



# Elettronica

Bumma Giuseppe

## Contents

1 SI .....	2
1.1 Unità derivate SI .....	2
1.2 Prefissi .....	4
2 Tipi di esercizi .....	5
2.1 A .....	5
2.1.1 Formule notevoli .....	5
2.1.1.1 Formule simboliche di resistore, induttore e condensatore .....	5
2.1.2 Diagrammi di Bode .....	5
2.1.2.1 Guadagno statico .....	5
2.1.2.2 Zeri nell'origine .....	5
2.1.2.3 Poli nell'origine .....	6
2.1.2.4 Zero reale (ampiezza) .....	6
2.1.2.5 Zero reale negativo (fase) .....	6
2.1.2.6 Zero reale positivo (fase) .....	8
2.1.2.7 Polo reale .....	8
2.1.2.8 Polo reale negativo .....	9
2.1.2.9 Zeri complessi coniugati (ampiezza) .....	9
2.1.2.10 Zeri complessi coniugati a parte reale negativa (fase) .....	11
2.1.2.11 Zeri complessi coniugati a parte reale positiva .....	11
2.1.2.12 Poli complessi coniugati a parte reale negativa .....	12
2.1.2.13 Poli complessi coniugati a parte reale positiva .....	12
2.1.3 Esame 14/09/2021 .....	13
2.1.4 Esame 28/01/2021 .....	14
2.1.5 Esame 17/06/2021 (Diagramma di Bode) .....	16
2.1.6 Esercizio diagramma di Bode non ideale .....	20
2.1.7 Esame 09/11/2021 (frequenza di taglio) .....	20
2.2 D .....	22
2.2.1 Formule notevoli .....	22
2.2.2 Esame 14/06/2023 .....	22
2.2.3 Esame 12/06/2024 .....	25

## 1 SI

### 1.1 Unità derivate SI

Grandezza	Simbolo	Unità SI non di base	Unità SI di base
Carica elettrica	$C$ (Coulomb)		$s \times A$
Tensione elettrica e differenza di potenziale elettrico	$V$ "(Volt)"	$\frac{W}{A}$	$m^2 \times kg \times s^{-3} \times A^{-1}$
Forza	$N$ (Newton)		$m \times kg \times s^{-2}$
Energia/Lavoro	$J$ (Joule)	$N \times m$	$m^2 \times kg \times s^{-2}$
Potenza	$W$ (Watt)	$\frac{J}{s}$	$m^2 \times kg \times s^{-3}$

<b>Grandezza</b>	<b>Simbolo</b>	<b>Unità SI non di base</b>	<b>Unità SI di base</b>
Flusso magnetico	$Wb$ (Weber)	$V \times s$	$m^2 \times kg \times s - 2 \times A^{-1}$
Induzione magnetica	$T$ (Tesla)	$\frac{Wb}{m^2}$	$kg \times s^{-2} \times A^{-1}$
Resistenza elettrica	$\Omega$ (Ohm)	$\frac{V}{A}$	$m^2 \times kg \times s^{-3} \times A^{-2}$
Conduttanza elettrica	$S$ (Siemens)	$\frac{A}{V}$	$m^{-2} \times kg^{-1} \times s^3 \times A^2$
Capacità	$F$ (Farad)	$\frac{C}{V}$	$m^{-2} \times kg^{-1} \times s^4 \times A^2$
Induttanza	$H$ (Henry)	$\frac{Wb}{A}$	$m^2 \times kg \times s^{-2} \times A^{-2}$
Frequenza	$Hz$ (Hertz)		$s^{-1}$

## 1.2 Prefissi

Factor	Name	Symbol
$10^{-24}$	yocto	y
$10^{-21}$	zepto	z
$10^{-18}$	atto	a
$10^{-15}$	femto	f
$10^{-12}$	pico	p
$10^{-9}$	nano	n
$10^{-6}$	micro	$\mu$
$10^{-3}$	milli	m
$10^{-2}$	centi	c
$10^{-1}$	deci	d
$10^1$	deca	da
$10^2$	hecto	mh
$10^6$	mega	M
$10^9$	giga	G
$10^{12}$	tera	T
$10^{15}$	peta	P
$10^{18}$	exa	E
$10^{21}$	zetta	Z
$10^{24}$	yotta	Y

## 2 Tipi di esercizi

### 2.1 A

#### 2.1.1 Formule notevoli

N.B. Alcune formule si trovano nel [Formulario](#).

##### 2.1.1.1 Formule simboliche di resistore, induttore e condensatore

Resistore

$$V = RI$$

$$Z = R$$

Induttore

$$V = j\omega LI$$

$$Z = j\omega L$$

Condensatore

$$V = -\frac{j}{\omega C}I$$

$$Z = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C}$$

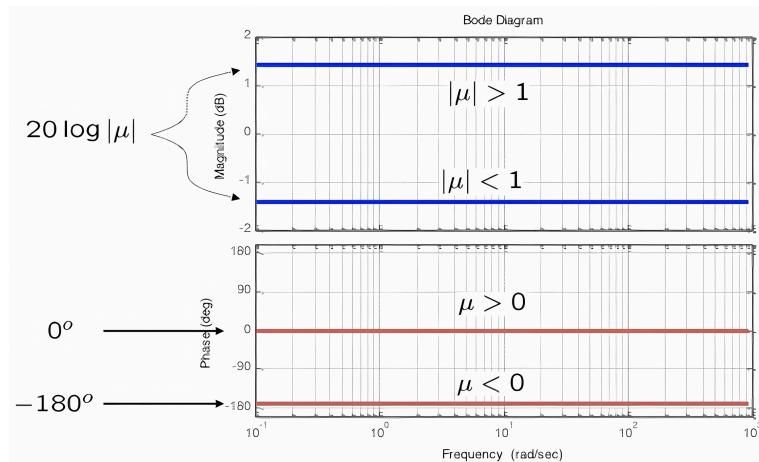
### 2.1.2 Diagrammi di Bode

#### 2.1.2.1 Guadagno statico

$$G_a(j\omega) = \mu$$

$$|G_a(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log |\mu|$$

$$\arg(G(j\omega)) = \arg(\mu)$$



Per quanto riguarda il diagramma dell'ampiezza,

- se  $|\mu| \geq 1$  allora  $20 \log |\mu| \geq 0$
- se  $|\mu| < 1$  allora  $20 \log |\mu| < 0$ .

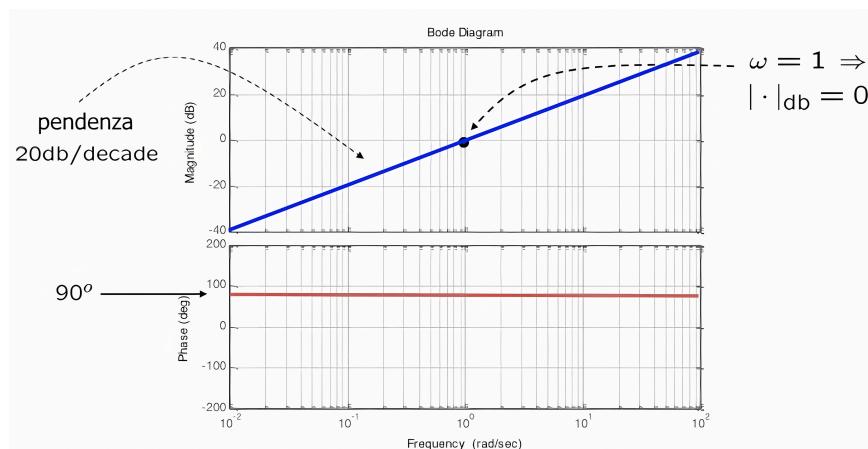
Per il diagramma della fase invece

- se  $\mu > 0$  allora  $\arg(\mu) = 0$
- se  $\mu < 0$  allora  $\arg(\mu) = -180^\circ$ .

#### 2.1.2.2 Zeri nell'origine

Consideriamo una risposta con uno zero nell'origine (cioè  $g = -1$ )

$$G_b(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^{-1}} = j\omega \quad |G_b(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log \omega \quad \arg(G_b(j\omega)) = \arg(j\omega)$$



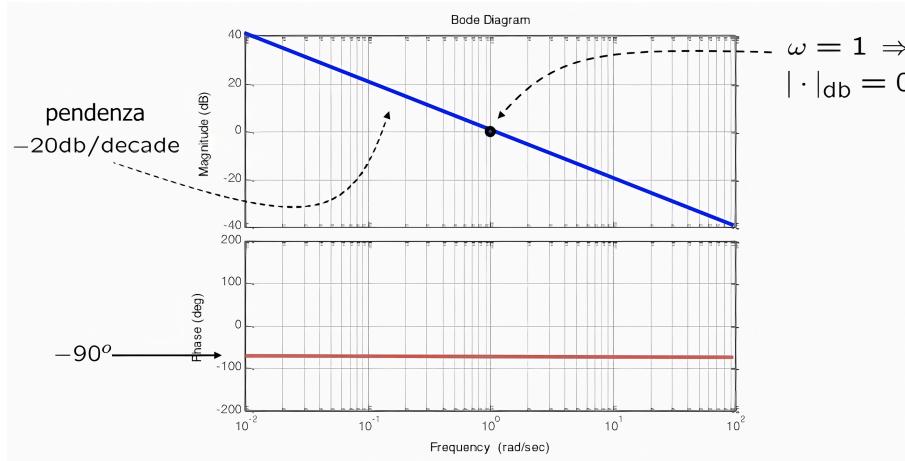
La retta che definisce l'ampiezza  $\log \omega \mapsto 20 \log \omega$  ha pendenza 20 dB/dec; se ho  $g$  zeri nell'origine allora la pendenza della retta sarà  $20 \cdot g$  dB/dec.

$j\omega$  è un punto sul semiasse immaginario positivo  $\forall \omega > 0$ , quindi fase  $90^\circ \forall > 0$ .

### 2.1.2.3 Poli nell'origine

Consideriamo una risposta con un polo nell'origine (cioè  $g = 1$ )

$$G_b(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^1} = \frac{1}{j\omega} \quad |G_b(j\omega)|_{\text{dB}} = -20 \log \omega \quad \arg(G_b(j\omega)) = -\arg(j\omega)$$



Anche in questo caso, se ho  $g$  poli nell'origine allora la pendenza della retta sarà  $-20$  dB/dec. Per quanto riguarda la fase  $-j\omega$  è un punto sul semiasse immaginario negativo  $\forall \omega > 0$ , quindi la fase è  $-90^\circ$ .

### 2.1.2.4 Zero reale (ampiezza)

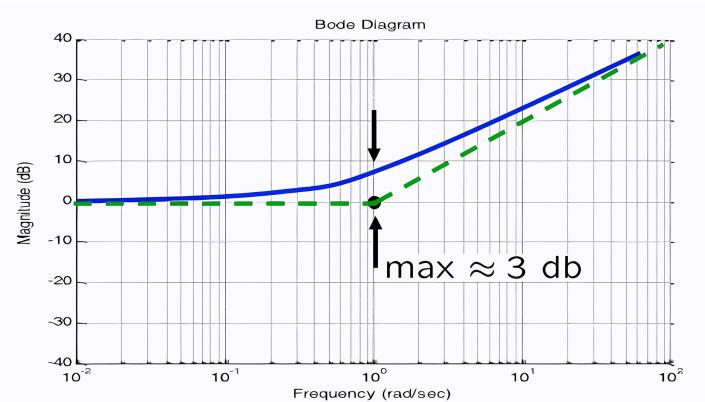
Consideriamo una risposta con uno zero reale

$$G_c(j\omega) = 1 + j\omega\tau$$

$$|G_c(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log \sqrt{1 + \omega^2\tau^2} \approx \begin{cases} 20 \log 1 = 0 & \omega \ll \frac{1}{|\tau|} \\ 20 \log \omega |\tau| = -20 \log \frac{1}{|\tau|} + 20 \log \omega & \omega \gg \frac{1}{|\tau|} \end{cases}$$

$$\left| G_c\left(j\frac{1}{|\tau|}\right) \right|_{\text{dB}} = 20 \log \sqrt{1 + \frac{1}{|\tau|^2}\tau^2} = 20 \log \sqrt{2} \approx 3$$

per  $\omega = \frac{1}{|\tau|}$  abbiamo lo scostamento massimo.



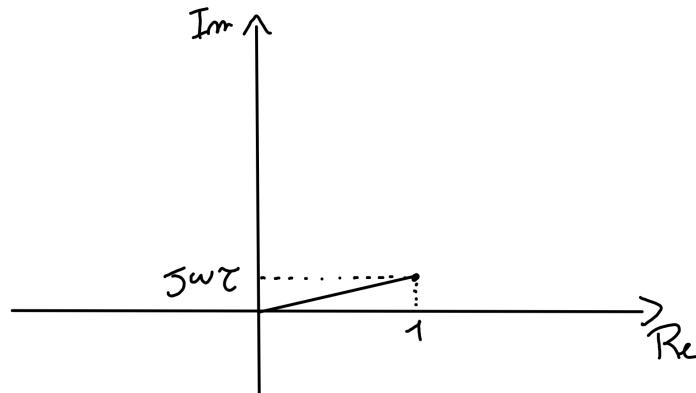
### 2.1.2.5 Zero reale negativo (fase)

Consideriamo una una risposta con uno zero reale negativo

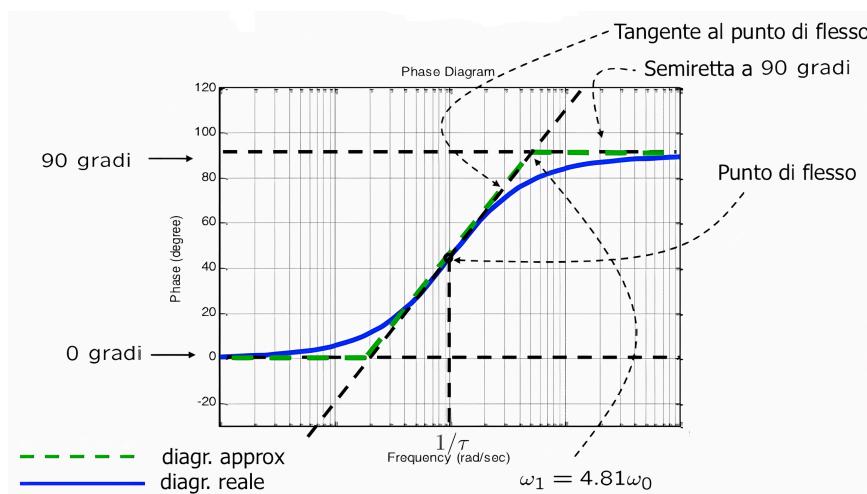
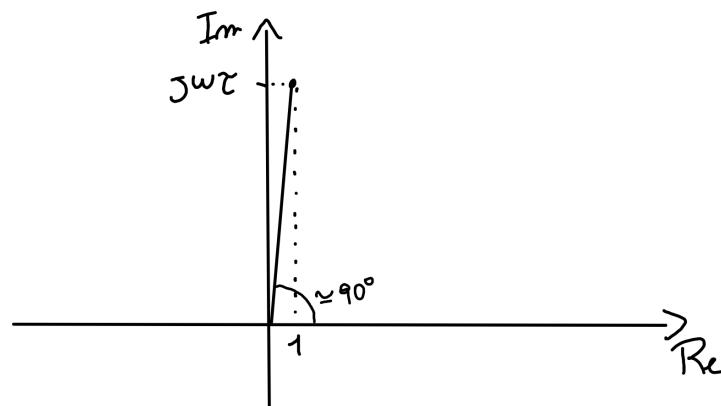
$$G_c(j\omega) = 1 + j\omega\tau \quad \tau > 0$$

$$\arg(G_c(j\omega)) = \arg(1 + j\omega\tau) \approx \begin{cases} 0 & \omega \ll \frac{1}{\tau} \\ 90^\circ & \omega \gg \frac{1}{\tau} \end{cases}$$

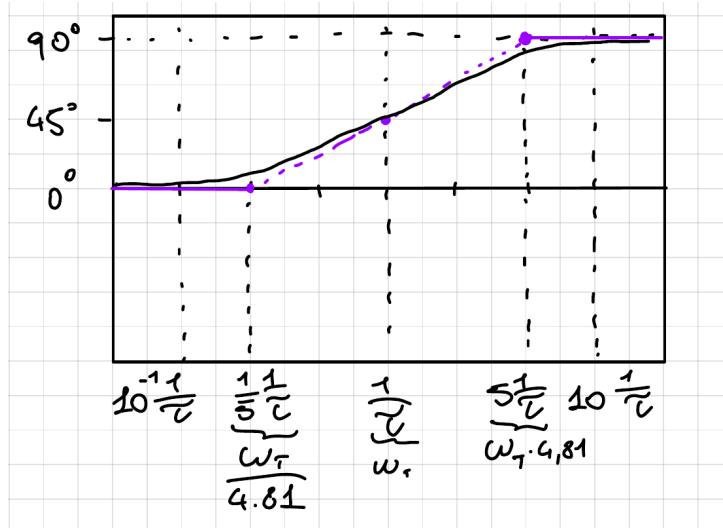
Se  $\omega \rightarrow 0$  allora  $\arg(1 + j\omega\tau) \approx \arg(1) = 0$



se  $\omega \gg \frac{1}{\tau}$  allora graficamente



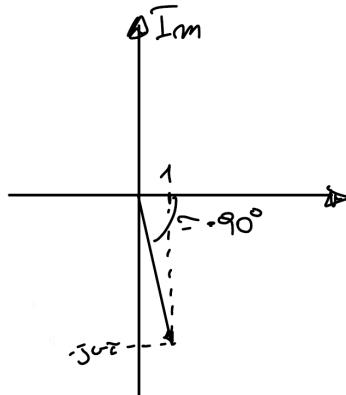
il cambio di fase inizia circa una decade prima e finisce circa una decade dopo la pulsazione di taglio  
 $\omega = \frac{1}{\tau}$ .



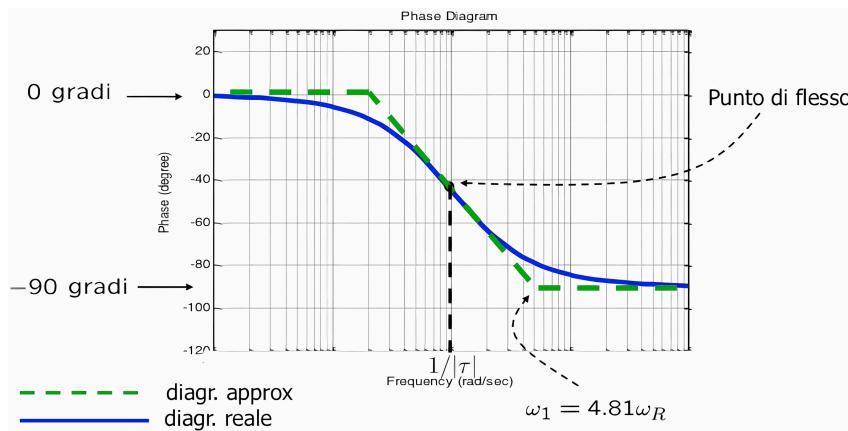
$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\tau} = 0.2 \cdot \frac{1}{\tau} = 2 \cdot 10^{-1} \frac{1}{\tau}$ , il doppio in scala logaritmica è  $\frac{1}{3}$  di una decade.

### 2.1.2.6 Zero reale positivo (fase)

Consideriamo  $G_c(j\omega) = 1 + j\omega\tau, \tau < 0$  (cioè una risposta con uno zero reale positivo)



$$\arg(G(j\omega)) = \arg(1 + j\omega\tau) \approx \begin{cases} 0 & \omega \ll \frac{1}{|\tau|} \\ -90^\circ & \omega \gg \frac{1}{|\tau|} \end{cases}$$

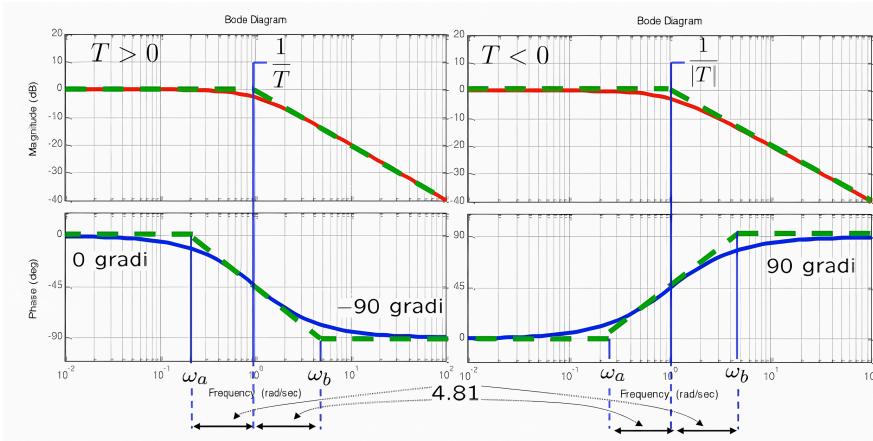


### 2.1.2.7 Polo reale

Consideriamo  $G_c(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$  (cioè una risposta con un polo reale)

$$\begin{aligned} |G_c(j\omega)|_{\text{dB}} &= 20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right| \\ &= -20 \log |1 + j\omega T| \end{aligned}$$

$$|G_c(j\omega)|_{\text{dB}} = -20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \quad \arg(G_c(j\omega)) = -\arg(1 + j\omega T)$$

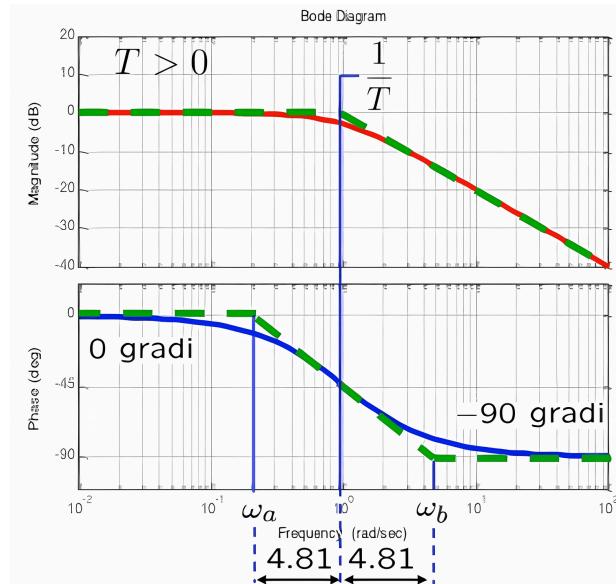


Il diagramma è uguale al diagramma dello zero ma ribaltato rispetto all'asse reale (consistentemente con il segno di  $T$ ).

### 2.1.2.8 Polo reale negativo

Consideriamo  $G_c(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$ ,  $T > 0$  (cioè una risposta con un polo reale negativo)

$$|G_c(j\omega)|_{\text{dB}} = -20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \quad \arg(G_c(j\omega)) = -\arg(1 + j\omega T)$$



Fino a  $\frac{1}{T}$ , (pulsazione di taglio), si ha un andamento costante a 0 dB, cioè il modulo della sinusode in uscita non cambia. A partire da  $\frac{1}{T}$  si ha una retta  $\log \omega \mapsto 20 \log \frac{1}{|T|} - 20 \log \omega$  con pendenza  $-20 \text{ dB/dec}$ .

Lo scostamento massimo (tra diagramma asintotico e diagramma reale) si ha in  $\omega = \frac{1}{T}$  dove

$$\begin{aligned} |G_c(j\omega)|_{\text{dB}} &= -20 \log \sqrt{1 + 1} \\ &= -20 \log \sqrt{2} \approx -3 \end{aligned}$$

Il cambio di fase inizia circa una decade prima e finisce circa una decade dopo la pulsazione di taglio  $\omega = \frac{1}{T}$ .

### 2.1.2.9 Zeri complessi coniugati (ampiezza)

Consideriamo  $G_d(j\omega) = 1 + 2j\zeta \frac{\omega}{\alpha_n} - \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}$ , una risposta con una coppia di zeri complessi coniugati

$$|G_d(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}}$$

per  $\omega \gg \alpha_n$

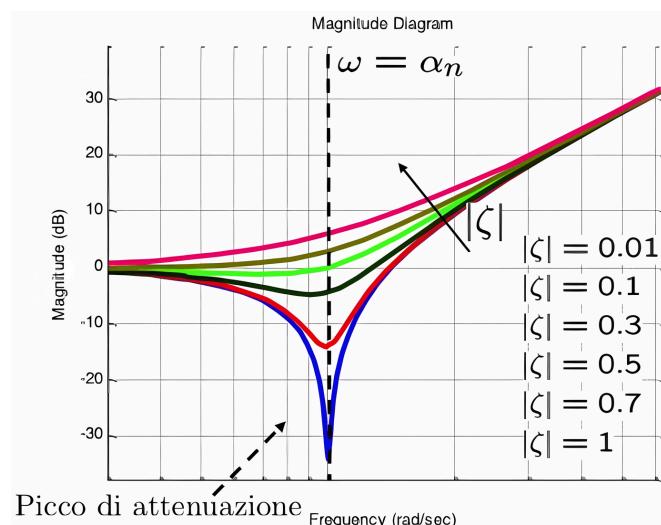
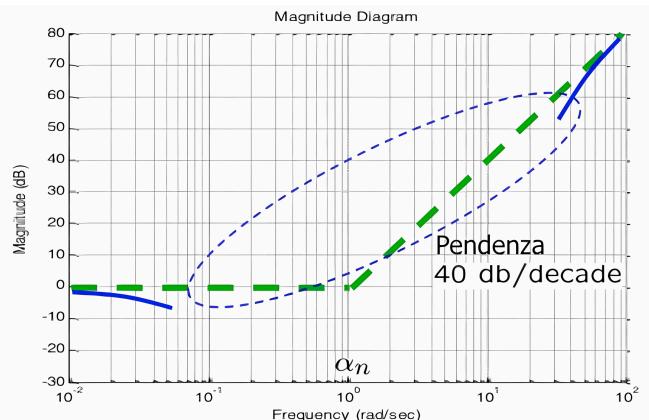
$$\begin{aligned}
|G_d(j\omega)|_{\text{dB}} &\approx 20 \log \sqrt{\left(\frac{\omega^2}{\alpha_n^2}\right)^2} \\
&= 20 \log \frac{\omega^2}{\alpha_n^2} \\
&= 20 \log \left(\frac{\omega}{\alpha_n}\right)^2 \\
&= 40 \log \frac{\omega}{\alpha_n} \\
&= \underbrace{40 \log \omega}_{\text{variabile}} - \underbrace{40 \log \alpha_n}_{\text{costante}}
\end{aligned}$$

Quindi la risposta si comporta come una retta, di pendenza pari a 40 dB. Analizziamo ora la risposta per  $\omega = \alpha_n$

$$\begin{aligned}
|G_d(j\omega)|_{\text{dB}} &\approx 20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}} \\
&= 20 \log \sqrt{4\zeta^2} \\
&= 23 \log 2|\zeta| \\
&= \underbrace{20 \log 2}_{6 \text{ dB}} + 20 \log |\zeta|
\end{aligned}$$

quindi scostamento significativo dipendente dal valore di  $\zeta$ .

$$|G_d(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}} \approx \begin{cases} 20 \log(1) = 0 & \omega \ll \alpha_n \\ 20 \log \frac{\omega^2}{\alpha_n^2} = -40 \log \alpha_n + 40 \log \omega & \omega \gg \alpha_n \end{cases}$$

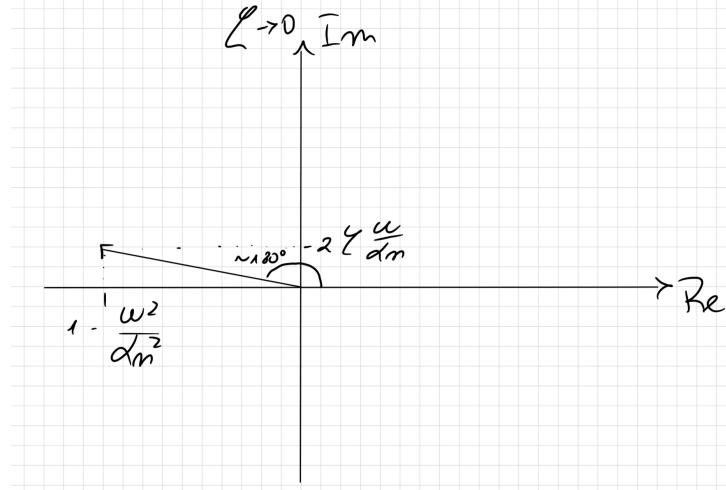


Il minimo dell'ampiezza si ha alla pulsazione  $\omega_r = \alpha_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$  con  $|G_d(j\omega_r)| = 2 |\zeta| \sqrt{1 - \zeta^2}$

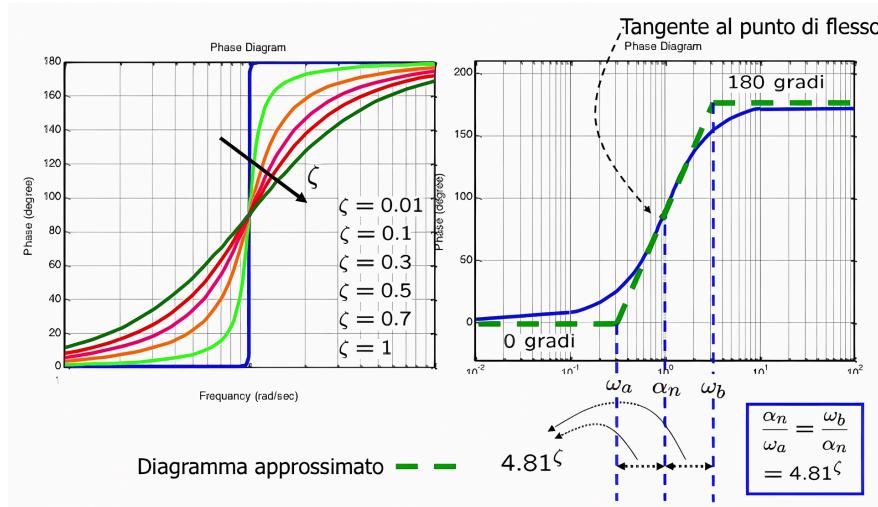
### 2.1.2.10 Zeri complessi coniugati a parte reale negativa (fase)

Consideriamo  $G_d(j\omega) = 1 + 2j\zeta \frac{\omega}{\alpha_n} - \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}$ ,  $\zeta > 0$ , una risposta con una coppia di zeri complessi coniugati a parte reale negativa

$$\arg(G_d(j\omega)) \approx \begin{cases} 0 & \omega \ll \alpha_n \\ 180^\circ & \omega \gg \alpha_n \end{cases}$$



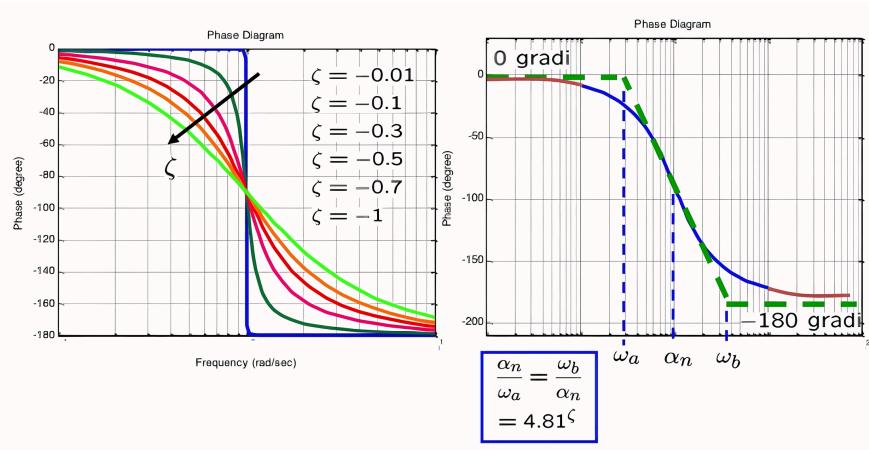
Vediamo che la risposta, per  $\omega \gg \alpha_n$ , nel piano complesso ha sicuramente una parte reale molto negativa, mentre la parte immaginaria dipende dal valore  $\zeta$ , il quale influenza molto l'andamento della fase. Ad esempio se  $\zeta \rightarrow 0$  la parte immaginaria nel piano complesso tenderà anch'essa a 0, così da rendere molto facile appurare che l'argomento della nostra risposta sia quasi  $180^\circ$ . Anche con  $\zeta = 1$  l'argomento sarà circa  $180^\circ$ , ma solo per pulsazioni molto grandi, perché la parte reale tende a  $\frac{\omega^2}{\alpha_n^2}$ , che è  $O\left(\frac{\omega}{\alpha_n}\right)$  (la parte immaginaria) per  $\omega \rightarrow \infty$ .



Nel diagramma di fase più  $\zeta$  è piccolo e più la discontinuità da  $0^\circ$  a  $180^\circ$  è rapida.

### 2.1.2.11 Zeri complessi coniugati a parte reale positiva

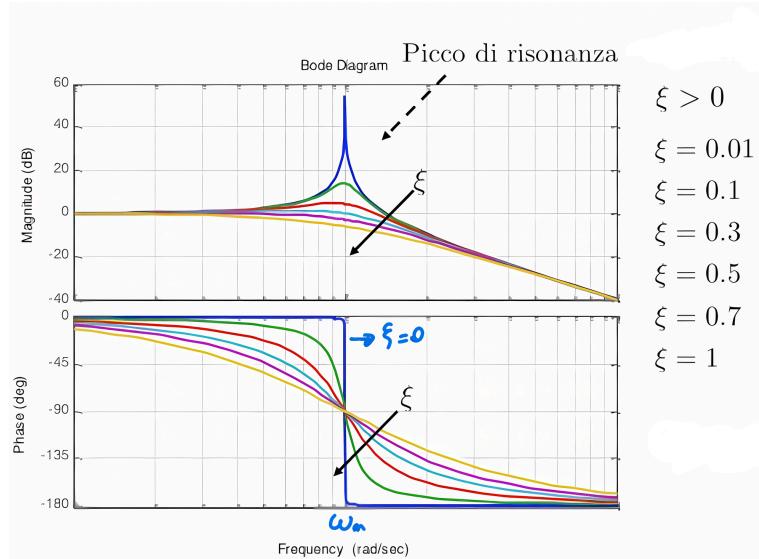
Consideriamo  $G_d(j\omega) = 1 + 2j\zeta \frac{\omega}{\alpha_n} - \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}$ ,  $\zeta < 0$ , una risposta con una coppia di zeri complessi coniugati a parte reale positiva. Il diagramma di fase è speculare a quello precedente



### 2.1.2.12 Poli complessi coniugati a parte reale negativa

Consideriamo una risposta in frequenza con poli complessi coniugati a parte reale negativa

$$G_d(j\omega) = \frac{1}{1 + 2j\xi \frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}, \xi > 0$$



I diagrammi sono quelli precedenti ribaltati rispetto all'asse reale, infatti la retta del diagramma di ampiezza asintotico dopo la pulsazione  $\omega_n$  ha pendenza  $-40 \text{ dB/dec}$ . Il picco di risonanza si trova alla pulsazione (di risonanza)  $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$  con  $|G_d(j\omega_r)| = \frac{1}{2|\xi| \sqrt{1 - 2\xi^2}}$ ; alla frequenza  $\omega_n$  si ha  $|G_d(j\omega_n)| = \frac{1}{2|\xi|}$

Soffermiamoci un attimo sul caso in cui  $\xi \rightarrow 0$ : se do una sinusoide con frequenza inferiore a  $\omega_n$  essa non viene sfasata; se invece la sua frequenza è di poco superiore a  $\omega_n$  la sua fase viene sfasata di  $90^\circ$ ; il modulo viene amplificato di molto se la frequenza della sinusoide è nell'intorno di  $\omega_n$ .

### 2.1.2.13 Poli complessi coniugati a parte reale positiva

Consideriamo una risposta in frequenza con una coppia di poli complessi coniugati a parte reale positiva

$$G_d(j\omega) = \frac{1}{1 + 2j\xi \frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \quad \xi < 0$$

Calcoliamo i poli

$$\begin{aligned} G_d(s) &= \frac{1}{1 + 2\frac{\xi}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}} \\ &= \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \\ \Rightarrow p_{1/2} &= -\xi\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \end{aligned}$$

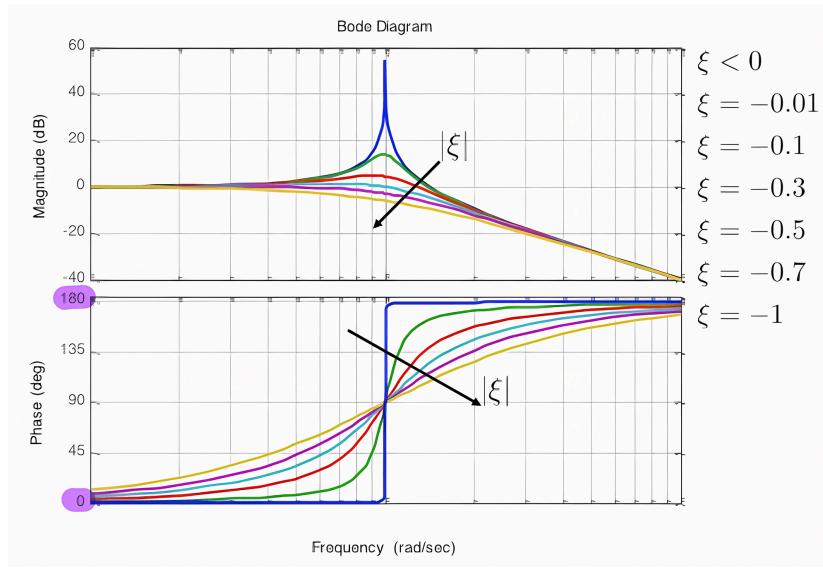


Diagramma ottenuto da quello degli zeri (caso  $\zeta < 0$ ) ribaltando rispetto all'asse reale.

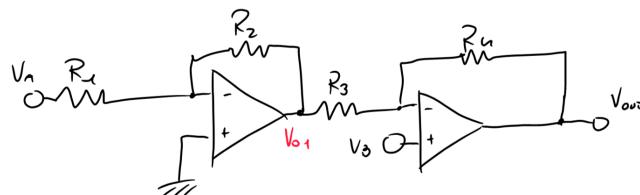
### 2.1.3 Esame 14/09/2021

**A** N.O. e MOD1 V.O.

- 1) Del seguente circuito si calcoli  $v_{\text{OUT}}$  in funzione di  $v_A$  e  $v_B$ .  
Si suppongano gli OPAMP ideali e in alto guadagno.  
Esplicitare i passaggi.
- 2) Dimensionare  $R_1$  in modo che il circuito si comporti come un sommatore nei confronti degli ingressi  $v_A$  e  $v_B$ . Esplicitare i passaggi.

$$v_O = \frac{R_4 R_2}{R_3 R_1} v_A + \frac{R_3 + R_4}{R_3} v_B$$

$R_1 = 32 \text{ K}\Omega$



- 1) Usiamo la sovrapposizione degli effetti per calcolare  $v_O$

(1)

$$v_a \neq 0, v_B = 0$$

$$v_{O_1} = \underbrace{\frac{R_2}{R_1} \cdot v_a}_{\text{amplificatore lineare invertente}}$$

$$v_{\text{OUT}_A} = \underbrace{-\frac{R_4}{R_3} \cdot v_{O_1}}_{\text{amplificatore lineare invertente}} = \frac{R_4}{R_3} \cdot \frac{R_2}{R_1} \cdot v_A$$

(2)

$$v_a = 0, v_B \neq 0$$

$$v_{O_1} = 0$$

$$\underbrace{v_{\text{OUT}_B} = \left(1 + \frac{R_4}{R_3} \cdot v_B\right)}_{\substack{\text{amplificatore lineare} \\ \text{non invertente}}} = \frac{R_3 + R_4}{R_3} \cdot v_B$$

$$v_{\text{OUT}} = v_{\text{OUT}_A} + v_{\text{OUT}_B} = \frac{R_4}{R_3} \cdot \frac{R_2}{R_1} \cdot v_A + \frac{R_3 + R_4}{R_3} \cdot v_B$$

2) Sommatore tra  $v_A$  e  $v_B$

Si egualano i coefficienti davanti a  $v_A$  e  $v_B$

$$\begin{aligned} \frac{R_4}{R_3} \cdot \frac{R_2}{R_1} &= \frac{R_3 + R_4}{R_3} \Rightarrow \frac{40k\Omega \cdot 40k\Omega}{10k\Omega \cdot R_1} = (10k\Omega + 40k\Omega, 10k\Omega) \\ &\Rightarrow \frac{160k\Omega}{R_1} = 5k\Omega \\ &\Rightarrow R_1 = \frac{150}{5} k\Omega = 32k\Omega \end{aligned}$$

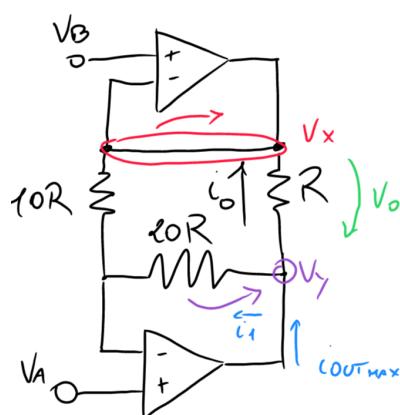
#### 2.1.4 Esame 28/01/2021

**A**

1) Del seguente circuito si calcoli  $i_O$  in funzione di  $v_A$  e  $v_B$ .  
 2) Calcolare il modulo massimo della corrente in uscita dagli operazionali sapendo che  $v_A$  e  $v_B$  possono assumere valori all'interno del range [-2V..2V]. Esplicitare i passaggi.

$R = 1 \text{ K}\Omega$

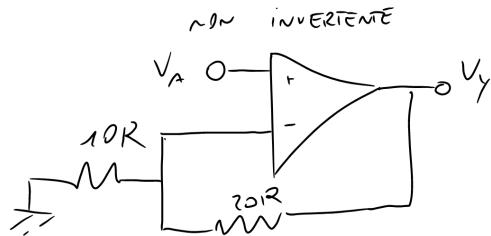
$$i_O = \frac{3}{R} (V_A - V_B)$$

$$|I_{\text{OUTmax}}| = 12.4 \text{ mA}$$


- 1) Usiamo la sovrapposizione degli effetti per calcolare  $v_0$

①

$v_a \neq 0, v_B = 0$ , abbiamo come OPAMP<sub>1</sub> un FOLLOWER e come OPAMP<sub>2</sub> un NON INVERTENTE

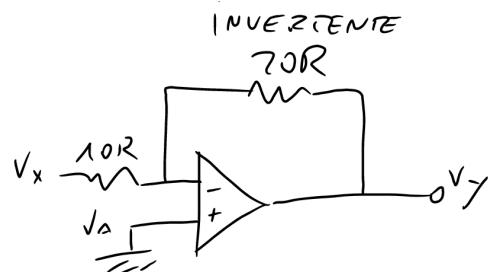


$$\underbrace{v_x = 0}_{\text{follower spento}} \quad v_y = \left(1 + \frac{20R}{10R}\right) \cdot v_A \\ = 3v_A$$

$$i_{0_1} = \frac{3v_A}{R}$$

(2)

$v_a = 0, v_B \neq 0$ , abbiamo come OPAMP<sub>1</sub> un FOLLOWER e come OPAMP<sub>2</sub> un INVERTENTE



$$\underbrace{v_x = v_B}_{\text{follower acceso}} \quad v_y = -\frac{20R}{10R} \cdot v_x = \frac{R_3 + R_4}{R_3} \cdot v_B \\ = -\frac{20R}{10R} \cdot v_B \\ = -2v_B$$

$$v_y - v_x - v_{0_2} = 0 \implies v_{0_2} = v_y - v_x$$

$$i_{0_2} = \frac{v_y - v_B}{R} \\ = \frac{-2v_B - v_B}{R} \\ = -\frac{3v_b}{R}$$

$$i_0 = i_{0_1} + i_{0_2} = \frac{3v_A}{R} - \frac{3v_b}{R} \\ = \frac{3v_A - 3v_b}{R} \\ = \frac{3}{R}(v_A - v_B)$$

## 2) Modulo massimo corrente

$$i_{\text{OUT}_{\text{MAX}}} = i_0 + i_1 = \frac{3}{R}(v_A - v_B) + \frac{3v_a - 2v_B - v_A}{20R} \\ = \frac{1}{R} \left( \frac{30v_A - 30v_B + v_A - v_B}{10} \right) \\ = \frac{31}{10R}(v_A - v_B)$$

Adesso, siccome il testo dell'esercizio ci dice che  $v_A$  e  $v_B$  possono assumere valori all'interno dell'intervallo  $[-2V..2V]$ , impostiamo i seguenti valori:  $v_A = 2V$ ,  $v_B = -2V$

$$\begin{aligned} i_{\text{OUT}_{\text{MAX}}} &= \frac{31}{10R} \cdot 4V \\ &= \frac{124V}{10R} \\ &= 1,24 \cdot 10^{-4} A \\ &= 12,4 \text{ mA} \end{aligned}$$

### 2.1.5 Esame 17/06/2021 (Diagramma di Bode)

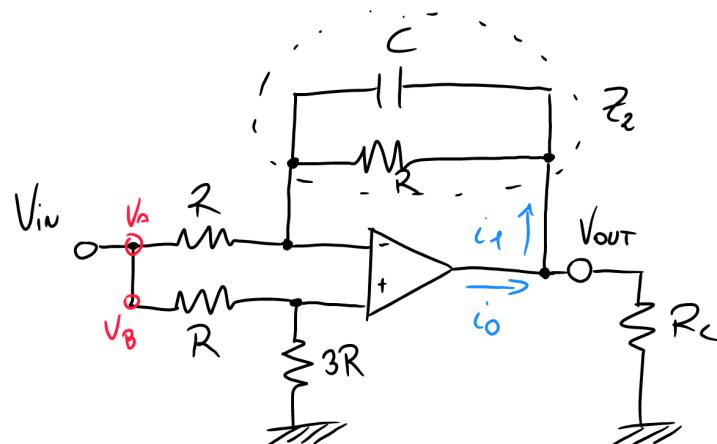
**A** N.O. e MOD1 V.O.

1) Del seguente circuito si calcoli la funzione di trasferimento e se ne traccino i diagrammi di Bode indicando le posizioni di eventuali poli e zeri.  
Si supponga l'OPAMP ideale e in alto guadagno. Esplicitare i passaggi  
2) Calcolare il massimo valore che  $I_O$  assume in condizioni statiche per  $V_{\text{IN}} \in [-5V .. 5V]$ . Esplicitare i passaggi.

$R=10 \text{ k}\Omega$   
 $R_L=150 \Omega$   
 $C=22 \text{ nF}$   
 $L_+=-L_-=10V$

$$H(j\omega) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + j\omega^3/2RC}{1 + j\omega RC}$$

$|I_{\text{omax}}| = 16.785 \text{ mA}$

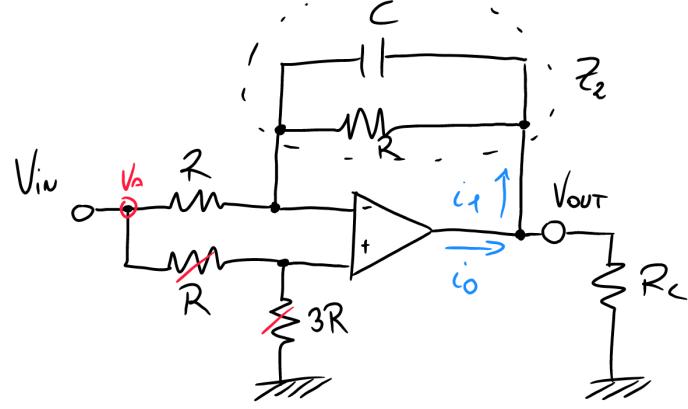


#### 1) Calcolo funzione di trasferimento

OPAMP ideale ( $L_+ = L_- = 0$ ) e in alto guadagno ( $v_0 = 0$ ), quindi il circuito è lineare, e quindi si può applicare la sovrapposizione degli effetti.

①

$v_a \neq 0, v_B = 0 \Rightarrow$  Filtro attivo passa basso

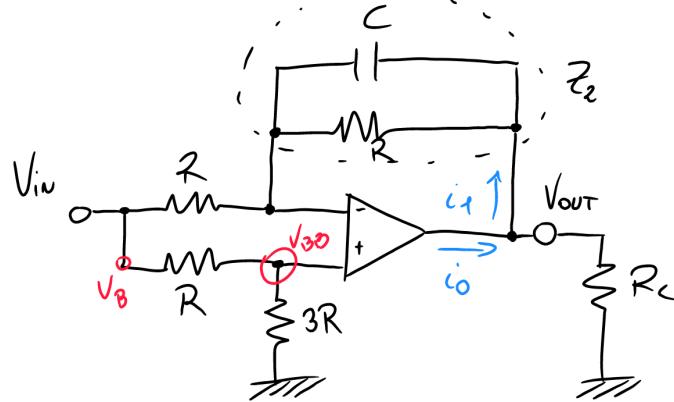


$$v_{\text{OUT}_1} = -\frac{R}{R} \cdot \frac{1}{1 + j\omega CR} \cdot v_{\text{IN}}$$

$$= -\frac{1}{1 + j\omega CR} \cdot v_{\text{IN}}$$

(2)

$v_a = 0, v_B \neq 0 \Rightarrow \text{OPAMP non invertente}$



$$\frac{1}{Z_2} = \frac{1}{R} + j\omega C$$

$$= \frac{1 + j\omega RC}{R} \Rightarrow Z_2 = \frac{R}{1 + j\omega RC}$$

Per calcolare la tensione  $v_{\text{BB}}$  si usa la formula del partitore di tensione

$$v_{\text{BB}} = v_B \cdot \frac{3R}{3R + R}$$

$$v_{\text{OUT}_2} = \left(1 + \frac{Z_2}{R}\right) \cdot v_{\text{BB}}$$

$$= \left(1 + \frac{Z_2}{R}\right) \cdot \underbrace{v_B}_{v_{\text{IN}}} \cdot \underbrace{\frac{3R}{3R + R}}_{\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{3}{4} v_{\text{IN}} \left(1 + \frac{1}{1 + j\omega RC}\right)$$

$$\begin{aligned}
v_{\text{OUT}} &= v_{\text{OUT}_1} + v_{\text{OUT}_2} = -\frac{1}{1+j\omega CR} \cdot v_{\text{IN}} + \frac{3}{4} v_{\text{IN}} \left( 1 + \frac{1}{1+j\omega RC} \right) \\
&= v_{\text{IN}} \left( -\frac{1}{1+j\omega CR} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4(1+j\omega RC)} \right) \\
&= v_{\text{IN}} \left( \frac{-4 + 3(1+j\omega RC) + 3}{4(1+j\omega RC)} \right) \\
&= v_{\text{IN}} \frac{2 + 3j\omega RC}{4(1+j\omega RC)} \\
&= v_{\text{IN}} \frac{1 + \frac{3}{2}j\omega RC}{2(1+j\omega RC)}
\end{aligned}$$

quindi

$$H(j\omega) = \frac{1}{2} \frac{1 + \frac{3}{2}j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$

Ora dobbiamo disegnare il diagramma di Bode della funzione di trasferimento appena ricavata.

Iniziamo con il diagramma del modulo:

- la funzione ha uno **zero**, rappresentato da  $1 + \frac{3}{2}j\omega RC$
- e un **polo**, rappresentato da  $1 + j\omega RC$

Possiamo utilizzare due metodi per tracciare il diagramma del modulo:

- tracciare il diagramma del modulo dello **zero** e del **polo** e “sommarli”
- calcolare il valore di  $H(j\omega)$  per  $\omega \rightarrow 0$  e  $\omega \rightarrow +\infty$  e trasformarlo in decibel

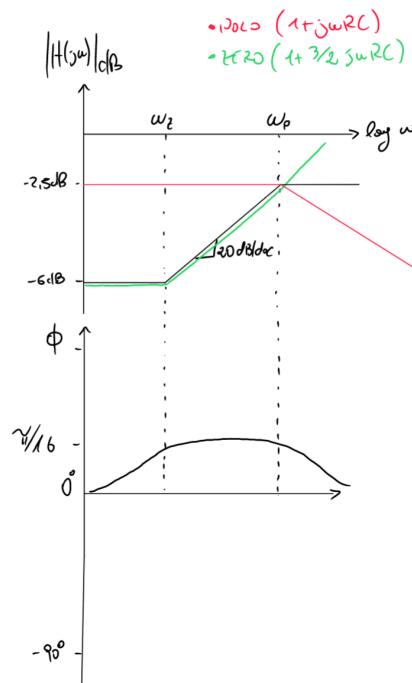
Di seguito li illustrerò entrambi.

$$\begin{aligned}
\omega \rightarrow 0 \Rightarrow H(j\omega) &= \frac{1}{2} & \omega \rightarrow +\infty \Rightarrow H(j\omega) &= \frac{3}{4} \\
\left| \frac{1}{2} \right|_{\text{dB}} &= 20 \log \left( \frac{1}{2} \right) = -6 & \left| \frac{3}{4} \right|_{\text{dB}} &= 20 \log \left( \frac{3}{4} \right) = -2,5
\end{aligned}$$

Calcoliamo le pulsazioni di taglio di **polo** e **zero**

$$\begin{aligned}
\omega_p &= \frac{1}{RC} & \omega_z &= \frac{1}{\frac{3}{2}RC} \\
&= 3030 \text{ rad/s} & &= 4545 \text{ rad/s} \\
&= 3 \text{ krad/s} & &= 4,5 \text{ krad/s}
\end{aligned}$$

Adesso possiamo disegnare il diagramma del modulo tenendo conto che prima di  $\omega_z$  vale  $-6$  dB e dopo  $\omega_p$  vale  $-2,5$  dB, e che all'interno delle due pulsazioni di taglio aumenta con una pendenza di 20 dB/dec



Per quanto riguarda il diagramma della fase anche qui si può tracciare il diagrammi di **polo** e **zero** e sommarli ma, siccome le pulsazioni di taglio si trovano nella stessa fase, il diagramma risultante dalla somma sarebbe impreciso, quindi dobbiamo utilizzare un altro metodo.

Calcoliamo l'argomento della nostra funzione di trasferimento

$$\arg\left(\frac{1}{2} \frac{1 + \frac{3}{2}j\omega RC}{1 + j\omega RC}\right) = \arg\left(1 + \frac{3}{2}j\omega RC\right) - \arg(2 + 2j\omega RC)$$

$$\arg\left(1 + \frac{3}{2}j\omega RC\right) = \arctan\left(\frac{3}{2}wRC\right) = \begin{cases} 0^\circ & \omega \ll \omega_z \\ 45^\circ & \omega = \omega_z \\ 56^\circ & \omega = \omega_p \\ 90^\circ & \omega \gg \omega_z \end{cases}$$

$$\arg(1 + j\omega RC) = \arctan(wRC) = \begin{cases} 0^\circ & \omega \ll \omega_p \\ -45^\circ & \omega = \omega_p \\ -33^\circ & \omega = \omega_z \\ -90^\circ & \omega \gg \omega_p \end{cases}$$

quindi sommiamo tutte le quantità (tra l'altro si può immaginare senza difficoltà anche il valore che assume a metà tra le due pulsazioni di taglio)

$$\arg\left(\frac{1}{2} \frac{1 + \frac{3}{2}j\omega RC}{1 + j\omega RC}\right) = \begin{cases} 0^\circ & \omega \ll \omega_z \quad \omega \ll \omega_p \\ 12^\circ & \omega = \omega_z \\ 11.5^\circ & \omega = \frac{\omega_z + \omega_p}{2} \\ 11^\circ & \omega = \omega_p \\ 0^\circ & \omega \gg \omega_z \quad \omega \ll \omega_p \end{cases}$$

Quindi il diagramma delle fasi inizia metà decade prima di  $\omega_z$  a salire (da  $0^\circ$ ) fino a raggiungere il valore di circa  $\frac{\pi}{16}$  per tutto l'intervallo  $[\omega_z, \omega_p]$ , per poi scendere per metà decade dopo  $\omega_p$  e stabilizzarsi al valore  $0^\circ$ .

## 2) Calcolo $I_{O_{MAX}}$

Siccome siamo in condizioni statiche il circuito con  $C$  è aperto, e nella relazione tra  $v_{IN}$  e  $v_{OUT}$   $\omega = 0$

$$v_{\text{OUT}} = \frac{1}{2} v_{\text{IN}}$$

$$v_{\text{IN}} = -5V \Rightarrow v_{\text{OUT}} = -2,5V \quad v_{\text{IN}} = 5V \Rightarrow v_{\text{OUT}} = 2,5V$$

$$\begin{aligned} I_O &= i_1 + I_L = \frac{v_{\text{OUT}} - v_{\text{IN}}}{2R} + \frac{v_{\text{OUT}}}{R_L} \\ &= 0,01654 A \\ &= 16,54 mA \end{aligned}$$

### 2.1.6 Esercizio diagramma di Bode non ideale

Questo esercizio specifica di tracciare anche il diagramma di Bode considerando l'OPAMP non ideale, quindi ci dà il **prodotto guadagno-banda** finito dell'OPAMP

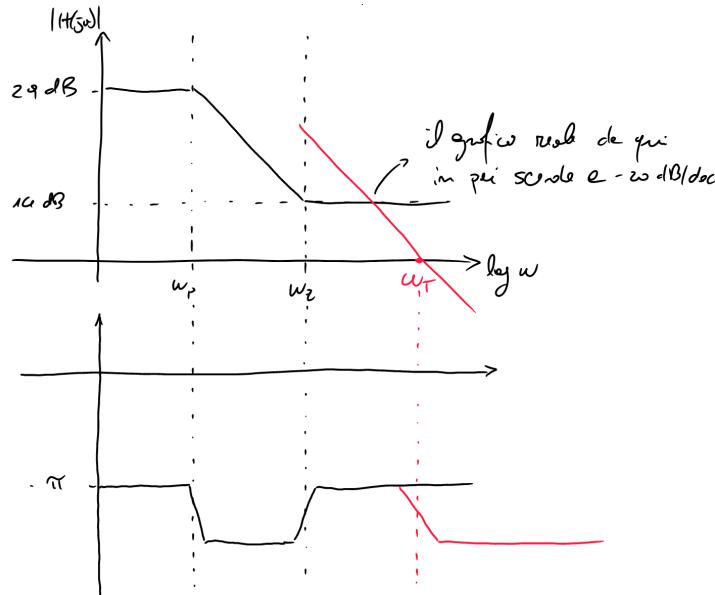
$$A_v \cdot B = 1 \text{ MHz}$$

che bisogna trasformare in rad/s (basta moltiplicare per  $2\pi$ )

$$A_v \cdot B = 6,28 \text{ rad/s} := \omega_T$$

dove  $\omega_T$  è la **posizione della pulsazione al guadagno di taglio**.

Prima si traccia il grafico del circuito ideale, dopo si modifica tale grafico in base alla pulsazione del guadagno di taglio. In particolare, per il diagramma del modulo, bisogna considerare una retta con pendenza  $-20 \text{ dB/dec}$  che interseca l'asse  $\log \omega$ ; dopo il punto di intersezione tra il diagramma ideale e la retta, il diagramma reale segue l'andamento della retta; per il diagramma della fase, metà decade prima di  $\omega_T$  vi è uno sfasamento di  $45^\circ$ .



Abbiamo la seguente funzione di trasferimento

$$H(j\omega) = -30 \frac{1 + j\omega C^{\frac{35}{3}} R}{1 + j\omega C 50 R}$$

$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow H(j\omega) = -30$$

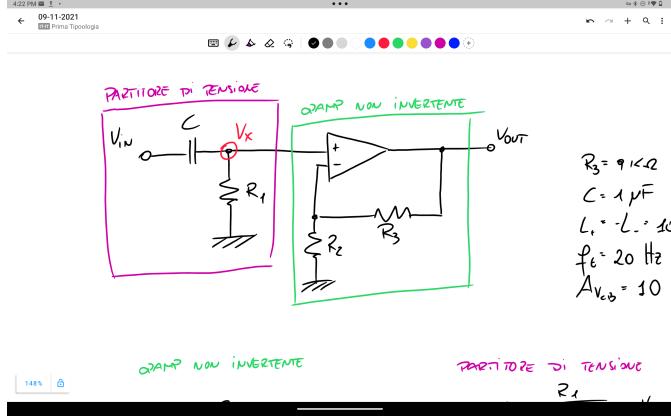
$$\omega \rightarrow +\infty \Rightarrow H(j\omega) = -5$$

$$|-30|_{\text{dB}} = 20 \log\left(\frac{1}{2}\right) = 29$$

$$|-5|_{\text{dB}} = 20 \log\left(\frac{3}{4}\right) = 14$$

### 2.1.7 Esame 09/11/2021 (frequenza di taglio)

Dal seguente circuito si calcolino i valori di  $R_1$  e  $R_2$  in modo che la frequenza di taglio sia 20 Hz e il guadagno in centro banda risulti pari a 10. Si supponga l'OPAMP ideale e in alto guadagno.



Dati:

$$\begin{aligned}
 R_3 &= 9 \text{ k}\Omega & f_T &= 20 \text{ Hz} \\
 C &= 1 \mu\text{F} & A_{v_{CB}} &= 10 \\
 L_+ &= -L_- = 10 \text{ V} &
 \end{aligned}$$

### OPAMP non invertente

$$\begin{aligned}
 v_{\text{OUT}} &= \left(1 + \frac{R_3}{R_2}\right) \cdot v_x \\
 &= \left(\frac{R_2 + R_3}{R_2}\right) \cdot v_x
 \end{aligned}$$

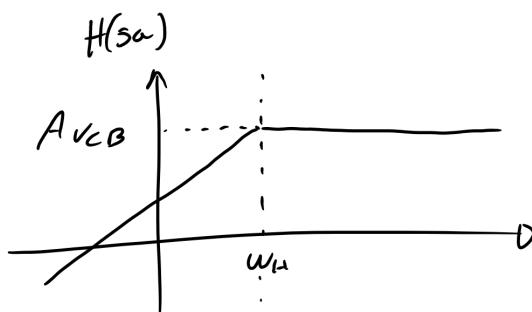
### Partitore di tensione

$$\begin{aligned}
 v_x &= v_{\text{IN}} \cdot \frac{R_1}{Z_C + R_1} \\
 &= v_{\text{IN}} \cdot \frac{R_1}{\frac{1}{j\omega C} + R_1} \\
 &= v_{\text{IN}} \cdot \frac{R_1}{\frac{1 + j\omega C R_1}{j\omega C}} \\
 &= v_{\text{IN}} \cdot \frac{j\omega C R_1}{1 + j\omega C R_1}
 \end{aligned}$$

Quindi la funzione di trasferimento è:

$$H(j\omega) = \underbrace{\frac{R_2 + R_3}{R_2}}_{\mu} \cdot \frac{j\omega C R_1}{1 + j\omega C R_1}$$

$$|A_{v_{CB}}|_{\text{dB}} = 20 \log_{10}(10) = 20 \text{ dB}$$



$$\begin{aligned}\omega_T = \frac{1}{R_1 C} & \quad \omega_T = 2\pi f_T \quad \Rightarrow \quad R_1 = \frac{1}{\omega_T C} = \frac{1}{2\pi f_T C} \\ & = \frac{1}{2\pi \cdot 20 \text{ Hz} \cdot 1 \times 10^{-6} F} \\ & = 7,96 \text{ k}\Omega\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|A_{v_{CB}}|_{\text{dB}} = \mu &= \frac{R_2 + R_3}{R_2} = 10 \Rightarrow R_2 + R_3 = 10 \cdot R_2 \\ R_2 - 10 \cdot R_2 &= -R_3 \\ -9 \cdot R_2 &= -R_3 \\ 9R_2 &= R_3 \\ R_2 &= \frac{R_3}{9} = 1 \text{ k}\Omega\end{aligned}$$

## 2.2 D

### 2.2.1 Formule notevoli

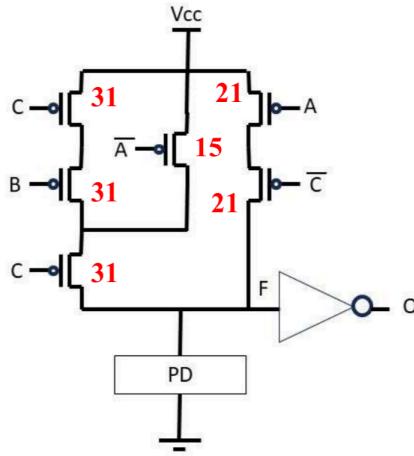
$$\begin{aligned}C_{\min} &= \text{Cox} \cdot L_{\min}^2 \cdot (\text{SP} + \text{SN}) \\ \text{Resistenza equivalente pull-up} & \quad R_{\text{eq P}} = \frac{t_{\text{LH}}}{\ln(2) \cdot C_{\min}} \\ \text{Resistenza equivalente pull-down} & \quad R_{\text{eq N}} = \frac{t_{\text{HL}}}{\ln(2) \cdot C_{\min}} \\ R_{Pn} &= \frac{R_{\text{eq P}} - \frac{R_{\text{RIF P}}}{S_P} \cdot N}{K} \\ \text{Per percorsi critici} & \quad R_P = \frac{R_{\text{eq P}}}{K} \\ S_P &= \frac{R_{\text{RIF P}}}{RP}\end{aligned}$$

#### Note:

- $\ln(2) = 0,69$
- la  $S_P$  che compare nella formula di  $R_{Pn}$  è sempre quella del percorso critico
- $t_{\text{LH}}$  è il tempo di salita e  $t_{\text{HL}}$  è il tempo di discesa. In generale negli esercizi se chiede di "dimensionare affinché il tempo di salita al nodo  $X$  sia inferiore o uguale a  $Yps$ " vuol dire che prenderemo  $t_{\text{LH}} = Y$ .
- $ps$  sono pico secondi

### 2.2.2 Esame 14/06/2023

- 1) Della rete in figura si calcoli l'espressione booleana al nodo O.
- 2) Dimensionare i transistori pMOS affinché il tempo di salita al nodo F sia inferiore o uguale a 90ps.  
Ottimizzare il progetto. Si tenga conto che i transistori dell'inverter di uscita hanno le seguenti geometrie :  $S_p = 200$ ,  $S_n = 100$ .
- 3) Progettare la PDN



### Parametri tecnologici:

$$\begin{aligned}
 R_{\text{RIF } P} &= 10k\Omega && \text{si riferisce alla rete di pull-up} \\
 R_{\text{RIF } N} &= 5k\Omega && \text{si riferisce alla rete di pull-down} \\
 \text{Cox} &= 7fF/\mu m^2 \\
 L_{\min} &= 0,25\mu m \\
 \text{Vdd} &= 3V
 \end{aligned}$$

**N.B.** I numeri rossi indicano la dimensione massima che possono assumere i transistori

Per prima cosa si calcola  $C_{\min}$

$$\begin{aligned}
 C_{\min} &= \text{Cox} \cdot L_{\min}^2 \cdot (\text{SP} + \text{SN}) \\
 &= 7fF/\mu m^2 \cdot (0,25\mu m)^2 \cdot (200 + 100) \\
 &= 131,35fF
 \end{aligned}$$

Poi la resistenza equivalente

$$\begin{aligned}
 R_{\text{eq } P} &= \frac{t_{\text{LH}}}{\ln(2) \cdot C_{\min}} = \frac{90\text{ ps}}{0,69 \cdot 131,25 fF} \\
 &= \frac{90 \cdot 10^{-12}\text{ s}}{0,69 \cdot 131,25 \cdot 10^{-15}} \\
 &= 0,99378 \cdot 10^3 \Omega \\
 &= 993,79 \Omega \\
 &= 994 \Omega
 \end{aligned}$$

Per **dimensionare** si divide  $R_{\text{eq } P}$  per il numero di transistor nel percorso critico.

**Percorso critico:** percorso da  $V_{cc}$  all'estremità in cui ci sono più transistor in serie (quando si considera il maggior numero di transistor in serie questi possono avere paralleli). Il percorso critico è anche il percorso con NMOS maggiore.

### 1) Espressione booleana

#### Regole:

- Gli elementi in serie sono il prodotto booleano degli elementi
- Gli elementi in parallelo sono la somma booleana degli elementi

PD := rete di pull-down

PU := rete di pull-up

Rete di pull-up al nodo  $F$ :

$$PU = ((C \cdot B) + \bar{A}) \cdot C + A \cdot \bar{C} = F$$

La rete di pull-down si calcola invertendo somma e prodotto e negando poi tutta l'espressione  
Scriviamo  $F$  in forma negata

$$F = \overline{\left( \left( (C + B) \cdot \overline{A} \right) + C \right) \cdot \left( A + \overline{C} \right)}$$

allora

$$\begin{aligned} O &= \overline{F} = \overline{\left( \left( (C + B) \cdot \overline{A} \right) + C \right) \cdot \left( A + \overline{C} \right)} \\ &= \overline{\left( \left( \overline{C} \cdot \overline{B} \right) + A \right) \cdot \overline{C}} + \overline{\left( \overline{A} \cdot C \right)} \end{aligned}$$

## 2) Dimensionare i transistor

### Primo caso peggiore

Si calcola la  $R_P$ , che solo per il percorso critico vale  $\frac{R_{eq\ P}}{nMOS}$ . In questo caso il percorso critico è  $XBC$ ; la  $X$  sta a significare che il valore di  $A$  non ci interessa.

$$\begin{aligned} R_P &= \frac{994\ \Omega}{3} \\ &= 331,33\ \Omega \\ &= 331\ \Omega \end{aligned}$$

Quindi ora calcoliamo la  $SP$  con la formula

$$\begin{aligned} S_P &= \frac{R_{RIF\ P}}{R_P} = \frac{10\ k\Omega}{331\ \Omega} \\ &= 30,21 \\ &= 31 \end{aligned}$$

**N.B.** Arrotondare sempre all'intero successivo

### Secondo caso peggiore

Per ottimizzare un percorso non critico si ha una formula che varia in base alle caratteristiche del percorso stesso

$$R_P = \frac{R_{eq\ P} - \frac{R_{RIF\ P}}{SP} \cdot N}{K}$$

dove  $N$  è il numero di MOS del percorso critico che interessano anche un percorso non critico e  $K$  è il numero di MOS del percorso non critico cosiddetti "nuovi", cioè che non fanno parte del percorso critico. Inoltre  $K + N$  è il numero di MOS del percorso non critico; quando si devono calcolare  $K$  e  $N$  di solito si calcola prima  $K$  e poi si ricava  $N$  dall'ultima formula.

In questo caso consideriamo  $AX\overline{C}$ . Abbiamo 2 pMOS nuovi e nessun pMOS del percorso critico, quindi  $N = 0$  e  $K = 2$

$$\begin{aligned} R_{P2} &= \frac{R_{eq\ P} - \frac{R_{RIF\ P}}{SP} \cdot \overbrace{N}^0}{K} = \frac{994}{2}\ \Omega \\ &= 497\ \Omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} SP_2 &= \frac{R_{RIF\ P}}{R_{P2}} = \frac{10000\ \Omega}{497\ \Omega} \\ &= 20,12 \\ &= 21 \end{aligned}$$

### Terzo caso

Consideriamo il percorso  $\overline{A}\overline{B}C$ . Abbiamo un nMOS nuovo e un nMOS del percorso critico, quindi  $N = 1$  e  $K = 1$ .

**N.B.** Bisogna specificare  $\overline{B}$  e non  $X$  perché si deve considerare solo il percorso di  $\overline{AC}$ , e se  $B$  fosse accesso il percorso sarebbe diverso.

$$R_{P3} = \frac{R_{\text{RIF P}} - \frac{R_{\text{RIF P}} \cdot N}{SP}}{K} = \frac{994 \Omega - \frac{10000 \Omega}{31} \cdot 1}{1}$$

$$= 994 \Omega - 323 \Omega$$

$$= 671 \Omega$$

$$SP_2 = \frac{R_{\text{RIF P}}}{R_{P2}} = \frac{10000 \Omega}{671 \Omega}$$

$$= 14,9$$

$$= 15$$

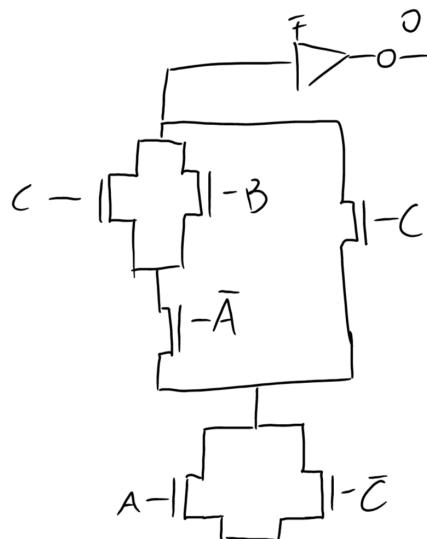
**Nota:** le  $S_P$  trovate denotano la dimensione massima dei transistori che interessano il percorso; in particolare si assegna prima la dimensione ai transistori presenti nel percorso critico, poi agli altri, in modo che il valore trovato per un transistori del percorso critico sia dominante rispetto al valore trovato per lo stesso transistore per un percorso non critico.

### 3) Progettare la PDN

La formula della rete di pull-down è la seguente (prima l'abbiamo calcolata scrivendola in forma negata)

$$PD = ((C + B) \cdot \bar{A}) + C \cdot (A + \bar{C})$$

quindi, seguendo le regole dell'algebra booleana, la rete può essere rappresentata come segue



#### 2.2.3 Esame 12/06/2024

- 1) Determinare l'espressione booleana al nodo O
- 2) Dimensionare i transistori nMOS e pMOS in modo che i tempi di salita e discesa, al nodo F, siano inferiori o uguali a  $100 ps$ . Si ottimizzi il progetto per minimizzare l'area occupata da tutti i transistori.

Si tenga conto che i transistori dell'inverter di uscita hanno le seguenti geometrie :  $S_P = 300$ ,  $S_n = 150$ .

**Parametri tecnologici:**

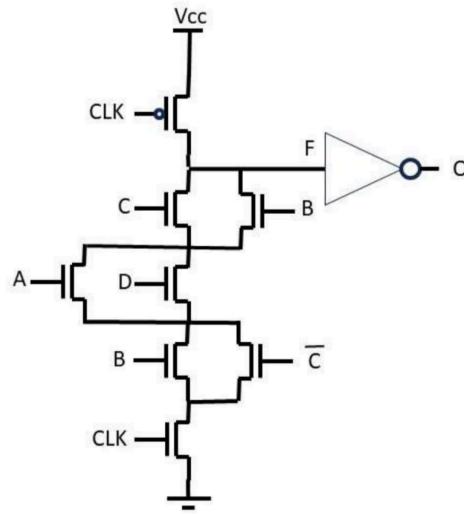
$$R_{\text{rif } p} = 10 k\Omega$$

$$R_{\text{rif } n} = 5 k\Omega$$

$$C_{ox} = 7 fF/\mu m^2$$

$$L_{\min} = 0,25 \mu m$$

$$V_{CC} = 3,3V$$



### 1) Espressione booleana

$$PD = ((C + B) \cdot (A + D) \cdot (B + \bar{C})) \cdot CLK + \bar{CLK}$$

Nota: Il CLK non negato è in serie con il resto del circuito della rete di pull-up, quello negato è in parallelo a tutta la rete di pull-down.

$$\begin{aligned} F &= \overline{PD} \\ O &= \overline{F} = \overline{\overline{PD}} \\ O &= \overline{\overline{PD}} \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned} O &= \overline{(C + B) \cdot (A + D) \cdot (B + \bar{C})} \cdot CLK + \overline{\bar{CLK}} \\ &= \overline{(\bar{C} \cdot \bar{B}) + (\bar{A} \cdot \bar{D}) + (\bar{B} \cdot C)} \cdot CLK \end{aligned}$$

### 2) Dimensionare transistori nMOS e pMOS

- Rete pull-up

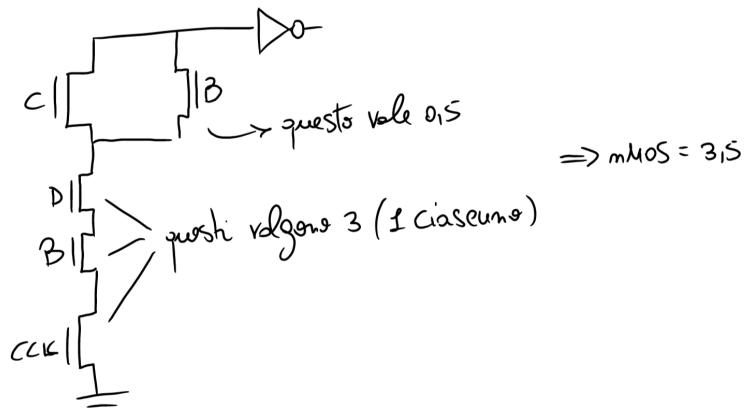
C'è solo un CLK nella rete di pull-up, quindi  $K = 1$

$$\begin{aligned} R_P &= \frac{R_{eq\ P}}{K} = 736\ \Omega & S_P &= \frac{R_{RIF\ P}}{R_P} = \frac{10000\ \Omega}{736\ \Omega} \\ &&&= 13,58 \\ &&&= 14 \end{aligned}$$

- Rete pull-down In questo caso ci sono diversi percorsi critici:

- $ABC\bar{D}$
- $\bar{A}BCD$
- $AB\bar{C}\bar{D}$
- $\bar{A}B\bar{C}D$

Il numero di MOS in un percorso non è sempre un intero, infatti, se ci sono dei transistori in parallelo, il numero di MOS corrispondente è uguale a  $\frac{1}{\text{numero di transistori in parallelo}}$



Quindi per tutti i percorsi critici individuati  $K = 3,5$

$$R_N = \frac{R_{eq\ N}}{K} = \frac{736\ \Omega}{3.5} = 210\ \Omega \quad S_N = \frac{R_{RIF\ N}}{R_N} = \frac{5000\ \Omega}{210\ \Omega} = 24$$

Tutti i transistori della rete pull-down avranno quindi dimensione 24

