

# Contents

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
1.1	Notazione ed elementi costitutivi	2
1.2	Controllo in anello aperto e anello chiuso	2
1.3	Progetto di un sistema di controllo	3
1.4	Esempio di sistema di controllo: circuito elettrico	3
<b>2</b>	<b>Sistemi in forma di stato</b>	<b>4</b>
2.1	Sistemi continui	4
2.1.1	Equazione di stato	4
2.1.2	Equazione di uscita	4
2.2	Sistemi discreti	5
2.3	Esempio circuito elettrico	5
2.3.1	Esempio con parametri che variano nel tempo	5
2.4	Esempio carrello	5
2.5	Esempio auto in rettilineo	6
2.6	Esempio pendolo	7
2.7	Traiettoria di un sistema	8
2.7.1	Esempio	8
2.8	Equilibrio di un sistema	8
2.8.1	Esempio pendolo	8
2.9	Classificazione dei sistemi in forma di stato	9
2.10	Proprietà dei sistemi lineari	10
2.10.1	Sistemi lineari in forma matriciale	10
2.11	Sistemi lineari tempo-invarianti	10
2.11.1	Esempio carrello	10
2.11.2	Sistemi lineari tempo-invarianti SISO	11
2.12	Principio di sovrapposizione degli effetti	11
2.13	Evoluzione libera e evoluzione forzata	11
2.13.1	Traiettorie di un sistema LTI: esempio scalare	12
2.13.2	Traiettorie di un sistema LTI: caso generale	12
2.13.3	Esempio sistema non forzato	13
2.13.4	Proprietà della matrice esponenziale	13
2.14	Rappresentazioni equivalenti	14
2.15	Modi di un sistema lineare tempo invariante	14
2.15.1	Autovalori complessi	15
2.15.2	Esempio sui modi naturali	16
2.15.3	Esempio 1	17
2.15.4	Esempio carrello	18
2.16	Stabilità interna	20
2.16.1	Richiami sull'equilibrio di un sistema	20
2.16.2	Definizioni	20
2.16.3	Stabilità interna per sistemi non forzati	20
2.16.4	Osservazioni	21
2.17	Stabilità interna di sistemi LTI	21
2.17.1	Esempio stabilità del sistema carrello	22
2.18	Retroazione dello stato	23
2.19	Linearizzazione di sistemi non lineari (tempo invarianti)	23

# Controlli Automatici T

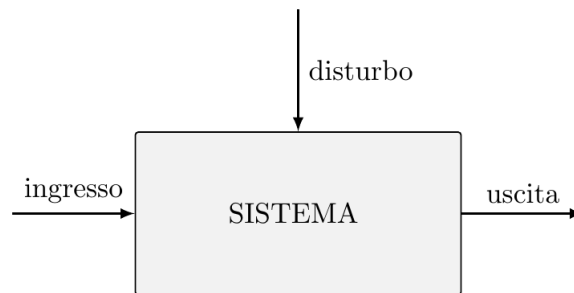
Giuseppe Bumma

October 18, 2023

## 1 Introduzione

L'idea dei **controlli automatici** è sostituire l'intelligenza umana con un sistema automatico (come l'intelligenza artificiale) basata su leggi matematiche e/o algoritmi.

### 1.1 Notazione ed elementi costitutivi



Il **sistema** è un oggetto per il quale si vuole ottenere un comportamento desiderato.

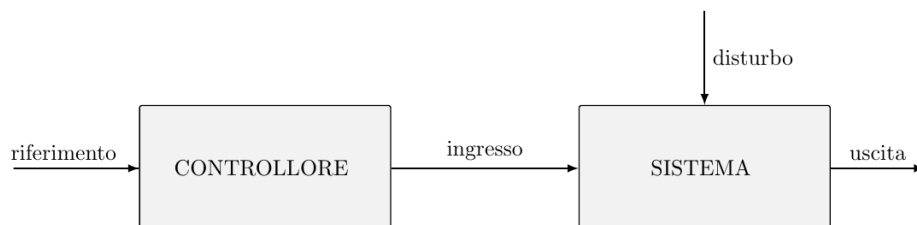
Esempi di sistema sono: impianto (industriale), macchinario (braccio robotico, macchina a controllo numerico, etc...), veicolo (auto, velivolo, drone, etc...), fenomeno fisico (condizioni atmosferiche), sistema biologico, sistema sociale. L'obiettivo è che l'andamento nel tempo di alcune variabili segua un segnale di riferimento.

Altri elementi sono:

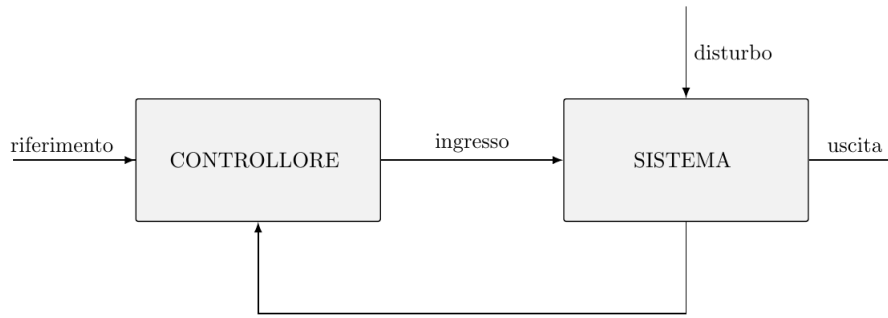
- Controllore: unità che determina l'andamento della variabile di controllo (ingresso);
- Sistema di controllo: sistema (processo) + controllore;
- Sistemi di controllo naturali: meccanismi presenti in natura, come quelli presenti nel corpo umano (temperatura corporea costante, ritmo cardiaco, etc...);
- Sistemi di controllo manuali: è presente l'azione dell'uomo;
- Sistemi di controllo automatico: uomo sostituito da un dispositivo.

### 1.2 Controllo in anello aperto e anello chiuso

Controllo in anello aperto ("feedforward"): il controllore utilizza solo il segnale di riferimento



Controllo in anello chiuso ("feedback" o retroazione): il controllore utilizza il segnale di riferimento e la variabile controllata ad ogni istante di tempo



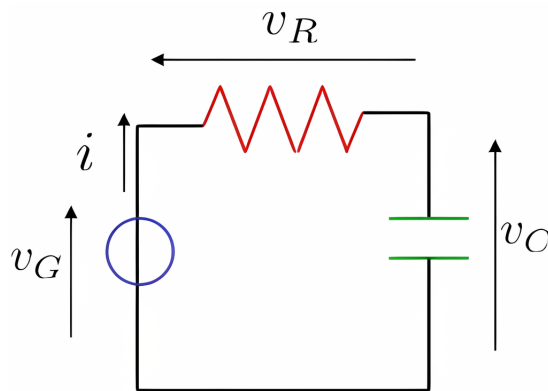
Il controllo in retroazione è un paradigma centrale nei controlli automatici.

### 1.3 Progetto di un sistema di controllo

I passi per progettare un sistema di controllo sono:

- definizione delle specifiche: assegnazione comportamento desiderato, qualità del controllo, costo,...
- modellazione del sistema (controllo e test): complessità del modello (compromesso), definizione ingressi/uscite, codifica del modello, validazione in simulazione
- analisi del sistema: studio proprietà “strutturali”, fattibilità specifiche
- sintesi legge di controllo: è basata su modello, analisi sistema controllato, stima carico computazionale
- simulazione sistema controllato: test su modello di controllo, test realistici (modello complesso, ritardi, quantizzazione, disturbi, ...)
- scelta elementi tecnologici: sensori/attuatori, elettronica di acquisizione/attuazione, dispositivo di elaborazione
- sperimentazione: hardware in the loop, prototipazione rapida, realizzazione prototipo definitivo

### 1.4 Esempio di sistema di controllo: circuito elettrico



La legge che usiamo per definire il circuito (il nostro sistema) è la *legge delle tensioni*

$$v_R(t) = v_G(t) - v_C(t)$$

le leggi del condensatore e del resistore sono

$$C \cdot \dot{v}_C(t) = i(t)$$

$$v_R(t) = R \cdot i(t)$$

Scrivendo la formula in termini di  $v_C(t)$  (“stato interno”) e  $v_G(t)$  (“ingresso di controllo”)

$$\dot{v}_C(t) = \frac{1}{RC} (v_G(t) - v_C(t))$$

## 2 Sistemi in forma di stato

### 2.1 Sistemi continui

I *sistemi continui* sono sistemi in cui il tempo è una variabile reale:  $t \in \mathbb{R}$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

equazione di stato

$$\dot{y}(t) = h(x(t), u(t), t)$$

equazione (trasformazione) di uscita

Definiamo inoltre  $t_0$  come tempo iniziale e  $x(t_0) = x_0$  come stato iniziale.

**N.B.**  $\dot{x}(t) := \frac{d}{dt}x(t)$ .

Notazione:

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$  stato del sistema all'istante  $t$
- $u(t) \in \mathbb{R}^m$  ingresso del sistema all'istante  $t$
- $y(t) \in \mathbb{R}^p$  uscita del sistema all'istante  $t$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ u_m(t) \end{bmatrix} \quad y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ y_p(t) \end{bmatrix}$$

Da notare che  $x(t)$  è un vettore mentre  $x_1, \dots, x_n$  sono scalari.

$x(t)$  è una variabile interna che descrive il comportamento del sistema.

#### 2.1.1 Equazione di stato

L'*equazione di stato* è un'equazione ordinaria (ODE) vettoriale del primo ordine (cioè l'ordine massimo delle derivate è 1)

$$\dot{x}_1(t) = f_1(x(t), u(t), t)$$

...

$$\dot{x}_n(t) = f_n(x(t), u(t), t)$$

$\mathbb{R}^n$  è detto spazio di stato, con  $n$  ordine del sistema. La funzione di stato è  $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x(t), u(t), t) \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ f_n(x(t), u(t), t) \end{bmatrix} := f(x(t), u(t), t)$$

Avere solo derivate prime non è limitato, perché ad esempio posso inserire una prima variabile come derivata prima e una seconda variabile come derivata prima della prima variabile.

#### 2.1.2 Equazione di uscita

L'equazione di uscita è un'equazione algebrica

$$y_1(t) = h_1(x(t), u(t), t)$$

...

$$y_p(t) = h_p(x(t), u(t), t)$$

$h: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$  funzione di uscita

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ y_p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(x(t), u(t), t) \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ h_p(x(t), u(t), t) \end{bmatrix} := h(x(t), u(t), t)$$

Se la soluzione  $x(t)$  a partire da un istante iniziale  $t_0$  è univocamente determinata da  $x(t_0)$  e  $u(\tau)$  con  $\tau \geq t_0$ , allora il sistema è detto **causale**, cioè lo stato dipende solo da ciò che accade in passato. Sotto opportune ipotesi di regolarità della funzione  $f$  si dimostra esistenza e unicità della soluzione dell'equazione (differenziale) di stato (Teorema di Cauchy-Lipschitz).

## 2.2 Sistemi discreti

Nei *sistemi discreti* il tempo  $t$  è una variabile intera,  $t \in \mathbb{Z}$ .

$$x(t+1) = f(x(t), u(t), t)$$

equazione di stato

$$y(t) = h(x(t), u(t), t)$$

equazione (trasformazione) di uscita

L'equazione di stato è un'equazione alle differenze finite (FDE).

Notazione:

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$  stato del sistema all'istante  $t$
- $u(t) \in \mathbb{R}^m$  ingresso del sistema all'istante  $t$
- $y(t) \in \mathbb{R}^p$  uscita del sistema all'istante  $t$

$x(t)$ ,  $u(t)$  e  $y(t)$  sono uguali ai sistemi continui.

Per modellare sistemi discreti nel codice basta un ciclo `for`.

## 2.3 Esempio circuito elettrico

Riprendiamo l'esempio del **circuito elettrico**; la formula trovata è

$$\underbrace{\dot{v}_C(t)}_{\dot{x}(t)} = \frac{1}{RC} \underbrace{(v_G(t) - v_C(t))}_{u(t) - x(t)}$$

In questo caso lo stato del sistema  $x(t)$  è caratterizzato dalla variabile  $v_C(t)$ , l'ingresso dalla variabile  $v_G(t)$ . Supponiamo quindi di misurare (con un sensore) la tensione ai capi della resistenza, allora l'uscita del nostro sistema sarà  $v_R(t)$

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{RC} (u(t) - x(t))$$

$$f(x, u) = \frac{1}{RC} (u - x)$$

da notare che in questo caso  $f$  non è funzione del tempo.

$$v_R(t) = v_G(t) - v_C(t) \implies y(t) = u(t) - x(t)$$

### 2.3.1 Esempio con parametri che variano nel tempo

Supponiamo che la resistenza sia una funzione del tempo

$$R(t) = \bar{R} \left( 1 - \frac{1}{2} e^{-t} \right)$$

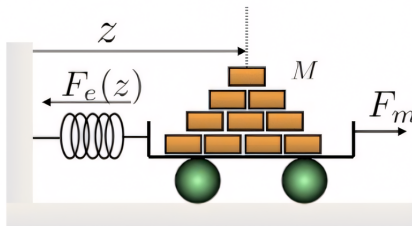
allora

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{R(t)C} (u(t) - x(t))$$

$$f(x, u, t) = \frac{1}{R(t)C} (u - x)$$

in questo caso  $f$  è funzione del tempo.

## 2.4 Esempio carrello



La legge che usiamo è la legge di Newton, prendendo  $z$  come posizione del centro di massa

$$M\ddot{z} = -F_e + F_m$$

con  $M$  massa e  $F_e$  data da

$$F_e(z(t), t) = k(t)z(t)$$

quindi la nostra equazione diventa

$$M\ddot{z}(t) = -k(t)z(t) + F_m(t)$$

Siccome nella nostra formula compare una derivata seconda di una variabile ci conviene definire lo stato del sistema con la variabile stessa e la derivata prima della variabile.

Definiamo quindi  $x_1 := z$  e  $x_2 := \dot{z}$ , con stato  $x := [x_1 x_2]^T$ , e  $u := F_m$  (ingresso).

Quindi possiamo scrivere, tenendo conto che  $\dot{x}_2(t) = \ddot{z}$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{k}{M}x_1(t) + \frac{u(t)}{M}$$

$$f(x, u) = \begin{bmatrix} f_1(x, u) \\ f_2(x, u) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{k}{M}x_1 + \frac{u}{M} \end{bmatrix}$$

Supponiamo di misurare  $z(t)$  (sensore posizione), allora  $y := z$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{k}{M}x_1(t) + \frac{u(t)}{M}$$

$$y(t) = x_1(t)$$

Sia  $k(t) = k$  e, ricordando la formula dell'energia cinetica  $E_k = \frac{1}{2}mv^2$  e la formula dell'energia elastica  $U = \frac{1}{2}k\Delta x^2$ , consideriamo come uscita l'energia totale  $E_T(t) = \frac{1}{2}(kz^2(t) + M\dot{z}^2(t))$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

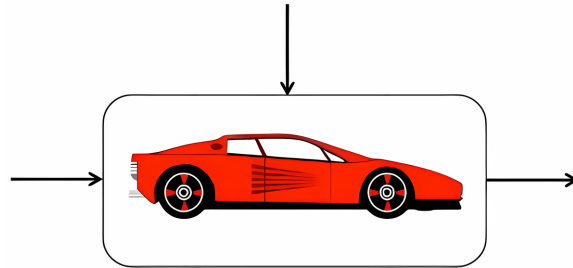
$$\dot{x}_2(t) = -\frac{k}{M}x_1(t) + \frac{u(t)}{M}$$

$$y(t) = \frac{1}{2}(k(t)x_1^2(t) + Mx_2^2(t))$$

quindi  $h(x) := \frac{1}{2}(kx_1^2 + Mx_2^2)$ .

**N.B.** Il risultato (l'uscita) vale, di solito, solo per il mio modello, in base a come l'ho impostato; nella realtà potrebbe essere diverso.

## 2.5 Esempio auto in rettilineo



Scriviamo la legge di Newton

$$M\ddot{z} = F_{\text{drag}} + F_m$$

con  $M$  massa e  $F_{\text{drag}}$  data da

$$F_{\text{drag}} = -b\dot{z}$$

Definiamo  $x_1 := z$  e  $x_2 := \dot{z}$  (stato  $x := [x_1 x_2]^T$ ) e  $u := F_m$  (ingresso). Supponiamo di misurare  $z(t)$  (sensore posizione), allora  $y := z$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{b}{M}x_2(t) + \frac{1}{M}u(t) \\ y(t) &= x_1(t)\end{aligned}$$

Proviamo a progettare un sistema per il *cruise control*.

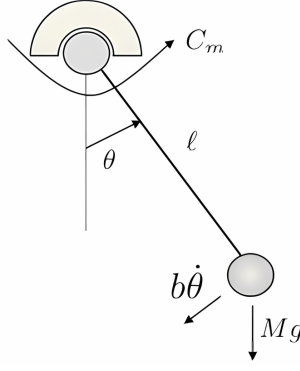
L'equazione della dinamica è

$$M\ddot{z}(t) = -b\dot{z}(t) + F_m(t)$$

Siccome siamo interessati a controllare la velocità e non la posizione, allora consideriamo come stato solo la velocità:  $x := \dot{z}$ ,  $u := F_m$ . Supponiamo di misurare  $\dot{z}(t)$  (sensore velocità), allora  $y := x$

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -\frac{b}{M}x(t) + \frac{1}{M}u(t) \\ y(t) &= x(t)\end{aligned}$$

## 2.6 Esempio pendolo



Scriviamo l'equazione dei momenti

$$M\ell^2\ddot{\theta} = C_{\text{grav}} + C_{\text{drag}} + C_m$$

con  $M$  massa e  $C_{\text{grav}}$  e  $C_{\text{drag}}$  date da

$$C_{\text{grav}} = Mg\ell \sin(\theta)$$

$$C_{\text{drag}} = -b\dot{\theta}$$

con  $b$  coefficiente d'attrito.

Scriviamo l'equazione della dinamica, partendo dalla formula iniziale dei momenti

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{\ell} \sin(\theta(t)) - \frac{b}{M\ell^2} \dot{\theta}(t) + \frac{1}{M\ell^2} C_m(t)$$

Definiamo quindi  $x_1 := \theta$  e  $x_2 := \dot{\theta}$  (stato  $x := [x_1 x_2]^T$ ) e  $u := C_m$  (ingresso).

Supponiamo di misurare  $\theta$  (sensore angolo), allora  $y := \theta$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{g}{\ell} \sin(x_1(t)) - \frac{b}{M\ell^2} x_2(t) + \frac{1}{M\ell^2} u(t) \\ y(t) &= x_1(t)\end{aligned}$$

Se misuriamo invece la posizione verticale, allora  $y := -\ell \cos(\theta)$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{g}{\ell} \sin(x_1(t)) - \frac{b}{M\ell^2} x_2(t) + \frac{1}{M\ell^2} u(t) \\ y(t) &= -\ell \cos(\theta)\end{aligned}$$

## 2.7 Traiettorie di un sistema

Dato un istante iniziale  $t_0$  e uno stato iniziale  $x_{t_0}$ , la funzione del tempo  $(x(t), u(t))$ ,  $t > t_0$ , che soddisfa l'equazione di stato  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$  si dice *traiettoria* (movimento) del sistema. In particolare,  $x(t)$  si dice *traiettoria dello stato*. Consistentemente,  $y(t)$  si dice *traiettoria dell'uscita*.

**N.B.** per sistemi senza ingresso (quindi non forzati) la traiettoria dello stato  $x(t)$ ,  $t > t_0$  è determinata solo dallo stato iniziale  $x_{t_0}$ .

### 2.7.1 Esempio

Definiamo un sistema con stato  $x$  e stato iniziale  $x_0$

$$x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad x_0 := \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad t_0 = 0$$
$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = u(t)$$

Assegno a  $x_1$ ,  $x_2$  e  $u(t)$  le seguenti equazioni

$$\overline{x}_1(t) = 5 + 3t + t^2$$
$$\overline{x}_2(t) = 3 + 2t$$
$$\overline{u}(t) = 2$$

Se le equazioni di  $\overline{x}_1$  e  $\overline{x}_2$  soddisfano le condizioni iniziali e la funzione di stato ( $\dot{x}_1$  e  $\dot{x}_2$ ) allora quelle equazioni sono la traiettoria del sistema.

Infatti

$$\overline{x}_0 = \begin{bmatrix} 5 + 3t + t^2 \\ 3 + 2t \end{bmatrix}_{t=0} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$
$$\overline{x}_0 = \begin{bmatrix} 5 + 3t + t^2 \\ 3 + 2t \end{bmatrix}_{t=0} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} 5 + 3t + t^2 \\ 3 + 2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + 2t \\ 2 \end{bmatrix}$$

## 2.8 Equilibrio di un sistema

Dato un sistema (non forzato)  $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$ , uno stato  $x_e$  si dice *equilibrio del sistema* se  $x(t) = x_e$ ,  $t \geq t_0$  è una traiettoria del sistema.

Dato un sistema (forzato)  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$ ,  $(x_e, u_e)$  si dice *coppia di equilibrio* del sistema se  $(x(t), u(t)) = (x_e, u_e)$ ,  $t \geq t_0$ , è una traiettoria del sistema.

Per un sistema (tempo invariante continuo)  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$  data una coppia di equilibrio  $(x_e, u_e)$  vale  $f(x_e, u_e) = 0$ . Se il sistema è non forzato, dato un equilibrio  $x_e$  vale  $f(x_e) = 0$ .

### 2.8.1 Esempio pendolo

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \qquad = f_1(x(t), u(t))$$
$$\dot{x}_2(t) = -\frac{G}{\ell} \sin(x_1(t)) - \frac{b}{M\ell^2} x_2(t) + \frac{1}{M\ell^2} u(t) \qquad = f_2(x(t), u(t))$$

Siccome sappiamo che, data una coppia di equilibrio  $(x_e, u_e)$ , vale  $f(x_e, u_e) = 0$ , allora per trovare l'equilibrio del pendolo imponiamo

$$f(x_e, u_e) = 0$$

cioè:

$$\begin{cases} x_{2e}(t) = 0 \\ -\frac{G}{\ell} \sin(x_{1e}) - \frac{bx_{2e}}{M\ell^2} + \frac{1}{M\ell^2} u_e = 0 \end{cases}$$



sostituendo  $x_{2e}(t) = 0$  nell'ultima equazione

$$-\frac{G}{\ell} \sin(x_{1e}) + \frac{1}{M\ell^2} u_e = 0 \implies u_e = MG\ell \sin(x_{1e})$$

In conclusione, le coppie di equilibrio del sistema sono tutti fli  $(x_{1e}, x_{2e}, u_e)$  che soddisfano

$$\begin{cases} u_e = MG\ell \sin(x_{1e}) \\ x_{2e} = 0 \end{cases}$$

## 2.9 Classificazione dei sistemi in forma di stato

La classe generale è  $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^p$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

equazione di stato

$$y(t) = h(x(t), u(t), t)$$

equazione di uscita

- I sistemi **monovariabili** (SISO, Single Input Single Output) sono una sottoclasse di sistemi **multivariabili** (MIMO, Multiple Input Multiple Output); sono tali se  $m = p = 1$ , altrimenti sono dei sistemi MIMO;
- I sistemi **strettamente propri** sono una sotto classe dei **sistemi propri**; sono tali se  $y(t) = h(x(t), t)$ , quindi se l'uscita dipende esclusivamente dall'ingresso, chiamati quindi sistemi causali (tutti i sistemi che abbiamo visto fin'ora sono sistemi propri).
- I sistemi **non forzati** sono una sotto classe dei **sistemi forzati**; un esempio di sistema non forzato è il seguente

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t)$$

$$y(t) = h(x(t), t)$$

- I sistemi **tempo invarianti** sono una sotto classe di sistemi **tempo varianti**.

I tempo invarianti sono tali se, data una traiettoria  $(x(t), u(t)), t \geq t_0$ , con  $x(t_0) = x_0$ , per ogni  $\Delta \in \mathbb{R}$  vale che  $x(t_0 + \Delta) = x_0$  allora  $(x_\Delta(t), u_\Delta(t)) = (x(t - \Delta), u(t - \Delta))$  è una traiettoria.

Si può dimostrare che sistemi tempo invarianti sono del tipo

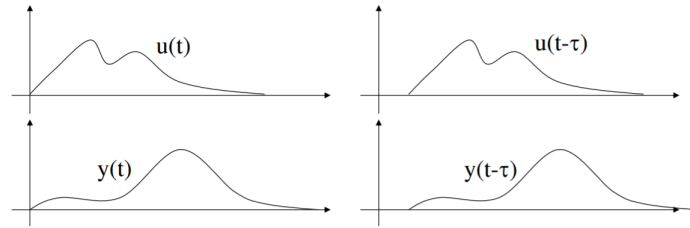
$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

$$x(0) = x_0$$

$$y(t) = h(x(t), u(t))$$

e senza perdita di generalità possiamo scegliere  $t_0 = 0$ .

Graficamente:



- I **sistemi lineari** sono una sotto classe di **sistemi non lineari**.

I sistemi lineari sono tali se le funzioni di stato e di uscita sono lineari in  $x$  e  $u$ :

$$\dot{x}_1(t) = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \dots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_{11}(t)u_1(t) + b_{12}(t)u_2(t) + \dots + b_{1m}(t)u_m(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \dots + a_{2n}(t)x_n(t) + b_{21}(t)u_1(t) + b_{22}(t)u_2(t) + \dots + b_{2m}(t)u_m(t)$$

...

...

...

$$\dot{x}_n(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \dots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_{n1}(t)u_1(t) + b_{n2}(t)u_2(t) + \dots + b_{nm}(t)u_m(t)$$

per  $y(t)$  invece

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= c_{11}(t)x_1(t) + c_{12}(t)x_2(t) + \dots + c_{1n}(t)x_n(t) + d_{11}(t)u_1(t) + d_{12}(t)u_2(t) + \dots + d_{1m}(t)u_m(t) \\
y_2(t) &= c_{21}(t)x_1(t) + c_{22}(t)x_2(t) + \dots + c_{2n}(t)x_n(t) + d_{21}(t)u_1(t) + d_{22}(t)u_2(t) + \dots + d_{2m}(t)u_m(t) \\
&\dots \\
&\dots \\
&\dots \\
y_p(t) &= c_{p1}(t)x_1(t) + c_{p2}(t)x_2(t) + \dots + c_{pn}(t)x_n(t) + d_{p1}(t)u_1(t) + d_{p2}(t)u_2(t) + \dots + d_{pm}(t)u_m(t)
\end{aligned}$$

## 2.10 Proprietà dei sistemi lineari

### 2.10.1 Sistemi lineari in forma matriciale

Definiamo le matrici  $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C(t) \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $D(t) \in \mathbb{R}^{p \times m}$

$$\begin{aligned}
A(t) &= \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} & B(t) &= \begin{bmatrix} b_{11}(t) & \dots & b_{1m}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1}(t) & \dots & b_{nm}(t) \end{bmatrix} \\
C(t) &= \begin{bmatrix} c_{11}(t) & \dots & c_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ c_{p1}(t) & \dots & c_{pn}(t) \end{bmatrix} & D(t) &= \begin{bmatrix} d_{11}(t) & \dots & d_{1m}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ d_{pn1}(t) & \dots & d_{pm}(t) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

quindi scriviamo

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = A(t) \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + B(t) \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}$$

che equivale a

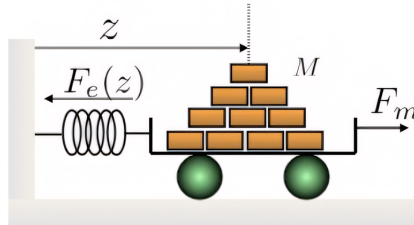
$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\
y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t)
\end{aligned}$$

## 2.11 Sistemi lineari tempo-invarianti

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\
y(t) &= Cx(t) + Du(t)
\end{aligned}$$

con  $A, B, C, D$  matrici costanti.

### 2.11.1 Esempio carrello



$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\
\dot{x}_2(t) &= -\frac{k(t)}{M}x_1(t) + \frac{1}{M}u(t) \\
y(t) &= x_1(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_1(x, u, t) &= x_2 \\
f_2(x, u, t) &= -\frac{k(t)}{M}x_1 + \frac{1}{M}u
\end{aligned}$$

$f_2$  dipende esplicitamente da  $t$  attraverso  $k(t)$  quindi è un sistema tempo variante. Se  $k(t) = \bar{k}$  per ogni  $t$  allora tempo invariante.

Siccome  $f_1$  e  $f_2$  dipendono linearmente da  $x$  e  $u$  il sistema è lineare. (Se  $k(t) = \bar{k}$  il sistema è lineare tempo invariante.)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k(t)}{M} & 0 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}}_B u(t)$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{0}_D u(t)$$

per  $k$  costante:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

### 2.11.2 Sistemi lineari tempo-invarianti SISO

I sistemi lineari tempo-invarianti single input single output (SISO) sono caratterizzati dalle matrici  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ , ovvero  $B$  è un vettore,  $C$  è un vettore riga e  $D$  è uno scalare.

## 2.12 Principio di sovrapposizione degli effetti

Prendiamo un sistema lineare (anche tempo-variante)

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{aligned}$$

Sia  $(x_a(t), u_a(t))$  traiettoria con  $x_a(t_0) = x_{0a}$ .

Sia  $(x_b(t), u_b(t))$  traiettoria con  $x_b(t_0) = x_{0b}$ .

Allora  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  dato lo stato iniziale  $x_{ab}(t_0) = \alpha x_{0a} + \beta x_{0b}$ , si ha che

$$(x_{ab}(t), u_{ab}(t)) = (\alpha x_a(t) + \beta x_b(t), \alpha u_a(t) + \beta u_b(t))$$

è traiettoria del sistema, ovvero applicando come ingresso  $u_{ab} = \alpha u_a(t) + \beta u_b(t)$  la traiettoria di stato è  $x_{ab}(t) = \alpha x_a(t) + \beta x_b(t)$

$$\left. \begin{aligned} \alpha x_{0a}(t) + \beta x_{0b}(t) \\ \alpha u_a(t) + \beta u_b(t) \end{aligned} \right\} \implies \alpha x_a(t) + \beta x_b(t)$$

**IMPORTANTE:** non vale per i sistemi non lineari.

### Dimostrazione

Per dimostrarlo dobbiamo provare che soddisfa l'equazione differenziale

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x_{ab}(t) &= \alpha \dot{x}_a(t) + \beta \dot{x}_b(t) \\ &= \alpha (A(t)x_a(t) + B(t)u_a(t)) + \beta (A(t)x_b(t) + B(t)u_b(t)) \\ &= A(t)(\alpha x_a(t) + \beta x_b(t)) + B(t)(\alpha u_a(t) + \beta u_b(t)) \end{aligned}$$

Per sistemi lineari sotto opportune ipotesi su  $A(t)$  e  $B(t)$  si può dimostrare che la soluzione è unica. Si dimostra lo stesso anche per l'uscita.

## 2.13 Evoluzione libera e evoluzione forzata

Sfruttando il principio di sovrapposizione degli effetti prendiamo due sistemi (A) e (B)

$$\begin{aligned} \text{(A)} \quad x(t_0) &= x_0 = x_{0a} \neq 0 \\ u_a(t) &= 0 \quad \forall t \geq t_0 \\ \text{(B)} \quad x_{0b} &= 0 \\ u_b(t) &= u(t) \neq 0 \end{aligned}$$

chiamiamo  $x_a(t) = x_\ell(t)$  e  $x_b(t) = x_f(t)$

$$\alpha x_{0a} + \beta x_{0b} = \underbrace{\alpha}_1 x_0 = x_0$$

$$\alpha u_a(t) + \beta u_b(t) = \underbrace{\beta}_1 u(t) = u(t)$$

quindi

$$x_{ab}(t) = \underbrace{x_\ell(t)}_{\text{evoluzione libera}} + \underbrace{x_f(t)}_{\text{evoluzione forzata}}$$

L'**evoluzione libera** è definita come  $x_\ell(t)$  per  $t \geq t_0$ , tale che  $x_\ell(t_0) = x_0$  e  $u_\ell(t) = 0$  per  $t \geq t_0$ , e uscita  $y_\ell(t) = C(t)x_\ell(t)$ .  
L'**evoluzione forzata** è definita come  $x_f(t)$  per  $t \geq t_0$ , tale che  $x_f(t_0) = 0$  e  $u_f(t) = u(t)$  per  $t \geq t_0$ , e uscita  $y_f(t) = C(t)x_f(t) + D(t)u(t)$ .

**IMPORTANTE:** non vale per i sistemi non lineari.

### 2.13.1 Traiettorie di un sistema LTI: esempio scalare

Definiamo un sistema lineare tempo invariante (LTI) scalare  $x \in \mathbb{R}$ ,  $u \in \mathbb{R}$ ,  $y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= ax(t) + bu(t) & x(0) &= x_0 \\ y(t) &= cx(t) + du(t) \end{aligned}$$

dall'analisi matematica possiamo scrivere il sistema come soluzione omogenea + soluzione particolare

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{at}x_0 + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau \\ y(t) &= ce^{at}x_0 + c \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau + du(t) \end{aligned}$$

ricordiamo che la funzione esponenziale si può scrivere come

$$e^{at} = 1 + at + \frac{(at)^2}{2!} + \frac{(at)^3}{3!} + \dots$$

### 2.13.2 Traiettorie di un sistema LTI: caso generale

Definiamo un sistema lineare tempo invariante (LTI)  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}^p$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) & x(0) &= x_0 \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underbrace{x(t)}_{\mathbb{R}^n} &= \underbrace{e^{At}}_{\mathbb{R}^{n \times n}} \underbrace{x_0}_{\mathbb{R}^n} + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ y(t) &= Ce^{at}x_0 + c \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t) \end{aligned}$$

Ricordiamo che l'esponenziale di matrice si può scrivere come

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots$$

$$x(t) = \underbrace{e^{At}x_0}_{\text{evoluzione libera}} + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau}_{\text{evoluzione forzata}}$$

$$x_\ell(t) = e^{At}x_0$$

$$x_f(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

### 2.13.3 Esempio sistema non forzato

$$\dot{x}_1(t) = \lambda_1 x_1(t) \quad \dot{x}_2(t) = \lambda_2 x_2(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$A := \Lambda$  matrice diagonale.

Il nostro è un sistema non forzato, quindi c'è solo l'evoluzione libera:

$$x(t) = e^{\Lambda t} x_0$$

$$\begin{aligned} e^{\Lambda t} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} t + \frac{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}^2 t^2}{2!} + \dots \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1^2 t^2}{2!} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2^2 t^2}{2!} \end{bmatrix} + \dots \end{aligned}$$

$$e^{at} = 1 + at + \frac{(at)^2}{2!} + \frac{(at)^3}{3!} + \dots \implies = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$$

Quindi nel caso generale di  $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

### 2.13.4 Proprietà della matrice esponenziale

Esponenziale e cambio di base:

$$e^{TAT^{-1}} = T e^{At} T^{-1}$$

Data una matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , esiste  $J$  matrice diagonale a blocchi, chiamata *matrice di Jordan*, che è unica a meno di permutazioni dei blocchi, tale che

$$A = T^{-1} J T$$

con  $T$  matrice invertibile (matrice del cambio base). Questa formula viene chiamata *forma di Jordan*.

La matrice di Jordan è fatta in questo modo

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & 1 \\ & \lambda_1 & 1 \\ & & \lambda_1 \end{matrix}} & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} \lambda_2 & 1 \\ & \lambda_2 \end{matrix}} & & \\ & & \boxed{\lambda_3} & \\ & & & \ddots \\ & & & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_n & 1 \\ & \lambda_n \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

con  $\lambda_i$  autovalore di  $A$ .

Utilizzando questa forma riconduco il calcolo di  $e^{At}$  al calcolo di

$$e^{\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix} t} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

**IMPORTANTE:** tutti gli elementi di  $e^{At}$  sono del tipo

$$t^q e^{\lambda t}$$

con  $q$  intero e  $\lambda_i$  autovalori di  $A$

## 2.14 Rappresentazioni equivalenti

Effettuiamo un cambio di base mediante una matrice  $T$

$$\hat{x}(t) = Tx(t)$$

ed essendo  $T$  invertibile

$$x(t) = T^{-1}\hat{x}(t)$$

Sostituendo nell'equazione della dinamica si ottiene

$$\underbrace{T \cdot T^{-1} \dot{\hat{x}}(t)}_{\dot{\hat{x}}(t)} = A \underbrace{T^{-1} \hat{x}(t)}_{x(t)} + Bu(t) \cdot T$$

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= TAT^{-1}\hat{x}(t) + TBu(t) \\ y(t) &= CT^{-1}\hat{x}(t) + Du(t)\end{aligned}$$

Allora chiamo  $\hat{A} = TAT^{-1}$ ,  $\hat{B} = TB$ ,  $\hat{C} = CT^{-1}$ ,  $\hat{D} = D$

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t) \\ y(t) &= \hat{C}\hat{x}(t) + \hat{D}u(t)\end{aligned}$$

se  $T$  è una matrice tale che

$$J = TAT^{-1}$$

allora

$$\dot{\hat{x}} = J\hat{x}(t) + TBu(t)$$

$$\hat{x}_\ell(t) = e^{Jt} \hat{x}_0 = T^{-1} e^{Jt} T x_0$$

## 2.15 Modi di un sistema lineare tempo invariante

Prendiamo un sistema lineare tempo invariante con  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}^p$  e  $x(0) = x_0$

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

Indichiamo con  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  gli  $r \leq n$  autovalori (reali o complessi coniugati) distinti della matrice  $A$ , con molteplicità algebrica  $n_1, \dots, n_r \geq 0$  tali che  $\sum_{i=1}^r n_i = n$ .

Le componenti dell'evoluzione libera dello stato  $x_\ell(t)$  si possono scrivere come

$$x_{\ell,j} = \sum_{i=1}^r \sum_{q=1}^{h_i} \gamma_{jiq} t_{q-1} e^{\lambda_i t} \quad j = 1, \dots, n$$

per opportuni valori di  $h_i \leq n_i$ , dove i coefficienti  $\gamma_{jiq}$  dipendono dallo stato iniziale  $x(0)$ .

I termini  $t^{q-1} e^{\lambda_i t}$  sono detti modi naturali del sistema. L'evoluzione libera dello stato è combinazione lineare dei modi.

### 2.15.1 Autovalori complessi

Se la matrice  $A$  è reale e  $\lambda_i = \sigma_i + j\omega_i$  è un autovalore complesso, allora il suo complesso coniugato  $\bar{\lambda}_i = \sigma_i - j\omega_i$  è anch'esso autovalore di  $A$ .

Inoltre si dimostra che i coefficienti  $\gamma_{jiq}$  corrispondenti a  $\lambda_i$  e  $\bar{\lambda}_i$  sono anch'essi complessi coniugati.

Scriviamo l'**esponenziale di autovalori complessi coniugati**; se  $\lambda_i = \sigma_i + j\omega_i$  e  $\bar{\lambda}_i = \sigma_i - j\omega_i$  allora

$$\begin{aligned} e^{\lambda_i t} &= e^{\sigma_i + j\omega_i t} & e^{\bar{\lambda}_i t} &= e^{\sigma_i - j\omega_i t} \\ &= e^{\sigma_i t} e^{j\omega_i t} & &= e^{\sigma_i t} e^{-j\omega_i t} \\ &= e^{\sigma_i t} (\cos(\omega_i t) + j \sin(\omega_i t)) & &= e^{\sigma_i t} (\cos(\omega_i t) - j \sin(\omega_i t)) \end{aligned}$$

Si verifica quindi, per calcolo diretto, che le soluzioni  $x_{\ell,j}(t)$  sono sempre reali e che i modi del sistema corrispondenti ad autovalori complessi coniugati  $\lambda_i$  e  $\bar{\lambda}_i$  sono del tipo

$$t^{q-1} e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \phi_i)$$

con opportuni valori della fase  $\phi_i$ .

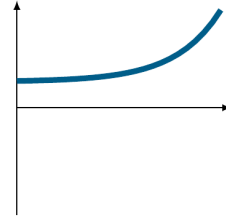
Supponiamo che le molteplicità algebriche  $n_1, \dots, n_r$  degli autovalori di  $A$  coincidano con le molteplicità geometriche (ad esempio quando gli autovalori sono distinti).

Allora i coefficienti  $h_i$  sono tutti pari a 1 e l'espressione dei modi si semplifica in

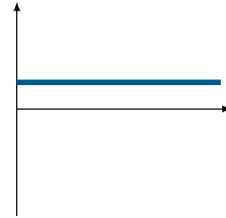
$$\begin{array}{ll} e^{\lambda_i t} & \text{per autovalori reali} \\ e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \phi_i) & \text{per autovalori complessi coniugati} \end{array}$$

**Modi naturali: autovalori reali semplici**

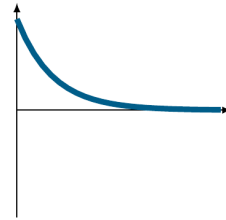
- $e^{\lambda_i t}$ ,  $\lambda_i > 0$



- $e^{\lambda_i t}$ ,  $\lambda_i = 0$

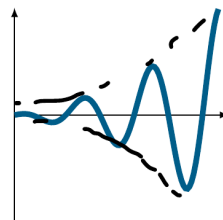


- $e^{\lambda_i t}$ ,  $\lambda_i < 0$

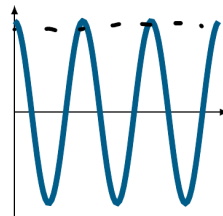


## Modi naturali: autovalori complessi coniugati semplici

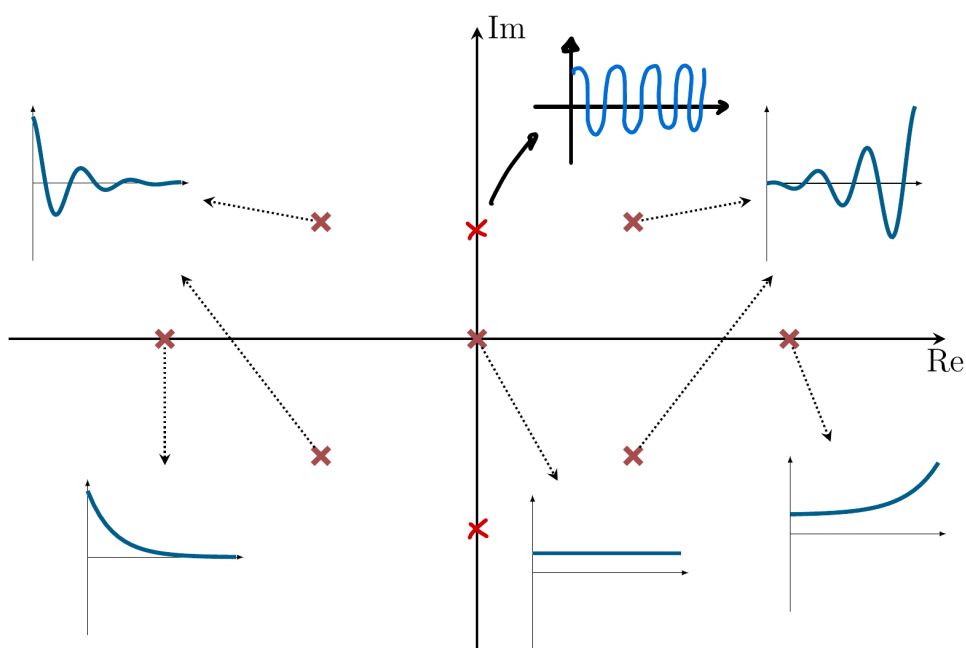
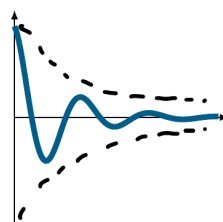
- $e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \phi_i), \sigma_i > 0$



- $e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \phi_i), \sigma_i = 0$



- $e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \phi_i), \sigma_i < 0$



### 2.15.2 Esempio sui modi naturali

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(\lambda I - A) \\ &= \lambda^2 - a^2 \\ &\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = a \\ \lambda_2 = -a \end{cases} \end{aligned}$$



I modi naturali di questo sistema sono

$$e^{at}$$

$$e^{-at}$$

Il modo  $e^{at}$  diverge a infinito, il che non è una cosa "buona" per dei sistemi di controllo, perché ad esempio se si sta realizzando un sistema di controllo della velocità vuol dire che la mia velocità sta aumentando, mentre dovrebbe rimanere fissa in un range.

Non bisogna quindi focalizzarsi sul calcolare con precisione il valore dei modi naturali ma è importante conoscere come si comporta la loro parte reale.

### 2.15.3 Esempio 1

Consideriamo il seguente sistema LTI con  $x \in \mathbb{R}^3$  e  $u \in \mathbb{R}$

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}}_A x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_B u(t)$$

Mediante un cambio di coordinate usando la matrice  $T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  e ponendo  $\hat{x}(t) = Tx(t)$ , il sistema si può riformulare come

$$\dot{\hat{x}}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}}_{\hat{A}=TAT^{-1}} \hat{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\hat{B}=TB} u(t)$$

Gli autovalori di  $\hat{A}$  sono  $-1, -2$  con molteplicità algebrica  $2, 1$ .

Per calcolare l'evoluzione libera consideriamo la formula vista in precedenza

$$\hat{x}_\ell = e^{\hat{A}t} \hat{x}_0$$

Calcoliamo quindi l'esponenziale di matrice  $e^{\hat{A}t}$  per  $\hat{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} e^{\hat{A}t} &= \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}^k \frac{t^k}{k!} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^k}{k!} & t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{k-1}}{k!} & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^k}{k!} & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k t^k}{k!} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

quindi l'evoluzione libera dello stato è

$$\hat{x}_\ell = \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \hat{x}_0$$

- Se ad esempio la condizione iniziale è  $\hat{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , allora

$$\hat{x}_\ell = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Scriviamolo nelle coordinate originali

$$x_\ell(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{T^{-1}} \hat{x}_\ell(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ e^{-t} \end{bmatrix}$$

- Se prendiamo come condizione iniziale  $\hat{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ , allora

$$\hat{x}_\ell = \begin{bmatrix} te^{-t} \\ e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Scriviamolo nelle coordinate originali

$$x_\ell(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{T^{-1}} \hat{x}_\ell(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} + te^{-t} \\ e^{-t} \\ e^{-t} + te^{-t} \end{bmatrix}$$

- Se prendiamo come condizione iniziale  $\hat{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ , allora

$$\hat{x}_\ell = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Nelle coordinate originali:

$$x_\ell(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{T^{-1}} \hat{x}_\ell(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix}$$

#### 2.15.4 Esempio carrello

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{k(t)}{M}x_1(t) + \frac{1}{M}u(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 0u(t) \end{aligned}$$

Consideriamo  $k$  costante, quindi sistema LTI.

Gli autovalori della matrice  $A$  sono  $\lambda_1 = j\sqrt{\frac{k}{M}}, \lambda_2 = -j\sqrt{\frac{k}{M}}$  immaginari puri.

Applichiamo un controllo  $u = -hx_2$ . Le equazioni di stato del sistema diventano:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{k}{M}x_1(t) - \frac{h}{M}x_2(t) \end{aligned}$$

in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{h}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Quindi calcoliamo gli autovalori della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{h}{M} \end{bmatrix} \quad A - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{h}{M} - \lambda \end{bmatrix}$$

calcolando il determinante e ponendolo a zero si trova il polinomio caratteristico associato a essa

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda \frac{h}{M} + \frac{k}{M} \Rightarrow \lambda_1 = -\frac{h}{2M} + \sqrt{\frac{h^2}{4M^2} - \frac{k}{M}}$$

$$\lambda_2 = -\frac{h}{2M} - \sqrt{\frac{h^2}{4M^2} - \frac{k}{M}}$$

le cui soluzioni sono gli autovalori della matrice A.

Prendiamo ora in considerazione la quantità sotto radice; è evidente che se  $h^2 > 4Mk$  gli autovalori sono reali, mentre se  $h^2 < 4Mk$  sono complessi coniugati.

Se invece  $h^2 = 4Mk$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{h}{2M}$ , con molteplicità algebrica pari a 2. Si può dimostrare che la molteplicità geometrica è pari a 1, quindi il blocco di Jordan sarà  $2 \times 2$  (guardare 2.13.4)

$$J = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{h}{2M} & 1 \\ 0 & -\frac{h}{2M} \end{bmatrix} \quad e^{Jt} = e^{-\frac{h}{2M}t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{x}_\ell = \begin{bmatrix} e^{-\frac{h}{2M}t} \hat{x}_1(0) + te^{-\frac{h}{2M}t} \hat{x}_2(0) \\ e^{-\frac{h}{2M}t} \hat{x}_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{1\ell}(t) \\ \hat{x}_{2\ell}(t) \end{bmatrix}$$

Quindi i modi naturali del sistema sono

$$e^{-\frac{h}{2M}t} \quad te^{-\frac{h}{2M}t}$$

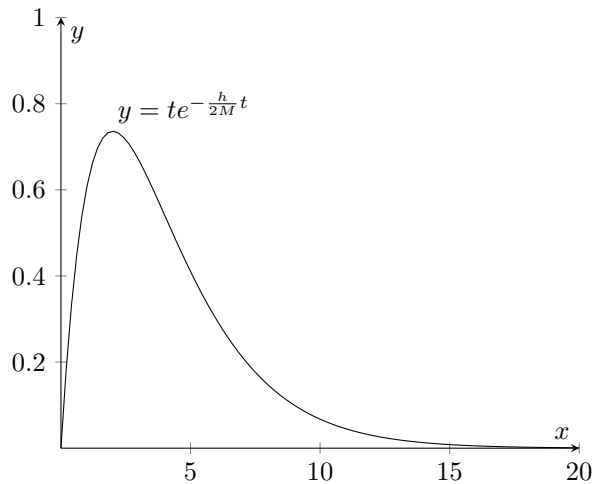
da notare che anche si effettua il cambio di coordinate i modi del sistema non cambiano.

- Supponiamo  $\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ , allora

$$\hat{x}_\ell(t) = \begin{bmatrix} e^{-\frac{h}{2M}t} \hat{x}_1(0) \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Supponiamo  $\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ , allora

$$\hat{x}_\ell(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-\frac{h}{2M}t} \hat{x}_2(0) \end{bmatrix}$$



Si nota dal grafico che se  $-\frac{h}{2M}$  è "grande" il modo va a zero, quindi sono in un punto di equilibrio.

- Se  $h = 4Mk = 0$  con  $M > 0, h = 0, k = 0$ , il sistema diventa

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

i cui modi naturali sono  $1, t$ . È evidente come si possano scrivere queste equazioni differenziali come combinazione lineare dei modi:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1(0) + x_2(0)t \\ x_2(t) &= x_2(0) \end{aligned}$$

## 2.16 Stabilità interna

### 2.16.1 Richiami sull'equilibrio di un sistema

Prendiamo un sistema lineare tempo invariante

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

Poniamo  $u(t) = u_e \forall t \geq 0$ , allora

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u_e) \quad x(0) = x_0$$

Esiste, per un sistema di questo tipo, una  $x_e$  tale che se  $x(0) = x_e \implies x(t) = x_e \forall t \geq 0$ , quindi tale che se lo stato iniziale è costante la  $x(t)$  rimane costante in ogni istante di tempo?

Chiamo  $x_e$  equilibrio,  $(x_e, u_e)$  la chiamo coppia stato-ingresso di equilibrio.

Proprietà fondamentale di una coppia di equilibrio è che

$$f(x_e, u_e) = 0$$

### 2.16.2 Definizioni

Per sistemi tempo-invarianti (anche se si può generalizzare) la *stabilità interna* di un sistema è l'insieme delle conseguenze sulla traiettoria legate a incertezze sullo stato iniziale con ingressi fissi e noti.

### 2.16.3 Stabilità interna per sistemi non forzati

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad x_e \text{ equilibrio}$$

**Equilibrio stabile:** uno stato di equilibrio  $x_e$  si dice stabile se  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$  tale che  $\forall x_0 : \|x_0 - x_e\| \leq \delta$  allora risulti  $\|x(t) - x_e\| < \epsilon \forall t \geq 0$ .

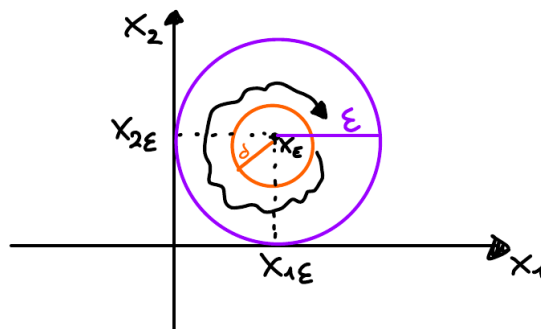
**Equilibrio instabile:** uno stato di equilibrio  $x_e$  si dice instabile se non è stabile.

**Equilibrio attrattivo:** uno stato di equilibrio  $x_e$  si dice attrattivo se  $\exists \delta$  tale che  $\forall x_0 : \|x_0 - x_e\| \leq \delta$  allora risulti  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_e\| = 0$ ; quindi se il sistema è in equilibrio solo a infinito.

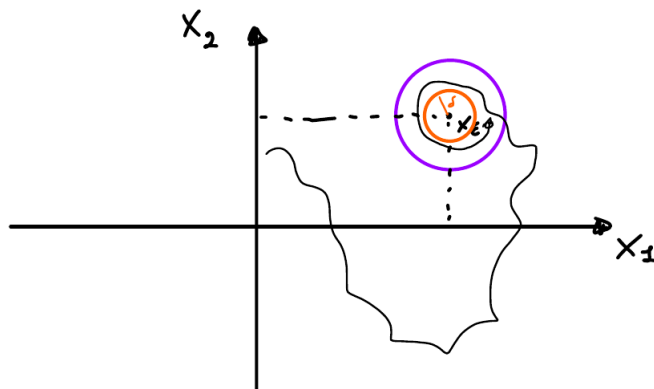
**Equilibrio asintoticamente stabile:** uno stato di equilibrio  $x_e$  si dice asintoticamente stabile se è stabile e attrattivo.

**Equilibrio marginalmente stabile:** uno stato di equilibrio si dice marginalmente stabile se è stabile ma non asintoticamente.

### Rappresentazione grafica di un sistema in equilibrio stabile



## Rappresentazione grafica di un sistema in equilibrio attrattivo

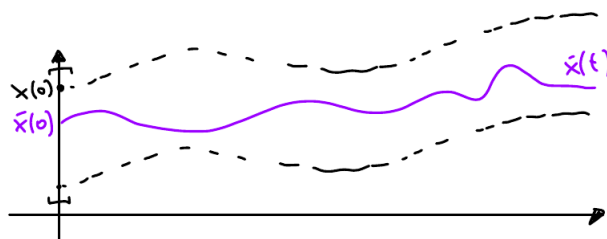


### 2.16.4 Osservazioni

Le definizioni date sottintendono la parola locale, ovvero che la proprietà vale in un intorno dello stato di equilibrio  $x_e$ .

**Stabilità globale:** le proprietà di stabilità e asintotica stabilità sono globali se valgono per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$ , invece che valere solo per  $x_0$  tale che  $\|x(0) - x_e\| \leq \delta$ .

**Stabilità di una traiettoria:** le definizioni di stabilità si possono generalizzare a una traiettoria  $\bar{x}(t), t \geq 0$ .



## 2.17 Stabilità interna di sistemi LTI

Nei sistemi lineari  $x = 0$  è sempre un equilibrio.

Per sistemi lineari si può dimostrare che tutti gli equilibri e tutte le traiettorie hanno le stesse proprietà di stabilità, tutte uguali a  $x = 0$ . Per questo motivo si parla di **stabilità del sistema**.

### Dimostrazione

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ u(t) = u_e \quad \forall t \geq 0 \end{array} \right\} \implies Ax_e + Bu_e = 0$$

Sia  $\tilde{x}(t) := x(t) - x_e$ , allora

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= \dot{x}(t) - \underbrace{\frac{d}{dt}x_e}_0 \\ &= Ax(t) + Bu_e \\ &= A(\tilde{x}(t) + x_e) + Bu_e \\ &= A\tilde{x}(t) + \underbrace{Ax_e + Bu_e}_0 \end{aligned}$$

quindi

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t)$$

Concludiamo che

$$\tilde{x} = 0 \iff x = x_e$$

cioè per studiare l'equilibrio di un sistema nel generico punto  $x_e$  posso studiare l'equilibrio del sistema nell'origine.

### Teorema

Un sistema LTI è **asintoticamente stabile** se e solo se tutti gli autovalori hanno parte reale strettamente negativa.

**N.B.** Se gli autovalori hanno parte reale strettamente negativa i modi del sistema tendono a 0 (2.15.1).

### Teorema

Un sistema LTI è stabile se e solo se tutti gli autovalori hanno parte reale minore o uguale a zero e tutti gli autovalori a parte reale nulla hanno molteplicità geometrica uguale alla molteplicità algebrica (i mini blocchi di Jordan associati hanno dimensione uno).

### Osservazione

Si ha instabilità se almeno un autovalore ha parte reale positiva o se almeno un autovalore con parte reale nulla ha molteplicità algebrica maggiore della molteplicità geometrica.

### Osservazione

La stabilità asintotica di sistemi LTI è sempre globale

$$\begin{aligned}x(0) = x_0 &\implies x(t) \quad t \geq 0 \\x(0) = \alpha x_0 &\implies \alpha x(t) \quad t \geq 0\end{aligned}$$

### Proprietà

Se un sistema LTI è globalmente asintoticamente stabile,  $x = 0$  è l'unico equilibrio.

**Nota:** anche per sistemi non lineari se  $x_e$  è GAS (Globalmente Asintoticamente Stabile) allora è l'unico equilibrio.

Questo perché

#### 2.17.1 Esempio stabilità del sistema carrello

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{k(t)}{M}x_1(t) + \frac{1}{M}u(t) \\ y(t) &= x_1(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 0u(t)\end{aligned}$$

Consideriamo  $k$  costante, quindi sistema LTI.

Gli autovalori della matrice  $A$  sono  $\lambda_1 = j\sqrt{\frac{k}{M}}$ ,  $\lambda_2 = -j\sqrt{\frac{k}{M}}$  immaginari puri, quindi sistema semplicemente (marginale) stabile.

Se applichiamo  $u = -hx_2$  gli autovalori diventano  $\lambda_1 = -\frac{h}{2M} + \sqrt{\frac{h^2}{4M^2} - \frac{k}{M}}$  e  $\lambda_2 = \frac{h}{2M} - \sqrt{\frac{h^2}{4M^2} - \frac{k}{M}}$ .

- Se  $h^2 \geq 4Mk$  gli autovalori sono 2 reali negativi, quindi il sistema è asintoticamente stabile;
- Se  $h^2 < 4Mk$  gli autovalori sono 2 complessi coniugati con parte reale negativa, quindi il sistema è asintoticamente stabile;
- Se  $h^2 = 4Mk$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{h}{2M}$ , con molteplicità algebrica pari a 2. Si può dimostrare che la molteplicità geometrica è pari a 1, quindi il blocco di Jordan sarà  $2 \times 2$  (guardare 2.13.4)

$$J = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{h}{2M} & 1 \\ 0 & -\frac{h}{2M} \end{bmatrix} \quad e^{Jt} = e^{-\frac{h}{2M}t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Gli autovalori sono a parte reale negativa, quindi il sistema è asintoticamente stabile;

- Se  $h = k = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ , quindi il sistema è instabile.

## 2.18 Retroazione dello stato

Prendiamo un sistema lineare tempo invariante

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

Supponendo di misurare l'intero stato, ovvero se  $x(t) = y(t)$ , allora possiamo progettare

$$u(t) = Kx(t) + v(t)$$

con  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  una matrice di guadagni e  $v(t)$  un ulteriore ingresso per il sistema retroazionato

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) + Bv(t)$$

Se vogliamo il sistema in anello chiuso asintoticamente stabile allora dobbiamo progettare  $K$  tale che  $(A + BK)$  abbia autovalori tutti a parte reale negativa.

**Nota:** la possibilità di scegliere gli autovalori di  $(A + BK)$  (e.g., per renderli tutti a parte reale negativa) dipende dalla coppia  $(A, B)$  ed è legata alla proprietà di **raggiungibilità**.

Se non è possibile misurare l'intero stato, ovvero se  $y(t) \neq x(t)$ , esistono tecniche per ricostruire lo stato a partire dalle misure mediante sistemi ausiliari chiamati **osservatori**.

Se sia possibile o meno ricostruire lo stato dipende dalla coppia  $(A, C)$  ed è legato alla proprietà di **osservabilità**.

## 2.19 Linearizzazione di sistemi in non lineari (tempo invarianti)

Prendiamo un sistema non lineare tempo invariante

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= h(x(t), u(t))\end{aligned}$$

Sia  $(x_e, u_e)$  una coppia di equilibrio,  $f(x_e, u_e) = 0$ , consideriamo una traiettoria a partire da uno stato iniziale  $x(0) = x_e + \tilde{x}_0$

$$\begin{aligned}x(t) &= x_e + \tilde{x}(t) \\ u(t) &= u_e + \tilde{u}(t)\end{aligned}$$

con  $y(t) = h(x_e, u_e) + \tilde{y}(t) = y_e + \tilde{y}(t)$ .

Essendo una traiettoria vale

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(x_e + \tilde{x}(t)) &= f(x_e + \tilde{x}(t), u_e + \tilde{u}(t)) \\ y_e + \tilde{y}(t) &= h(x_e + \tilde{x}(t), u_e + \tilde{u}(t))\end{aligned}$$

Sviluppando in serie di Taylor (con  $f$  e  $h$  sufficientemente regolari) in  $(x_e, u_e)$  <sup>1</sup>

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(x_e + \tilde{x}(t)) &= \underbrace{f(x_e, u_e)}_0 + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} f(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}}}_{A_e} \tilde{x}(t) + \underbrace{\frac{\partial}{\partial u} f(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}}}_{B_e} \tilde{u}(t) + \text{term. ord. sup.} \\ y_e + \tilde{y}(t) &= h(x_e, u_e) + \frac{\partial}{\partial x} h(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \tilde{x}(t) + \frac{\partial}{\partial u} h(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \tilde{u}(t) + \text{term. ord. sup.}\end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}(t) &= A_e \tilde{x}(t) + B_e \tilde{u}(t) + \text{term. ord. sup.} \\ \tilde{y}(t) &= C_e \tilde{x}(t) + D_e \tilde{u}(t) + \text{term. ord. sup.}\end{aligned} \quad \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0$$

Se consideriamo i termini di ordine superiore come un resto  $\mathcal{R}(x, u)$  si osserva che

$$\lim_{\|(\tilde{x}, \tilde{u})\| \rightarrow 0} \frac{\|\mathcal{R}(\tilde{x}, \tilde{u})\|}{\|(\tilde{x}, \tilde{u})\|} = 0$$

---

<sup>1</sup>i termini del tipo  $\frac{\partial}{\partial x} f(x, u)$  vengono chiamati *Jacobiani*

di fatto è come se si avesse  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x}$ .

Quindi le due equazioni di prima si possono approssimare

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t) &\approx A_e \tilde{x}(t) + B_e \tilde{u}(t) \\ \tilde{y}(t) &\approx C_e \tilde{x}(t) + D_e \tilde{u}(t)\end{aligned}$$

Il sistema linearizzato è

$$\begin{aligned}\Delta \dot{x}(t) &= A \Delta x(t) + B \Delta u(t) \\ \Delta y(t) &= C \Delta x(t) + D \Delta u(t)\end{aligned}$$

Le traiettorie del sistema non lineare soddisfano

$$\begin{aligned}x(t) &= x_e + \tilde{x}(t) \approx x_e + \Delta x(t) \\ u(t) &= u_e + \tilde{u}(t) \approx u_e + \Delta u(t) \\ y(t) &= y_e + \Delta y(t) \approx y_e + \Delta y(t)\end{aligned}$$