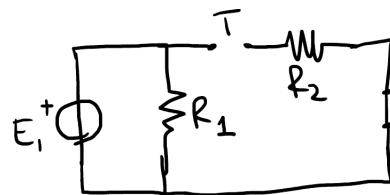


$$\begin{aligned} E_1 &= 12V \\ R_1 &= R_2 = 10\Omega \\ L &= 0,5H \end{aligned}$$

L'induttanza inizialmente è scarica; T si chiude in  $t = 0$ . Bisogna trovare:

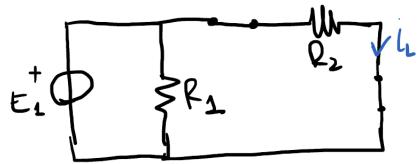
1.  $I_{E_1}(t = 0^-)$
2.  $I_{E_1}(t = \infty)$
3. Espressione analitica di  $P_{E_1}$

(1)  $t = 0^-$



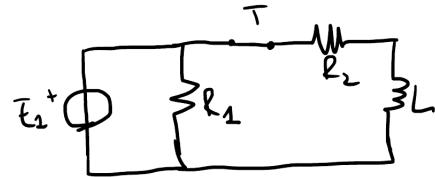
$$\begin{aligned} I_{E_1}(t = 0^-) &= \frac{E_1}{R_1} \\ &= 1,2A \end{aligned}$$

(2)  $t = \infty$



$$\begin{aligned}
 I_{E_2}(t = \infty) &= \frac{E_1}{R_1 // R_2} & i_L(t = \infty) &= \frac{E_1}{R_2} \\
 &= \frac{12V}{5\Omega} & &= 1,2A \\
 &= 2,4A
 \end{aligned}$$

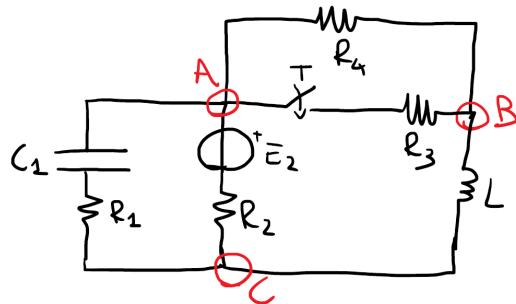
(3)  $P_{E_1} = E_1 \cdot i_1 = E_1[i_{R_1} + i_L]$



$$\begin{aligned}
 i_L(t) &= (I_{L,0} - I_{L,\infty}) e^{-t/\tau} + I_{L,\infty} & \tau &= \frac{L}{R} \\
 &= (0 - 1,2)e^{-t/\tau} + 1,2 & &= \frac{0,5H}{10\Omega} \\
 &= 1,2(1 - e^{-t/\tau}) & &= 50ms
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{E_1} &= E_1 \left[ \frac{E_1}{R_1} + 1,2(1 - e^{-t/\tau}) \right] \\
 &= 12[1,2 + 1,2 - 1,2e^{-t/\tau}] \\
 &= 12[2,4 - 1,2e^{-t/\tau}] \\
 &= 28,8 - 14,4e^{-t/\tau} W
 \end{aligned}$$

#### 4.8.3 Esercizio 3: Circuito RLC complesso



$$\begin{aligned}
 E_2 &= 12V \\
 R_1 &= R_2 = 2\Omega \\
 R_3 &= R_4 = 4\Omega \\
 C_1 &= 10\mu F \\
 L_1 &= 2mH
 \end{aligned}$$

T si chiude in  $t = 0$ .

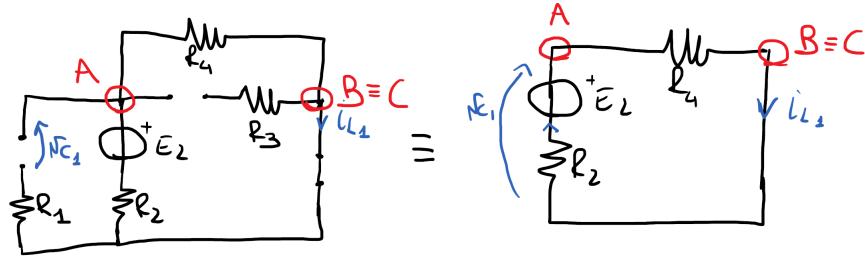
Bisogna trovare:

$$1. \ t = 0^- : Q_{C_1}$$

$$2. \ t = 0^+ : i_{C_1}; \frac{di_L}{dt}$$

$$3. \ t = \infty : \mathcal{E}_{L_1}; \mathcal{E}_{C_1}$$

(1)  $t = 0^-$  siamo in regime stazionario, quindi  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$



$$\begin{aligned} i_{L_1}(t = 0^-) &= \frac{E_2}{R_2 + R_4} \\ &= 2A \end{aligned}$$

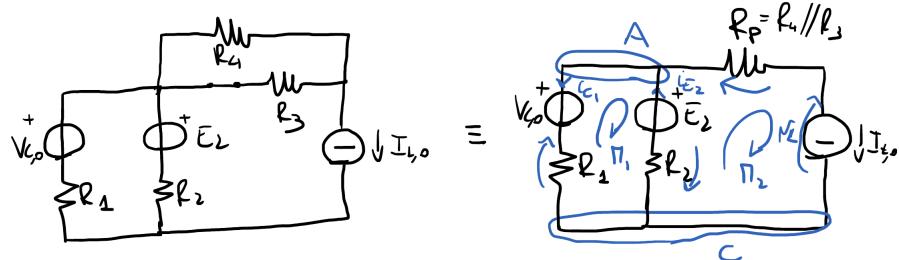
$$\begin{aligned} v_{C_1}(t = 0^-) &= R_4 \cdot i_{L_1} \\ &= 8V \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{C_1}(t = 0^-) &= C_1 \cdot v_{C_1}(t = 0^-) \\ &= 10\mu F \cdot 8V \\ &= 8 \cdot 10^{-5} C \end{aligned}$$

(2)  $t = 0^+$

$$\begin{aligned} i_{L_1}(t = 0^+) &= i_{L_1}(t = 0^-) \\ &= I_{L,0} \\ &= 2A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{C_1}(t = 0^+) &= v_{C_1}(t = 0^-) \\ &= V_{C,0} \\ &= 8V \end{aligned}$$



$$M1 : v_{R_1} + V_{C,0} - E_2 + v_{R_2} = 0$$

$$M2 : -v_{R_2} + E_2 - v_{R_P} - v_L = 0$$

$$LKC : I_{L,0} + i_{C_1} - i_{E_2}$$

$$R_1 \cdot i_{C_1} + V_{C,0} - E_2 + R_2 (I_{L,0} + i_C) = 0$$

$$-R_2 \cdot i_{E_2} + E_2 - R_P \cdot I_{L,0} - v_L = 0$$

$$I_{L,0} + i_{C_1} - i_{E_2} = 0$$

$$\Rightarrow i_{E_2} = I_{L,0} + i_{C_1}$$

Sostituisco  $i_{E_2}$  nella prima equazione

$$\begin{aligned} R_1 \cdot i_{C_1} + V_{C,0} - E_2 + R_2 (I_{L,0} + i_C) &= 0 \\ \Rightarrow i_{C_1} (R_1 + R_2) &= E_2 - V_{C,0} - R_2 I_{L,0} \\ \Rightarrow i_{C_1} &= \frac{E_2 - V_{C,0} - R_2 I_{L,0}}{R_1 + R_2} \\ \Rightarrow i_{C_1} &= \frac{12V - 8V - 2 \cdot 2}{2\Omega + 2\Omega} \\ \Rightarrow i_{C_1} &= 0A \end{aligned}$$

Quindi  $i_{E_2} = I_{L,0}$ ; sostituisco questo nell'equazione della seconda maglia

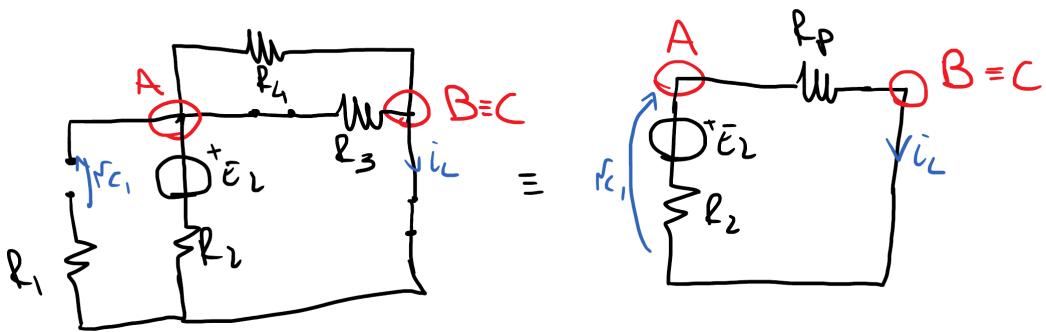
$$\begin{aligned}-R_2 \cdot I_{L,0} + E_2 - R_P \cdot I_{L,0} - v_L &= 0 \\ \Rightarrow v_L &= E_2 - (R_2 + R_P)I_{L,0} \\ &= 4V\end{aligned}$$

Ricordando l'equazione differenziale dell'induttore  $v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$ , da essa si può calcolare la derivata della corrente

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{v(t)}{L}$$

$$\begin{aligned}\frac{di_L}{dt}(t=0^+) &= \frac{v_L(t=0^+)}{L} \\ &= \frac{4V}{2 \cdot 10^{-3}H} \\ &= 2 \text{ kA/s}\end{aligned}$$

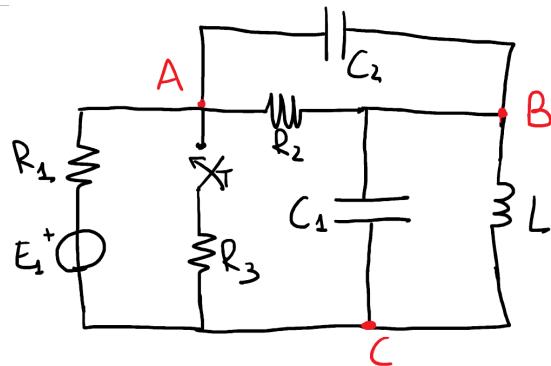
(3)  $t = \infty$



$$\begin{aligned}i_L(t=\infty) &= \frac{E_2}{R_2 + R_P} \\ &= 3A\end{aligned} \quad \begin{aligned}v_{C_1}(t=\infty) &= R_P \cdot i_L \\ &= 6V\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_L &= \frac{1}{2}LI^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \times 10^{-3} \cdot (3)^2 \\ &= 9 \text{ mJ}\end{aligned} \quad \begin{aligned}\mathcal{E}_C &= \frac{1}{2}CV^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 10 \times 10^{-6} \cdot (6)^2 \\ &= 180 \mu J\end{aligned}$$

#### 4.8.4 Esercizio 4: Circuito RLC complesso



T si chiude all'istante  $t = 0$ .  
Dobbiamo calcolare

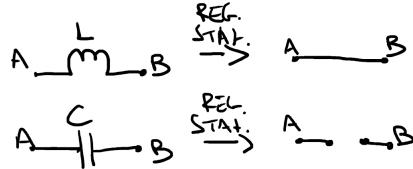
$$1. \ t = 0^- : \mathcal{E}_{C_2}$$

$$2. \ t = 0^+ : \frac{di_L}{dt}; \ P_{E_1}$$

$$3. \ t = \infty : \mathcal{E}_{C_1}; \ \mathcal{E}_{C_2}; \ \mathcal{E}_L$$

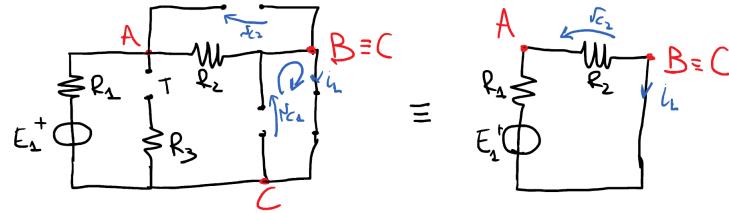
Il generatore di tensione  $E_1$  è costante, quindi abbiamo un regime stazionario.

$$\textcircled{(1)} \quad t = 0^- \text{ Siccome T è aperto e siamo in un regime stazionario } \frac{\partial}{\partial t} = 0$$



$$v_L = L \frac{di}{dt} \Big|_{\frac{\partial}{\partial t}=0} \Rightarrow v_L = 0$$

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt} \Big|_{\frac{\partial}{\partial t}=0} \Rightarrow i_C = 0$$



Come prima cosa calcoliamo le variabili di stato all'istante  $t = 0^-$ :

$$v_{C_1}(t = 0^-) = 0V \quad i_L(t = 0^-) = \frac{E_1}{R_1 + R_2} \quad v_{C_2}(t = 0^-) = v_{R_2} = R_2 \cdot i_L$$

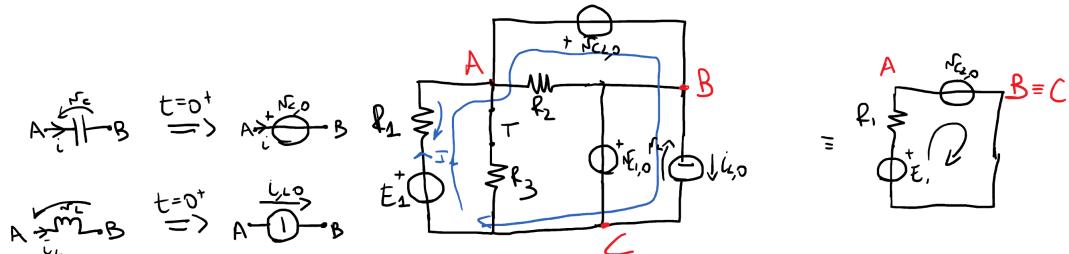
$$= E_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\mathcal{E}_{C_2} = \frac{1}{2} V_C^2 = \frac{1}{2} C \left( E_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right)$$

$$\textcircled{(2)} \quad t = 0^+$$

$$\begin{aligned} v_{C_1}(t = 0^+) &= v_{C_1}(t = 0^-) \\ &= 0V \end{aligned} \quad \begin{aligned} v_{C_2}(t = 0^+) &= v_{C_2}(t = 0^-) \\ &= v_{C_2,0} \\ &= E_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2} \end{aligned} \quad \begin{aligned} i_L(t = 0^+) &= i_L(t = 0^-) \\ &= i_{L,0} \\ &= \frac{E_1}{R_1 + R_2} \end{aligned}$$

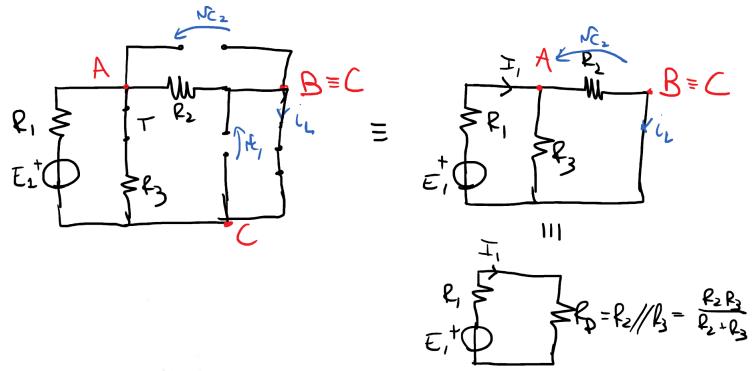
Manteniamo la convenzione dell'utilizzatore



$$\begin{aligned} \left. \frac{di_L}{dt} \right|_{t=0^+} &= \left. \frac{v_L}{L} \right|_{t=0^+} \\ &= \frac{v_{C_1,0}}{L} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{E_1} &= E_1 \cdot I_1 \\ &= E_1 \left( \frac{E_1 - v_{C_2,0}}{R_1} \right) \end{aligned}$$

(3)  $t = \infty$ , siamo sempre in regime stazionario



$$v_{C_1}(t = \infty) = 0V$$

$$I_1 = \frac{E_1}{R_1 + R_P}$$

$$i_L(t = \infty) = \frac{E_1}{R_1 + R_P} \cdot \frac{R_3}{R_2 + R_3}$$

$$i_L = I_1 \frac{R_3}{R_2 + R_P}$$

$$v_{C_2}(t = \infty) = R_2 \cdot i_L$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{C_1} &= \frac{1}{2} C_1 V_{C_1}^2 \\ &= \frac{1}{2} C_1(0)^2 \\ &= 0 J\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{C_2} &= \frac{1}{2} C_2 V_{C_2}^2 \\ &= \frac{1}{2} C_2 (R_2 \cdot i_L)^2 [J]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_L &= \frac{1}{2} L \cdot I_L^2 \\ &= \frac{1}{2} L \left( \frac{E_1}{R_1 + R_P} \cdot \frac{R_3}{R_2 + R_3} \right) [J]\end{aligned}$$

La  $R$  per la quale ho smorzamento critico è

$$\begin{aligned}\alpha &= \omega_0 \\ \Rightarrow \frac{R}{2L} &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ \Rightarrow R &= \frac{2L}{\sqrt{LC}}\end{aligned}$$

## 5 Regime sinusoidale

### 5.1 Introduzione

#### 5.1.1 Segnali periodici

Una grandezza temporale  $a(t)$  si definisce periodica quando si ripete a ogni periodo  $T$

$$a(t) = a(t + nT) \quad \forall t$$

dove:

- $T$  è il *periodo*, in [s];
- $f = \frac{1}{T}$  è la *frequenza*, in Hz (numero di periodi nell'unità di tempo)
- $A_m = \frac{1}{T} \int_0^T a(t) dt$  è il *valore medio*
- $A_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T a^2(t) dt}$

## 5.2 Sinusoide

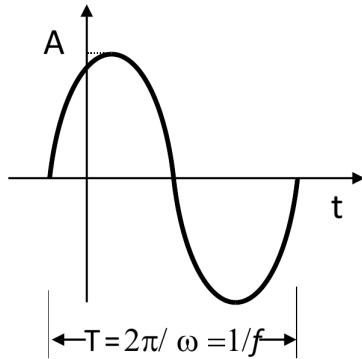
Si definisce come grandezza sinusoidale nel tempo quanto segue:

$$a(t) = \hat{A} \cos(\omega t + \theta)$$

dove:

- $\hat{A}$  è l'ampiezza, il massimo di  $a(t)$ , reale positivo;
- $\omega$  è la *frequenza angolare*, in  $[s^{-1}]$ , reale positivo;
- $\theta$  è la *fase*, in [rad];
- $T = \frac{2\pi}{\omega}$  è il *periodo*, in [s];
- $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$  è la *frequenza naturale*, in [Hz];
- $A_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \hat{A}^2 \cos^2(\omega t + \theta) dt} = \frac{\hat{A}}{\sqrt{2}} = 0,707 \hat{A}$  è il *valore efficace*, o radice della media dei quadrati, in inglese *root mean square*, abbreviato in RMS

$$\begin{aligned} a(t) &= A \cos(\omega t + \theta) \\ &= \sqrt{2} A_e \cos(\omega t + \theta) \end{aligned}$$



Usiamo il cappello ( $\hat{A}$ ) per distinguere il valore di picco dal valore efficace.

### 5.2.1 Potenza media dissipata da una resistenza

$$p(t) = R \cdot i^2(t)$$

$$i(t) = \hat{I} \cos(\omega t + \alpha)$$

la potenza media dissipata è

$$\begin{aligned} \langle p(t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T R \cdot i^2(t) dt \\ &= R \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}_{I_{eff}^2} \\ &= RI_{eff}^2 \end{aligned}$$

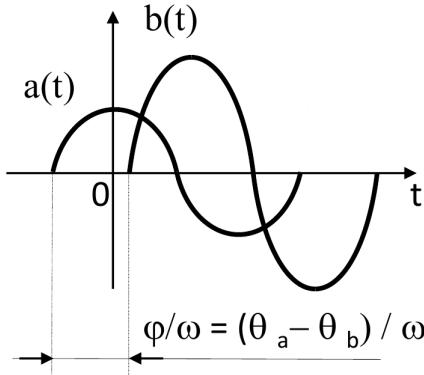
Una corrente DC di 1A comporta una potenza dissipata sul resistore pari a quella di una corrente sinusoidale id valore efficace pari a 1A.

### 5.2.2 Segnali isofrequenziali

Una sinusode è completamente definita da 3 parametri:

- valore massimo  $\hat{A}$  o valore efficace  $A_{eff} = \frac{\hat{A}}{\sqrt{2}}$ ;
- pulsazione  $\omega$  o frequenza  $f$  o periodo  $T$ :  $f = \frac{1}{T}$ ;  $\omega = 2\pi f$ ;
- fase  $\alpha$

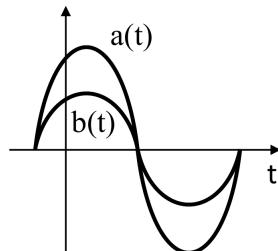
$$\left. \begin{array}{l} a(t) = \hat{A} \cos(\omega t + \alpha) \\ b(t) = \hat{B} \cos(\omega t + \beta) \end{array} \right\} \begin{array}{c} \text{Segnali} \\ \text{isofrequenziali} \end{array}$$



Viene definito *sfasamento* o *differenza di fase*:

$$\phi = \alpha - \beta$$

- $\phi = 0$ :  $a(t)$  e  $b(t)$  sono **in fase**



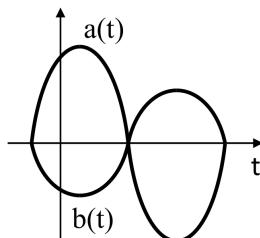
- $\phi > 0$ :

- $a(t)$  è in **anticipo** rispetto a  $b(t)$
- $b(t)$  è **ritardo** rispetto a  $a(t)$

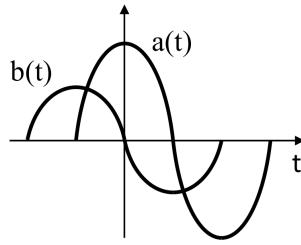
- $\phi < 0$ :

- $a(t)$  è in **ritardo** rispetto a  $b(t)$
- $b(t)$  è **anticipo** rispetto a  $a(t)$

- $\phi = \pm\pi$ :  $a(t)$  e  $b(t)$  sono in **opposizione di fase**



- $\phi = \pm \frac{\pi}{2}$ :  $a(t)$  e  $b(t)$  sono in **quadratura**



nella figura  $b(t)$  è in quadratura in ritardo

### 5.3 Fasori

I *fasori* rappresentano una grandezza sinusoidale tramite un numero complesso (un vettore) **Identità di Eulero**:

$$e^{jx} = \cos(x) + j \sin(x)$$

l'espressione caratteristica di un fasore così diventa

$$a(t) = \hat{A} \cos(\omega t + \alpha) = \operatorname{Re} [\hat{A} e^{j(\omega t + \alpha)}]$$

l'argomento della parte reale è un vettore rotante nel piano complesso

Nella figura:

- l'asse orizzontale della circonferenza è l'asse dei numeri *immaginari*, l'asse verticale è l'asse dei numeri *reali*;
- il grafico disegnato sopra è il nostro  $a(t)$

Prendiamo dei fasori isofrequenziali:

$$\begin{array}{lll} a_1 = \hat{A}_1 \cos(\omega t + \alpha_1) & \longleftrightarrow & \hat{A}_1 e^{j(\omega t + \alpha_1)} = \hat{A}_1 \underline{e^{j\omega t}} e^{j\alpha_1} = \sqrt{2} A_{1,e} \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\alpha_1} \\ a_2 = \hat{A}_2 \cos(\omega t + \alpha_2) & \longleftrightarrow & \hat{A}_2 e^{j(\omega t + \alpha_2)} = \hat{A}_2 \underline{e^{j\omega t}} e^{j\alpha_2} = \sqrt{2} A_{2,e} \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\alpha_2} \\ \dots & & \dots \\ \dots & & \dots \\ a_n = \hat{A}_n \cos(\omega t + \alpha_n) & \longleftrightarrow & \hat{A}_n e^{j(\omega t + \alpha_n)} = \hat{A}_n \underline{e^{j\omega t}} e^{j\alpha_n} = \sqrt{2} A_{n,e} \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\alpha_n} \end{array}$$

Il valore sottolineato è chiamato **fattore rotante**.

Tutti i vettori ruotano alla stessa pulsazione in senso antiorario nel piano complesso; un fasore può essere scritto nella forma

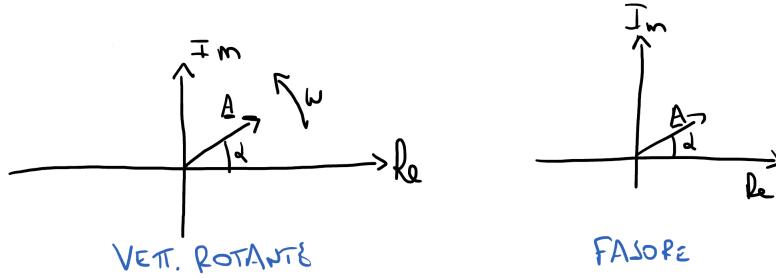
$$\vec{A} = A_e \cdot e^{j\alpha}$$

- $\vec{A}$  è il vettore nel piano complesso

- $A_e$  è il valore efficace

- $\alpha$  è la fase iniziale

Il metodo fasoriale (?) vale per segnali isofrequenziali.



## 5.4 Trasformata di Steinmetz

$$S[a(t)] = \frac{\sqrt{2}}{T} \int_0^T a(t) e^{-j\omega t} dt$$

siccome  $a(t) = \hat{A} \cos(\omega t + \alpha)$

$$\begin{aligned} S[a(t)] &= \frac{\sqrt{2}}{T} \int_0^T \hat{A} \cos(\omega t + \alpha) e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{T} \hat{A} \int_0^T \frac{e^{j(\omega t+\alpha)} + e^{-j(\omega t+\alpha)}}{2} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{T} \frac{\hat{A}}{2} \int_0^T [e^{j(\omega t+\alpha)} + e^{-j(\omega t+\alpha)}] e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{T} \frac{\hat{A}}{2} \left[ \int_0^T e^{j\alpha} dt + \int_0^T e^{-2j\omega t - j\alpha} dt \right] \xleftarrow[\text{periodo con } \omega \neq 0 \text{ vale 0}]{} \\ &= \frac{\hat{A}}{\sqrt{2}T} e^{j\alpha} T \\ &= \frac{\hat{A}}{\sqrt{2}} e^{j\alpha} \\ &= \underbrace{A_e \cdot e^{j\alpha}}_{\text{Fasore}} \end{aligned}$$

La *trasformata di Steinmetz* associa a una grandezza nel dominio dei tempi una grandezza nel dominio fasoriale.

La trasformata di Steinmetz è un operatore lineare:

$$S[ma(t) + nb(t)] = mS[a(t)] + nS[b(t)]$$

$$S\left[\frac{da(t)}{dt}\right] = \frac{\sqrt{2}}{T} \int_0^T \frac{da(t)}{dt} e^{-j\omega t} dt$$

integrandi per parti:

$$\begin{aligned} S\left[\frac{da(t)}{dt}\right] &= \frac{\sqrt{2}}{T} \left[ \underbrace{[a(t)e^{-j\omega t}]_0^T}_{\text{integrandi per parti}} - \int_0^T a(t) \cdot (-j\omega e^{-j\omega t}) dt \right] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{T} \left[ j\omega \int_0^T a(t) e^{-j\omega t} dt \right] \\ &= j\omega \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{T} \int_0^T a(t) e^{-j\omega t} dt}_{S[a(t)]} \end{aligned}$$

$$S \left[ \frac{da(t)}{dt} \right] = j\omega S[a(t)]$$

$j\omega$  è lo sfasamento.

### 5.4.1 Operazioni sui numeri complessi

Un fasore può essere rappresentato in due modi:

- rappresentazione cartesiana:  $\underline{A} = A_R + jA_I$
- rappresentazione polare:  $\underline{A} = A_e \cdot e^{j\alpha}$

Polare $\rightarrow$ Cartesiana	Cartesiana $\rightarrow$ Polare
$Ae^{j\alpha} \longrightarrow \begin{cases} A_R = A \cos(\alpha) \\ A_I = A \sin(\alpha) \end{cases}$	$A_R + jA_I \longrightarrow \begin{cases} A = \sqrt{A_R^2 + A_I^2} \\ \alpha = \arctan\left(\frac{A_I}{A_R}\right) \end{cases}$

$$\underline{A} = A_R + jA_I = Ae^{j\alpha}$$

$$\mathbf{B} = B_R + jB_I = Be^{j\beta}$$

#### Somma

$$\begin{aligned} \underline{C} &= \underline{A} + \underline{B} \\ &= A_R + jA_I + B_R + jB_I \\ &= \underbrace{(A_R + B_R)}_{C_R} + j \underbrace{(A_I + B_I)}_{C_I} \end{aligned}$$

#### Prodotto

$$\begin{aligned} \underline{C} &= \underline{A} \cdot \underline{B} \\ &= Ae^{j\alpha} \cdot Be^{j\beta} \\ &= \underbrace{A \cdot B}_{C} e^{j(\alpha + \beta)} \end{aligned}$$

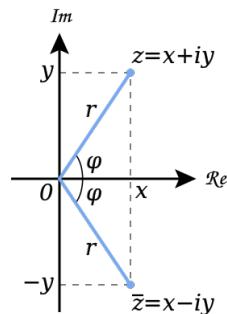
#### Rapporto

$$\begin{aligned} \underline{C} &= \frac{\underline{A}}{\underline{B}} \\ &= \frac{Ae^{j\alpha}}{Be^{j\beta}} \\ &= \underbrace{\frac{A}{B}}_C e^{j(\alpha - \beta)} \end{aligned}$$

#### Complesso coniugato

Se  $\underline{A} = A_R + jA_I$  allora il suo complesso coniugato è

$$\underline{A}^* = A_R - jA_I = Ae^{-j\alpha}$$



## 5.5 Metodo simbolico

Utilizziamo Steinmetz sulle equazioni differenziali per ottenere delle equazioni algebriche:

$$\begin{array}{ll} \text{LKT: } \sum_{i=1}^m v_i(t) = 0 & \implies \sum_{i=1}^m \underline{V}_i = 0 \\ \text{LKC: } \sum_{i=1}^n i(t) = 0 & \implies \sum_{i=1}^m \underline{I}_i = 0 \end{array}$$

Possiamo scrivere ora le equazioni costitutive in **forma simbolica**:

- resistore:

$$\begin{aligned} v(t) &= R \cdot i(t) & S[v(t)] &= S[R \cdot i(t)] \\ S[v(t)] &= \underline{V} & &= R \cdot S[i(t)] \\ & & &= R \cdot \underline{I} \end{aligned}$$

$$\underline{V} = R \cdot \underline{I}$$

- induttore:

$$\begin{aligned} v(t) &= L \frac{di}{dt} & S[v(t)] &= S \left[ L \frac{di}{dt} \right] \\ S[v(t)] &= \underline{V} & &= L \cdot S \left[ \frac{di}{dt} \right] \\ & & &= L j \omega \cdot S[i(t)] \end{aligned}$$

$$\underline{V} = j \omega L \underline{I}$$

- condensatore:

$$\begin{aligned} i(t) &= C \frac{dv}{dt} & \underbrace{S[i(t)]}_{\underline{I}} &= S \left[ C \frac{dv}{dt} \right] & \underline{I} = j \omega C \underline{V} \implies \underline{V} &= \frac{1}{j \omega C} \underline{I} \\ & & &= C \cdot S \left[ \frac{dv}{dt} \right] & &= -\frac{j}{\omega C} \underline{I} \\ & & &= C \cdot S[j \omega \cdot v(t)] & & \\ & & &= j \omega C \underline{V} & & \\ & & & & & \\ \underline{V} &= -\frac{j}{\omega C} \underline{I} & & & & \end{aligned}$$

Le equazioni simboliche di tensione e corrente sono:

$$\begin{aligned} e(t) &= \sqrt{2} E \cos(\omega t + \alpha) \implies S[e(t)] = \underline{E} \\ i(t) &= \sqrt{2} I \cos(\omega t + \beta) \implies S[i(t)] = \underline{I} \end{aligned}$$

### 5.5.1 Impedenza e ammettenza - Legge di Ohm simbolica

Definiamo l'*impedenza*  $Z$

$$\underline{Z} = \frac{\underline{V}}{\underline{I}}$$

Ad esempio se  $\underline{V} = V e^{j\alpha}$  e  $\underline{I} = I e^{j\beta}$ :

$$\underline{Z} = \frac{V e^{j\alpha}}{I e^{j\beta}} = \underbrace{\frac{V}{I}}_Z e^{j(\alpha - \beta)}$$

$\phi$  è detto *sfasamento*, cioè la differenza di fase tra tensione e corrente introdotta dal componente.

- $\phi > 0 \rightarrow \alpha_V > \alpha_I$ , la tensione è in anticipo rispetto alla corrente
- $\phi < 0 \rightarrow \alpha_V < \alpha_I$ , la tensione è in ritardo rispetto alla corrente

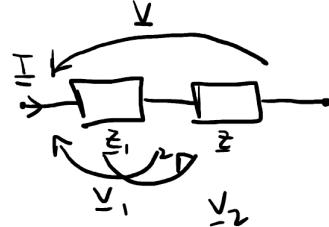
Definiamo l'*ammettenza*  $Y$

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$$

Definiamo la *legge di Ohm simbolica*

$$\underline{V} = \underline{Z}\underline{I}$$

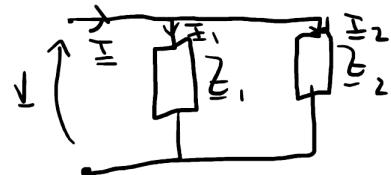
### Impedenze in serie



$$\begin{aligned}\underline{V} &= \underline{V}_1 + \underline{V}_2 \\ &= \underline{Z}_1 \underline{I} + \underline{Z}_2 \underline{I} \\ &= (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) \underline{I}\end{aligned}$$

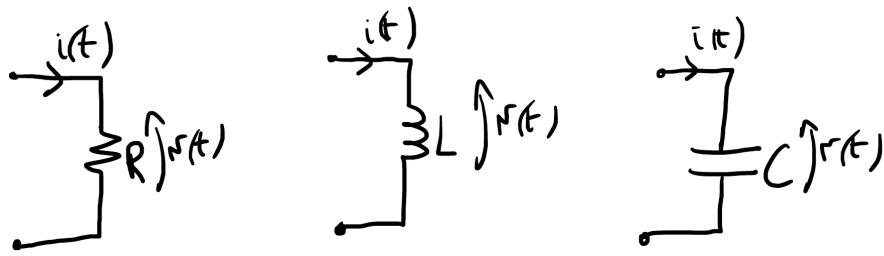
$$\begin{aligned}\underline{Z}_1 &= Z_{R_1} + jZ_{I_1} & \underline{Z}_{eq} &= (Z_{R_1} + Z_{R_2}) + j(Z_{I_1} + Z_{I_2}) \\ \underline{Z}_2 &= Z_{R_2} + jZ_{I_2}\end{aligned}$$

### Impedenze in parallelo



$$\begin{aligned}\underline{I} &= \underline{I}_1 + \underline{I}_2 \\ &= \frac{\underline{V}}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{V}}{\underline{Z}_2} \\ &= \underbrace{\left( \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} \right)}_{\underline{Z}_{eq} = \frac{1}{Y_{eq}}} \underline{V}\end{aligned}$$

### 5.5.2 Formule simboliche di resistore, induttore e condensatore



$$\underline{V} = R \underline{I}$$

$$\underline{V} = j\omega L \underline{I}$$

$$\underline{V} = -\frac{j}{\omega C} \underline{I}$$

$$\underline{Z} = R$$

$$\underline{Z} = j\omega L$$

$$\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C}$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{V}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{V}}{R}$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{V}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{V}}{j\omega L}$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{V}}{\underline{Z}} = j\omega C \underline{V}$$

$$I = \frac{V}{R}$$

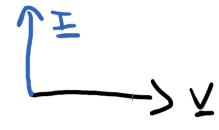
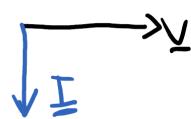
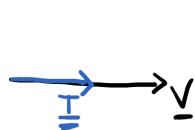
$$I = \frac{V}{\omega L}$$

$$I = \omega C V$$

$$\alpha_V = 0, \phi = 0 \rightarrow \alpha_I = 0$$

$$\alpha_V = 0, \alpha_I = -\frac{\pi}{2}$$

$$\alpha_V = 0, \alpha_I = \frac{\pi}{2}$$



### 5.5.3 Equazioni costitutive in forma simbolica

#### Resistore

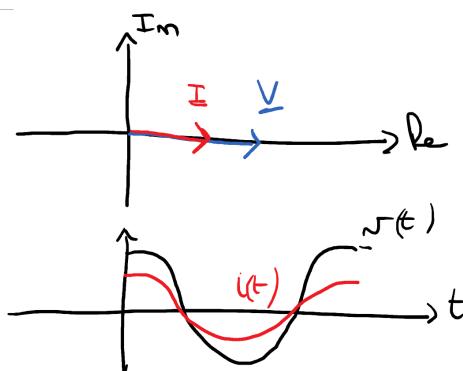
$$v(t) = R \cdot i(t) \xrightarrow{SII} \underline{V} = R \underline{I} \longrightarrow \underline{Z} = \frac{\underline{V}}{\underline{I}} = R$$

$$\begin{cases} Z_R = R \\ Z_I = 0 \end{cases} \quad \text{è solamente reale}$$

$$\begin{cases} |Z| = R \\ \phi = 0 \end{cases}$$

Supponiamo  $\alpha_V = 0$

$$\begin{aligned} \phi &= \alpha_V - \alpha_I \\ \Rightarrow \alpha_I &= -\phi = 0 \end{aligned}$$



## Induttore

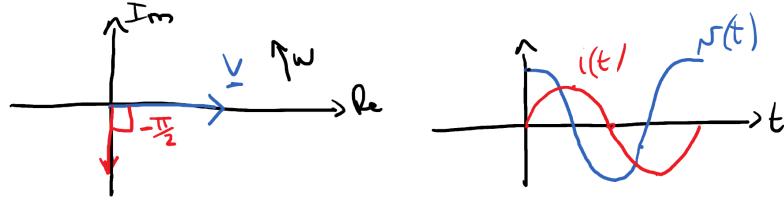
$$v(t) = L \frac{di}{dt} \xrightarrow{\text{SII}} \underline{V} = j\omega L \underline{I} \longrightarrow \underline{Z} = \frac{\underline{V}}{\underline{I}} = j\omega L = \omega L e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$\begin{cases} Z_R = 0 \\ Z_I = \omega L \end{cases} \quad \text{è solamente immaginaria}$$

$$\begin{cases} |Z| = \omega L \\ \phi = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Supponiamo  $\alpha_V = 0$

$$\begin{aligned} \phi &= \alpha_V - \alpha_I \\ \implies \alpha_I &= -\phi = -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$



## Condensatore

$$\begin{aligned} i(t) &= C \frac{dv}{dt} \xrightarrow{\text{SII}} \underline{I} = j\omega C \underline{V} \longrightarrow \underline{Z} = \frac{\underline{V}}{\underline{I}} = \frac{1}{j\omega C} \\ &= -\frac{j}{\omega C} \\ &= \frac{1}{\omega C} \underbrace{e^{-j\pi}}_{\text{per il meno}} \underbrace{e^{j\frac{\pi}{2}}}_{\text{per la } j} \\ &= \frac{1}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

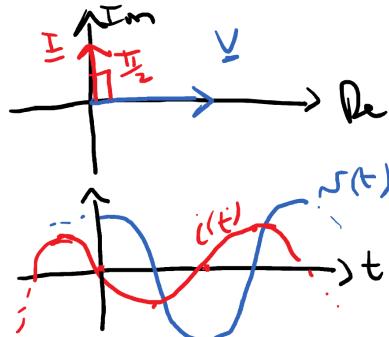
**N.B.** lo stesso risultato si ottiene se si utilizzano le formule del passaggio da coordinate cartesiane a coordinate polari.

$$\begin{cases} Z_R = 0 \\ Z_I = -\frac{1}{\omega C} \end{cases} \quad \text{solo parte immaginaria negativa}$$

$$\begin{cases} |Z| = \omega C \\ \phi = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Supponiamo  $\alpha_V = 0$

$$\begin{aligned} \phi &= \alpha_V - \alpha_I \\ \implies \alpha_I &= -\phi = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\underline{Z} &= Z_R + jZ_I \\ &= R + j \underbrace{X}_{\text{Reattanza}}\end{aligned}$$

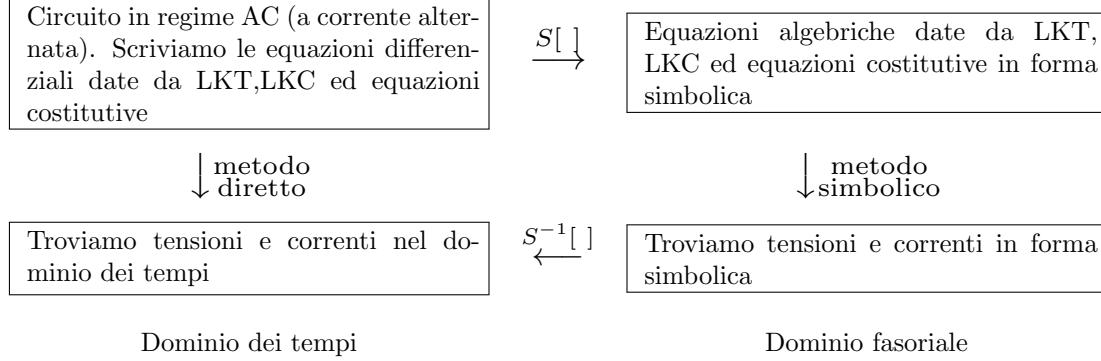
La reattanza può essere di due tipi

- reattanza induttiva:  $X_L = \omega L$

- reattanza capacitiva:  $X_C = -\frac{1}{\omega C}$

$X = f(\omega)$  è la **risposta in frequenza**.

#### 5.5.4 Il metodo



### 5.6 Potenza elettrica nel regime sinusoidale

#### 5.6.1 Potenza istantanea

La potenza istantanea è data da

$$p(t) = v(t)i(t)$$

Assumendo  $\alpha_V = 0$ , da cui  $\alpha_I = -\phi$  si ha:

$$\begin{aligned}v(t) &= V \cos(\omega t) & i(t) &= I \cos(\omega t - \phi) \\ & & &= I(\cos(\omega t) \cos(\phi) + \sin(\omega t) \sin(\phi)) \\ & & &= I \cos(\omega t) \cos(\phi) + I \sin(\omega t) \sin(\phi) \\ & & &= i_a(t) + i_r(t)\end{aligned}$$

dove

- $i_a(t) = I \cos(\omega t) \cos(\phi)$  è la **corrente attiva**, la componente in fase con la tensione
- $i_r(t) = I \sin(\omega t) \sin(\phi)$  è la **corrente reattiva**, componente in quadratura rispetto alla tensione

$$\begin{aligned}p(t) &= v(t)i(t) \\ &= v(t)i_a(t) + v(t)i_r(t) \\ &= p_a(t) + p_r(t)\end{aligned}$$

dove

- $p_a(t) = v(t)i_a(t)$  è la **potenza attiva istantanea**
- $p_r(t) = v(t)i_r(t)$  è la **potenza reattiva istantanea**

$$\begin{aligned}p_a(t) &= v(t)i_a(t) \\ &= V \cos(\omega t) I \cos(\omega t) \cos(\phi) \\ &= VI \cos(\phi) \cos^2(\omega t)\end{aligned}$$

La **potenza istantanea attiva**  $p_a(t)$  è dovuta alla componente attiva della corrente che è in fase con la tensione. La corrente attiva è quindi dovuta alla componente resistiva dell'elemento circuitale. La potenza istantanea attiva è sempre positiva. Quindi è una potenza che fluisce nell'elemento circuitale ed è dissipato dalla sua componente resistiva. Essa quindi viene utilizzata dall'elemento circuitale ed, in particolare, dalla sua resistenza che costituisce un carico del circuito.

$$\begin{aligned} p_r(t) &= v(t)i_r(t) \\ &= V \cos(\omega t) I \sin(\omega t) \sin(\phi) \\ &= \frac{1}{2} VI \sin(\phi) \sin(2\omega t) \end{aligned}$$

La **potenza istantanea reattiva**  $p_r(t)$  è dovuta alla componente reattiva della corrente che è in quadratura con la tensione. La corrente reattiva è quindi dovuta alla reattanza dell'elemento circuitale. La potenza istantanea reattiva media è nulla. Quindi è una potenza che entra nell'elemento circuitale per un quarto di periodo ( $T/4 = \pi/(2\omega)$ ) ed esce per il quarto di periodo successivo. È quindi una componente della potenza che non viene dissipata dagli elementi circuitali ma viene immagazzinata e poi rilasciata dagli elementi con memoria del circuito.

### 5.6.2 Potenza attiva

La **potenza attiva P** è definita come la media della potenza  $p(t)$  sul periodo  $T$

$$P = \frac{1}{T} \int_{T_0}^{t_0+T} p(t') dt' = V_e I_e \cos(\phi)$$

dove  $V_e$  è la tensione efficace e  $I_e$  è la corrente efficace;  $\cos(\phi)$  è il **fattore di potenza**.

### 5.6.3 Potenza reattiva

La **potenza reattiva Q** è definita come

$$\begin{aligned} Q &= [p_r(t)]_{max} \cdot \text{sgn}(\phi) \\ &= \frac{1}{2} VI \sin(\phi) \\ &= V_e I_e \sin(\phi) \end{aligned}$$

dove  $\phi$  è l'angolo di sfasamento fra tensione e corrente.  $Q$  quindi è il valore massimo della potenza scambiata dagli elementi circuitali con memoria nel circuito.

$Q$  può essere positivo o negativo a seconda del segno di  $j$ . Per un carico induttivo  $Q$  è positivo, per un carico capacitivo  $Q$  è negativo.

Nel Sistema SI delle Unità  $Q$  è misurato in volt-ampere reattivi [VAR].

### 5.6.4 Potenza complessa

La potenza complessa  $\dot{N}$  è definita come:

$$\dot{N} = \frac{1}{2} \dot{V} \dot{I}^* = \dot{V}_e \dot{I}_e^*$$

dove  $\dot{I}^*$  è il complesso coniugato del fasore  $\dot{I}$

$$\begin{aligned} \dot{I} &= I e^{j\alpha} \\ \implies \dot{I}^* &= I e^{-j\alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{N} &= \dot{V}_e \dot{I}_e^* \\ &= V_e e^{j\alpha_v} I_e e^{-j\alpha_i} \\ &= V_e I_e e^{j(\alpha_v - \alpha_i)} \\ &= V_e I_e e^{j\phi} \\ &= V_e I_e \cos(\phi) + j V_e I_e \sin(\phi) \\ &= P + jQ \end{aligned}$$

inoltre poiché  $\dot{V}_e = \dot{Z} \dot{I}_e$

$$\begin{aligned} P + jQ &= \dot{N} = \dot{V}_e \dot{I}_e^* \\ &= \dot{Z} \dot{I}_e \dot{I}_e^* \\ &= \dot{Z} I_e^2 \\ &= (R + jX) I_e^2 \\ &= \underbrace{RI_e^2}_P + j \underbrace{XI_e^2}_Q \end{aligned}$$

$$P = RI_e^2$$

$$Q = XI_e^2$$

### 5.6.5 Formule notevoli

$$\begin{array}{lll} \dot{N} = \frac{1}{2} \dot{V} \dot{I}^* & P = \frac{1}{2} VI \cos(\phi) & Q = \frac{1}{2} VI \sin(\phi) \\ = P + jQ & = V_e I_e \cos(\phi) & = V_e I_e \sin(\phi) \\ = RI_e^2 + jXI_e^2 & = \frac{1}{2} RI^2 & = \frac{1}{2} XI^2 \\ & = RI_e^2 & = XI_e^2 \end{array}$$

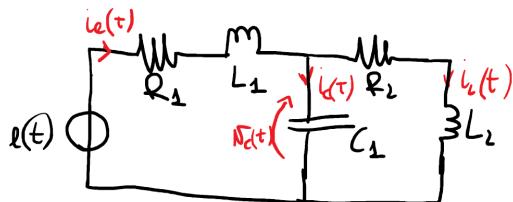
### 5.6.6 Potenza apparente

La potenza apparente  $N$  è definita come:

$$N = \frac{1}{2} VI = V_e I_e$$

## 5.7 Esercizi

### 5.7.1 Esercizio 1



$$e(t) = \sqrt{2} \cdot 230 \cdot \sin(\omega t + 30^\circ)$$

$$f = 50 \text{ Hz}$$

$$R_1 = 0,1 \Omega$$

$$L_1 = 0,64 \text{ mH}$$

$$C_1 = 180 \mu\text{F}$$

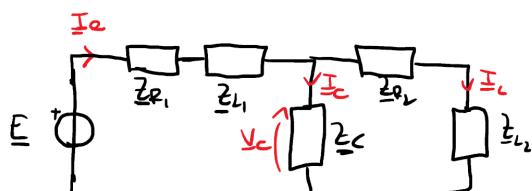
$$R_2 = 5,2 \Omega$$

$$L_2 = 12 \text{ mH}$$

Bisogna trovare:

- le correnti in ogni ramo
- $v_C(t)$

(1) Passiamo da dominio nei tempi a dominio fasoriale



Ricordando che  $S[a(t)] = A_e \cdot e^{j\alpha}$  e che  $e(t) = \sqrt{2}E \cos(\omega t + \alpha)$

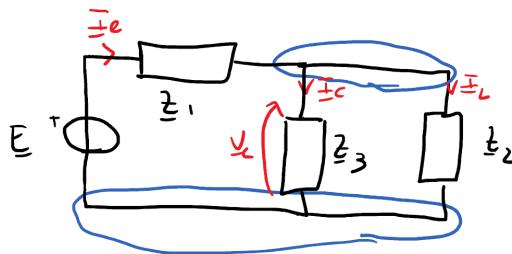
$$\underline{E} = 230 \cdot e^{j\alpha}$$

e  $\omega = 2\pi f = 314,26 \text{ rad/s}$ .

Calcoliamo le impedenze:

$$\begin{aligned}\underline{Z}_{R_1} &= R_1 \\ &= 0,1 \Omega \\ \underline{Z}_{L_1} &= jX_{L_1} \\ &= j\omega L_1 \\ &= j \cdot 314,16 \cdot 0,64 \times 10^{-3} \\ &= j0,2 \Omega \\ \underline{Z}_C &= jX_C \\ &= -\frac{j}{\omega C} \\ &= -j17,66 \Omega\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{Z}_{R_2} &= R_2 \\ &= 5,2 \Omega \\ \underline{Z}_{L_2} &= jX_{L_2} \\ &= j\omega L_2 \\ &= j \cdot 314,16 \cdot 1,2 \times 10^{-3} \\ &= j3,77 \Omega\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\underline{Z}_1 &= \underline{Z}_{R_1} + \underline{Z}_{L_1} \\ &= 0,1 + j0,2 [\Omega] \\ \underline{Z}_2 &= \underline{Z}_{R_2} + \underline{Z}_{L_2} \\ &= 5,2 + j3,77 [\Omega] \\ \underline{Z}_3 &= \underline{Z}_C \\ &= -j17,66 [\Omega]\end{aligned}$$

(2) Risolviamo il circuito (nel dominio fasoriale)

Applichiamo Millman:

$$\begin{aligned}\underline{V}_C &= \frac{\frac{\underline{E}}{\underline{Z}_1}}{\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3}} \\ &= 197,68 + j108,58 [V] \\ \text{passaggio da coo.} &\text{cartesiane a polari} \implies \underbrace{225,53}_{E} \underbrace{[28,78^\circ]}_{\alpha} [V]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{I}_C &= \frac{\underline{V}_C}{\underline{Z}_3} \\ &= 12,76 [118,78^\circ] [A] \\ \underline{I}_L &= \frac{\underline{V}_C}{\underline{Z}_2} \\ &= 35,11 [-7,16^\circ] [A]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{LKC: } \underline{I}_e &= \underline{I}_C + \underline{I}_L \\ &= 29,49 [13,34^\circ]\end{aligned}$$

(3) Passaggio da dominio fasoriale a dominio nei tempi

Applico l'antitrasformata  $S^{-1}[\cdot]$  ai fasori trovati

$$\begin{aligned} \underline{V}_C &= \underbrace{225, 53}_{E} \underbrace{[28, 78^\circ]}_{\alpha} & \xrightarrow{S^{-1}[\cdot]} & v_C(t) = \sqrt{2} \cdot 225, 53 \cdot \sin(\omega t + 28, 78^\circ) \\ \underline{I}_C &= \underbrace{12, 76}_{I_C} \underbrace{[118, 78^\circ]}_{\alpha} & \xrightarrow{S^{-1}[\cdot]} & i_C(t) = \sqrt{2} \cdot 12, 76 \cdot \sin(\omega t + 118, 78^\circ) \\ \underline{I}_L &= 35, 11 [-7, 16^\circ] & \xrightarrow{S^{-1}[\cdot]} & i_L(t) = \sqrt{2} \cdot 35, 11 \cdot \sin(\omega t + -7, 16^\circ) \\ \underline{I}_e &= 28, 49 [13, 34^\circ] & \xrightarrow{S^{-1}[\cdot]} & i_e(t) = \sqrt{2} \cdot 28, 49 \cdot \sin(\omega t + 13, 34^\circ) \end{aligned}$$

### 5.7.2 Esercizio 2



$$e(t) = \sqrt{2} \cdot 10 \cdot \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$R_1 = 2 \Omega$$

$$L_1 = 1 \text{ mH}$$

$$\omega = 10^3 \text{ rad/s}$$

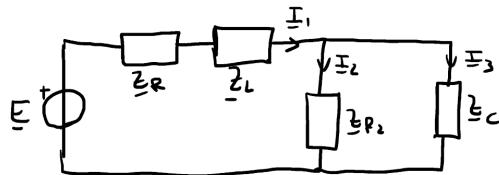
$$R_2 = 1 \Omega$$

$$C_1 = 500 \mu F$$

Bisogna trovare:

- $i_1(t)$
- $i_2(t)$
- $i_3(t)$

(1) Passiamo da dominio nei tempi a dominio fasoriale

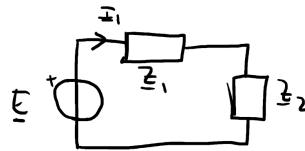


Ricordando che  $S[a(t)] = A_e \cdot e^{j\alpha}$  e che  $e(t) = \sqrt{2}E \cos(\omega t + \alpha)$

$$\underline{E} = 10 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$$

Calcoliamo le impedenze:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{R_1} &= R_1 & \underline{Z}_L &= jX_{L_1} & \underline{Z}_C &= jX_{C_1} & \underline{Z}_{R_2} &= R_2 \\ &= 2\Omega & &= j\omega L_1 & &= -\frac{j}{\omega C} & &= 1 \Omega \\ & & &= j \cdot 10^3 \cdot 10^{-3} & &= -j \frac{1}{10^3 \cdot 500 \times 10^{-6}} & & \\ & & &= j & & & &= -j \cdot 2 \end{aligned}$$



$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L$$

$$= 2 + j$$

$$\underline{Z}_2 = \underline{Z}_{R_2} // \underline{Z}_C$$

$$= \frac{\underline{Z}_{R_2} \cdot \underline{Z}_C}{\underline{Z}_{R_2} + \underline{Z}_C}$$

$$= \frac{1 \cdot (-2j)}{1 - 2j}$$

$$= -\frac{2j}{1 - 2j} \cdot \frac{1 + 2j}{1 + 2j}$$

$$= -2j \cdot \frac{1 + 2j}{1 + 4}$$

$$= -\frac{2j - 4}{5}$$

$$= \frac{4}{5} - j \frac{2}{5}$$

$$= 0,8 - 0,4j$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

$$= \frac{\underline{E}}{2,8 + 0,6j}$$

$$= \frac{10j}{2,8 + 0,6j}$$

$$= 0,73 + 3,41j$$

$$= 3,49 \boxed{77,9^\circ}$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 \cdot \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_{R_1} + \underline{Z}_{R_2}}$$

$$= 1,95 + 2,44j$$

$$= 3,12 \boxed{51,34^\circ}$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 \cdot \frac{\underline{Z}_{R_2}}{\underline{Z}_{R_2} + \underline{Z}_C}$$

$$= -1,22 + 0,92j$$

$$= 1,56 \boxed{141^\circ}$$

(2) Passaggio da dominio fasoriale a dominio nei tempi

Applico l'antitrasformata  $S^{-1}[\ ]$  ai fasori trovati

$$\underline{I}_1 = \underbrace{3,49}_{I_1} \underbrace{\boxed{77,9^\circ}}_{\alpha}$$

$$\xrightarrow{S^{-1}[\ ]}$$

$$i_1(t) = \sqrt{2} \cdot 3,49 \cdot \sin(\omega t + 77,9^\circ)$$

$$\underline{I}_2 = 3,12 \boxed{51,34^\circ}$$

$$\xrightarrow{S^{-1}[\ ]}$$

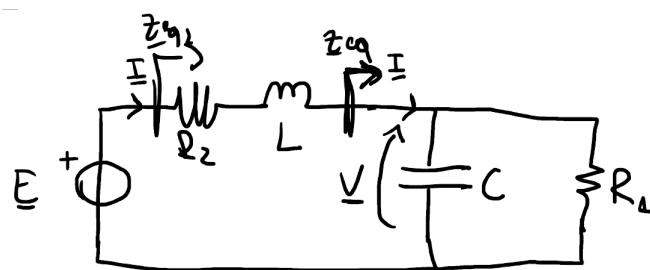
$$i_2(t) = \sqrt{2} \cdot 3,12 \cdot \sin(\omega t + 51,34^\circ)$$

$$\underline{I}_3 = 1,56 \boxed{141^\circ}$$

$$\xrightarrow{S^{-1}[\ ]}$$

$$i_3(t) = \sqrt{2} \cdot 1,56 \cdot \sin(\omega t + 141^\circ)$$

### 5.7.3 Esercizio sulle potenze



$$\begin{aligned}
V &= 400 \text{ V} & L &= 0,3 \text{ H} \\
R_1 &= 50 \Omega & R_2 &= 20 \Omega \\
C &= 30 \mu F & f &= 50 \text{ Hz} \\
&& \omega = 2\pi f = 314,16 \text{ rad/s}
\end{aligned}$$

Dobbiamo calcolare la potenza generata da  $\underline{E}$

1. Calcolo  $\underline{I}$

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_{eq} &= \frac{R_1 \cdot (jX_C)}{R_1 + (jX_C)} & \underline{I} &= \frac{400}{41 - 19j} \\
&= \frac{-R_1 \cdot \left(j \frac{1}{\omega C}\right)}{R_1 + j \left(-\frac{1}{\omega C}\right)} & &= 8,03 + 3,72j \text{ A} \\
&= -\frac{50 \left(j \frac{1}{314,16 \cdot 30 \times 10^{-6}}\right)}{50 - j \frac{1}{314,16 \cdot 30 \times 10^{-6}}} \\
&= 41 - 19j \Omega
\end{aligned}$$

2. Calcolo  $\underline{E}$

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_2 &= R_2 + jX_L & \underline{E} &= \underline{V} + \underline{Z}_2 \cdot \underline{I} \\
&= R_2 + j\omega L & &= 400 + (20 + 94,2j) \cdot (8,03 + 3,72j) \\
&= 20 + 94,2j \Omega & &= 210,18 + 830,83j \text{ V}
\end{aligned}$$

3. Calcolare  $\underline{N}$  (potenza)

$$\underline{N} = \underline{E} \cdot \underline{I}$$

## 6 Risposta in frequenza