



# Controlli Automatici T

Bumma Giuseppe

## Contents

1 Introduzione .....	6
1.1 Notazione ed elementi costitutivi .....	6
1.2 Controllo in anello aperto e anello chiuso .....	7
1.3 Progetto di un sistema di controllo .....	7
1.4 Esempio di sistema di controllo: circuito elettrico .....	7
2 Sistemi in forma di stato .....	8
2.1 Sistemi continui .....	8
2.1.1 Equazione di stato .....	8
2.1.2 Equazione di uscita .....	8
2.2 Sistemi discreti .....	9
2.3 Esempio circuito elettrico .....	9
2.3.1 Esempio con parametri che variano nel tempo .....	9
2.4 Esempio carrello .....	9
2.5 Esempio auto in rettilineo .....	10
2.6 Esempio pendolo .....	11
2.7 Traiettoria di un sistema .....	12
2.7.1 Esempio .....	12
2.8 Equilibrio di un sistema .....	12
2.8.1 Esempio pendolo .....	12
2.9 Classificazione dei sistemi in forma di stato .....	13
2.10 Proprietà dei sistemi lineari .....	14
2.10.1 Sistemi lineri in forma matriciale .....	14
2.11 Sistemi lineari tempo-invarianti .....	14
2.11.1 Esempio carrello .....	14
2.11.2 Sistemi lineari tempo-invarianti SISO .....	15
2.12 Principio di sovrapposizione degli effetti .....	15
Dimostrazione .....	15
2.13 Evoluzione libera e evoluzione forzata .....	16
2.14 Traiettorie di un sistema LTI .....	16
2.14.1 Traiettorie di un sistema LTI: esempio scalare .....	16
2.14.2 Traiettorie di un sistema LTI: caso generale .....	16
2.14.3 Esempio sistema non forzato .....	17
2.14.4 Proprietà della matrice esponenziale .....	17
2.15 Rappresentazioni equivalenti .....	18
2.16 Modi di un sistema lineare tempo invariante .....	18
2.16.1 Autovalori complessi .....	19
2.16.2 Modi naturali: autovalori reali semplici .....	19
2.16.3 Modi naturali: autovalori complessi coniugati semplici .....	19
2.16.4 Esempio sui modi naturali .....	20
2.16.5 Esempio 1 .....	20
2.16.6 Esempio carrello .....	22
2.17 Stabilità interna .....	24
2.17.1 Richiami sull'equilibrio di un sistema .....	24
2.17.2 Definizione generale .....	24
2.17.3 Stabilità interna per sistemi non forzati .....	24
2.17.4 Osservazioni .....	25
2.18 Stabilità interna di sistemi LTI .....	25
Dimostrazione .....	25
2.18.1 Teorema .....	26
2.18.2 Teorema .....	26

Osservazione .....	26
Osservazione .....	26
Proprietà .....	26
2.18.3 Esempio stabilità del sistema carrello .....	26
2.19 Retroazione dello stato .....	27
2.19.1 Proprietà di raggiungibilità (facoltativo) .....	27
Teorema .....	27
2.19.2 Proprietà di osservabilità (facoltativo) .....	28
Teorema .....	28
2.20 Linearizzazione di sistemi in non lineari (tempo invarianti) .....	28
2.20.1 Esempio pendolo .....	29
2.20.2 Stabilità di 3 sistemi lineari (linearizzazione intorno a 3 diversi equilibri) .....	30
2.21 Stabilità e linearizzazione .....	31
2.21.1 Teorema .....	31
2.21.2 Teorema .....	31
2.21.3 Controllo non lineare mediante linearizzazione .....	31
3 Trasformata di Laplace .....	32
3.1 Definizione .....	32
3.2 Osservazioni .....	32
3.2.1 Ascissa di convergenza .....	32
3.2.2 Trasformate razionali .....	32
3.2.3 Esempio .....	33
3.3 Formula di antitrasformazione .....	33
3.3.1 Perché si utilizza la trasformata di Laplace .....	33
3.4 Proprietà della trasformata di Laplace .....	33
3.4.1 Linearità .....	33
Dimostrazione .....	33
3.4.2 Traslazione temporale .....	34
Dimostrazione .....	34
3.4.3 Traslazione nel dominio della variabile complessa .....	34
3.4.4 Dimostrazione .....	34
3.4.5 Derivazione nel dominio del tempo .....	34
3.4.6 Derivazione nel dominio della variabile complessa .....	35
Dimostrazione .....	35
3.4.7 Integrazione nel tempo .....	35
3.4.8 Convoluzione nel tempo .....	35
3.4.9 Teorema del valore iniziale .....	35
3.4.10 Teorema del valore finale .....	36
3.5 Trasformata di segnali elementari .....	36
3.5.1 Trasformata della delta .....	36
3.5.2 Trasformata del segnale gradino unitario .....	36
3.5.3 Trasformata del segnale rampa .....	37
3.6 Tabella delle trasformate .....	37
4 Funzione di trasferimento .....	38
4.1 Introduzione .....	38
4.2 Richiami di calcolo matriciale .....	39
4.2.1 Matrice diagonale .....	39
4.2.2 Matrice triangolare alta .....	39
4.2.3 Matrice triangolare bassa .....	39
4.2.4 Matrice identità .....	40
4.2.5 Traspota di una matrice .....	40
4.2.6 Complemento algebrico .....	40
4.2.7 Determinante di una matrice .....	40
4.3 Funzione di trasferimento nel dettaglio .....	40
4.3.1 Esempio 1 .....	41
4.3.2 Esempio 2 .....	41
4.4 Schema dell'utilizzo della trasformata di Laplace .....	41

4.5 Rappresentazioni e parametri della funzione di trasferimento .....	42
4.5.1 Esempio .....	42
4.6 Cancellazioni .....	43
4.6.1 Esempio 1 .....	43
4.6.2 Esempio 2 .....	44
4.7 Antitrasformazione di Laplace .....	44
5 Sviluppo di Heaviside o in fratti semplici (poli distinti) .....	45
5.1 Caso 1: poli reali o complessi coniugati distinti con molteplicità 1 .....	45
5.1.1 Esempio .....	45
5.1.2 Forma reale per poli complessi coniugati .....	46
5.1.3 Modi naturali di poli reali distinti .....	47
5.1.4 Modi naturali di poli complessi coniugati distinti .....	47
5.1.5 Modi naturali di un sistema LTI: poli distinti .....	47
5.2 Caso 2: Poli reali o complessi coniugati multipli con molteplicità maggiore di 1 .....	47
5.2.1 Esempio .....	48
5.2.2 Forma reale per poli complessi coniugati con molteplicità maggiore di 1 .....	49
5.2.3 Modi naturali di poli multipli .....	49
5.2.4 Modi naturali come risposta all'impulso .....	50
5.3 Risposta a un ingresso generico .....	50
5.4 Risposta di sistemi elementari .....	50
5.5 Stabilità esterna (BIBO) .....	51
6 Analisi di sistemi attraverso funzione di trasferimento .....	51
6.1 Dalla Funzione di Trasferimento allo spazio degli stati .....	51
6.2 Sistemi del primo ordine .....	51
6.2.1 Esempio .....	52
6.2.2 Considerazioni .....	53
6.3 Sistemi del secondo ordine .....	53
6.3.1 Sistemi del secondo ordine con poli complessi coniugati .....	53
6.3.2 Luogo di punti a tempo di assestamento costante .....	54
6.3.3 Luogo di punti a sovraelongazione costante .....	55
6.3.4 Mappatura di specifiche temporali nel piano complesso .....	55
6.3.5 Sistemi del secondo ordine con poli reali .....	56
6.4 Sistemi a polo dominante .....	56
6.4.1 Esempio con coppia di poli complessi coniugati dominanti .....	57
6.5 Sistemi del secondo ordine con poli reali coincidenti .....	58
6.6 Sistemi del primo ordine con uno zero .....	58
6.7 Sistemi del secondo ordine con poli reali e zero .....	59
6.7.1 Sistemi a fase non minima .....	59
Domanda .....	60
6.7.2 Sistemi a fase minima con sovraelongazione .....	60
6.7.3 Sistemi a fase minima con code di assestamento .....	61
7 Risposta in frequenza .....	62
7.1 Risposta a un segnale di ingresso sinusoidale .....	62
7.1.1 Teorema .....	63
7.2 Risposta a segnali periodici sviluppabili in serie di Fourier .....	63
7.3 Risposta a segnali dotati di trasformata di Fourier .....	64
7.4 Richiami .....	64
7.4.1 Spettro di un segnale .....	64
7.5 Risposta in frequenza .....	65
7.5.1 Identificazione sperimentale della risposta in frequenza (approccio data-driven) .....	65
7.6 Rappresentazione della risposta in frequenza .....	65
7.6.1 Proprietà dei numeri complessi e logaritmi .....	66
7.6.2 Esempio operazioni in decibel .....	66
7.7 Diagrammi di Bode .....	66
7.7.1 Diagramma del modulo .....	66
7.8 Diagramma della fase .....	67
7.8.1 Contributi elementari .....	67

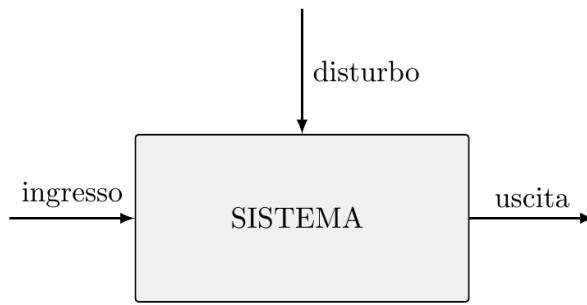
7.8.2 Guadagno statico .....	67
7.8.3 Zeri nell'origine .....	68
7.8.4 Poli nell'origine .....	68
7.8.5 Zero reale (ampiezza) .....	68
7.8.6 Zero reale negativo (fase) .....	69
7.8.7 Zero reale positivo (fase) .....	70
7.8.8 Polo reale .....	70
7.8.9 Polo reale negativo .....	71
7.8.10 Zeri complessi coniugati (ampiezza) .....	71
7.8.11 Zeri complessi coniugati a parte reale negativa (fase) .....	73
7.8.12 Zeri complessi coniugati a parte reale positiva .....	73
7.8.13 Poli complessi coniugati a parte reale negativa .....	74
7.8.14 Poli complessi coniugati a parte reale positiva .....	74
7.8.15 Ritardo temporale .....	75
7.8.16 Proprietà bloccante degli zeri .....	75
7.9 Risonanza .....	76
7.10 Azione filtrante dei sistemi dinamici .....	77
7.10.1 Filtro passa-basso .....	77
7.10.2 Filtro passa-alto .....	77
7.10.3 Passa banda .....	78
7.10.4 Elimina banda .....	78
7.11 Esempio diagramma di Bode .....	78
7.11.1 Filtrare un'onda quadra con disturbo in alta frequenza .....	79
8 Sistemi di controllo: stabilità e prestazioni .....	80
8.1 Schema di controllo in retroazione .....	80
8.1.1 Sistema in anello chiuso .....	80
8.2 Schema generale e semplificazione .....	80
8.3 Disaccoppiamento frequenziale dei segnali .....	81
8.4 Requisiti di un sistema di controllo .....	82
8.4.1 Stabilità .....	82
8.4.2 Prestazioni .....	82
8.4.3 Stabilità robusta del sistema retroazionato (Criterio di Bode) .....	82
8.5 Margini di fase e ampiezza .....	83
8.5.1 Margine di fase .....	83
8.5.2 Margine di ampiezza .....	84
8.5.3 Casi patologici .....	85
8.6 Criterio di Bode .....	85
8.7 Funzioni di sensitività .....	86
8.7.1 Funzione di sensitività complementare .....	86
8.7.2 Funzione di sensitività .....	86
8.7.3 Funzione di sensitività del controllo .....	87
8.7.4 Considerazioni .....	87
8.7.5 Errori .....	88
8.7.6 Analisi in frequenza della funzione di sensitività complementare .....	88
8.7.7 Analisi in frequenza della funzione di sensitività .....	89
8.7.8 Analisi in frequenza della funzione di sensitività del controllo .....	89
8.7.9 Poli complessi coniugati di $F(s)$ (sensibilità complementare) .....	90
8.8 Analisi statica: errore a un gradino .....	91
8.9 Analisi statica: errore a ingressi $\frac{W}{s^k}$ .....	92
8.10 Principio del modello interno .....	92
9 Sistemi di controllo: progetto del regolatore .....	92
9.1.1 Riepilogo specifiche .....	93
9.2 Specifiche in termini di guadagno d'anello .....	93
9.2.1 Stabilità robusta rispetto a incertezze .....	93
9.2.2 Specifica su $L(j\omega)$ .....	93
9.2.3 Precisione statica .....	93

9.2.4 Precisione dinamica .....	94
9.2.5 Attenuazione disturbo in uscita $d(t)$ .....	94
9.2.6 Attenuazione disturbo di misura $n(t)$ .....	95
9.2.7 Moderazione variabile di controllo $u(t)$ .....	95
9.2.8 Fisica realizzabilità del regolatore .....	96
9.2.9 Riepilogo specifiche .....	97
9.3 Sintesi del regolatore .....	97
9.3.1 Loop Shaping .....	97
9.4 Struttura del regolatore .....	97
9.5 Sintesi del regolatore statico .....	97
9.6 Sintesi del regolatore dinamico .....	98
9.6.1 Obiettivi .....	98
9.6.2 Scenario A .....	98
9.6.2.1 Caso $\mu_d$ libero .....	99
9.6.2.2 Caso $\mu_d$ vincolato .....	99
9.6.3 Rete ritardatrice .....	100
9.6.3.1 Tuning approssimato .....	100
9.6.3.2 Formule di inversione .....	100
9.6.4 Scenario B .....	101
9.6.4.1 Aggiunta di uno zero .....	101
9.6.4.2 Aggiunta di due zeri .....	102
9.6.4.3 Progettazione .....	102
Caso $B_2$ .....	102
9.6.4.4 Rete anticipatrice .....	103
Formule di inversione .....	103
9.7 Controllori PID .....	104
9.7.1 Casi speciali .....	105

# 1 Introduzione

L'idea dei **controlli automatici** è sostituire l'intelligenza umana con un sistema automatico (come l'intelligenza artificiale) basata su leggi matematiche e/o algoritmi.

## 1.1 Notazione ed elementi costitutivi



Il **sistema** è un oggetto per il quale si vuole ottenere un comportamento desiderato.

Esempi di sistema sono: impianto (industriale), macchinario (braccio robotico, macchina a controllo numerico, etc ...), veicolo (auto, velivolo, drone, etc ...), fenomeno fisico (condizioni atmosferiche), sistema biologico, sistema sociale.

L'obiettivo è che l'andamento nel tempo di alcune variabili segua un segnale di riferimento.

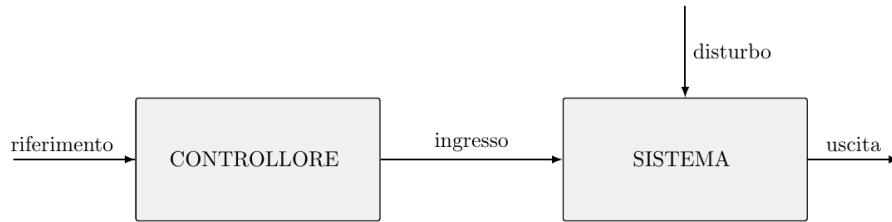
Altri elementi sono:

- Controllore: unità che determina l'andamento della variabile di controllo (ingresso);
- Sistema di controllo: sistema (processo) + controllore;
- Sistemi di controllo naturali: meccanismi presenti in natura, come quelli presenti nel corpo umano (temperatura corporea costante, ritmo cardiaco, etc dots);
- Sistemi di controllo manuali: è presente l'azione dell'uomo;

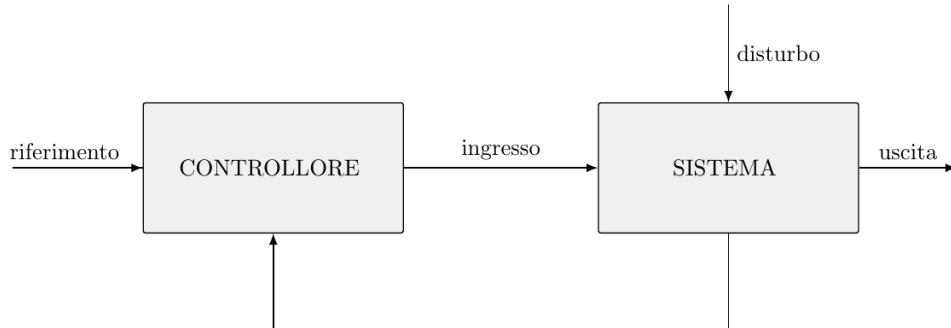
- Sistemi di controllo automatico: uomo sostituito da un dispositivo.

## 1.2 Controllo in anello aperto e anello chiuso

Controllo in anello aperto “**feedforward**”: il controllore utilizza solo il segnale di riferimento



**Controllo in anello chiuso (“feedback” o retroazione):** il controllore utilizza il segnale di riferimento e la variabile controllata ad ogni istante di tempo



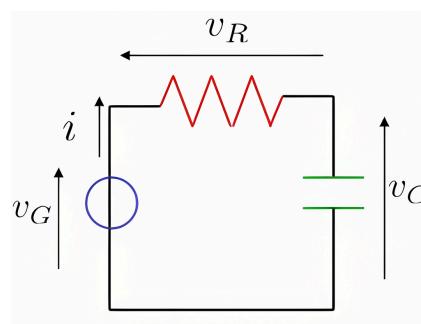
Il controllo in retroazione è un paradigma centrale nei controlli automatici.

## 1.3 Progetto di un sistema di controllo

I passi per progettare un sistema di controllo sono:

- definizione delle specifiche: assegnazione comportamento desiderato, qualità del controllo, costo,...
- modellazione del sistema (controllo e test): complessità del modello (compromesso), definizione ingressi/uscite, codifica del modello, validazione in simulazione
- analisi del sistema: studio proprietà “strutturali”, fattibilità specifiche
- sintesi legge di controllo: è basata su modello, analisi sistema controllato, stima carico computazionale
- simulazione sistema controllato: test su modello di controllo, test realistici (modello complesso, ritardi, quantizzazione, disturbi, ...)
- scelta elementi tecnologici: sensori/attuatori, elettronica di acquisizione/attuazione, dispositivo di elaborazione
- sperimentazione: hardware in the loop, prototipazione rapida, realizzazione prototipo definitivo

## 1.4 Esempio di sistema di controllo: circuito elettrico



La legge che usiamo per definire il circuito (il nostro sistema) è la *legge delle tensioni*

$$v_R(t) = v_G(t) - v_{C(t)}$$

le leggi del condensatore e del resistore sono

$$C \cdot \dot{v}_C(t) = i(t) \quad v_R(t) = R \cdot i(t)$$

Scrivendo la formula in termini di  $v_C(t)$  (stato interno) e  $v_G(t)$  (ingresso di controllo)

$$\dot{v}_C(t) = \frac{1}{RC}(v_G(t) - v_C(t))$$

## 2 Sistemi in forma di stato

### 2.1 Sistemi continui

I *sistemi continui* sono sistemi in cui il tempo è una variabile reale:  $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t) && \text{equazione di stato} \\ \dot{y}(t) &= h(x(t), u(t), t) && \text{equazione (trasformazione) di uscita} \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

Definiamo inoltre  $t_0$  come tempo iniziale e  $x(t_0) = x_0$  come stato iniziale.

**N.B.**  $\dot{x}(t) := \frac{d}{dt}x(t).$

Notazione:

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$  stato del sistema all'istante  $t$
- $u(t) \in \mathbb{R}^m$  ingresso del sistema all'istante  $t$
- $y(t) \in \mathbb{R}^p$  uscita del sistema all'istante  $t$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_{n(t)} \end{bmatrix} \quad u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_{m(t)} \end{bmatrix} \quad y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_{p(t)} \end{bmatrix}$$

Da notare che  $x(t)$  è un vettore mentre  $x_1, \dots, x_n$  sono scalari;  $x(t)$  è una variabile interna che descrive il comportamento del sistema.

#### 2.1.1 Equazione di stato

L'*equazione di stato* è un'equazione differenziale ordinaria (ODE) vettoriale del primo ordine (cioè l'ordine massimo delle derivate è 1)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1 \left( \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}, t \right) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n \left( \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}, t \right) \end{aligned}$$

$\mathbb{R}^n$  è detto spazio di stato, con  $n$  ordine del sistema. La funzione di stato è  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x(t), u(t), t) \\ \vdots \\ f_n(x(t), u(t), t) \end{bmatrix} := f(x(t), u(t), t)$$

Avere solo derivate prime non è limitato, perché ad esempio posso inserire una prima variabile come derivata prima e una seconda variabile come derivata prima della prima variabile.

#### 2.1.2 Equazione di uscita

L'equazione di uscita è un'equazione algebrica

$$\begin{aligned} y_1(t) &= h_1(x(t), u(t), t) \\ &\vdots \\ y_p(t) &= h_p(x(t), u(t), t) \end{aligned}$$

$h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$  funzione di uscita

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(x(t), u(t), t) \\ \vdots \\ h_p(x(t), u(t), t) \end{bmatrix} := h(x(t), u(t), t)$$

Se la soluzione  $x(t)$  a partire da un istante iniziale  $t_0$  è univocamente determinata da  $x(t_0)$  e  $u(\tau)$  con  $\tau \geq t_0$ , allora il sistema è detto **causale**, cioè lo stato dipende solo da ciò che accade in passato.

Sotto opportune **ipotesi** di regolarità della funzione  $f$  si dimostra esistenza e unicità della soluzione dell'equazione (differenziale) di stato (Teorema di Cauchy-Lipschitz).

## 2.2 Sistemi discreti

Nei *sistemi discreti* il tempo  $t$  è una variabile interna,  $t \in \mathbb{Z}$ .

$$\begin{aligned} x(t+1) &= f(x(t), u(t), t) && \text{(equazione di stato)} \\ y(t) &= h(x(t), u(t), t) && \text{(equazione (trasformazione) di uscita)} \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

L'equazione di stato è un'equazione alle differenze finite (FDE).

Notazione:

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$  stato del sistema all'istante  $t$
- $u(t) \in \mathbb{R}^m$  ingresso del sistema all'istante  $t$
- $y(t) \in \mathbb{R}^p$  uscita del sistema all'istante  $t$

$x(t)$ ,  $u(t)$  e  $y(t)$  sono uguali ai sistemi continui.

Per modellare sistemi discreti nel codice basta un ciclo **for**.

## 2.3 Esempio circuito elettrico

Riprendiamo l'esempio del [circuito elettrico 1.4](#); la formula trovata è

$$\underbrace{\dot{x}(t)}_{\dot{v}_C(t)} = \frac{1}{RC} \left( \underbrace{v_G(t)}_{u(t)} - \underbrace{v_C(t)}_{x(t)} \right)$$

In questo caso lo stato del sistema  $x(t)$  è caratterizzato dalla variabile  $v_C(t)$ , l'ingresso dalla variabile  $v_G(t)$ . Supponiamo quindi di misurare (con un sensore) la tensione ai capi della resistenza, allora l'uscita del nostro sistema sarà  $v_R(t)$

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{RC} (u(t) - x(t)) \quad f(x, u) = \frac{1}{RC} (u - x)$$

da notare che in questo caso  $f$  non è funzione del tempo.

$$v_R(t) = v_G(t) - v_C(t) \implies y(t) = u(t) - x(t)$$

### 2.3.1 Esempio con parametri che variano nel tempo

Supponiamo che la resistenza sia una funzione del tempo

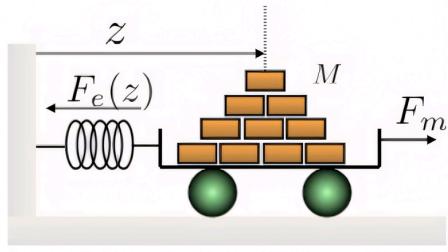
$$R(t) = \overline{R} \left( 1 - \frac{1}{2} e^{-t} \right)$$

allora

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{R(t)C} (u(t) - x(t)) \quad f(x, u, t) = \frac{1}{R(t)C} (u - x)$$

in questo caso  $f$  è funzione del tempo.

## 2.4 Esempio carrello



La legge che usiamo è la legge di Newton, prendendo  $z$  come posizione del centro di massa

$$M\ddot{z} = -F_e + F_m$$

con  $M$  massa e  $F_e$  data da

$$F_e(z(t), t) = k(t)z(t)$$

quindi la nostra equazione diventa

$$M\ddot{z}(t) = -k(t)z(t) + F_m(t)$$

Siccome nella nostra formula compare una derivata seconda di una variabile ci conviene definire lo stato del sistema con la variabile stessa e la derivata prima della variabile.

Definiamo quindi  $x_1 := z$  e  $x_2 := \dot{z}$ , con stato  $x := [x_1 \ x_2]^T$ , e  $u := F_m$  (ingresso).

Quindi possiamo scrivere, tenendo conto che  $\dot{x}_2(t) = \ddot{z}$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{k}{M}x_1(t) + \frac{u(t)}{M} \\ f(x, u) &= \begin{bmatrix} f_1(x, u) \\ f_2(x, u) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{k}{M}x_1 + \frac{u}{M} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Supponiamo di misurare  $z(t)$  (sensore posizione), allora  $y := z$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{k}{M}x_1(t) + \frac{u(t)}{M} \\ y(t) &= x_1(t)\end{aligned}$$

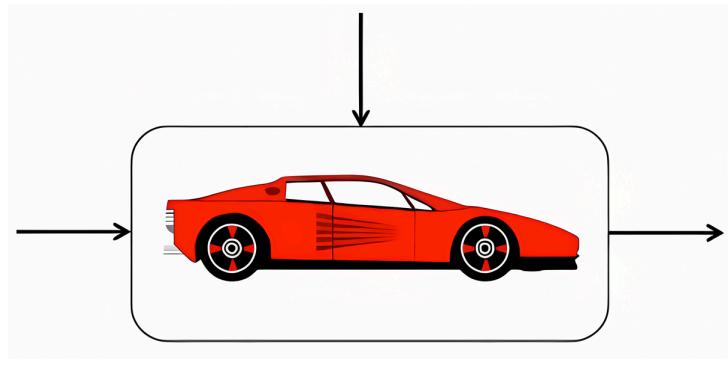
Sia  $k(t) = k$  e, ricordando la formula dell'energia cinetica  $E_k = \frac{1}{2}mv^2$  e la formula dell'energia elastica  $U = \frac{1}{2}k\Delta x^2$ , consideriamo come uscita l'energia totale  $E_T(t) = \frac{1}{2}(kz^2(t) + M\dot{z}^2(t))$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{k}{M}x_1(t) + \frac{u(t)}{M} \\ y(t) &= \frac{1}{2}(k(t)x_1^2(t) + Mx_2^2(t))\end{aligned}$$

quindi  $h(x) := \frac{1}{2}(kx_1^2 + Mx_2^2)$ .

**N.B.** Il risultato (l'uscita) vale, di solito, solo per il mio modello, in base a come l'ho impostato; nella realtà potrebbe essere diverso.

## 2.5 Esempio auto in rettilineo



Scriviamo la legge di Newton

$$M\ddot{z} = F_{\text{drag}} + F_m$$

con  $M$  massa e  $F_{\text{drag}}$  data da

$$F_{\text{drag}} = -b\dot{z}$$

Definiamo  $x_1 := z$  e  $x_2 := \dot{z}$  (stato  $x := [x_1 x_2]^T$ ) e  $u := F_m$  (ingresso). Supponiamo di misurare  $z(t)$  (sensore posizione), allora  $y := z$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{b}{M}x_2(t) + \frac{1}{M}u(t) \\ y(t) &= x_1(t)\end{aligned}$$

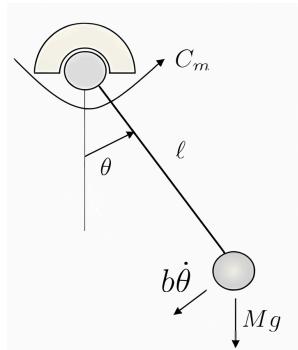
Proviamo a progettare un sistema per il *cruise control*. L'equazione della dinamica è

$$M\ddot{z}(t) = -b\dot{z}(t) + F_m(t)$$

Siccome siamo interessati a controllare la velocità e non la posizione, allora consideriamo come stato solo la velocità:  $x := \dot{z}$ ,  $u := F_m$ . Supponiamo di misurare  $\dot{z}(t)$  (sensore velocità), allora  $y := x$

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -\frac{b}{M}x(t) + \frac{1}{M}u(t) \\ y(t) &= x(t)\end{aligned}$$

## 2.6 Esempio pendolo



Scriviamo l'equazione dei momenti

$$M\ell^2\ddot{\theta} = C_{\text{grav}} + C_{\text{drag}} + C_m$$

con  $M$  massa e  $C_{\text{grav}}$  e  $C_{\text{drag}}$  date da

$$C_{\text{grav}} = Mg\ell \sin(\theta) \quad C_{\text{drag}} = -b \cdot \theta$$

con  $b$  coefficiente d'attrito.

Scriviamo l'equazione della dinamica, partendo dalla formula iniziale dei momenti

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{\ell} \sin(\theta(t)) - \frac{b}{M\ell^2} \dot{\theta}(t) + \frac{1}{M\ell^2} C_m(t)$$

Definiamo quindi  $x_1 := \theta$  e  $x_2 := \dot{\theta}$  (stato  $x := [x_1 x_2]^T$ ) e  $u := C_m$  (ingresso). Supponiamo di misurare  $\theta$  (sensore angolo), allora  $y := \theta$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{g}{\ell} \sin(x_1(t)) - \frac{b}{M\ell^2} x_2(t) + \frac{1}{M\ell^2} u(t) \\ y(t) &= x_1(t)\end{aligned}$$

Se misuriamo invece la posizione verticale, allora  $y := -\ell \cos(\theta)$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{g}{\ell} \sin(x_1(t)) - \frac{b}{M\ell^2} x_2(t) + \frac{1}{M\ell^2} u(t) \\ y(t) &= -\ell \cos(x_1(t))\end{aligned}$$

## 2.7 Traiettoria di un sistema

Dato un istante iniziale  $t_0$  e uno stato iniziale  $x_{t_0}$ , la funzione del tempo  $(x(t), u(t)), t > t_0$ , che soddisfa l'equazione di stato  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$  si dice traiettoria (movimento) del sistema. In particolare,  $x(t)$  si dice traiettoria dello stato. Consistentemente,  $y(t)$  si dice traiettoria dell'uscita.

**N.B.** per sistemi senza ingresso (quindi non forzati) la traiettoria dello stato  $x(t), t > t_0$  è determinata solo dallo stato iniziale  $x_{t_0}$ .

### 2.7.1 Esempio

Definiamo un sistema con stato  $x$  e stato iniziale  $x_0$

$$x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad x_0 := \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \quad t_0 = 0$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= u(t)\end{aligned}$$

Assegno a  $x_1, x_2$  e  $u(t)$  le seguenti equazioni

$$\begin{aligned}\bar{x}_1(t) &= 5 + 3t + t^2 \\ \bar{x}_2(t) &= 3 + 2t \\ \bar{u}(t) &= 2\end{aligned}$$

Se le equazioni di  $\bar{x}_1$  e  $\bar{x}_2$  soddisfano le condizioni iniziali e la funzione di stato ( $\dot{x}_1$  e  $\dot{x}_2$ ) allora quelle equazioni sono la traiettoria del sistema. Infatti

$$\bar{x}_0 = \begin{bmatrix} 5 + 3t + t^2 \\ 3 + 2t \end{bmatrix}_{t=0} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} 5 + 3t + t^2 \\ 3 + 2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + 2t \\ 2 \end{bmatrix}$$

## 2.8 Equilibrio di un sistema

Dato un sistema (non forzato)  $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$ , uno stato  $x_e$  si dice *equilibrio del sistema* se  $x(t) = x_e, t \geq t_0$  è una traiettoria del sistema. Infatti

Dato un sistema (forzato)  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$ ,  $(x_e, u_e)$  si dice *coppia di equilibrio* del sistema se  $(x(t), u(t)) = (x_e, u_e), t \geq t_0$ , è una traiettoria del sistema.

Per un sistema (tempo invariante continuo)  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$  data una coppia di equilibrio  $(x_e, u_e)$  vale  $f(x_e, u_e) = 0$ . Se il sistema è non forzato, dato un equilibrio  $x_e$  vale  $f(x_e) = 0$ .

### 2.8.1 Esempio pendolo

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) &= f_1(x(t), u(t)) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{G}{\ell} \sin(x_1(t)) - \frac{b}{M\ell^2} x_2(t) + \frac{1}{M\ell^2} u(t) &= f_2(x(t), u(t))\end{aligned}$$

Siccome sappiamo che, data una coppia di equilibrio  $(x_e, u_e)$ , vale  $f(x_e, u_e) = 0$ , allora per trovare l'equilibrio del pendolo imponiamo

$$f(x_e, u_e) = 0$$

cioè:

$$\begin{cases} x_{2e}(t) = 0 \\ -\frac{G}{\ell} \sin(x_{1e}) - \frac{bx_{2e}}{M\ell^2} + \frac{1}{M\ell^2} u_e = 0 \end{cases}$$

sostituendo  $x_{2e}(t) = 0$  nell'ultima equazione

$$-\frac{G}{\ell} \sin(x_{1e}) + \frac{1}{M\ell^2} u_e = 0 \implies u_e = MG\ell \sin(x_{1e})$$

In conclusione, le coppie di equilibrio del sistema sono tutti gli  $(x_{1e}, x_{2e}, u_e)$  che soddisfano

$$\begin{cases} u_e = MG\ell \sin(x_{1e}) \\ x_{2e} = 0 \end{cases}$$

## 2.9 Classificazione dei sistemi in forma di stato

La classe generale è  $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^p$

$$\begin{array}{ll} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) & \text{equazione di stato} \\ y(t) = h(x(t), u(t), t) & \text{equazione di uscita} \end{array} \quad (2.9.3)$$

- I sistemi **monovariabili** (SISO, Single Input Single Output) sono una sottoclasse di sistemi **multivariabili** (MIMO, Multiple Input Multiple Output); sono tali se  $m = p = 1$ , altrimenti sono dei sistemi MIMO;
- I sistemi **strettamente propri** sono una sotto classe dei **sistemi propri**; sono tali se  $y(t) = h(x(t), t)$ , quindi se l'uscita dipende esclusivamente dall'ingresso, chiamati quindi sistemi causali (tutti i sistemi che abbiamo visto fin'ora sono sistemi propri).
- I sistemi **non forzati** sono una sotto classe dei **sistemi forzati**; un esempio di sistema non forzato è il seguente

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), t) \\ y(t) &= h(x(t), t) \end{aligned}$$

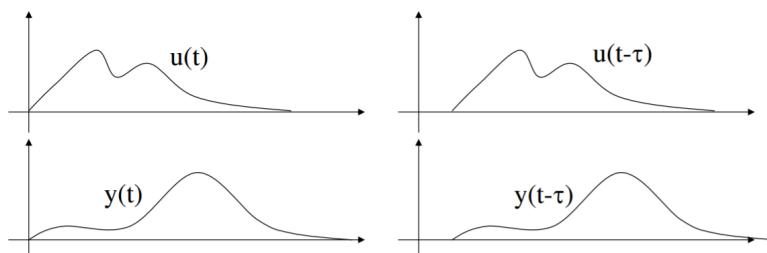
- I sistemi **tempo invarianti** sono una sotto classe di sistemi **tempo varianti**; sono sistemi in cui le funzioni  $f$  e  $h$  non dipendono esplicitamente dal tempo, cioè risultano

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= h(x(t), u(t)) \end{aligned}$$

I tempo invarianti sono tali se, data una traiettoria  $(x(t), u(t)), t \geq t_0$ , con  $x(t_0) = x_0$ , per ogni  $\Delta \in \mathbb{R}$  vale che  $x(t_0 + \Delta) = x_0$  allora  $(x_\Delta(t), u_\Delta(t)) = (x(t - \Delta), u(t - \Delta))$  è una traiettoria. Si può dimostrare che sistemi tempo invarianti sono del tipo

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) & x(0) &= x_0 \\ y(t) &= h(x(t), u(t)) \end{aligned}$$

e senza perdita di generalità possiamo scegliere  $t_0 = 0$ . Graficamente:



- I **sistemi lineari** sono una sotto classe di **sistemi non lineari**.

I sistemi lineari sono tali se le funzioni di stato e di uscita sono lineari in  $x$  e  $u$ :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \dots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_{11}(t)u_1(t) + b_{12}(t)u_2(t) + \dots + b_{1m}(t)u_m(t) \\ \dot{x}_2(t) &= a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \dots + a_{2n}(t)x_n(t) + b_{21}(t)u_1(t) + b_{22}(t)u_2(t) + \dots + b_{2m}(t)u_m(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \dots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_{n1}(t)u_1(t) + b_{n2}(t)u_2(t) + \dots + b_{nm}(t)u_m(t)\end{aligned}$$

per  $y(t)$  invece

$$\begin{aligned}y_1(t) &= c_{11}(t)x_1(t) + c_{12}(t)x_2(t) + \dots + c_{1n}(t)x_n(t) + d_{11}(t)u_1(t) + d_{12}(t)u_2(t) + \dots + d_{1m}(t)u_m(t) \\ y_2(t) &= c_{21}(t)x_1(t) + c_{22}(t)x_2(t) + \dots + c_{2n}(t)x_n(t) + d_{21}(t)u_1(t) + d_{22}(t)u_2(t) + \dots + d_{2m}(t)u_m(t) \\ &\vdots \\ y_p(t) &= c_{p1}(t)x_1(t) + c_{p2}(t)x_2(t) + \dots + c_{pn}(t)x_n(t) + d_{p1,t}u_1(t) + d_{p2,t}u_2(t) + \dots + d_{pm,t}u_m(t)\end{aligned}$$

## 2.10 Proprietà dei sistemi lineari

### 2.10.1 Sistemi lineari in forma matriciale

Definiamo le matrici  $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C(t) \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $D(t) \in \mathbb{R}^{p \times m}$

$$\begin{aligned}A(t) &= \begin{bmatrix} a_{11,t} & \dots & a_{1n,t} \\ \vdots & & \\ a_{n1,t} & \dots & a_{nn,t} \end{bmatrix} & B(t) &= \begin{bmatrix} b_{11,t} & \dots & b_{1m,t} \\ \vdots & & \\ b_{n1,t} & \dots & b_{nm,t} \end{bmatrix} \\ C(t) &= \begin{bmatrix} c_{11,t} & \dots & c_{1n,t} \\ \vdots & & \\ c_{p1,t} & \dots & c_{pn,t} \end{bmatrix} & D(t) &= \begin{bmatrix} d_{11,t} & \dots & d_{1m,t} \\ \vdots & & \\ d_{p1,t} & \dots & d_{pm,t} \end{bmatrix}\end{aligned} \quad (2.10.4)$$

quindi scriviamo

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} &= A(t) \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + B(t) \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} &= C(t) \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + D(t) \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}\end{aligned} \quad (2.10.5)$$

che equivale a

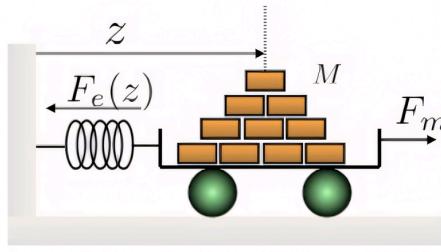
$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t)\end{aligned} \quad (2.10.6)$$

## 2.11 Sistemi lineari tempo-invarianti

I sistemi lineari tempo invarianti sono sistemi lineari in cui le matrici  $A, B, C, D$  sono matrici costanti.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned} \quad (2.11.7)$$

### 2.11.1 Esempio carrello



$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$f_1(x, u, t) = x_2$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{k(t)}{M}x_1(t) + \frac{1}{M}u(t)$$

$$f_2(x, u, t) = -\frac{k(t)}{M}x_1 + \frac{1}{M}u$$

$$y(t) = x_1(t)$$

$f_2$  dipende esplicitamente da  $t$  attraverso  $k(t)$  quindi è un sistema tempo variante. Se invece  $k(t) = \bar{k}$  (quindi una costante) per ogni  $t$  allora il sistema è tempo invariante. Siccome  $f_1$  e  $f_2$  dipendono linearmente da  $x$  e  $u$  il sistema è lineare.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k(t)}{M} & 0 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}}_B u(t) \\ y(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{0}_{D} u(t) \end{aligned}$$

per  $k$  costante:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0]$$

### 2.11.2 Sistemi lineari tempo-invarianti SISO

I sistemi lineari tempo-invarianti single input single output (SISO) sono caratterizzati dalle matrici  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ , ovvero  $B$  è un vettore,  $C$  è un vettore riga e  $D$  è uno scalare.

### 2.12 Principio di sovrapposizione degli effetti

Prendiamo un sistema lineare (anche tempo-variante)

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$

- sia  $(x_a(t), u_a(t))$  traiettoria con  $x_a(t_0) = x_{0a}$
- sia  $(x_b(t), u_b(t))$  traiettoria con  $x_b(t_0) = x_{0b}$

Allora  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  dato lo stato iniziale  $x_{ab,t_0} = \alpha x_{0a} + \beta x_{0b}$ , si ha che

$$(x_{ab}(t), u_{ab}(t)) = (\alpha x_a(t) + \beta x_b(t), \alpha u_a(t) + \beta u_b(t))$$

è traiettoria del sistema, ovvero applicando come ingresso  $u_{ab} = \alpha u_a(t) + \beta u_b(t)$  la traiettoria di stato è  $x_{ab}(t) = \alpha x_a(t) + \beta x_b(t)$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha x_{0a}(t) + \beta x_{0b}(t) \\ \alpha u_a(t) + \beta u_b(t) \end{array} \right\} \implies \alpha x_a(t) + \beta x_b(t) \quad (2.12.8)$$

**IMPORTANTE:** non vale per i sistemi non lineari.

#### Dimostrazione

Per dimostrarlo dobbiamo provare che soddisfa l'equazione differenziale.

Siccome  $(x_a(t), u_a(t))$  e  $(x_b(t), u_b(t))$  sono traiettorie del sistema, esse soddisfano la relazione (Section 2.7)

$$\dot{x}_a = A(t)x_a(t) + B(t)u_a(t)$$

$$\dot{x}_b = A(t)x_b(t) + B(t)u_b(t)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x_{ab,t} &= \alpha\dot{x}_a(t) + \beta\dot{x}_b(t) \\ &= \alpha(A(t)x_a(t) + B(t)u_a(t)) + \beta(A(t)x_b(t) + B(t)u_b(t)) \\ &= A(t)(\alpha x_a(t) + \beta x_b(t)) + B(t)(\alpha u_a(t) + \beta u_b(t)) \end{aligned}$$

Per sistemi lineari sotto opportune ipotesi su  $A(t)$  e  $B(t)$  si può dimostrare che la soluzione è unica.  
Si dimostra lo stesso anche per l'uscita.

## 2.13 Evoluzione libera e evoluzione forzata

Sia  $x_\ell(t), t \geq t_0$  la traiettoria di stato ottenuta per  $x_\ell(t_0) = x_0$  e  $u_\ell(t) = 0, t \geq t_0$ .

Sia  $x_f(t), t \geq t_0$  la traiettoria di stato ottenuta per  $x_f(t_0) = 0$  e  $u_f(t) = u(t), t \geq t_0$ .

Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti si ha che, fissato lo stato iniziale  $x(t_0) = x_0$  e applicando l'ingresso  $u(t), t \geq t_0$ , la traiettoria di stato è data da

$$x(t) = \underbrace{x_{\ell(t)}}_{\substack{\text{evoluzione} \\ \text{libera}}} + \underbrace{x_{f(t)}}_{\substack{\text{evoluzione} \\ \text{forzata}}} \quad (2.13.9)$$

L'**evoluzione libera** è definita come  $x_\ell(t)$  per  $t \geq t_0$ , tale che  $x_\ell(t_0) = x_0$  e  $u_\ell(t) = 0$  per  $t \geq t_0$ , e uscita  $y_\ell(t) = C(t)x_\ell(t)$ .

L'**evoluzione forzata** è definita come  $x_f(t)$  per  $t \geq t_0$ , tale che  $x_f(t_0) = 0$  e  $u_f(t) = u(t)$  per  $t \geq t_0$ , e uscita  $y_f(t) = C(t)x_f(t) + D(t)u(t)$ .

**IMPORTANTE:** non vale per i sistemi non lineari.

## 2.14 Traiettorie di un sistema LTI

### 2.14.1 Traiettorie di un sistema LTI: esempio scalare

Definiamo un sistema lineare tempo invariante (LTI) scalare con  $x \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= ax(t) + bu(t) & x(0) &= x_0 \\ y(t) &= cx(t) + du(t) \end{aligned}$$

dall'analisi matematica possiamo scrivere il sistema come soluzione omogenea + soluzione particolare

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{at}x_0 + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau \\ y(t) &= ce^{at}x_0 + c \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau + du(t) \end{aligned}$$

ricordiamo che la funzione esponenziale si può scrivere come

$$e^{at} = 1 + at + \frac{(at)^2}{2!} + \frac{(at)^3}{3!} + \dots$$

### 2.14.2 Traiettorie di un sistema LTI: caso generale

Definiamo un sistema lineare tempo invariante (LTI)  $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^p$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) & x(0) &= x_0 \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underbrace{x(t)}_{\mathbb{R}^n} &= \underbrace{e^{At}}_{\mathbb{R}^{n \times n}} \underbrace{x_0}_{\mathbb{R}^n} + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ y(t) &= Ce^{at}x_0 + c \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t) \end{aligned}$$

Ricordiamo che l'esponenziale di matrice si può scrivere come

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots$$

$$x(t) = \underbrace{e^{At}x_0}_{\text{evoluzione libera}} + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau}_{\text{evoluzione forzata}}$$

$$x_\ell(t) = e^{At}x_0 \quad x_f(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (2.14.10)$$

### 2.14.3 Esempio sistema non forzato

$$\dot{x}_1(t) = \lambda_1 x_1(t) \quad \dot{x}_2(t) = \lambda_2 x_2(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$A := \Lambda$  matrice diagonale.

Il nostro è un sistema non forzato, quindi c'è solo l'evoluzione libera:

$$x(t) = e^{\Lambda t}x_0$$

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}^2 \frac{t^2}{2!} + \dots$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1^2 t^2}{2!} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2^2 t^2}{2!} \end{bmatrix} + \dots$$

$$e^{at} = 1 + at + \frac{(at)^2}{2!} + \frac{(at)^3}{3!} + \dots \Rightarrow = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$$

Quindi nel caso generale di  $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

### 2.14.4 Proprietà della matrice esponenziale

Esponenziale e cambio di base:

$$e^{TAT^{-1}} = Te^{At}T^{-1} \quad (2.14.11)$$

Data una matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , esiste  $J$  matrice diagonale a blocchi, chiamata *matrice di Jordan*, che è unica a meno di permutazioni dei blocchi, tale che

$$A = T^{-1}JT \quad (2.14.12)$$

con  $T$  matrice invertibile (matrice del cambio base). Questa formula viene chiamata *forma di Jordan*.

La matrice di Jordan è fatta in questo modo

$$\left( \begin{array}{ccccc} \boxed{\lambda_1 & 1 & & & \\ & \lambda_1 & 1 & & \\ & & \lambda_1 & & \\ & & & \boxed{\lambda_2 & 1} & \\ & & & & \lambda_2 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \boxed{\lambda_n & 1} \\ & & & & & & & \lambda_n \end{array} \right)$$

con  $\lambda_i$  autovalore di  $A$ .

Utilizzando questa forma riconduco il calcolo di  $e^{At}$  al calcolo di

$$e^{\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix}} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \dots \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

(IMPORTANTE:) tutti gli elementi di  $e^{At}$  sono del tipo

$$t^q e^{\lambda t}$$

con  $q$  intero e  $\lambda_i$  autovalori di A.

## 2.15 Rappresentazioni equivalenti

Effettuiamo un cambio di base mediante una matrice  $T$

$$\hat{x}(t) = Tx(t)$$

ed essendo  $T$  invertibile

$$x(t) = T^{-1}\hat{x}(t)$$

Sostituendo nell'equazione della dinamica si ottiene

$$\textcolor{violet}{T} \cdot \underbrace{T^{-1}\dot{\hat{x}}(t)}_{\dot{x}(t)} = \underbrace{AT^{-1}\hat{x}(t)}_{x(t)} + Bu(t) \cdot \textcolor{violet}{T}$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= TAT^{-1}\hat{x}(t) + TBu(t) \\ y(t) &= CT^{-1}\hat{x}(t) + Du(t) \end{aligned}$$

Allora chiamo  $\hat{A} = TAT^{-1}$ ,  $\hat{B} = TB$ ,  $\hat{C} = CT^{-1}$ ,  $\hat{D} = D$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t) \\ y(t) &= \hat{C}\hat{x}(t) + \hat{D}u(t) \end{aligned}$$

se  $T$  è una matrice tale che

$$J = TAT^{-1}$$

allora

$$\dot{\hat{x}} = J\hat{x}(t) + TBu(t)$$

L'evoluzione libera vale

$$\hat{x}_\ell(t) = e^{JT}\hat{x}_0$$

## 2.16 Modi di un sistema lineare tempo invariante

Prendiamo un sistema lineare tempo invariante con  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}^p$  e  $x(0) = x_0$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Indichiamo con  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  gli  $r \leq n$  autovalori (reali o complessi coniugati) distinti della matrice  $A$ , con molteplicità algebrica  $n_1, \dots, n_r \geq 0$  tali che  $\sum_{i=1}^r n_i = n$ .

Le componenti dell'evoluzione libera dello stato  $x_\ell(t)$  si possono scrivere come

$$x_{\ell,j} = \sum_{i=1}^r \sum_{q=1}^{h_i} \gamma_{j iq} t^{q-1} e^{\lambda_i t} \quad j = 1, \dots, n$$

per opportuni valori di  $h_i \leq n_i$ , dove i coefficienti  $\gamma_{j iq}$  dipendono dallo stato iniziale  $x(0)$ . I termini  $t^{q-1} e^{\lambda_i t}$  sono detti modi naturali del sistema. L'evoluzione libera dello stato è combinazione lineare dei modi.

### 2.16.1 Autovalori complessi

Se la matrice  $A$  è reale e  $\lambda_i = \sigma_i + j\omega_i$  è un autovalore complesso, allora il suo complesso coniugato  $\bar{\lambda}_i = \sigma_i - j\omega_i$  è anch'esso autovalore di  $A$ . Inoltre si dimostra che i coefficienti  $\gamma_{j iq}$  corrispondenti a  $\lambda_i$  e  $\bar{\lambda}_i$  sono anch'essi complessi coniugati. Scriviamo allora l'**esponenziale di autovalori complessi coniugati**; se  $\lambda_i = \sigma_i + j\omega_i$  e  $\bar{\lambda}_i = \sigma_i - j\omega_i$  allora

$$\begin{aligned} e^{\lambda_i t} &= e^{\sigma_i t + j\omega_i t} & e^{\bar{\lambda}_i t} &= e^{\sigma_i t - j\omega_i t} \\ &= e^{\sigma_i t} e^{j\omega_i t} & &= e^{\sigma_i t} e^{-j\omega_i t} \\ &= e^{\sigma_i t} (\cos(\omega_i t) + j \sin(\omega_i t)) & &= e^{\sigma_i t} (\cos(\omega_i t) - j \sin(\omega_i t)) \end{aligned}$$

Si verifica quindi, per calcolo diretto, che le soluzioni  $x_{\ell,j}(t)$  sono sempre reali e che i modi del sistema corrispondenti ad autovalori complessi coniugati  $\lambda_i$  e  $\bar{\lambda}_i$  sono del tipo

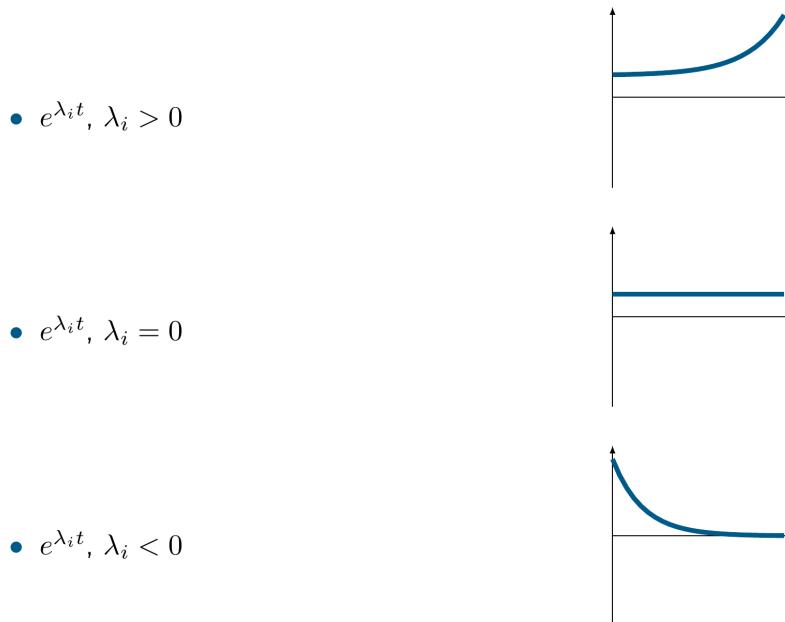
$$t^{q-1} e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_i)$$

con opportuni valori della fase  $\varphi_i$ .

Supponiamo che le molteplicità algebriche  $n_1, \dots, n_r$  degli autovalori di  $A$  coincidano con le molteplicità geometriche (ad esempio quando gli autovalori sono distinti). Allora i coefficienti  $h_i$  sono tutti pari a 1 e l'espressione dei modi si semplifica in

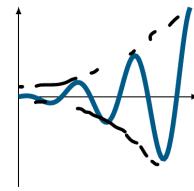
$$\begin{array}{ll} e^{\lambda_i t} & \text{per autovalori reali} \\ e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_i) & \text{per autovalori complessi coniugati} \end{array} \quad (2.16.13)$$

### 2.16.2 Modi naturali: autovalori reali semplici

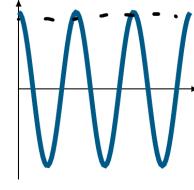


### 2.16.3 Modi naturali: autovalori complessi coniugati semplici

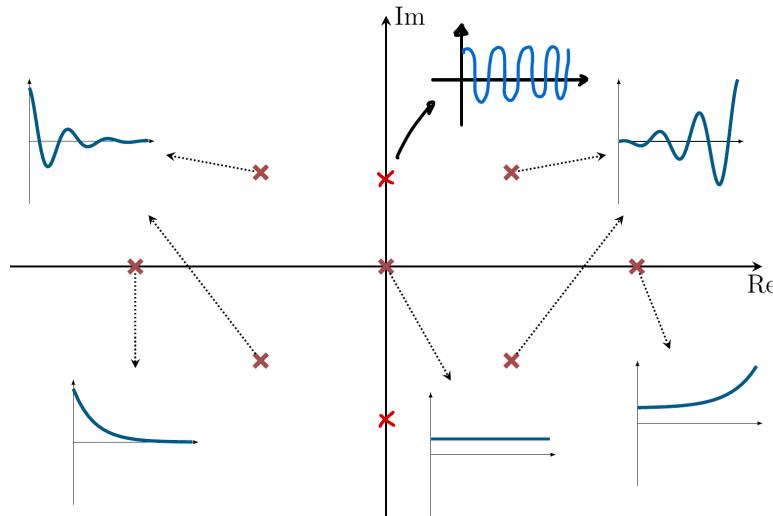
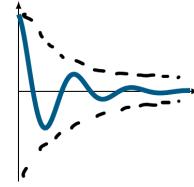
- $e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \phi_i)$ ,  $\sigma_i > 0$



- $e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \phi_i)$ ,  $\sigma_i = 0$



- $e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \phi_i)$ ,  $\sigma_i < 0$



#### 2.16.4 Esempio sui modi naturali

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(\lambda I - A) \\ &= \lambda^2 - a^2 \\ \Rightarrow & \begin{cases} \lambda_1 = a \\ \lambda_2 = -a \end{cases} \end{aligned}$$

I modi naturali di questo sistema sono

$$e^{at} \quad e^{-at}$$

Il modo  $e^{at}$  diverge a infinito, il che non è una cosa "buona" per dei sistemi di controllo, perché ad esempio se si sta realizzando un sistema di controllo della velocità vuol dire che la mia velocità sta aumentando, mentre dovrebbe rimanere fissa in un range. Non bisogna quindi focalizzarsi sul calcolare con precisione il valore dei modi naturali ma è importante conoscere come si comporta la loro parte reale.

#### 2.16.5 Esempio 1

Consideriamo il seguente sistema LTI con  $x \in \mathbb{R}^3$  e  $u \in \mathbb{R}^3$

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}}_A x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_B u(t)$$

Mediante un cambio di coordinate usando la matrice  $T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  e ponendo  $\hat{x}(t) = Tx(T)$ , il sistema si può riformulare come

$$\hat{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}}_{\hat{A}=TAT^{-1}} \hat{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\hat{B}=TB} u(t)$$

Gli autovalori di  $\hat{A}$  sono  $-1, -2$  con molteplicità algebrica 2, 1.

Per calcolare l'evoluzione libera consideriamo la formula vista in precedenza

$$\hat{x}_\ell = e^{\hat{A}t} \hat{x}_0$$

Calcoliamo quindi l'esponenziale di matrice  $e^{\hat{A}t}$  per  $\hat{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} e^{\hat{A}t} &= \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}^k \frac{t^k}{k!} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^k}{k!} & t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^k}{k!} & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^k}{k!} & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k t^k}{k!} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

quindi l'evoluzione libera dello stato è

$$\hat{x}_\ell = \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \hat{x}_0$$

- Se ad esempio la condizione iniziale è  $\hat{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , allora

$$\hat{x}_\ell = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Scriviamolo nello coordinate originali

$$x_{\ell(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{T^{-1}} \hat{x}_\ell(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ e^{-t} \end{bmatrix}$$

- Se prendiamo come condizione iniziale  $\hat{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ , allora

$$\hat{x}_\ell = \begin{bmatrix} te^{-t} \\ e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Scriviamolo nello coordinate originali

$$x_{\ell(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{T^{-1}} \hat{x}_\ell(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} + te^{-t} \\ e^{-t} \\ e^{-t} + te^{-t} \end{bmatrix}$$

- Se prendiamo come condizione iniziale  $\hat{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ . allora

$$\hat{x}_\ell = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Nelle coordinate originali:

$$x_{\ell(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{T^{-1}} \hat{x}_\ell(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix}$$

## 2.16.6 Esempio carrello

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{k(t)}{M}x_1(t) + \frac{1}{M}u(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 0u(t)$$

Consideriamo  $k$  costante, quindi sistema LTI. Gli autovalori della matrice  $A$  sono  $\lambda_1 = j\sqrt{\frac{k}{M}}$ ,  $\lambda_2 = -j\sqrt{\frac{k}{M}}$  immaginari puri.

Applichiamo un controllo  $u = -hx_2$ . Le equazioni di stato del sistema diventano:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{k}{M}x_1(t) - \frac{h}{M}x_2(t)$$

in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{h}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Quindi calcoliamo gli autovalori della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{h}{M} \end{bmatrix} \quad A - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{h}{M} - \lambda \end{bmatrix}$$

calcolando il determinante e ponendolo a zero si trova il polinomio caratteristico associato a essa

$$\lambda_1 = -\frac{h}{2M} + \sqrt{\frac{h^2}{4M^2} - \frac{k}{M}}$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda \frac{h}{M} + \frac{k}{M} \Rightarrow$$

$$\lambda_2 = -\frac{h}{2M} - \sqrt{\frac{h^2}{4M^2} - \frac{k}{M}}$$

le cui soluzioni sono gli autovalori della matrice A. Prendiamo ora in considerazione la quantità sotto radice; è evidente che se  $h^2 > 4Mk$  gli autovalori sono reali, mentre se  $h^2 < 4Mk$  sono complessi coniugati.

Se invece  $h^2 = 4Mk$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{h}{2M}$ , con molteplicità algebrica pari a 2. Si può dimostrare che la molteplicità geometrica è pari a 1, quindi il blocco di Jordan sarà  $2 \times 2$  (guardare [Section 2.14.4](#))

$$J = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{h}{2M} & 1 \\ 0 & -\frac{h}{2M} \end{bmatrix} \quad e^{Jt} = e^{-\frac{h}{2M}t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{x}_\ell = \begin{bmatrix} e^{-\frac{h}{2M}t}\hat{x}_1(0) + te^{-\frac{h}{2M}t}\hat{x}_2(0) \\ e^{-\frac{h}{2M}t}\hat{x}_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{1\ell}(t) \\ \hat{x}_{2\ell}(t) \end{bmatrix}$$

Quindi i modi naturali del sistema sono

$$e^{-\frac{h}{2M}t} \quad te^{-\frac{h}{2M}t}$$

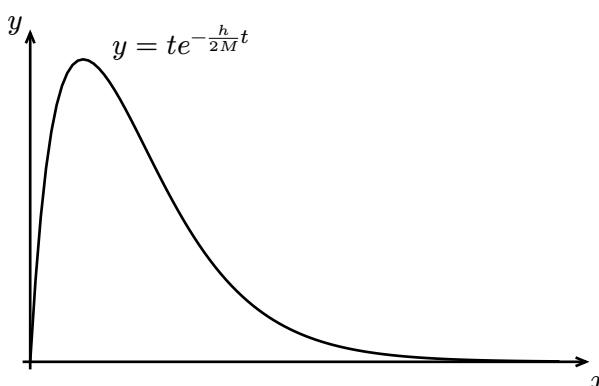
da notare che anche si effettua il cambio di coordinate i modi del sistema non cambiano.

- Supponiamo  $\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ , allora

$$\hat{x}_\ell(t) = \begin{bmatrix} e^{-\frac{h}{2M}t}\hat{x}_1(0) \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Supponiamo  $\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ , allora

$$\hat{x}_\ell(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-\frac{h}{2M}t}\hat{x}_2(0) \end{bmatrix}$$



Si nota dal grafico che se  $-\frac{h}{2M}$  è “grande” il modo va a zero, quindi sono in un punto di equilibrio.

- Se  $h = 4Mk = 0$  con  $M > 0, h = 0, k = 0$ , il sistema diventa

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

i cui modi naturali sono  $1, t$ . È evidente che queste equazioni differenziali si possono scrivere come combinazione lineare dei modi:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1(0) + x_2(0)t \\ x_2(t) &= x_2(0) \end{aligned}$$

## 2.17 Stabilità interna

### 2.17.1 Richiami sull'equilibrio di un sistema

Prendiamo un sistema lineare tempo invariante

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

Poniamo  $u(t) = u_e \forall t \geq 0$ , allora

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u_e) \quad x(0) = x_0$$

Esiste, per un sistema di questo tipo, una  $x_e$  tale che se  $x(0) = x_e \implies x(t) = x_e \forall t \geq 0$ , quindi tale che se lo stato iniziale è costante la  $x(t)$  rimane costante in ogni istante di tempo?

Chiamo  $x_e$  equilibrio,  $(x_e, u_e)$  la chiamo coppia stato-ingresso di equilibrio.

Proprietà fondamentale di una coppia di equilibrio è che

$$f(x_e, u_e) = 0$$

### 2.17.2 Definizione generale

Per sistemi tempo-invarianti (anche se si può generalizzare) la *stabilità interna* di un sistema è l’insieme delle conseguenze sulla traiettoria legate a incertezze sullo stato iniziale con ingressi fissi e noti.

### 2.17.3 Stabilità interna per sistemi non forzati

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad x_e \text{ equilibrio}$$

**Equilibrio stabile:** uno stato di equilibrio  $x_e$  si dice stabile se  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tale che  $\forall x_0 : \|x_0 - x_e\| \leq \delta$  allora risulti  $\|x(t) - x_e\| < \varepsilon \forall t \geq 0$ .

**Equilibrio instabile:** uno stato di equilibrio  $x_e$  si dice instabile se non è stabile.

**Equilibrio attrattivo:** uno stato di equilibrio  $x_e$  si dice attrattivo se  $\exists \delta$  tale che  $\forall x_0 : \|x_0 - x_e\| \leq \delta$  allora risulti  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_e\| = 0$ ; quindi se il sistema è in equilibrio solo a infinito.

**Equilibrio asintoticamente stabile:** uno stato di equilibrio  $x_e$  si dice asintoticamente stabile se è stabile e attrattivo.

**Equilibrio marginalmente stabile:** uno stato di equilibrio si dice marginalmente stabile se è stabile ma non asintoticamente.

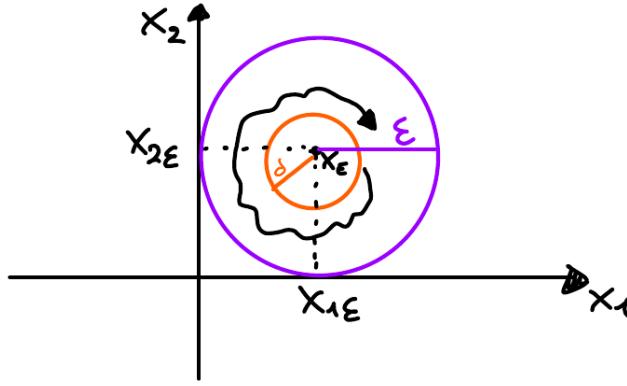


Figure 14: Rappresentazione grafica di un sistema in equilibrio stabile

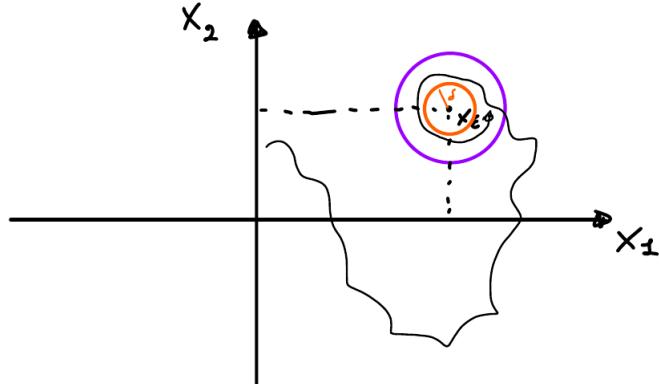


Figure 15: Rappresentazione grafica di un sistema in equilibrio attrattivo

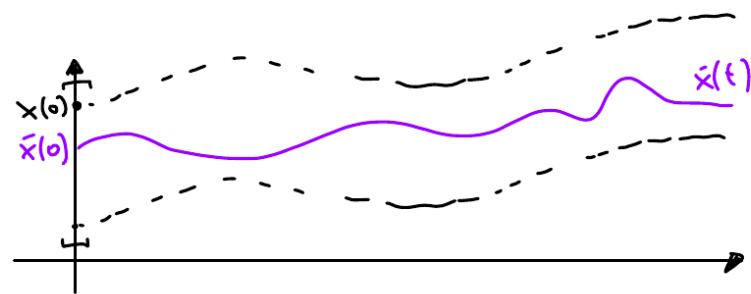
**N.B.**  $\delta < \epsilon$ .

#### 2.17.4 Osservazioni

Le definizioni date sottintendono la parola locale, ovvero che la proprietà vale in un intorno dello stato di equilibrio  $x_e$ .

**Stabilità globale:** le proprietà di stabilità e asintotica stabilità sono globali se valgono per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$ , invece che valere solo per  $x_0$ .

**Stabilità di una traiettoria:** le definizioni di stabilità si possono generalizzare a una traiettoria  $\bar{x}(t)$ ,  $t \geq 0$ .



#### 2.18 Stabilità interna di sistemi LTI

Nei sistemi lineari  $x = 0$  è sempre un equilibrio. Per sistemi lineari si può dimostrare che tutti gli equilibri e tutte le traiettorie hanno le stesse proprietà di stabilità, tutte uguali a  $x = 0$ . Per questo motivo si parla di **stabilità del sistema**.

#### Dimostrazione

Sappiamo che

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ Ax_e + Bu_e &= 0\end{aligned}$$

allora supponiamo che

$$u(t) = u_e \quad \forall t \geq 0$$

Sia  $\tilde{x}(t) := x(t) - x_e$ , allora

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}(t) &= \dot{x}(t) - \underbrace{\frac{d}{dt}x_e}_0 \\ &= Ax(t) + Bu_e \\ &= A(\tilde{x}(t) + x_e) + Bu_e \\ &= A\tilde{x}(t) + \underbrace{Ax_e + Bu_e}_0\end{aligned}$$

quindi

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t)$$

Concludiamo che

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t) = 0 \iff \tilde{x} = 0 \iff x = x_e$$

cioè per studiare l'equilibrio di un sistema nel generico punto  $x_e$  posso studiare l'equilibrio del sistema nell'origine.

### 2.18.1 Teorema

Un sistema LTI è **asintoticamente stabile** se e solo se tutti gli autovalori hanno parte reale strettamente negativa.

**N.B.** Se gli autovalori hanno parte reale strettamente negativa i modi del sistema tendono a 0 (vedi [modi naturali di autovalori semplici 2.16.2](#))

### 2.18.2 Teorema

Un sistema LTI è stabile se e solo se tutti gli autovalori hanno parte reale minore o uguale a zero e tutti gli autovalori a parte reale nulla hanno molteplicità geometrica uguale alla molteplicità algebrica (i mini blocchi di Jordan associati hanno dimensione uno).

### Osservazione

Si ha instabilità se almeno un autovalore ha parte reale positiva o se almeno un autovalore con parte reale nulla ha molteplicità algebrica maggiore della molteplicità geometrica.

### Osservazione

La stabilità asintotica di sistemi LTI è sempre globale

$$\begin{aligned}x(0) = x_0 &\implies x(t) & t \geq 0 \\ x(0) = \alpha x_0 &\implies \alpha x(t) & t \geq 0\end{aligned}$$

### Proprietà

Se un sistema LTI è globalmente asintoticamente stabile,  $x = 0$  è l'unico equilibrio.

**Nota:** anche per sistemi non lineari se  $x_e$  è GAS (Globalmente Asintoticamente Stabile) allora è l'unico equilibrio.

### 2.18.3 Esempio stabilità del sistema carrello

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{k(t)}{M}x_1(t) + \frac{1}{M}u(t)y(t) = x_1(t) \\ \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M}u(t) \end{bmatrix} \\ y(t) &= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 0u(t)\end{aligned}$$

Consideriamo  $k$  costante, quindi sistema LTI. Gli autovalori della matrice  $A$  sono

$\lambda_1 = j\sqrt{\frac{k}{M}}$ ,  $\lambda_2 = -j\sqrt{\frac{k}{M}}$  immaginari puri, quindi sistema semplicemente (marginalmente) stabile.

Se applichiamo  $u = -hx_2$  gli autovalori diventano  $\lambda_1 = -\frac{h}{2M} + \sqrt{\frac{h^2}{4M^2} - \frac{k}{M}}$  e  
 $\lambda_2 = \frac{h}{2M} - \sqrt{\frac{h^2}{4M^2} - \frac{k}{M}}$ .

- Se  $h^2 \geq 4Mk$  gli autovalori sono 2 reali negativi, quindi il sistema è asintoticamente stabile;
- Se  $h^2 < 4Mk$  gli autovalori sono 2 complessi coniugati con parte reale negativa, quindi il sistema è asintoticamente stabile;
- Se  $h^2 = 4Mk$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{h}{2M}$ , con molteplicità algebrica pari a 2. Si può dimostrare che la molteplicità geometrica è pari a 1, quindi il blocco di Jordan sarà  $2 \times 2$  (guardare le [proprietà della matrice esponenziale 2.14.4](#))

$$J = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{h}{2M} & 1 \\ 0 & -\frac{h}{2M} \end{bmatrix} \quad e^{Jt} = e^{-\frac{h}{2M}t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Gli autovalori sono a parte reale negativa, quindi il sistema è asintoticamente stabile;

- Se  $h = k = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ , quindi il sistema è instabile.

## 2.19 Retroazione dello stato

Prendiamo un sistema lineare tempo invariante

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

Supponendo di misurare l'intero stato, ovvero se  $x(t) = y(t)$ , allora possiamo progettare

$$u(t) = Kx(t) + v(t)$$

con  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  una matrice di guadagni e  $v(t)$  un ulteriore ingresso per il sistema retroazionato

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) + Bv(t)$$

Se vogliamo il sistema in anello chiuso asintoticamente stabile allora dobbiamo progettare  $K$  tale che  $(A + BK)$  abbia autovalori tutti a parte reale negativa.

**Nota:** la possibilità di scegliere gli autovalori di  $(A + BK)$  (e.g., per renderli tutti a parte reale negativa) dipende dalla coppia  $(A, B)$  ed è legata alla proprietà di **raggiungibilità**.

Se non è possibile misurare l'intero stato, ovvero se  $y(t) \neq x(t)$ , esistono tecniche per ricostruire lo stato a partire dalle misure mediante sistemi ausiliari chiamati **osservatori**.

Se sia possibile o meno ricostruire lo stato dipende dalla coppia  $(A, C)$  ed è legato alla proprietà di **osservabilità**.

### 2.19.1 Proprietà di raggiungibilità (facoltativo)

Uno stato  $\tilde{x}$  si un sistema LTI si dice *raggiungibile* se esistono un istante di tempo finito  $\tilde{t} > 0$  e un ingresso  $\tilde{u}$ , definito tra 0 e  $\tilde{t}$ , tali che, detto  $\tilde{x}_f(t)$ ,  $0 \leq t \leq \tilde{t}$ , il movimento forzato dello stato generato da  $\tilde{u}$ , risulti  $\tilde{x}_f(\tilde{t}) = \tilde{x}$ .

Un sistema i cui stati siano tutti raggiungibili si *completamente raggiungibile*.

Quindi, un particolare vettore  $\tilde{x}$  costituisce uno stato raggiungibile se è possibile, con un'opportuna scelta dell'ingresso, trasferire dall'origine al vettore in questione lo stato del sistema.

#### Teorema

Detta  $M_r$  matrice di raggiungibilità definita come

$$M_r = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] \in \mathbb{R}^{n \times mn}$$

un sistema LTI è completamente raggiungibile, ovvero la coppia  $(A, B)$  è completamente raggiungibile, se e solo se il rango della matrice di raggiungibilità è pari a  $n$ , cioè

$$\rho(M_r) = n$$

### 2.19.2 Proprietà di osservabilità (facoltativo)

Uno stato  $\tilde{x} \neq 0$  di un sistema LTI si dice *non osservabile* se, qualunque sia  $\tilde{t} > 0$  finito, detto  $\tilde{y}_\ell(t), t \geq 0$ , il movimento libero dell'uscita generato da  $\tilde{x}$  risulta  $\tilde{y}_\ell(t) = 0, 0 \leq t \leq \tilde{t}$ .

Un sistema privo di stati non osservabili si dice *completamente osservabile*.

Quindi, un particolare vettore  $\tilde{x}$  costituisce uno stato non osservabile se l'esame di un tratto di qualunque durata del movimento libero dell'uscita da esso generata non consente di distinguerlo dal vettore  $x = 0$ .

#### Teorema

Detta  $M_o$  matrice di osservabilità, definita come

$$M_o = [C^T \ A^T C^T \ A^{T^2} C^T \dots A^{T^{n-1}} C^T] \in \mathbb{R}^{n \times pn}$$

un sistema LTI è completamente osservabile, ovvero la coppia  $(A, C)$  è completamente osservabile, se e solo se il rango della matrice di osservabilità è pari a  $n$ , cioè

$$\rho(M_o) = n$$

### 2.20 Linearizzazione di sistemi in non lineari (tempo invarianti)

Prendiamo un sistema non lineare tempo invariante

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= h(x(t), u(t))\end{aligned}$$

Sia  $(x_e, u_e)$  una coppia di equilibrio,  $f(x_e, u_e) = 0$ , consideriamo una traiettoria a partire da uno stato stato iniziale  $x(0) = x_e + \tilde{x}_0$

$$\begin{aligned}x(t) &= x_e + \tilde{x}(t) \\ u(t) &= u_e + \tilde{u}(t)\end{aligned}$$

con  $y(t) = h(x_e, u_e) + \tilde{y}(t) = y_e + \tilde{y}(t)$ .

Essendo una traiettoria vale

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(x_e + \tilde{x}(t)) &= f(x_e + \tilde{x}(t), u_e + \tilde{u}(t)) \\ y_e + \tilde{y}(t) &= h(x_e + \tilde{x}(t), u_e + \tilde{u}(t))\end{aligned}$$

Sviluppando in serie di Taylor (con  $f$  e  $h$  sufficientemente regolari) in  $(x_e, u_e)$ <sup>1</sup>

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(x_e + \tilde{x}(t)) &= \underbrace{f(x_e, u_e)}_0 + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} f(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}}}_{A_e} \tilde{x}(t) + \underbrace{\frac{\partial}{\partial u} f(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}}}_{B_e} \tilde{u}(t) + \text{term. ord. sup.} \\ y_e + \tilde{y}(t) &= h(x_e, u_e) + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} h(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}}}_{C_e} \tilde{x}(t) + \underbrace{\frac{\partial}{\partial u} h(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}}}_{D_e} \tilde{u}(t) + \text{term. ord. sup.} \\ A &= \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} & B &= \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \\ C &= \frac{\partial g(x, u)}{\partial x} \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} & D &= \frac{\partial g(x, u)}{\partial u} \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}}\end{aligned}$$

quindi

$$\tilde{x}(t) = A_e \tilde{x}(t) + B_e \tilde{u}(t) + \text{term. ord. sup.} \quad \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0$$

---

<sup>1</sup>i termini del tipo  $\frac{\partial}{\partial x} f(x, u)$  vengono chiamati *Jacobiani*

$$\tilde{y}(t) = C_e \tilde{x}(t) + D_e \tilde{u}(t) + \text{term. ord. sup.}$$

Se consideriamo i termini di ordine superiore come un resto  $\mathcal{R}(x, u)$  si osserva che

$$\lim_{\|(\tilde{x}, \tilde{u})\| \rightarrow 0} \frac{\|\mathcal{R}(\tilde{x}, \tilde{u})\|}{\|(\tilde{x}, \tilde{u})\|} = 0$$

di fatto è come se si avesse  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x}$ . Quindi le due equazioni di prima si possono approssimare

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t) &\approx A_e \tilde{x}(t) + B_e \tilde{u}(t) \\ \tilde{y}(t) &\approx C_e \tilde{x}(t) + D_e \tilde{u}(t)\end{aligned}$$

Il sistema linearizzato è

$$\begin{aligned}\Delta \dot{x}(t) &= A_e \Delta x(t) + B_e \Delta u(t) \\ \Delta y(t) &= C_e \Delta x(t) + D_e \Delta u(t)\end{aligned}$$

**N.B.** il pedice ‘e’ è una puntualizzazione ulteriore per sottolineare il fatto che le matrici sono valutate all’equilibrio, in altri testi potrebbero non avere questo pedice.

Le traiettorie del sistema non lineare soddisfano

$$\begin{aligned}x(t) &= x_e + \tilde{x}(t) \approx x_e + \Delta x(t) \\ u(t) &= u_e + \tilde{u}(t) \approx u_e + \Delta u(t) \\ y(t) &= y_e + \Delta y(t) \approx y_e + \Delta y(t)\end{aligned}$$

per variazioni sufficientemente piccole.

**Nota:**  $(\Delta x(t), \Delta u(t))$ ,  $t \geq 0$  traiettoria del sistema linearizzato.

### 2.20.1 Esempio pendolo

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) &= f_1(x(t), u(t)) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{g}{l} \sin(x_1(t)) - \frac{b}{M\ell^2} x_2(t) + \frac{1}{M\ell^2} u(t) &= f_2(x(t), u(t))\end{aligned}$$

$(x_e, u_e)$  coppia di equilibrio

$$f(x_e, u_e) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_{2e} = 0 \\ -\frac{g}{\ell} \sin(x_{1e}) - \frac{b}{M\ell^2} x_{2e} + \frac{1}{M\ell^2} u_e = 0 \end{cases}$$

Prendiamo come equilibrio  $x_e = \begin{bmatrix} x_{1e} \\ 0 \end{bmatrix}$ , allora

$$\begin{aligned}-\frac{g}{\ell} \sin(x_{1e}) - \frac{b}{M\ell^2} \cdot 0 + \frac{1}{M\ell^2} u_e &= 0 \\ \Rightarrow u_e &= gM\ell \sin(x_{1e})\end{aligned}$$

Eseguiamo la linearizzazione intorno a  $(x_e, u_e)$

$$\Delta \dot{x}(t) = A_e \Delta x(t) + B_e \Delta u(t)$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}} \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial x_2} \end{bmatrix} \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell} \cos(x_1) & -\frac{b}{M\ell^2} \end{bmatrix} \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell} \cos(x_{1e}) & -\frac{b}{M\ell^2} \end{bmatrix} \\
\widetilde{\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}} \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial u} \end{bmatrix} \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M\ell^2} \end{bmatrix} \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}}
\end{aligned}$$

• se  $x_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  e  $u_e = 0$

$$A_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell} & -\frac{b}{M\ell^2} \end{bmatrix} \quad B_e = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M\ell^2} \end{bmatrix}$$

• se  $x_e = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}$  e  $u_e = 0$

$$A_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{\ell} & -\frac{b}{M\ell^2} \end{bmatrix} \quad B_e = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M\ell^2} \end{bmatrix}$$

• se  $x_e = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$  e  $u_e = MG\ell$

$$A_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{b}{M\ell^2} \end{bmatrix} \quad B_e = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M\ell^2} \end{bmatrix}$$

## 2.20.2 Stabilità di 3 sistemi lineari (linearizzazione intorno a 3 diversi equilibri)

1. Se  $x_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  e  $u_e = 0$

$$\begin{aligned}
A_e &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell} & -\frac{b}{M\ell^2} \end{bmatrix} & p(\lambda) &= \lambda \left( \lambda + \frac{b}{M\ell^2} \right) + \frac{g}{\ell} \\
&&&= \lambda^2 + \frac{b}{M\ell^2} \lambda + \frac{g}{\ell}
\end{aligned}$$

$$\lambda_{1/2} = -\frac{b}{2M\ell^2} \pm \sqrt{\left( \frac{b}{2M\ell^2} \right)^2 - \frac{g}{\ell}}$$

Abbiamo 2 autovalori a parte reale negativa, quindi il sistema linearizzato è *asintoticamente stabile globalmente*.

2. Se  $x_e = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}$  e  $u_e = 0$

$$\begin{aligned}
A_e &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{\ell} & -\frac{b}{M\ell^2} \end{bmatrix} & p(\lambda) &= \lambda \left( \lambda + \frac{b}{M\ell^2} \right) - \frac{g}{\ell} \\
&&&= \lambda^2 + \frac{b}{M\ell^2} \lambda - \frac{g}{\ell}
\end{aligned}$$

$$\lambda_{1/2} = -\frac{b}{2M\ell^2} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{b}{2M\ell^2}\right)}_{>0} + \frac{g}{\ell}} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\frac{b}{2M\ell^2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2M\ell^2}\right) + \frac{g}{\ell}} < 0 \\ \lambda_2 = -\frac{b}{2M\ell^2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2M\ell^2}\right) + \frac{g}{\ell}} > 0 \end{cases}$$

Dato che abbiamo un autovalore a parte reale positiva il sistema è *instabile*.

3. Se poniamo  $x_e = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$  e  $u_e = M g \ell$

$$A_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{b}{M\ell^2} \end{bmatrix} \quad p(\lambda) = \lambda \left( \lambda + \frac{b}{M\ell^2} \right)$$

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = -\frac{b}{M\ell^2}$$

Il sistema linearizzato è *stabile*, ma non asintoticamente, cioè marginalmente stabile (ricordando il [Teorema 2.18.1](#))

## 2.21 Stabilità e linearizzazione

### 2.21.1 Teorema

Dato un sistema non lineare tempo invariante,  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ , sia  $x_e, u_e$  una coppia di equilibrio. Se il sistema linearizzato intorno a  $(x_e, u_e)$  è asintoticamente stabile, allora l'equilibrio  $x_e$ , relativo all'ingresso  $u_e$ , è (localmente) asintoticamente stabile.

### 2.21.2 Teorema

Dato un sistema non lineare tempo invariante,  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ , sia  $x_e, u_e$  una coppia di equilibrio. Se il sistema linearizzato intorno a  $(x_e, u_e)$  ha almeno un autovalore a parte reale positiva, allora l'equilibrio  $x_e$ , relativo all'ingresso  $u_e$ , è instabile.

### 2.21.3 Controllo non lineare mediante linearizzazione

Consideriamo il sistema non lineare

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

Linearizzazione intorno all'equilibrio  $(x_e, u_e)$

$$\Delta \dot{x}(t) = A \Delta x(t) + B \Delta u(t)$$

Proviamo a portare  $\Delta x(t)$  a 0, ovvero  $x(t)$  a  $x_e$  “in modo approssimato”. Usando la retroazione dello stato  $\Delta u(t) = K \Delta x(t) + \Delta v(t)$  otteniamo il seguente sistema in anello chiuso

$$\Delta \dot{x}(t) = (A_e + B_e K) \Delta x(t) + B_e \Delta v(t)$$

Così sono in grado di progettare la matrice  $K$  in modo che  $A_e + B_e K$  sia asintoticamente stabile.

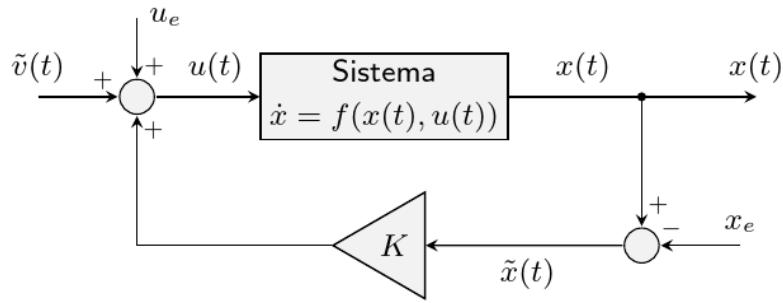
Grazie ai teoremi sulla linearizzazione,  $x_e$  risulta un equilibrio (localmente) asintoticamente stabile per il sistema non lineare in anello chiuso (detto *retroazionato*).

Visto che  $\Delta x(t) \approx x(t) - x_e$

$$u(t) = u_e + K(x(t) - x_e) + \tilde{v}(t) \approx u_e + K \Delta x(t) + \tilde{v}(t)$$

Perciò la legge di controllo finale sarà

$$u(t) = u_e + K(x(t) - x_e) + \tilde{v}(t)$$



## 3 Trasformata di Laplace

### 3.1 Definizione

Data una funzione complessa  $f$  di variabile reale  $t$ ,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  (anche se per noi tipicamente saranno funzioni  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ), sia  $s = \sigma + j\omega$  una variabile complessa ( $\sigma$  parte reale,  $\omega$  parte immaginaria); definiamo la *Trasformata di Laplace* di  $f(t)$

$$F(s) = \int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

se esiste per qualche  $s$ , ovvero se l'integrale converge. Includiamo nell'integrale  $0^-$  per tener conto di eventuali impulsi come la *delta di Dirac*.

**Notazione:** indichiamo la trasformata di Laplace con  $\mathcal{L}$  tale che

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$$

con  $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ; indichiamo l'applicazione della trasformata con  $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ .

### 3.2 Osservazioni

#### 3.2.1 Ascissa di convergenza

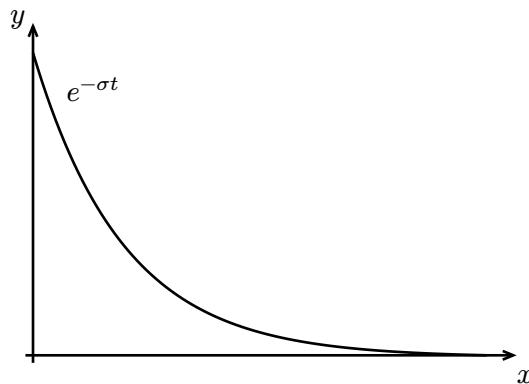
Sia  $\bar{\sigma} > -\infty$  estremo inferiore di  $s = \sigma + j\omega$  per cui l'integrale converge. Allora la trasformata di Laplace esiste nel semipiano  $\text{Re}(s) > \bar{\sigma}$ .

$\bar{\sigma}$  viene chiamata *ascissa di convergenza*. La trasformata di Laplace risulta essere una *funzione analitica* e, grazie alle particolari proprietà delle funzioni analitiche, la sua definizione può essere estesa anche in punti di  $s$  tali che  $\text{Re}(s) \leq \bar{\sigma}$ , indipendentemente dal fatto che l'integrale non converga.

Dato che

$$e^{-st} = e^{-\sigma t} e^{-j\omega t}$$

possiamo dire che  $e^{-\sigma t}$  ci aiuta a ottenere un integrale che converge.



#### 3.2.2 Trasformate razionali

Di particolare importanza sono le *trasformate razionali*, cioè quelle in cui

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \tag{3.2.14}$$

con  $N(s)$  e  $D(s)$  polinomi primi tra loro. Le radici di  $N(s) = 0$  si dicono **zeri** e quelle di  $D(s) = 0$  si dicono **poli**: nell'insieme, poli e zeri si dicono *singolarità*.

Se  $f$  è reale allora i coefficienti dei polinomi  $N(s)$  e  $D(s)$  sono reali.

### 3.2.3 Esempio

$$F(s) = \frac{s^2 + 2s}{(s+1)(s+3)} = \frac{s(s+2)}{(s+1)(s+3)}$$

allora

- zeri di  $F(s)$ : 0 e -2
- poli di  $F(s)$ : -1 e -3

## 3.3 Formula di antitrasformazione

La funzione trasformanda può essere ricavata dalla sua trasformata mediante la *formula di antitrasformazione*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds$$

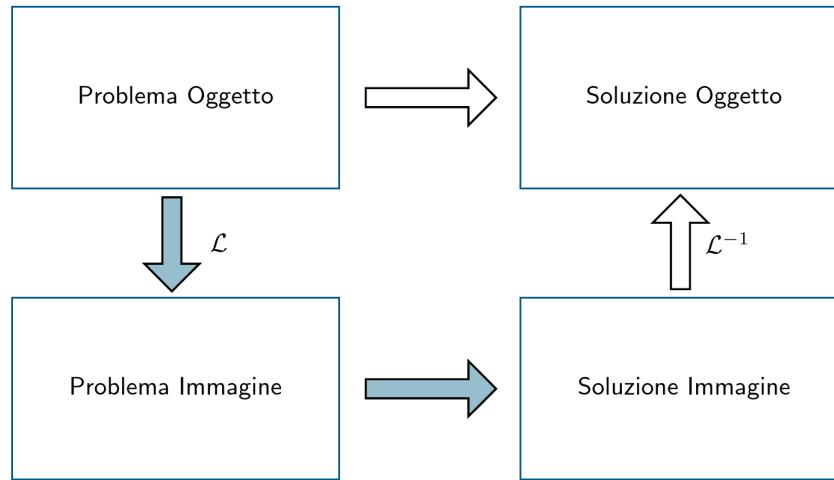
**Notazione:** indichiamo l'antitrasformata di Laplace con  $\mathcal{L}^{-1}$  tale che

$$F(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t) \quad \sigma > \bar{\sigma}$$

indichiamo la formula di antitrasformazione con  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ .

La  $f(t)$  è fornita per  $t \geq 0$ , perché solo nei punti di continuità in cui la  $f$  è maggiore di zero essa contribuisce a determinare  $F$ . L'antitrasformata fornisce  $f(t) = 0$  per  $t < 0$ , per questo la corrispondenza tra  $f(t)$  e  $F(s)$  è **biunivoca**.

### 3.3.1 Perché si utilizza la trasformata di Laplace



Se, provando a risolvere il problema oggetto, risulta difficile arrivare alla soluzione oggetto (magari perché i calcoli sono molto complessi o risulta poco conveniente in termini di risorse), allora si trasforma il problema oggetto in problema immagine con la trasformata di Laplace se risulta poi conveniente (o semplice) arrivare alla soluzione immagine, per poi antitrasformarla per ottenere la soluzione oggetto che si stava cercando.

## 3.4 Proprietà della trasformata di Laplace

### 3.4.1 Linearità

Dati  $f(t)$  e  $g(t)$  tali per cui esistono le trasformate  $F(s)$  e  $G(s)$ , allora  $\forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall \beta \in \mathbb{C}$  risulta

$$\mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha \mathcal{L}[f(t)] + \beta \mathcal{L}[g(t)] = \alpha F(s) + \beta G(s) \quad (3.4.15)$$

### Dimostrazione

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] &= \int_{0^-}^{+\infty} (\alpha f(t) + \beta g(t)) e^{-st} dt \\
&= \underbrace{\alpha \int_{0^-}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt}_{F(s)} + \underbrace{\beta \int_{0^-}^{+\infty} g(t) e^{-st} dt}_{G(s)} \\
&= \alpha F(s) + \beta G(s)
\end{aligned}$$

### 3.4.2 Traslazione temporale

$$\mathcal{L}[f(t - \tau)] = e^{-\tau s} F(s) \quad \forall \tau > 0 \quad (3.4.16)$$

$\tau$  deve essere maggiore di 0, altrimenti la  $f(t)$  sarebbe diversa da 0 per un tempo negativo.

#### Dimostrazione

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f(t - \tau)] &= \int_{0^-}^{+\infty} f(t - \tau) e^{-st} dt \\
&\stackrel{\rho = t - \tau}{=} \int_{-\tau^-}^{+\infty} f(\rho) e^{-s(\rho + \tau)} d\rho
\end{aligned}$$

siccome la  $f(t)$  è nulla per  $t < 0$  posso riscrivere gli estremi di integrazione

$$\begin{aligned}
\int_{0^-}^{+\infty} f(\rho) e^{-s(\rho + \tau)} d\rho &= \underbrace{\int_{0^-}^{+\infty} f(\rho) e^{\rho} d\rho}_{F(s)} \cdot e^{-s\tau} \\
&= F(s) e^{-s\tau}
\end{aligned}$$

come volevasi dimostrare

$$\mathcal{L}[f(t - \tau)] = e^{-\tau s} F(s)$$

### 3.4.3 Traslazione nel dominio della variabile complessa

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t} f(t)] = F(s - \alpha) \quad (3.4.17)$$

#### 3.4.4 Dimostrazione

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[e^{\alpha t} f(t)] &= \int_{0^-}^{+\infty} f(t) e^{\alpha t} \cdot e^{-st} dt \\
&= \int_{0^-}^{+\infty} f(t) e^{-(s - \alpha)t} dt \\
&= F(s - \alpha)
\end{aligned}$$

### 3.4.5 Derivazione nel dominio del tempo

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} f(t)\right] = sF(s) - f(0) \quad (3.4.18)$$

Calcoliamo la trasformata della derivata seconda

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[\frac{d^2}{dt^2} f(t)\right] &= \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} \underbrace{\left[\frac{d}{dt} f(t)\right]}_{g(t)}\right] \\
&= sG(s) - g(0) \\
&= sG(s) - f'(0) \\
&= s(sF(s) - f(0)) - f'(0) \\
&= s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)
\end{aligned}$$

Quindi possiamo definire la *derivata n-sima nel tempo*

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right] = s^n F(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} f(t) \Big|_{t=0} \quad (3.4.19)$$

La proprietà ci dice che, se la funzione e le sue derivate si annullano in  $t = 0$ , derivare nel dominio del tempo equivale a moltiplicare per  $s$  nel dominio della variabile complessa; infatti  $s$  viene chiamato *operatore di derivazione*.

### 3.4.6 Derivazione nel dominio della variabile complessa

Supponiamo  $F(s)$  derivabile per tutti gli  $s$ ; allora risulta

$$\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{dF(s)}{ds} \quad (3.4.20)$$

la quale è estendibile al caso della trasformata  $t^n \cdot f(t)$ .

#### Dimostrazione

Considerando che  $te^{-st} = -\frac{d}{ds}e^{-st}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[tf(t)] &= \int_{0^+}^{+\infty} tf(t)e^{-st} dt \\ &= \int_{0^+}^{+\infty} f(t) \underbrace{\frac{te^{-st}}{-\frac{d}{ds}e^{-st}}} dt \\ &= \int_{0^+}^{+\infty} f(t) \left( -\frac{d}{ds}e^{-st} \right) dt \\ &= -\frac{d}{ds} \underbrace{\int_{0^+}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt}_{F(s)} \\ &= -\frac{dF(s)}{ds} \end{aligned}$$

### 3.4.7 Integrazione nel tempo

Supponiamo che la funzione  $f(t)$  sia integrabile tra 0 e  $+\infty$ . Allora

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{s}F(s)$$

La proprietà ci dice che integrare nel dominio del tempo equivale a dividere per  $s$  nel dominio della variabile complessa; infatti  $\frac{1}{s}$  viene chiamato *operatore di integrazione*.

### 3.4.8 Convoluzione nel tempo

Date due funzioni  $f_1$  e  $f_2$ , il loro *prodotto di convoluzione* è

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\eta)f_2(\eta)d\eta = f_2(t-\eta) * f_1(t) \quad (3.4.21)$$

e si trova

$$\mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(s) \cdot F_2(s) \quad (3.4.22)$$

### 3.4.9 Teorema del valore iniziale

Se una funzione reale  $f(t)$  ha trasformata razionale  $F(s)$  con grado del denominatore maggiore del grado del numeratore, allora

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad (3.4.23)$$

Se  $f$  è una funzione discontinua di prima specie in  $t = 0$ ,  $f(0)$  si interpreta come  $f(0^+)$ . L'equazione vale se  $f(0)$  o  $f(0^+)$  esistono.

### 3.4.10 Teorema del valore finale

Se una funzione reale  $f(t)$  ha trasformata razionale  $F(s)$  con grado del denominatore maggiore del grado del numeratore e poli nulli o con parte reale negativa, allora

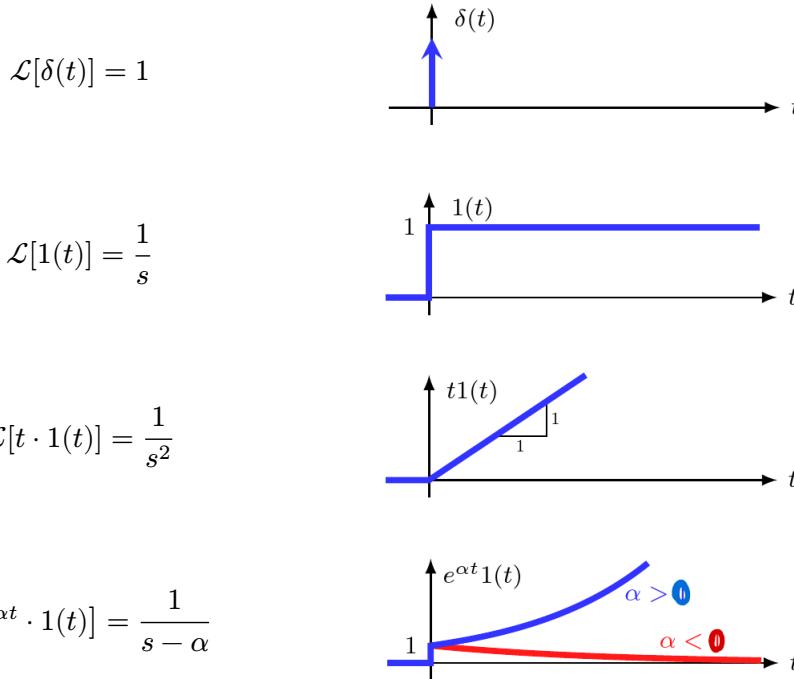
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (3.4.24)$$

L'equazione vale se  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$  esiste.

## 3.5 Trasformata di segnali elementari

Definiamo il *delta di Dirac*  $\delta(t)$  tale che

$$\int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = 1 \quad (3.5.25)$$



### 3.5.1 Trasformata della delta

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\delta(t)] &= \int_{0^-}^{+\infty} \delta(t) e^{-st} dt \\ &= \int_{0^-}^0 \delta(t) \underbrace{e^{-s \cdot 0}}_1 dt + \underbrace{\int_{0^+}^{+\infty} \delta(t) e^{-st} dt}_0 \end{aligned}$$

### 3.5.2 Trasformata del segnale gradino unitario

Il segnale gradino unitario  $1(t)$  è definito

$$1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_{0^-}^{+\infty} 1(t) e^{-st} dt &= \int_0^{+\infty} \underbrace{1(t)}_1 e^{-st} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-st} dt \\ &= \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_{t \rightarrow +\infty} - \left. \frac{e^{-0}}{-s} \right|_{t=0} \end{aligned}$$

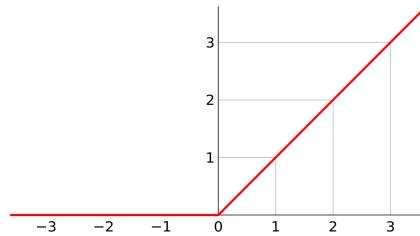
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-st} = 0, e^0 = 1$$

$$\underbrace{\left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_{t \rightarrow +\infty}}_0 - \left. \frac{e^{-0}}{-s} \right|_{t=0} = \frac{1}{s}$$

### 3.5.3 Trasformata del segnale rampa

Il segnale *rampa*  $r(t)$  è definito come

$$r(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t \geq 0 \end{cases}$$



Per calcolare la trasformata del segnale rampa utilizziamo la proprietà di [derivazione nel dominio della variabile complessa](#) (3.4.20)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t \cdot 1(t)] &= -\frac{d}{ds} \left( \frac{1}{s} \right) \\ &= \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

Mentre per calcolare la trasformata del gradino moltiplicato un esponenziale utilizziamo la proprietà di [traslazione nel dominio della variabile complessa](#) (3.4.17).

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{\alpha t} 1(t)] &= \underbrace{\underbrace{F(s)}_{f(t)}}_{F(s)=\frac{1}{s}} \\ &= \frac{1}{s - \alpha} \end{aligned}$$

## 3.6 Tabella delle trasformate

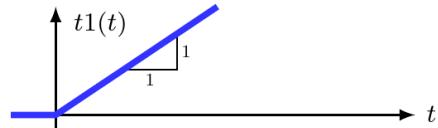
$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$



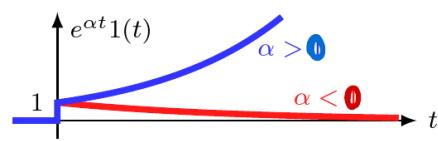
$$\mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s}$$



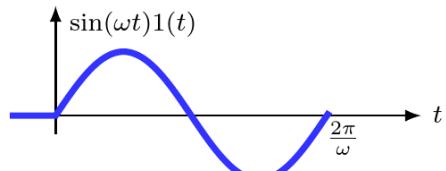
$$\mathcal{L}[t \cdot 1(t)] = \frac{1}{s^2}$$



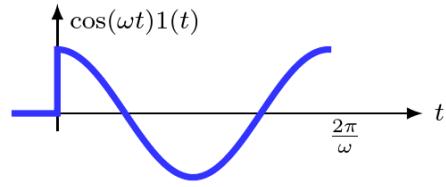
$$\mathcal{L}[e^{\alpha t} \cdot 1(t)] = \frac{1}{s - \alpha}$$



$$\mathcal{L}[\sin(\omega t)1(t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$



$$\mathcal{L}[\cos(\omega t)1(t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$



$$\mathcal{L}[\sin(\omega t + \varphi)1(t)] = \frac{\omega \cos \varphi \pm s \sin \varphi}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}[\cos(\omega t + \varphi)1(t)] = \frac{s \cos \varphi \mp \omega \sin \varphi}{s^2 + \omega^2}$$

## 4 Funzione di trasferimento

### 4.1 Introduzione

Consideriamo il sistema LTI con  $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^p$

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

con  $x(0) = x_0$ .

Siano  $X(s) := \mathcal{L}[x(t)], U(s) := \mathcal{L}[u(t)]$  e  $Y(s) := \mathcal{L}[y(t)]$ . Applichiamo la trasformazione di Laplace ad ambo i membri delle equazioni precedenti, ricordando che  $\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}x(t)\right] = sX(s) - x(0)$

$$\begin{aligned}sX(s) - x(0) &= AX(s) + BU(s) \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s)\end{aligned}$$

se raccolgo  $X(s)$  nella prima equazione

$$\begin{aligned}(sI - A)X(s) &= x_0 + BU(s) \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}X(s) &= \underbrace{(sI - A)^{-1}x_0}_{\text{evoluzione libera}} + \underbrace{(sI - A)^{-1}BU(s)}_{\text{evoluzione forzata}} \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s)\end{aligned}$$

Sottolineiamo che se avessimo un sistema generico non si potrebbe riscrivere come abbiamo fatto perché le matrici devono essere costanti.

Inoltre per poter scrivere un sistema LTI come sopra la matrice  $(sI - A)$  deve essere invertibile; una matrice è invertibile se il suo determinante è non nullo, quindi, se  $s$  è autovalore della matrice della dinamica e  $p(s)$  è il polinomio caratteristico associato:

$$p(s) = \det(sI - A)$$

Quindi le trasformate dello stato e dell'uscita del sistema in funzione di  $x_0$  e  $U(s)$  sono

$$\begin{aligned}X(s) &= \underbrace{(sI - A)^{-1}x_0}_{\text{evoluzione libera}} + \underbrace{(sI - A)^{-1}BU(s)}_{\text{evoluzione forzata}} \\ Y(s) &= \underbrace{C(sI - A)^{-1}x_0}_{\text{evoluzione libera}} + \underbrace{(C(sI - A)^{-1}B + D)U(s)}_{\text{evoluzione forzata}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_\ell(s) &= (sI - A)^{-1}x_0 & X_{f(s)} &= (sI - A)^{-1}BU(s) \\ Y_\ell(s) &= C(sI - A)^{-1}x_0 & Y_{f(s)} &= (C(sI - A)^{-1}B + D)U(s) \end{aligned}$$

Consideriamo ora la trasformata dell'evoluzione forzata dell'uscita

$$Y_f(s) = (C(sI - A)^{-1}B + D)U(s)$$

la matrice

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

è detta *funzione di trasferimento*; se il sistema è SISO (Single Input Single Output) è una funzione scalare.

Abbiamo così ottenuto una **rappresentazione ingresso-uscita**

$$Y_f(s) = G(s)U(s) \quad (4.1.26)$$

se assumiamo che  $x(0) = 0$  otteniamo esattamente la trasformata di Laplace dell'uscita  $y$

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad (4.1.27)$$

Due osservazioni:

- se si conosce la funzione di trasferimento  $G(s)$  di un sistema e la trasformata di Laplace  $U(s)$  dell'ingresso, è possibile calcolare, mediante antitrasformazione dell'equazione precedente (4.1.27), il movimento forzato  $y_f$  dell'uscita (che ovviamente coincide con il movimento  $y$  se lo stato iniziale è nullo);
- la funzione di trasferimento è data dal rapporto tra la trasformata dell'uscita e dell'ingresso nel caso di  $x(0) = 0$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

## 4.2 Richiami di calcolo matriciale

### 4.2.1 Matrice diagonale

Una *matrice diagonale* è una matrice quadrata tale che per  $i \neq j$  si ha sempre  $a_{ij} = 0$  (ogni matrice diagonale è simmetrica).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### 4.2.2 Matrice triangolare alta

Una *matrice triangolare alta* è una matrice quadrata tale che per  $i > j$   $a_{ij} = 0$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 7 \\ 0 & 6 & -8 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### 4.2.3 Matrice triangolare bassa

Una *matrice triangolare alta* è una matrice quadrata tale che per  $i < j$   $a_{ij} = 0$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -9 & 0 \\ 5 & 4 & -8 & 3 \end{pmatrix}$$

Nota: una matrice diagonale è triangolare alta e triangolare bassa.

#### 4.2.4 Matrice identità

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

#### 4.2.5 Trasposta di una matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$A = (a_{ij})$  significa che l'elemento di posto  $(i, j)$  in  $A$  è  $a_{i,j}$ .

$A^T := B = (b_{ij})$  con  $b_{ij} = a_{ji}$  per ogni coppia di indici  $(i, j)$ .

#### 4.2.6 Complemento algebrico

Definiamo  $\hat{A}_{ij}$  complemento algebrico dell'elemento  $a_{ij}$  il determinante della matrice ottenuta eliminando da  $A$  la riga  $i$  e la colonna  $j$  (che chiamiamo  $M$ ) e moltiplicando per  $(-1)^{i+j}$

$$\hat{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M)$$

#### 4.2.7 Determinante di una matrice

Il determinante di una matrice generica si calcola

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \hat{A}_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \hat{A}_{ij}$$

### 4.3 Funzione di trasferimento nel dettaglio

La funzione di trasferimento è definita

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

con  $C$  matrice  $1 \times n$  e  $B$  matrice  $m \times 1$ .

Definiamo ora la **matrice aggiunta**  $\text{adj}(A)$  come matrice dei complementi algebrici di  $A$

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} & \dots & \hat{A}_{n1} \\ \hat{A}_{12} & \hat{A}_{22} & \dots & \hat{A}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{A}_{n1} & \hat{A}_{n2} & \dots & \hat{A}_{nn} \end{bmatrix}$$

La matrice inversa può essere definita con la matrice aggiunta:

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)}$$

Quindi, se consideriamo la nostra matrice  $(sI - A)$

$$(sI - A)^{-1} = \underbrace{\frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)}}_{\substack{\text{polinomio} \\ \text{caratteristico di } A}}$$

quindi scriviamo la matrice aggiunta di  $(sI - A)$

$$\text{adj}(sI - A) = \begin{bmatrix} (\widehat{sI - A})_{11} & (\widehat{sI - A})_{12} & \dots & (\widehat{sI - A})_{n1} \\ (\widehat{sI - A})_{12} & (\widehat{sI - A})_{22} & \dots & (\widehat{sI - A})_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\widehat{sI - A})_{n1} & (\widehat{sI - A})_{n2} & \dots & (\widehat{sI - A})_{nn} \end{bmatrix}$$

matrice di polinomi in  $s$  al più di grado  $n - 1$ ; il determinante di  $sI - A$  è un polinomio in  $s$  di grado  $n$ . Per cui

$$(sI - A)^{-1} = \underbrace{\frac{1}{\det(sI - A)}}_{\text{scalare}} \cdot \text{adj}(sI - A)$$

Allora possiamo scrivere la funzione di trasferimento come

$$G(s) = \frac{\overbrace{N_{sp}(s)}^{\substack{\text{polinomio di} \\ \text{grado al più } n-1}}}{\underbrace{D_{sp}(s)}_{\substack{\text{polinomio} \\ \text{di grado } n}}} + \underbrace{\frac{D}{s}}_{\substack{\text{polinomio non} \\ \text{strettamente} \\ \text{proprio}}}$$

in forma estesa:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\beta_\nu s^\nu + \beta_{\nu-1} s^{\nu-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0}{s^{\nu^2} + \alpha_{\nu-1} s^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

Le radici di  $N(s)$  si dicono **zeri**, le radici di  $D(s)$  si dicono **poli**; i poli sono radici di  $\det(sI - A)$  quindi sono autovalori di  $A$ . Poli e zeri sono reali o complessi coniugati, poiché radici di polinomi a coefficienti reali.

#### 4.3.1 Esempio 1

Se prendiamo  $y(t) = \frac{d}{dt}u(t)$ , allora la sua trasformata sarà  $Y(s) = sU(s)$ , quindi la funzione di trasferimento del sistema è  $G(s) = s$ ; il sistema non è causale, perché il grado del numeratore ha grado maggiore di quello del denominatore.

Questa considerazione diventa evidente se si utilizza la definizione di derivata:

$$y(t) = \frac{d}{dt}(u(t)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(t+h) - u(t)}{h}$$

infatti per conoscere la derivata in  $t$  devo conoscere il valore del segnale in  $t + h$ .

#### 4.3.2 Esempio 2

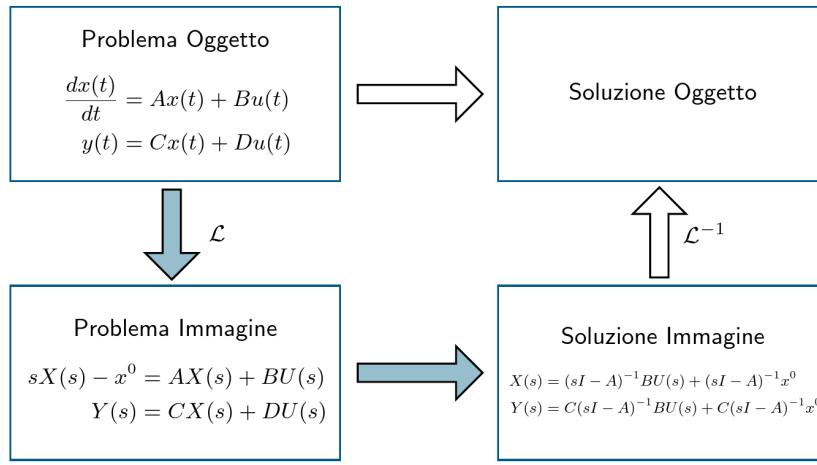
$$y(t) = \int_0^t u(\tau) dt \quad Y(s) = \frac{1}{s} U(s)$$

in questo caso  $G(s) = \frac{1}{s}$ , quindi il grado del denominatore è maggiore di quello del numeratore, per questo il sistema è causale.

### 4.4 Schema dell'utilizzo della trasformata di Laplace

---

<sup>2</sup>trasformata della delta di Dirac



## 4.5 Rappresentazioni e parametri della funzione di trasferimento

Può essere conveniente, in alcune situazioni, rappresentare la funzione di trasferimento in una delle seguenti forme fattorizzate

$$G(s) = \frac{\rho \prod_i (s + z_i) \prod_i (s^2 + 2\zeta_i \alpha_{ni} s + \alpha_{ni}^2)}{s^g \prod_i (s + p_i) \prod_i (s^2 + 2\xi_i \omega_{ni} s + \omega_{ni}^2)} \quad (4.5.28)$$

$$G(s) = \frac{\mu \prod_i (1 + \tau_i s) \prod_i \left(1 + \frac{2\zeta_i}{\alpha_{ni}} + \frac{s^2}{\alpha_{ni}^2}\right)}{s^g \prod_i (1 + T_i s) \prod_i \left(1 + \frac{2\xi_i}{\omega_{ni}} + \frac{s^2}{\omega_{ni}^2}\right)} \quad (4.5.29)$$

**N.B.** il pedice  $n$  sta per “naturale”. Con

- lo scalare  $\rho$  è detto costante di trasferimento,  $\mu$  il *guadagno*;
- l'intero  $g$  è detto *tipo*;
- gli scalari  $-z_i$  e  $-p_i$  sono gli zeri e i poli reali non nulli;
- gli scalari  $\alpha_{ni} > 0$  e  $\omega_{ni} > 0$  sono le *pulsazioni naturali* delle coppie di zeri e poli complessi coniugati;
- gli scalari  $\zeta_i$  e  $\xi_i$ , in modulo minori di 1, sono gli *smorzamenti* degli zeri e dei poli complessi coniugati;
- gli scalari  $\tau_i \neq 0$  e  $T_i \neq 0$  sono le costanti di tempo

La seconda equazione (4.5.29) è detta *forma di Bode*.

### 4.5.1 Esempio

$$G(s) = 10 \cdot \frac{\overbrace{s + 10}^{\prod_i (s + z_i)}}{s^2(s + 1)(s + 100)}$$

$$z_1 = 10$$

$$p_1 = 1 \quad p_2 = 100$$

$$\rho = 10 \quad g = 2$$

C'è un solo zero, che è  $-10$ , mentre i poli sono  $0, -1, -100$ .

Scriviamo la funzione di trasferimento nella seconda forma (di Bode):

$$G(s) = \frac{10}{s^2} \cdot \frac{10 \cdot \left(1 + \frac{s}{10}\right)}{100 \left(1 + s\right) \left(1 + \frac{s}{100}\right)} = 1 \cdot \frac{(1 + 0.1s)}{s^2(1 + s)(1 + 10^{-2}s)}$$

$$\mu = 1 \quad \tau_1 = 0.1$$

$$T_1 = 1 \quad T_2 = 10^{-2}$$

Prendiamo un polinomio di II grado del denominatore

$$s^2 + 2\xi_i \omega_{ni} s + \omega_{ni}^2$$

le radici del polinomio sono:

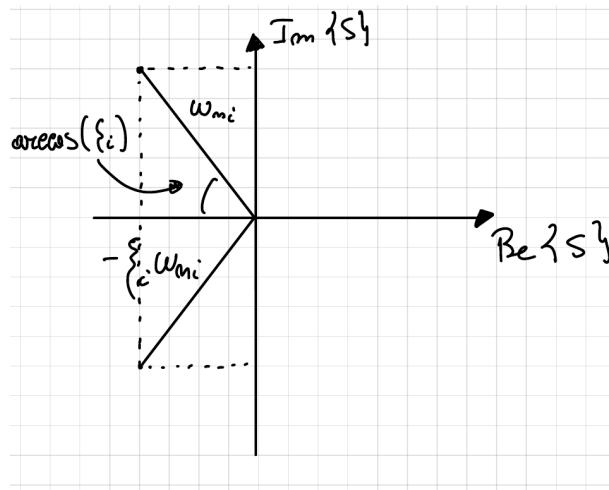
$$\begin{aligned}s_{1/2} &= -\xi_i \omega_{ni} \pm \sqrt{\xi_i^2 \omega_{ni}^2 - \omega_{ni}^2} \\ &= -\xi_i \omega_{ni} \pm \omega_{ni} \sqrt{\xi_i^2 - 1}\end{aligned}$$

Se  $|\xi_i| < 1$  abbiamo dei *poli complessi coniugati*

$$s_{1/2} = -\xi_i \omega_{ni} + j\omega_{ni} \sqrt{1 - \xi_i^2}$$

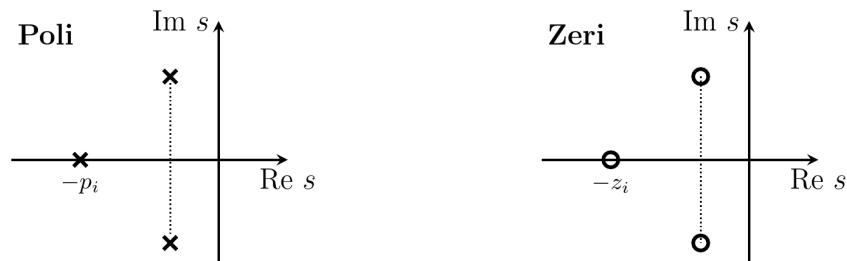
$$\begin{aligned}|s_1| &= |s_2| = \sqrt{\xi_i^2 \omega_{ni}^2 + \omega_{ni}^2 (1 - \xi_i^2)} \\ &= \sqrt{\xi_i^2 \omega_{ni}^2 + \omega_{ni}^2 - \omega_{ni}^2 \xi_i^2} = \omega_{ni}\end{aligned}$$

Rappresentiamo i poli nel piano complesso:



$\omega_{ni}$  quindi è il modulo delle radici,  $\xi_i$  ci dà invece informazioni sull'angolo delle radici nel piano complesso: se  $\xi_i > 0$  si hanno dei poli a parte reale negativa, se  $\xi_i < 0$  si hanno dei poli a parte reale positiva. Se  $\xi_i = 0$  gli autovalori sono immaginari puri, quindi i modi del sistema sono sinusoidi non smorzate, dato che lo smorzamento è nullo.

Nella rappresentazione classica si una una  $x$  per i poli e un  $\circ$  per gli zeri



## 4.6 Cancellazioni

### 4.6.1 Esempio 1

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = -2x_2 + u$$

$$y = x_2$$

$$\begin{aligned}
G(s) &= C(sI - A)^{-1}B \\
&= [0 \quad 1] \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} [0 \quad 1] \\
&= [0 \quad 1] \begin{bmatrix} \frac{s+2}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ 0 & \frac{s+2}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}^{-1} [0 \quad 1] \\
&= \frac{s+1}{(s+1)(s+2)} \\
&= \frac{1}{s+2}
\end{aligned}$$

Guardando questo esempio ci verrebbe da pensare che le cancellazioni sono innocue, questo perché stiamo cancellando il polinomio associato a un autovalore reale negativo, che quindi fa convergere il mio sistema. Cosa diversa è se cancelliamo un polinomio associato a un autovalore reale positivo.

#### 4.6.2 Esempio 2

Infatti se prendiamo un sistema di questo tipo

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_1 + x_2 \\
\dot{x}_2 &= x_2 + u \\
y &= x_2
\end{aligned}$$

la funzione di trasferimento di questo sistema è

$$G(s) = \frac{\cancel{(s+1)}}{\cancel{(s+1)}(s+2)} = \frac{1}{s+2}$$

In questo caso stiamo cancellando un polinomio associato a un autovalore reale positivo, che quindi fa divergere il sistema, perciò bisogna stare attenti quando si eseguono cancellazioni. Non basta guardare la funzione di trasferimento per conoscere l'andamento del sistema.

#### 4.7 Antitrasformazione di Laplace

Ricordiamo che la trasformata della risposta di un sistema Lineare Tempo Invariante (LTI) singolo ingresso singola uscita (SISO) è data da

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}x(0) + G(s)U(s)$$

con  $C(sI - A)^{-1} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ . Si può far vedere che gli elementi di  $C(sI - A)^{-1}$  sono rapporti di polinomi.

Nel corso della trattazione considereremo ingressi tali che  $U(s)$  sia un rapporto di polinomi.

Quindi possiamo scrivere

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

con  $N(s)$  e  $D(s)$  opportuni polinomi.

Ricordiamo che per  $x(0) = 0$  (risposta forzata)

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

Quindi, applicando in ingresso una delta di Dirac  $u(t) = \delta(t)$ , che ha trasformata  $U(s) = 1$ , si ha

$$Y(s) = G(s)$$

per questo per la risposta all'impulso le radici di  $D(s)$  sono i poli di  $G(s)$ .

## 5 Sviluppo di Heaviside o in fratti semplici (poli distinti)

### 5.1 Caso 1: poli reali o complessi coniugati distinti con molteplicità 1

Possiamo scrivere  $Y(s)$  come

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)} = \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{s + p_i}$$

con  $k_i$  detti residui. Consideriamo

$$(s + p_i) \frac{N(s)}{D(s)} \Big|_{s=-p_i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{k_j(s + p_i)}{s + p_j} \Big|_{s=-p_i} + k_i$$

quindi ciascun residuo  $k_i$  può essere calcolato come

$$k_i = (s + p_i) \frac{N(s)}{D(s)} \Big|_{s=-p_i}$$

**N.B.**  $k_i$  reali se associati a poli reali, complessi coniugati se associati a una coppia di poli complessi coniugati.

Quindi, antitrasformando  $Y(s)$  sviluppata in fratti semplici

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \sum_{i=1}^n k_i \mathcal{L}\left[\frac{1}{s + p_i}\right] = \sum_{i=1}^n k_i e^{-p_i t} 1(t)$$

#### 5.1.1 Esempio

Vogliamo scrivere la  $Y(s)$  in questo modo:

$$Y(s) = \frac{s^2 + s + 1}{(s + 2)(s + 10)(s + 1)} = \frac{k_1}{s + 2} + \frac{k_2}{s + 10} + \frac{k_3}{s + 1}$$

allora

$$(s + 2)Y(s) \Big|_{s=-2} = \left[ \underbrace{\frac{(s+2)k_1}{s+2}}_0 + \underbrace{\frac{(s+2)k_2}{s+10}}_0 + \underbrace{\frac{(s+2)k_3}{s+1}}_0 \right]_{s=-2} = k_1$$

lo riscrivo con  $Y(s)$  nella forma “originale”

$$\begin{aligned} (s + 2)Y(s) \Big|_{s=-2} &= \frac{(s+2)(s^2 + s + 1)}{(s+2)(s+10)(s+1)} \Big|_{s=-2} \\ &= \frac{(-2)^2 + (-2) + 1}{(-2+10)(-2+1)} = -\frac{3}{8} \end{aligned}$$

ergo

$$k_1 = -\frac{3}{8}$$

Calcoliamo anche le altre costanti

$$\begin{aligned} (s + 10)Y(s) \Big|_{s=-10} &= \frac{(s+10)(s^2 + s + 1)}{(s+2)(s+10)(s+1)} \Big|_{s=-10} \\ &= \frac{(-10)^2 + (-10) + 1}{(-10+2)(-10+1)} \\ &= \frac{91}{72} = k_2 \end{aligned}$$

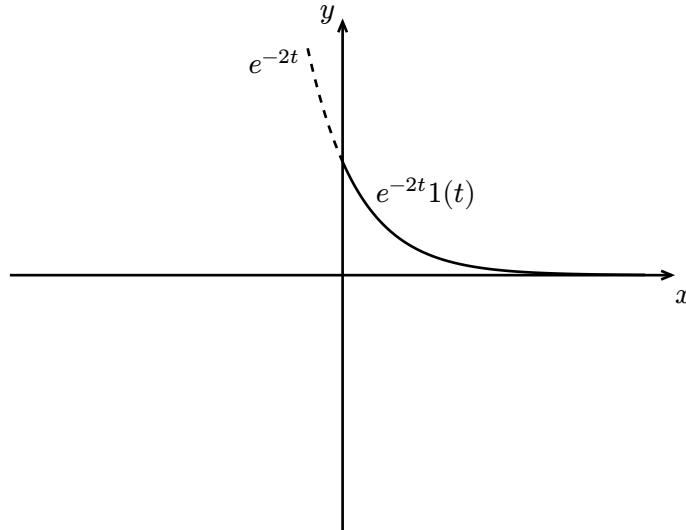
$$\begin{aligned}
(s+1)Y(s)|_{s=-1} &= \frac{(s+1)(s^2+s+1)}{(s+2)(s+10)(s+1)} \Big|_{s=-1} \\
&= \frac{(-1)^2 + (-1) + 1}{(-1+2)(-1+10)} \\
&= \frac{1}{9} = k_3
\end{aligned}$$

Quindi possiamo scrivere la  $Y(s)$  come

$$Y(s) = -\frac{3}{8} \underbrace{\frac{1}{s+2}}_{e^{-2t}1(t)} + \frac{91}{72} \underbrace{\frac{1}{s+10}}_{e^{-10t}1(t)} + \frac{1}{9} \underbrace{\frac{1}{s+1}}_{e^{-t}1(t)}$$

calcoliamo l'uscita del sistema con la formula di antitrasformazione

$$\begin{aligned}
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] \\
&= -\frac{3}{8} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] + \frac{91}{72} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+10}\right] + \frac{1}{9} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] \\
&= -\frac{3}{8} e^{-2t}1(t) + \frac{91}{72} e^{-10t}1(t) + \frac{1}{9} e^{-t}1(t)
\end{aligned}$$



**N.B.**  $1(t)$  definisce la funzione solo per  $t \geq 0$ .

### 5.1.2 Forma reale per poli complessi coniugati

Consideriamo la coppia di poli complessi coniugati

$$p_{i,1} = \sigma + j\omega \quad p_{i,2} = \sigma - j\omega$$

con residui associati (complessi coniugati)

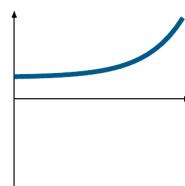
$$k_{i,1} = M e^{-j\varphi} \quad k_{i,2} = M e^{j\varphi}$$

L'antitrasformata dei due termini associati è data da (ricordando la 3.6)

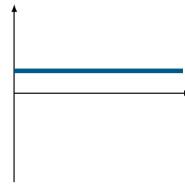
$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{k_{i,1}}{s+p_{i,1}} + \frac{k_{i,2}}{s+p_{i,2}} \right] &= M e^{-j\varphi} e^{-p_{i,1}t} 1(t) + M e^{j\varphi} e^{-p_{i,2}t} 1(t) \\
&= M e^{-j\varphi} e^{-(\sigma+j\omega)t} 1(t) + M e^{j\varphi} e^{-(\sigma-j\omega)t} 1(t) \\
&= 2M e^{-\sigma t} (e^{-j(\omega t+\varphi)} + e^{j(\omega t+\varphi)}) 1(t) \\
&= 2M e^{-\sigma t} \frac{(e^{-j(\omega t+\varphi)} + e^{j(\omega t+\varphi)})}{2} 1(t) \\
\frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2} &= \cos(\alpha) \implies 2M e^{-\sigma t} \cos(\omega t + \varphi) 1(t)
\end{aligned}$$

### 5.1.3 Modi naturali di poli reali distinti

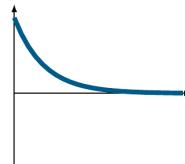
- $e^{-p_i t}$ ,  $-p_i > 0$



- $e^{-p_i t}$ ,  $-p_i = 0$

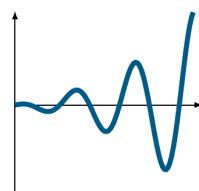


- $e^{-p_i t}$ ,  $-p_i < 0$

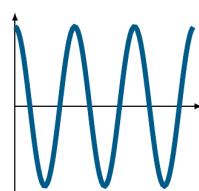


### 5.1.4 Modi naturali di poli complessi coniugati distinti

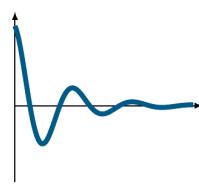
- $e^{-\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_i)$ ,  $-\sigma_i > 0$



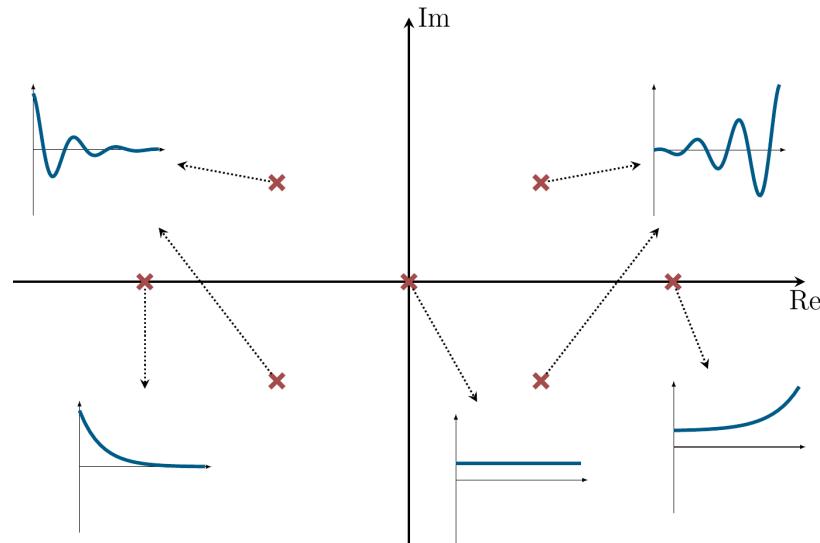
- $e^{-\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_i)$ ,  $-\sigma_i = 0$



- $e^{-\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_i)$ ,  $-\sigma_i < 0$



### 5.1.5 Modi naturali di un sistema LTI: poli distinti



## 5.2 Caso 2: Poli reali o complessi coniugati multipli con molteplicità maggiore di 1

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{\prod_{i=1}^q (s + p_i)^{n_i}} = \sum_{i=1}^q \sum_{h=1}^{n_i} \frac{k_{i,h}}{(s + p_i)^h}$$

con  $k_{i,h}, h = 1, \dots, n_i$  residui del poli  $-p_i$ . Consideriamo

$$\begin{aligned} (s + p_i)^{n_i} \frac{N(s)}{D(s)} &= (s + p_i)^{n_i} \sum_{j=1}^q \sum_{\substack{h=1 \\ j \neq i}}^{n_j} \frac{k_{j,h}}{(s + p_j)^h} + \sum_{h=1}^{n_i} (s + p_i)^{n_i-h} k_{i,h} \\ &= (s + p_i)^{n_i} \sum_{j=1}^q \sum_{\substack{h=1 \\ j \neq i}}^{n_j} \frac{k_{j,h}}{(s + p_j)^h} + \sum_{h=1}^{n_i-1} (s + p_i)^{n_i-h} k_{i,h} + k_{i,n_i} \end{aligned}$$

Quindi il residuo  $k_{i,n_i}$  è dato da

$$k_{i,n_i} = (s + p_i)^{n_i} \frac{N(s)}{D(s)} \Big|_{s=-p_i}$$

Derivando  $(s + p_i)^{n_i} \frac{N(s)}{D(s)}$  si calcolano gli altri residui come

$$k_{i,h} = \frac{1}{(n_i - h)!} \frac{d^{n_i-h}}{ds^{n_i-h}} \left[ (s + p_i)^{n_i} \frac{N(s)}{D(s)} \right] \Big|_{s=-p_i}$$

Antitrasformando  $Y(s)$  sviluppata in fratti semplici, ricordando la tabella delle trasformate 3.6 e la proprietà di derivazione nel dominio della variabile complessa (3.4.20)

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \sum_{i=1}^q \sum_{h=1}^{n_i} k_{i,h} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{(s + p_i)^h} \right] \\ &= \sum_{i=1}^q \sum_{h=1}^{n_i} k_{i,h} \frac{t^{h-1}}{(h-1)!} e^{-p_i t} 1(t) \end{aligned}$$

### 5.2.1 Esempio

Consideriamo la seguente trasformata di Laplace dell'uscita di un generico sistema

$$Y(s) = \frac{s+3}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{k_{1,1}}{(s+1)} + \frac{k_{1,2}}{(s+1)^2} + \frac{k_2}{(s+2)}$$

$$k_2 = (s+2)Y(s)|_{s=-2} \quad k_{1,2} = (s+1)^2 Y(s)|_{s=-1}$$

$$\begin{aligned} k_2 &= \cancel{(s+2)} \frac{(s+3)}{\cancel{(s+1)^2} \cancel{(s+2)}} \Big|_{s=-2} & k_{1,2} &= \cancel{(s+1)^2} \frac{(s+3)}{\cancel{(s+1)^2} (s+2)} \Big|_{s=-1} \\ &= \frac{(-2+3)}{(-2+1)^2} & &= \frac{(-1+3)}{(-1+2)} \\ &= 1 & &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} ((s+1)^2 Y(s)) \Big|_{s=-1} &= \frac{d}{ds} \left[ \frac{k_{1,1}(s+1)^2}{(s+1)} + \frac{k_{1,2}(s+1)^2}{(s+1)^2} + \frac{k_2(s+1)^2}{s+2} \right]_{s=-1} \\ &= \left[ k_{1,1} + 0 + k_2 \frac{\overbrace{(s+1)^2}^0 - 2\overbrace{(s+1)(s+2)}^0}{(s+2)} \right]_{s=-1} \\ &= k_{1,1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{1,1} &= \frac{d}{ds} \left. \frac{(s+1)^2}{(s+1)^2(s+2)} \right|_{s=-1} \\
&= \left. \frac{d}{ds} \frac{s+3}{s+2} \right|_{s=-1} \\
&= \left. \frac{(s+2) - (s+3)}{(s+2)^2} \right|_{s=-1} \\
&= 1
\end{aligned}$$

quindi possiamo scrivere la  $Y(s)$  come

$$Y(s) = \frac{k_{1,1}}{(s+1)} + \frac{k_{1,2}}{(s+1)^2} + \frac{k_2}{(s+2)} = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+2)}$$

ricordando che  $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] = t1(t)$  dalla tabella delle trasformate 3.6 e che  $\mathcal{L}[e^{\alpha t}f(t)] = F(s-\alpha)$  dalla proprietà di traslazione nel dominio della variabile complessa (3.4.17), antitrasformiamo tutte le componenti della funzione di trasferimento

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)}\right] = e^{-t}1(t) \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)}\right] = e^{-2t}1(t) \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2}\right] = e^{-t}t1(t)$$

$$\begin{aligned}
y(t) &= k_{1,1}e^{-t}1(t) + k_{1,2}te^{-t}1(t) + k_2e^{-2t}1(t) \\
&= e^{-t}1(t) + 2te^{-t}1(t) + e^{-2t}1(t)
\end{aligned}$$

### 5.2.2 Forma reale per poli complessi coniugati con molteplicità maggiore di 1

Si può dimostrare che per una coppia di poli complessi coniugati

$$\sigma_i + j\omega_i \quad \sigma_i - j\omega_i$$

con molteplicità  $n_i$ , il contributo elementare associato è dato da

$$\sum_{h=1}^{n_i} 2M_{i,h} \frac{t^{h-1}}{(h-1)!} e^{-\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \sigma_{i,h}) 1(t)$$

Ad esempio, consideriamo la seguente funzione di trasferimento

$$Y(s) = \frac{N(s)}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$$

i poli della funzione sono

$$\underbrace{-\xi\omega_n}_{\sigma} + \underbrace{j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}_{\omega} \quad -\xi\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

quindi

$$Y(s) = \frac{N(s)}{(s + \sigma + j\omega)(s + \sigma - j\omega)}$$

e il contributo elementare

$$\begin{aligned}
&2M_{1,1}e^{-\sigma t} \cos(\omega t + \varphi) 1(t) + 2M_{1,2}te^{-\sigma t} \cos(\omega t + \varphi) 1(t) \\
&= 2M_{1,1}e^{-\xi\omega_n t} \cos(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t + \varphi) 1(t) + 2M_{1,2}e^{-\xi\omega_n t} \cos(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t + \varphi) 1(t)
\end{aligned}$$

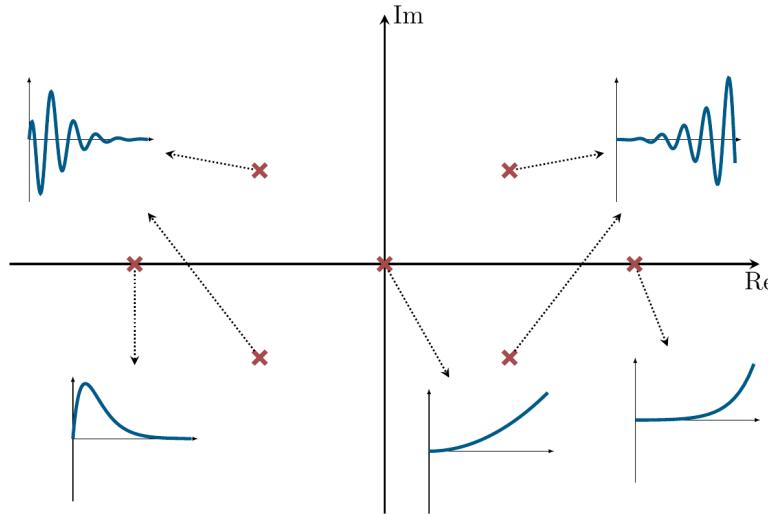
### 5.2.3 Modi naturali di poli multipli

Un modo naturale di un polo reale multiplo  $-p_i$  è definito come

$$\frac{t^{h-1}}{(h-1)!} e^{-p_i t} 1(t)$$

I modi naturali di una coppia di poli complessi coniugati multipli  $-(\sigma_i + j\omega_i)$  e  $-(\sigma_i - j\omega_i)$  sono definiti come

$$\frac{t^{h-1}}{(h-1)!} e^{-\sigma_i t} \cos(\omega_i + \varphi_{i,h}) 1(t)$$



#### 5.2.4 Modi naturali come risposta all'impulso

Sappiamo che per  $x(0) = 0$  (risposta forzata)

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

se applichiamo in ingresso una delta di Dirac  $u(t) = \delta(t)$

$$Y(s) = G(s)$$

Quindi la risposta ad un impulso è una combinazione lineare dei modi naturali del sistema lineare tempo invariante (SISO) descritto da  $G(s)$ .

### 5.3 Risposta a un ingresso generico

Ricordiamo che

$$Y(s) = \underbrace{\frac{C(sI - A)^{-1}}{N_\ell(s)}}_{D(s)} - x(0) + \underbrace{\frac{G(s)U(s)}{\frac{N_f(s)}{D_f(s)} \frac{N_u(s)}{D_u(s)}}}_{}$$

in cui  $C(sI - A)^{-1}x(0)$ ,  $G(s)$  e  $U(s)$  sono rapporti di polinomi. Quindi

$$\begin{aligned} y(t) &= y_{\ell(t)} + y_{f(t)} \\ &= y_{\ell(t)} + y_{f,G}(t) + y_{f,U}(t) \end{aligned}$$

in cui

- $y_{\ell}(t)$  e  $y_{f,G}(t)$  sono combinazioni lineari di modi naturali del sistema con matrici  $A, B, C$  e  $D$ ;
- $y_{f,U}(t)$  è combinazione lineare di “modi” presenti nell’ingresso  $u(t)$  (dovuti alle radici del denominatore di  $U(s)$ ).

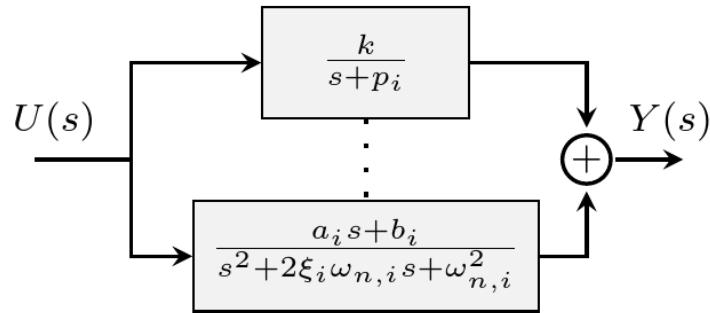
### 5.4 Risposta di sistemi elementari

Ricordiamo la formula di parametrizzazione (4.5.28)

$$G(s) = \frac{\rho \prod_i (s + z_i) \prod_i (s^2 + 2\zeta_i \alpha_{ni}s + \alpha_{ni}^2)}{s^g \prod_i (s + p_i) \prod_i (s^2 + 2\xi_i \omega_{ni}s + \omega_{ni}^2)}$$

Consideriamo il caso di poli distinti. Da quanto visto fino ad ora risulta che per  $x(0) = 0$  (risposta forzata)

$$Y(s) = G(s)U(s) = \sum_i \frac{k_i}{s + p_i} + \sum_i \frac{a_i s + b_i}{s^2 + 2\xi_i \omega_{n,i} s + \omega_{n,i}^2}$$



## 5.5 Stabilità esterna (BIBO)

Un sistema si dice BIBO (Bounded-Input Bounded-Output) stabile se la sua uscita forzata è limitata per ogni ingresso limitato.

Da quanto visto fino ad ora con lo sviluppo di Heaviside (fratti semplici) si può dedurre che un sistema con funzione di trasferimento  $G(s)$  è BIBO stabile se e solo se tutti i poli di  $G(s)$  sono a parte reale strettamente minore di zero.

**N.B.** La BIBO stabilità è equivalente alla stabilità asintotica.

## 6 Analisi di sistemi attraverso funzione di trasferimento

### 6.1 Dalla Funzione di Trasferimento allo spazio degli stati

Consideriamo la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{\mu}{1 + Ts}$$

Questo tipo di sistemi può essere rappresentato nello spazio degli stati (la rappresentazione non è unica) come

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{1}{T}x + \frac{\mu}{T}\mu \\ y &= x \end{aligned} \tag{6.1.30}$$

Infatti, la funzione di trasferimento associata alla (6.1.30) è

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{\mu}{1 + Ts}$$

dove

- il parametro  $T$  è la costante di tempo associata al polo;
- il parametro  $\mu$  è il *guadagno*

### 6.2 Sistemi del primo ordine

Definiamo un sistema nello spazio della funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{\mu}{1 + Ts} \quad U(s) = \frac{k}{s}$$

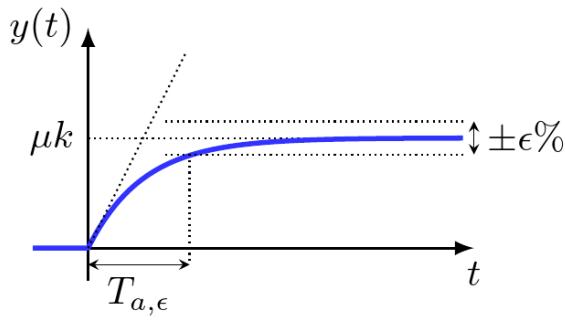
$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{\mu k}{s(1 + Ts)}$$

con  $\mu > 0, k > 0, T > 0$ ; da notare che se  $T < 0$  il sistema è instabile perché si avrebbe un polo positivo.

Allora mediante lo sviluppo di Heaviside e la formula di antitrasformazione troviamo che

$$y(t) = \mu k(1 - e^{-t/T})1(t)$$

$$y(0) = 0, \dot{y}(0) = \frac{\mu k}{T}, y_\infty = \mu k$$



Definiamo il **tempo di assestamento**  $T_{a,\epsilon}$  come il tempo tale per cui

$$(1 - 0.01\epsilon)y_\infty \leq y(t) \leq (1 + 0.01\epsilon)y_\infty \quad \forall t \geq T_{a,\epsilon}$$

### 6.2.1 Esempio

Consideriamo un sistema con

$$G(s) = \frac{\mu}{1 + Ts} = \frac{\mu}{T} \frac{1}{s + \frac{1}{T}}$$

con ingresso  $u(t) = k1(t)$ , quindi  $U(s) = \frac{k}{s}$

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s)U(s) \\ &= \frac{\mu}{T} \frac{1}{s + \frac{1}{T}} \frac{k}{s} \\ &= \frac{k_1}{s + \frac{1}{T}} + \frac{k_2}{s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \underbrace{\frac{k_1}{s + \frac{1}{T}}}_{y_{G,t}} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[ \underbrace{\frac{k_2}{s}}_{y_{U,t}} \right] \\ &= \underbrace{k_1 e^{-t/T} 1(t)}_{\text{sistema}} + \underbrace{k_2 1(t)}_{\text{ingresso}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_1 &= \left( s + \frac{1}{T} \right) Y(s) \Big|_{s=-\frac{1}{T}} & k_2 &= sY(s)|_{s=0} \\ &= \cancel{\left( s + \frac{1}{T} \right)} \frac{\mu}{T} \frac{k}{\cancel{(s + \frac{1}{T})} s} \Big|_{s=-\frac{1}{T}} & &= \frac{\mu}{T} \frac{k}{s + \frac{1}{T}} \Big|_{s=0} \\ &= \frac{\mu}{T} \frac{k}{-\frac{1}{T}} & &= \mu k \\ &= -\mu k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= -\mu k e^{-\frac{t}{T}} 1(t) + \mu k 1(t) \\ &= \mu k \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) 1(t) \end{aligned}$$

La risposta ottenuta ci dice che, dando in ingresso il gradino, il sistema ci metterà un po' per raggiungerlo, in base alla sua dinamica.

Per quanto riguarda invece il tempo di assestamento, esso si calcola

$$T_{a,\epsilon} = T \ln \left( \frac{1}{0.01\epsilon} \right)$$

$$T_{a,5} \approx 3T \quad T_{a,1} \approx 4.6T \quad (6.2.31)$$

## 6.2.2 Considerazioni

- Per calcolare la risposta riscrivere  $G(s) = \frac{\mu}{T} \frac{1}{s + \frac{1}{T}}$  e sviluppare  $Y(s) = G(s)U(s)$  in fratti semplici;
- la risposta è monotona, i modi presenti sono  $1(t)$  dell' ingresso e  $e^{-\frac{t}{T}}$  del sistema;
- il valore asintotico è  $\mu k$ , quindi se l'ingresso fosse un riferimento  $k$  da seguire, avremmo un errore a regime  $e_\infty = |1 - \mu|k$ .

## 6.3 Sistemi del secondo ordine

La funzione di trasferimento di sistemi del secondo ordine è

$$G(s) = \mu \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Questo tipo di sistemi può essere rappresentato nello spazio degli stati come

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\omega_n^2 - 2\xi\omega_n x_2 + \mu\omega_n^2 u \\ y &= x_1\end{aligned}$$

dove

- il parametro  $\xi$  è il coefficiente di smorzamento;
- il paramento  $\omega_n$  è la pulsazione naturale;
- il parametro  $\mu$  è il guadagno.

### 6.3.1 Sistemi del secondo ordine con poli complessi coniugati

$$G(s) = \mu \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad U(s) = \frac{k}{s}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \mu k \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$$

con  $|\xi| < 1$  e  $\omega_n > 0$

$$y(t) = \mu k (1 - A e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n t + \varphi)) 1(t)$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} \quad \omega = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad \varphi = \arccos(\xi)$$

$$y(0) = \dot{y}(0) = 0 \quad \ddot{y}(0) = \mu\omega_n^2 \quad y_\infty = \mu k$$

$$T_{a,5} \approx \frac{3}{\xi\omega_n} \quad T_{a,1} \approx \frac{4.6}{\xi\omega_n}$$

Introduciamo un altro parametro che è la **sovraelongazione percentuale**, definita come

$$S\% = 100 \frac{y_{\max} - y_\infty}{y_\infty}$$

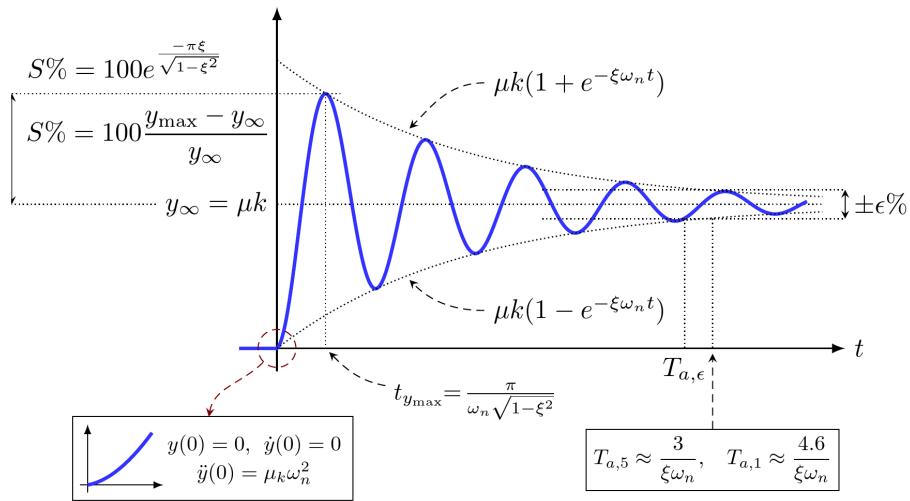
con  $y_{T(\max)}$  valore massimo e  $y_\infty$  valore asintotico della risposta.

Per i sistemi del secondo ordine la sovraelongazione percentuale vale

$$S\% = 100 e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}}$$

Analizziamo ora la risposta

$$y(t) = \mu k (1 - A e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n t + \varphi)) 1(t)$$



Dal grafico possiamo evincere che la sovraelongazione percentuale indica di quanto supero il valore stabile prima del transitorio.

Come abbiamo visto prima, la sovraelongazione percentuale dipende solo dallo smorzamento, e, se scegliamo un valore massimo di sovraelongazione  $S^*$ , possiamo ricavare il valore di  $\xi$  necessario:

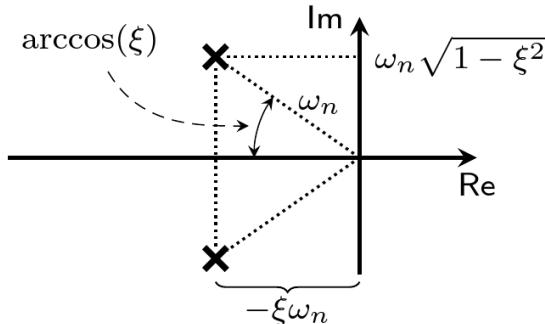
$$S \% \leq S^* \Leftrightarrow \xi \geq \frac{\left| \ln \left( \frac{S^*}{100} \right) \right|}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2 \left( \frac{S^*}{100} \right)}}$$

### 6.3.2 Luogo di punti a tempo di assestamento costante

Adesso proviamo a caratterizzare i sistemi del secondo ordine (con poli complessi coniugati) la cui risposta al gradino ha lo stesso tempo di assestamento.

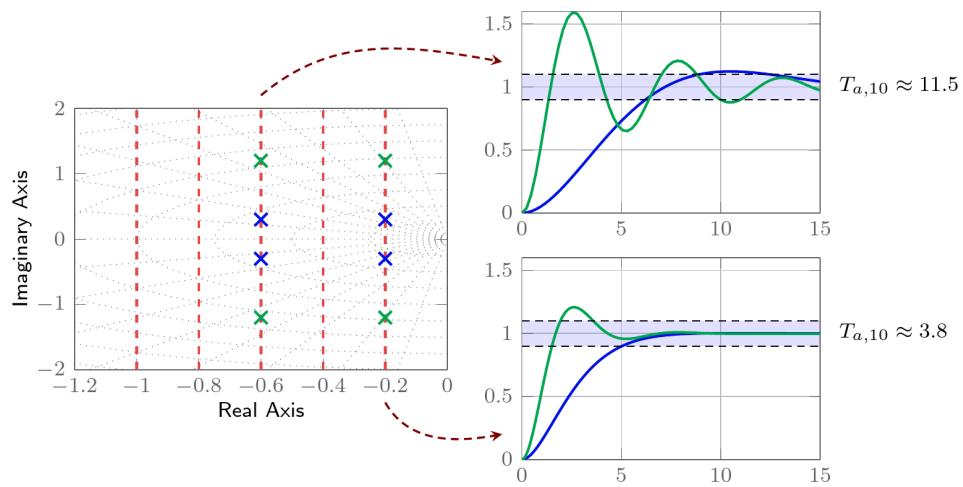
Ricordiamo che

- abbiamo approssimato  $T_{a,5} \approx \frac{3}{\xi\omega_n}$  e  $T_{a,1} \approx \frac{4.6}{\xi\omega_n}$
- $-\xi\omega_n$  è la parte reale dei poli complessi coniugati



Quindi sistemi con poli complessi coniugati che hanno la stessa parte reale avranno una risposta al gradino con stesso tempo di assestamento.

Sul piano complesso i luoghi di punti a tempo di assestamento costante sono rette parallele all'asse immaginario.



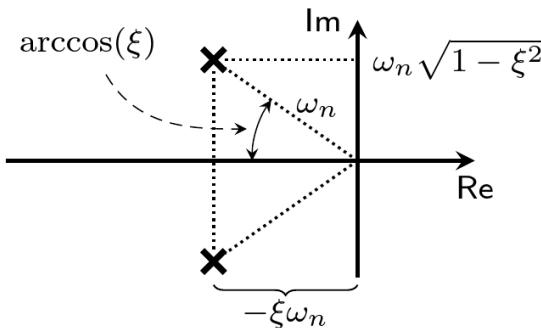
Nella figura vediamo in verde e in blu due coppie di poli distinti, ma con parte reale uguale; le risposte associate a questi poli sono evidentemente diverse (grafico in blu e grafico in verde), ma hanno lo stesso tempo di assestamento.

### 6.3.3 Luogo di punti a sovraelongazione costante

Proviamo a caratterizzare i sistemi del secondo ordine (con poli complessi coniugati) la cui risposta al gradino ha la stessa sovraelongazione.

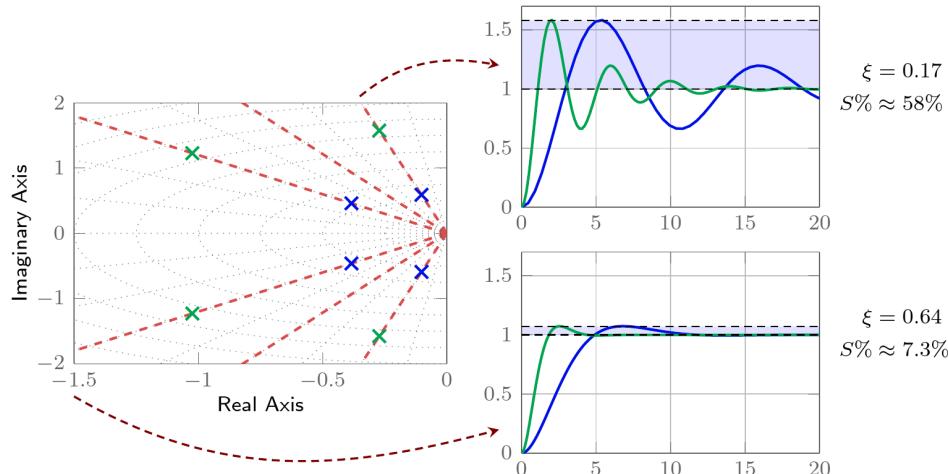
Ricordiamo che

- $S\% = 100e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$
- $\arccos(\xi)$  è l'angolo formato con l'asse reale



Quindi sistemi con stesso coefficiente di smorzamento  $\xi$  avranno una risposta al gradino con stessa sovraelongazione.

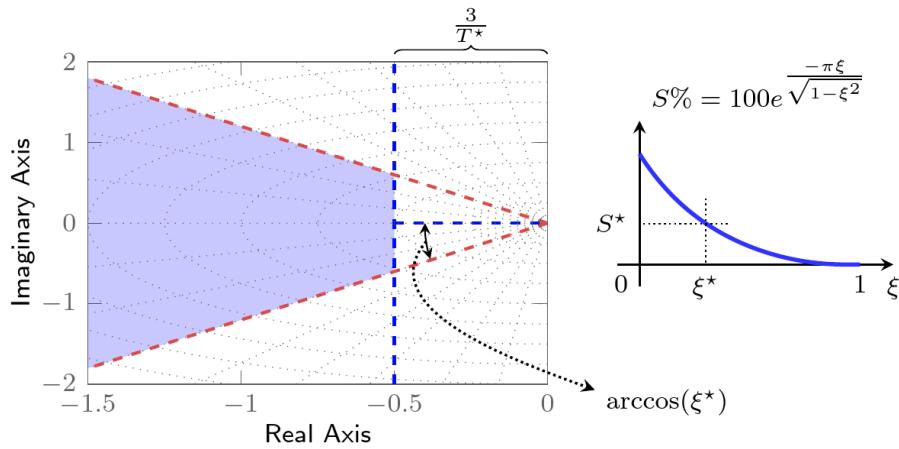
Sul piano complesso i luoghi di punti a sovraelongazione costante sono semirette uscenti dall'origine.



### 6.3.4 Mappatura di specifiche temporali nel piano complesso

Vogliamo caratterizzare i sistemi del secondo ordine (con poli complessi coniugati) con  $S\% \leq S^*$  e  $T_{a,5} \leq T^*$ .

Le specifiche sono soddisfatte per  $\xi \geq \xi^*$  (con  $\xi \leq 1$ ) e  $\xi\omega_n \geq \frac{3}{T^*}$



i poli complessi coniugati devono trovarsi nella zona colorata.

### 6.3.5 Sistemi del secondo ordine con poli reali

Caso  $T_1 \neq T_2$  e  $T_1 > T_2$

$$G(s) = \frac{\mu}{(1+T_1s)(1+T_2s)} \quad U(s) = \frac{k}{s}$$

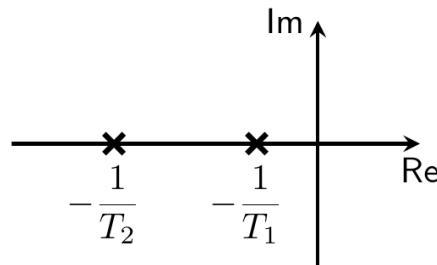
$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{\mu k}{s(1+T_1s)(1+T_2s)}$$

$$\mu > 0$$

$$k > 0$$

$$T_1 > 0$$

$$T_2 > 0$$



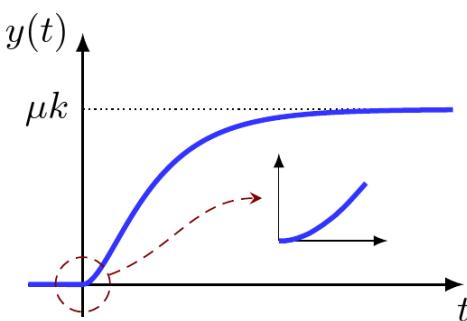
$$y(t) = \mu k \left( 1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right) 1(t)$$

$$y(0) = 0$$

$$\dot{y}(0) = 0$$

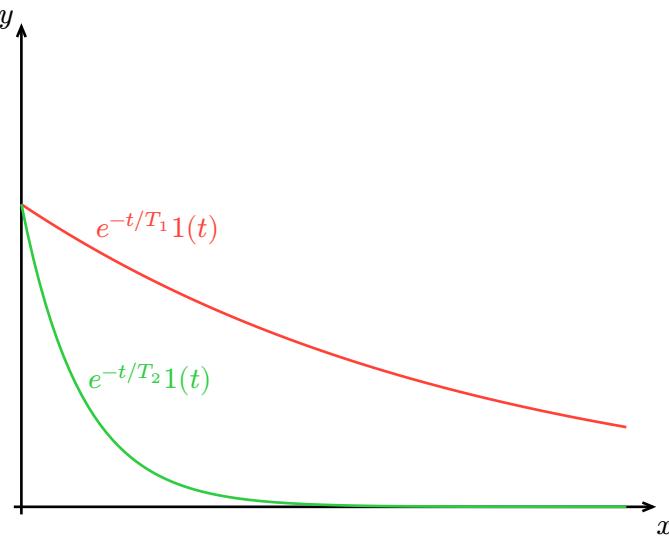
$$\ddot{y}(0) = \frac{\mu K}{T_1 T_2}$$

$$y_\infty = \mu k$$



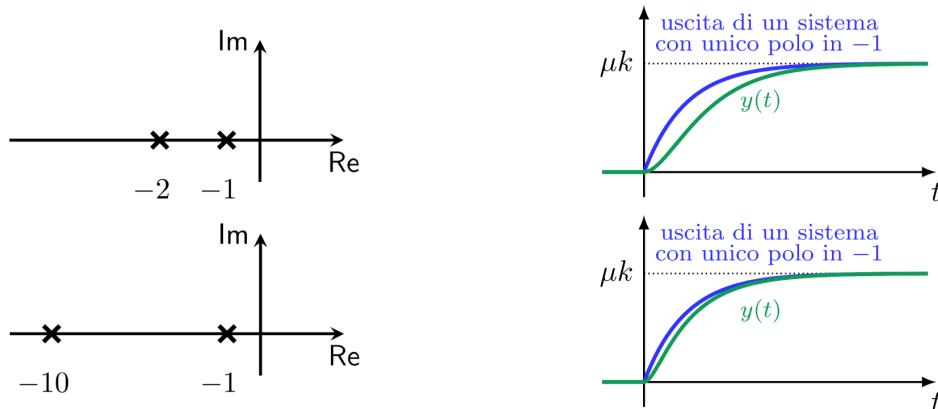
### 6.4 Sistemi a polo dominante

Consideriamo  $T_1 \gg T_2$ :



Nella risposta  $e^{-\frac{t}{T_2}}$  tende a zero velocemente, quindi si può omettere, mentre  
 $\frac{T_2}{T_1 - T_2} \ll \frac{T_1}{T_1 - T_2} \approx 1$ , quindi

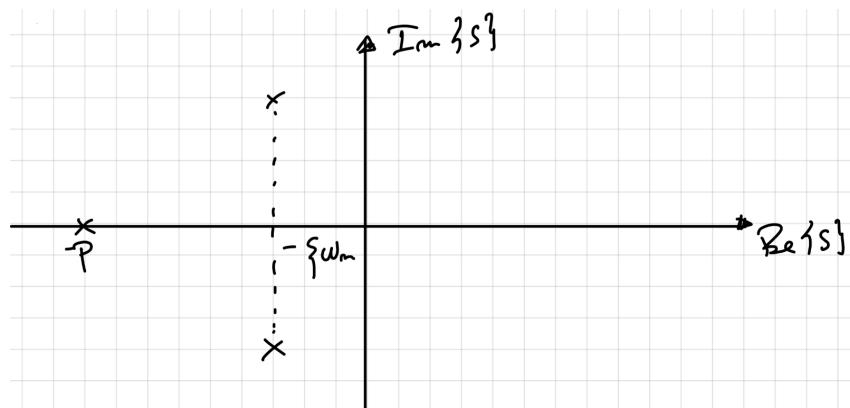
$$y(t) \approx \mu k \left( 1 - e^{-\frac{t}{T_1}} \right) 1(t)$$



#### 6.4.1 Esempio con coppia di poli complessi coniugati dominanti

$$G(s) = \mu \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)(s + p)}$$

assumiamo  $\frac{1}{T} \gg \xi\omega_n$ , cioè  $-\frac{1}{T} \ll -\xi\omega_n$



Prendiamo  $U(s) = \frac{k}{s}$

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\mu k \frac{\omega_n^2}{T}}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2) \left( s + \frac{1}{T} \right)} \\ &= \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s + \xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}} + \frac{\overline{k_2}}{s + \xi\omega_n - j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}} + \frac{k_3}{s + \frac{1}{T}} \end{aligned}$$

Per  $\frac{1}{T} \gg \xi\omega_n$  la risposta si può approssimare a quella di sistemi del secondo ordine

$$y(t) \approx \mu k (1 - A e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega t + \varphi))$$

Quindi, se ho più poli molto distanti dall'asse immaginario, posso sempre approssimare il sistema come un sistema del secondo ordine.

Infatti se analizziamo la risposta effettiva del sistema

$$y(t) = k_1 1(t) + 2M e^{-\xi\omega_n t} \cos(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + \varphi_k) 1(t) + k_3 e^{-\frac{t}{T}} 1(t)$$

il termine  $k_3 e^{-\frac{t}{T}} 1(t)$  va a 0 molto velocemente, quindi è trascurabile.

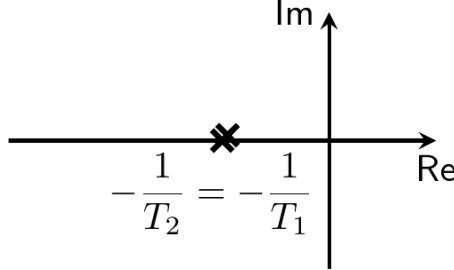
## 6.5 Sistemi del secondo ordine con poli reali coincidenti

Caso  $T_1 = T_2$

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{\mu}{(1 + T_1 s)^2} & U(s) &= \frac{k}{s} \\ Y(s) &= G(s)U(s) = \frac{\mu k}{s(1 + T_1 s)^2} \end{aligned}$$

$\mu > 0, k > 0, T_1 > 0$

$$y(t) = \mu k \left( 1 - e^{-t/T_1} - \frac{t}{T_1} e^{-t/T_1} \right) 1(t)$$

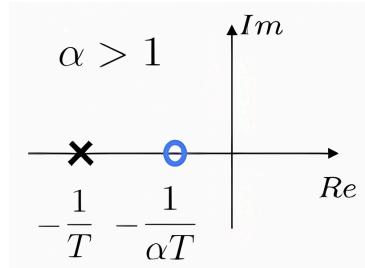


I modi presenti sono  $1(t)$  (ingresso),  $e^{-t/(T-1)}$  e  $t e^{-t/(T-1)}$  (sistema).

## 6.6 Sistemi del primo ordine con uno zero

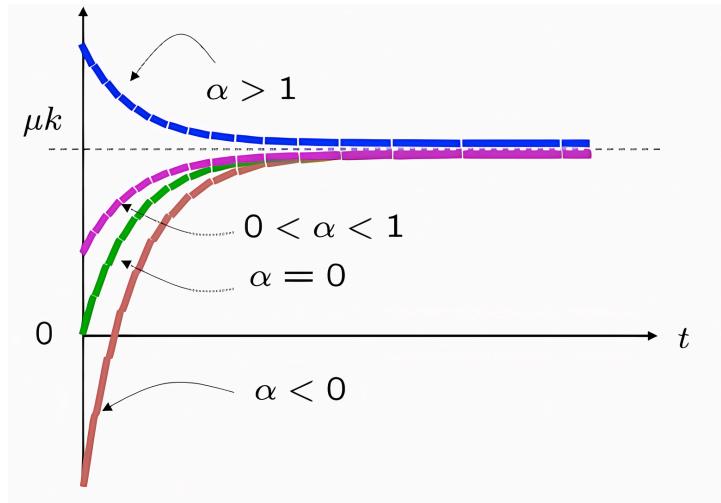
$$\begin{aligned} G(s) &= \mu \frac{1 + \alpha T s}{1 + T s} & U(s) &= \frac{k}{s} \\ Y(s) &= G(s)U(s) = \mu k \frac{1 + \alpha T s}{s(1 + T s)} \end{aligned}$$

$\mu > 0, k > 0, T > 0$



$$y(t) = \mu k \left( 1 + (\alpha - 1)e^{-\frac{t}{T}} \right) 1(t)$$

$$y(0) = \mu \alpha k \quad y_\infty = \mu k$$



Il grado relativo del sistema è zero, cioè il grado del numeratore è uguale al grado del denominatore; questo implica un collegamento algebrico tra ingresso e uscita, infatti  $y(0) \neq 0$ ; nello spazio degli stati questo equivale ad avere  $D \neq 0$ .

## 6.7 Sistemi del secondo ordine con poli reali e zero

### 6.7.1 Sistemi a fase non minima

$$G(s) = \mu \frac{1 + \tau s}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} \quad U(s) = \frac{k}{s}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \mu k \frac{1 + \tau s}{s(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}$$

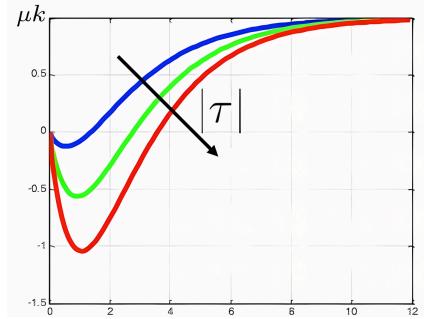
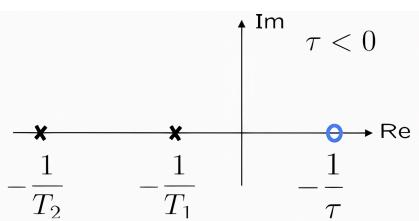
$$\mu > 0, k > 0, T_1 > 0, T_2 > 0$$

$$y(t) = \mu k \left( 1 - \frac{T_1 - \tau}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2 - \tau}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right) 1(t)$$

$$y(0) = 0 \quad \dot{y}(0) = \frac{\mu K \tau}{T_1 T_2} \quad y_\infty = \mu k$$

**N.B.** il segno della derivata  $\dot{y}(0)$  dipende da  $\tau$ .

Nel caso in cui si abbia  $T_1 > T_2$  e  $\tau < 0$  il sistema è detto a **fase non minima**; in generale è detto sistema a **fase minima** un sistema caratterizzato da una funzione di trasferimento  $G(s)$  con guadagno positivo, poli e zeri a parte reale negativa o nulla e non contenente ritardi (cioè se non ci sono esponenziali).



la sottoelongazione  $\dot{y}(0) < 0$  indica che il sistema inizialmente risponde in senso contrario rispetto all'ingresso.

Una bici, o una moto, che sterza è un sistema a fase non minima.

Dato un guadagno specifico, esiste uno e un solo sistema a fase minima che produce quel guadagno, mentre esistono infiniti sistemi a fase non minima che producono lo stesso. Per più informazioni:

[What Are Non-Minimum Phase Systems?](#).

### Domanda

Dato un sistema a fase non minima

$$G(s) = \mu \frac{1 + \tau s}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} \quad \tau < 0$$

posso progettare una  $R(s) = \frac{1}{1 + \tau s}$  tale che

$$R(s)G(s) = \mu \frac{1 + \tau s}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)(1 + \tau s)}$$

così da eliminare lo zero positivo?

Ovviamente no, perché  $1 + \tau s$  è un modello della realtà, quindi, anche se matematicamente si può semplificare, nella realtà non si annullerà mai perfettamente.

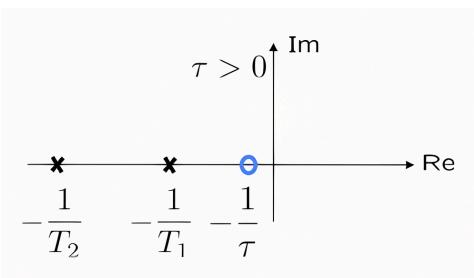
### 6.7.2 Sistemi a fase minima con sovraelongazione

Se  $\tau > T_1 > T_2$  abbiamo un sistema a (fase minima) con una sovraelongazione

$$G(s) = \mu \frac{1 + \tau s}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} \quad U(s) = \frac{k}{s}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \mu k \frac{1 + \tau s}{s(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}$$

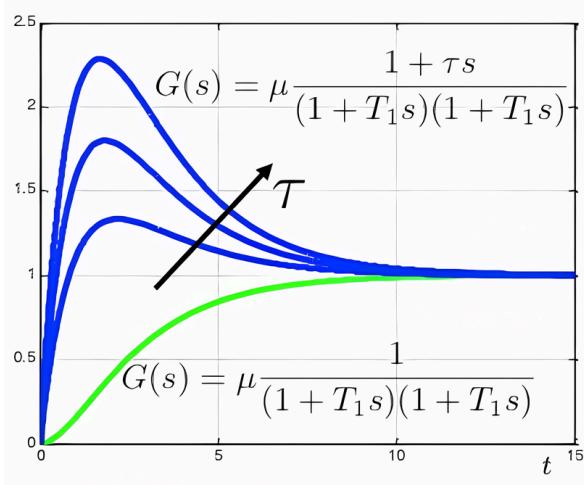
$$\mu > 0, k > 0, T_1 > 0, T_2 > 0$$



$$y(t) = \mu k \left( 1 - \frac{T_1 - \tau}{T_1 - T_2} e^{-t/(T_1 - \tau)} + \frac{T_2 - \tau}{T_1 - T_2} e^{-t/T_2} \right) 1(t)$$

$$y(0) = 0$$

$$\dot{y}(0) = \frac{\mu K \tau}{T_1 T_2} y_\infty = \mu k$$



**Nota:** è presente una sovraelongazione tanto più accentuata quanto più lo zero è vicino all'origine (cioè al crescere di  $\tau$ ).

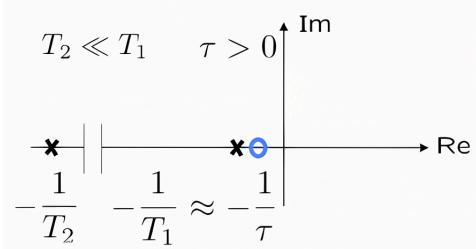
### 6.7.3 Sistemi a fase minima con code di assestamento

Se  $\tau \approx T_1 \gg T_2$  abbiamo un sistema a fase minima con code di assestamento.

$$G(s) = \mu \frac{1 + \tau s}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} \quad U(s) = \frac{k}{s}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \mu k \frac{1 + \tau s}{s(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}$$

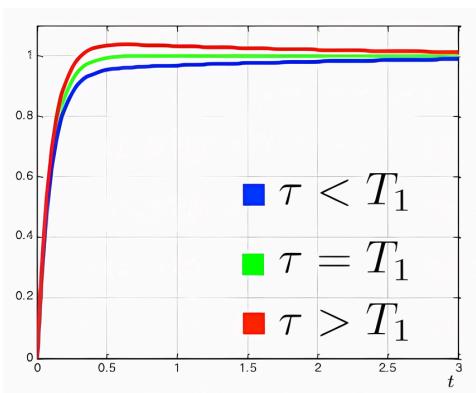
$$\mu > 0, k > 0, T_1 > 0, T_2 > 0$$



$$y(t) = \mu k \left( 1 - \frac{T_1 - \tau}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2 - \tau}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right) 1(t)$$

$$y(0) = 0$$

$$y(0) = \frac{\mu K \tau}{T_1 T_2} y_\infty = \mu k$$



A causa della non perfetta cancellazione polo/zero ( $\tau \approx T_1$ ) il modo “lento”  $e^{-\frac{t}{T_1}}$  è presente e il suo transitorio si esaurisce lentamente.

## 7 Risposta in frequenza

### 7.1 Risposta a un segnale di ingresso sinusoidale

Dato un sistema lineare tempo invariante SISO con funzione di trasferimento  $G(s)$  vogliamo calcolare l'uscita in corrispondenza di un ingresso sinusoidale

$$u(t) = U \cos(\omega t + \varphi)$$

la trasformata di Laplace di questo segnale è

$$U(s) = U \frac{s \cos(\varphi) - \omega \sin(\varphi)}{s^2 + \omega^2} \quad (7.1.32)$$

quindi

$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s)U \frac{s \cos(\varphi) - \omega \sin(\varphi)}{s^2 + \omega^2} \quad (7.1.33)$$

Consideriamo  $G(s)$  con poli (distinti a parte reale negativa (BIBO stabile)). Sviluppando in fratti semplici si ha

$$Y(s) = \sum_{i=1}^n \underbrace{\frac{k_i}{s + p_i}}_{Y_1(s)} + \underbrace{\frac{k_u}{s - j\omega}}_{Y_2(s)} + \underbrace{\frac{\bar{k}_u}{s + j\omega}}$$

Eseguiamo lo sviluppo di Heaviside sulla (7.1.32):

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s)U(s) = G(s)U \frac{s \cos(\varphi) - \omega \sin(\varphi)}{s^2 + \omega^2} \\ &= \frac{N(s)U(s \cos(\varphi) - \omega \sin(\varphi))}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)(s^2 + \omega^2)} \\ &= \frac{k_1}{s + p_1} + \frac{k_2}{s + p_2} + \dots + \frac{k_n}{s + p_n} + \frac{k_u}{s - j\omega} + \frac{\bar{k}_u}{s + j\omega} \end{aligned}$$

quindi, antitrasformando

$$\begin{aligned} y(t) &= k_1 e^{-p_1 t} 1(t) + \dots + k_n e^{-p_n t} 1(t) + 2 |k_u| \underbrace{e^{-\sigma t}}_{\sigma=0} \cos(\omega t + \arg(k_u)) 1(t) \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^n k_i e^{-p_i t} 1(t)}_{y_1(t)} + \underbrace{2 |k_u| \cos(\omega t + \arg(k_u)) 1(t)}_{y_2(t)} \end{aligned}$$

Poiché i poli di  $G(s)$  sono a parte reale negativa, i contributi  $e^{-p_i t} 1(t)$  sono tutti convergenti a zero. Pertanto  $y_1(t) \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow \infty$ .

Il residuo  $k_u$  è dato da

$$\begin{aligned}
k_u &= (s - j\omega)Y(s)|_{s=j\omega} \\
&= UG(s) \frac{s \cos(\varphi) - \omega \sin(\varphi)}{s + j\omega} \Big|_{s=j\omega} \\
&= UG(j\omega) \frac{j\omega \cos(\varphi) - \omega \sin(\varphi)}{j\omega + j\omega} \\
&= UG(j\omega) \frac{j \cos(\varphi) - \sin(\varphi)}{2j} \\
&= UG(j\omega) \frac{\cos(\varphi) + j \sin(\varphi)}{2} \\
e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j \sin(\varphi) \implies &= UG(j\omega) \frac{e^{j\varphi}}{2} \\
&= \frac{U|G(j\omega)|}{2} e^{j(\arg(G(j\omega)) + \varphi)}
\end{aligned}$$

dove abbiamo scritto  $G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\arg(G(j\omega))}$ .

Ora che abbiamo calcolato  $k_u$  possiamo sostituirlo nell' espressione di  $y(t)$

$$y(t) = y_1(t) + U |G(j\omega)| \cos(\omega t + \varphi + \arg(G(j\omega)))$$

Siccome  $y_1(t) \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow \infty$ , l'uscita  $y(t)$  converge a

$$y_2(t) = U |G(j\omega)| \cos(\omega t + \varphi + \arg(G(j\omega)))$$

ovvero, per  $t$  sufficientemente grande si ha

$$y(t) \approx U |G(j\omega)| \cos(\omega t + \varphi + \arg(G(j\omega))) \quad (7.1.34)$$

quest'espressione viene chiamata **risposta a regime permanente**

$$\begin{array}{ccc}
u(t) = U \cos(\omega t + \varphi) & \xrightarrow{\epsilon \gg 0} & y(t) \approx U |G(j\omega)| \cos(\omega t + \varphi + \arg(G(j\omega)))
\end{array}$$

### 7.1.1 Teorema

Se a un sistema lineare tempo invariante con funzione di trasferimento  $G(s)$  avente poli a parte reale negativa si applica l'ingresso sinusoidale

$$u(t) = U \cos(\omega t + \varphi)$$

l'uscita, a transitorio esaurito, è data da

$$y(t) = U |G(j\omega)| \cos(\omega t + \varphi + \arg(G(j\omega)))$$

### 7.2 Risposta a segnali periodici sviluppabili in serie di Fourier

Consideriamo un segnale d'ingresso  $u(t)$  periodico, cioè  $\exists T > 0$  tale che  $\forall t \geq 0 u(t+T) = u(t)$ , che può essere sviluppato in serie di Fourier

$$u(t) = U_0 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} |U_n| \cos(n\omega_0 t + \arg(U_n))$$

$$\text{con } \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \text{ e}$$

$$U_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad n = 0, 1, \dots$$

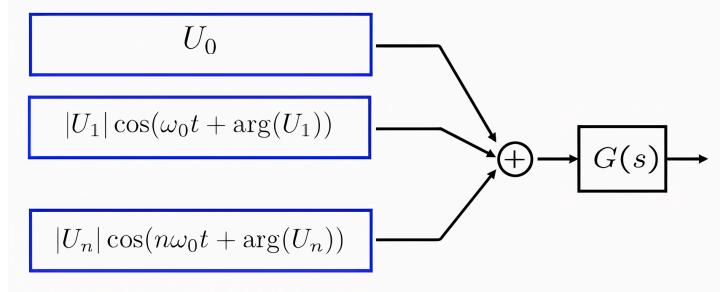
In base a quanto visto per un ingresso sinusoidale e sfruttando il principio di sovrapposizione degli effetti per sistemi BIBO stabili si può dimostrare che per  $t$  elevati

$$y(t) \approx Y_0 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} |Y_n| \cos(n\omega_0 t + \arg(Y_n)) \quad (7.2.35)$$

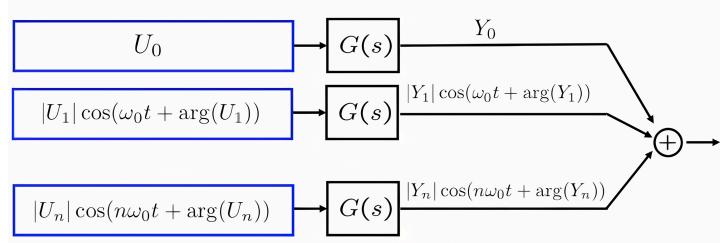
$$\text{con } \omega_0 = \frac{2\pi}{T} e$$

$$Y_n = G(jn\omega_0)U_n \quad n = 0, 1, \dots$$

Il risultato appena visto può essere schematizzato come segue. Dato in ingresso un segnale periodico, esso può essere rappresentato come la somma delle armoniche dello sviluppo in serie di Fourier



Sfruttando la sovrapposizione degli effetti tale schema è equivalente a considerare lo schema seguente per  $t$  elevati



### 7.3 Risposta a segnali dotati di trasformata di Fourier

Dato un segnale non periodico dotato di trasformata di Fourier, possiamo scriverlo come

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2|U(j\omega)| \cos(\omega t + \arg(U(j\omega))) d\omega$$

con

$$U(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)e^{-j\omega t} dt$$

Ovvero l'ingresso è scomponibile come una infinità non numerabile di armoniche con valori di  $\omega$  reali maggiori o uguali a zero.

Quindi se il sistema è BIBO stabile per  $t$  elevati

$$y(t) \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2|Y(j\omega)| \cos(\omega t + \arg(Y(j\omega))) d\omega \quad (7.3.36)$$

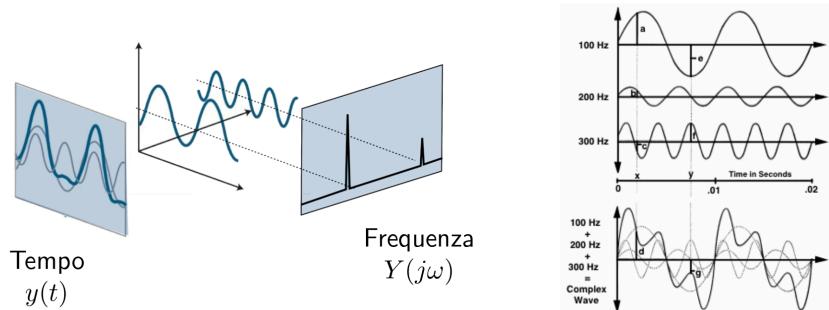
con

$$Y(j\omega) = G(j\omega)U(j\omega)$$

### 7.4 Richiami

#### 7.4.1 Spettro di un segnale

Ogni segnale reale si può ottenere sommando opportune onde sinusoidali



Uno stesso segnale può essere quindi visto equivalentemente nel dominio del tempo ( $y(t)$ ) o delle frequenze ( $Y(j\omega)$ ). Le funzioni  $y(t)$  e  $Y(j\omega)$  sono ugualmente informative e offrono due prospettive complementari per osservare lo stesso fenomeno.

La pulsazione  $\omega$  e la frequenza  $f$  sono legate dalla relazione  $\omega = 2\pi f$ .

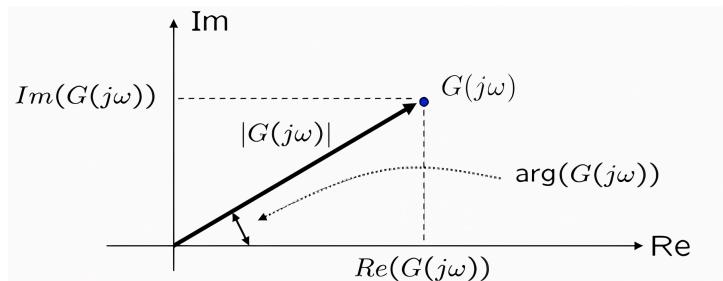
## 7.5 Risposta in frequenza

La funzione complessa  $G(j\omega)$  ottenuta valutando  $G(s)$  per  $s = j\omega$  è detta *risposta in frequenza*.

$$G(s)|_{s=j\omega} = G(j\omega)$$

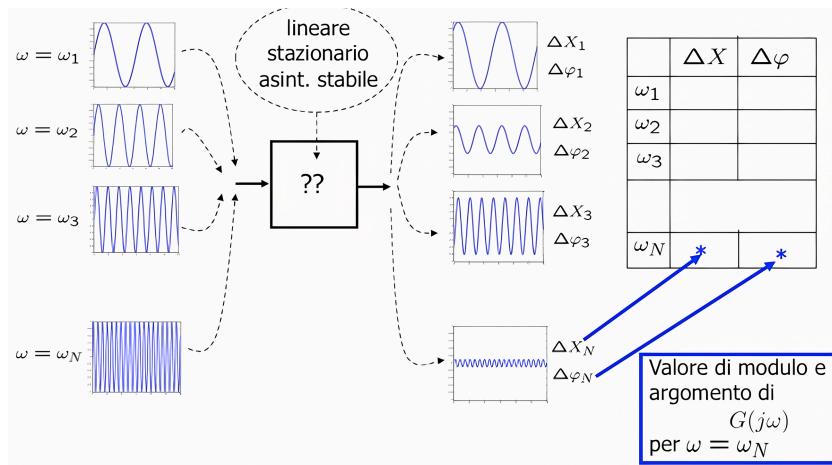
La risposta in frequenza viene estesa anche a sistemi non asintoticamente stabili.

Per un certo valore di  $\omega$ ,  $G(j\omega)$  è un numero complesso



### 7.5.1 Identificazione sperimentale della risposta in frequenza (approccio data-driven)

Nel caso in cui la risposta in frequenza non sia nota possiamo sfruttare i risultati precedenti per ricavarla sperimentalmente.



Diciamo che con questo tipo di approccio riusciamo a stimare la  $G(j\omega)$  (non la  $G(s)$ !).

## 7.6 Rappresentazione della risposta in frequenza

Vi sono diversi modi di rappresentare la risposta in frequenza. Uno dei modi più usati sono i (diagrammi di Bode), in cui si rappresentano separatamente  $|G(j\omega)|$  e  $\arg(G(j\omega))$  in funzione di  $\omega$ . Nei diagrammi di Bode si utilizza una scala logaritmica in base dieci per l'ascissa, dove è riportata la pulsazione  $\omega$ . In particolare, nei diagrammi di Bode si chiama *decade* l'intervallo tra due pulsazioni che hanno un rapporto tra loro pari a dieci. Per come abbiamo definito i diagrammi, segue che la pulsazione nulla non compare nell'asse "finito" (si può avere pulsazione nulla solo a  $-\infty$ ).

Nel tracciamento dei diagrammi di Bode conviene scrivere la funzione  $G(s)$  nella forma fattorizzata (4.5.29), qui riportata

$$G(s) = \frac{\mu \prod_i (1 + \tau_i s) \prod_i \left(1 + \frac{2\zeta_i}{\alpha_{ni}} + \frac{s^2}{\alpha_{ni}^2}\right)}{\left(s^g \prod_i (1 + T_i s) \prod_i \left(1 + \frac{2\xi_i}{\omega_{ni}} + \frac{s^2}{\omega_{ni}^2}\right)\right)}$$

e la risposta in frequenza associata corrispondente è

$$G(j\omega) = \frac{\mu \prod_i (1 + j\omega\tau_i) \prod_i \left(1 + 2j\zeta_i \frac{\omega}{\alpha_{ni}} - \frac{\omega^2}{\alpha_{ni}^2}\right)}{(j\omega)^g \prod_i (1 + j\omega T_i) \prod_i \left(1 + 2j\xi_i \frac{\omega}{\omega_{ni}} - \frac{\omega^2}{\omega_{ni}^2}\right)}$$

Il diagramma delle ampiezze è espresso in (decibel):  $|G(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log|G(j\omega)|$ . Il diagramma delle fasi è espresso in gradi:  $\arg(G(j\omega))$

### 7.6.1 Proprietà dei numeri complessi e logaritmi

Dati due numeri complessi  $a \in \mathbb{C}$  e  $b \in \mathbb{C}$  si ha

$$|ab| = |a| |b|$$

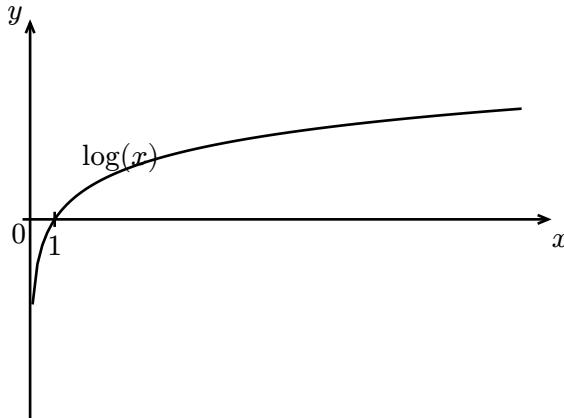
e

$$\begin{aligned} \log(|a||b|) &= \log(|a|) + \log(|b|) & \arg(ab) &= \arg(a) + \arg(b) \\ \log\left(\frac{|a|}{|b|}\right) &= \log(|a|) - \log(|b|) & \arg\left(\frac{a}{b}\right) &= \arg(a) - \arg(b) \\ \log(|a|^k) &= k \log(|a|) & \arg(a^k) &= k \arg(a) \end{aligned}$$

### 7.6.2 Esempio operazioni in decibel

Definiamo il *modulo in decibel* di un numero  $a$

$$|a|_{\text{dB}} = 20 \log_{10}|a|$$



inoltre

$$\begin{aligned} |a| \geq 1 &\implies |a|_{\text{dB}} \geq 0 \\ 0 \leq |a| \leq 1 &\implies |a|_{\text{dB}} \leq 0 \end{aligned}$$

## 7.7 Diagrammi di Bode

### 7.7.1 Diagramma del modulo

Partiamo col calcolare il valore del modulo della risposta in frequenza in Decibel

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10}|G(j\omega)|$$

Prendiamo una risposta in frequenza così definita

$$G(j\omega) = \mu \frac{(1 + j\omega\tau)\left(1 + 2\frac{\zeta}{\alpha_n}j\omega - \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}\right)}{j\omega(1 + j\omega T)\left(1 + \frac{2\xi}{\omega_n}j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)}$$

$$\begin{aligned}
|G(j\omega)|_{\text{dB}} &= 20 \log |G(j\omega)| \\
&= 20 \log |\mu| + 20 \log |1 + j\omega\tau| + 20 \log \left| 1 + 2\frac{\zeta}{\alpha_n}j\omega - \frac{\omega^2}{\alpha_n^2} \right| \\
&\quad - 20 \log |j\omega| - 20 \log |1 + j\omega T| - 20 \log \left| 1 + \frac{2\xi}{\omega_n}j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right| \\
&= |\mu|_{\text{dB}} + |1 + j\omega\tau|_{\text{dB}} + \left| 1 + 2\frac{\zeta}{\alpha_n}j\omega - \frac{\omega^2}{\alpha_n^2} \right|_{\text{dB}} - |j\omega|_{\text{dB}} \\
&\quad - |1 + j\omega T|_{\text{dB}} - \left| 1 + \frac{2\xi}{\omega_n}j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right|_{\text{dB}}
\end{aligned}$$

## 7.8 Diagramma della fase

$$\begin{aligned}
\arg(G(j\omega)) &= \arg \mu - g \arg(j\omega) + \sum_i \arg(1 + j\omega\tau_i) + \sum_i \arg \left( 1 + 2j\zeta_i \frac{\omega}{\alpha_{n,1}} - \frac{\omega^2}{\alpha_{n,i}^2} \right) \\
&\quad - \sum_i \arg(1 + j\omega T_i) - \sum_i \arg \left( 1 + 2j\zeta_i \frac{\omega}{\alpha_{n,1}} - \frac{\omega^2}{\omega_{n,i}^2} \right)
\end{aligned}$$

### 7.8.1 Contributi elementari

Possiamo quindi studiare l'andamento dei seguenti contributi elementari

$$G_a(j\omega) = \mu$$

$$G_b(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^g}$$

$$G_c(j\omega) = (1 + j\omega\tau_i)$$

$$G_c(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T_i}$$

$$G_d(j\omega) = \left( 1 + 2j\zeta_i \frac{\omega}{\alpha_{n,1}} - \frac{\omega^2}{\alpha_{n,1}^2} \right)$$

$$G_d(j\omega) = \frac{1}{\left( 1 + 2j\zeta_i \frac{\omega}{\alpha_{n,1}} - \frac{\omega^2}{\alpha_{n,1}^2} \right)}$$

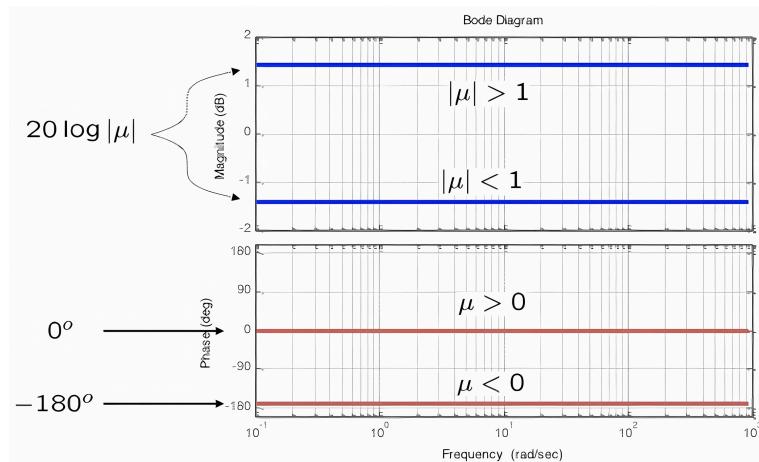
La rappresentazione di questi diagrammi avviene su carte logaritmiche che vanno per *decade*, cioè per potenze di dieci.

### 7.8.2 Guadagno statico

$$G_a(j\omega) = \mu$$

$$|G_a(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log |\mu|$$

$$\arg(G(j\omega)) = \arg(\mu)$$



Per quanto riguarda il diagramma dell'ampiezza,

- se  $|\mu| \geq 1$  allora  $20 \log |\mu| \geq 0$
- se  $|\mu| < 1$  allora  $20 \log |\mu| < 0$ .

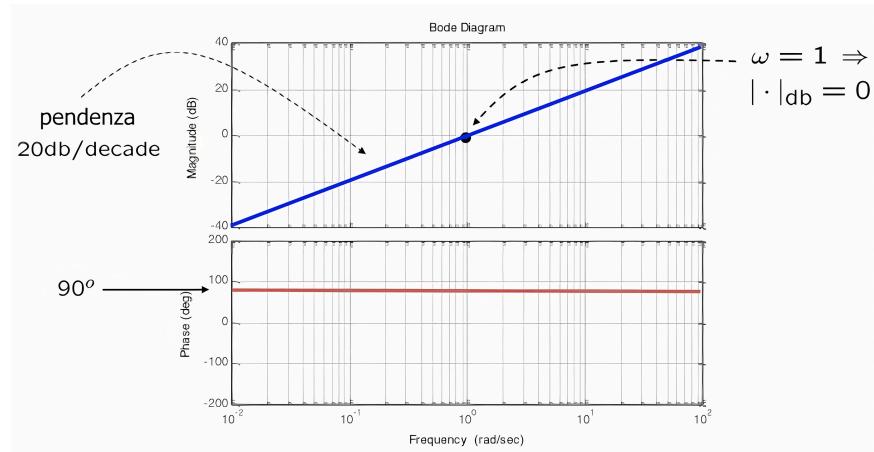
Per il diagramma della fase invece

- se  $\mu > 0$  allora  $\arg(\mu) = 0$
- se  $\mu < 0$  allora  $\arg(\mu) = -180^\circ$ .

### 7.8.3 Zeri nell'origine

Consideriamo una risposta con uno zero nell'origine (cioè  $g = -1$ )

$$G_b(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^g} = j\omega \quad |G_b(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log \omega \arg(G_b(j\omega)) = \arg(j\omega)$$

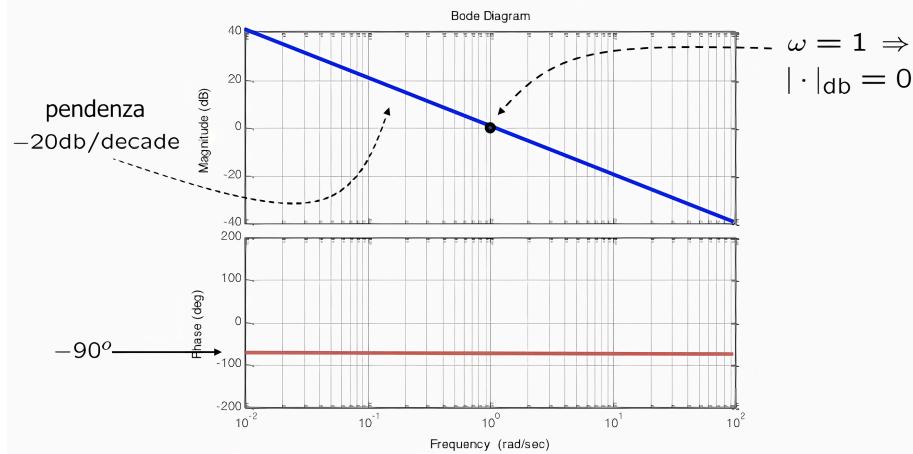


La retta che definisce l'ampiezza  $\log \omega \mapsto 20 \log \omega$  ha pendenza 20 dB/dec; se ho  $g$  zeri nell'origine allora la pendenza della retta sarà  $20 \cdot g$  dB/dec.

### 7.8.4 Poli nell'origine

Consideriamo una risposta con un polo nell'origine (cioè  $g = 1$ )

$$G_b(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^g} = \frac{1}{j\omega} \quad |G_b(j\omega)|_{\text{dB}} = -20 \log \omega \quad \arg(G_b(j\omega)) = -\arg(j\omega)$$



Anche in questo caso, se ho  $g$  poli nell'origine allora la pendenza della retta sarà  $-20$  dB/dec. Per quanto riguarda la fase  $-j\omega$  è un punto sul semiasse immaginario negativo  $\forall \omega > 0$ , quindi la fase è  $-90^\circ$ .

### 7.8.5 Zero reale (ampiezza)

Consideriamo una risposta con uno zero reale

$$G_c(j\omega) = 1 + j\omega\tau$$

$$|G_c(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2} \approx \begin{cases} 20 \log 1 = 0 & \omega \ll \frac{1}{|\tau|} \\ 20 \log \omega |\tau| = -20 \log \frac{1}{|\tau|} + 20 \log \omega & \omega \gg \frac{1}{|\tau|} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \left| G_c\left(j\frac{1}{|\tau|}\right) \right|_{\text{dB}} &= 20 \log \sqrt{1 + \frac{1}{|\tau|^2} \tau^2} \\ &= 20 \log \sqrt{2} \approx 3 \end{aligned}$$

per  $\omega = \frac{1}{|\tau|}$  abbiamo lo scostamento massimo.

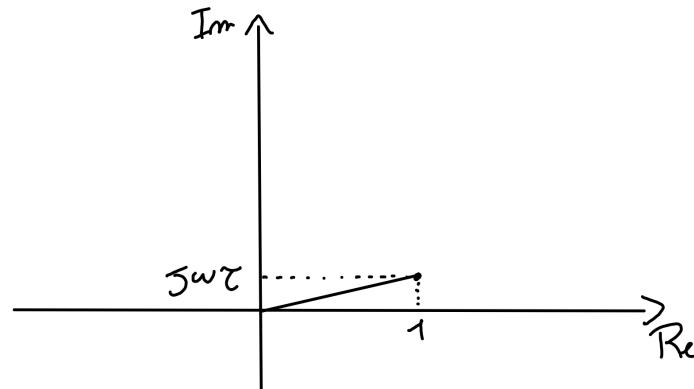
### 7.8.6 Zero reale negativo (fase)

Consideriamo una risposta con uno zero reale negativo

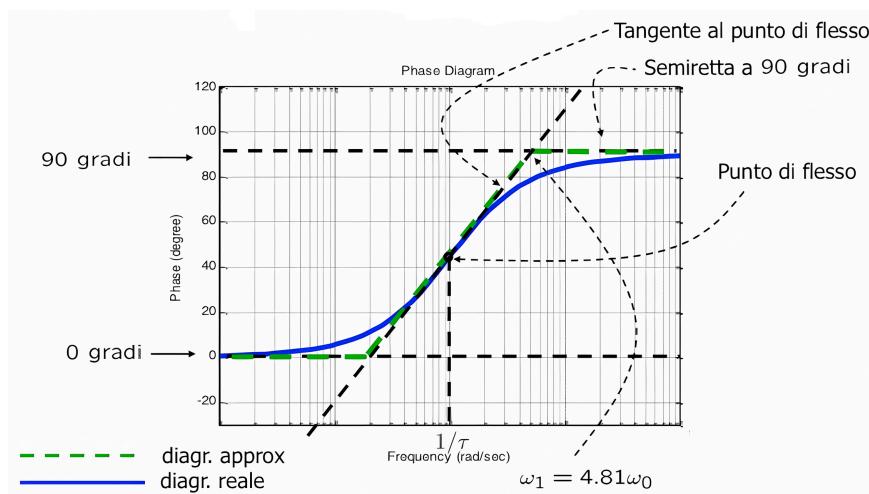
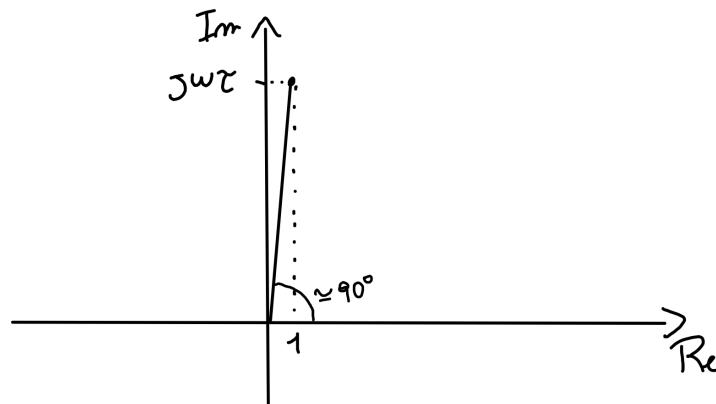
$$G_c(j\omega) = 1 + j\omega\tau \quad \tau > 0$$

$$\arg(G_c(j\omega)) = \arg(1 + j\omega\tau) \approx \begin{cases} 0 & \omega \ll \frac{1}{\tau} \\ 90^\circ & \omega \gg \frac{1}{\tau} \end{cases}$$

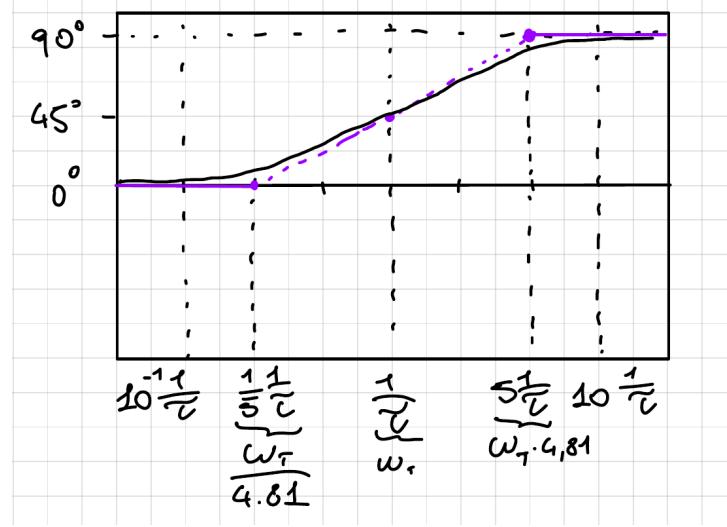
Se  $\omega \rightarrow 0$  allora  $\arg(1 + j\omega\tau) \approx \arg(1) = 0$



se  $\omega \gg \frac{1}{\tau}$  allora graficamente



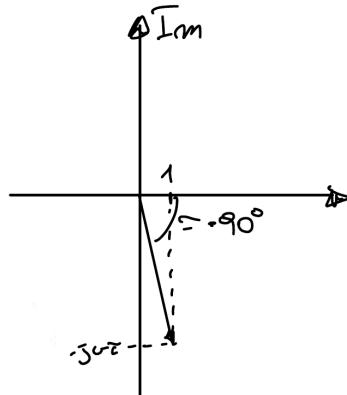
il cambio di fase inizia circa una decade prima e finisce circa una decade dopo la pulsazione di taglio  
 $\omega = \frac{1}{\tau}$ .



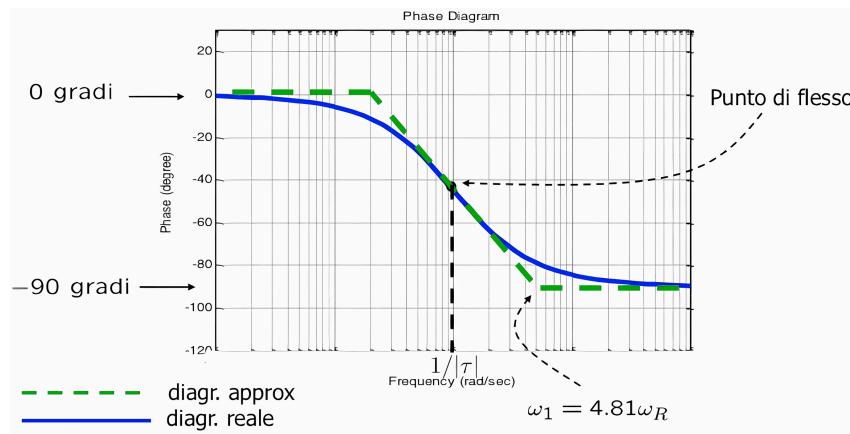
$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\tau} = 0.2 \cdot \frac{1}{\tau} = 2 \cdot 10^{-1} \frac{1}{\tau}$ , il doppio in scala logaritmica è  $\frac{1}{3}$  di una decade.

### 7.8.7 Zero reale positivo (fase)

Consideriamo  $G_c(j\omega) = 1 + j\omega\tau, \tau < 0$  (cioè una risposta con uno zero reale positivo)



$$\arg(G(j\omega)) = \arg(1 + j\omega\tau) \approx \begin{cases} 0 & \omega \ll \frac{1}{|\tau|} \\ -90^\circ & \omega \gg \frac{1}{|\tau|} \end{cases}$$

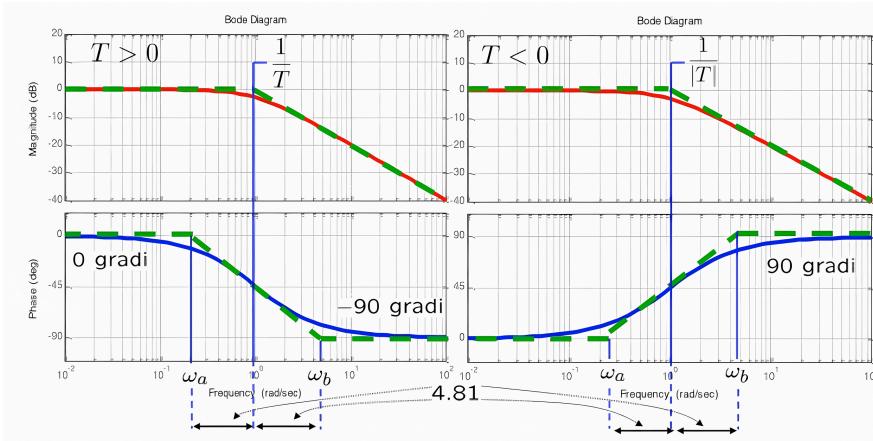


### 7.8.8 Polo reale

Consideriamo  $G_c(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$  (cioè una risposta con un polo reale)

$$\begin{aligned} |G_c(j\omega)|_{\text{dB}} &= 20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right| \\ &= -20 \log |1 + j\omega T| \end{aligned}$$

$$|G_c(j\omega)|_{\text{dB}} = -20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \quad \arg(G_c(j\omega)) = -\arg(1 + j\omega T)$$

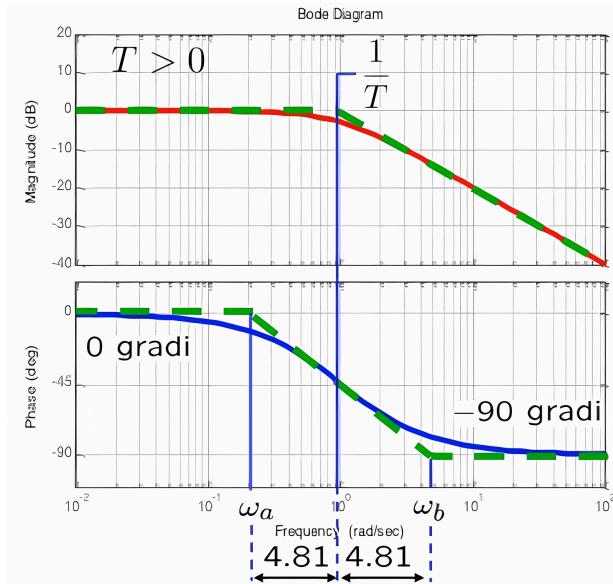


Il diagramma è uguale al diagramma dello zero ma ribaltato rispetto all'asse reale (consistentemente con il segno di  $T$ ).

### 7.8.9 Polo reale negativo

Consideriamo  $G_c(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$ ,  $T > 0$  (cioè una risposta con un polo reale negativo)

$$|G_c(j\omega)|_{\text{dB}} = -20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \quad \arg(G_c(j\omega)) = -\arg(1 + j\omega T)$$



Fino a  $\frac{1}{T}$ , (pulsazione di taglio), si ha un andamento costante a 0 dB, cioè il modulo della sinusode in uscita non cambia. A partire da  $\frac{1}{T}$  si ha una retta  $\log \omega \mapsto 20 \log \frac{1}{|T|} - 20 \log \omega$  con pendenza  $-20 \text{ dB/dec}$ .

Lo scostamento massimo (tra diagramma asintotico e diagramma reale) si ha in  $\omega = \frac{1}{T}$  dove

$$\begin{aligned} |G_c(j\omega)|_{\text{dB}} &= -20 \log \sqrt{1 + 1} \\ &= -20 \log \sqrt{2} \approx -3 \end{aligned}$$

Il cambio di fase inizia circa una decade prima e finisce circa una decade dopo la pulsazione di taglio  $\omega = \frac{1}{T}$ .

### 7.8.10 Zeri complessi coniugati (ampiezza)

Consideriamo  $G_d(j\omega) = 1 + 2j\zeta \frac{\omega}{\alpha_n} - \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}$ , una risposta con una coppia di zeri complessi coniugati

$$|G_d(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}}$$

per  $\omega \gg \alpha_n$

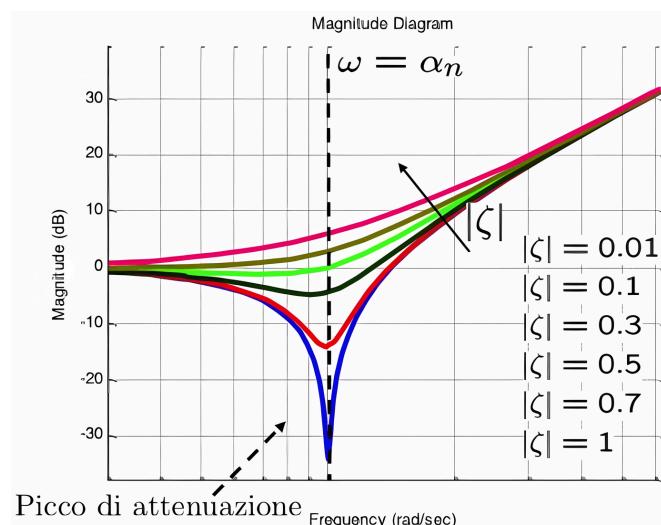
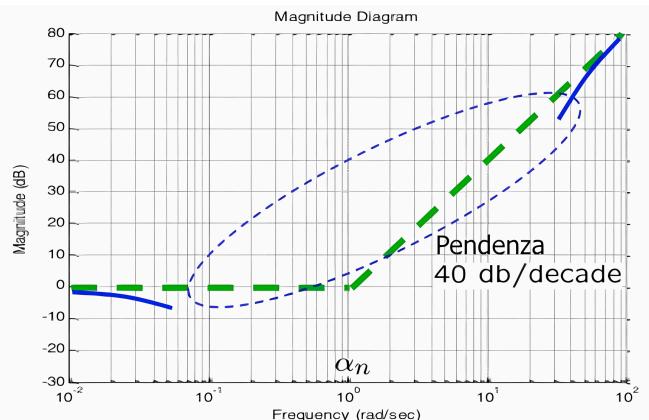
$$\begin{aligned}
|G_d(j\omega)|_{\text{dB}} &\approx 20 \log \sqrt{\left(\frac{\omega^2}{\alpha_n^2}\right)} \\
&= 20 \log \frac{\omega^2}{\alpha_n^2} \\
&= 20 \log \left(\frac{\omega}{\alpha_n}\right)^2 \\
&= 40 \log \frac{\omega}{\alpha_n} \\
&= \underbrace{40 \log \omega}_{\text{variabile}} - \underbrace{40 \log \alpha_n}_{\text{costante}}
\end{aligned}$$

Quindi la risposta si comporta come una retta, di pendenza pari a 40 dB. Analizziamo ora la risposta per  $\omega = \alpha_n$

$$\begin{aligned}
|G_d(j\omega)|_{\text{dB}} &= 20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}} \\
&= 20 \log \sqrt{4\zeta^2} \\
&= 23 \log 2|\zeta| \\
&= \underbrace{20 \log 2}_{6 \text{ dB}} + 20 \log |\zeta|
\end{aligned}$$

quindi scostamento significativo dipendente dal valore di  $\zeta$ .

$$|G_d(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}} \approx \begin{cases} 20 \log(1) = 0 & \omega \ll \alpha_n \\ 20 \log \frac{\omega^2}{\alpha_n^2} = -40 \log \alpha_n + 40 \log \omega & \omega \gg \alpha_n \end{cases}$$

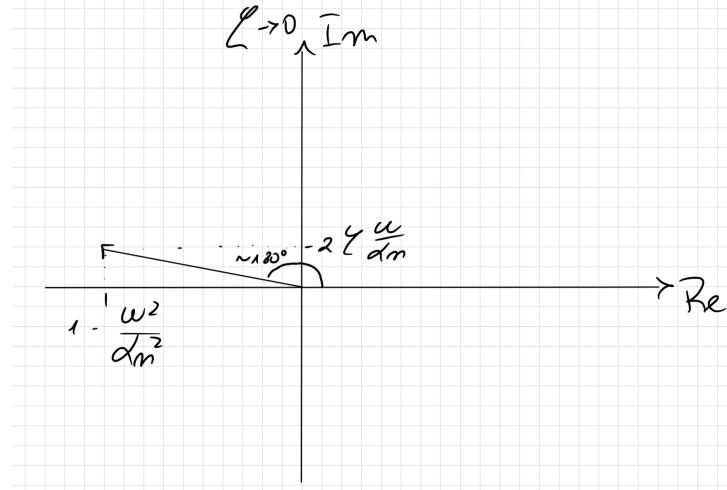


Il minimo dell'ampiezza si ha alla pulsazione  $\omega_r = \alpha_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$  con  $|G_d(j\omega_r)| = 2 |\zeta| \sqrt{1 - \zeta^2}$

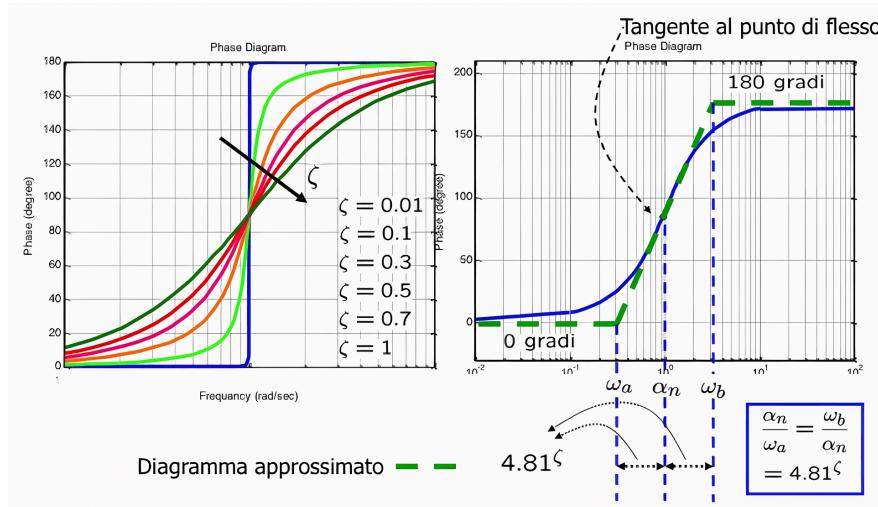
### 7.8.11 Zeri complessi coniugati a parte reale negativa (fase)

Consideriamo  $G_d(j\omega) = 1 + 2j\zeta \frac{\omega}{\alpha_n} - \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}$ ,  $\zeta > 0$ , una risposta con una coppia di zeri complessi coniugati a parte reale negativa

$$\arg(G_d(j\omega)) \approx \begin{cases} 0 & \omega \ll \alpha_n \\ 180^\circ & \omega \gg \alpha_n \end{cases}$$



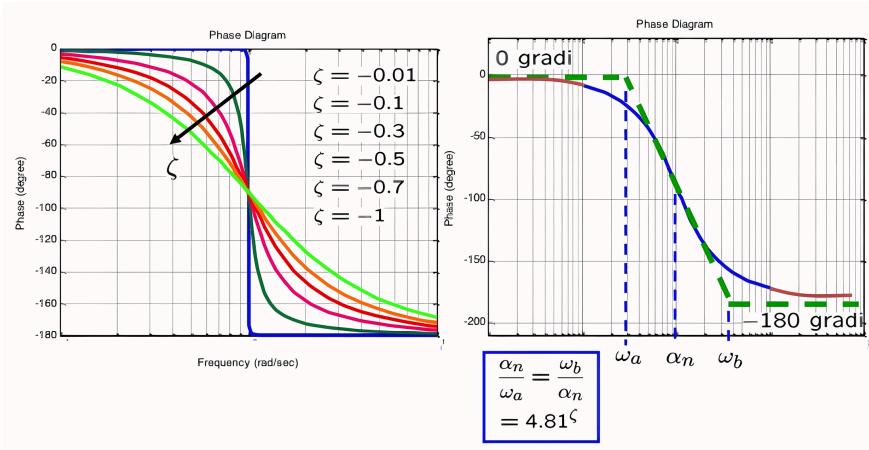
Vediamo che la risposta, per  $\omega \gg \alpha_n$ , nel piano complesso ha sicuramente una parte reale molto negativa, mentre la parte immaginaria dipende dal valore  $\zeta$ , il quale influenza molto l'andamento della fase. Ad esempio se  $\zeta \rightarrow 0$  la parte immaginaria nel piano complesso tenderà anch'essa a 0, così da rendere molto facile appurare che l'argomento della nostra risposta sia quasi  $180^\circ$ . Anche con  $\zeta = 1$  l'argomento sarà circa  $180^\circ$ , ma solo per pulsazioni molto grandi, perché la parte reale tende a  $\frac{\omega^2}{\alpha_n^2}$ , che è  $O\left(\frac{\omega}{\alpha_n}\right)$  (la parte immaginaria) per  $\omega \rightarrow \infty$ .



Nel diagramma di fase più  $\zeta$  è piccolo e più la discontinuità da  $0^\circ$  a  $180^\circ$  è rapida.

### 7.8.12 Zeri complessi coniugati a parte reale positiva

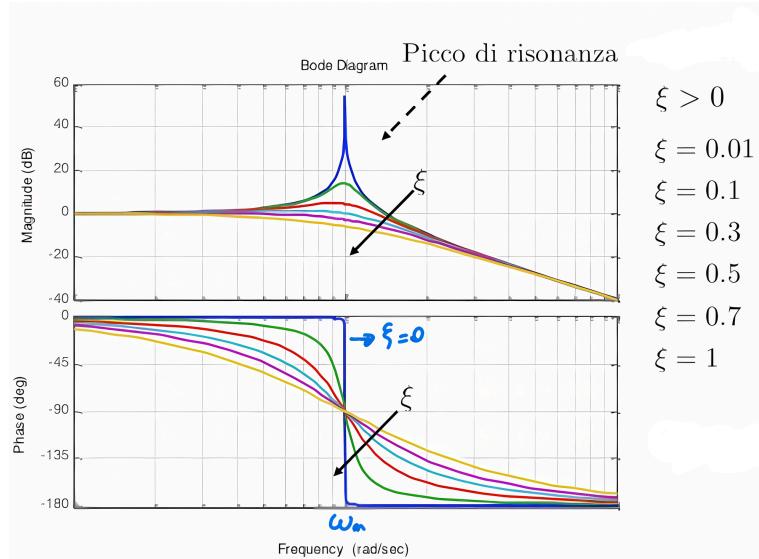
Consideriamo  $G_d(j\omega) = 1 + 2j\zeta \frac{\omega}{\alpha_n} - \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}$ ,  $\zeta < 0$ , una risposta con una coppia di zeri complessi coniugati a parte reale positiva. Il diagramma di fase è speculare a quello precedente



### 7.8.13 Poli complessi coniugati a parte reale negativa

Consideriamo una risposta in frequenza con poli complessi coniugati a parte reale negativa

$$G_d(j\omega) = \frac{1}{1 + 2j\xi \frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}, \xi > 0$$



I diagrammi sono quelli precedenti ribaltati rispetto all'asse reale, infatti la retta del diagramma di ampiezza asintotico dopo la pulsazione  $\omega_n$  ha pendenza  $-40$  "dB/dec". Il picco di risonanza si trova alla pulsazione (di risonanza)  $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$  con  $|G_d(j\omega_r)| = \frac{1}{2|\xi| \sqrt{1 - 2\xi^2}}$ ; alla frequenza  $\omega_n$  si ha  $|G_d(j\omega_n)| = \frac{1}{2|\xi|}$

Soffermiamoci un attimo sul caso in cui  $\xi \rightarrow 0$ : se do una sinusode con frequenza inferiore a  $\omega_n$  essa non viene sfasata; se invece la sua frequenza è di poco superiore a  $\omega_n$  la sua fase viene sfasata di  $90^\circ$ ; il modulo viene amplificato di molto se la frequenza della sinusode è nell'intorno di  $\omega_n$ .

### 7.8.14 Poli complessi coniugati a parte reale positiva

Consideriamo una risposta in frequenza con una coppia di poli complessi coniugati a parte reale positiva

$$G_d(j\omega) = \frac{1}{1 + 2j\xi \frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \quad \xi < 0$$

Calcoliamo i poli

$$\begin{aligned} G_d(s) &= \frac{1}{1 + 2\frac{\xi}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}} \\ &= \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \\ \Rightarrow p_{1/2} &= -\xi\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \end{aligned}$$

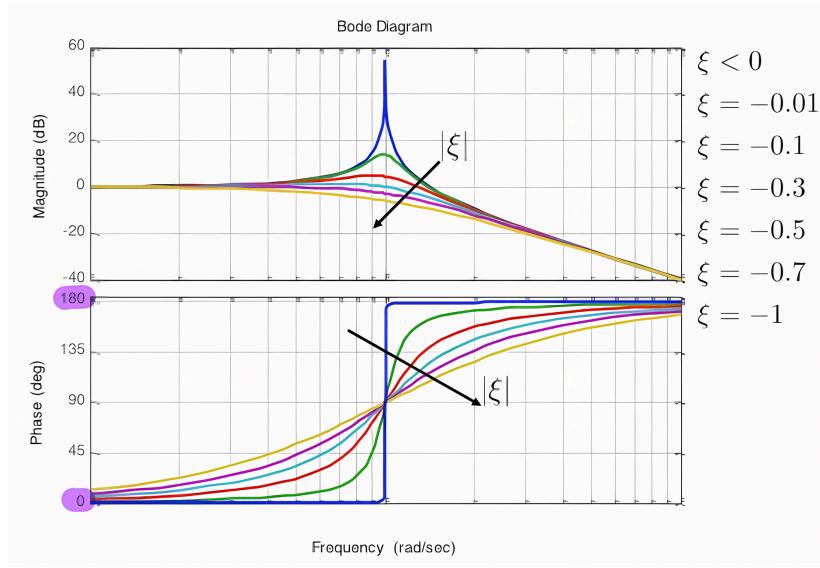


Diagramma ottenuto da quello degli zeri (caso  $\zeta < 0$ ) ribaltando rispetto all'asse reale.

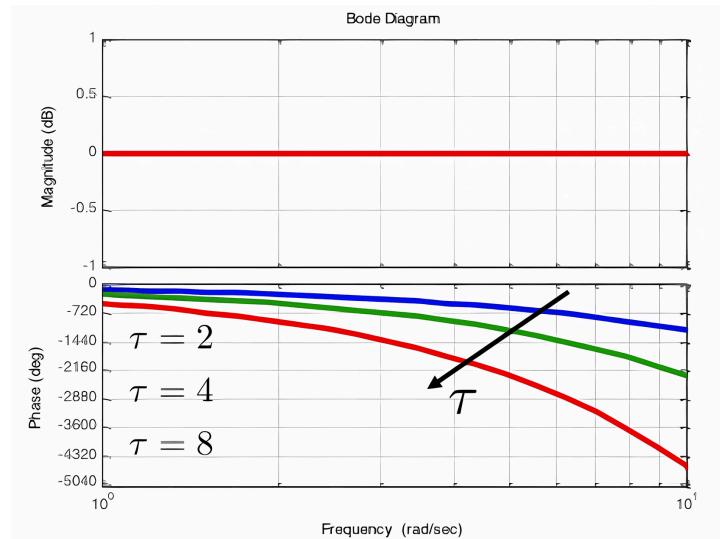
### 7.8.15 Ritardo temporale

Consideriamo  $G(s) = e^{-\tau s}$  con  $G(j\omega) = e^{-j\omega\tau}$

$$\begin{aligned}|G(j\omega)|_{\text{dB}} &= 20 \log|e^{-j\omega\tau}| \\&= 20 \log 1 \\&= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\arg(G(j\omega)) &= \arg(e^{-j\omega\tau}) \\&= -\omega\tau\end{aligned}$$

Questo tipo di sistema ritarda di  $\tau$  il segnale in ingresso, quindi la fase viene attenuata mentre il modulo rimane invariato.



### 7.8.16 Proprietà bloccante degli zeri

Supponiamo di avere  $G(s) = \mu \frac{s^2 + \alpha_n^2}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}$ , con  $T_1, T_2 > 0$  (quindi abbiamo un sistema asintoticamente stabile). Calcoliamo l'uscita del sistema supponendo un ingresso del tipo  $u(t) = U \cos(\omega_u t)$ . La trasformata dell'ingresso è  $U(s) = \frac{Us}{s^2 + \omega_u^2}$

- Caso 1:  $\omega_u \neq \alpha_n$ .

La trasformata dell'uscita sarà uguale a

$$Y(s) = G(s)U(s) = \mu \frac{Us(s^2 + \alpha_n^2)}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)(s^2 + \omega_u^2)}$$

In base al denominatore, i modi presenti nell'uscita sono:

- $e^{-t/T_1}$  dovuto al termine  $1 + T_1 s$

- $e^{-t/T_2}$  dovuto al termine  $1 + T_2 s$
- $|G(j\omega_u)|U \cos(\omega_u t + \arg(G(j\omega_u)))$  dovuto al termine  $s^2 + \omega_u^2$
- Caso 2:  $\omega_u = \alpha_n$ .  
La trasformata dell'uscita sarà uguale a

$$Y(s) = G(s)U(s) = \mu \frac{Us(s^2 + \alpha_n^2)}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)(s^2 + \alpha_n^2)} = \mu \frac{Us}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}$$

In base al denominatore, i modi presenti nell'uscita sono:

- $e^{-t/T_1}$  dovuto al termine  $1 + T_1 s$
- $e^{-t/T_2}$  dovuto al termine  $1 + T_2 s$

Pertanto nell'uscita  $y(t) = k_1 e^{-t/T_1} + k_2 e^{-t/T_2}$  non sono presenti i modi corrispondenti agli zeri del sistema.

## 7.9 Risonanza

Supponiamo di avere un sistema con poli immaginari coniugati  $\pm j\omega_n$ , ovvero  $G(s) = \mu \frac{\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2}$  (rispetto al caso generale qui  $\xi = 0$ ); il diagramma di Bode ha un picco di risonanza infinito alla pulsazione  $\omega_n$ .

Analizziamone il significato calcolando l'uscita del sistema in corrispondenza dell'ingresso  $u(t) = U \cos(\omega_n t)$ . La trasformata dell'ingresso è  $U(s) = U \frac{s}{s^2 + \omega_n^2}$ , quindi quella dell'uscita è

$$Y(s) = G(s)U(s) = \mu \frac{U\omega_n^2 s}{(s^2 + \omega_n^2)^2}$$

1)  $\omega_u \neq \omega_n$

$$Y(s) = \frac{k_1}{s - j\omega_n} + \frac{\bar{k}_1}{s + j\omega_n} + \frac{k_2}{(s - j\omega_u)^2} + \frac{\bar{k}_2}{(s + j\omega_u)^2}$$

$$y(t) = 2 |k_1| \cos(\omega_n t + \arg(k_1)) + 2 |k_2| \cos(\omega_u t + \arg(k_2))$$

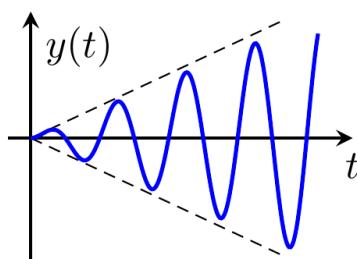
l'uscita è la somma di due sinusoidi a frequenza  $\omega_n$  e  $\omega_u$

2)  $\omega_u = \omega_n$

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s)U(s) \\ &= \mu U \frac{s\omega_n^2}{(s^2 + \omega_n^2)(s^2 + \omega_n^2)} \\ &= \mu U \frac{s\omega_n^2}{(s^2 + \omega_n^2)^2} \\ &= \frac{k_1}{s - j\omega_n} + \frac{\bar{k}_1}{s + j\omega_n} + \frac{k_2}{(s - j\omega_n)^2} + \frac{\bar{k}_2}{(s + j\omega_n)^2} \end{aligned}$$

$$y(t) = 2 |k_1| \cos(\omega_n t + \arg(k_1)) + 2 |k_2| \cos(\omega_n t + \arg(k_2))$$

L'uscita tende a infinito per  $t \rightarrow \infty$ , quindi il sistema non è BIBO stabile; questo fenomeno viene chiamato **risonanza**.



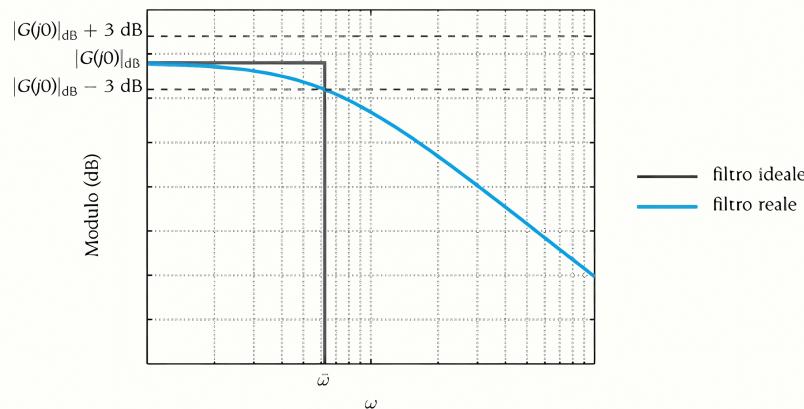
## 7.10 Azione filtrante dei sistemi dinamici

Quanto visto mostra come un sistema dinamico lineare e stazionario si comporta sostanzialmente come un *filtro* per l'ingresso, modellandolo per produrre l'uscita.

### 7.10.1 Filtro passa-basso

Un filtro ideale passa-basso è un sistema che lascia passare inalterata, o amplificate di un valore costante, unicamente le armoniche del segnale di ingresso con pulsazione inferiore o uguale a un dato valore  $\bar{\omega}$ ; il diagramma di Bode del filtro è costante fino a  $\bar{\omega}$  e vale  $-\infty$  "dB" per  $\omega > \bar{\omega}$ , mentre il diagramma della fase è nullo fino a  $\bar{\omega}$ . La realizzazione di un filtro ideale passa-basso è di fatto impossibile, quindi definiamo un filtro reale passa-basso come un sistema con  $G(j\omega)$  che soddisfa le seguenti relazioni

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{|G(j\omega)|}{|G(j0)|} \leq \sqrt{2} & \omega \leq \bar{\omega} \\ \frac{|G(j\omega)|}{|G(j0)|} < \frac{1}{\sqrt{2}} & \omega > \bar{\omega} \end{cases} \quad (7.10.37)$$



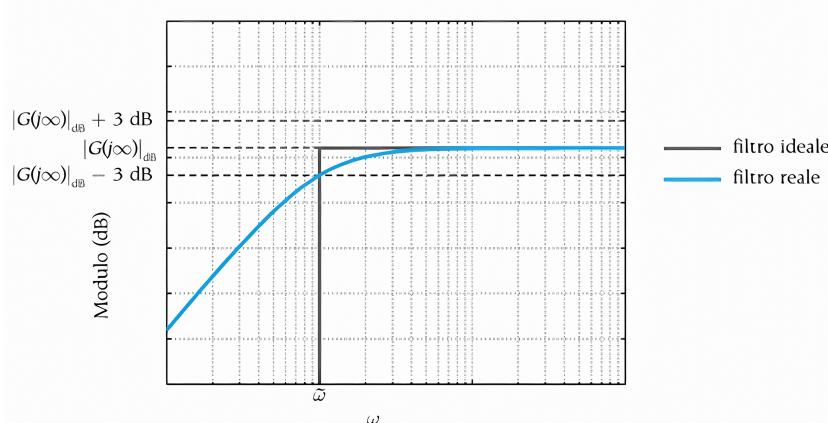
N.B. Nella (7.10.37) lo sfasamento introdotto da  $G(s)$  non ha alcun ruolo, mentre il contributo di fase di un filtro reale può essere significativo e non va trascurato.

### 7.10.2 Filtro passa-alto

Un *filtro ideale passa-alto* è un sistema che lascia passare inalterate, o amplificate di una quantità costante, unicamente le armoniche del segnale di ingresso con pulsazione maggiore o uguale a  $\tilde{\omega}$ .

Un *filtro reale passa-alto* è un sistema caratterizzato da una risposta in frequenza  $G(j\omega)$  il cui modulo soddisfa le seguenti relazioni

$$\begin{cases} \frac{|G(j\omega)|}{|G(j0)|} < \frac{1}{\sqrt{2}} & \omega < \tilde{\omega} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{|G(j\omega)|}{|G(j0)|} \leq \sqrt{2} & \omega \geq \tilde{\omega} \end{cases} \quad (7.10.38)$$



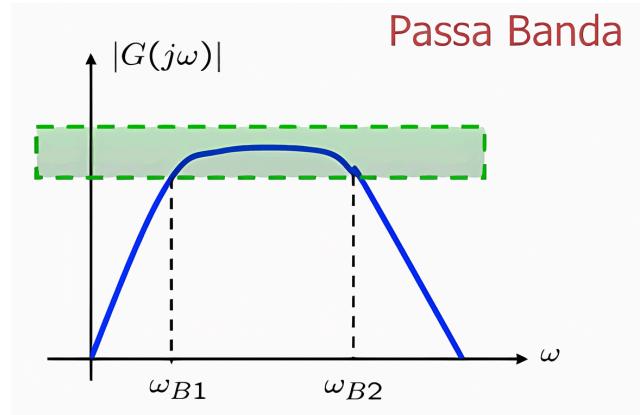
Solo sistemi non strettamente propri possono avere le caratteristiche di un filtro passa-alto, dato che la (7.10.38) implica che  $G(j\infty) \neq 0$ .

### 7.10.3 Passa banda

I *filtri passa banda ideali* sono sistemi che lasciano passare solo armoniche del segnale in ingresso comprese tra  $\omega_{B1}$  e  $\omega_{B2}$ .

I *filtri passa banda reali* sono sistemi che hanno una  $G(j\omega)$  che soddisfa le seguenti relazioni

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{|G(j\omega)|}{|G(j\omega_{\max})|} \leq \sqrt{2} & \omega \in [\omega_{B1}, \omega_{B2}] \\ \frac{|G(j\omega)|}{|G(j\omega_{\max})|} < \frac{1}{\sqrt{2}} & \omega \in [0, \omega_{B1}] \cup [\omega_{B2}, 0] \end{cases} \quad (7.10.39)$$

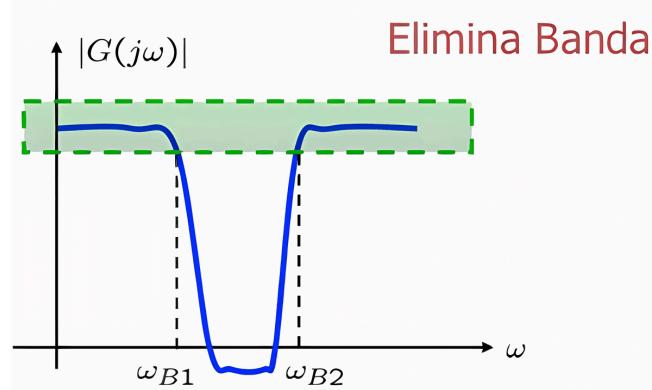


### 7.10.4 Elimina banda

I *filtri elimina banda ideali* sono sistemi che non lasciano passare solo armoniche del segnale in ingresso comprese tra  $\omega_{B1}$  e  $\omega_{B2}$ .

I *filtri elimina banda reali* sono sistemi che hanno una  $G(j\omega)$  che soddisfano le seguenti relazioni

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{|G(j\omega)|}{|G(j\omega_{\max})|} \leq \sqrt{2} & \omega \in [0, \omega_{B1}] \cup [\omega_{B2}, 0] \\ \frac{|G(j\omega)|}{|G(j\omega_{\max})|} < \frac{1}{\sqrt{2}} & \omega \in [\omega_{B1}, \omega_{B2}] \end{cases}$$



## 7.11 Esempio diagramma di Bode

Prendiamo una risposta in frequenza

$$G(s) = 10 \cdot \frac{1 + 0.1s}{1 + 10s}$$

Il guadagno è  $\mu = 10$ , che in decibel è

$$\begin{aligned} 20 \log \mu &= 20 \log 10 \\ &= 20 \text{ dB} \end{aligned}$$

C'è uno zero

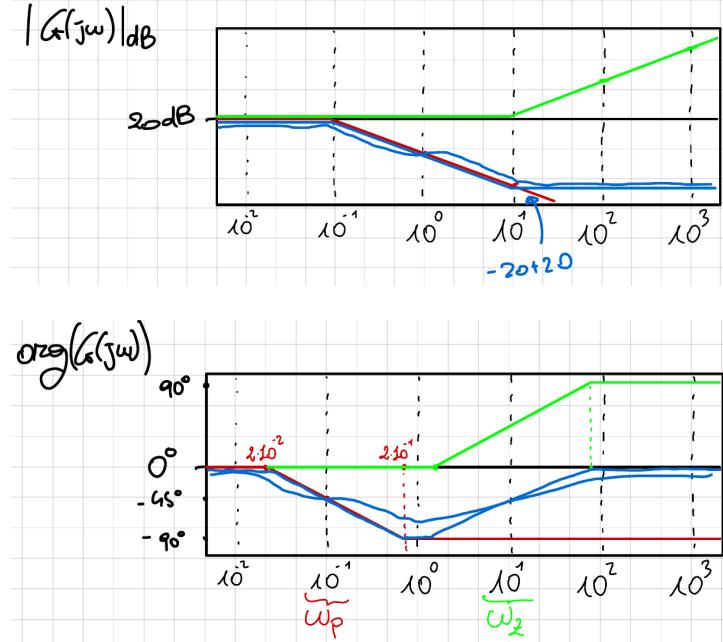
$$1 + 10^{-1}s \longrightarrow s_z = -10 \quad \omega_z = 10$$

e un polo

$$1 + 10^s \longrightarrow s_p = -10^{-1} \quad \omega_p = 10^{-1}$$

$$G(j\omega) = 10 \cdot \frac{1 + 10^{-1}j\omega}{1 + 10j\omega}$$

Il diagramma d'ampiezza risultante può essere visto come la somma dei contributi del polo e dello zero (in verde il contributo dello zero, in rosso il contributo del polo, in blu la somma)

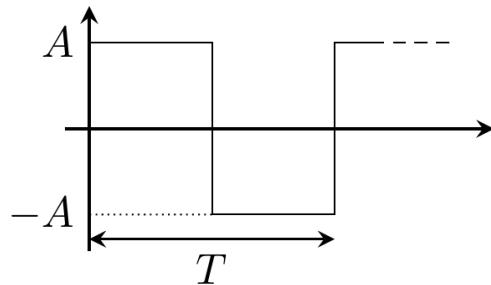


Per quanto riguarda il diagramma di fase,  $-90^\circ$  è un valore asintotico che si può raggiungere solo per  $\omega \rightarrow \infty$ , quindi non sarà mai raggiunto in un sistema reale; inoltre la presenza di uno zero aumenta la fase nel diagramma.

### 7.11.1 Filtrare un'onda quadra con disturbo in alta frequenza

Consideriamo un segnale  $s(t)$  ad onda quadra con periodo  $T$  e ampiezza  $A$ :

$$s(t) = A \operatorname{sign} \left( \sin \left( \frac{2\pi t}{T} \right) \right) = \begin{cases} A & \text{se } \sin \left( \frac{2\pi t}{T} \right) \geq 0 \\ -A & \text{se } \sin \left( \frac{2\pi t}{T} \right) < 0 \end{cases}$$



Supponiamo che l'ingresso consista nell'onda quadra più un disturbo sinusoidale ad alta frequenza  $\omega_N \gg \frac{2\pi}{T}$  con ampiezza  $A_N$

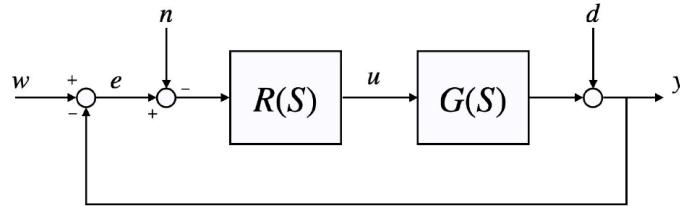
$$u(t) = s(t) + A_N \sin(\omega_N t)$$

Per filtrare il disturbo in alta frequenza possiamo usare un filtro passa-basso, cioè un sistema dinamico del primo ordine con un polo reale in  $-\frac{1}{T_p}$ :  $G(s) = \frac{1}{1 + sT_p}$ . Scegliendo opportunamente la costante di tempo  $T_p$  il segnale in uscita sarà una versione filtrata dell'onda quadra con disturbo in alta frequenza quasi completamente attenuato.

## 8 Sistemi di controllo: stabilità e prestazioni

### 8.1 Schema di controllo in retroazione

Consideriamo il seguente schema di controllo in retroazione



Ci poniamo come obiettivo quello di garantire che l'uscita  $y(t)$  segua il riferimento  $w(t)$  (scelto dall'utente) in presenza di

- disturbi (non misurabili) in uscita  $d(t)$  e disturbi di misura  $n(t)$
  - incertezze sul modello  $G(s)$  del sistema fisico (impianto) considerato
- soddisfaccendo opportune specifiche di prestazione.

Definiamo

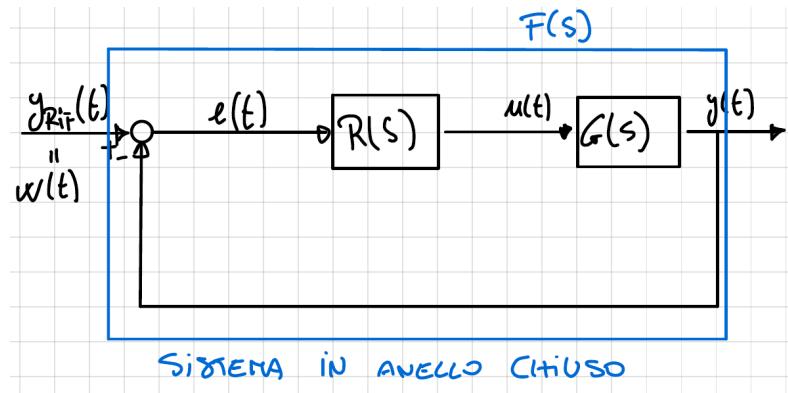
$$L(s) = R(s)G(s) \quad (8.1.40)$$

come **funzione d'anello**, cioè la funzione di trasferimento in anello aperto del sistema.

$R(s)$  è chiamato (regolatore).

#### 8.1.1 Sistema in anello chiuso

Prendiamo un sistema in retroazione in anello chiuso (caso ideale senza rumore o disturbi)



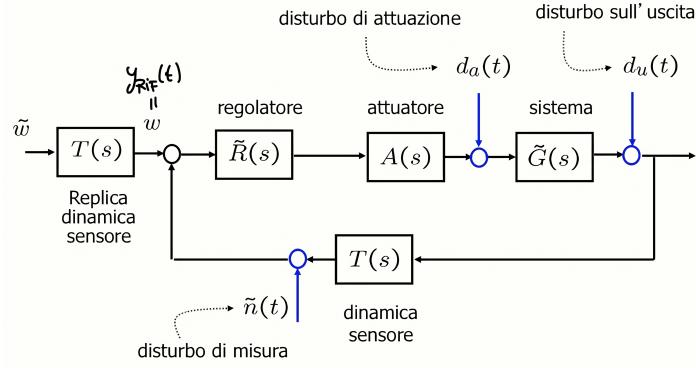
**N.B.** Chiameremo sempre la  $w(t)$  come uscita di riferimento  $y_{T(\text{RIF})}(t)$ ; quindi  $y_{T(\text{RIF})}(t)$  è quello che voglio ottenere dal sistema, mentre  $y(t)$  è come si comporta il sistema.

$$Y(s) = F(s) \underbrace{Y_{\text{RIF}}(s)}_{W(s)} \quad (8.1.41)$$

è ovvio che se potessimo decidere il valore di  $F(s)$  sarebbe 1.

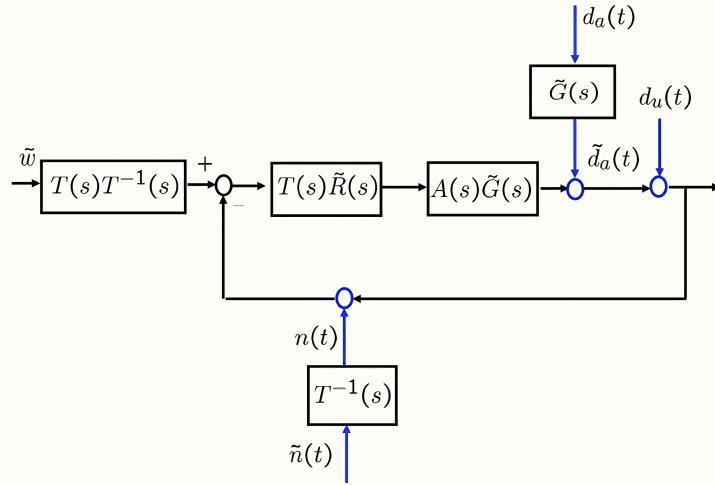
### 8.2 Schema generale e semplificazione

Lo schema del sistema in retroazione ad anello aperto cattura anche strutture più complesse che includono attuatori e trasduttori

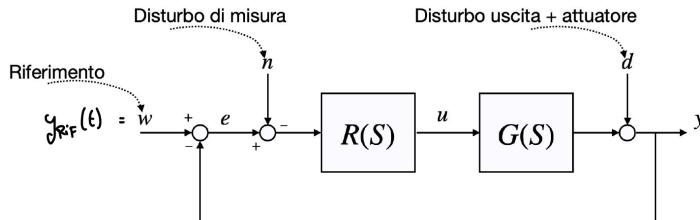


**N.B.** Il riferimento  $w$  viene filtrato con una replica della dinamica del sensore  $T(s)$  in modo che sia “compatibile” con la dinamica dell’uscita  $y$  retroazionata.

Usando le proprietà di schemi a blocchi interconnessi, si può riscrivere lo schema precedente in modo equivalente.



Così lo schema diventa



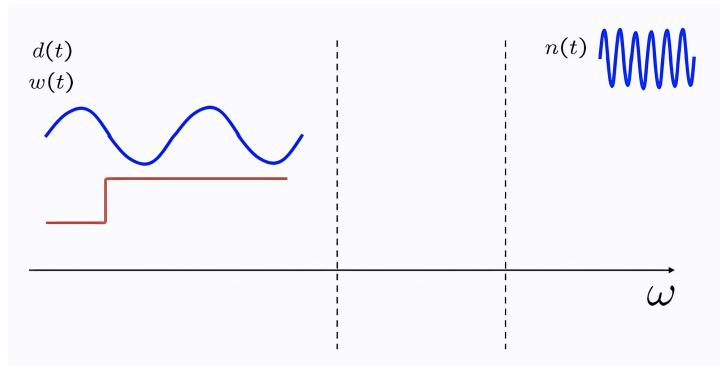
- Sistemi:  $R(s) = T(s)\tilde{R}(s)$ ,  $G(s) = A(s)\tilde{G}(s)$
- Segnali:  $W(s) = \tilde{W}(s)$ ,  $N(s) = T^{-1}(s)\tilde{N}(s)$ ,  $D(s) = D_a(s)\tilde{G}(s) + D_{u(s)}$

il disturbo sull’attuatore  $d_{a(t)}$  viene filtrato dal sistema. Bisogna tenerne conto quando si fanno considerazioni sul disturbo in uscita  $d(t)$ .

$R(s)$  è la funzione di trasferimento del regolatore e  $G(s)$  del sistema sotto controllo; inoltre assumiamo che  $R(s)$  e  $G(s)$  sono funzioni razionali, con  $G(s)$  strettamente propria, mentre  $R(s)$  può essere rappresentativa di sistemi non strettamente propri e non dinamici. La funzione ad anello  $L(s) = R(s)G(s)$  risulta sempre strettamente propria.

### 8.3 Disaccoppiamento frequenziale dei segnali

Nelle applicazioni di interesse ingegneristico tipicamente le bande dei segnali di ingresso  $w(t)$ ,  $d(t)$ ,  $n(t)$  sono limitate in opportuni range.



- $w(t), d(t)$  hanno bande a “basse frequenze”, ad esempio posizioni, rotazioni, velocità, etc ... di sistemi meccanici
- $n(t)$  ha bande ad “alte frequenze”, ad esempio disturbi termici in componenti elettronici, accoppiamenti con campi elettromagnetici, etc dots

Lo stesso vale per le trasformate:  $W(j\omega), D(j\omega)$  hanno valori non nulli a “basse frequenze”, mentre  $N(j\omega)$  ha valori non nulli ad “alte frequenze”.

## 8.4 Requisiti di un sistema di controllo

### 8.4.1 Stabilità

**Stabilità in condizioni nominali** Il requisito fondamentale per il sistema in retroazione che stiamo considerando è l’asintotica stabilità (2.17.3) o stabilità BIBO (5.5).

**Stabilità robusta** La stabilità deve essere garantita anche in condizioni perturbate (errori di modello o incertezze nei parametri), perché la  $G(s)$  rappresenta soltanto un modello approssimato del sistema sotto controllo.

### 8.4.2 Prestazioni

Oltre alla stabilità, è necessario che il sistema abbia determinate prestazioni, cioè che abbia le proprietà elencate.

**Prestazioni statiche in condizioni nominali** Il sistema ha un errore  $e$  limitato o nullo per  $t \rightarrow \infty$ , cioè dopo che si è esaurito il transitorio iniziale, a fronte di ingressi  $w, d, n$  con determinate caratteristiche.

Esempi:

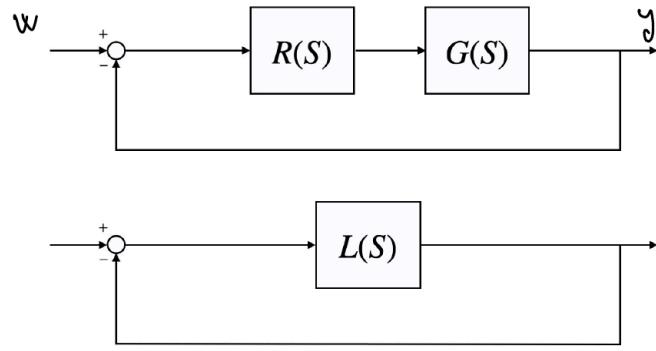
- errore in risposta a un ingresso a gradino (transizione ad un nuovo riferimento o disturbi costanti su attuatori/sensori) o rampa;
- risposta a un ingresso sinusoidale a date frequenze (disturbi con certe componenti frequenziali)

**Prestazioni dinamiche in condizioni nominali** Prestazioni del sistema in transitorio relative a

- risposta a un riferimento  $w$ , data in termini di tempo di assestamento  $T_{a,\varepsilon}$  e sovraelongazione  $S\%$  massimi;
- risposta a disturbi  $d$  e  $n$ , data in termini di attenuazione in certi range di frequenze (bande di frequenza dei disturbi);
- moderazione della variabile di controllo  $u$ , data in termini di contenimento dell’ampiezza (per evitare saturazione di attuatori, uscita da range in cui la linearizzazione è valida o costi eccessivi).

### 8.4.3 Stabilità robusta del sistema retroazionato (Criterio di Bode)

Poiché la stabilità di un sistema lineare non dipende dagli ingressi, consideriamo il seguente schema a blocchi



Per studiare la stabilità robusta, in presenza di incertezze, del sistema retroazionato ci baseremo su un principio fondamentale: il **Criterio di Bode**, che lega la stabilità del sistema retroazionato a quella del sistema in anello aperto.

$$F(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} \Rightarrow Y(s) = F(s)W(s)$$

Tenendo conto che, logicamente, l'errore del sistema  $e(t)$  è la differenza tra il l'uscita di riferimento  $y_{T(\text{RIF})}$  e l'uscita reale  $y(t)$

$$\begin{aligned} Y(s) &= R(s)G(s) \overbrace{E(s)}^{\mathcal{L}[e(t)]} \\ &= R(s)G(s)(W(s) - Y(s)) \\ &= R(s)G(s)W(s) - R(s)G(s)Y(s) \end{aligned}$$

Riarrangiamo i termini

$$\begin{aligned} Y(s) + R(s)G(s)Y(s) &= R(s)G(s)W(s) \\ (1 + R(s)G(s))Y(s) &= R(s)G(s)W(s) \end{aligned}$$

quindi

$$\left. \begin{aligned} Y(s) &= \underbrace{\frac{R(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)}}_{F(s)} W(s) \\ F(s) &= \frac{R(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)} \\ L(s) &= R(s)G(s) \end{aligned} \right\} \Rightarrow F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

## 8.5 Margini di fase e ampiezza

### 8.5.1 Margine di fase

In un sistema ad anello chiuso la funzione di trasferimento è  $\frac{G(s)}{1 + G(s)}$ . Sappiamo che un sistema è instabile se la funzione di trasferimento va a  $\infty$ ; quindi nel nostro caso

$$\frac{G(s)}{1 + G(s)} = \infty \Leftrightarrow 1 + G(s) = 0 \Leftrightarrow G(s) = -1$$

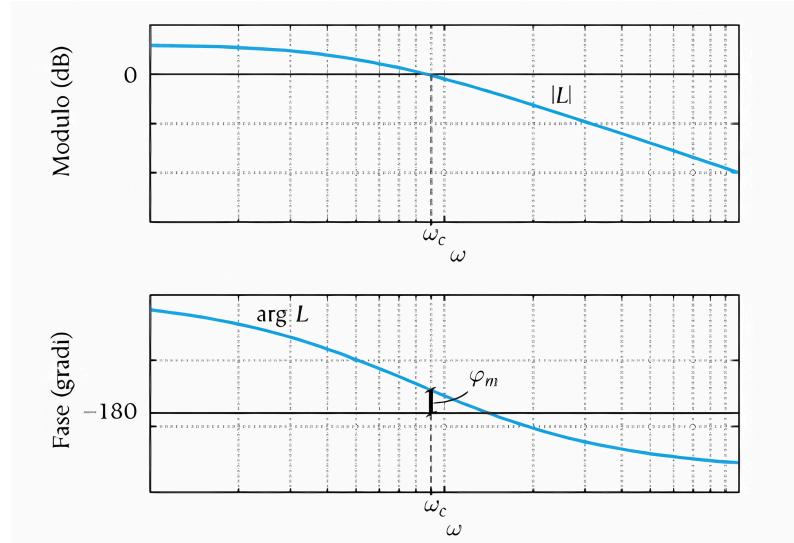
La funzione  $G(s) = -1$  rappresenta un guadagno del sistema pari a 1, o 0 dB, e una fase di  $-180^\circ$  (riproduce l'input ribaltato). Per questo se nel diagramma di Bode di un sistema, in corrispondenza dello 0 dB del diagramma delle ampiezze, il diagramma di fase vale  $-180^\circ$  il sistema è instabile.

Il margine di fase quindi, esprime quanto siamo lontani dall'instabilità, ed è definito come

$$M_f = 180^\circ + \arg(L(j\omega_c)) \text{ con } \omega_c \text{ tale che } |L(j\omega_c)|_{\text{dB}} = 0 \quad (8.5.42)$$

Nota:  $M_f = \arg(L(j\omega_c)) - (-180^\circ) = 180^\circ + \arg(L(j\omega_c))$ .

La seguente figura (e questa risorsa: [Gain and Phase Margins Explained](#)) può aiutare a comprendere meglio cos'è il margine di fase (in figura il margine di fase è indicato con  $\varphi_m$ )



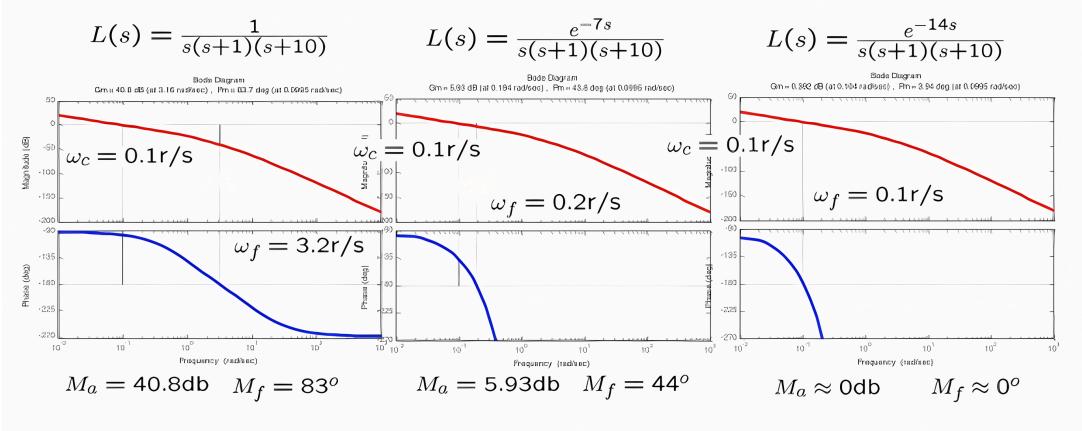
Il margine di fase indica il ritardo massimo che può essere introdotto nel sistema mantenendolo stabile.

Consideriamo un sistema che ritarda il suo input di  $\tau$ , che quindi ha funzione di trasferimento  $e^{-s\tau}$ . Il suo diagramma di Bode delle ampiezze è costante a 0 dB. Lo sfasamento è  $-\omega\tau$ , che nel diagramma di Bode delle fasi, in scala semi-logaritmica, ha un andamento di tipo esponenziale. Se  $L(s) = e^{-s\tau} \tilde{L}(s)$  la pulsazione critica  $\omega_c$  non cambia, è la stessa per entrambe. Un ritardo quindi riduce il margine di fase in quanto, per  $\omega = \omega_c$ , riduce la fase:

$$\arg(L(j\omega_c)) = \arg(\tilde{L}(j\omega_c)) = \tau\omega_c$$

quindi per essere asintoticamente stabile, un sistema deve poter tollerare un ritardo  $\tau$  che soddisfi la disequazione

$$\tau < \frac{M_f}{\omega_c}$$

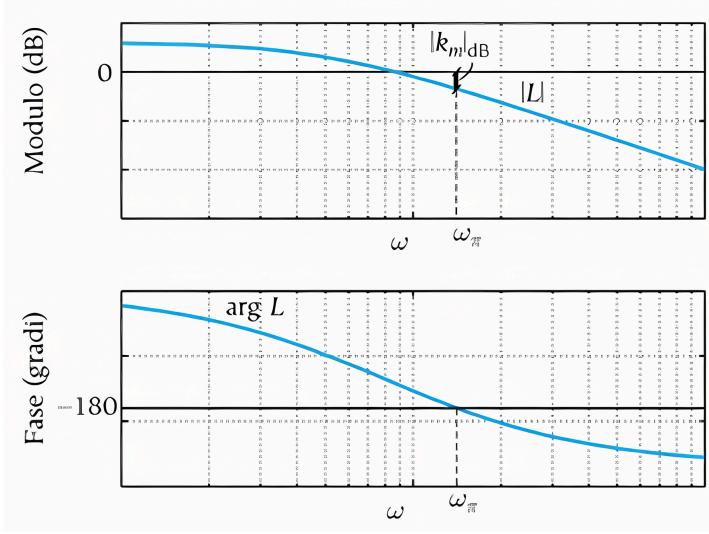


### 8.5.2 Margine di ampiezza

La definizione di margine di ampiezza parte dallo stesso assunto del margine di fase, solo che in questo caso prendiamo come riferimento la frequenza alla quale il diagramma delle fasi ha valore  $-180^\circ$ . Infatti anch'esso ci da una misura di quanto siamo distanti dall'instabilità.

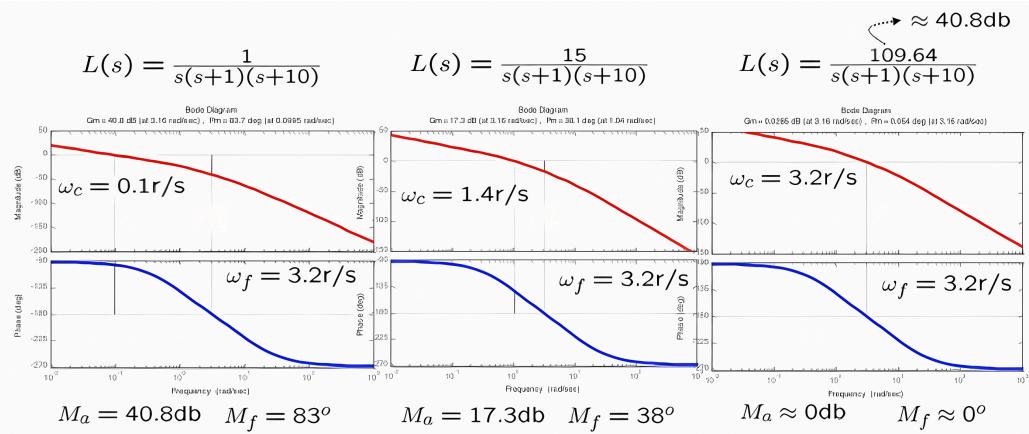
$$M_a = -|L(j\omega_\pi)|_{T(\text{dB})} \text{ con } \omega_\pi \text{ tale che } \arg(L(j\omega_\pi)) = -180^\circ$$

La seguente figura può aiutare a comprendere meglio cos'è il margine di ampiezza (in figura il margine di ampiezza è indicato con  $|k_m|_{T(\text{dB})}$ )



Il margine di ampiezza indica il guadagno massimo che può essere introdotto mantenendo il sistema asintoticamente stabile.

Supponendo di introdurre un ulteriore guadagno  $k$  nel sistema, esso rimane asintoticamente stabile per tutti i valori di  $k$  inferiori a  $M_a$ .



### 8.5.3 Casi patologici

Ci sono casi in cui  $M_f$  e  $M_a$  non sono definiti o non sono informativi:

- nel caso di **intersezioni multiple**, in cui il diagramma delle ampiezze attraversa l'asse a 0 dB più di una volta;
- nel caso di **assenza di intersezioni**, in cui il diagramma delle ampiezze non attraversa mai l'asse a 0 dB;
- nel caso di margini di ampiezza e fase con **segni discordi**, perché per essere informativi  $M_f$  e  $M_a$  devono avere lo stesso segno.

## 8.6 Criterio di Bode

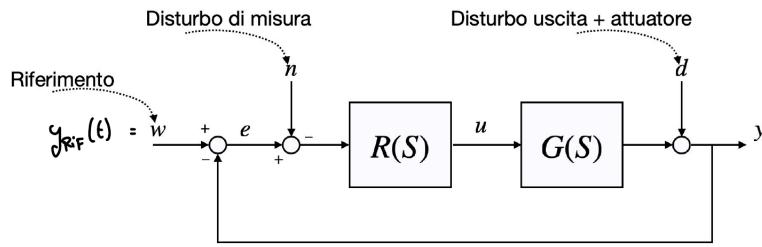
Si supponga che

- 1)  $L(s)$  non abbia poli a parte reale (strettamente) positiva
- 2) il diagramma di Bode del modulo di  $L(j\omega)$  attraversi una sola volta l'asse a 0 dB.

Allora, condizione necessaria e sufficiente perché il sistema retroazionato sia asintoticamente stabile è che risulti  $\mu > 0$  (con  $\mu$  guadagno statico di  $L(j\omega)$ ) e  $M_f > 0$ .

In questo modo quindi la stabilità del sistema in retroazione è determinata dalla lettura di un solo punto sul diagramma di Bode di  $L(j\omega)$ . Si rammenta che  $M_f$  e  $M_a$  in genere vanno considerati simultaneamente e forniscono una misura della robustezza rispetto a incertezze su  $L(s)$ .

## 8.7 Funzioni di sensitività



Ingressi del sistema in anello chiuso:

- $w(t)$  riferimento (andamento desiderato per  $y(t)$ )
- $d(t)$  disturbo in uscita
- $n(t)$  disturbo di misura

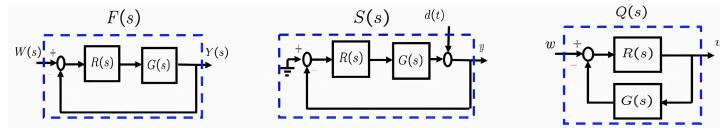
Uscite di interesse:

- $e(t) = w(t)y(t)$  errore di inseguimento
- $y(t)$  uscita controllata
- $u(t)$  ingresso di controllo del sistema in anello aperto (impianto)

Definiamo le *funzioni di sensitività* come funzioni di trasferimento tra ingressi e uscite di interesse.

$$\begin{cases} S(s) = \frac{1}{1 + R(s)G(s)} & \text{Funzione di sensitività} \\ F(s) = \frac{R(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)} & \text{Funzione di sensitività complementare} \\ Q(s) = \frac{R(s)}{1 + R(s)G(s)} & \text{Funzione di sensitività del controllo} \end{cases} \quad (8.7.43)$$

$$\begin{bmatrix} Y(s) \\ U(s) \\ E(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(s) & S(s) & -F(s) \\ Q(s) & -Q(s) & -Q(s) \\ S(s) & -S(s) & F(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W(s) \\ D(s) \\ N(s) \end{bmatrix}$$



Definiamo  $y_w(t)$  l'uscita con ingresso  $w(t)$ ,  $y_d(t)$  l'uscita con ingresso  $d(t)$  e  $y_n(t)$  l'uscita con ingresso  $n(t)$ ; per il principio di sovrapposizione degli effetti

$$y(t) = y_{w(t)} + y_{d(t)} + y_{n(t)}$$

### 8.7.1 Funzione di sensitività complementare

Prendiamo in considerazione solo l'ingresso  $w(t)$ .

Sappiamo dalla (8.1.41) che la funzione di trasferimento che lega  $Y_w(s)$  e  $W(s)$  è  $F(s)$

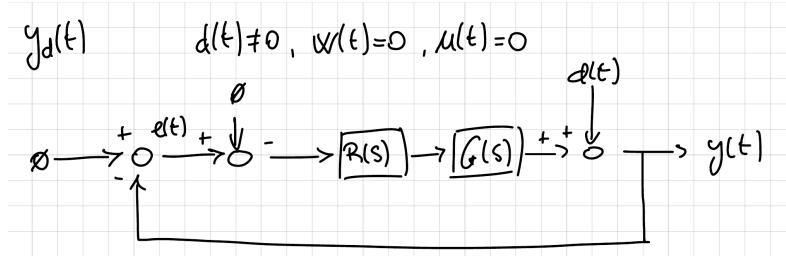
$$Y_w(s) = F(s)W(s)$$

e sappiamo che la  $F(s)$  è così definita

$$F(s) = \frac{R(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)} := \text{Funzione di sensitività complementare} \quad (8.7.44)$$

### 8.7.2 Funzione di sensitività

Prendiamo in considerazione solo l'ingresso  $d(t)$ .



$$\begin{aligned}
 Y_d(s) &= \underbrace{\frac{D(s)}{\mathcal{L}[d(t)]}}_{\mathcal{L}[e(t)]} + R(s)G(s) \underbrace{\frac{E_{d(s)}}{\mathcal{L}[e(t)]}}_{E_{d(s)}} \\
 &= D(s) + R(s)G(s)(0 - Y_d(s)) \quad \Longleftarrow E_{d(s)} = \underbrace{Y_w(s) - Y_d(s)}_0
 \end{aligned}$$

riarrangiamo i termini

$$\begin{aligned}
 Y_d(s) + R(s)G(s)Y_d(s) &= D(s) \\
 (1 + R(s)G(s))Y_d(s) &= D(s)
 \end{aligned}$$

quindi

$$Y_d(s) = \frac{1}{1 + R(s)G(s)}D(s)$$

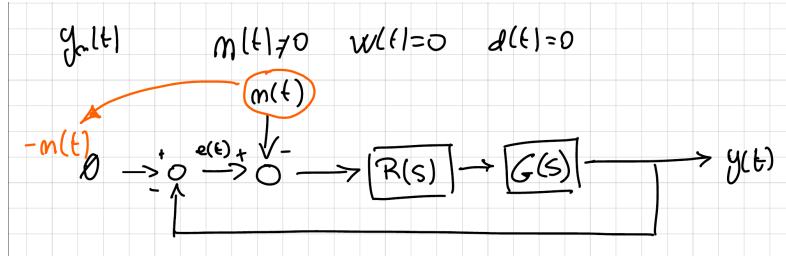
$$S(s) = \frac{1}{1 + R(s)G(s)} := \text{Funzione di sensitività} \quad (8.7.45)$$

siccome  $L(s) = R(s)G(s)$  la funzione di sensitività può essere scritta come

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)} \quad (8.7.46)$$

### 8.7.3 Funzione di sensitività del controllo

Prendiamo in considerazione solo l'ingresso  $n(t)$ .



$$\begin{aligned}
 Y_n(s) &= F(s)(-N(s)) \\
 &= -F(s)N(s)
 \end{aligned}$$

### 8.7.4 Considerazioni

**Stabilità** Il denominatore di tutte le funzioni di sensitività è lo stesso. Si ricordi che la stabilità è determinata dai poli della funzione di trasferimento. Questo è consistente con il fatto che la stabilità del sistema (retroazionato) non dipende dal particolare ingresso considerato.

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= Y_w(s) + Y_d(s) + Y_n(s) \\
 &= F(s)W(s) + S(s)D(s) - F(s)N(s)
 \end{aligned}$$

Per seguire fedelmente il riferimento  $w(t)$  vorremmo  $F(s) = 1$ , che è il caso ideale

$$Y_n(s) = -N(s) \quad S(s) = \frac{1}{1 + L(s)}$$

e per annullare l'effetto del disturbo  $d(t)$  vorremmo  $S(s) = 0$ . Tuttavia si nota che se annulliamo  $F(s)$  il disturbo  $n(t)$  non sarebbe per niente attenuato.

Inoltre  $S(s) + F(s) = 1$  sempre

$$\begin{aligned} S(s) + F(s) &= \frac{1}{1+L(s)} + \frac{L(s)}{1+L(s)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

è il motivo per cui  $F(s)$  viene chiamata funzione di sensitività complementare.

Noi lavoreremo in frequenze in modo da avere, per  $F(j\omega) = \frac{L(j\omega)}{1+L(j\omega)}$

- $|F(j\omega)| \approx 1$  a “basse” frequenze (inseguimento di  $w(t)$ )
- $|F(j\omega)| \approx 0$  ad “alte” frequenze (abbattimento di  $n(t)$ )

Quindi progetteremo  $R(j\omega)$  in modo che

- $|L(j\omega)| \gg 1$  a basse frequenze
- $|L(j\omega)| \ll 1$  ad alte frequenze

Ricordando che

- $w(t), d(t)$  hanno componenti frequenziali a “basse” frequenze
- $n(t)$  ha componenti frequenziali ad “alte” frequenze

### 8.7.5 Errori

$$\begin{aligned} E_w(s) &= W(s) - Y_w(s) & E_d(s) &= W(s) - Y_d(s) & E_n(s) &= W(s) - Y_n(s) \\ &= W(s) - F(s)W(s) & &= 0 - Y_d(s) & &= 0 - Y_n(s) \\ &= (1 - F(s))W(s) & &= -Y_d(s) & &= -Y_n(s) \\ S(s) = 1 - F(s) \implies & S(s)W(s) & &= -S(s)D(s) & &= -(-F(s)N(s)) \\ & & & & &= F(s)N(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_n(s) &= W(s) - Y_n(s) \\ &= 0 - Y_n(s) \\ &= -Y_n(s) \\ &= -(-F(s)N(s)) \\ &= F(s)N(s) \end{aligned}$$

### 8.7.6 Analisi in frequenza della funzione di sensitività complementare

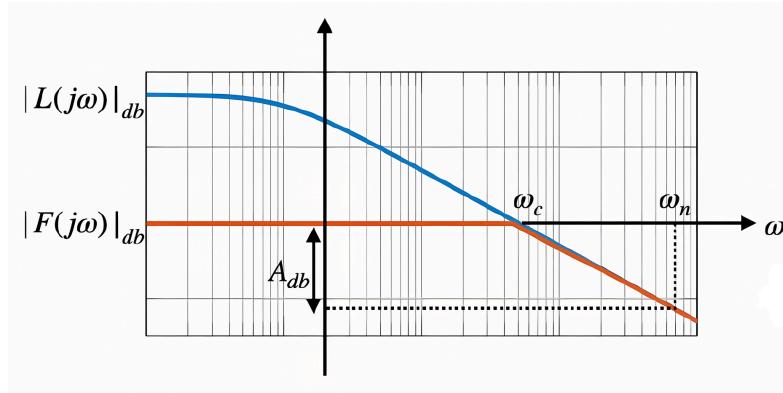
$$F(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$$

passiamo alle frequenze

$$\begin{aligned} |F(j\omega)| &= \left| \frac{L(j\omega)}{1+L(j\omega)} \right| \\ &= \frac{|L(j\omega)|}{|1+L(j\omega)|} \\ &\stackrel{\substack{\text{scelta di} \\ \text{design su } R(j\omega)}}{\implies} \approx \begin{cases} 1 & \omega \ll \omega_c \\ |L(j\omega)| & \omega \gg \omega_c \end{cases} \end{aligned}$$

Consideriamo  $\omega_c$  pulsazione di taglio

$$|F(j\omega)|_{T(\text{dB})} \approx \begin{cases} 0 \text{ dB} & \omega \leq \omega_c \\ |L(j\omega)|_{\text{dB}} & \omega > \omega_c \end{cases}$$



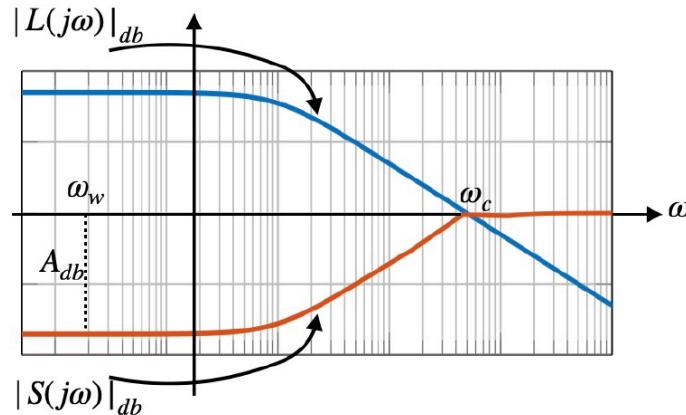
### 8.7.7 Analisi in frequenza della funzione di sensitività

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)}$$

$$|S(j\omega)| = \frac{1}{|1 + L(j\omega)|}$$

$$\approx \begin{cases} \frac{1}{|L(j\omega)|} & \omega \leq \omega_c \\ 1 & \omega > \omega_c \end{cases}$$

$$|S(j\omega)|_{\text{dB}} \approx \begin{cases} -|L(j\omega)|_{\text{dB}} & \omega \leq \omega_c \\ 0 \text{ dB} & \omega > \omega_c \end{cases}$$



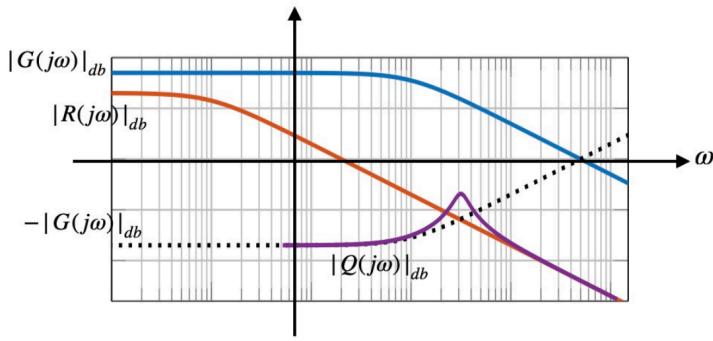
### 8.7.8 Analisi in frequenza della funzione di sensitività del controllo

$$Q(s) = \frac{R(s)}{1 + R(s)G(s)}$$

$$|Q(j\omega)| = \left| \frac{R(s)}{1 + R(s)G(s)} \right|$$

$$\approx \begin{cases} \frac{1}{G(j\omega)} & \omega \leq \omega_c \\ R(j\omega) & \omega > \omega_c \end{cases}$$

$$|Q(j\omega)|_{\text{dB}} \approx \begin{cases} -|G(j\omega)|_{\text{dB}} & \omega \leq \omega_c \\ |R(j\omega)|_{\text{dB}} & \omega > \omega_c \end{cases}$$

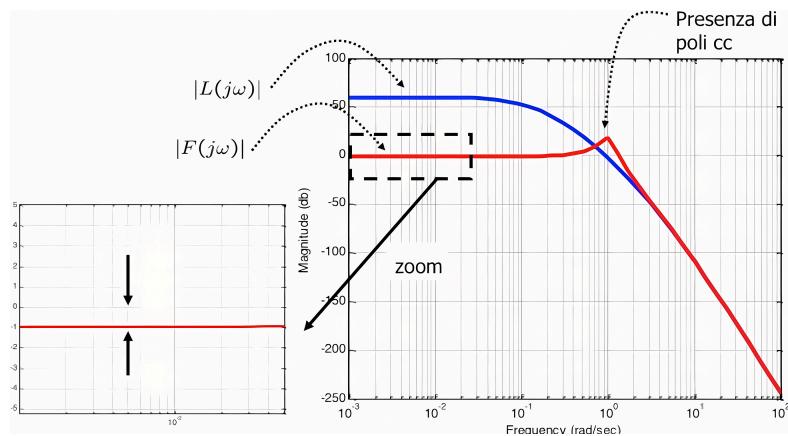


A basse frequenze il modulo di  $Q(j\omega)$  dipende da  $G(j\omega)$ , quindi non possiamo influenzarlo con il regolatore. Occorre evitare valori di  $\omega_c$  troppo elevati.

### 8.7.9 Poli complessi coniugati di $F(s)$ (sensitività complementare)

La funzione di sensitività complementare può avere una coppia di poli c.c. dominanti

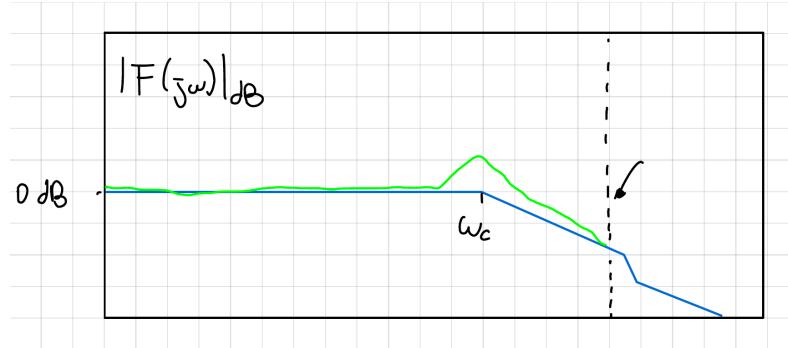
$$L(s) = \frac{20}{(1+10s)(1+2s)(1+0.2s)}$$



Mettiamo in relazione il picco di risonanza di  $|F(j\omega)|$  con lo smorzamento  $\xi$  associato, assumendo che  $\omega_n \approx \omega_C$ .

$$|F(j\omega)| \approx \begin{cases} 0 \text{ dB} & \omega \leq \omega_c \\ |L(j\omega)|_{\text{dB}} & \omega > \omega_c \end{cases}$$

Approssimazione di  $F(s)$  a poli complessi coniugati dominanti:



Assumendo  $\omega_n \approx \omega_c$ , la funzione di sensitività complementare vale (si veda la 7.8.13)

$$|F(j\omega_c)| \approx \frac{1}{2\xi}$$

dove  $\xi$  è lo smorzamento dei poli complessi coniugati.

Altrimenti, tenendo conto che il modulo di  $|L(j\omega)|$  alla frequenza di taglio  $\omega_c$ , come si vede dal grafico, vale 0 dB (quindi 1)

$$\begin{aligned}
|F(j\omega_c)| &= \frac{\overbrace{|L(j\omega_c)|}^1}{|1 + L(j\omega_c)|} \\
&= \frac{1}{|1 + \underbrace{e^{j\varphi_c}}_{1 \cdot e^{j\varphi_c}}|} \\
&= \frac{1}{|1 + \cos \varphi_c + j \sin \varphi_c|} \\
&= \frac{1}{\sqrt{(1 + \cos \varphi_c)^2 + (\sin \varphi_c)^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 \varphi_c + \sin^2 \varphi_c + 2 \cos \varphi_c}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2(1 + \cos \varphi_c)}}
\end{aligned}$$

dalla trigonometria sappiamo che  $\cos(\varphi_c) = -\cos(\pi + \varphi_c)$  e, ricordando la definizione di [margini di fase \(8.5.42\)](#)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2(1 + \cos(\varphi_c))}} &= \frac{1}{\sqrt{2(1 - \cos M_f^{\text{rad}})}} \\
1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \alpha \implies &= \frac{1}{\sqrt{4 \sin^2 \frac{M_f^{\text{rad}}}{2}}} \\
&= \frac{1}{2 \sin \frac{M_f^{\text{rad}}}{2}}
\end{aligned}$$

Uguagliando le due espressioni si ha

$$\xi = \sin \frac{M_f^{\text{rad}}}{2} \approx \frac{M_f^{\text{rad}}}{2}$$

si è potuto approssimare il seno perché la pulsazione di taglio è molto bassa.

Convertendo i radianti in gradi

$$\begin{aligned}
\xi &= \frac{M_f}{2} \frac{\pi}{180} \\
&= M_f \cdot \frac{\pi}{360} \\
&= M_f \cdot \frac{3.14}{3.6 \times 100} \\
&\approx \frac{M_f}{100}
\end{aligned}$$

questa equazione mette in relazione la  $F(j\omega)$  e la  $L(j\omega)$ .

## 8.8 Analisi statica: errore a un gradino

Sia  $e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$  con  $e(t) = w(t) - y(t)$  errore in risposta a un gradino  $w(t) = W1(t)$ .

Utilizzando il [teorema del valore finale 3.4.10](#)

$$\begin{aligned}
e_\infty &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \\
E_w(s) = S(s)W(s) &\implies \lim_{s \rightarrow 0} sS(s)W(s) \\
\mathcal{L}[W1(t)] = \frac{W}{s} &\implies \lim_{s \rightarrow 0} sS(s)\frac{W}{s} \\
&= W \lim_{s \rightarrow 0} S(s)
\end{aligned}$$

Sia  $L(s) = \frac{N_L(s)}{D_L(s)} = \frac{N_L(s)}{s^g D'_L(s)}$  con  $N_L(0) = \mu$  e  $D'_L(0) = 1$ , allora

$$\begin{aligned}
\lim_{s \rightarrow 0} S(s) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{D_L(s)}{N_L(s) + D_L(s)} \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^g D'_L(s)}{N_L(s) + s^g D'_L(s)} \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^g}{\mu + s^g}
\end{aligned}$$

Si ha quindi

$$e_\infty = W \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^g}{\mu + s^g} = \begin{cases} \frac{W}{1 + \mu} & g = 0 \\ 0 & g > 0 \end{cases}$$

### 8.9 Analisi statica: errore a ingressi $\frac{W}{s^k}$

Sia  $e_\infty = \lim_{s \rightarrow \infty} e(t)$  con  $e(t) = w(t) - y(t)$  errore in risposta a un ingresso con trasformata  $W(s) = \frac{W}{s^k}$

$$\begin{aligned}
e_\infty &= \lim_{s \rightarrow 0} sS(s)\frac{W}{s^k} \\
&= W \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{g-k+1}}{\mu + s^g} = \begin{cases} \infty & g < k-1 \\ \frac{W}{\mu} & g = k-1 \\ 0 & g > k-1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Quindi

- se  $g < k-1$  l'errore diverge
- se  $g = k-1$  l'errore a regime è finito e diminuisce all'aumentare di  $\mu$
- se  $g > k-1$  l'errore a regime è nullo

**Nota:** le precedenti valutazioni sono valide solo se il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

Affinché l'errore a regime a  $W(s) = \frac{W}{s^k}$  sia nullo occorre che  $L(s)$  abbia un numero di poli almeno pari a  $k$  (principio del modello interno).

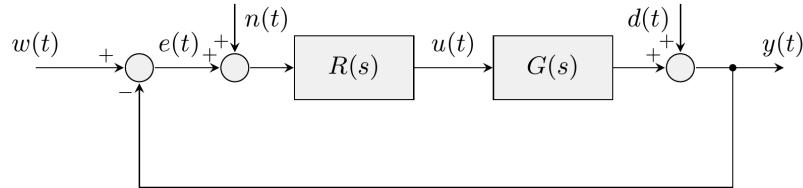
### 8.10 Principio del modello interno

Possiamo generalizzare il risultato precedente come segue.

Affinché un segnale di riferimento (rispetto un disturbo di misura) con una componente spettrale alla frequenza  $\omega_0$  sia inseguito a regime

## 9 Sistemi di controllo: progetto del regolatore

Consideriamo il seguente schema di controllo in retroazione:



### 9.1.1 Riepilogo specifiche

#### Stabilità robusta rispetto a incertezze

Stabilità in presenza di errori di modello o incertezze di parametri.

#### Precisione statica

Sia  $e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$  il valore a regime dell'errore in risposta a riferimenti  $w(t)$  o disturbi in uscita  $d(t)$  "canonici"; la specifica da seguire è

$$|e_\infty| \leq e^* \quad \text{oppure} \quad e_\infty = 0$$

#### Precisione dinamica

Tipicamente specifiche in termini di sovraelongazione e tempo di assestamento massimi; le specifiche da seguire sono

$$S\% \leq S^* \quad T_{a,\varepsilon} \leq T^*$$

#### Attenuazione disturbo in uscita

Il disturbo in uscita  $d(t)$ , con una banda limitata in un range di pulsazioni  $[w_{d,\min}, w_{d,\max}]$ , deve essere attenuato di  $A_d$  dB ( $A_d > 0$ ).

#### Attenuazione disturbo di misura

Il disturbo di misura  $n(t)$ , con una banda limitata in un range di pulsazioni  $[w_{n,\min}, w_{n,\max}]$ , deve essere attenuato di  $A_n$  dB ( $A_n > 0$ ).

**Nota:** in applicazioni ingegneristiche in genere  $w_{d,\max} \ll w_{n,\min}$

#### Moderazione variabile di controllo $u(t)$

Contenimento dell'ampiezza della variabile di controllo  $u$  in ingresso al sistema fisico (impianto).

#### Fisica realizzabilità del regolatore $R(s)$

Il regolatore deve essere un sistema proprio, quindi il grado relativo (differenza tra poli e zeri) deve essere maggiore o uguale a zero.

## 9.2 Specifiche in termini di guadagno d'anello

### 9.2.1 Stabilità robusta rispetto a incertezze

Stabilità in presenza di errori di modello o incertezze di parametri; ad esempio massimo ritardo temporale  $\tau_{\max}$  o massima incertezza sul guadagno statico  $\Delta\mu_{\max}$ .

### 9.2.2 Specifica su $L(j\omega)$

$$M_f \geq M_f^*$$

### 9.2.3 Precisione statica

Per soddisfare tali specifiche va considerata l'analisi statica effettuata sulla funzione di sensitività  $S(s)$ .

Ad esempio:  $|e_\infty| \leq e^*$  in risposta a un gradino  $w(t) = W1(t)$ ,  $d(t) = D1(t)$  con  $|W| \leq W^*$  e  $|D| \leq D^*$ .

$$\begin{aligned} e_\infty &= \frac{W}{1 + \mu} + \frac{D}{1 + \mu} \\ &= \frac{D + W}{1 + \mu} \\ &\approx \frac{D + W}{\mu} \end{aligned}$$

$$\mu = L(0) \geq \frac{D^* + W^*}{e^*}$$

Altro esempio:  $e_\infty = 0$  in risposta a  $W(s) = \frac{W}{s^k}$  e/o  $D(s) = \frac{D}{s^k}$

$L(s)$  deve avere  $k$  poli nell'origine

Se  $|e_\infty| \leq e^*$  in risposta a  $W(s) = \frac{W}{s^k}$  e  $D(s) = \frac{D}{s^k}$  allora

$$k - 1 \text{ poli in } L(s) \text{ e } \mu \geq \frac{D^* + W^*}{e^*}$$

Se  $e_\infty = 0$  in risposta a un disturbo sull'attuatore  $D_a(s) = \frac{D_a}{s^k}$ , allora

$$D(s) = D_a(s)G(s)$$

$$E(s) = S(s)G(s)D_a(s)$$

quindi

$k$  poli nell'origine in  $R(s)$

#### 9.2.4 Precisione dinamica

Specifiche:  $S\% \leq S^*$  e  $T_{a,\varepsilon} \leq T^*$ .

Se progettiamo  $L(j\omega)$  in modo che  $F(j\omega)$  abbia una coppia di poli complessi coniugati dominanti in  $\omega_n \approx \omega_c$  con coefficiente di smorzamento  $\xi$  allora, come abbiamo visto nella 8.7.9

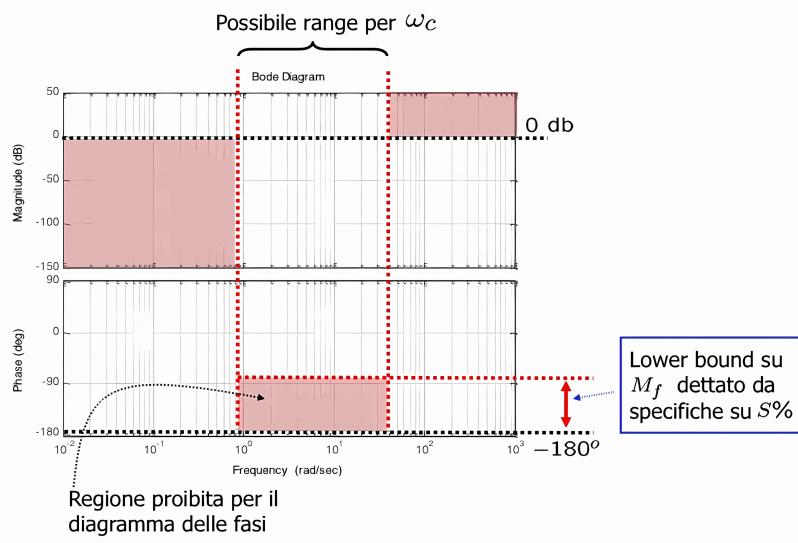
$$\xi \approx \frac{M_f}{100}$$

Perché  $S\% \leq S^*$  allora  $\xi \geq \xi^*$ , con  $S^* = e^{\frac{-\pi\xi^*}{\sqrt{1-(\xi^*)^2}}}$ , e quindi

$$M_f \geq 100\xi^*$$

Perché  $T_{a,1} \leq T^*$  allora, ricordando la (6.2.31),  $\xi\omega_n \geq \frac{4.6}{T^*}$

$$M_f\omega_c \geq \frac{460}{T^*}$$



La zona proibita per il diagramma di fase va evitata **solo a  $\omega_c$** .

#### 9.2.5 Attenuazione disturbo in uscita $d(t)$

Il disturbo in uscita  $d(t)$ , con una banda limitata in un range di pulsazioni  $[\omega_{d,\min}, \omega_{d,\max}]$ , deve essere attenuato di  $A_d$  dB. (Nota:  $A_d > 0$ ).

Ricordiamo che se  $d(t) = D \cos(\omega t + \varphi)$  allora

$$y(t) = |S(j\omega)|D \cos(\omega t + \varphi + \arg(S(j\omega)))$$

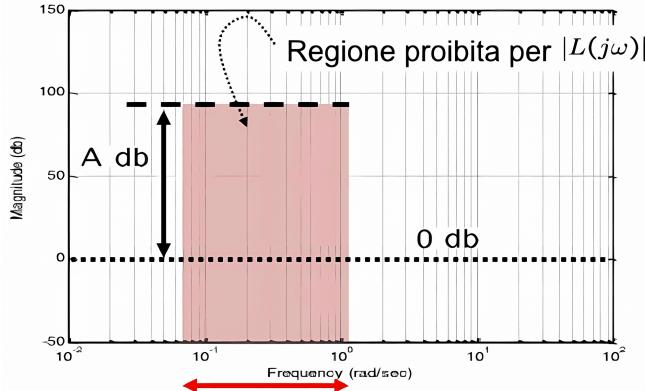
e che, grazie all' analisi in frequenza della funzione di sensitività 8.7.7

$$|S(j\omega)|_{\text{dB}} \approx \begin{cases} -|L(j\omega)|_{\text{dB}} & \omega \leq \omega_c \\ 0 & \omega > \omega_c \end{cases}$$

Da specifica vogliamo  $|S(j\omega)|_{\text{dB}} \leq -A_d$  dB. Poiché  $\omega_{d,\max} \ll \omega_c$  si ha

$$|L(j\omega)|_{\text{dB}} \geq A_d \text{ dB}$$

Ad esempio, se  $d(t)$  deve essere attenuato di 20 dB allora  $|L(j\omega)|_{\text{dB}} \geq 20$  dB.



### 9.2.6 Attenuazione disturbo di misura $n(t)$

Il disturbo di misura  $n(t)$ , con una banda limitata in un range di pulsazioni  $[\omega_n, \min, \omega_n, \max]$ , deve essere attenuato di  $A_n$  dB.

Ricordiamo che se  $n(t) = N \cos(\omega t + \varphi)$  allora

$$y(t) = |F(j\omega)|N \cos(\omega t + \varphi - \arg(F(j\omega)))$$

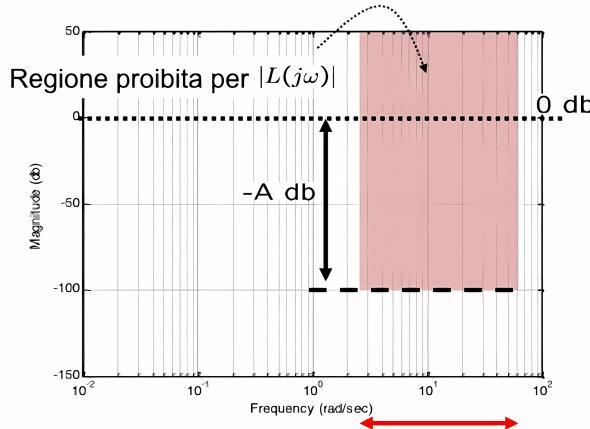
e che, grazie all' analisi in frequenza della funzione di sensitività complementare 8.7.6

$$|F(j\omega)|_{\text{dB}} \approx \begin{cases} 0 & \omega \leq \omega_c \\ |L(j\omega)|_{\text{dB}} & \omega > \omega_c \end{cases}$$

Da specifica vogliamo  $|F(j\omega)|_{\text{dB}} \leq -A_n$  dB. Poiché  $\omega_{n,\min} \gg \omega_c$ , si ha

$$|L(j\omega)|_{\text{dB}} \leq -A_n \text{ dB}$$

Ad esempio se  $n(t)$  deve essere attenuato di 20 dB allora  $|L(j\omega)|_{\text{dB}} \leq -20$  dB.



### 9.2.7 Moderazione variabile di controllo $u(t)$

Contenimento dell'ampiezza della variabile di controllo  $u$  in ingresso al sistema fisico (impianto).

Ricordiamo che se  $w(t) = W \cos(\omega t + \varphi)$  allora

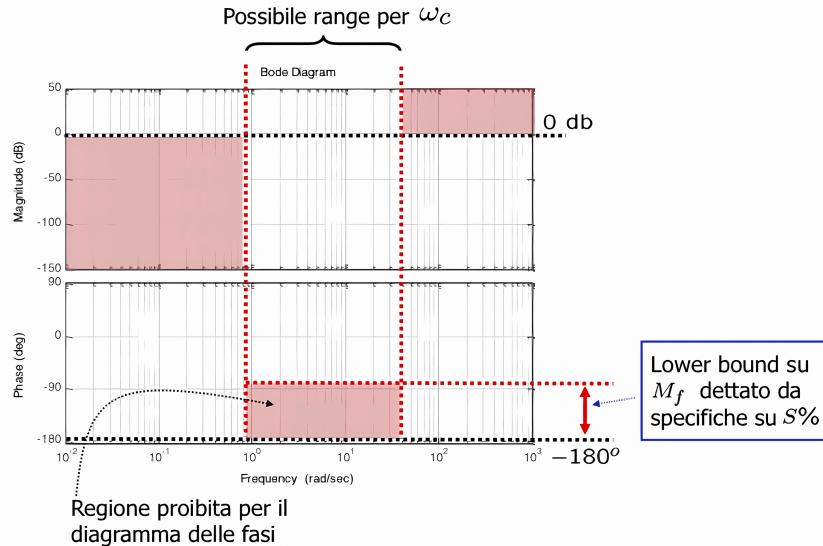
$$u(t) = |Q(j\omega)|W \cos(\omega t + \varphi + \arg(Q(j\omega)))$$

e che, grazie all' analisi in frequenza della funzione di sensitività del controllo 8.7.8

$$|Q(j\omega)|_{\text{dB}} \approx \begin{cases} -|G(j\omega)|_{\text{dB}} & \omega \leq \omega_c \\ |R(j\omega)|_{\text{dB}} & \omega > \omega_c \end{cases}$$

Poiché vogliamo contenere  $|Q(j\omega)|_{\text{dB}}$  e non abbiamo controllo su  $G(j\omega)$  dobbiamo

- limitare  $\omega_c$ ;
- realizzare  $R(j\omega)$  passa-basso.



Il limite superiore su  $\omega_c$  può essere determinato dalle specifiche sulla variabile di controllo  $u(t)$ .

### 9.2.8 Fisica realizzabilità del regolatore

Il regolatore deve essere un sistema proprio, quindi il grado relativo (differenza poli-zeri) deve essere maggiore o uguale a zero.

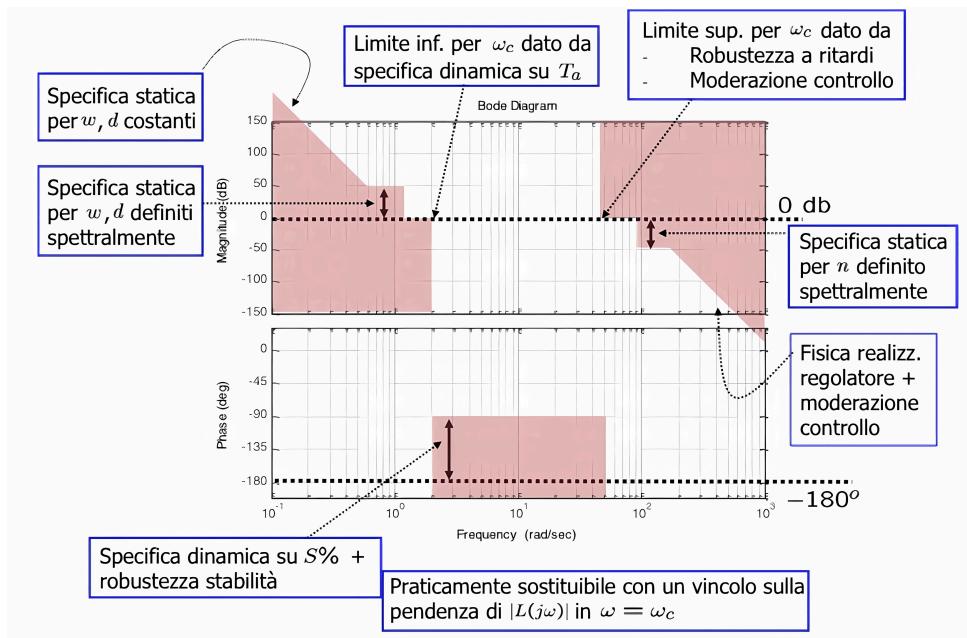
A pulsazioni elevate la pendenza  $-k_L$  dB/dec di  $|L(j\omega)|_{\text{dB}}$  è determinata dalla differenza tra poli (ciascuno contribuisce con pendenza  $-20\text{dB/dec}$ ) e zeri (ciascuno contribuisce con pendenza  $20\text{dB/dec}$ ).

Se a pulsazioni elevate  $|G(j\omega)|_{\text{dB}}$  ha pendenza  $-k_G$  dB/dec allora

$$-k_L \leq -k_G$$

perché sappiamo che  $L(s) = R(s)G(s)$  e che i poli (che fanno diminuire la pendenza) di  $R(s)$  sono maggiori o uguali agli zeri, quindi moltiplicando  $R(s)$  con  $G(s)$  otteniamo una funzione di trasferimento con una pendenza uguale o minore di quella di  $G(s)$ .

## 9.2.9 Riepilogo specifiche



## 9.3 Sintesi del regolatore

### 9.3.1 Loop Shaping

Il *loop shaping*, o sintesi per tentativi, consiste nel “dare forma” alla  $L(j\omega)$  in modo che:

- il diagramma delle ampiezze non attraversi le regioni proibite in bassa e alta frequenza;
- per  $\omega = \omega_c$  rispetti il vincolo sul margine di fase.

procedendo per tentativi basati su opportune considerazioni.

## 9.4 Struttura del regolatore

È conveniente dividere il progetto in due fasi fattorizzando  $R(s)$  come

$$R(s) = R_s(s)R_d(s)$$

cioè come prodotto di due regolatori, uno statico e uno dinamico.

**Regolatore statico:**

$$R_s(s) = \frac{\mu_s}{s^k}$$

progettato per soddisfare precisione statica e attenuazione dei disturbi  $d(t)$ .

**Regolatore dinamico:**

$$R_d(s) = \mu_d \frac{\prod_i (1 + \tau_i s) \prod_i \left(1 + 2 \frac{\zeta_i}{\alpha_{n,i}} s + \frac{s^2}{\alpha_{n,i}^2}\right)}{\prod_i (1 + T_i s) \prod_i \left(1 + 2 \frac{\xi_i}{\omega_{n,i}} s + \frac{s^2}{\omega_{n,i}^2}\right)}$$

progettato per soddisfare stabilità robusta, precisione dinamica, attenuazione dei disturbi  $n(t)$ , moderazione dell’ingresso di controllo e fisica realizzabilità.

**Nota:**  $\mu_d$  può essere scelto solo se  $\mu_s$  non è stato imposto.

## 9.5 Sintesi del regolatore statico

Il guadagno  $\mu_s$  e il numero di poli nell’origine in  $R_s(s)$  dipende dalla specifica sull’errore a regime  $e_\infty$  in risposta a segnali canonici.

Ad esempio, se dobbiamo soddisfare la specifica  $|e_\infty| \leq e^*$  in risposta ai gradini  $w$  e  $d$ , con  $G(s)$  senza poli nell’origine:

possiamo scegliere

$$R(s) = \mu_s \geq \mu^*$$

oppure

$$R(s) = \frac{\mu_s}{s}$$

nel secondo caso potremo poi scegliere  $\mu_d$  "liberamente" purché consenta di rispettare i vincoli sull'attenuazione di  $d$ .

## 9.6 Sintesi del regolatore dinamico

### 9.6.1 Obiettivi

La progettazione di  $R_d(s)$  mira a

- 1) imporre  $\omega_c$  in un certo intervallo;
- 2) garantire un dato margine di fase  $M_f$ , cioè  $\arg(L(j\omega_c)) \geq -180 + M_f$ ;
- 3) garantire una certa attenuazione e pendenza di  $L(j\omega)$ , e anche di  $R(j\omega)$  a pulsazioni elevate.

Per la **terza specifica** è sufficiente introdurre poli del regolatore a pulsazioni elevate.

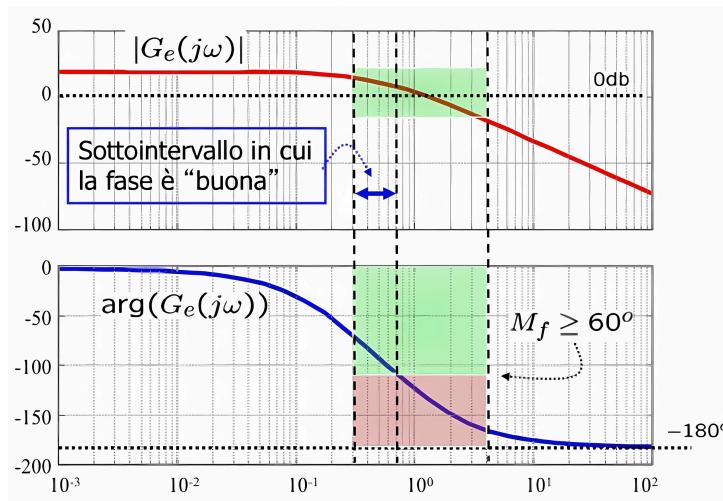
Utilizzeremo la sintesi per tentativi individuando dei possibili scenari in base al diagramma di

$$G_e(s) = R_s(s)G(s)$$

che chiameremo **sistema esteso**.

### 9.6.2 Scenario A

Nell'intervallo ("centrale") di pulsazioni ammissibili per la pulsazione di attraversamento  $\omega_c$  esiste un sotto-intervallo in cui la fase di  $G_e(j\omega)$  rispetta il vincolo sul margine di fase.



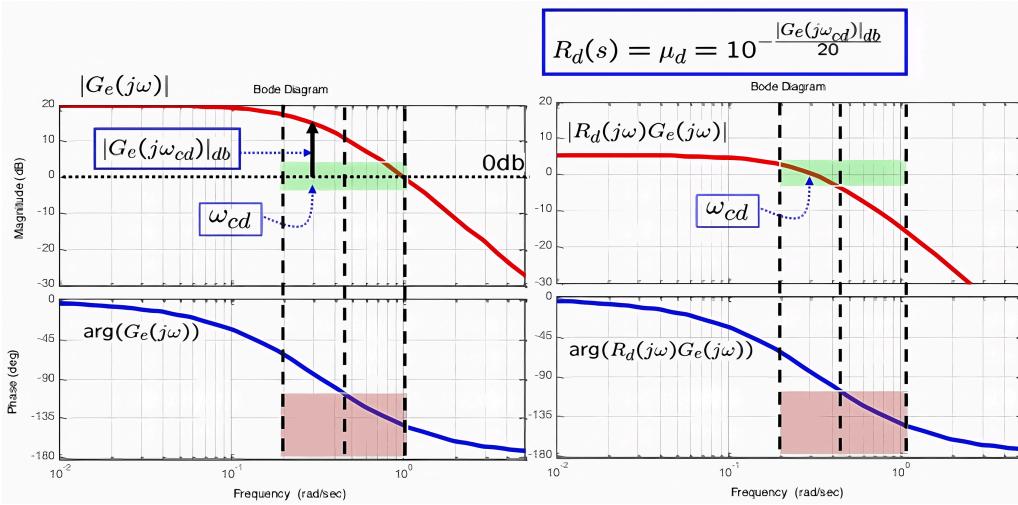
#### Obiettivo:

- attenuare (selettivamente) il diagramma delle ampiezze (traslarlo in basso) in modo che  $\omega_c$  ricada nel sotto-intervallo in cui in vincolo sul margine di fase è rispettato;
- alterare meno possibile la fase.

#### Azioni possibili:

- Se  $\mu_d$  libero, allora scegliere  $R_d(s) = \mu_d$  con  $\mu_d < 1$ ;
- Se  $\mu_d$  bloccato (vincolato dalla scelta di  $\mu_s$ ), allora attenuare mediante inserimento di poli e zeri in  $R_d(s)$ .

### 9.6.2.1 Caso $\mu_d$ libero

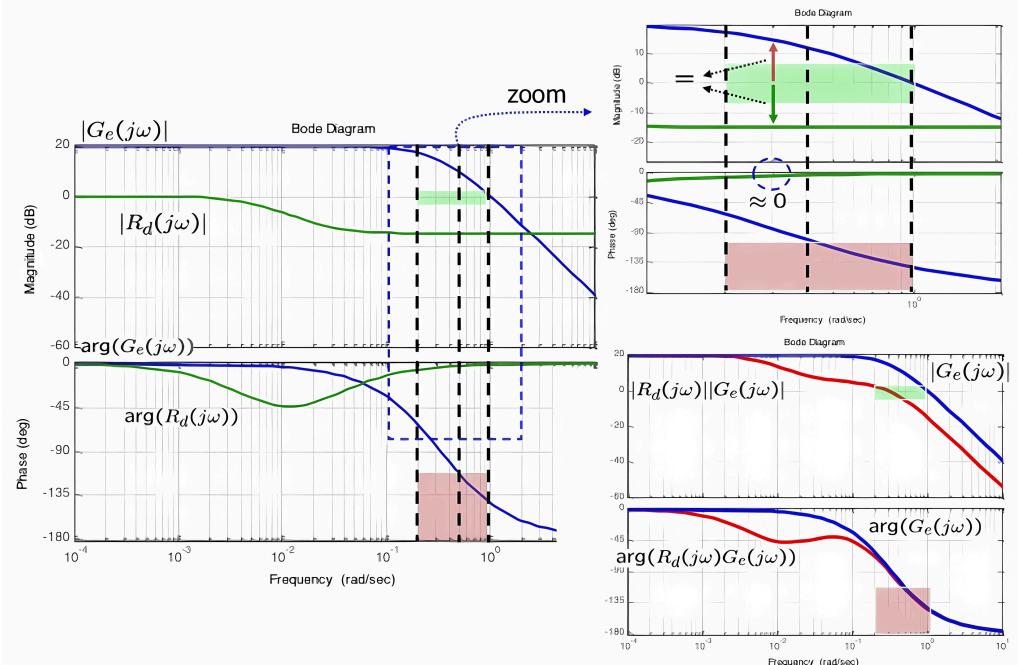
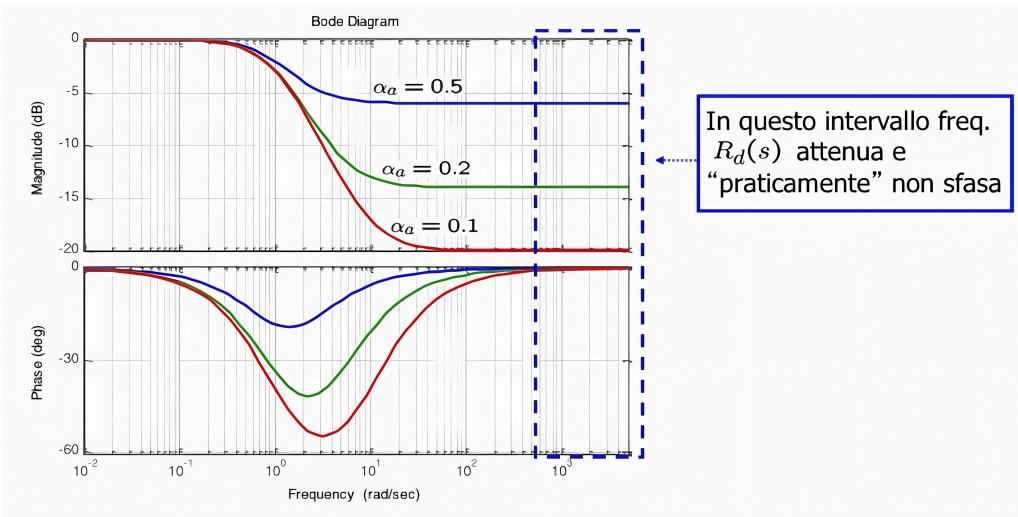


### 9.6.2.2 Caso $\mu_d$ vincolato

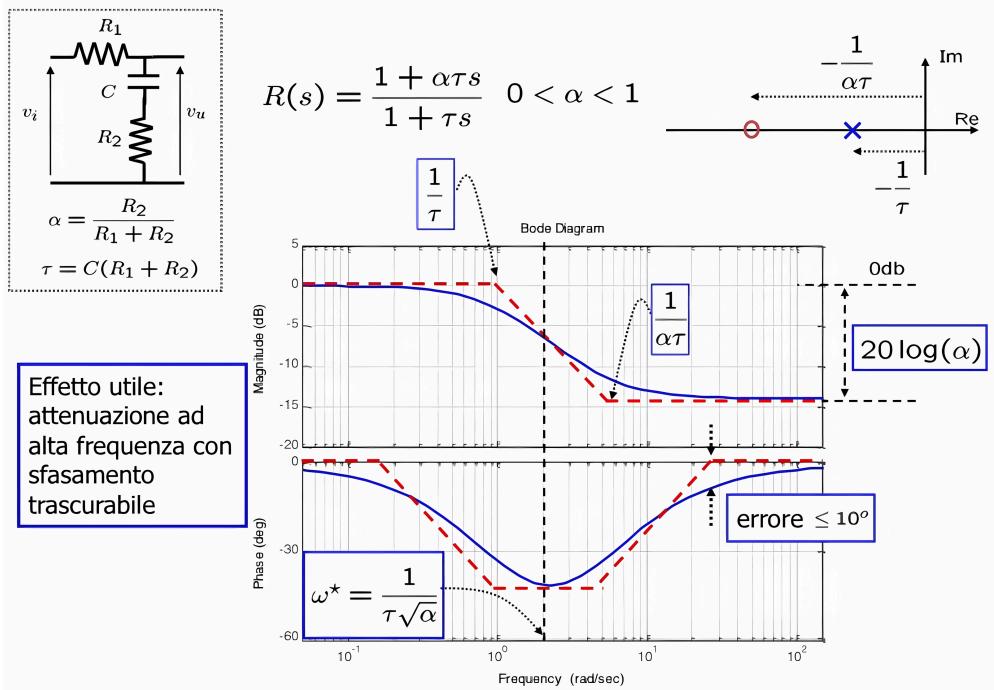
Per attenuare solo nel range di pulsazioni selezionato progettiamo

$$R_d(s) = \frac{1 + \alpha \tau s}{1 + \tau s} \quad 0 < \alpha < 1$$

cioè una rete ritardatrice



### 9.6.3 Rete ritardatrice



#### 9.6.3.1 Tuning approssimato

Il nostro obiettivo è calcolare  $\alpha$  e  $\tau$  in modo che  $L(j\omega)$  abbia una pulsazione di attraversamento  $\omega_c^*$  e valga  $\arg(L(j\omega_c^*)) \approx \arg(G_e(j\omega_c^*))$ .

Procediamo quindi a

- scegliere  $\alpha$  tale che  $20 \log \alpha \approx -|G_e(j\omega_c^*)|_{\text{dB}}$ ;
- scegliere  $\tau$  tale che  $\frac{1}{\alpha\tau} \leq \frac{\omega_c^*}{10}$ .

#### 9.6.3.2 Formule di inversione

Dobbiamo calcolare  $\alpha$  e  $\tau$  in modo che alla pulsazione  $\omega_c^*$  (pulsazione a cui vorremmo  $|L(j\omega)|_{\text{dB}} = 0$ ) la rete ritardatrice abbia una attenuazione  $o < M^* < 1$  e uno sfasamento  $\frac{\pi}{2} < \varphi^* < 0$ , ovvero

$$R_d(j\omega_c^*) = M^* e^{j\varphi^*}$$

Poniamo

$$\begin{aligned} \frac{1 + j\alpha\tau\omega_c^*}{1 + j\tau\omega_c^*} &= M^*(\cos \varphi^* + j \sin \varphi^*) \\ \Rightarrow 1 + j\alpha\tau\omega_c^* &= M^*(\cos \varphi^* + j \sin \varphi^*)(1 + j\tau\omega_c^*) \end{aligned}$$

Uguagliano parte reale e parte immaginaria:

$$\begin{aligned} 1 &= M^* \cos \varphi^* - M^* \tau \omega_c^* \sin \varphi^* \\ \alpha \tau \omega_c^* &= M^* \tau \omega_c^* \cos \varphi^* + M^* \sin \varphi^* \end{aligned}$$

Arriviamo così alle formule di inversione

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{\cos \varphi^* - \frac{1}{M^*}}{\omega_c^* \sin \varphi^*} & \alpha \tau &= \frac{M^* - \cos \varphi^*}{\omega_c^* \sin \varphi^*} \end{aligned}$$

**Nota:** perché si abbia  $\alpha > 0$  occorre che  $M^* < \cos \varphi^*$ .

Quindi, noi vogliamo che  $|L(j\omega)|_{\text{dB}} = 0$  per  $\omega = \omega_c^*$ . Per farlo scegliamo una  $\omega_c^*$  e ricaviamo il  $M_f^*$  dalle specifiche.

Calcoliamo quindi  $M^*$  e  $\varphi^*$  imponendo

$$|G_e(j\omega_c^*)|_{\text{dB}} + 20 \log M^* = 0$$

$$M_f^* = 180^\circ + \arg(G_e(j\omega_c^*)) + \varphi^*$$

verificando che i risultati trovati soddisfino le relazioni seguenti

$$0 < M^* < 1$$

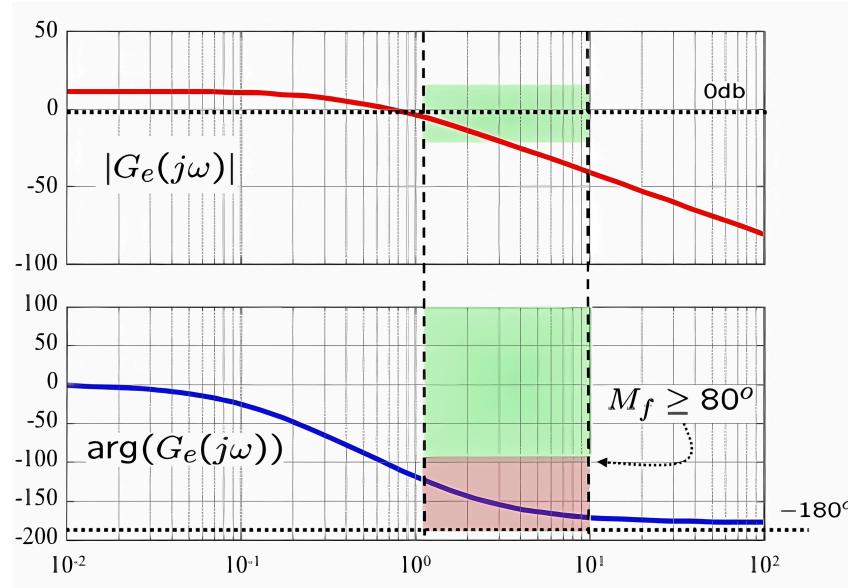
$$\frac{\pi}{2} < \varphi^* < 0$$

$$M^* < \cos \varphi^*$$

e, infine, calcolare  $\alpha$  e  $\tau$  mediante formule di inversione.

#### 9.6.4 Scenario B

Nell'intervallo "centrale" di pulsazioni ammissibili per la pulsazione di attraversamento  $\omega_c$  **NON** esistono pulsazioni in cui la fase di  $G_e(j\omega)$  rispetta il vincolo sul margine di fase.



#### Obiettivo:

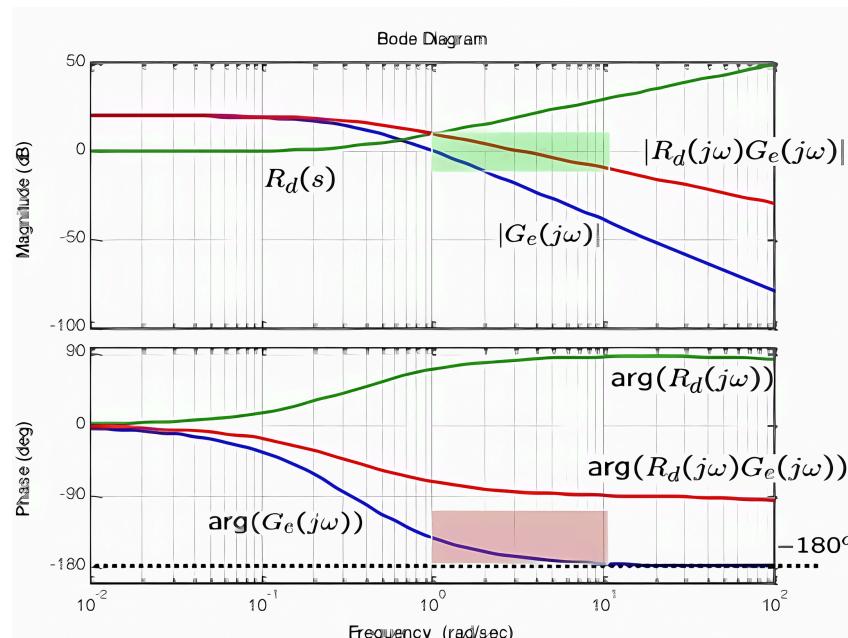
- modificare il diagramma delle fasi (aumentare la fase) nell'intervallo in modo che il vincolo sul margine di fase sia rispettato;
- amplificare meno possibile l'ampiezza.

#### Azioni possibili:

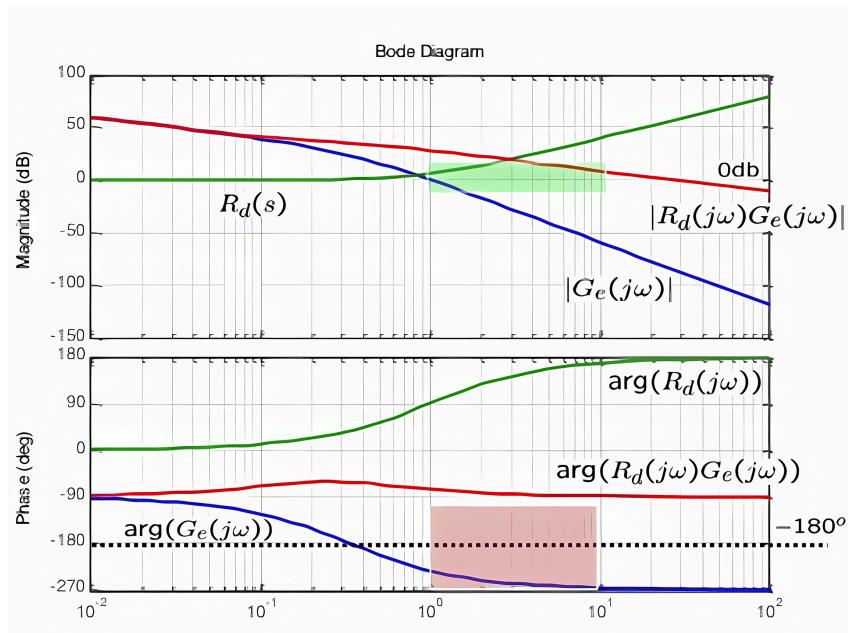
- aggiungere uno o più zeri (a pulsazioni precedenti quella di attraversamento desiderata) per aumentare la fase;
- aggiungere uno o più poli a pulsazioni più alte per la fisica realizzabilità e per evitare una eccessiva amplificazione.

Definizione di poli e zeri: [3.2.2](#).

#### 9.6.4.1 Aggiunta di uno zero



### 9.6.4.2 Aggiunta di due zeri



### 9.6.4.3 Progettazione

Tenendo conto dell'aggiunta di uno o due poli si può progettare  $R_d(s)$  come segue.

Si realizza una rete anticipatrice

$$R_d(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s} \quad 0 < \alpha < 1$$

O, nel caso sia necessario un anticipo di fase maggiore, si possono aggiungere due zeri

$$R_d(s) = \frac{1 + \tau_1 s}{1 + \alpha_1 \tau_1 s} \frac{1 + \tau_2 s}{1 + \alpha_2 \tau_2 s} \quad 0 < \alpha_1 < 1, 0 < \alpha_2 < 1$$

Una volta realizzata una rete anticipatrice (singola o multipla) si possono verificare due casi:

**B<sub>1</sub>**  $\omega_c$  è nell'intervallo di specifica e il vincolo sul margine di fase è rispettato. In questo caso il progetto è terminato;

**B<sub>2</sub>**  $\omega_c$  è fuori dall'intervallo di specifica o in un intervallo in cui il vincolo sul margine di fase non è rispettato (ci siamo comunque ricondotti ad uno scenario A, quindi esiste un sotto-intervallo in cui il vincolo sul margine di fase è rispettato).

#### Caso B<sub>2</sub>

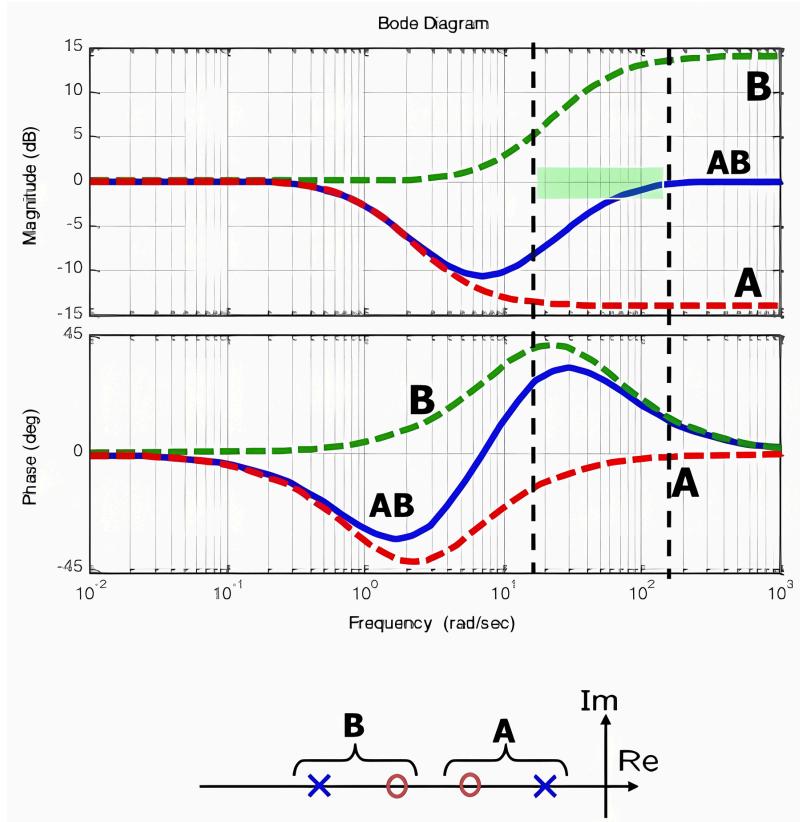
- Se  $\mu_d$  libero allora scegliamo  $\mu_d < 1$  per attenuare

$$R_d(s) = \mu_d \frac{1 + \tau_b s}{1 + \alpha_b \tau_b s}$$

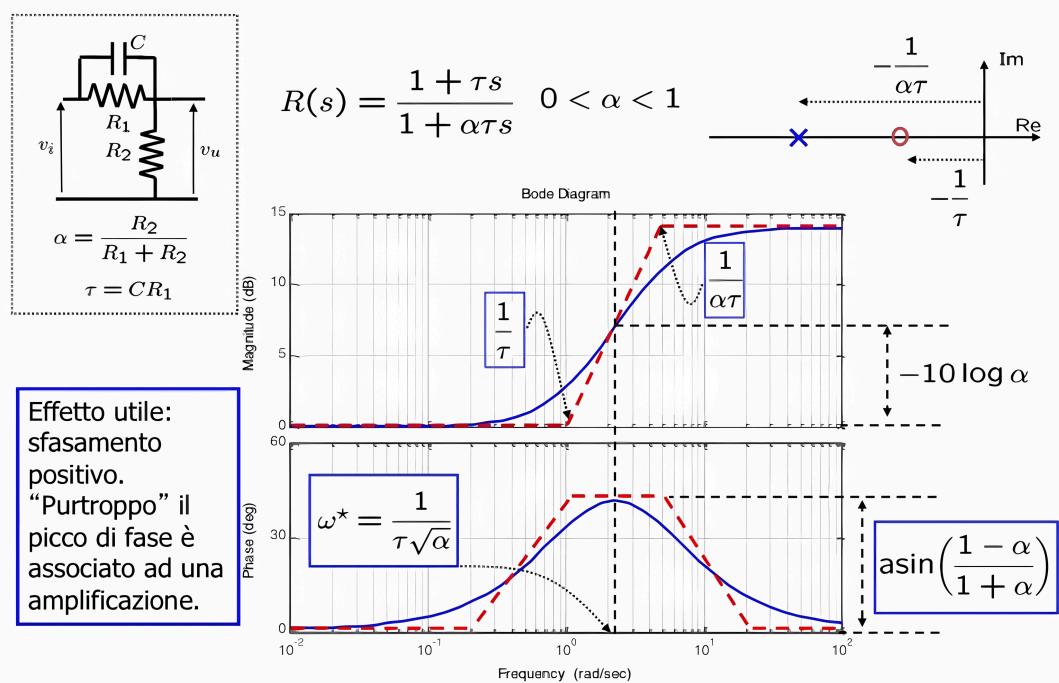
- Se  $\mu_d$  bloccato

$$R_d(s) = \mu_d \frac{1 + \alpha_a \tau_a s}{1 + \tau_a s} \frac{1 + \tau_b s}{1 + \alpha_b \tau_b s}$$

Quest'ultimo tipo di regolatore viene chiamato **rete ritardo-anticipo**.



#### 9.6.4.4 Rete anticipatrice



#### Formule di inversione

Calcoliamo  $\alpha$  e  $\tau$  in modo che alla pulsazione  $\omega_c^*$  (pulsazione a cui vorremmo  $|L(j\omega)|_{\text{dB}} = 0$ ) la rete anticipatrice abbia una amplificazione  $M^* > 1$  e uno sfasamento  $0 < \varphi^* < \frac{\pi}{2}$ , ovvero

$$R_d(j\omega_c^*) = M^* e^{j\varphi^*}$$

Poniamo

$$\frac{1 + j\tau\omega_c^*}{1 + j\alpha\tau\omega_c^*} = M^*(\cos \varphi^* + j \sin \varphi^*) \quad 1 + j\tau\omega_c^* = M^*(\cos \varphi^* + j \sin \varphi^*)(1 + j\alpha\tau\omega_c^*)$$

Uguagliando parte reale e parte immaginaria

$$1 = M^* \cos \varphi^* - M^* \alpha \tau \omega_c^* \sin \varphi^*$$

$$\tau \omega_c^* = M^* \alpha \tau \omega_c^* \cos \varphi^* + M^* \sin \varphi^*$$

Quindi arriviamo alle seguenti formule di inversione

$$\tau = \frac{M^* - \cos \varphi^*}{\omega_c^* \sin \varphi^*} \quad \alpha \tau = \frac{\cos \varphi^* - \frac{1}{M^*}}{\omega_c^* \sin \varphi^*}$$

**Nota:** perché si abbia  $\alpha > 0$  occorre che  $\cos \varphi^* > \frac{1}{M^*}$ .

Come sempre, vogliamo che  $|L(j\omega)|_{dB} = 0$  per  $\omega = \omega_c^*$ , quindi

- scegliamo  $\omega_c^*$  e ricaviamo  $M_f^*$  dalle specifiche
- calcoliamo  $M^*$  e  $\varphi^*$  imponendo

$$|G_e(j\omega_c^*)|_{dB} + 20 \log M^* = 0 \quad M_f^* = 180^\circ + \arg(G_e(j\omega_c^*)) + \varphi^*$$

- verifichiamo che  $M^* > 1$ ,  $0 < \varphi^* < \pi$ ,  $\cos \varphi^* > \frac{1}{M^*}$
- calcoliamo  $\alpha$  e  $\tau$  mediante le formule di inversione.

## 9.7 Controllori PID

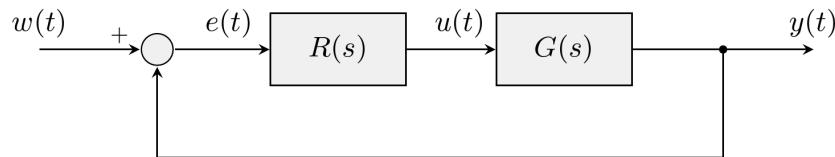
I **controllori PID**, che sta per **controllori ad azione Proporzionale Integrale Derivativa**, sono tra i più usati in ambito industriale. Tra i motivi di questo c'è sicuramente il fatto di poter controllare in modo soddisfacente un'ampia gamma di processi; ma anche perché possono essere usati in casi in cui non vi sia un modello matematico preciso del sistema sotto controllo, perché sono state sviluppati negli anni delle regole per la loro taratura automatica.

Essi, grazie alla loro semplicità, possono essere realizzati con varie tecnologie, come: meccanica, pneumatica, idraulica, elettronica analogica e digitale, e questo ovviamente implica una grande disponibilità commerciale.

Un PID ideale è rappresentato dalla seguente espressione:

$$R(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

ove  $T_i$  è il *tempo integrale* e  $T_d$  il *tempo derivativo*.



L'ingresso di controllo è

$$\begin{aligned} U(s) &= R(s)E(s) \\ &= K_p E(s) + \frac{K_p}{T_i} \frac{E(s)}{s} + K_p T_d s E(s) \end{aligned}$$

che nel dominio del tempo equivale a

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}[U(s)] = \underbrace{\frac{K_p e(t)}{T_i}}_{\substack{\text{termine} \\ \text{Proporzionale}}} + \underbrace{\frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau}_{\substack{\text{termine} \\ \text{Integrale}}} + \underbrace{K_p T_d \frac{de(t)}{dt}}_{\substack{\text{termine} \\ \text{Derivativo}}}$$

**Attenzione:** il PID ideale non è fisicamente realizzabile. Infatti, sviluppando i calcoli, si vede che la funzione di trasferimento del controllore ha un numeratore con grado più elevato del denominatore:

$$\begin{aligned} R(s) &= K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \\ &= \frac{K_p T_i s + K_p + K_p T_i T_d s^2}{T_i s} \end{aligned}$$

Il PID "reale" (fisicamente realizzabile) richiede di aggiungere un polo in alta frequenza:

$$R^{\text{fr}}(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \frac{1}{1 + T_p s}$$

Raccogliendo i termini e definendo opportunamente  $\tau_1, \tau_2$  possiamo vedere che il PID reale è una combinazione di una rete anticipatrice e di una rete ritardatrice:

$$\begin{aligned} R^{\text{fr}}(s) &= \underbrace{\frac{K_p}{T_i} \frac{T_i s + 1 + T_i T_d s^2}{s}}_{\mu} \frac{1}{1 + T_p s} \\ &= \mu \frac{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}{s} \frac{1}{1 + T_p s} \end{aligned}$$

### 9.7.1 Casi speciali

**Regolatori P:** se  $T_i \rightarrow \infty$  e  $T_d = 0$ , quindi il termine integrale e quello derivativo sono assenti, si ottiene un regolatore proporzionale  $R(s) = K_p$ .

**Regolatori I:** in assenza di termine proporzionale e derivativo, si ottiene un regolatore puramente integrale  $R(s) = \frac{K_i}{s}$ . Si può interpretare come una rete ritardatrice con il polo spostato nell'origine e con lo zero all'infinito.

**Regolatori PI:** se  $T_d = 0$ , quindi manca il termine derivativo, si ottiene un regolatore proporzionale integrale  $R(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} \right)$ . Possono essere visti come reti ritardatrici con polo nell'origine e zero in  $-\frac{1}{T_i}$ .

**Regolatori PD:** se  $T_i \rightarrow \infty$ , quindi manca il termine integrale, si ottiene un regolatore proporzionale derivativo  $R(s) = K_p (1 + T_d s)$ . Possono essere visti come reti anticipatrici con zero in  $-\frac{1}{T_d}$  e un polo posto all'infinito (nel caso ideale).