Contents

Controlli Automatici T

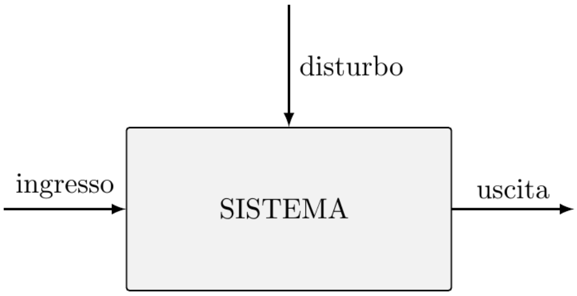
Giuseppe Bumma

September 24, 2023

1 Introduzione

L'idea dei **controlli automatici** è sostituire l'intelligenza umana con un sistema automatico (come l'intelligenza artificiale) basata su leggi matematiche e/o algoritmi.

1.1 Notazione ed elementi costitutivi



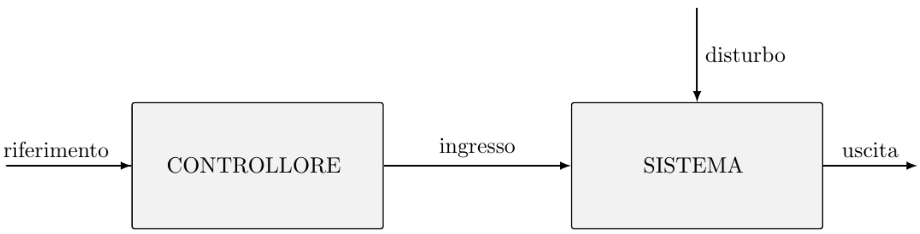
Il **sistema** è un oggetto per il quale si vuole ottenere un comportamento desiderato.
Esempi di sistema sono: impianto (industriale), macchinario (braccio robotico, macchina a controllo numerico, etc. . .), veicolo (auto, velivolo, drone, etc. . .), fenomeno fisico (condizioni atmosferiche), sistema biologico, sistema sociale.
L'obiettivo è che l'andamento nel tempo di alcune variabili segua un segnale di riferimento.

Altri elementi sono:

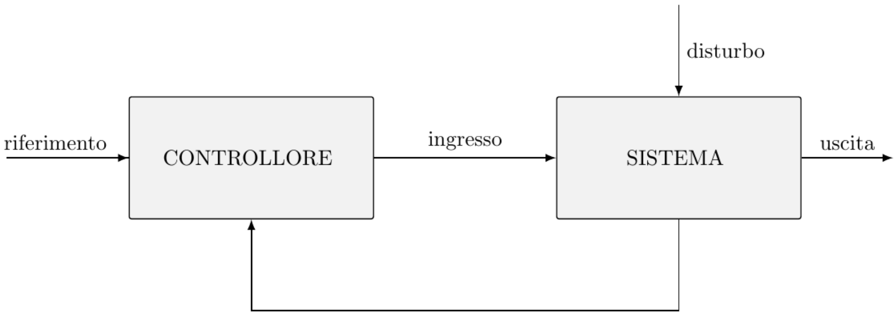
- Controllore: unità che determina l'andamento della variabile di controllo (ingresso);
- Sistema di controllo: sistema (processo) + controllore;
- Sistemi di controllo naturali: meccanismi presenti in natura, come quelli presenti nel corpo umano (temperatura corporea costante, ritmo cardiaco, etc. . .);
- Sistemi di controllo manuali: è presente l'azione dell'uomo;
- Sistemi di controllo automatico: uomo sostituito da un dispositivo.

1.2 Controllo in anello aperto e anello chiuso

Controllo in anello aperto ("feedforward"): il controllore utilizza solo il segnale di riferimento



Controllo in anello chiuso ("feedback" o retroazione): il controllore utilizza il segnale di riferimento e la variabile controllata ad ogni istante di tempo



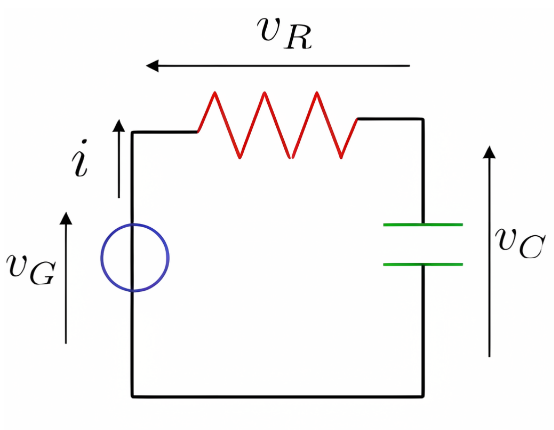
Il controllo in retroazione è un paradigma centrale nei controlli automatici.

1.3 Progetto di un sistema di controllo

I passi passi per progettare un sistema di controllo sono:

- definizione delle specifiche: assegnazione comportamento desiderato, qualità del controllo, costo,...
- modellazione del sistema (controllo e test): complessità del modello (compromesso), definizione ingressi/uscite, codifica del modello, validazione in simulazione
- analisi del sistema: studio proprietà "strutturali", fattibilità specifiche
- sintesi legge di controllo: è basata su modello, analisi sistema controllato, stima carico computazionale
- simulazione sistema controllato: test su modello di controllo, test realistici (modello complesso, ritardi, quantizzazione, disturbi, ...)
- scelta elementi tecnologici: sensori/attuatori, elettronica di acquisizione/attuazione, dispositivo di elaborazione
- sperimentazione: hardware in the loop, prototipazione rapida, realizzazione prototipo definitivo

1.4 Esempio di sistema di controllo: circuito elettrico



La legge che usiamo per definire il circuito (il nostro sistema) è la *legge delle tensioni*

$$v_R(t) = v_G(t) - v_C(t)$$

le leggi del condensatore e del resistore sono

$$C \cdot \dot{v}_C(t) = i(t) \qquad\qquad v_R(t) = R \cdot i(t)$$

Scrivendo la formula in termini di $v_C(t)$ ("stato interno") e $v_G(t)$ ("ingresso di controllo")

$$\dot{v}_C(t) = \frac{1}{RC}\left(v_G(t) - v_C(t)\right)$$

2 Sistemi in forma di stato

2.1 Sistemi continui

I *sistemi continuti* sono sistemi in cui il tempo è una variabile reale: $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f\left(x(t), u(t), t\right) && \text{equazione di stato} \\ \dot{y}(t) &= h\left(x(t), u(t), t\right) && \text{equazione (trasformazione) di uscita} \end{aligned}$$

Definiamo inoltre t_0 come tempo iniziale e $x(t_0) = x_0$ come stato iniziale.
N.B. $\dot{x}(t) := \dfrac{d}{dt} x(t)$.
Notazione:

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$ stato del sistema all'istante t
- $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ingresso del sistema all'istante t
- $y(t) \in \mathbb{R}^p$ uscita del sistema all'istante t

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ ... \\ ... \\ ... \\ x_n(t) \end{bmatrix} \qquad u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ ... \\ ... \\ ... \\ u_m(t) \end{bmatrix} \qquad y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ ... \\ ... \\ ... \\ y_p(t) \end{bmatrix}$$

Da notare che $x(t)$ è un vettore mentre $x_1, ..., x_n$ sono scalari.
$x(t)$ è una variabile interna che descrive il comportamento del sistema.

2.1.1 Equazione di stato

L'*equazione di stato* è un'equazione ordinaria (ODE) vettoriale del primo ordine (cioè l'ordine massimo delle derivate è 1)

$$\begin{gathered} \dot{x}_1(t) = f_1\left(x(t), u(t), t\right) \\ \dots \\ \dot{x}_n(t) = f_n\left(x(t), u(t), t\right) \end{gathered}$$

$\mathbb{R}^n$ è detto <u>spazio di stato</u>, con n ordine del sistema. La funzione di stato è $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ ... \\ ... \\ ... \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1\left(x(t), u(t), t\right) \\ ... \\ ... \\ ... \\ f_n\left(x(t), u(t), t\right) \end{bmatrix} := f\left(x(t), u(t), t\right)$$

Avere solo derivate prime non è limitato, perché ad esempio posso inserire una prima variabile come derivata prima e una seconda variabile come derivata prima della prima variabile.

2.1.2 Equazione di uscita

L'equazione di uscita è un'equazione algebrica

$$\begin{gathered} y_1(t) = h_1\left(x(t), u(t), t\right) \\ \dots \\ y_p(t) = h_p\left(x(t), u(t), t\right) \end{gathered}$$

$h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R} \to R^p$ funzione di uscita

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ ... \\ ... \\ ... \\ y_p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1\left(x(t), u(t), t\right) \\ ... \\ ... \\ ... \\ h_p\left(x(t), u(t), t\right) \end{bmatrix} := h\left(x(t), u(t), t\right)$$

Se la soluzione $x(t)$ a partire da un istante iniziale t_0 è univocamente determinata da $x(t_0)$ e $u(\tau)$ con $\tau \geq t_0$, allora il sistema è detto **causale**, cioè lo stato dipende solo da ciò che accede in passato.
Sotto opportune ipotesi di regolarità della funzione f si dimostra esistenza e unicità della soluzione dell'equazione (differenziale) di stato (Teorema di Cauchy-Lipschitz).

2.2 Sistemi discreti

Nei *sistemi discreti* il tempo t è una variabile intera, $t \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} x(t+1) &= f\left(x(t), u(t), t\right) && \text{equazione di stato} \\ y(t) &= h\left(x(t), u(t), t\right) && \text{equazione (trasformazione) di uscita} \end{aligned}$$

L'equazione di stato è un'equazione alle differenze finite (FDE).

Notazione:

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$ stato del sistema all'istante t
- $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ingresso del sistema all'istante t
- $y(t) \in \mathbb{R}^p$ uscita del sistema all'istante t

$x(t), u(t)$ e $y(t)$ sono uguali ai sistemi continui.
Per modellare sistemi discreti nel codice basta un ciclo `for`.

2.3 Esempio circuito elettrico

Riprendiamo l'esempio del circuito elettrico; la formula trovata è

$$\underbrace{\dot{v}_C(t)}_{\dot{x}(t)} = \frac{1}{RC}(\underbrace{v_G(t)}_{u(t)} - \underbrace{v_C(t)}_{x(t)})$$

In questo caso lo stato del sistema $x(t)$ è caratterizzato dalla variabile $v_C(t)$, l'ingresso dalla variabile $v_G(t)$. Supponiamo quindi di misurare (con un sensore) la tensione ai capi della resistenza, allora l'uscita del nostro sistema sarà $v_R(t)$

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{RC}\left(u(t) - x(t)\right) \qquad\qquad f(x,u) = \frac{1}{RC}(u-x)$$

da notare che in questo caso f non è funzione del tempo.

$$v_R(t) = v_G(t) - v_C(t) \Longrightarrow y(t) = u(t) - x(t)$$

2.3.1 Esempio con parametri che variano nel tempo

Supponiamo che la resistenza sia una funzione del tempo

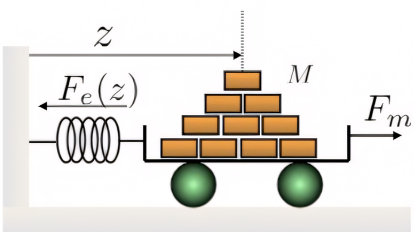
$$R(t) = \overline{R}\left(1 - \frac{1}{2}e^{-t}\right)$$

allora

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{R(t)C}\left(u(t) - x(t)\right) \qquad\qquad f(x,u,t) = \frac{1}{R(t)C}(u-x)$$

in questo caso f è funzione del tempo.

2.4 Esempio carrello



La legge che usiamo è la legge di Newton, prendendo z come posizione del centro di massa

$$M\ddot{z} = -F_e + F_m$$

con M massa e F_e data da

$$F_e(z(t), t) = k(t)z(t)$$

quindi la nostra equazione diventa

$$M\ddot{z}(t) = -k(t)z(t) + F_m(t)$$

Siccome nella nostra formula compare una derivata seconda di una variabile ci conviene definire lo stato del sistema con la variabile stessa e la derivata prima della variabile.
Definiamo quindi $x_1 := z$ e $x_2 := \dot{z}$, con stato $x := [x_1 x_2]^T$, e $u := F_m$ (ingresso).
Quindi possiamo scrivere, tenendo conto che $\dot{x}_2(t) = \ddot{z}$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{k}{M}x_1(t) + \frac{u(t)}{M}\end{aligned}$$

$$f(x,u) = \begin{bmatrix} f_1(x,u)\\ f_2(x,u)\end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x_2\\ -\frac{k}{M}x_1 + \frac{u}{M}\end{bmatrix}$$

Supponiamo di misurare $z(t)$ (sensore posizione), allora $y := z$

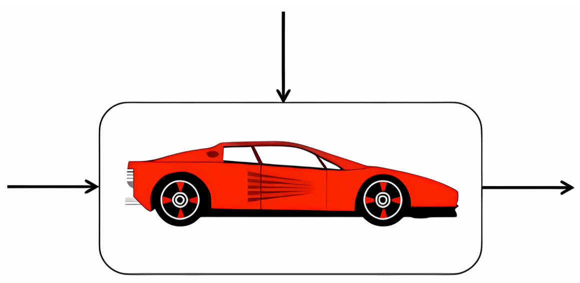
$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{k}{M}x_1(t) + \frac{u(t)}{M}\\ y(t) &= x_1(t)\end{aligned}$$

Sia $k(t) = k$ e, ricordando la formula dell'energia cinetica $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ e la formula dell'energia elastica $U = \frac{1}{2}k\,\Delta x^2$, consideriamo come uscita l'energia totale $E_T(t) = \frac{1}{2}(kz^2(t) + M\dot{z}^2(t))$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{k}{M}x_1(t) + \frac{u(t)}{M}\\ y(t) &= \frac{1}{2}\left(k(t)x_1^2(t) + Mx_2^2(t)\right)\end{aligned}$$

quindi $h(x) := \frac{1}{2}(kx_1^2 + Mx_2^2)$.
N.B. Il risultato (l'uscita) vale, di solito, solo per il mio modello, in base a come l'ho impostato; nella realtà potrebbe essere diverso.

2.5 Esempio auto in rettilineo



Scriviamo la legge di Newton

$$M\ddot{z} = F_{\text{drag}} + F_m$$

con M massa e F_{drag} data da

$$F_{\text{drag}} = -b\dot{z}$$

Definiamo $x_1 := z$ e $x_2 := \dot{z}$ (stato $x := [x_1 x_2]^T$) e $u := F_m$ (ingresso). Supponiamo di misurare $z(t)$ (sensore posizione), allora $y := z$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{b}{M}x_2(t) + \frac{1}{M}u(t)\\ y(t) &= x_1(t)\end{aligned}$$

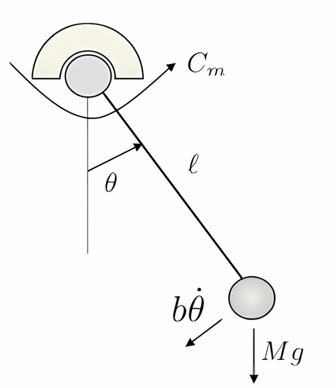
Proviamo a progettare un sistema per il *cruise control.*
L'equazione della dinamica è

$$M\ddot{z}(t) = -b\dot{z}(t) + F_m(t)$$

Siccome siamo interessati a controllare la velocità e non la posizione, allora consideriamo come stato solo la velocità: $x := \dot{z}$, $u := F_m$. Supponiamo di misurare $\dot{z}(t)$ (sensore velocità), allora $y := x$

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -\frac{b}{M}x(t) + \frac{1}{M}u(t)\\ y(t) &= x(t)\end{aligned}$$

2.6 Esempio pendolo



Scriviamo l'equazione dei momenti

$$M\ell^2\ddot{\theta} = C_{\text{grav}} + C_{\text{drag}} + C_m$$

con M massa e C_{grav} e C_{drag} date da

$$C_{\text{grav}} = Mg\ell\sin(\theta) \qquad\qquad C_{\text{drag}} = -b\dot{\theta}$$

con b coefficiente d'attrito.

Scriviamo l'equazione della dinamica, partendo dalla formula iniziale dei momenti

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{\ell}\sin(\theta(t)) - \frac{b}{M\ell^2}\dot{\theta}(t) + \frac{1}{M\ell^2}C_m(t)$$

Definiamo quindi $x_1 := \theta$ e $x_2 := \dot{\theta}$ (stato $x := [x_1 x_2]^T$) e $u := C_m$ (ingresso).
Supponiamo di misurare θ (sensore angolo) , allora $y := \theta$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{g}{\ell}\sin(x_1(t)) - \frac{b}{M\ell^2}x_2(t) + \frac{1}{M\ell^2}u(t)\\ y(t) &= x_1(t)\end{aligned}$$

Se misuriamo invece la posizione verticale, allora $y := -\ell\cos(\theta)$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{g}{\ell}\sin(x_1(t)) - \frac{b}{M\ell^2}x_2(t) + \frac{1}{M\ell^2}u(t)\\ y(t) &= -\ell\cos(\theta)\end{aligned}$$

2.7 Traiettoria di un sistema

Dato un istante iniziale t_0 e uno stato iniziale x_{t_0}, la funzione del tempo $(x(t), u(t)),\ t > t_0$, che soddisfa l'equazione di stato $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$ si dice traiettoria (movimento) del sistema. In particolare, $x(t)$ si dice traiettoria dello stato. Consistentemente, $y(t)$ si dice traiettoria dell'uscita.

N.B. per sistemi senza ingresso (quindi non forzati) la traiettoria dello stato $x(t),\ t > t_0$ è determinata solo dallo stato iniziale x_{t_0}.

2.7.1 Esempio

Definiamo un sistema con stato x e stato iniziale x_0

$$x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad x_0 := \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad t_0 = 0$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= u(t) \end{aligned}$$

Assegno a x_1, x_2 e $u(t)$ le seguenti equazioni

$$\begin{aligned} \overline{x_1}(t) &= 5 + 3t + t^2 \\ \overline{x_2}(t) &= 3 + 2t \\ \overline{u}(t) &= 2 \end{aligned}$$

Se le equazioni di $\overline{x_1}$ e $\overline{x_2}$ soddisfano le condizioni iniziali e la funzione di stato ($\dot{x}_1$ e $\dot{x}_2$) allora quelle equazioni sono la traiettoria del sistema.
Infatti

$$\overline{x_0} = \begin{bmatrix} 5 + 3t + t^2 \\ 3 + 2t \end{bmatrix}_{t=0} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\overline{x_0} = \begin{bmatrix} 5 + 3t + t^2 \\ 3 + 2t \end{bmatrix}_{t=0} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} 5 + 3t + t^2 \\ 3 + 2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + 2t \\ 2 \end{bmatrix}$$

2.8 Equilibrio di un sistema

Dato un sistema (non forzato) $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$, uno stato x_e si dice *equilibrio del sistema* se $x(t) = x_e\ ,\ t \geq t_0$ è una traiettoria del sistema.

Dato un sistema (forzato) $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$, (x_e, u_e) si dice *coppia di equilibrio* del sistema se $(x(t), u(t)) = (x_e, u_e)$, $t \geq t_0$, è una traiettoria del sistema.

Per un sistema (tempo invariante continuo) $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ data una coppia di equilibrio (x_e, u_e) vale $f(x_e, u_e) = 0$. Se il sistema è non forzato, dato un equilibrio x_e vale $f(x_e) = 0$.