

Elettrotecnica

Giuseppe Bumma

February 25, 2023

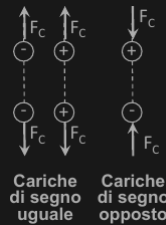
1 Introduzione

1.1 La carica elettrica e la forza di Coulomb

Se due particelle cariche, supposte puntiformi, di carica q_0 e q_1 , siano a una distanza finita fra loro nel vuoto, la **legge di Coulomb** descrive la forza elettrostatica interagente fra loro:

$$|F_C| \propto \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

con r distanza tra le due cariche.



La forza di Coulomb F_C è diretta nella direzione di r . Quando q_1 e q_2 hanno lo stesso segno la forza di Coulomb è repulsiva. Quando sono di segno opposto la forza è attrattiva.

L'unità di misura, nel Sistema Internazionale (SI), della forza di Coulomb è il newton [N] ed il coefficiente di proporzionalità è $1/(4\pi\epsilon_0)$ dove ϵ_0 è la costante dielettrica del vuoto [$\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} C^2/(Nm^2)$].

L'unità di misura della carica elettrica nel sistema di misura SI è il **coulomb** [C]. La carica elementare nel SI è e ove

$$e = 1,6021 \times 10^{-19} C$$

Protone ed elettrone hanno carica di valore assoluto e . Due protoni o due elettroni si respingono. Un protone ed un elettrone si attraggono. Per convenzione la carica del protone è positiva ($+e$) e quella dell'elettrone negativa ($-e$).

In natura esistano solamente cariche multiple di e . Non può esistere una carica sottomultiplo di e .

1.1.1 La cariche elettriche ed il loro moto

Forza che agisce su una particella carica:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$$

\vec{F} : forza [N]

q : carica elettrica [C]

\vec{u} : velocità della carica [m/s]

\vec{E} : campo elettrico

\vec{B} : vettore induzione magnetica

- Se $\vec{B} = 0$ si ha la cosiddetta **Forza elettrostatica**

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

Quindi il campo elettrico $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$ è una forza per unità di carica [N/C].

Campo elettrico e forza elettrostatica da cui esso deriva hanno la stessa direzione. Perciò il campo produce un'accelerazione della carica lungo la propria direzione.

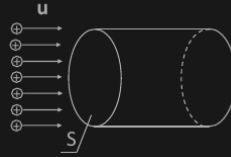
Nel SI l'unità di misura di \vec{E} è: $N/C = V/m = m \text{ kg } s^{-2} C^{-1}$.

1.3 Corrente elettrica

La corrente elettrica i che attraversa una superficie è la quantità di carica che attraversa la superficie nell'unità di tempo:

$$i = \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

Se si considera un cavo conduttore, ad esempio, la corrente nel conduttore è la quantità di carica che attraversa una sezione del cavo nell'unità di tempo.



L'unità di misura SI è l'ampere $[A]$ dove $A = \frac{C}{s}$

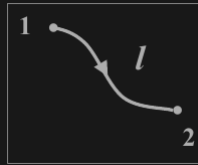
La **corrente elettrica istantanea** è:

$$i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$$

1.4 Tensione elettrica e differenza di potenziale elettrico

La *tensione elettrica* e_{12} fra i punti 1 e 2 lungo il percorso l , è il lavoro $L_{q=1}^{1 \rightarrow 2, l}$ che il campo elettrico $\vec{E}(x, y, z)$ compie per portare una carica unitaria dal punto 1 al punto 2 lungo l :

$$e_{12} = \int_{1, l}^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



Per spostare la carica q dal punto 1 al 2 il lavoro è:

$$L_q^{1 \rightarrow 2, l} = q \cdot e_{12}$$

L'unità di misura SI di e_{12} è il volt $[V]$ dove $V = \frac{J}{C} = m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot C^{-1}$. Qualora la tensione e_{12} dipenda dai valori di una funzione $v(x, y, z)$ definita in una regione che contiene la linea l essa diviene:

$$e_{12} = \int_{1, l}^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{1, l}^2 dv = v_1 - v_2 = v_{12}$$

dove $v(x, y, z)$ è la **funzione potenziale elettrico** e v_{12} è la **differenza di potenziale elettrico**.

Poiché v_{12} è la differenza fra i valori che la funzione $v(x, y, z)$ assume nel punto iniziale e nel punto finale di l , v_{12} non dipende dal percorso che unisce i due punti. Quindi il campo \vec{E} è un **vettore conservativo**¹ con $\vec{E} = \vec{\nabla} \cdot v(x, y, z)$.

Per un percorso chiuso l_c contenuto nella regione ove \vec{E} è conservativo, si ha:

$$e_l = \oint_{l_c} \vec{E} \cdot d\vec{l}_c = - \oint_{l_c} \vec{\nabla} \cdot v \cdot d\vec{l}_c = 0$$

1.5 Legge di Ampere-Prima legge di Maxwell

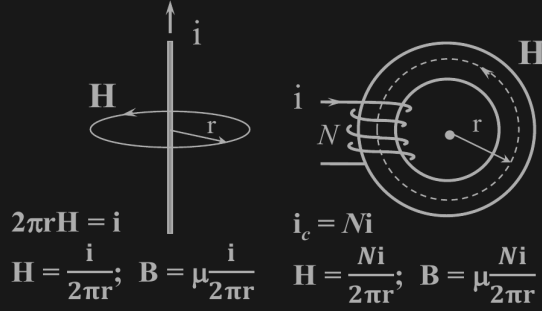
La grandezza vettoriale campo magnetico \vec{H} è definito dalla legge di Ampere (prima legge di Maxwell)

$$\oint_{l_c} \vec{H} \cdot d\vec{l}_c = i_t$$

¹un campo conservativo è un campo il cui integrale lineare è indipendente dalla traiettoria

dove la corrente totale $i_t = i + i_s$.

In questo caso la corrente totale i_t è il flusso del vettore J_t i ovunque solenoidale ($J_t = J + \partial D/\partial t$). Perciò i_t è il flusso concatenato con la linea chiusa l_C intorno della superficie che attraversa. Il verso di percorrenza di l è determinato con regola della vite destrorsa.



L'unità di misura SI di \vec{H} è l'ampere su metro $[\frac{A}{m}]$. Per materiali lineari: $\vec{B} = \mu \vec{H}$ ove μ è la permeabilità magnetica del materiale. Per mezzi non lineari $\vec{B} = f(\vec{H})$. Solitamente per i materiali magnetici non lineari f è una funzione **isteretica** (materiali ferromagnetici).

$$\begin{aligned} \oint_{l_C} \vec{H} d\vec{l} &= \iint_S \left(\vec{J} + \frac{\partial D}{\partial t} \right) \hat{n} dS \\ &= \underbrace{\iint_S \vec{J} \hat{n} dS}_{\text{corrente di conduzione } I} + \underbrace{\iint_S \frac{\partial D}{\partial t} \hat{n} dS}_{\iint_S \partial D \hat{n} dS = \vec{\Phi}(D)} = \\ &= I + \underbrace{\frac{\partial \vec{\Phi}(D)}{\partial t}}_{\text{corrente di spostamento}} \end{aligned}$$

Immaginiamo di descrivere due superfici S_1 e S_2 sulla linea chiusa l_C

$$\oint_{l_C} \vec{H} d\vec{l} = \iint_{S_1} \left(\vec{J} + \frac{\partial D}{\partial t} \right) \hat{n}_1 dS_1 = \iint_{S_2} \left(\vec{J} + \frac{\partial D}{\partial t} \right) \hat{n}_2 dS_2$$

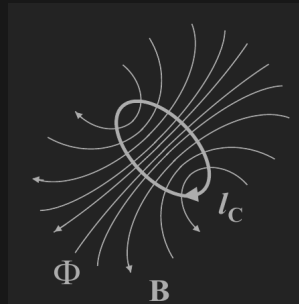
Prendiamo una superficie chiusa S_C su S_2 , allora

$$\oint_{S_C} \underbrace{\left(\vec{J} + \frac{\partial D}{\partial t} \right)}_{\text{vettore solenoidale}} \hat{n}_C dS_C = \iint_{S_2} \left(\vec{J} + \frac{\partial D}{\partial t} \right) \hat{n}_2 dS_2 - \iint_{S_1} \left(\vec{J} + \frac{\partial D}{\partial t} \right) \hat{n}_1 dS_1 = 0$$

1.6 Legge dell'induzione di Faraday-Seconda legge di Maxwell

La legge dell'induzione (o legge di Faraday od anche seconda legge di Maxwell) stabilisce che:

$$e_{l_C} = \oint_{l_C} \vec{E} d\vec{l}_C = -\frac{d\Phi}{dt}$$



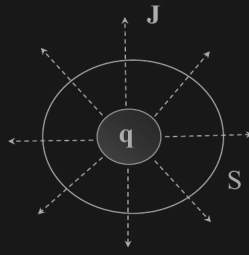
ove Φ è il flusso magnetico concatenato con la linea chiusa l_C . (direzione di l_C data dalla regola della vite destrorsa).

e_{l_C} è la tensione elettrica indotta sulla linea chiusa dalla variazione del flusso magnetico concatenato con l_C ; essa è detta **forza elettromotrice** (f.e.m.).

N.B. In questo caso \vec{E} non è conservativo.

1.7 Conservazione della carica elettrica

La carica elettrica non si crea né si distrugge. Perciò la diminuzione della carica elettrica all'interno di un volume τ corrisponde alle cariche che lasciano τ fluendo attraverso la superficie chiusa S , superficie esterna di τ .



La *legge di conservazione della carica elettrica* afferma questo ed è espressa dall'espressione:

$$\oiint_S \vec{J} \cdot \hat{n} dS = -\frac{dQ}{dt}$$

si ha variazione di cariche solo se c'è passaggio di corrente.

1.8 Legge di Gauss

Il campo di induzione elettrica o campo spostamento elettrico è definito dalla legge di Gauss. Considerando una superficie chiusa S , che delimita il volume V ; sia \hat{n} il versore normale alla superficie. La legge di Gauss afferma che:

$$\oiint_S \vec{D} \cdot \hat{n} dS = \iiint_V \rho dV = Q$$

1.9 Forza elettromotrice

\vec{E} e \vec{B} descrivono le forze prodotte dal fenomeno elettromagnetico sulle cariche (forza elettrica per unità di carica e forza magnetica per unità di carica e di velocità della carica). Esse descrivono ciò che viene prodotto dal fenomeno EM. Ne descrivono l'**effetto**.

\vec{D} ed \vec{H} descrivono ciò che produce il fenomeno EM (la carica elettrica nel primo caso e la corrente totale nel secondo). Ne descrivono la **causa**.

1.10 Leggi dell'Elettromagnetismo in forma integrale

| | |
|---|-------------------------------------|
| $\oint_{l_c} \vec{H} \cdot d\vec{l}_c = i_t$ | 1° legge di Maxwell |
| $\oint_{l_c} \vec{E} \cdot d\vec{l}_c = \frac{d\Phi}{dt}$ | 2° legge di Maxwell |
| $\oiint \vec{J} \cdot \hat{n} dS = -\frac{dq}{dt}$ | legge di conservazione della carica |
| $\oiint \vec{D} \cdot \hat{n} dS = q$ | legge di Gauss |
| $\oiint \vec{J}_t \cdot \hat{n} dS = 0$ | \vec{J}_t ovunque solenoidale |
| $\oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS = 0$ | \vec{B} ovunque solenoidale |

Tre di queste sei equazioni sono linearmente indipendenti, le altre tre si ottengono dalle prime tre.

1.11 Leggi dell'Elettromagnetismo in forma locale

| | |
|---|--|
| $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ | 1° legge di Maxwell (dal teorema di Stokes) |
| $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ | 2° legge di Maxwell (dal teorema di Stokes) |
| $\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho_c}{\partial t}$ | legge di conservazione della carica (teor. divergenza) |
| $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_c$ | legge di Gauss (dal teorema della divergenza) |
| $\nabla \cdot \vec{J}_t = 0$ | \vec{J}_t ovunque solenoidale (dal teorema della divergenza) |
| $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ | \vec{B} ovunque solenoidale (dal teorema della divergenza) |

Tre di queste sei equazioni sono linearmente indipendenti, le altre tre si ottengono dalle prime tre.

1.12 Relazioni materiale

\vec{E} e D , \vec{B} ed \vec{H} descrivono i fenomeni dell'EM in modo diverso. \vec{E} e \vec{D} si riferiscono al fenomeno Elettrico, \vec{B} ed \vec{H} al fenomeno magnetico. \vec{D} ed \vec{H} descrivono i due fenomeni misurando ciò che li origina: la carica il primo, ed il moto della carica il secondo. Gli effetti misurati da \vec{E} e da \vec{B} sono in entrambe i casi le forze indotte. Essi dipendono da come i diversi materiali reagiscono. Inoltre, dipendentemente dalla proprietà del materiale, ad un certo valore del campo \vec{E} si induce un determinato moto di carica misurato da \vec{J} . Le relazioni fra queste descrizioni spesso sono lineari. A volte però non lo sono con relazioni anche di tipo Isteretico.

| Materiali lineari | Materiali non lineari |
|------------------------------|--------------------------|
| $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ | $\vec{D} = f_1(\vec{E})$ |
| $\vec{B} = \mu \vec{H}$ | $\vec{B} = f_2(\vec{H})$ |
| $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ | $\vec{J} = f_3(\vec{E})$ |

con ϵ costante dielettrica, μ permeabilità magnetica e σ conducibilità termica.

la costante dielettrica (permittività elettrica) ϵ , e la permeabilità magnetica μ di un materiale sono espresse per mezzo dei loro valori relativi ϵ_r ed μ_r in riferimento al loro valore nel vuoto ϵ_0 ed μ_0 :

$$\begin{aligned} \epsilon &= \epsilon_r \epsilon_0 & \text{dove } \epsilon_0 &= 8,856 \times 10^{-12} \text{ Farad/metro } \left[\frac{F}{m} \right] \\ \mu &= \mu_r \mu_0 & \text{dove } \mu_0 &= 1,256 \times 10^{-6} \text{ Henry/metro } \left[\frac{H}{m} \right] \end{aligned}$$

Riporto alcuni valori di ϵ_r

| | ϵ_r |
|----------|--------------|
| vuoto | 1 |
| aria | $\simeq 1$ |
| plastica | 2-5 |
| vetro | 4-8 |
| acqua | 80 |

Molto diverse sono le variazioni per materiali differenti della conducibilità elettrica, della permeabilità magnetica e della costante dielettrica. Per la conducibilità elettrica σ vi è una variazione anche di 10^{23} (23 ordini di grandezza) fra materiali isolanti e materiali conduttori. Per la permeabilità magnetica μ la variazione raggiunge al massimo un valore di circa 10^5 (5 ordini di grandezza). Per la costante dielettrica ϵ la variazione massima si

