

Controlli Automatici T

Bumma Giuseppe

Contents

1 Introduzione	6
1.1 Notazione ed elementi costitutivi	6
1.2 Controllo in anello aperto e anello chiuso	7
1.3 Progetto di un sistema di controllo	7
1.4 Esempio di sistema di controllo: circuito elettrico	8
2 Sistemi in forma di stato	8
2.1 Sistemi continui	8
2.1.1 Equazione di stato	8
2.1.2 Equazione di uscita	9
2.2 Sistemi discreti	9
2.3 Esempio circuito elettrico	9
2.3.1 Esempio con parametri che variano nel tempo	10
2.4 Esempio carrello	10
2.5 Esempio auto in rettilineo	11
2.6 Esempio pendolo	11
2.7 Traiettoria di un sistema	12
2.7.1 Esempio	12
2.8 Equilibrio di un sistema	13
2.8.1 Esempio pendolo	13
2.9 Classificazione dei sistemi in forma di stato	13
2.10 Proprietà dei sistemi lineari	14
2.10.1 Sistemi lineri in forma matriciale	14
2.11 Sistemi lineari tempo-invarianti	15
2.11.1 Esempio carrello	15
2.11.2 Sistemi lineari tempo-invarianti SISO	15
2.12 Principio di sovrapposizione degli effetti	15
Dimostrazione	16
2.13 Evoluzione libera e evoluzione forzata	16
2.13.1 Traiettorie di un sistema LTI: esempio scalare	16
2.13.2 Traiettorie di un sistema LTI: caso generale	17
2.13.3 Esempio sistema non forzato	17
2.13.4 Proprietà della matrice esponenziale	18
2.14 Rappresentazioni equivalenti	18
2.15 Modi di un sistema lineare tempo invariante	19
2.15.1 Autovalori complessi	19
2.15.2 Modi naturali: autovalori reali semplici	20
2.15.3 Modi naturali: autovalori complessi coniugati semplici	20
2.15.4 Esempio sui modi naturali	21
2.15.5 Esempio 1	21
2.15.6 Esempio carrello	23
2.16 Stabilità interna	24
2.16.1 Richiami sull'equilibrio di un sistema	24
2.16.2 Definizioni	25
2.16.3 Stabilità interna per sistemi non forzati	25
2.16.4 Rappresentazione grafica di un sistema in equilibrio stabile	25
2.16.5 Rappresentazione grafica di un sistema in equilibrio attrattivo	25
2.16.6 Osservazioni	25
2.17 Stabilità interna di sistemi LTI	26
2.17.1 Dimostrazione	26
2.17.2 Teorema	26
Teorema	26
Osservazione	27
Osservazione	27

Proprietà	27
2.17.3 Esempio stabilità del sistema carrello	27
2.18 Retroazione dello stato	27
2.19 Linearizzazione di sistemi in non lineari (tempo invarianti)	28
2.19.1 Esempio pendolo	29
2.19.2 Stabilità di 3 sistemi lineari (linearizzazione intorno a 3 diversi equilibri)	30
2.20 Stabilità e linearizzazione	31
Teorema	31
Teorema	31
2.20.1 Controllo non lineare mediante linearizzazione	31
3 Trasformata di Laplace	31
3.1 Definizione	31
3.2 Osservazioni	32
3.2.1 Ascissa di convergenza	32
3.2.2 Trasformate razionali	32
3.2.3 Esempio	32
3.3 Formula di antitrasformazione	32
3.3.1 Perché si utilizza la trasformata di Laplace	33
3.4 Proprietà della trasformata di Laplace	33
3.4.1 Linearità	33
Dimostrazione	33
3.4.2 Traslazione temporale	33
Dimostrazione	33
3.4.3 Traslazione nel dominio della variabile complessa	34
3.4.4 Dimostrazione	34
3.4.5 Derivazione nel dominio del tempo	34
3.4.6 Derivazione nel dominio della variabile complessa	34
Dimostrazione	34
3.4.7 Integrazione nel tempo	35
3.4.8 Teorema del valore iniziale	35
3.4.9 Teorema del valore finale	35
3.5 Trasformata di segnali elementari	35
3.5.1 Trasformata della delta	36
3.5.2 Trasformata del segnale gradino unitario	36
3.5.3 Trasformata del segnale rampa	36
3.6 Tabella delle trasformate	37
4 Funzione di trasferimento	38
4.1 Introduzione	38
4.2 Richiami di calcolo matriciale	39
4.2.1 Matrice diagonale	39
4.2.2 Matrice triangolare alta	39
4.2.3 Matrice triangolare bassa	39
4.2.4 Matrice identità	39
4.2.5 Traspota di una matrice	40
4.2.6 Complemento algebrico	40
4.2.7 Determinante di una matrice	40
4.3 Funzione di trasferimento nel dettaglio	40
4.3.1 Esempio 1	41
4.3.2 Esempio 2	41
4.4 Schema dell'utilizzo della trasformata di Laplace	41
4.5 Rappresentazioni e parametri della funzione di trasferimento	42
4.5.1 Esempio	42
4.6 Cancellazioni	43
4.6.1 Esempio 1	43
4.6.2 Esempio 2	44

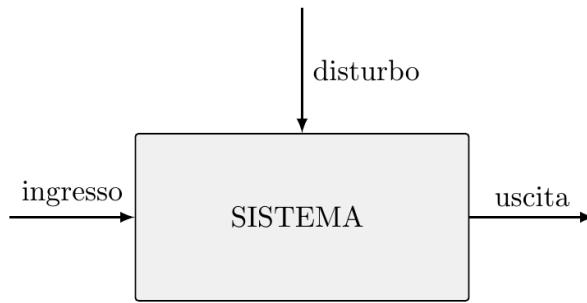
4.7 Antitrasformazione di Laplace	44
5 Sviluppo di Heaviside o in fratti semplici (poli distinti)	45
5.1 Caso 1: poli reali o complessi coniugati distinti con molteplicità 1	45
5.1.1 Esempio	45
5.1.2 Forma reale per poli complessi coniugati	46
5.1.3 Modi naturali di poli reali distinti	47
5.2 Caso 2: Poli reali o complessi coniugati multipli con molteplicità maggiore di 1	48
5.2.1 Esempio	48
5.2.2 Forma reale per poli complessi coniugati con molteplicità maggiore di 1	49
5.2.3 Modi naturali di poli multipli	50
5.2.4 Modi naturali come risposta all'impulso	50
5.3 Risposta a un ingresso generico	50
5.4 Risposta di sistemi elementari	51
5.5 Stabilità esterna (BIBO)	51
6 Analisi di sistemi attraverso funzione di trasferimento	51
6.1 Dalla Funzione di Trasferimento allo spazio degli stati	51
6.2 Sistemi del primo ordine	52
6.2.1 Esempio	52
6.2.2 Considerazioni	53
6.3 Sistemi del secondo ordine	53
6.3.1 Sistemi del secondo ordine con poli complessi coniugati	53
6.3.2 Luogo di punti a tempo di assestamento costante	55
6.3.3 Luogo di punti a sovraelongazione costante	55
6.3.4 Mappatura di specifiche temporali nel piano complesso	56
6.3.5 Sistemi del secondo ordine con poli reali	56
6.4 Sistemi a polo dominante	57
6.4.1 Esempio con coppia di poli complessi coniugati dominanti	58
6.5 Sistemi del secondo ordine con poli reali coincidenti	58
6.6 Sistemi del primo ordine con uno zero	59
6.7 Sistemi del secondo ordine con poli reali e zero	60
6.7.1 Sistemi a fase non minima	60
Domanda	60
6.7.2 Sistemi a fase minima con sovraelongazione	61
6.7.3 Sistemi a fase minima con code di assestamento	61
7 Risposta in frequenza	62
7.1 Risposta a un segnale di ingresso sinusoidale	62
7.1.1 Teorema	63
7.2 Risposta a segnali periodici sviluppabili in serie di Fourier	63
7.3 Risposta a segnali dotati di trasformata di Fourier	64
7.4 Richiami	65
7.4.1 Spettro di un segnale	65
7.5 Risposta in frequenza	65
7.5.1 Identificazione sperimentale della risposta in frequenza (approccio data-driven)	65
7.6 Rappresentazione della risposta in frequenza	66
7.6.1 Proprietà dei numeri complessi e logaritmi	66
7.6.2 Esempio operazioni in decibel	66
7.7 Diagrammi di Bode	67
7.7.1 Diagramma del modulo	67
7.8 Diagramma della fase	67
7.8.1 Contributi elementari	67
7.8.2 Guadagno statico	67
7.8.3 Zeri nell'origine	68
7.8.4 Poli nell'origine	68
7.8.5 Zero reale (ampiezza)	69
7.8.6 Zero reale negativo (fase)	69

7.8.7 Zero reale positivo (fase)	70
7.8.8 Polo reale	71
7.8.9 Polo reale negativo	71
7.8.10 Zeri complessi coniugati (ampiezza)	72
7.8.11 Zeri complessi coniugati a parte reale negativa (fase)	73
7.8.12 Zeri complessi coniugati a parte reale positiva	74
7.8.13 Poli complessi coniugati a parte reale negativa	75
7.8.14 Poli complessi coniugati a parte reale positiva	75
7.8.15 Ritardo temporale	76
7.8.16 Proprietà bloccante degli zeri	76
7.9 Risonanza	77
7.10 Azione filtrante dei sistemi dinamici	78
7.10.1 Filtro passa-basso	78
7.10.2 Filtro passa-alto	78
7.10.3 Passa banda	79
7.10.4 Elimina banda	79
7.11 Esempio diagramma di Bode	80
7.11.1 Filtrare un'onda quadra con disturbo in alta frequenza	81
8 Sistemi di controllo: stabilità e prestazioni	81
8.1 Schema di controllo in retroazione	81
8.1.1 Sistema in anello chiuso	81
8.2 Schema generale e semplificazione	82
8.3 Disaccoppiamento frequenziale dei segnali	83
8.4 Requisiti di un sistema di controllo	83
8.4.1 Stabilità	83
8.4.2 Prestazioni	83
8.4.3 Stabilità robusta del sistema retroazionato (Criterio di Bode)	84
8.5 Margini di fase e ampiezza	84
8.5.1 Margine di fase	85
8.5.2 Margine di ampiezza	85
8.5.3 Casi patologici	86
8.6 Criterio di Bode	86
8.7 Funzioni di sensitività	87
8.7.1 Funzione di sensitività complementare	87
8.7.2 Funzione di sensitività	87
8.7.3 Funzione di sensitività del controllo	88
8.7.4 Considerazioni	88
8.7.5 Errori	89
8.7.6 Analisi in frequenza della funzione di sensitività complementare	89
8.7.7 Analisi in frequenza della funzione di sensitività	90
8.7.8 Analisi in frequenza della funzione di sensitività del controllo	90
8.7.9 Poli complessi coniugati di $F(s)$ (sensitività complementare)	91
8.8 Analisi statica: errore a un gradino	92
9 Sistemi di controllo: progetto del regolatore	93
9.1.1 Riepilogo specifiche	93
9.2 Specifiche in termini di guadagno d'anello	93

1 Introduzione

L'idea dei **controlli automatici** è sostituire l'intelligenza umana con un sistema automatico (come l'intelligenza artificiale) basata su leggi matematiche e/o algoritmi.

1.1 Notazione ed elementi costitutivi



Il **sistema** è un oggetto per il quale si vuole ottenere un comportamento desiderato.

Esempi di sistema sono: impianto (industriale), macchinario (braccio robotico, macchina a controllo numerico, etc ...), veicolo (auto, velivolo, drone, etc ...), fenomeno fisico (condizioni atmosferiche), sistema biologico, sistema sociale.

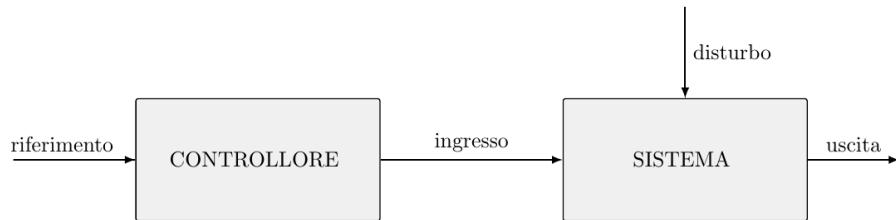
L'obiettivo è che l'andamento nel tempo di alcune variabili segua un segnale di riferimento.

Altri elementi sono:

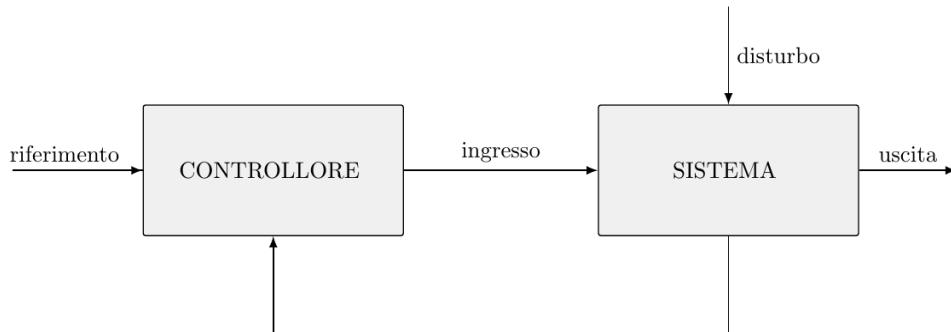
- Controllore: unità che determina l'andamento della variabile di controllo (ingresso);
- Sistema di controllo: sistema (processo) + controllore;
- Sistemi di controllo naturali: meccanismi presenti in natura, come quelli presenti nel corpo umano (temperatura corporea costante, ritmo cardiaco, etc dots);
- Sistemi di controllo manuali: è presente l'azione dell'uomo;
- Sistemi di controllo automatico: uomo sostituito da un dispositivo.

1.2 Controllo in anello aperto e anello chiuso

Controllo in anello aperto “**feedforward**”: il controllore utilizza solo il segnale di riferimento



Controllo in anello chiuso (“**fee”dB”ack**” o retroazione): il controllore utilizza il segnale di riferimento e la variabile controllata ad ogni istante di tempo



Il controllo in retroazione è un paradigma centrale nei controlli automatici.

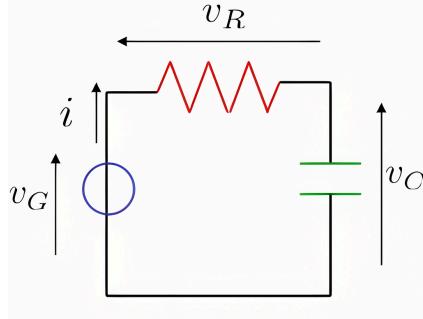
1.3 Progetto di un sistema di controllo

I passi per progettare un sistema di controllo sono:

- definizione delle specifiche: assegnazione comportamento desiderato, qualità del controllo, costo,...
- modellazione del sistema (controllo e test): complessità del modello (compromesso), definizione ingressi/uscite, codifica del modello, validazione in simulazione
- analisi del sistema: studio proprietà “strutturali”, fattibilità specifiche

- sintesi legge di controllo: è basata su modello, analisi sistema controllato, stima carico computazionale
- simulazione sistema controllato: test su modello di controllo, test realistici (modello complesso, ritardi, quantizzazione, disturbi, ...)
- scelta elementi tecnologici: sensori/attuatori, elettronica di acquisizione/attuazione, dispositivo di elaborazione
- sperimentazione: hardware in the loop, prototipazione rapida, realizzazione prototipo definitivo

1.4 Esempio di sistema di controllo: circuito elettrico



La legge che usiamo per definire il circuito (il nostro sistema) è la *legge delle tensioni*

$$v_R(t) = v_G(t) - v_C(t)$$

le leggi del condensatore e del resistore sono

$$C \cdot \dot{v}_C(t) = i(t) \quad v_R(t) = R \cdot i(t)$$

Scrivendo la formula in termini di $v_C(t)$ (stato interno) e $v_G(t)$ (ingresso di controllo)

$$\dot{v}_C(t) = \frac{1}{RC}(v_G(t) - v_C(t))$$

2 Sistemi in forma di stato

2.1 Sistemi continui

I *sistemi continui* sono sistemi in cui il tempo è una variabile reale: $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t) && \text{equazione di stato} \\ \dot{y}(t) &= h(x(t), u(t), t) && \text{equazione (trasformazione) di uscita} \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Definiamo inoltre t_0 come tempo iniziale e $x(t_0) = x_0$ come stato iniziale.

N.B. $\dot{x}(t) := \frac{d}{dt}x(t).$

Notazione:

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$ stato del sistema all'istante t
- $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ingresso del sistema all'istante t
- $y(t) \in \mathbb{R}^p$ uscita del sistema all'istante t

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_{n(t)} \end{bmatrix} \quad u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_{m(t)} \end{bmatrix} \quad y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_{p(t)} \end{bmatrix}$$

Da notare che $x(t)$ è un vettore mentre x_1, \dots, x_n sono scalari; $x(t)$ è una variabile interna che descrive il comportamento del sistema.

2.1.1 Equazione di stato

L *equazione di stato* è un'equazione ordinaria (ODE) vettoriale del primo ordine (cioè l'ordine massimo delle derivate è 1)

$$\dot{x}_1(t) = f_1(x(t), u(t), t) \dots \dot{x}_n(t) = f_n(x(t), u(t), t)$$

\mathbb{R}^n è detto spazio di stato, con n ordine del sistema. La funzione di stato è $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x(t), u(t), t) \\ \vdots \\ f_n(x(t), u(t), t) \end{bmatrix} := f(x(t), u(t), t)$$

Avere solo derivate prime non è limitato, perché ad esempio posso inserire una prima variabile come derivata prima e una seconda variabile come derivata prima della prima variabile.

2.1.2 Equazione di uscita

L'equazione di uscita è un'equazione algebrica

$$y_1(t) = h_1(x(t), u(t), t) \dots y_p(t) = h_p(x(t), u(t), t)$$

$h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$ funzione di uscita

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_{p(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(x(t), u(t), t) \\ \vdots \\ h_{p(x(t), u(t), t)} \end{bmatrix} := h(x(t), u(t), t)$$

Se la soluzione $x(t)$ a partire da un istante iniziale t_0 è univocamente determinata da $x(t_0)$ e $u(\tau)$ con $\tau \geq t_0$, allora il sistema è detto **causale**, cioè lo stato dipende solo da ciò che accade in passato.

Sotto opportune **ipotesi** di regolarità della funzione f si dimostra esistenza e unicità della soluzione dell'equazione (differenziale) di stato (Teorema di Cauchy-Lipschitz).

2.2 Sistemi discreti

Nei *sistemi discreti* il tempo t è una variabile interna, $t \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} x(t+1) &= f(x(t), u(t), t) && \text{(equazione di stato)} \\ y(t) &= h(x(t), u(t), t) && \text{(equazione (trasformazione) di uscita)} \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

L'equazione di stato è un'equazione alle differenze finite (FDE).

Notazione:

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$ stato del sistema all'istante t
- $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ingresso del sistema all'istante t
- $y(t) \in \mathbb{R}^p$ uscita del sistema all'istante t

$x(t)$, $u(t)$ e $y(t)$ sono uguali ai sistemi continui.

Per modellare sistemi discreti nel codice basta un ciclo **for**.

2.3 Esempio circuito elettrico

Riprendiamo l'esempio del [circuito elettrico 1.4](#); la formula trovata è

$$\underbrace{\dot{v}_{C(t)}}_{\dot{x}(t)} = \frac{1}{RC} \left(\underbrace{v_G(t)}_{u(t)} - \underbrace{v_C(t)}_{x(t)} \right)$$

In questo caso lo stato del sistema $x(t)$ è caratterizzato dalla variabile $v_C(t)$, l'ingresso dalla variabile $v_G(t)$. Supponiamo quindi di misurare (con un sensore) la tensione ai capi della resistenza, allora l'uscita del nostro sistema sarà $v_{R(t)}$

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{RC}(u(t) - x(t)) \quad f(x, u) = \frac{1}{RC}(u - x)$$

da notare che in questo caso f non è funzione del tempo.

$$v_R(t) = v_G(t) - v_C(t) \implies y(t) = u(t) - x(t)$$

2.3.1 Esempio con parametri che variano nel tempo

Supponiamo che la resistenza sia una funzione del tempo

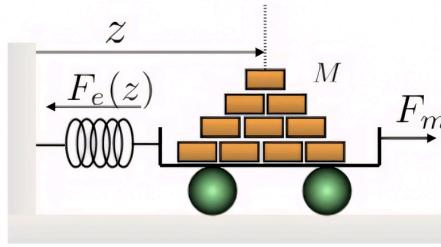
$$R(t) = \bar{R} \left(1 - \frac{1}{2} e^{-t} \right)$$

allora

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{R(t)C} (u(t) - x(t)) \quad f(x, u, t) = \frac{1}{R(t)C} (u - x)$$

in questo caso f è funzione del tempo.

2.4 Esempio carrello



La legge che usiamo è la legge di Newton, prendendo z come posizione del centro di massa

$$M\ddot{z} = -F_e + F_m$$

con M massa e F_e data da

$$F_e(z(t), t) = k(t)z(t)$$

quindi la nostra equazione diventa

$$M\ddot{z}(t) = -k(t)z(t) + F_m(t)$$

Siccome nella nostra formula compare una derivata seconda di una variabile ci conviene definire lo stato del sistema con la variabile stessa e la derivata prima della variabile.

Definiamo quindi $x_1 := z$ e $x_2 := \dot{z}$, con stato $x := [x_1 \ x_2]^T$, e $u := F_m$ (ingresso).

Quindi possiamo scrivere, tenendo conto che $\dot{x}_2(t) = \ddot{z}$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad \dot{x}_2(t) = -\frac{k}{M}x_1(t) + \frac{u(t)}{M}$$

$$f(x, u) = \begin{bmatrix} f_1(x, u) \\ f_2(x, u) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{k}{M}x_1 + \frac{u}{M} \end{bmatrix}$$

Supponiamo di misurare $z(t)$ (sensore posizione), allora $y := z$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{k}{M}x_1(t) + \frac{u(t)}{M}$$

$$y(t) = x_1(t)$$

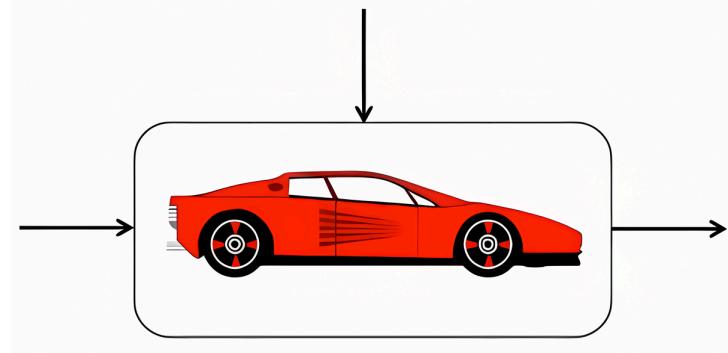
Sia $k(t) = k$ e, ricordando la formula dell'energia cinetica $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ e la formula dell'energia elastica $U = \frac{1}{2}k\Delta x^2$, consideriamo come uscita l'energia totale $E_T(t) = \frac{1}{2}(kz^2(t) + M\dot{z}^2(t))$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{k}{M}x_1(t) + \frac{u(t)}{M} \\ y(t) &= \frac{1}{2}(k(t)x_1^2(t) + Mx_2^2(t))\end{aligned}$$

quindi $h(x) := \frac{1}{2}(kx_1^2 + Mx_2^2)$.

N.B. Il risultato (l'uscita) vale, di solito, solo per il mio modello, in base a come l'ho impostato; nella realtà potrebbe essere diverso.

2.5 Esempio auto in rettilineo



Scriviamo la legge di Newton

$$M\ddot{z} = F_{\text{drag}} + F_m$$

con M massa e F_{drag} data da

$$F_{\text{drag}} = -b\dot{z}$$

Definiamo $x_1 := z$ e $x_2 := \dot{z}$ (stato $x := [x_1 x_2]^T$) e $u := F_m$ (ingresso). Supponiamo di misurare $z(t)$ (sensore posizione), allora $y := z$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{b}{M}x_2(t) + \frac{1}{M}u(t) \\ y(t) &= x_1(t)\end{aligned}$$

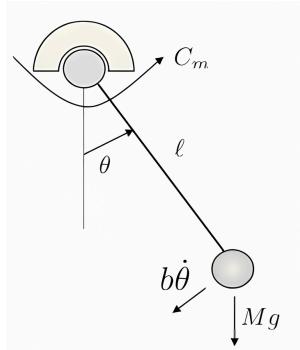
Proviamo a progettare un sistema per il *cruise control*. L'equazione della dinamica è

$$M\ddot{z}(t) = -b\dot{z}(t) + F_m(t)$$

Siccome siamo interessati a controllare la velocità e non la posizione, allora consideriamo come stato solo la velocità: $x := \dot{z}$, $u := F_m$. Supponiamo di misurare $\dot{z}(t)$ (sensore velocità), allora $y := x$

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -\frac{b}{M}x(t) + \frac{1}{M}u(t) \\ y(t) &= x(t)\end{aligned}$$

2.6 Esempio pendolo



Scriviamo l'equazione dei momenti

$$M\ell^2\ddot{\theta} = C_{\text{grav}} + C_{\text{drag}} + C_m$$

con M massa e C_{grav} e C_{drag} date da

$$C_{\text{grav}} = Mg\ell \sin(\theta) \quad C_{\text{drag}} = -b \cdot \theta$$

con b coefficiente d'attrito.

Scriviamo l'equazione della dinamica, partendo dalla formula iniziale dei momenti

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{\ell} \sin(\theta(t)) - \frac{b}{M\ell^2} \dot{\theta}(t) + \frac{1}{M\ell^2} C_m(t)$$

Definiamo quindi $x_1 := \theta$ e $x_2 := \dot{\theta}$ (stato $x := [x_1 x_2]^T$) e $u := C_m$ (ingresso). Supponiamo di misurare θ (sensore angolo), allora $y := \theta$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{g}{\ell} \sin(x_1(t)) - \frac{b}{M\ell^2} x_2(t) + \frac{1}{M\ell^2} u(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned}$$

Se misuriamo invece la posizione verticale, allora $y := -\ell \cos(\theta)$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{g}{\ell} \sin(x_1(t)) - \frac{b}{M\ell^2} x_2(t) + \frac{1}{M\ell^2} u(t) \\ y(t) &= -\ell \cos(x_1(t)) \end{aligned}$$

2.7 Traiettoria di un sistema

Dato un istante iniziale t_0 e uno stato iniziale x_{t_0} , la funzione del tempo $(x(t), u(t)), t > t_0$, che soddisfa l'equazione di stato $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$ si dice traiettoria (movimento) del sistema. In particolare, $x(t)$ si dice traiettoria dello stato. Consistentemente, $y(t)$ si dice traiettoria dell'uscita.

N.B. per sistemi senza ingresso (quindi non forzati) la traiettoria dello stato $x(t), t > t_0$ è determinata solo dallo stato iniziale x_{t_0} .

2.7.1 Esempio

Definiamo un sistema con stato x e stato iniziale x_0

$$x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad x_0 := \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \quad t_0 = 0$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= u(t) \end{aligned}$$

Assegno a x_1, x_2 e $u(t)$ le seguenti equazioni

$$\bar{x}_1(t) = 5 + 3t + t^2$$

$$\bar{x}_2(t) = 3 + 2t$$

$$\bar{u}(t) = 2$$

Se le equazioni di \bar{x}_1 e \bar{x}_2 soddisfano le condizioni iniziali e la funzione di stato (\dot{x}_1 e \dot{x}_2) allora quelle equazioni sono la traiettoria del sistema. Infatti

$$\bar{x}_0 = \begin{bmatrix} 5 + 3t + t^2 \\ 3 + 2t \end{bmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}_0 = \begin{bmatrix} 5 + 3t + t^2 \\ 3 + 2t \end{bmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} 5 + 3t + t^2 \\ 3 + 2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + 2t \\ 2 \end{bmatrix}$$

2.8 Equilibrio di un sistema

Dato un sistema (non forzato) $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$, uno stato x_e si dice *equilibrio del sistema* se $x(t) = x_e$, $t \geq t_0$ è una traiettoria del sistema.

Dato un sistema (forzato) $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$, (x_e, u_e) si dice *coppia di equilibrio* del sistema se $(x(t), u(t)) = (x_e, u_e)$, $t \geq t_0$, è una traiettoria del sistema.

Per un sistema (tempo invariante continuo) $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ data una coppia di equilibrio (x_e, u_e) vale $f(x_e, u_e) = 0$. Se il sistema è non forzato, dato un equilibrio x_e vale $f(x_e) = 0$.

2.8.1 Esempio pendolo

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) &= f_1(x(t), u(t)) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{G}{\ell} \sin(x_1(t)) - \frac{b}{M\ell^2} x_2(t) + \frac{1}{M\ell^2} u(t) &= f_2(x(t), u(t)) \end{aligned}$$

Siccome sappiamo che, data una coppia di equilibrio (x_e, u_e) , vale $f(x_e, u_e) = 0$, allora per trovare l'equilibrio del pendolo imponiamo

$$f(x_e, u_e) = 0$$

cioè:

$$\begin{cases} x_{2e}(t) = 0 \\ -\frac{G}{\ell} \sin(x_{1e}) - \frac{bx_{2e}}{M\ell^2} + \frac{1}{M\ell^2} u_e = 0 \end{cases}$$

sostituendo $x_{2e}(t) = 0$ nell'ultima equazione

$$-\frac{G}{\ell} \sin(x_{1e}) + \frac{1}{M\ell^2} u_e = 0 \implies u_e = MG\ell \sin(x_{1e})$$

In conclusione, le coppie di equilibrio del sistema sono tutti gli (x_{1e}, x_{2e}, u_e) che soddisfano

$$\begin{cases} u_e = MG\ell \sin(x_{1e}) \\ x_{2e} = 0 \end{cases}$$

2.9 Classificazione dei sistemi in forma di stato

La classe generale è $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t) && \text{equazione di stato} \\ y(t) &= h(x(t), u(t), t) && \text{equazione di uscita} \end{aligned} \tag{2.9.3}$$

- I sistemi **monovariabili** (SISO, Single Input Single Output) sono una sottoclasse di sistemi **moltivariabili** (MIMO, Multiple Input Multiple Output); sono tali se $m = p = 1$, altrimenti sono dei sistemi MIMO;

- I sistemi **strettamente propri** sono una sotto classe dei (sistemi propri); sono tali se $y(t) = h(x(t), t)$, quindi se l'uscita dipende esclusivamente dall'ingresso, chiamati quindi sistemi causali (tutti i sistemi che abbiamo visto fin'ora sono sistemi propri).
- I sistemi **non forzati** sono una sotto classe dei **sistemi forzati**; un esempio di sistema non forzato è il seguente

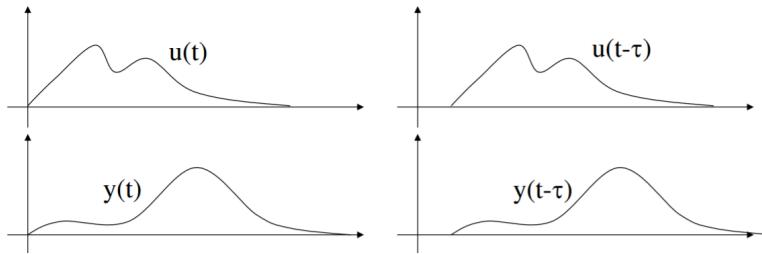
$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) \quad y(t) = h(x(t), t)$$

- I sistemi (tempo invarianti) sono una sotto classe di sistemi (tempo varianti).

I tempo invarianti sono tali se, data una traiettoria $(x(t), u(t))$, $t \geq t_0$, con $x(t_0) = x_0$, per ogni $\Delta \in \mathbb{R}$ vale che $x(t_0 + \Delta) = x_0$ allora $(x_\Delta(t), u_\Delta(t)) = (x(t - \Delta), u(t - \Delta))$ è una traiettoria. Si può dimostrare che sistemi tempo invarianti sono del tipo

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad x(0) = x_0 \quad y(t) = h(x(t), u(t))$$

e senza perdita di generalità possiamo scegliere $t_0 = 0$. Graficamente:



- I (sistemi lineari) sono una sotto classe di (sistemi non lineari).

I sistemi lineari sono tali se le funzioni di stato e di uscita sono lineari in x e u :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \dots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_{11}(t)u_1(t) + b_{12}(t)u_2(t) + \dots + b_{1m}(t)u_m(t) \\ \dot{x}_2(t) &= a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \dots + a_{2n}(t)x_n(t) + b_{21}(t)u_1(t) + b_{22}(t)u_2(t) + \dots + b_{2m}(t)u_m(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \dots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_{n1}(t)u_1(t) + b_{n2}(t)u_2(t) + \dots + b_{nm}(t)u_m(t) \end{aligned}$$

per $y(t)$ invece

$$\begin{aligned} y_1(t) &= c_{11}(t)x_1(t) + c_{12}(t)x_2(t) + \dots + c_{1n}(t)x_n(t) + d_{11}(t)u_1(t) + d_{12}(t)u_2(t) + \dots + d_{1m}(t)u_m(t) \\ y_2(t) &= c_{21}(t)x_1(t) + c_{22}(t)x_2(t) + \dots + c_{2n}(t)x_n(t) + d_{21}(t)u_1(t) + d_{22}(t)u_2(t) + \dots + d_{2m}(t)u_m(t) \\ &\vdots \\ y_p(t) &= c_{p1}(t)x_1(t) + c_{p2}(t)x_2(t) + \dots + c_{pn}(t)x_n(t) + d_{p1,t}u_1(t) + d_{p2,t}u_2(t) + \dots + d_{pm,t}u_m(t) \end{aligned}$$

)

2.10 Proprietà dei sistemi lineari

2.10.1 Sistemi lineari in forma matriciale

Definiamo le matrici $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C(t) \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D(t) \in \mathbb{R}^{p \times m}$

$$\begin{aligned} A(t) &= \begin{bmatrix} a_{11,t} & \dots & a_{1n,t} \\ \vdots & & \\ a_{n1,t} & \dots & a_{nn,t} \end{bmatrix} & B(t) &= \begin{bmatrix} b_{11,t} & \dots & b_{1m,t} \\ \vdots & & \\ b_{n1,t} & \dots & b_{nm,t} \end{bmatrix} \\ C(t) &= \begin{bmatrix} c_{11,t} & \dots & c_{1n,t} \\ \vdots & & \\ c_{p1,t} & \dots & c_{pn,t} \end{bmatrix} & D(t) &= \begin{bmatrix} d_{11,t} & \dots & d_{1m,t} \\ \vdots & & \\ d_{p1,t} & \dots & d_{pm,t} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.10.4}$$

quindi scriviamo

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n(t)}(t) \end{bmatrix} = A(t) \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_{n(t)}(t) \end{bmatrix} + B(t) \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_{m(t)}(t) \end{bmatrix} \quad (2.10.5)$$

che equivale a

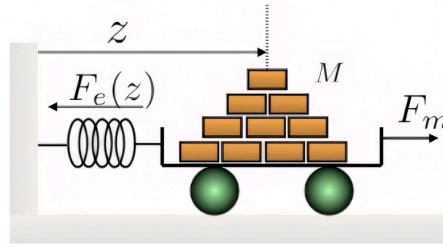
$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{aligned} \quad (2.10.6)$$

2.11 Sistemi lineari tempo-invarianti

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (2.11.7)$$

con A, B, C, D matrici costanti.

2.11.1 Esempio carrello



$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) & f_1(x, u, t) &= x_2 \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{k(t)}{M}x_1(t) + \frac{1}{M}u(t) & f_2(x, u, t) &= -\frac{k(t)}{M}x_1 + \frac{1}{M}u \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned}$$

) f_2 dipende esplicitamente da t attraverso $k(t)$ quindi è un sistema tempo variante. Se $k(t) = \bar{k}$ per ogni t allora tempo underline(invariante). Siccome f_1 e f_2 dipendono linearmente da x e u il sistema è lineare. (Se $k(t) = \bar{k}$ il sistema è lineare tempo invariante).

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k(t)}{M} & 0 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}}_B u(t) \\ y(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{0}_D u(t) \end{aligned}$$

per k costante:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0]$$

2.11.2 Sistemi lineari tempo-invarianti SISO

I sistemi lineari tempo-invarianti single input single output (SISO) sono caratterizzati dalle matrici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times 1}, C \in \mathbb{R}^{1 \times n}, D \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$, ovvero B è un vettore, C è un vettore riga e D è uno scalare.

2.12 Princípio di sovrapposizione degli effetti

Prendiamo un sistema lineare (anche tempo-variante)

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$

Sia $(x_a(t), u_a(t))$ traiettoria con $x_a(t_0) = x_{0a}$.

Sia $(x_b(t), u_b(t))$ traiettoria con $x_b(t_0) = x_{0b}$.

Allora $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ dato lo stato iniziale $x_{ab,t_0} = \alpha x_{0a} + \beta x_{0b}$, si ha che

$$(x_{ab}(t), u_{ab}(t)) = (\alpha x_a(t) + \beta x_b(t), \alpha u_a(t) + \beta u_b(t))$$

è traiettoria del sistema, ovvero applicando come ingresso $u_{ab} = \alpha u_a(t) + \beta u_b(t)$ la traiettoria di stato è $x_{ab}(t) = \alpha x_a(t) + \beta x_b(t)$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha x_{0a}(t) + \beta x_{0b}(t) \\ \alpha u_a(t) + \beta u_b(t) \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha x_a(t) + \beta x_b(t) \quad (2.12.8)$$

IMPORTANTE: non vale per i sistemi non lineari.

Dimostrazione

Per dimostrarlo dobbiamo provare che soddisfa l'equazione differenziale

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x_{ab,t} &= \alpha \dot{x}_{a(t)} + \beta \dot{x}_{b(t)} \\ &= \alpha(A(t)x_a(t) + B(t)u_a(t)) + \beta(A(t)x_b(t) + B(t)u_b(t)) \\ &= A(t, \alpha x_a(t) + \beta x_b(t)) + B(t, \alpha u_a(t) + u_b(t)) \end{aligned}$$

Per sistemi lineari sotto opportune ipotesi su $A(t)$ e $B(t)$ si può dimostrare che la soluzione è unica.
Si dimostra lo stesso anche per l'uscita.

2.13 Evoluzione libera e evoluzione forzata

Sfruttando il principio di sovrapposizione degli effetti prendiamo due sistemi **A**) e **B**)

$$\begin{array}{ll} \text{A}) \quad x(t_0) = x_0 = x_{0a} \neq 0 & \text{B}) \quad x_{0b} = 0 \\ u_{a(t)} = 0 \forall t \geq t_0 & u_{b(t)} = u(t) \neq 0 \end{array}$$

chiamiamo $x_a(t) = x_\ell(t)$ e $x_b(t) = x_f(t)$

$$\alpha x_{0a} + \beta x_{0b} = \underbrace{\alpha x_0}_1 = x_0 \quad \alpha u_{a(t)} + \beta u_{b(t)} = \underbrace{\beta u(t)}_1 = u(t)$$

quindi

$$x_{ab}(t) = \underbrace{x_{\ell(t)}}_{\substack{\text{evoluzione} \\ \text{libera}}} + \underbrace{x_{f(t)}}_{\substack{\text{evoluzione} \\ \text{forzata}}} \quad (2.13.9)$$

L'**evoluzione libera** è definita come $x_\ell(t)$ per $t \geq t_0$, tale che $x_\ell(t_0) = x_0$ e $u_\ell(t) = 0$ per $t \geq t_0$, e uscita $y_\ell(t) = C(t)x_\ell(t)$.

L'**evoluzione forzata** è definita come $x_f(t)$ per $t \geq t_0$, tale che $x_f(t_0) = 0$ e $u_f(t) = u(t)$ per $t \geq t_0$, e uscita $y_f(t) = C(t)x_f(t) + D(t)u(t)$.

IMPORTANTE: non vale per i sistemi non lineari.

2.13.1 Traiettorie di un sistema LTI: esempio scalare

Definiamo un sistema lineare tempo invariante (LTI) scalare $x \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= ax(t) + bu(t) & x(0) &= x_0 \\ y(t) &= cx(t) + du(t) \end{aligned}$$

dall'analisi matematica possiamo scrivere il sistema come soluzione omogenea + soluzione particolare

$$x(t) = e^{at}x_0 + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$$

$$y(t) = ce^{at}x_0 + c \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau + du(t)$$

ricordiamo che la funzione esponenziale si può scrivere come

$$e^{at} = 1 + at + \frac{(at)^2}{2!} + \frac{(at)^3}{3!} + \dots$$

2.13.2 Traiettorie di un sistema LTI: caso generale

Definiamo un sistema lineare tempo invariante (LTI) $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) & x(0) &= x_0 \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underbrace{x(t)}_{\mathbb{R}^n} &= \underbrace{e^{At}}_{\mathbb{R}^{n \times n}} \underbrace{x_0}_{\mathbb{R}^n} + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ y(t) &= Ce^{at}x_0 + c \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)\end{aligned}$$

Ricordiamo che l'esponenziale di matrice si può scrivere come

$$\begin{aligned}e^{At} &= I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots \\ x(t) &= \underbrace{e^{At}x_0}_{\substack{\text{evoluzione} \\ \text{libera}}} + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau}_{\substack{\text{evoluzione} \\ \text{forzata}}} \\ x_\ell(t) &= e^{At}x_0 & x_f(t) &= \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (2.13.10)\end{aligned}$$

2.13.3 Esempio sistema non forzato

$$\dot{x}_1(t) = \lambda_1 x_1(t) \dot{x}_1(t) = \lambda_2 x_2(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$A := \Lambda$ matrice diagonale.

Il nostro è un sistema non forzato, quindi c'è solo l'evoluzione libera:

$$\begin{aligned}x(t) &= e^{\Lambda t}x_0 \\ e^{\Lambda t} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}^2 \frac{t^2}{2!} + \dots \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1^2 t^2}{2!} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2^2 t^2}{2!} \end{bmatrix} + \dots \\ e^{at} &= 1 + @ + \frac{(at)^2}{2!} + \frac{(at)^3}{3!} + \dots \Rightarrow \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Quindi nel caso generale di $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

2.13.4 Proprietà della matrice esponenziale

Esponenziale e cambio di base:

$$e^{TAT^{-1}} = Te^{At}T^{-1} \quad (2.13.11)$$

Data una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, esiste J matrice diagonale a blocchi, chiamata *matrice di Jordan*, che è unica a meno di permutazioni dei blocchi, tale che

$$A = T^{-1}JT \quad (2.13.12)$$

con T matrice invertibile (matrice del cambio base). Questa formula viene chiamata *forma di Jordan*.

La matrice di Jordan è fatta in questo modo

$$\left(\begin{array}{c|cc} \lambda_1 & 1 & \\ \hline & \lambda_1 & 1 \\ & & \lambda_1 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{c|cc} \lambda_2 & 1 & \\ \hline & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{array} \right) \quad \dots \quad \left(\begin{array}{c|cc} \lambda_n & 1 & \\ \hline & \lambda_n & \end{array} \right)$$

con λ_i autovalore di A .

Utilizzando questa forma riconduco il calcolo di e^{At} al calcolo di

$$e^{\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix}} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \dots \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

(IMPORTANTE:) tutti gli elementi di e^{At} sono del tipo

$$t^q e^{\lambda t}$$

con q intero e λ_i autovalori di A.

2.14 Rappresentazioni equivalenti

Effettuiamo un cambio di base mediante una matrice T

$$\hat{x}(t) = Tx(t)$$

ed essendo T invertibile

$$x(t) = T^{-1}\hat{x}(t)$$

Sostituendo nell'equazione della dinamica si ottiene

$$\underbrace{\textcolor{violet}{T} \cdot T^{-1} \dot{\hat{x}}(t)}_{\dot{x}(t)} = \underbrace{AT^{-1} \hat{x}(t) + Bu(t)}_{x(t)} \cdot \textcolor{violet}{T}$$

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= T A T^{-1} \hat{x}(t) + T B u(t) \\ \hat{x}(t) &= C T^{-1} \hat{x}(t) + D u(t)\end{aligned}$$

Allora chiamo $\hat{A} = T A T^{-1}$, $\hat{B} = T B$, $\hat{C} = C T^{-1}$, $\hat{D} = D$

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= \hat{A} \hat{x}(t) + \hat{B} u(t) \\ \hat{x}(t) &= \hat{C} \hat{x}(t) + \hat{D} u(t)\end{aligned}$$

se T è una matrice tale che

$$J = T A T^{-1}$$

allora

$$\dot{\hat{x}} = J \hat{x}(t) + T B u(t)$$

$$\hat{x}_\ell(t) = e^{JT} \hat{x}_0 = T^{-1} e^{Jt} T x_0$$

2.15 Modi di un sistema lineare tempo invariante

Prendiamo un sistema lineare tempo invariante con $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$ e $x(0) = x_0$

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

) Indichiamo con $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ gli $r \leq n$ autovalori (reali o complessi coniugati) distinti della matrice A , con molteplicità algebrica $n_1, \dots, n_r \geq 0$ tali che $\sum_{i=1}^r n_i = n$.

Le componenti dell'evoluzione libera dello stato $x_\ell(t)$ si possono scrivere come

$$x_{\ell,j} = \sum_{i=1}^r \sum_{q=1}^{h_i} \gamma_{j,i,q} t_{q-1} e^{\lambda_i t} \quad j = 1, \dots, n$$

per opportuni valori di $h_i \leq n_i$, dove i coefficienti $\gamma_{j,i,q}$ dipendono dallo stato iniziale $x(0)$. I termini $t^{q-1} e^{\lambda_i t}$ sono detti modi naturali del sistema. L'evoluzione libera dello stato è combinazione lineare dei modi.

2.15.1 Autovalori complessi

Se la matrice A è reale e $\lambda_i = \sigma_i + j\omega_i$ è un autovalore complesso, allora il suo complesso coniugato $\bar{\lambda}_i = \sigma_i - j\omega_i$ è anch'esso autovalore di A . Inoltre si dimostra che i coefficienti $\gamma_{j,i,q}$ corrispondenti a λ_i e $\bar{\lambda}_i$ sono anch'essi complessi coniugati. Scriviamo l'esponenziale di autovalori complessi coniugati); se $\lambda_i = \sigma_i + j\omega_i$ e $\bar{\lambda}_i = \sigma_i - j\omega_i$ allora

$$\begin{aligned}e^{\lambda_i t} &= e^{\sigma_i t + j\omega_i t} & e^{\bar{\lambda}_i t} &= e^{\sigma_i t - j\omega_i t} \\ &= e^{\sigma_i t} e^{j\omega_i t} & &= e^{\sigma_i t} e^{-j\omega_i t} \\ &= e^{\sigma_i t} (\cos(\omega_i t) + j \sin(\omega_i t)) & &= e^{\sigma_i t} (\cos(\omega_i t) - j \sin(\omega_i t))\end{aligned}$$

Si verifica quindi, per calcolo diretto, che le soluzioni $x_{\ell,j}(t)$ sono sempre reali e che i modi del sistema corrispondenti ad autovalori complessi coniugati λ_i e $\bar{\lambda}_i$ sono del tipo

$$t^{q-1} e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_i)$$

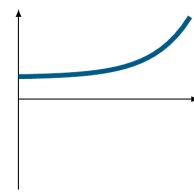
con opportuni valori della fase φ_i .

Supponiamo che le molteplicità algebriche n_1, \dots, n_r degli autovalori di A coincidano con le molteplicità geometriche (ad esempio quando gli autovalori sono distinti). Allora i coefficienti h_i sono tutti pari a 1 e l'espressione dei modi si semplifica in

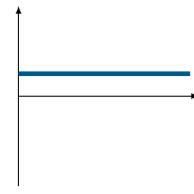
$e^{\lambda_i t}$	per autovalori reali	(2.15.13)
$e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_i)$	per autovalori complessi coniugati	

2.15.2 Modi naturali: autovalori reali semplici

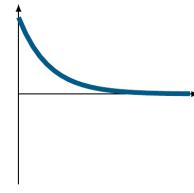
- $e^{\lambda_i t}, \lambda_i > 0$



- $e^{\lambda_i t}, \lambda_i = 0$

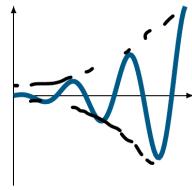


- $e^{\lambda_i t}, \lambda_i < 0$

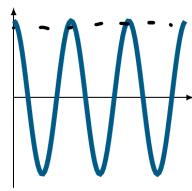


2.15.3 Modi naturali: autovalori complessi coniugati semplici

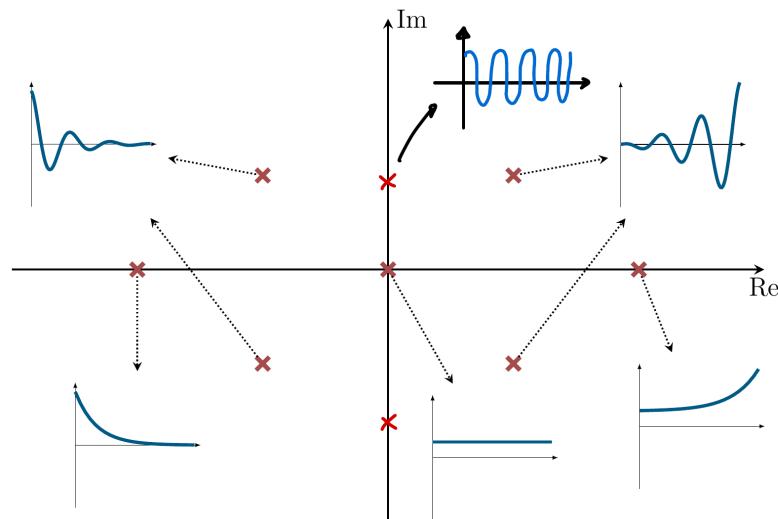
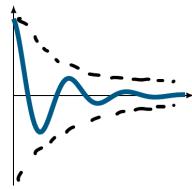
- $e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \phi_i), \sigma_i > 0$



- $e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \phi_i), \sigma_i = 0$



- $e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \phi_i), \sigma_i < 0$



2.15.4 Esempio sui modi naturali

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(\lambda I - A) \\ &= \lambda^2 - a^2 \\ \Rightarrow &\begin{cases} \lambda_1 = a \\ \lambda_2 = -a \end{cases} \end{aligned}$$

I modi naturali di questo sistema sono

$$e^{at} \quad e^{-at}$$

Il modo e^{at} diverge a infinito, il che non è una cosa “buona” per dei sistemi di controllo, perché ad esempio se si sta realizzando un sistema di controllo della velocità vuol dire che la mia velocità sta aumentando, mentre dovrebbe rimanere fissa in un range. Non bisogna quindi focalizzarsi sul calcolare con precisione il valore dei modi naturali ma è importante conoscere come si comporta la loro parte reale.

2.15.5 Esempio 1

Consideriamo il seguente sistema LTI con $x \in \mathbb{R}^3, u \in \mathbb{R}^3$

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}}_A x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_B u(t)$$

Mediante un cambio di coordinate usando la matrice $T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e ponendo $\hat{x}(t) = Tx(t)$, il sistema si può riformulare come

$$\hat{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}}_{\hat{A}=TAT^{-1}} \hat{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\hat{B}=TB} u(t)$$

Gli autovalori di \hat{A} sono $-1, -2$ con molteplicità algebrica 2, 1.

Per calcolare l’evoluzione libera consideriamo la formula vista in precedenza

$$\hat{x}_\ell = e^{\hat{A}t} \hat{x}_0$$

Calcoliamo quindi l’esponenziale di matrice $e^{\hat{A}t}$ per $\hat{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned}
e^{\hat{A}t} &= \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}^k \frac{t^k}{k!} \\
&= \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^k}{k!} & t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^k}{k!} & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^k}{k!} & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k t^k}{k!} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

quindi l'evoluzione libera dello stato è

$$\hat{x}_\ell = \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \hat{x}_0$$

- Se ad esempio la condizione iniziale è $\hat{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, allora

$$\hat{x}_\ell = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Scriviamolo nello coordinate originali

$$x_{\ell(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{T^{-1}} \hat{x}_\ell(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ e^{-t} \end{bmatrix}$$

- Se prendiamo come condizione iniziale $\hat{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, allora

$$\hat{x}_\ell = \begin{bmatrix} te^{-t} \\ e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Scriviamolo nello coordinate originali

$$x_{\ell(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{T^{-1}} x_\ell(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} + te^{-t} \\ e^{-t} \\ e^{-t} + te^{-t} \end{bmatrix}$$

- Se prendiamo come condizione iniziale $\hat{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. allora

$$\hat{x}_\ell = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Nelle coordinate originali:

$$x_{\ell(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{T^{-1}} \hat{x}_\ell(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix}$$

2.15.6 Esempio carrello

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{k(t)}{M}x_1(t) + \frac{1}{M}u(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 0u(t) \end{aligned}$$

Consideriamo k costante, quindi sistema LTI. Gli autovalori della matrice A sono $\lambda_1 = j\sqrt{\frac{k}{M}}, \lambda_2 = -j\sqrt{\frac{k}{M}}$ immaginari puri.

Applichiamo un controllo $u = -hx_2$. Le equazioni di stato del sistema diventano:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{k}{M}x_1(t) - \frac{h}{M}x_2(t) \end{aligned}$$

in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{h}{M}x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Quindi calcoliamo gli autovalori della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{h}{M} \end{bmatrix} \quad A - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{h}{M} - \lambda \end{bmatrix}$$

calcolando il determinante e ponendolo a zero si trova il polinomio caratteristico associato a essa

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{h}{2M} + \sqrt{\frac{h^2}{4M^2} - \frac{k}{M}} \\ p(\lambda) &= \lambda^2 + \lambda \frac{h}{M} + \frac{k}{M} \implies \lambda_2 = -\frac{h}{2M} - \sqrt{\frac{h^2}{4M^2} - \frac{k}{M}} \end{aligned}$$

le cui soluzioni sono gli autovalori della matrice A . Prendiamo ora in considerazione la quantità sotto radice; è evidente che se $h^2 > 4Mk$ gli autovalori sono reali, mentre se $h^2 < 4Mk$ sono complessi coniugati.

Se invece $h^2 = 4Mk$, $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{h}{2M}$, con molteplicità algebrica pari a 2. Si può dimostrare che la molteplicità geometrica è pari a 1, quindi il blocco di Jordan sarà 2×2 (guardare [Section 2.13.4](#))

$$J = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{h}{2M} & 1 \\ 0 & -\frac{h}{2M} \end{bmatrix} \quad e^{Jt} = e^{-\frac{h}{2M}t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.15.14)$$

$$\hat{x}_\ell = \begin{bmatrix} e^{-\frac{h}{2M}t}\hat{x}_1(0) + te^{-\frac{h}{2M}t}\hat{x}_2(0) \\ e^{-\frac{h}{2M}t}\hat{x}_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{1\ell}(t) \\ \hat{x}_{2\ell}(t) \end{bmatrix}$$

Quindi i modi naturali del sistema sono

$$e^{-\frac{h}{2M}t} \quad te^{-\frac{h}{2M}t}$$

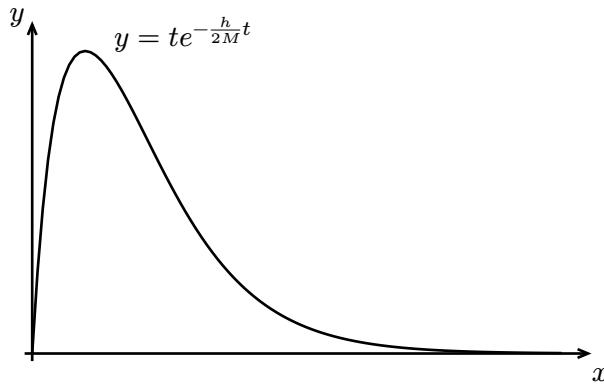
da notare che anche si effettua il cambio di coordinate i modi del sistema non cambiano.

- Supponiamo $\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, allora

$$\hat{x}_\ell(t) = \begin{bmatrix} e^{-\frac{h}{2M}t}\hat{x}_1(0) \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Supponiamo $\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, allora

$$\hat{x}_\ell(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-\frac{h}{2M}t}\hat{x}_2(0) \end{bmatrix}$$



Si nota dal grafico che se $-\frac{h}{2M}$ è "grande" il modo va a zero, quindi sono in un punto di equilibrio.

- Se $h = 4Mk = 0$ con $M > 0, h = 0, k = 0$, il sistema diventa

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

i cui modi naturali sono $1, t$. È evidente che queste equazioni differenziali si possono scrivere come combinazione lineare dei modi:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1(0) + x_2(0)t \\ x_2(t) &= x_2(0) \end{aligned}$$

2.16 Stabilità interna

2.16.1 Richiami sull'equilibrio di un sistema

Prendiamo un sistema lineare tempo invariante

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

Poniamo $u(t) = u_e \forall t \geq 0$, allora

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u_e)$$

$$x(0) = x_0$$

Esiste, per un sistema di questo tipo, una x_e tale che se $x(0) = x_e \Rightarrow x(t) = x_e \forall t \geq 0$, quindi tale che se lo stato iniziale è costante la $x(t)$ rimane costante in ogni istante di tempo?

Chiamo x_e equilibrio, (x_e, u_e) la chiamo coppia stato-ingresso di equilibrio.

Proprietà fondamentale di una coppia di equilibrio è che

$$f(x_e, u_e) = 0$$

2.16.2 Definizioni

Per sistemi tempo-invarianti (anche se si può generalizzare) la *stabilità interna* di un sistema è l'insieme delle conseguenze sulla traiettoria legate a incertezze sullo stato iniziale con ingressi fissi e noti.

2.16.3 Stabilità interna per sistemi non forzati

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad x_e \text{ equilibrio}$$

Equilibrio stabile: uno stato di equilibrio x_e si dice stabile se $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tale che $\forall x_0 : \|x_0 - x_e\| \leq \delta$ allora risulti $\|x(t) - x_e\| < \varepsilon \forall t \geq 0$.

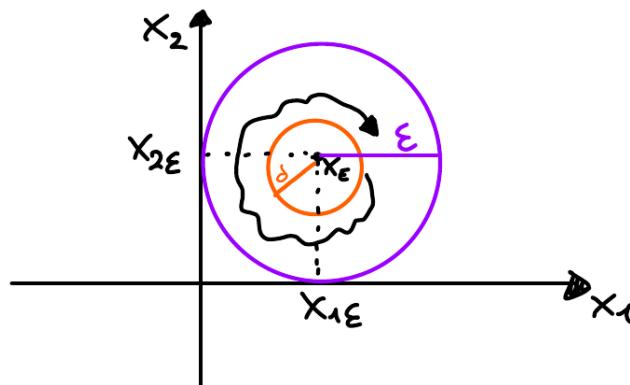
Equilibrio instabile: uno stato di equilibrio x_e si dice instabile se non è stabile.

Equilibrio attrattivo: uno stato di equilibrio x_e si dice attrattivo se $\exists \delta$ tale che $\forall x_0 : \|x_0 - x_e\| \leq \delta$ allora risulti $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_e\| = 0$; quindi se il sistema è in equilibrio solo a infinito.

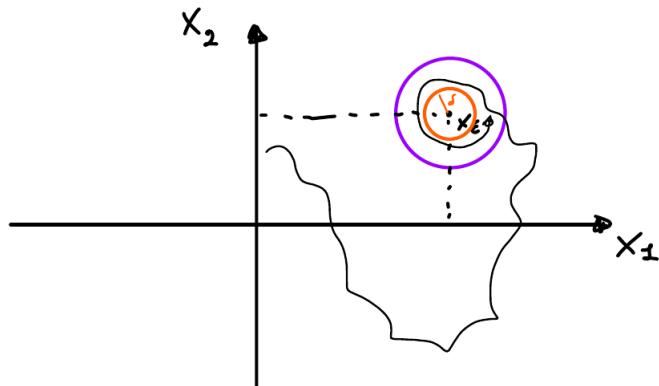
Equilibrio asintoticamente stabile: uno stato di equilibrio x_e si dice asintoticamente stabile se è stabile e attrattivo.

Equilibrio marginalmente stabile: uno stato di equilibrio si dice marginalmente stabile se è stabile ma non asintoticamente.

2.16.4 Rappresentazione grafica di un sistema in equilibrio stabile



2.16.5 Rappresentazione grafica di un sistema in equilibrio attrattivo

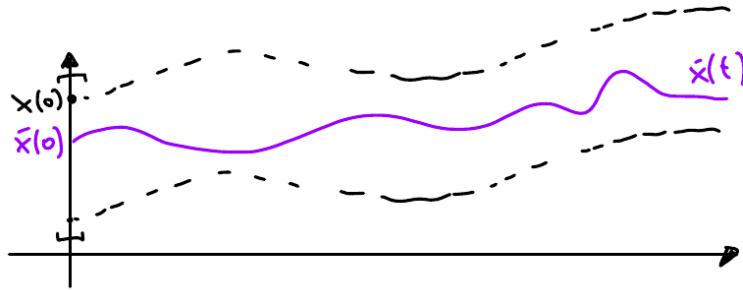


2.16.6 Osservazioni

Le definizioni date sottintendono la parola locale, ovvero che la proprietà vale in un intorno dello stato di equilibrio x_e .

Stabilità globale: le proprietà di stabilità e asintotica stabilità sono globali se valgono per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, invece che valere solo per x_0 tale che $\|x(0) - x_e\| \leq \delta$.

Stabilità di una traiettoria: le definizioni di stabilità si possono generalizzare a una traiettoria $\bar{x}(t)$, $t \geq 0$.



2.17 Stabilità interna di sistemi LTI

Nei sistemi lineari $x = 0$ è sempre un equilibrio. Per sistemi lineari si può dimostrare che tutti gli equilibri e tutte le traiettorie hanno le stesse proprietà di stabilità, tutte uguali a $x = 0$. Per questo motivo si parla di (stabilità del sistema).

2.17.1 Dimostrazione

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ u(t) = u_e \forall t \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow Ax_e + Bu_e = 0$$

Sia $\tilde{x}(t) := x(t) - x_e$, allora

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= \dot{x}(t) - \underbrace{\frac{d}{dt}x_e}_0 \\ &= Ax(t) + Bu_e \\ &= A(\tilde{x}(t) + x_e) + Bu_e \\ &= A\tilde{x}(t) + \underbrace{Ax_e + Bu_e}_0 \end{aligned}$$

quindi

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t)$$

Concludiamo che

$$\tilde{x} = 0 \iff x = x_e$$

cioè per studiare l'equilibrio di un sistema nel generico punto x_e posso studiare l'equilibrio del sistema nell'origine.

2.17.2 Teorema

Un sistema LTI è (asintoticamente stabile) se e solo se tutti gli autovalori hanno parte reale strettamente negativa.

N.B. Se gli autovalori hanno parte reale strettamente negativa i modi del sistema tendono a 0 (vedi [modi naturali di autovalori semplici 2.15.2](#))

Teorema

Un sistema LTI è stabile se e solo se tutti gli autovalori hanno parte reale minore o uguale a zero e tutti gli autovalori a parte reale nulla hanno molteplicità geometrica uguale alla molteplicità algebrica (i mini blocchi di Jordan associati hanno dimensione uno).

Osservazione

Si ha instabilità se almeno un autovalore ha parte reale positiva o se almeno un autovalore con parte reale nulla ha molteplicità algebrica maggiore della molteplicità geometrica.

Osservazione

La stabilità asintotica di sistemi LTI è sempre globale

$$\begin{aligned} x(0) = x_0 &\implies x(t) & t \geq 0 \\ x(0) = \alpha x_0 &\implies \alpha x(t) & t \geq 0 \end{aligned}$$

Proprietà

Se un sistema LTI è globalmente asintoticamente stabile, $x = 0$ è l'unico equilibrio.

Nota: anche per sistemi underline(non lineari) se x_e è GAS (Globalmente Asintoticamente Stabile) allora è l'unico equilibrio.

2.17.3 Esempio stabilità del sistema carrello

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{k(t)}{M}x_1(t) + \frac{1}{M}u(t)y(t) = x_1(t) \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u(t)y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 0u(t)$$

Consideriamo k costante, quindi sistema LTI. Gli autovalori della matrice A sono $\lambda_1 = j\sqrt{\frac{k}{M}}, \lambda_2 = -j\sqrt{\frac{k}{M}}$ immaginari puri, quindi sistema semplicemente (marginalmente) stabile.

Se applichiamo $u = -hx_2$ gli autovalori diventano $\lambda_1 = -\frac{h}{2M} + \sqrt{\frac{h^2}{4M^2} - \frac{k}{M}}$ e $\lambda_2 = \frac{h}{2M} - \sqrt{\frac{h^2}{4M^2} - \frac{k}{M}}$.

- Se $h^2 \geq 4Mk$ gli autovalori sono 2 reali negativi, quindi il sistema è asintoticamente stabile;
- Se $h^2 < 4Mk$ gli autovalori sono 2 complessi coniugati con parte reale negativa, quindi il sistema è asintoticamente stabile;
- Se $h^2 = 4Mk$, $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{h}{2M}$, con molteplicità algebrica pari a 2. Si può dimostrare che la molteplicità geometrica è pari a 1, quindi il blocco di Jordan sarà 2×2 (guardare le proprietà della matrice esponenziale 2.13.4)

$$J = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{h}{2M} & 1 \\ 0 & -\frac{h}{2M} \end{bmatrix} \quad e^{Jt} = e^{-\frac{h}{2M}t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Gli autovalori sono a parte reale negativa, quindi il sistema è asintoticamente stabile;

- Se $h = k = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = 0$, quindi il sistema è instabile.

2.18 Retroazione dello stato

Prendiamo un sistema lineare tempo invariante

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

Supponendo di misurare l'intero stato, ovvero se $x(t) = y(t)$, allora possiamo progettare

$$u(t) = Kx(t) + v(t)$$

con $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matrice di guadagni e $v(t)$ un ulteriore ingresso per il sistema retroazionato

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) + Bv(t)$$

Se vogliamo il sistema in anello chiuso asintoticamente stabile allora dobbiamo progettare K tale che $(A + BK)$ abbia autovalori tutti a parte reale negativa. (Nota:) la possibilità di scegliere gli autovalori di $(A + BK)$ (e.g., per renderli tutti a parte reale negativa) dipende dalla coppia (A, B) ed è legata alla proprietà di **raggiungibilità**.

Se non è possibile misurare l'intero stato, ovvero se $y(t) \neq x(t)$, esistono tecniche per ricostruire lo stato a partire dalle misure mediante sistemi ausiliari chiamati **osservatori**.

Se sia possibile o meno ricostruire lo stato dipende dalla coppia (A, C) ed è legato alla proprietà di (osservabilità).

2.19 Linearizzazione di sistemi in non lineari (tempo invarianti)

Prendiamo un sistema non lineare tempo invariante

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= h(x(t), u(t))\end{aligned}$$

Sia (x_e, u_e) una coppia di equilibrio, $f(x_e, u_e) = 0$, consideriamo una traiettoria a partire da uno stato stato iniziale $x(0) = x_e + \tilde{x}_0$

$$\begin{aligned}x(t) &= x_e + \tilde{x}(t) \\ u(t) &= u_e + \tilde{u}(t)\end{aligned}$$

con $y(t) = h(x_e, u_e) + \tilde{y}(t) = y_e + \tilde{y}(t)$.

Essendo una traiettoria vale

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(x_e + \tilde{x}(t)) &= f(x_e + \tilde{x}(t), u_e + \tilde{u}(t)) \\ y_e + \tilde{y}(t) &= h(x_e + \tilde{x}(t), u_e + \tilde{u}(t))\end{aligned}$$

Sviluppando in serie di Taylor (con f e h sufficientemente regolari) in (x_e, u_e) ¹

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(x_e + \tilde{x}(t)) &= \underbrace{f(x_e, u_e)}_0 + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} f(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}}}_{A_e} \tilde{x}(t) + \underbrace{\frac{\partial}{\partial u} f(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}}}_{B_e} \tilde{u}(t) + \text{term. ord. sup.} \\ y_e + \tilde{y}(t) &= h(x_e, u_e) + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} h(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}}}_{C_e} \tilde{x}(t) + \underbrace{\frac{\partial}{\partial u} h(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}}}_{D_e} \tilde{u}(t) + \text{term. ord. sup.} \\ A &= \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} & B &= \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \\ C &= \frac{\partial g(x, u)}{\partial x} \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} & D &= \frac{\partial g(x, u)}{\partial u} \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}}\end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned}\tilde{\dot{x}}(t) &= A \tilde{x}(t) + B \tilde{u}(t) + \text{term. ord. sup.} & \tilde{x}(0) &= \tilde{x}_0 \\ \tilde{y}(t) &= C \tilde{x}(t) + D \tilde{u}(t) + \text{term. ord. sup.}\end{aligned}$$

Se consideriamo i termini di ordine superiore come un resto $\mathcal{R}(x, u)$ si osserva che

$$\lim_{\|(x, u)\| \rightarrow 0} \frac{\|\mathcal{R}(\tilde{x}, \tilde{u})\|}{\|(\tilde{x}, \tilde{u})\|} = 0$$

di fatto è come se si avesse $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x}$. Quindi le due equazioni di prima si possono approssimare

¹i termini del tipo $\frac{\partial}{\partial x} f(x, u)$ vengono chiamati *Jacobian*

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t) &\approx A_e \tilde{x}(t) + B_e \tilde{u}(t) \\ \tilde{y}(t) &\approx C_e \tilde{x}(t) + D_e \tilde{u}(t)\end{aligned}$$

Il sistema linearizzato è

$$\begin{aligned}\Delta \dot{x}(t) &= A_e \Delta x(t) + B_e \Delta u(t) \\ \Delta y(t) &= C_e \Delta x(t) + D_e \Delta u(t)\end{aligned}$$

N.B. il pedice ‘e’ è una puntualizzazione ulteriore per sottolineare il fatto che le matrici sono valutate all’equilibrio, in altri testi potrebbero non avere questo pedice.

Le traiettorie del sistema non lineare soddisfano

$$\begin{aligned}x(t) &= x_e + \tilde{x}(t) \approx x_e + \Delta x(t) \\ u(t) &= u_e + \tilde{u}(t) \approx u_e + \Delta u(t) \\ y(t) &= y_e + \Delta y(t) \approx y_e + \Delta y(t)\end{aligned}$$

per variazioni sufficientemente piccole.

Nota: $(\Delta x(t), \Delta u(t))$, $t \geq 0$ traiettoria del sistema linearizzato.

2.19.1 Esempio pendolo

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) &= f_1(x(t), u(t)) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{g}{l} \sin(x_1(t)) - \frac{b}{M\ell^2} x_2(t) + \frac{1}{M\ell^2} u(t) &= f_2(x(t), u(t))\end{aligned}$$

(x_e, u_e) coppia di equilibrio

$$f(x_e, u_e) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_{2e} = 0 \\ -\frac{g}{\ell} \sin(x_{1e}) - \frac{b}{M\ell^2} x_{2e} + \frac{1}{M\ell^2} u_e = 0 \end{cases}$$

Prendiamo come equilibrio $x_e = \begin{bmatrix} x_{1e} \\ 0 \end{bmatrix}$, allora

$$\begin{aligned}-\frac{g}{\ell} \sin(x_{1e}) - \frac{b}{M\ell^2} \cdot 0 + \frac{1}{M\ell^2} u_e &= 0 \\ \Rightarrow u_e &= gM\ell \sin(X_{1e})\end{aligned}$$

Eseguiamo la linearizzazione intorno a (x_e, u_e)

$$\Delta \dot{x}(t) = A_e \Delta x(t) + B_e \Delta u(t)$$

$$\begin{aligned}\underbrace{\frac{\partial f(x, u)}{\partial x}}_{\substack{|x=x_e \\ |u=u_e}} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x, u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x, u)}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\substack{|x=x_e \\ |u=u_e}} \quad \underbrace{\frac{\partial f(x, u)}{\partial u}}_{\substack{|x=x_e \\ |u=u_e}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2(x, u)}{\partial u} \end{bmatrix}_{\substack{|x=x_e \\ |u=u_e}} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell} \cos(x_1) & -\frac{b}{M\ell^2} \end{bmatrix}_{\substack{|x=x_e \\ |u=u_e}} \quad = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\substack{|x=x_e \\ |u=u_e}} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell} \cos(x_{1e}) & -\frac{b}{M\ell^2} \end{bmatrix} \quad = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M\ell^2} \end{bmatrix}_{\substack{|x=x_e \\ |u=u_e}}\end{aligned}$$

- se $x_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $u_e = 0$

$$A_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell} & -\frac{b}{M\ell^2} \end{bmatrix} B_e = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M\ell^2} \end{bmatrix}$$

- se $x_e = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}$ e $u_e = 0$

$$A_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{\ell} & -\frac{b}{M\ell^2} \end{bmatrix} B_e = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M\ell^2} \end{bmatrix}$$

- se $x_e = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$ e $u_e = MG\ell$

$$A_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{b}{M\ell^2} \end{bmatrix} B_e = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M\ell^2} \end{bmatrix}$$

2.19.2 Stabilità di 3 sistemi lineari (linearizzazione intorno a 3 diversi equilibri)

1.

$$A_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell} & -\frac{b}{M\ell^2} \end{bmatrix} \quad p(\lambda) = \lambda \left(\lambda + \frac{b}{M\ell^2} \right) + \frac{g}{\ell} \\ = \lambda^2 + \frac{b}{M\ell^2}\lambda + \frac{g}{\ell}$$

$$\lambda_{1/2} = -\frac{b}{2M\ell^2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2M\ell^2} \right) - \frac{g}{\ell}}$$

Abbiamo 2 autovalori a parte reale negativa, quindi il sistema linearizzato è *asintoticamente stabile globalmente*.

1.

$$A_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{\ell} & -\frac{b}{M\ell^2} \end{bmatrix} \quad p(\lambda) = \lambda \left(\lambda + \frac{b}{M\ell^2} \right) - \frac{g}{\ell} \\ = \lambda^2 + \frac{b}{M\ell^2}\lambda - \frac{g}{\ell}$$

$$\lambda_{1/2} = -\frac{b}{2M\ell^2} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{b}{2M\ell^2} \right) + \frac{g}{\ell}}_{>0}} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\frac{b}{2M\ell^2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2M\ell^2} \right) + \frac{g}{\ell}} < 0 \\ \lambda_2 = -\frac{b}{2M\ell^2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2M\ell^2} \right) + \frac{g}{\ell}} > 0 \end{cases}$$

Dato che abbiamo un autovalore a parte reale positiva il sistema è *instabile*.

1.

Se poniamo $x_e = [\frac{\pi}{2} 0]$ e $M_e = Mg\ell$

$$A_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{b}{M\ell^2} \end{bmatrix} \quad p(\lambda) = \lambda \left(\lambda + \frac{b}{M\ell^2} \right)$$

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = -\frac{b}{M\ell^2}$$

Il sistema linearizzato è *stable*, ma non asintoticamente, cioè marginalmente stabile (ricordando il Teorema parte reale negativa 2.17.2)

2.20 Stabilità e linearizzazione

Teorema

Dato un sistema non lineare tempo invariante, $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$, sia x_e, u_e una coppia di equilibrio. Se il sistema linearizzato intorno a (x_e, u_e) è asintoticamente stabile, allora l'equilibrio x_e , relativo all'ingresso u_e , è (localmente) asintoticamente stabile.

Teorema

Dato un sistema non lineare tempo invariante, $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$, sia x_e, u_e una coppia di equilibrio. Se il sistema linearizzato intorno a (x_e, u_e) ha almeno un autovalore a parte reale positiva, allora l'equilibrio x_e , relativo all'ingresso u_e , è instabile.

2.20.1 Controllo non lineare mediante linearizzazione

Consideriamo il sistema non lineare

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

Linearizzazione intorno all'equilibrio (x_e, u_e)

$$\Delta\dot{x}(t) = A\Delta x(t) + B\Delta u(t)$$

Proviamo a portare $\Delta x(t)$ a 0, ovvero $x(t)$ a x_e “in modo approssimato”. Usando la retroazione dello stato $\Delta u(t) = K\Delta x(t) + \tilde{v}(t)$ otteniamo il seguente sistema in anello chiuso

$$\Delta\dot{x}(t) = (A_e + B_e K)\Delta x(t) + B_e \tilde{v}(t)$$

Così sono in grado di progettare la matrice K in modo che $A_e + B_e K$ sia asintoticamente stabile.

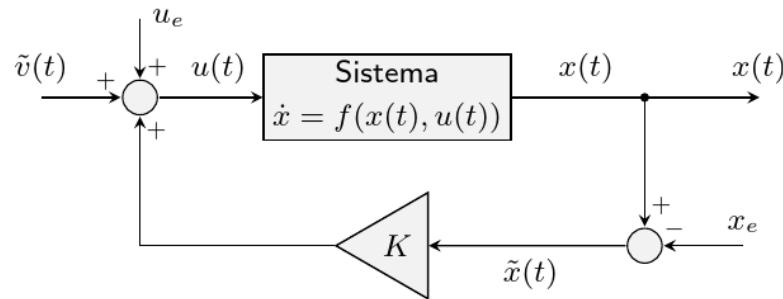
Grazie ai teoremi sulla linearizzazione, x_e risulta un equilibrio (localmente) asintoticamente stabile per il sistema non lineare in anello chiuso (detto *retroazionato*).

Visto che $\Delta x(t) \approx x(t) - x_e$

$$u(t) = u_e + K(x(t) - x_e) + \tilde{v}(t) \approx u_e + K\Delta x(t) + \tilde{v}(t)$$

Perciò la legge di controllo finale sarà

$$u(t) = u_e + K(x(t) - x_e) + \tilde{v}(t)$$



3 Trasformata di Laplace

3.1 Definizione

Data una funzione complessa f di variabile reale t , $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ (anche se per noi tipicamente saranno funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$), sia $s = \sigma + j\omega$ una variabile complessa (σ parte reale, ω parte immaginaria); definiamo la *Trasformata di Laplace* di $f(t)$

$$F(s) = \int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

se esiste per qualche s , ovvero se l'integrale converge. Includiamo nell'integrale 0^- per tener conto di eventuali impulsi come la *delta di Dirac*.

(Notazione:) indichiamo la trasformata di Laplace con \mathcal{L} tale che

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$$

con $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$; indichiamo l'applicazione della trasformata con $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$.

3.2 Osservazioni

3.2.1 Ascissa di convergenza

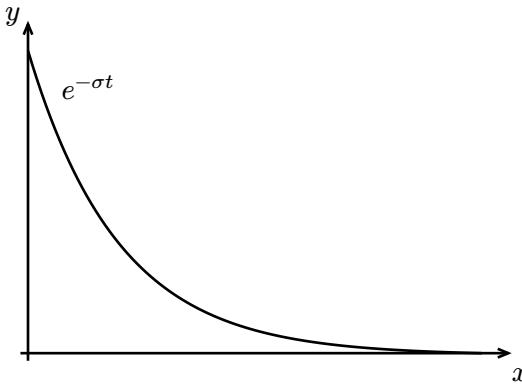
Sia $\bar{\sigma} > -\infty$ estremo inferiore di $s = \sigma + j\omega$ per cui l'integrale converge. Allora la trasformata di Laplace esiste nel semipiano $\operatorname{Re}(s) > \bar{\sigma}$.

$\bar{\sigma}$ viene chiamata *ascissa di convergenza*. La trasformata di Laplace risulta essere una *funzione analitica* e, grazie alle particolari proprietà delle funzioni analitiche, la sua definizione può essere estesa anche in punti s tali che $\operatorname{Re}(s) \leq \bar{\sigma}$, indipendentemente dal fatto che l'integrale non converga.

Dato che

$$e^{-st} = e^{-\sigma t} e^{-j\omega t}$$

possiamo dire che $e^{-\sigma t}$ ci aiuta a ottenere un integrale che converge.



3.2.2 Trasformate razionali

Di particolare importanza sono le *trasformate razionali*, cioè quelle in cui

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (3.2.15)$$

con $N(s)$ e $D(s)$ polinomi primi tra loro. Le radici di $N(s) = 0$ si dicono (zeri) e quelle di $D(s) = 0$ si dicono (poli); nell'insieme, poli e zeri si dicono *singolarità*.

Se f è reale allora i coefficienti dei polinomi $N(s)$ e $D(s)$ sono reali.

3.2.3 Esempio

$$F(s) = \frac{s^2 + 2s}{(s+1)(s+3)} = \frac{s(s+2)}{(s+1)(s+3)}$$

allora

- zeri di $F(s)$: 0 e -2
- poli di $F(s)$: -1 e -3

3.3 Formula di antitrasformazione

La funzione trasformanda può essere ricavata dalla sua trasformata mediante la *formula di antitrasformazione*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds$$

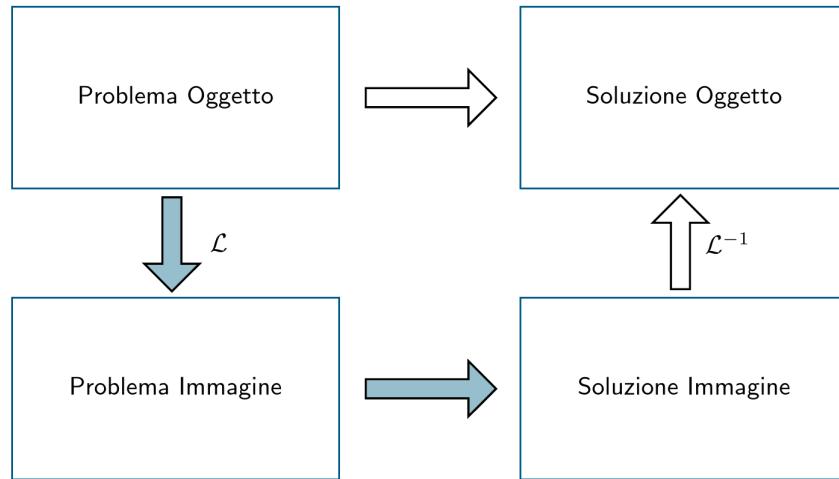
Notazione: indichiamo l'antitrasformata di Laplace con \mathcal{L}^{-1} tale che

$$F(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t) \quad \sigma > \bar{\sigma}$$

indichiamo la formula di antitrasformazione con $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$.

La $f(t)$ è fornita per $t \geq 0$, perché solo nei punti di continuità in cui la f è maggiore di zero essa contribuisce a determinare F . L'antitrasformata fornisce $f(t) = 0$ per $t < 0$, per questo la corrispondenza tra $f(t)$ e $F(s)$ è **biunivoca**.

3.3.1 Perché si utilizza la trasformata di Laplace



Se, provando a risolvere il problema oggetto, risulta difficile arrivare alla soluzione oggetto (magari perché i calcoli sono molto complessi o risulta poco conveniente in termini di risorse), allora si trasforma il problema oggetto in problema immagine con la trasformata di Laplace se risulta poi conveniente (o semplice) arrivare alla soluzione immagine, per poi antitrasformarla per ottenere la soluzione oggetto che si stava cercando.

3.4 Proprietà della trasformata di Laplace

3.4.1 Linearità

Dati $f(t)$ e $g(t)$ tali per cui esistono le trasformate $F(s)$ e $G(s)$, allora $\forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall \beta \in \mathbb{C}$ risulta

$$\mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha \mathcal{L}[f(t)] + \beta \mathcal{L}[g(t)] = \alpha F(s) + \beta G(s) \quad (3.4.16)$$

Dimostrazione

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] &= \int_{0^-}^{+\infty} (\alpha f(t) + \beta g(t)) e^{-st} dt \\ &= \underbrace{\alpha \int_{0^-}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt}_{F(s)} + \underbrace{\beta \int_{0^-}^{+\infty} g(t) e^{-st} dt}_{G(s)} \\ &= \alpha F(s) + \beta G(s) \end{aligned}$$

3.4.2 Traslazione temporale

$$\mathcal{L}[f(t - \tau)] = e^{-\tau s} F(s) \quad \forall \tau > 0 \quad (3.4.17)$$

τ deve essere maggiore di 0, altrimenti la $f(t)$ sarebbe diversa da 0 per un tempo negativo.

Dimostrazione

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t - \tau)] &= \int_{0^-}^{+\infty} f(t - \tau) e^{-st} dt \\ &\stackrel{\rho = t - \tau}{=} \int_{-\tau^-}^{+\infty} f(\rho) e^{-s(\rho + \tau)} d\rho \end{aligned}$$

siccome la $f(t)$ è nulla per $t < 0$ posso riscrivere gli estremi di integrazione

$$\begin{aligned} \int_{0^-}^{+\infty} f(\rho) e^{-s(\rho+t)} d\rho &= \underbrace{\int_{0^-}^{+\infty} f(\rho) e^{\rho} d\rho}_{F(s)} \cdot e^{-s\tau} \\ &= F(s) e^{-s\tau} \end{aligned}$$

come volevasi dimostrare

$$\mathcal{L}[f(t - \tau)] = e^{-\tau s} F(s)$$

3.4.3 Traslazione nel dominio della variabile complessa

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t} f(t)] = F(s - \alpha) \quad (3.4.18)$$

3.4.4 Dimostrazione

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{\alpha t} f(t)] &= \int_{0^-}^{+\infty} f(t) e^{\alpha t} \cdot e^{-st} dt \\ &= \int_{0^-}^{+\infty} f(t) e^{-(s-\alpha)t} dt \\ &= F(s - \alpha) \end{aligned}$$

3.4.5 Derivazione nel dominio del tempo

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} f(t)\right] = sF(s) - f(0) \quad (3.4.19)$$

Calcoliamo la trasformata della derivata seconda

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{d^2}{dt^2} f(t)\right] &= \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} \underbrace{\left[\frac{d}{dt} f(t)\right]}_{g(t)}\right] \\ &= sG(s) - g(0) \\ &= sG(s) - f'(0) \\ &= s(sF(s) - f(0)) - f'(0) \\ &= s^2 F(s) - sf(0) - f'(0) \end{aligned}$$

Quindi possiamo definire la *derivata n-sima nel tempo*

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right] = s^n F(s) = \sum_{i=1}^n s^{n-i} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} f(t) \Big|_{t=0} \quad (3.4.20)$$

La proprietà ci dice che, se la funzione e le sue derivate si annullano in $t = 0$, derivare nel dominio del tempo equivale a moltiplicare per s nel dominio della variabile complessa; infatti s viene chiamato *operatore di derivazione*.

3.4.6 Derivazione nel dominio della variabile complessa

Supponiamo $F(s)$ derivabile per tutti gli s ; allora risulta

$$\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{dF(s)}{ds} \quad (3.4.21)$$

la quale è estendibile al caso della trasformata $t^n \cdot f(t)$.

Dimostrazione

Considerando che $te^{-st} = -\frac{d}{ds} e^{-st}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[tf(t)] &= \int_{0^+}^{+\infty} tf(t)e^{-st} dt \\
&= \int_{0^+}^{+\infty} f(t) \underbrace{te^{-st}}_{-\frac{d}{ds}e^{-st}} dt \\
&= \int_{0^+}^{+\infty} f(t) \left(-\frac{d}{ds}e^{-st} \right) dt \\
&= -\frac{d}{ds} \underbrace{\int_{0^+}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt}_{F(s)} \\
&= -\frac{dF(s)}{ds}
\end{aligned}$$

3.4.7 Integrazione nel tempo

Supponiamo che la funzione $f(t)$ sia integralegrabile tra 0 e $+\infty$. Allora

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{1}{s} F(s)$$

La proprietà ci dice che integrare nel dominio del tempo equivale a dividere per s nel dominio della variabile complessa; infatti $\frac{1}{s}$ viene chiamato *operatore di integrazione*.

==Convoluzione nel tempo Date due funzioni f_1 e f_2 , il loro *prodotto di convoluzione* è

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\eta) f_2(\eta) d\eta = f_2(t-\eta) * f_1(t) \quad (3.4.22)$$

e si trova

$$\mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(s) \cdot F_2(s) \quad (3.4.23)$$

3.4.8 Teorema del valore iniziale

Se una funzione reale $f(t)$ ha trasformata razionale $F(s)$ con grado del denominatore maggiore del grado del numeratore, allora

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad (3.4.24)$$

Se f è una funzione discontinua di prima specie in $t = 0$, $f(0)$ si interpreta come $f(0^+)$. L'equazione vale se $f(0)$ o $f(0^+)$ esistono.

3.4.9 Teorema del valore finale

Se una funzione reale $f(t)$ ha trasformata razionale $F(s)$ con grado del denominatore maggiore del grado del numeratore e poli nulli o con parte reale negativa, allora

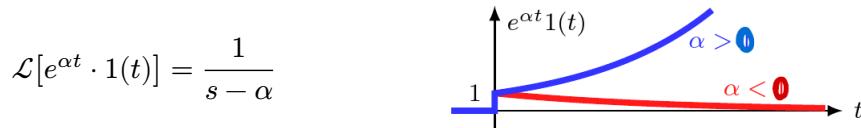
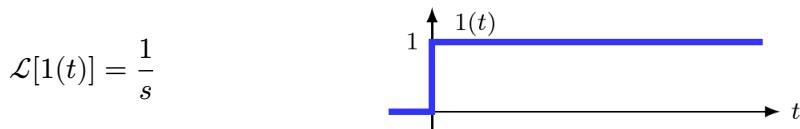
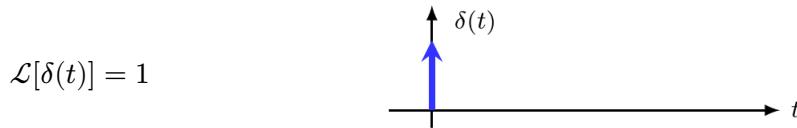
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (3.4.25)$$

L'equazione vale se esiste $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$ esiste.

3.5 Trasformata di segnali elementari

Definiamo il *delta di Dirac* $\delta(t)$ tale che

$$\int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = 1 \quad (3.5.26)$$



3.5.1 Trasformata della delta

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\delta(t)] &= \int_{0^-}^{+\infty} \delta(t) e^{-st} dt \\ &= \int_{0^-}^0 \delta(t) \underbrace{e^{-s \cdot 0}}_1 dt + \underbrace{\int_{0^+}^{+\infty} \delta(t) e^{-st} dt}_0\end{aligned}$$

3.5.2 Trasformata del segnale gradino unitario

Il segnale gradino unitario $1(t)$ è definito

$$1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\int_{0^-}^{+\infty} 1(t) e^{-st} dt &= \int_0^{+\infty} \underbrace{1(t)}_1 e^{-st} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-st} dt \\ &= \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_{t \rightarrow +\infty} - \left. \frac{e^{-0}}{-s} \right|_{t=0}\end{aligned}$$

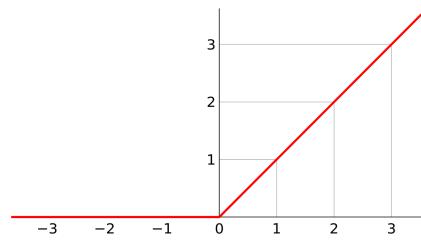
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-st} = 0, e^0 = 1$$

$$\underbrace{\left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_{t \rightarrow +\infty}}_0 - \left. \frac{1}{-s} \right|_{t=0} = \frac{1}{s}$$

3.5.3 Trasformata del segnale rampa

Il segnale *rampa* $r(t)$ è definito come

$$r(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t \geq 0 \end{cases}$$



Per calcolare la trasformata del segnale rampa utilizziamo la proprietà di [derivazione nel dominio della variabile complessa \(3.4.21\)](#)

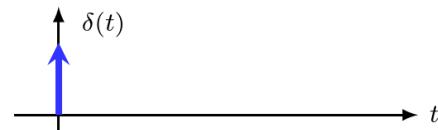
$$\begin{aligned}\mathcal{L}[t \cdot 1(t)] &= -\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s} \right) \\ &= \frac{1}{s^2}\end{aligned}$$

Mentre per calcolare la trasformata del gradino moltiplicato un esponenziale utilizziamo la proprietà di [di traslazione nel dominio della variabile complessa \(3.4.18\)](#).

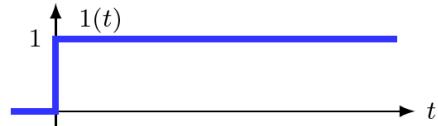
$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^{\alpha t} 1(t)] &= \underbrace{\mathcal{L}[e^{\alpha t}]}_{f(t)} \underbrace{\mathcal{L}[1(t)]}_{F(s)=\frac{1}{s}} \\ &= \frac{1}{s - \alpha}\end{aligned}$$

3.6 Tabella delle trasformate

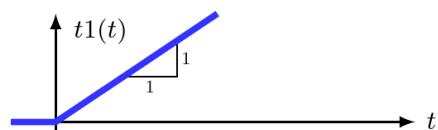
$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$



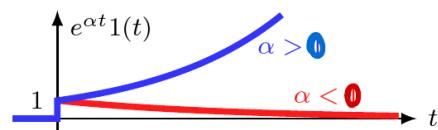
$$\mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s}$$



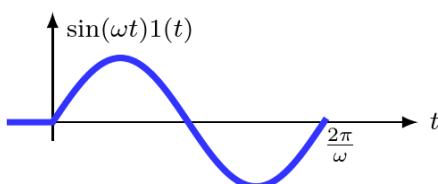
$$\mathcal{L}[t \cdot 1(t)] = \frac{1}{s^2}$$



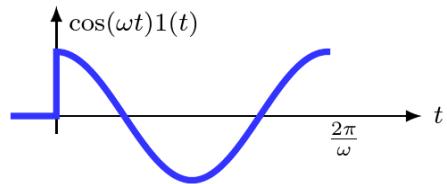
$$\mathcal{L}[e^{\alpha t} \cdot 1(t)] = \frac{1}{s - \alpha}$$



$$\mathcal{L}[\sin(\omega t)1(t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$



$$\mathcal{L}[\cos(\omega t)1(t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$



$$\mathcal{L}[\sin(\omega t + \varphi)1(t)] = \frac{\omega \cos \varphi \pm s \sin \varphi}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}[\cos(\omega t + \varphi)1(t)] = \frac{s \cos \varphi \mp \omega \sin \varphi}{s^2 + \omega^2}$$

4 Funzione di trasferimento

4.1 Introduzione

Consideriamo il sistema LTI con $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^p$

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

con $x(0) = x_0$.

Siano $X(s) := \mathcal{L}[x(t)], U(s) := \mathcal{L}[u(t)]$ e $Y(s) := \mathcal{L}[y(t)]$. Applichiamo la trasformazione di Laplace ad ambo i membri delle equazioni precedenti, ricordando che $\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}x(t)\right] = sX(s) - x(0)$

$$\begin{aligned}sX(s) - x(0) &= AX(s) + BU(s) \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s)\end{aligned}$$

se raccolgo $X(s)$ nella prima equazione

$$(sI - A)X(s) = x_0 + BU(s) \quad Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

$$X(s) = \underbrace{(sI - A)^{-1}x_0}_{\text{evoluzione libera}} + \underbrace{(sI - A)^{-1}BU(s)}_{\text{evoluzione forzata}} \quad Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

Sottolineiamo che se avessimo un sistema generico non si potrebbe riscrivere come abbiamo fatto perché underline(le matrici devono essere) underline(costanti).

Inoltre per poter scrivere un sistema LTI come sopra la matrice $(sI - A)$ deve essere invertibile; una matrice è invertibile se il suo determinante è non nullo, quindi, se s è autovalore della matrice della dinamica e $p(s)$ è il polinomio caratteristico associato:

$$p(s) = \det(sI - A)$$

Quindi le trasformate dello stato e dell'uscita del sistema in funzione di x_0 e $U(s)$ sono

$$\begin{aligned}X(s) &= \underbrace{(sI - A)^{-1}x_0}_{\text{evoluzione libera}} + \underbrace{(sI - A)^{-1}BU(s)}_{\text{evoluzione forzata}} \\ Y(s) &= \underbrace{C(sI - A)^{-1}x_0}_{\text{evoluzione libera}} + \underbrace{\left(C(sI - A)^{-1}B + D\right)U(s)}_{\text{evoluzione forzata}}\end{aligned}$$

$$X_\ell(s) = (sI - A)^{-1}x_0$$

$$X_{f(s)} = (sI - A)^{-1}BU(s)$$

$$Y_\ell(s) = C(sI - A)^{-1}x_0$$

$$Y_{f(s)} = \left(C(sI - A)^{-1}B + D\right)U(s)$$

Consideriamo ora la trasformata dell'evoluzione forzata dell'uscita

$$Y_{f(s)} = \left(C(sI - A)^{-1}B + D\right)U(s)$$

la matrice

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

è detta *funzione di trasferimento*; se il sistema è SISO (Single Input Single Output) è una funzione scalare.

Abbiamo così ottenuto una (rappresentazione ingresso-uscita)

$$Y_f(s) = G(s)U(s) \quad (4.1.27)$$

se assumiamo che $x(0) = 0$ otteniamo esattamente la trasformata di Laplace dell'uscita y

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad (4.1.28)$$

Due osservazioni:

- se si conosce la funzione di trasferimento $G(s)$ di un sistema e la trasformata di Laplace $U(s)$ dell'ingresso, è possibile calcolare, mediante antitrasformazione dell'equazione precedente (4.1.28), il movimento forzato y_f dell'uscita (che ovviamente coincide con il movimento y se lo stato iniziale è nullo);
- la funzione di trasferimento è data dal rapporto tra la trasformata dell'uscita e dell'ingresso nel caso di $x(0) = 0$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

4.2 Richiami di calcolo matriciale

4.2.1 Matrice diagonale

Una *matrice diagonale* è una matrice quadrata tale che per $i \neq j$ si ha sempre $a_{ij} = 0$ (ogni matrice diagonale è simmetrica).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.2.2 Matrice triangolare alta

Una *matrice triangolare alta* è una matrice quadrata tale che per $i > j$ $a_{ij} = 0$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 7 \\ 0 & 6 & -8 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.2.3 Matrice triangolare bassa

Una *matrice triangolare alta* è una matrice quadrata tale che per $i < j$ $a_{ij} = 0$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -9 & 0 \\ 5 & 4 & -8 & 3 \end{pmatrix}$$

Nota: una matrice diagonale è triangolare alta e triangolare bassa.

4.2.4 Matrice identità

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.2.5 Trasposta di una matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$A = (a_{ij})$ significa che l'elemento di posto (i, j) in A è $a_{i,j}$.

$A^T := B = (b_{ij})$ con $b_{ij} = a_{ji}$ per ogni coppia di indici (i, j) .

4.2.6 Complemento algebrico

Definiamo \hat{A}_{ij} complemento algebrico dell'elemento a_{ij} il determinante della matrice ottenuta eliminando da A la riga i e la colonna j (che chiamiamo M) e moltiplicando per $(-1)^{i+j}$

$$\hat{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M)$$

4.2.7 Determinante di una matrice

Il determinante di una matrice generica si calcola

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \hat{A}_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \hat{A}_{ij}$$

4.3 Funzione di trasferimento nel dettaglio

La funzione di trasferimento è definita

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

con C matrice $1 \times n$ e B matrice $m \times 1$.

Definiamo ora la (matrice aggiunta) $\text{adj}(A)$ come matrice dei complementi algebrici di A

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} & \dots & \hat{A}_{n1} \\ \hat{A}_{12} & \hat{A}_{22} & \dots & \hat{A}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{A}_{n1} & \hat{A}_{n2} & \dots & \hat{A}_{nn} \end{bmatrix}$$

La matrice inversa può essere definita con la matrice aggiunta:

$$A^{-1} = \frac{T(\text{adj})(A)}{\det(A)}$$

Quindi, se consideriamo la nostra matrice $(sI - A)$

$$(sI - A)^{-1} = \underbrace{\frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)}}_{\substack{\text{polinomio} \\ \text{caratteristico di } A}}$$

quindi scriviamo la matrice aggiunta di $(sI - A)$

$$T(\text{adj})(sI - A) = \begin{bmatrix} (\widehat{sI - A})_{11} & (\widehat{sI - A})_{12} & \dots & (\widehat{sI - A})_{n1} \\ (\widehat{sI - A})_{12} & (\widehat{sI - A})_{22} & \dots & (\widehat{sI - A})_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\widehat{sI - A})_{n1} & (\widehat{sI - A})_{n2} & \dots & (\widehat{sI - A})_{nn} \end{bmatrix}$$

matrice di polinomi in s al più di grado $n - 1$; il determinante di $sI - A$ è un polinomio in s di grado n . Per cui

$$(sI - A)^{-1} = \underbrace{\frac{1}{\det(sI - A)}}_{\text{scalare}} \cdot \text{adj}(sI - A)$$

Allora possiamo scrivere la funzione di trasferimento come

$$G(s) = \frac{\overbrace{N_{sp}(s)}^{\substack{\text{polinomio di} \\ \text{grado al più } n-1}}}{\underbrace{D_{sp}(s)}_{\substack{\text{polinomio} \\ \text{di grado } n}}} + \underbrace{\frac{D}{s}}_{\substack{\text{polinomio non} \\ \text{strettamente} \\ \text{proprio}}}$$

in forma estesa:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\beta_\nu s^\nu + \beta_{\nu-1} s^{\nu-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0}{s^{\nu^2} + \alpha_{\nu-1} s^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

Le radici di $N(s)$ si dicono **zeri**, le radici di $D(s)$ si dicono **poli**; i poli sono radici di $\det(sI - A)$ quindi sono autovalori di A . Poli e zeri sono reali o complessi coniugati, poiché radici di polinomi a coefficienti reali.

4.3.1 Esempio 1

Se prendiamo $y(t) = \frac{d}{dt}u(t)$, allora la sua trasformata sarà $Y(s) = sU(s)$, quindi la funzione di trasferimento del sistema è $G(s) = s$; il sistema non è causale, perché il grado del numeratore ha grado maggiore di quello del denominatore.

Questa considerazione diventa evidente se si utilizza la definizione di derivata:

$$y(t) = \frac{d}{dt}(u(t)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(t+h) - u(t)}{h}$$

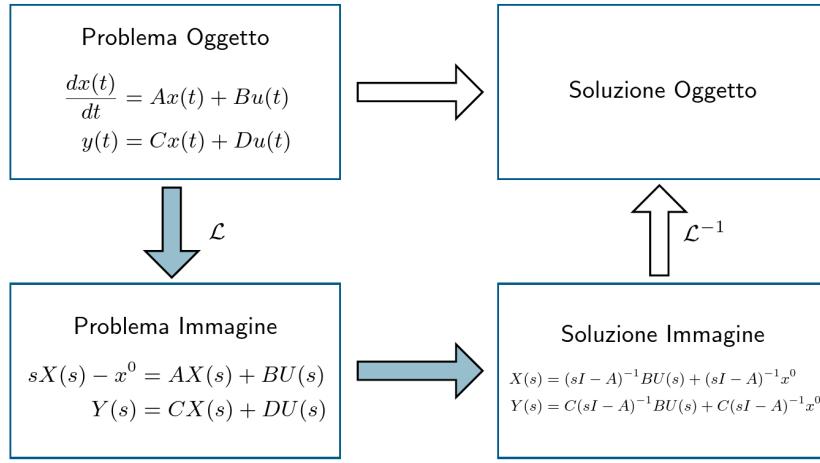
infatti per conoscere la derivata in t devo conoscere il valore del segnale in $t + h$.

4.3.2 Esempio 2

$$y(t) = \int_0^t u(\tau) dt \quad Y(s) = \frac{1}{s} U(s)$$

4.4 Schema dell'utilizzo della trasformata di Laplace

²trasformata della delta di Dirac



4.5 Rappresentazioni e parametri della funzione di trasferimento

Può essere conveniente, in alcune situazioni, rappresentare la funzione di trasferimento in una delle seguenti forme fattorizzate

$$G(s) = \frac{\rho \prod_i (s + z_i) \prod_i (s^2 + 2\zeta_i \alpha_{ni} s + \alpha_{ni}^2)}{s^g \prod_i (s + p_i) \prod_i (s^2 + 2\xi_i \omega_{ni} s + \omega_{ni}^2)} \quad (4.5.29)$$

$$G(s) = \frac{\mu \prod_i (1 + \tau_i s) \prod_i \left(1 + \frac{2\zeta_i}{\alpha_{ni}} + \frac{s^2}{\alpha_{ni}^2}\right)}{s^g \prod_i (1 + T_i s) \prod_i \left(1 + \frac{2\xi_i}{\omega_{ni}} + \frac{s^2}{\omega_{ni}^2}\right)} \quad (4.5.30)$$

N.B. il pedice n sta per “naturale”. Con

- lo scalare ρ è detto costante di trasferimento, μ il *guadagno*;
- l'intero g è detto *tipo*;
- gli scalari $-z_i$ e $-p_i$ sono gli zeri e i poli reali non nulli;
- gli scalari $\alpha_{ni} > 0$ e $\omega_{ni} > 0$ sono le *pulsazioni naturali* delle coppie di zeri e poli complessi coniugati;
- gli scalari ζ_i e ξ_i , in modulo minori di 1, sono gli *smorzamenti* degli zeri e dei poli complessi coniugati;
- gli scalari $\tau_i \neq 0$ e $T_i \neq 0$ sono le costanti di tempo

La seconda equazione (4.5.30) è detta *forma di Bode*.

4.5.1 Esempio

$$G(s) = 10 \cdot \frac{\overbrace{s + 10}^{\prod_i (s + z_i)}}{s^2(s + 1)(s + 100)}$$

$$\begin{aligned} z_1 &= 10 \\ p_1 &= 1 & p_2 &= 100 \\ \rho &= 10 & g &= 2 \end{aligned}$$

C'è un solo zero, che è -10 , mentre i poli sono $0, -1, -100$.

Scriviamo la funzione di trasferimento nella seconda forma (di Bode):

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{10}{s^2} \cdot \frac{10 \cdot \left(1 + \frac{s}{10}\right)}{100 \left(1 + s\right) \left(1 + \frac{s}{100}\right)} = 1 \cdot \frac{(1 + 0.1s)}{s^2(1 + s)(1 + 10^{-2}s)} \\ \mu &= 1 & \tau_1 &= 0.1 \\ T_1 &= 1 & T_2 &= 10^{-2} \end{aligned}$$

Prendiamo un polinomio di II grado del denominatore

$$s^2 + 2\xi_i \omega_{ni} s + \omega_{ni}^2$$

le radici del polinomio sono:

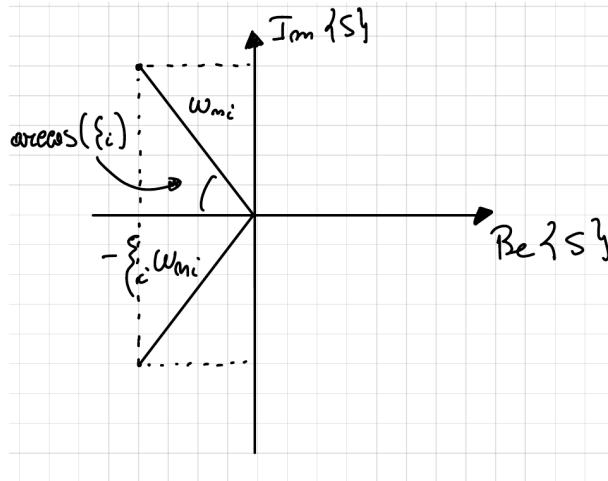
$$\begin{aligned}s_{1/2} &= -\xi_i \omega_{ni} \pm \sqrt{\xi_i^2 \omega_{ni}^2 - \omega_{ni}^2} \\ &= -\xi_i \omega_{ni} \pm \omega_{ni} \sqrt{\xi_i^2 - 1}\end{aligned}$$

Se $|\xi_i| < 1$ abbiamo dei *poli complessi coniugati*

$$s_{1/2} = -\xi_i \omega_{ni} + j\omega_{ni} \sqrt{1 - \xi_i^2}$$

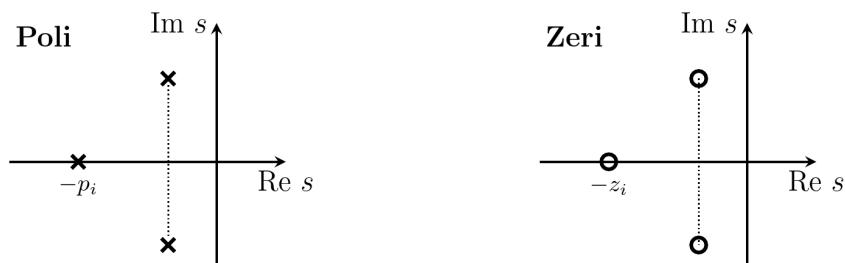
$$\begin{aligned}|s_1| = |s_2| &= \sqrt{\xi_i^2 \omega_{ni}^2 + \omega_{ni}^2 (1 - \xi_i^2)} \\ &= \sqrt{\xi_i^2 \omega_{ni}^2 + \omega_{ni}^2 - \omega_{ni}^2 \xi_i^2} = \omega_{ni}\end{aligned}$$

Rappresentiamo i poli nel piano complesso:



ω_{ni} quindi è il modulo delle radici, ξ_i ci da invece informazioni sull'angolo delle radici nel piano complesso: se $\xi_i > 0$ si hanno dei poli a parte reale negativa, se $\xi_i < 0$ si hanno dei poli a parte reale positiva. Se $\xi_i = 0$ gli autovalori sono immaginari puri, quindi i modi del sistema sono sinusoidi non smorzate, dato che lo smorzamento è nullo.

Nella rappresentazione classica si una una x per i poli e un \circ per gli zeri



4.6 Cancellazioni

4.6.1 Esempio 1

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = -2x_2 + u$$

$$y = x_2$$

$$\begin{aligned}
G(s) &= C(sI - A)^{-1}B \\
&= [0 \quad 1] \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} [0 \quad 1] \\
&= [0 \quad 1] \begin{bmatrix} \frac{s+2}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ 0 & \frac{s+2}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}^{-1} [0 \quad 1] \\
&= \frac{s+1}{(s+1)(s+2)} \\
&= \frac{1}{s+2}
\end{aligned}$$

Guardando questo esempio ci verrebbe da pensare che le cancellazioni sono innocue, questo perché stiamo cancellando il polinomio associato a un autovalore reale negativo, che quindi fa convergere il mio sistema. Cosa diversa è se cancelliamo un polinomio associato a un autovalore reale positivo.

4.6.2 Esempio 2

Infatti se prendiamo un sistema di questo tipo

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_1 + x_2 \\
\dot{x}_2 &= x_2 + u \\
y &= x_2
\end{aligned}$$

la funzione di trasferimento di questo sistema è

$$G(s) = \frac{(s+1)}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+2}$$

In questo caso stiamo cancellando un polinomio associato a un autovalore reale positivo, che quindi fa underline(divergere) il sistema, perciò bisogna stare attenti quando si eseguono cancellazioni. Non basta guardare la funzione di trasferimento per conoscere l'andamento del sistema.

4.7 Antitrasformazione di Laplace

Ricordiamo che la trasformata della risposta di un sistema Lineare Tempo Invariante (LTI) singolo ingresso singola uscita (SISO) è data da

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}x(0) + G(s)U(s)$$

con $C(sI - A)^{-1} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$. Si può far vedere che gli elementi di $C(sI - A)^{-1}$ sono rapporti di polinomi.

Nel corso della trattazione considereremo ingressi tali che $U(s)$ sia un rapporto di polinomi.

Quindi possiamo scrivere

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

con $N(s)$ e $D(s)$ opportuni polinomi.

Ricordiamo che per $x(0) = 0$ (risposta forzata)

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

Quindi, applicando in ingresso una delta di Dirac $u(t) = \delta(t)$, che ha trasformata $U(s) = 1$, si ha

$$Y(s) = G(s)$$

per questo per la risposta all'impulso le radici di $D(s)$ sono i poli di $G(s)$.

5 Sviluppo di Heaviside o in fratti semplici (poli distinti)

5.1 Caso 1: poli reali o complessi coniugati distinti con molteplicità 1

Possiamo scrivere $Y(s)$ come

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)} = \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{s + p_i}$$

con k_i detti residui. Consideriamo

$$(s + p_i) \frac{N(s)}{D(s)} \Big|_{s=-p_i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{k_j(s+p_i)}{s + p_j} \Big|_{s=-p_i} + k_i$$

quindi ciascun residuo k_i può essere calcolato come

$$k_i = (s + p_i) \frac{N(s)}{D(s)} \Big|_{s=-p_i}$$

N.B. k_i reali se associati a poli reali, complessi coniugati se associati a una coppia di poli complessi coniugati.

Quindi, antitrasformando $Y(s)$ sviluppata in fratti semplici

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \sum_{i=1}^n k_i \mathcal{L}\left[\frac{1}{s + p_i}\right] = \sum_{i=1}^n k_i e^{-p_i t} 1(t)$$

5.1.1 Esempio

Vogliamo scrivere la $Y(s)$ in questo modo:

$$Y(s) = \frac{s^2 + s + 1}{(s+2)(s+10)(s+1)} = \frac{k_1}{s+2} + \frac{k_2}{s+10} + \frac{k_3}{s+1}$$

allora

$$(s+2)Y(s) \Big|_{s=-2} = \left[\cancel{\frac{(s+2)k_1}{s+2}} + \overbrace{\frac{(s+2)k_2}{s+10}}^0 + \overbrace{\frac{(s+2)k_3}{s+1}}^0 \right]_{s=-2} = k_1$$

lo riscrivo con $Y(s)$ nella forma "originale"

$$\begin{aligned} (s+2)Y(s) \Big|_{s=-2} &= \frac{(s+2)(s^2 + s + 1)}{(s+2)(s+10)(s+1)} \Big|_{s=-2} \\ &= \frac{(-2)^2 + (-2) + 1}{(-2+10)(-2+1)} = -\frac{3}{8} \end{aligned}$$

ergo

$$k_1 = -\frac{3}{8}$$

Calcoliamo anche le altre costanti

$$\begin{aligned}
(s+10)Y(s)|_{s=-10} &= \frac{(s+10)(s^2+s+1)}{(s+2)(s+10)(s+1)} \Big|_{s=-10} \\
&= \frac{(-10)^2 + (-10) + 1}{(-10+2)(-10+1)} \\
&= -\frac{91}{72} = k_2
\end{aligned}$$

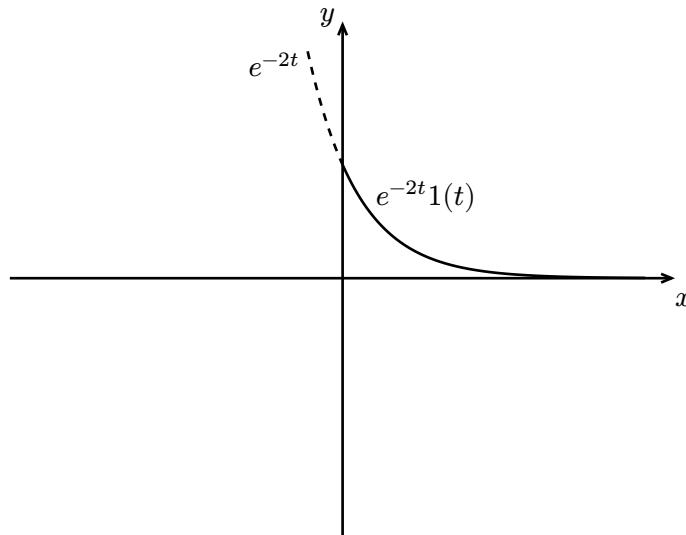
$$\begin{aligned}
(s+1)Y(s)|_{s=-1} &= \frac{(s+1)(s^2+s+1)}{(s+2)(s+10)(s+1)} \Big|_{s=-1} \\
&= \frac{(-1)^2 + (-1) + 1}{(-1+2)(-1+1)} \\
&= -\frac{1}{9} = k_3
\end{aligned}$$

Quindi possiamo scrivere la $Y(s)$ come

$$\begin{aligned}
Y(s) &= -\frac{3}{8} \frac{1}{s+2} \\
&\quad \downarrow \mathcal{L}^{-1} \\
Y(s) &= -\frac{3}{8} \underbrace{\frac{1}{s+2}}_{\substack{\downarrow \mathcal{L}^{-1} \\ e^{-2t}1(t)}} + \frac{91}{72} \underbrace{\frac{1}{s+10}}_{\substack{\downarrow \mathcal{L}^{-1} \\ e^{-10t}1(t)}} + \frac{1}{9} \underbrace{\frac{1}{s+1}}_{\substack{\downarrow \mathcal{L}^{-1} \\ e^{-t}1(t)}}
\end{aligned}$$

calcoliamo l'uscita del sistema con la formula di antitrasformazione

$$\begin{aligned}
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] \\
&= -\frac{3}{8} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] + \frac{91}{72} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+10}\right] + \frac{1}{9} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] \\
&= -\frac{3}{8}e^{-2t}1(t) + \frac{91}{72}e^{-10t}1(t) + \frac{1}{9}e^{-t}1(t)
\end{aligned}$$



N.B. $1(t)$ definisce la funzione solo per $t \geq 0$.

5.1.2 Forma reale per poli complessi coniugati

Consideriamo la coppia di poli complessi coniugati

$$p_{i,1} = \sigma + j\omega \quad p_{i,2} = \sigma - j\omega$$

con residui associati (complessi coniugati)

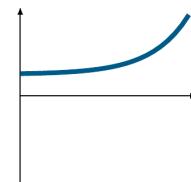
$$k_{i,1} = Me^{-j\varphi} \quad k_{i,2} = Me^{j\varphi}$$

L'antitrasformata dei due termini associati è data da (ricordando la 3.6)

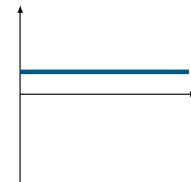
$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{k_{i,1}}{s + p_{i,1}} + \frac{k_{i,2}}{s + p_{i,2}} \right] &= Me^{-j\varphi} e^{-p_{i,1}t} 1(t) + Me^{j\varphi} e^{-p_{i,2}t} 1(t) \\ &= Me^{-j\varphi} e^{-(\sigma+j\omega)t} 1(t) + Me^{j\varphi} e^{-(\sigma-j\omega)t} 1(t) \\ &= 2Me^{-\sigma t} (e^{-j(\omega t+\varphi)} + e^{j(\omega t+\varphi)}) 1(t) \\ &= 2Me^{-\sigma t} \frac{(e^{-j(\omega t+\varphi)} + e^{j(\omega t+\varphi)})}{2} 1(t) \\ \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2} &= \cos(\alpha) \implies 2Me^{-\sigma t} \cos(\omega t + \varphi) 1(t)\end{aligned}$$

5.1.3 Modi naturali di poli reali distinti

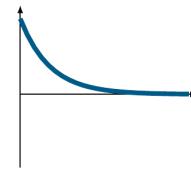
- $e^{-p_i t}, -p_i > 0$



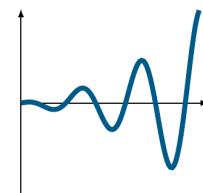
- $e^{-p_i t}, -p_i = 0$



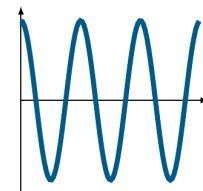
- $e^{-p_i t}, -p_i < 0$



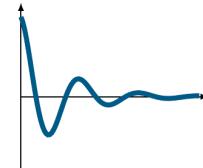
- $e^{-\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_i), -\sigma_i > 0$

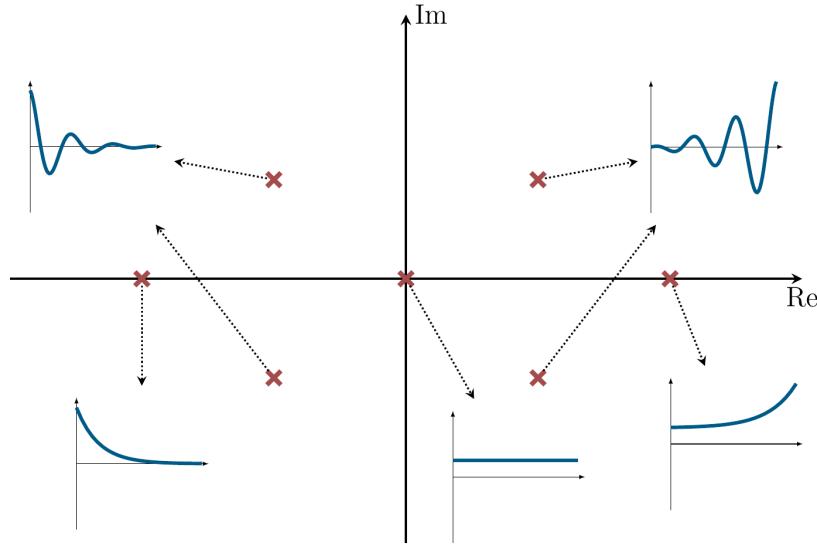


- $e^{-\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_i), -\sigma_i = 0$



- $e^{-\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_i), -\sigma_i < 0$





5.2 Caso 2: Poli reali o complessi coniugati multipli con molteplicità maggiore di 1

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{\prod_{i=1}^q (s + p_i)^{n_i}} = \sum_{i=1}^q \sum_{h=1}^{n_i} \frac{k_{i,h}}{(s + p_i)^h}$$

con $k_{i,h}, h = 1, \dots, n_i$ residui del poli $-p_i$. Consideriamo

$$\begin{aligned} (s + p_i)^{n_i} \frac{N(s)}{D(s)} &= (s + p_i)^{n_i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^q \sum_{h=1}^{n_j} \frac{k_{j,h}}{(s + p_j)^h} + \sum_{h=1}^{n_i} (s + p_i)^{n_i-h} k_{i,h} \\ &= (s + p_i)^{n_i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^q \sum_{h=1}^{n_j} \frac{k_{j,h}}{(s + p_j)^h} + \sum_{h=1}^{n_i-1} (s + p_i)^{n_i-h} k_{i,h} + k_{i,n_i} \end{aligned}$$

Quindi il residuo k_{i,n_i} è dato da

$$k_{i,n_i} = (s + p_i)^{n_i} \frac{N(s)}{D(s)} \Big|_{s=-p_i}$$

Derivando $(s + p_i)^{n_i} \frac{N(s)}{D(s)}$ si calcolano gli altri residui come

$$k_{i,h} = \frac{1}{(n_i - h)!} \frac{d^{n_i-h}}{ds^{n_i-h}} \left[(s + p_i)^{n_i} \frac{N(s)}{D(s)} \right] \Big|_{s=-p_i}$$

Antitrasformando $Y(s)$ sviluppata in fratti semplici, ricordando la tabella delle trasformate 3.6 e la proprietà di derivazione nel dominio della variabile complessa (3.4.21)

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \sum_{i=1}^q \sum_{h=1}^{n_i} k_{i,h} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s + p_i)^h} \right] \\ &= \sum_{i=1}^q \sum_{h=1}^{n_i} k_{i,h} \frac{t^{h-1}}{(h-1)!} e^{-p_i t} 1(t) \end{aligned}$$

5.2.1 Esempio

Consideriamo la seguente trasformata di Laplace dell'uscita di un generico sistema

$$Y(s) = \frac{s+3}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{k_{1,1}}{(s+1)} + \frac{k_{1,2}}{(s+1)^2} + \frac{k_2}{(s+2)}$$

$$k_2 = (s+2)Y(s)|_{s=-2}$$

$$k_{1,2} = (s+1)^2 Y(s)|_{s=-1}$$

$$\begin{aligned} k_2 &= \cancel{(s+2)} \frac{(s+3)}{(s+1)^2 \cancel{(s+2)}} \Big|_{s=-2} & k_{1,1} &= \cancel{(s+2)^2} \frac{(s+3)}{\cancel{(s+1)^2}(s+2)} \Big|_{s=-1} \\ &= \frac{(-2+3)}{(-2+1)^2} & &= \frac{(-1+3)}{(-1+2)} \\ &= 1 & &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} ((s+1)^2 Y(s)) \Big|_{s=-1} &= \frac{d}{ds} \left[\frac{k_{1,1}(s+1)^2}{(s+1)} + \frac{k_{1,2} \cancel{(s+1)^2}}{\cancel{(s+1)^2}} + \frac{k_2(s+1)^2}{s+2} \right]_{s=-1} \\ &= \left[k_{1,1} + 0 + k_2 \frac{\overbrace{(s+1)^2}^0 - 2\overbrace{(s+1)(s+2)}^0}{(s+2)} \right]_{s=-1} \\ &= k_{1,1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{1,1} &= \frac{d}{ds} \cancel{(s+1)^2} \frac{s+3}{\cancel{(s+1)^2}(s+2)} \Big|_{s=-1} \\ &= \frac{d}{ds} \frac{s+3}{s+2} \Big|_{s=-1} \\ &= \frac{(s+3)-(s+2)}{(s+2)^2} \Big|_{s=-1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

quindi possiamo scrivere la $Y(s)$ come

$$Y(s) = \frac{k_{1,1}}{(s+1)} + \frac{k_{1,2}}{(s+1)^2} + \frac{k_2}{(s+2)} = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+2)}$$

ricordando la [tabella delle traformate 3.6](#) e la proprietà di [traslazione nel dominio della variabile complessa \(3.4.18\)](#), antitrasformiamo tutte le componenti della funzione di trasferimento

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s+2)^2} \right] = e^{-2t} t 1(t) \quad \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s+1)^2} \right] = e^{-t} t 1(t)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= k_{1,1} e^{-t} 1(t) + k_{1,2} t e^{-t} 1(t) + k_2 e^{-2t} 1(t) \\ &= e^{-t} 1(t) + 2t e^{-t} 1(t) + e^{-2t} 1(t) \end{aligned}$$

5.2.2 Forma reale per poli complessi coniugati con molteplicità maggiore di 1

Si può dimostrare che per una coppia di poli complessi coniugati

$$\sigma_i + j\omega_i \quad \sigma_i - j\omega_i$$

con molteplicità n_i , il contributo elementare associato è dato da

$$\sum_{h=1}^{n_i} 2M_{i,h} \frac{t^{h-1}}{(h-1)!} e^{-\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \sigma_{i,h}) 1(t)$$

Ad esempio, consideriamo la seguente funzione di trasferimento

$$Y(s) = \frac{N(s)}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$$

i poli della funzione sono

$$\underbrace{-\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}_{\sigma} \quad \underbrace{-\xi\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}_{\omega}$$

quindi

$$Y(s) = \frac{N(s)}{(s + \sigma + j\omega)(s + \sigma - j\omega)}$$

e il contributo elementare

$$\begin{aligned} & 2M_{1,1}e^{-\sigma t} \cos(\omega t + \varphi)1(t) + 2M_{1,2}te^{-\sigma t} \cos(\omega t + \varphi)1(t) \\ &= 2M_{1,1}e^{-\xi\omega_n t} \cos(\omega_n \sqrt{1-\xi^2}t + \varphi)1(t) + 2M_{1,2}e^{-\xi\omega_n t} \cos(\omega_n \sqrt{1-\xi^2}t + \varphi)1(t) \end{aligned}$$

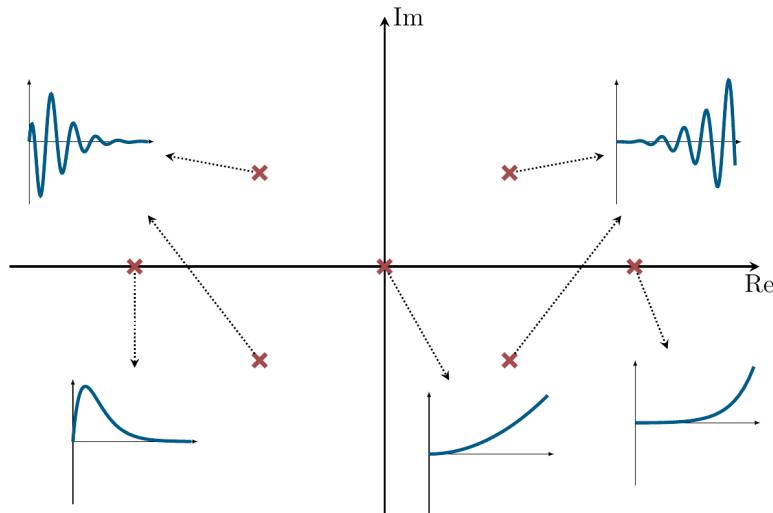
5.2.3 Modi naturali di poli multipli

Un modo naturale di un polo reale multiplo $-p_i$ è definito come

$$\frac{t^{h-1}}{(h-1)!} e^{-p_i t} 1(t)$$

I modi naturali di una coppia di poli complessi coniugati multipli $-(\sigma_i + j\omega_i)$ e $-(\sigma_i - j\omega_i)$ sono definiti come

$$\frac{t^{h-1}}{(h-1)!} e^{-\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_{i,h}) 1(t)$$



5.2.4 Modi naturali come risposta all'impulso

Sappiamo che per $x(0) = 0$ (risposta forzata)

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

se applichiamo in ingresso una delta di Dirac $u(t) = \delta(t)$

$$Y(s) = G(s)$$

Quindi la risposta ad un impulso è una combinazione lineare dei modi naturali del sistema lineare tempo invariante (SISO) descritto da $G(s)$.

5.3 Risposta a un ingresso generico

Ricordiamo che

$$Y(s) = \underbrace{C(sI - A)^{-1}}_{\frac{N_\ell(s)}{D(s)}} - x(0) + \underbrace{G(s)U(s)}_{\frac{N_f(s)}{D(s)} \frac{N_u(s)}{D_u(s)}}$$

in cui $C(sI - A)^{-1}x(0)$, $G(s)$ e $U(s)$ sono rapporti di polinomi. Quindi

$$\begin{aligned} y(t) &= y_{\ell(t)} + y_{f(t)} \\ &= y_{\ell(t)} + y_{f,G}(t) + y_{g,U}(t) \end{aligned}$$

in cui

- $y_{\ell}(t)$ e $y_{f,G}(t)$ sono combinazioni lineari di modi naturali del sistema con matrici A, B, C e D ;
- $y_{f,U}(t)$ è combinazione lineare di “modi” presenti nell’ingresso $u(t)$ (dovuti alle radici del denominatore di $U(s)$).

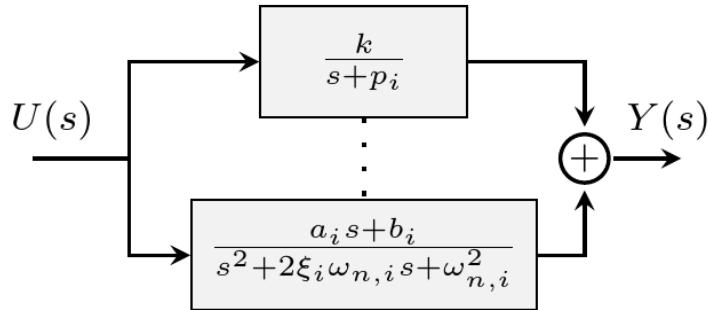
5.4 Risposta di sistemi elementari

Ricordiamo la [formula di parametrizzazione \(4.5.29\)](#)

$$G(s) = \frac{\rho \prod_i (s + z_i) \prod_i (s^2 + 2\zeta_i \alpha_{ni}s + \alpha_{ni}^2)}{s^g \prod_i (s + p_i) \prod_i (s^2 + 2\xi_i \omega_{ni}s + \omega_{ni}^2)}$$

Consideriamo il caso di poli distinti. Da quanto visto fino ad ora risulta che per $x(0) = 0$ (risposta forzata)

$$Y(s) = G(s)U(s) = \sum_i \frac{k_i}{s + p_i} + \sum_i \frac{a_i s + b_i}{s^2 + 2\xi_i \omega_{n,i}s + \omega_{n,i}^2}$$



5.5 Stabilità esterna (BIBO)

Un sistema si dice BIBO (Bounded-Input Bounded-Output) stabile se la sua uscita forzata è limitata per ogni ingresso limitato.

Da quanto visto fino ad ora con lo sviluppo di Heaviside (fratti semplici) si può dedurre che un sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ è BIBO stabile se e solo se tutti i poli di $G(s)$ sono a parte reale strettamente minore di zero.

N.B. La BIBO stabilità è equivalente alla stabilità asintotica.

6 Analisi di sistemi attraverso funzione di trasferimento

6.1 Dalla Funzione di Trasferimento allo spazio degli stati

Consideriamo la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{\mu}{1 + Ts}$$

Questo tipo di sistemi può essere rappresentato nello spazio degli stati (la rappresentazione non è unica) come

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\frac{1}{T}x + \frac{\mu}{T}\mu \\ y &= x\end{aligned}\tag{6.1.31}$$

Infatti, la funzione di trasferimento associata alla (6.1.31) è

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{\mu}{1 + Ts}$$

dove

- il parametro T è la costante di tempo associata al polo;
- il parametro μ è il *guadagno*

6.2 Sistemi del primo ordine

Definiamo un sistema nello spazio della funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{\mu}{1 + Ts}U(s) = \frac{k}{s}$$

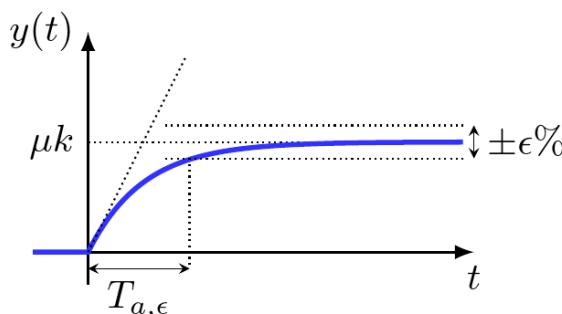
$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{\mu k}{s(1 + Ts)}$$

con $\mu > 0, k > 0, T > 0$; da notare che se $T < 0$ il sistema è instabile perché si avrebbe un polo positivo.

Allora mediante lo sviluppo di Heaviside e la formula di antitrasformazione troviamo che

$$y(t) = \mu k(1 - e^{-t/T})1(t)$$

$$y(0) = 0, \dot{y}(0) = \frac{\mu k}{T}, y_\infty = \mu k$$



Definiamo il **tempo di assestamento** $T_{\alpha,\varepsilon}$ come il tempo tale per cui

$$(1 - 0.001\varepsilon)y_\infty \leq y(t) \leq (1 + 0.01\varepsilon)y_\infty \quad \forall t \geq T_{\alpha,\varepsilon}$$

6.2.1 Esempio

Consideriamo un sistema con

$$G(s) = \frac{\mu}{1 + Ts} = \frac{\mu}{T} \frac{1}{s + \frac{1}{T}}$$

con ingresso $u(t) = k1(t)$, quindi $U(s) = \frac{k}{s}$

$$\begin{aligned}Y(s) &= G(s)U(s) \\ &= \frac{\mu}{T} \frac{1}{s + \frac{1}{T}} \frac{k}{s} \\ &= \frac{k_1}{s + \frac{1}{T}} + \frac{k_2}{s}\end{aligned}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\underbrace{\frac{k_1}{s + \frac{1}{T}}}_{y_{G,t}} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[\underbrace{\frac{k_2}{s}}_{y_{U,t}} \right]$$

$$= k_1 \underbrace{e^{-t/T}}_{\text{sistema}} + k_2 \underbrace{1(t)}_{\text{ingresso}}$$

$$k_1 = \left(s + \frac{1}{T} \right) Y(s) \Big|_{s=-\frac{1}{T}}$$

$$= \cancel{\left(s + \frac{1}{T} \right)} \frac{\mu}{T} \frac{k}{(s + \cancel{\frac{1}{T}})s} \Big|_{s=-\frac{1}{T}}$$

$$= \frac{\mu}{T} \frac{k}{T - \frac{1}{T}}$$

$$= -\mu k$$

$$k_2 = sY(s)|_{s=0}$$

$$= \frac{\mu}{T} \frac{k}{s + \frac{1}{T}} \Big|_{s=0}$$

$$= \mu k$$

$$y(t) = -\mu k e^{-\frac{t}{T}} 1(t) + \mu k 1(t)$$

$$= \mu k (1 - e^{-\frac{t}{T}}) 1(t)$$

La risposta ottenuta ci dice che, dando in ingresso il gradino, il sistema ci metterà un po' per raggiungerlo, in base alla sua dinamica.

Per quanto riguarda invece il tempo di assestamento, esso si calcola

$$T_{\alpha,\varepsilon} = T \ln \left(\frac{1}{0.01\varepsilon} \right)$$

$$T_{\alpha,5} \approx 3T \quad T_{\alpha,1} \approx 4.6T$$

6.2.2 Considerazioni

- Per calcolare la risposta riscrivere $G(s) = \frac{\mu}{T} \frac{1}{s + \frac{1}{T}}$ e sviluppare $Y(s) = G(s)U(s)$ in fratti semplici;
- la risposta è monotona, i modi presenti sono $1(t)$ dell' ingresso e $e^{-\frac{t}{T}}$ del sistema;
- il valore asintotico è μk , quindi se l'ingresso fosse un riferimento k da seguire, avremmo un errore a regime $e_\infty = |1 - \mu|k$.

6.3 Sistemi del secondo ordine

La funzione di trasferimento di sistemi del secondo ordine è

$$G(s) = \mu \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Questo tipo di sistemi può essere rappresentato nello spazio degli stati come

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\omega_n^2 - 2\xi\omega_n x_2 + \mu\omega_n^2 u \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

dove

- il parametro ξ è il coefficiente di smorzamento;
- il paramento ω_n è la pulsazione naturale;
- il parametro μ è il guadagno.

6.3.1 Sistemi del secondo ordine con poli complessi coniugati

$$G(s) = \mu \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad U(s) = \frac{k}{s}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \mu k \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$$

con $|\xi| < 1$ e $\omega_n > 0$

$$y(t) = \mu k(1 - Ae^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega t + \varphi))1(t)$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad \omega = \omega_n \sqrt{1-\xi^2} \quad \varphi = \arccos(\xi)$$

$$y(0) = \dot{y}(0) = 0 \quad \ddot{y}(0) = \mu\omega_n^2 \quad y_\infty = \mu k$$

$$T_{a,5} \approx \frac{3}{\xi\omega_n} \quad T_{a,1} \approx \frac{4.6}{\xi\omega_n}$$

Introduciamo un altro parametro che è la **sovraelongazione percentuale**, definita come

$$S\% = 100 \frac{y_{\max} - y_\infty}{y_\infty}$$

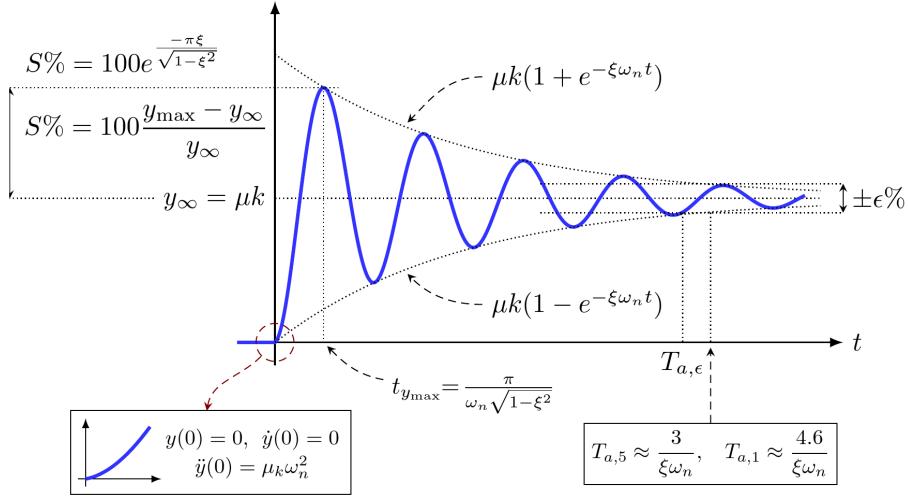
con $y_{T(\max)}$ valore massimo e y_∞ valore asintotico della risposta.

Per i sistemi del secondo ordine la sovraelongazione percentuale vale

$$S\% = 100e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}}$$

Analizziamo ora la risposta

$$y(t) = \mu k(1 - Ae^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega t + \varphi))1(t)$$



Dal grafico possiamo evincere che la sovraelongazione percentuale indica di quanto supero il valore stabile prima del transitorio.

Come abbiamo visto prima, la sovraelongazione percentuale dipende solo dallo smorzamento, e, se scegliamo un valore massimo di sovraelongazione S^* , possiamo ricavare il valore di ξ necessario:

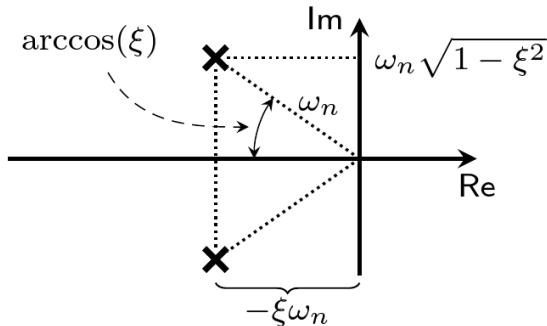
$$S\% \leq S^* \iff \xi \geq \frac{\left| \ln\left(\frac{S^*}{100}\right) \right|}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2\left(\frac{s^*}{100}\right)}}$$

6.3.2 Luogo di punti a tempo di assestamento costante

Adesso proviamo a caratterizzare i sistemi del secondo ordine (con poli complessi coniugati) la cui risposta al gradino ha lo stesso tempo di assestamento.

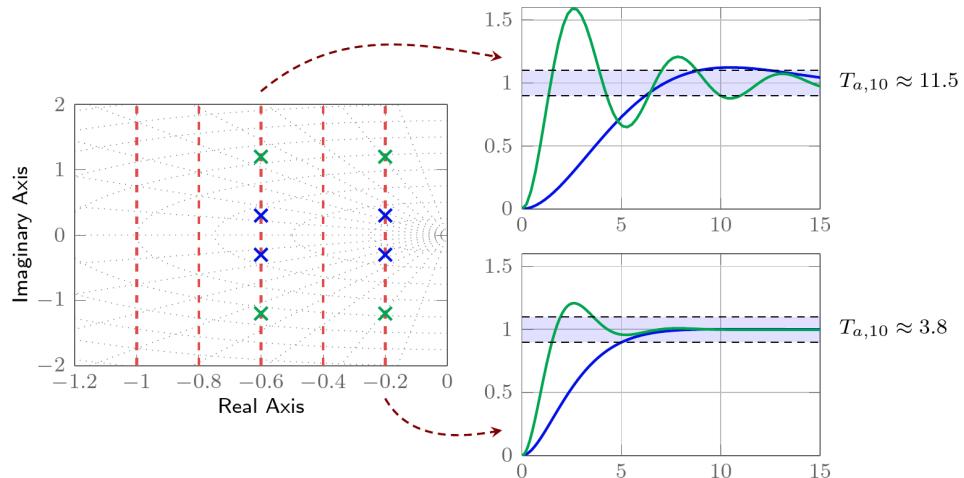
Ricordiamo che

- abbiamo approssimato $T_{a,5} \approx \frac{3}{\xi\omega_n}$ e $T_{a,1} \approx \frac{4.6}{\xi\omega_n}$
- $-\xi\omega_n$ è la parte reale dei poli complessi coniugati



Quindi sistemi con poli complessi coniugati che hanno la stessa parte reale avranno una risposta al gradino con stesso tempo di assestamento.

Sul piano complesso i luoghi di punti a tempo di assestamento costante sono rette parallele all'asse immaginario.



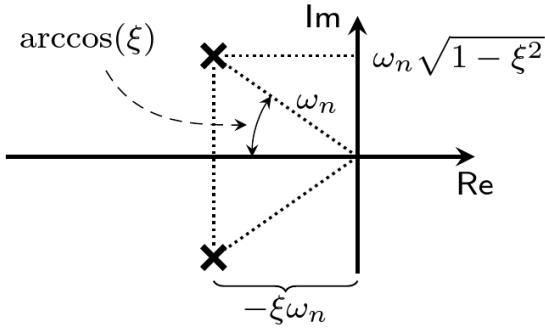
Nella figura vediamo in verde e in blu due coppie di poli distinti, ma con parte reale uguale; le risposte associate a questi poli sono evidentemente diverse (grafico in blu e grafico in verde), ma hanno lo stesso tempo di assestamento.

6.3.3 Luogo di punti a sovraelongazione costante

Proviamo a caratterizzare i sistemi del secondo ordine (con poli complessi coniugati) la cui risposta al gradino ha la stessa sovraelongazione.

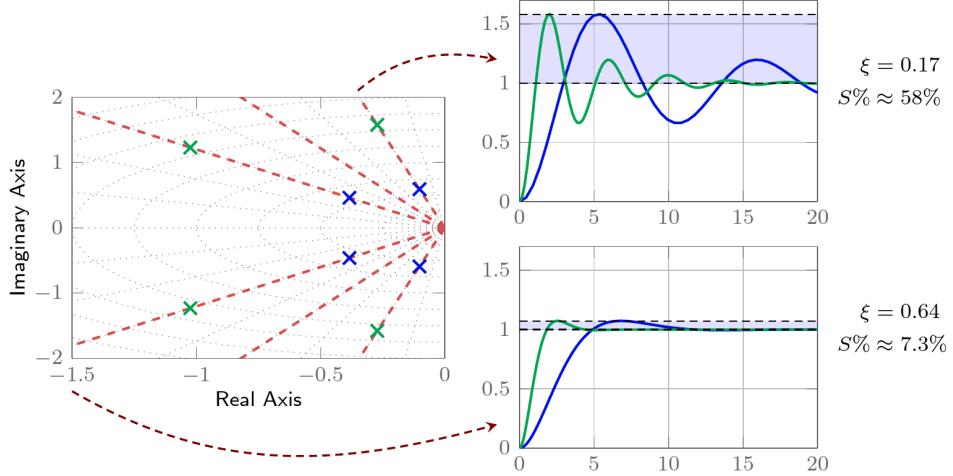
Ricordiamo che

- $S\% = 100e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$
- $\text{arccos}(\xi)$ è l'angolo formato con l'asse reale



Quindi sistemi con stesso coefficiente di smorzamento ξ avranno una risposta al gradino con stessa sovraelongazione.

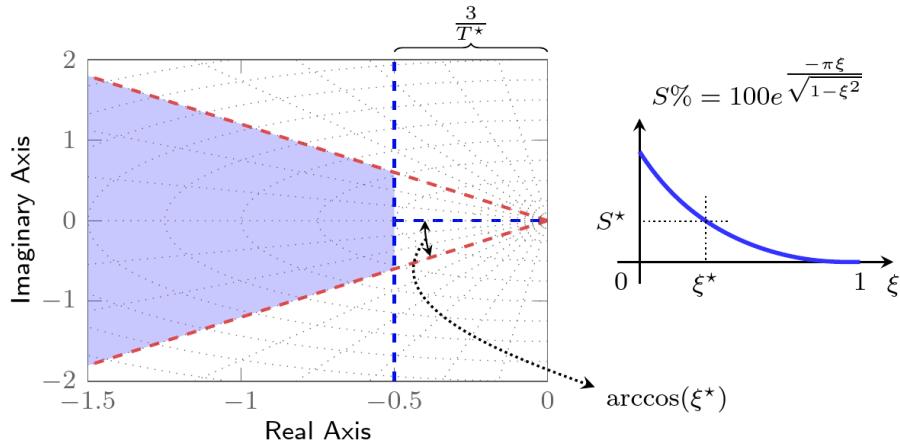
Sul piano complesso i luoghi di punti a sovraelongazione costante sono semirette uscenti dall'origine.



6.3.4 Mappatura di specifiche temporali nel piano complesso

Vogliamo caratterizzare i sistemi del secondo ordine (con poli complessi coniugati) con $S\% \leq S^*$ e $T_{a,5} \leq T^*$.

Le specifiche sono soddisfatte per $\xi \geq \xi^*$ (con $\xi \leq 1$) e $\xi\omega_n \geq \frac{3}{T^*}$



i poli complessi coniugati devono trovarsi nella zona colorata.

6.3.5 Sistemi del secondo ordine con poli reali

Caso $T_1 \neq T_2$ e $T_1 > T_2$

$$G(s) = \frac{\mu}{(1+T_1s)(1+T_2s)} \quad U(s) = \frac{k}{s}$$

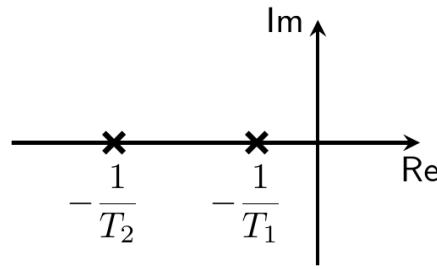
$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{\mu k}{s(1+T_1s)(1+T_2s)}$$

$$\mu > 0$$

$$k > 0$$

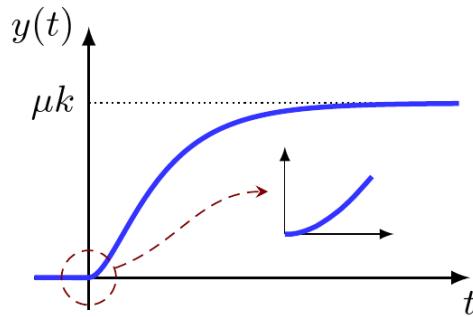
$$T_1 > 0$$

$$T_2 > 0$$



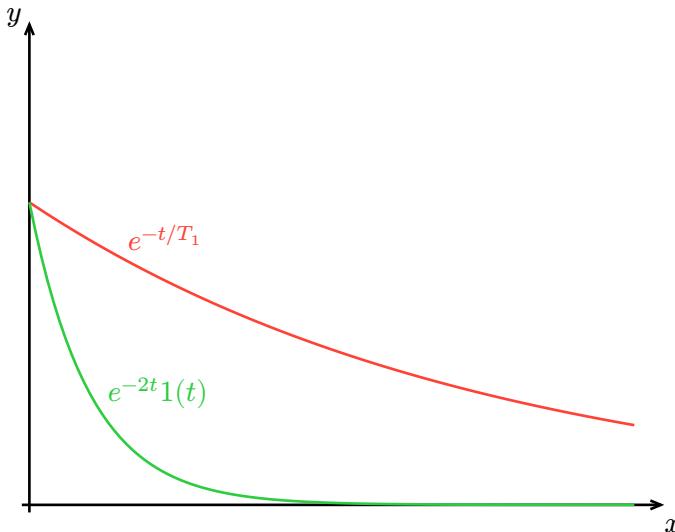
$$y(t) = \mu k \left(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right) 1(t)$$

$$y(0) = 0 \quad \dot{y}(0) = 0 \quad \ddot{y}(0) = \frac{\mu K}{T_1 T_2} \quad y_\infty = \mu k$$



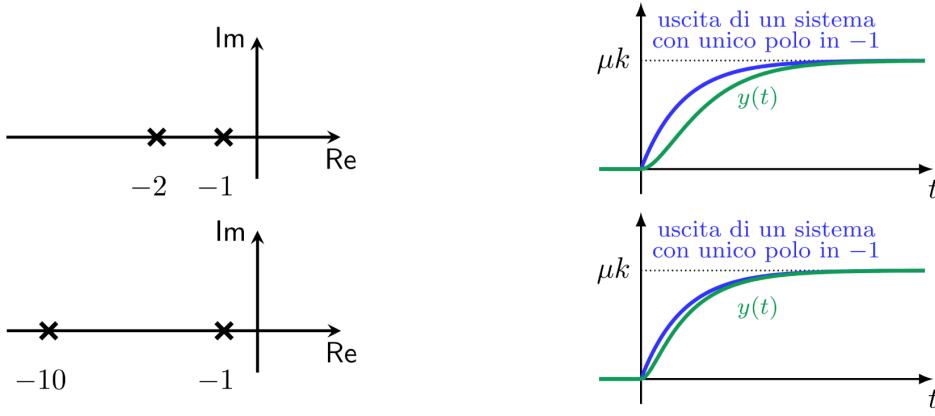
6.4 Sistemi a polo dominante

Consideriamo $T_1 \gg T_2$:



Nella risposta $e^{-\frac{t}{T_2}}$ tende a zero velocemente, mentre $\frac{T_2}{T_1 - T_2} \ll \frac{T_1}{T_1 - T_2} \approx 1$, quindi

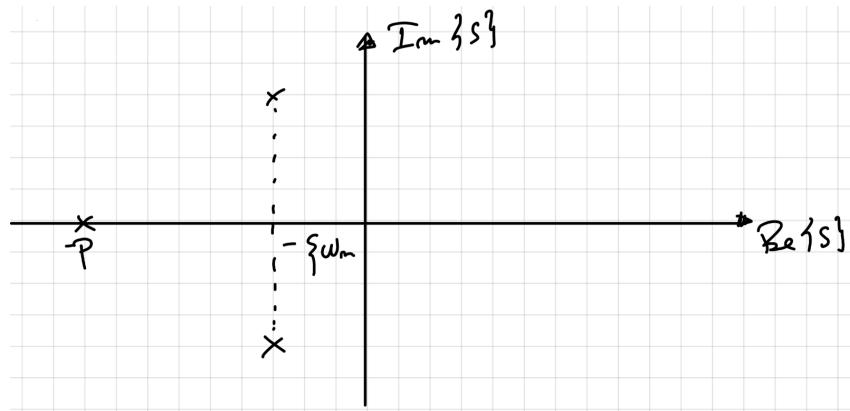
$$y(t) \approx \mu k \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}} \right) 1(t)$$



6.4.1 Esempio con coppia di poli complessi coniugati dominanti

$$G(s) = \mu \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)(s + p)}$$

assumiamo $\frac{1}{T} \gg \xi\omega_n$, cioè $-\frac{1}{T} \ll -\xi\omega_n$



Prendiamo $U(s) = \frac{k}{s}$

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\mu k \frac{\omega_n^2}{T}}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2) \left(s + \frac{1}{T} \right)} \\ &= \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s + \xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}} + \frac{\overline{k_2}}{s + \xi\omega_n - j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}} + \frac{k_3}{s + \frac{1}{T}} \end{aligned}$$

Per $\frac{1}{T} \gg \xi\omega_n$ la risposta si può approssimare a quella di sistemi del secondo ordine

$$y(t) \approx \mu k (1 - A e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega t + \varphi))$$

Quindi, se ho più poli molto distanti dall'asse immaginario, posso sempre approssimare il sistema come un sistema del secondo ordine.

Infatti se analizziamo la risposta effettiva del sistema

$$y(t) = k_1 1(t) + 2M e^{-\xi\omega_n t} \cos(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + \varphi_k) 1(t) + k_3 e^{-\frac{t}{T}} 1(t)$$

il termine $k_3 e^{-\frac{t}{T}} 1(t)$ va a 0 molto velocemente, quindi è trascurabile.

6.5 Sistemi del secondo ordine con poli reali coincidenti

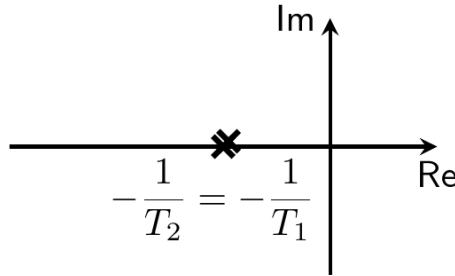
Caso $T_1 = T_2$

$$G(s) = \frac{\mu}{(1 + T_1 s)^2} \quad U(s) = \frac{k}{s}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{\mu k}{s(1 + T_1 s)^2}$$

$\mu > 0, k > 0, T_1 > 0$

$$y(t) = \mu l \left(1 - e^{-t/T_1} - \frac{t}{T_1} e^{-t/T_1} \right) 1(t)$$



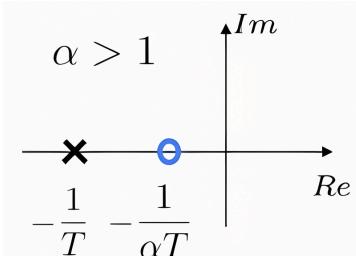
I modi presenti sono $1(t)$ (ingresso), $e^{-t/(T-1)}$ e $te^{-t/(T-1)}$ (sistema).

6.6 Sistemi del primo ordine con uno zero

$$G(s) = \mu \frac{1 + \alpha T s}{1 + T s} \quad U(s) = \frac{k}{s}$$

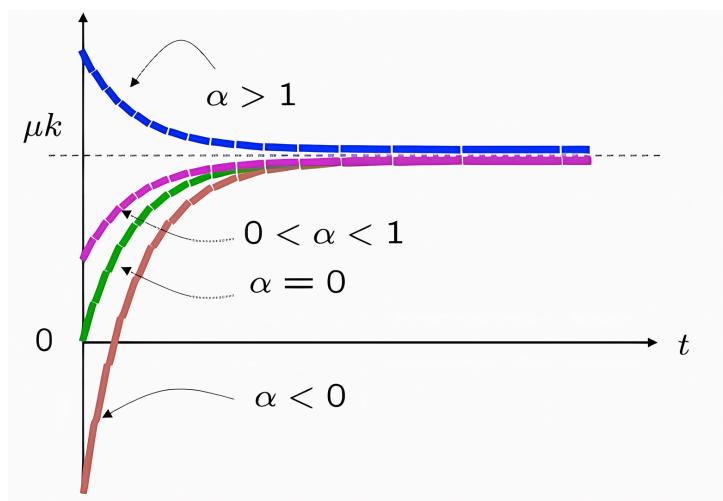
$$Y(s) = G(s)U(s) = \mu k \frac{1 + \alpha T s}{s(1 + T s)}$$

$\mu > 0, k > 0, T > 0$



$$y(t) = \mu k \left(1 + (\alpha - 1) e^{-\frac{t}{T}} \right) 1(t)$$

$$y(0) = \mu \alpha k \quad y_{\infty} = \mu k$$



Il grado relativo del sistema è zero, cioè il grado del numeratore è uguale al grado del denominatore; questo implica un collegamento algebrico tra ingresso e uscita, infatti $y(0) \neq 0$; nello spazio degli stati questo equivale ad avere $D \neq 0$.

6.7 Sistemi del secondo ordine con poli reali e zero

6.7.1 Sistemi a fase non minima

$$G(s) = \mu \frac{1 + \tau s}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} \quad U(s) = \frac{k}{s}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \mu k \frac{1 + \tau s}{s(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}$$

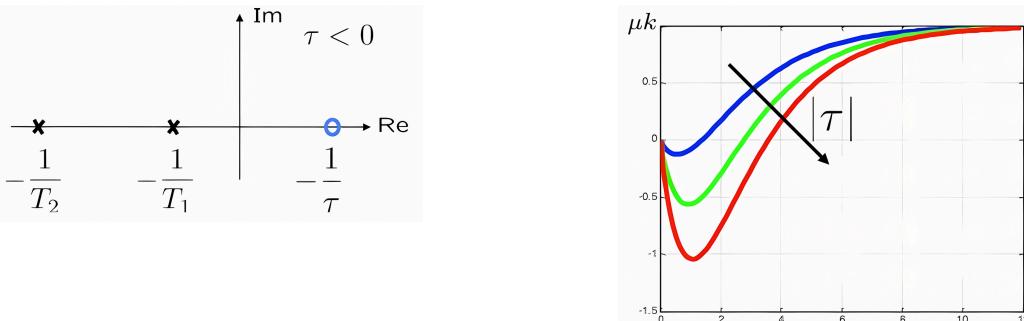
$$\mu > 0, k > 0, T_1 > 0, T_2 > 0$$

$$y(t) = \mu k \left(1 - \frac{T_1 - \tau}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} - \frac{T_2 - \tau}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} \right) 1(t)$$

$$y(0) = 0 \quad \dot{y}(0) = \frac{\mu K \tau}{T_1 T_2} \quad y_\infty = \mu k$$

N.B. il segno della derivata $\dot{y}(0)$ dipende da τ .

Nel caso in cui si abbia $T_1 > T_2$ e $\tau < 0$ il sistema è detto a **fase non minima**; in generale è detto sistema a **fase minima** un sistema caratterizzato da una funzione di trasferimento $G(s)$ con guadagno positivo, poli e zeri a parte reale negativa o nulla e non contenente ritardi (cioè se non ci sono esponenziali).



la sottoelongazione $\dot{y}(0) < 0$ indica che il sistema inizialmente risponde in senso contrario rispetto all'ingresso.

Una bici, o una moto, che sterza è un sistema a fase non minima.

Dato un guadagno specifico, esiste uno e un solo sistema a fase minima che produce quel guadagno, mentre esistono infiniti sistemi a fase non minima che producono lo stesso. Per più informazioni: [What Are Non-Minimum Phase Systems?](#).

Domanda

Dato un sistema a fase non minima

$$G(s) = \mu \frac{1 + \tau s}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} \quad \tau < 0$$

posso progettare una $R(s) = \frac{1}{1 + \tau s}$ tale che

$$R(s)G(s) = \mu \frac{1 + \tau s}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)(1 + \tau s)}$$

così da eliminare lo zero positivo?

Ovviamente no, perché $1 + \tau s$ è un modello della realtà, quindi, anche se matematicamente si può semplificare, nella realtà non si annullerà mai perfettamente.

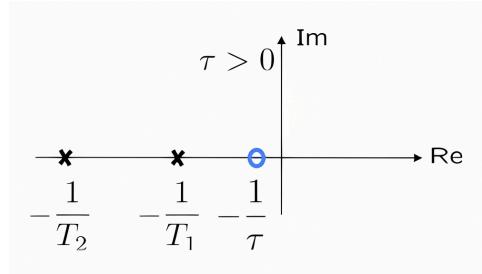
6.7.2 Sistemi a fase minima con sovraelongazione

Se $\tau > T_1 > T_2$ abbiamo un sistema a (fase minima) con una sovraelongazione

$$G(s) = \mu \frac{1 + \tau s}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} \quad U(s) = \frac{k}{s}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \mu k \frac{1 + \tau s}{s(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}$$

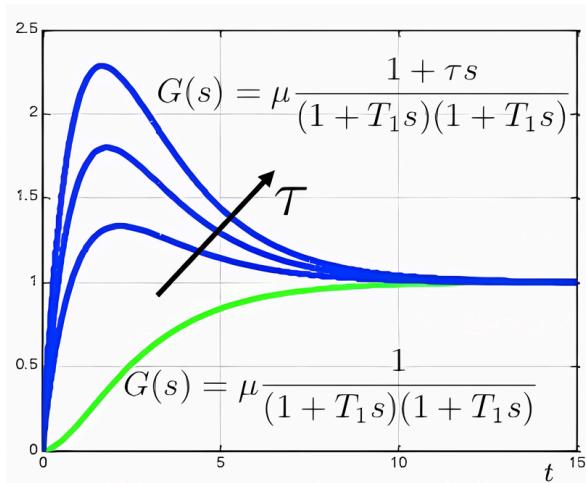
$$\mu > 0, k > 0, T_1 > 0, T_2 > 0$$



$$y(t) = \mu k \left(1 - \frac{T_1 - \tau}{T_1 - T_2} e^{-t/(T_1 - T_2)} + \frac{T_2 - \tau}{T_1 - T_2} e^{-t/T_2} \right) 1(t)$$

$$y(0) = 0$$

$$\dot{y}(0) = \frac{\mu K \tau}{T_1 T_2} y_\infty = \mu k$$



Nota: è presente una sovraelongazione tanto più accentuata quanto più lo zero è vicino all'origine (cioè al crescere di τ).

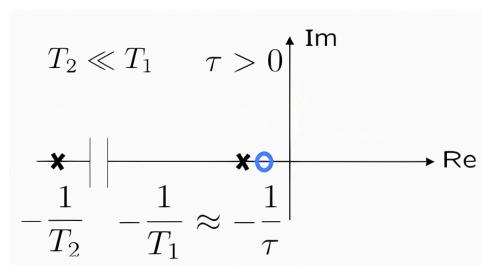
6.7.3 Sistemi a fase minima con code di assestamento

Se $\tau \approx T_1 \gg T_2$ abbiamo un sistema a fase minima con code di assestamento.

$$G(s) = \mu \frac{1 + \tau s}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} \quad U(s) = \frac{k}{s}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \mu k \frac{1 + \tau s}{s(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}$$

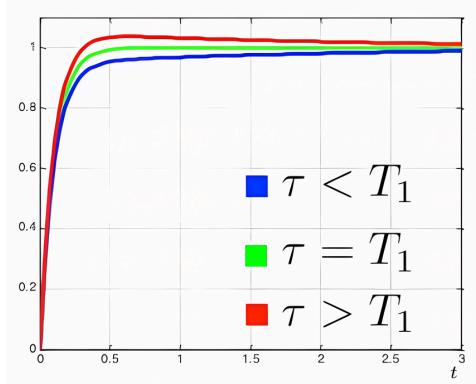
$$\mu > 0, k > 0, T_1 > 0, T_2 > 0$$



$$y(t) = \mu k \left(1 - \frac{T_1 - \tau}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T}} + \frac{T_2 - \tau}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right) 1(t)$$

$$y(0) = 0$$

$$y(0) = \frac{\mu K \tau}{T_1 T_2} y_\infty = \mu k$$



A causa della non perfetta cancellazione polo/zero ($\tau \approx T_1$) il modo “lento” $e^{-\frac{t}{T_1}}$ è presente e il suo transitorio si esaurisce lentamente.

7 Risposta in frequenza

7.1 Risposta a un segnale di ingresso sinusoidale

Dato un sistema lineare tempo invariante SISO con funzione di trasferimento $G(s)$ vogliamo calcolare l’uscita in corrispondenza di un ingresso sinusoidale

$$u(t) = U \cos(\omega t + \varphi)$$

la trasformata di Laplace di questo segnale è

$$U(s) = U \frac{s \cos(\varphi) - \omega \sin(\varphi)}{s^2 + \omega^2} \quad (7.1.32)$$

quindi

$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s)U \frac{s \cos(\varphi) - \omega \sin(\varphi)}{s^2 + \omega^2} \quad (7.1.33)$$

Consideriamo $G(s)$ con poli (distinti a parte reale negativa (BIBO stabile)). Sviluppando in fratti semplici si ha

$$Y(s) = \sum_{i=1}^n \underbrace{\frac{k_i}{s + p_i}}_{Y_1(s)} + \underbrace{\frac{k_u}{s - j\omega}}_{Y_2(s)} + \underbrace{\frac{\bar{k}_u}{s + j\omega}}$$

Eseguiamo lo sviluppo di Heaviside sulla (7.1.32):

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s)U(s) = G(s)U \frac{s \cos(\varphi) - \omega \sin(\varphi)}{s^2 + \omega^2} \\ &= \frac{N(s)U(s \cos(\varphi) - \omega \sin(\varphi))}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)(s^2 + \omega^2)} \\ &= \frac{k_1}{s + p_1} + \frac{k_2}{s + p_2} + \dots + \frac{k_n}{s + p_n} + \frac{k_u}{s - j\omega} + \frac{\bar{k}_u}{s + j\omega} \end{aligned}$$

quindi, antitrasformando

$$\begin{aligned}
y(t) &= k_1 e^{-p_1 t} 1(t) + \dots k_n e^{-p_n t} 1(t) + 2 |k_u| \underbrace{e^{-\sigma t}}_{\sigma=0} \cos(\omega t + \arg(k_u)) 1(t) \\
&= \underbrace{\sum_{i=1}^n k_i e^{-p_i t} 1(t)}_{y_1(t)} + \underbrace{2 |k_u| \cos(\omega t + \arg(k_u)) 1(t)}_{y_2(t)}
\end{aligned}$$

Poiché i poli di $G(s)$ sono a parte reale negativa, i contributi $e^{-p_i t} 1(t)$ sono tutti convergenti a zero. Pertanto $y_1(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow \infty$.

Il residuo k_u è dato da

$$\begin{aligned}
k_u &= (s - j\omega) Y(s)|_{s=j\omega} \\
&= U G(s) \frac{s \cos(\varphi) - \omega \sin(\varphi)}{s + j\omega} \Big|_{s=j\omega} \\
&= U G(j\omega) \frac{j\omega \cos(\varphi) - \omega \sin(\varphi)}{j\omega + j\omega} \\
&= U G(j\omega) \frac{j \cos(\varphi) - \sin(\varphi)}{2j} \\
&= U G(j\omega) \frac{\cos(\varphi) + j \sin(\varphi)}{2} \\
e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j \sin(\varphi) \implies &= U G(j\omega) \frac{e^{j\varphi}}{2} \\
&= \frac{U |G(j\omega)|}{2} e^{j(\arg(G(j\omega)) + \varphi)}
\end{aligned}$$

dove abbiamo scritto $G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j \arg(G(j\omega))}$.

Ora che abbiamo calcolato k_u possiamo sostituirlo nell' espressione di $y(t)$

$$y(t) = y_1(t) + U |G(j\omega)| \cos(\omega t + \varphi + \arg(G(j\omega)))$$

Siccome $y_1(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow \infty$, l'uscita $y(t)$ converge a

$$y_2(t) = U |G(j\omega)| \cos(\omega t + \varphi + \arg(G(j\omega)))$$

ovvero, per t sufficientemente grande si ha

$$y(t) \approx U |G(j\omega)| \cos(\omega t + \varphi + \arg(G(j\omega))) \quad (7.1.34)$$

quest'espressione viene chiamata **risposta a regime permanente**

$$\begin{array}{ccc}
u(t) = U \cos(\omega t + \varphi) & \xrightarrow{\epsilon \gg 0} & y(t) \approx U |G(j\omega)| \cos(\omega t + \varphi + \arg(G(j\omega)))
\end{array}$$

7.1.1 Teorema

Se a un sistema lineare tempo invariante con funzione di trasferimento $G(s)$ avente poli a parte reale negativa si applica l'ingresso sinusoidale

$$u(t) = U \cos(\omega t + \varphi)$$

l'uscita, a transitorio esaurito, è data da

$$y(t) = U |G(j\omega)| \cos(\omega t + \varphi + \arg(G(j\omega)))$$

7.2 Risposta a segnali periodici sviluppabili in serie di Fourier

Consideriamo un segnale d'ingresso $u(t)$ periodico, cioè $\exists T > 0$ tale che $\forall t \geq 0 u(t+T) = u(t)$, che può essere sviluppato in serie di Fourier

$$u(t) = U_0 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} |U_n| \cos(n\omega_0 t + \arg(U_n))$$

con $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ e

$$U_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad n = 0, 1, \dots$$

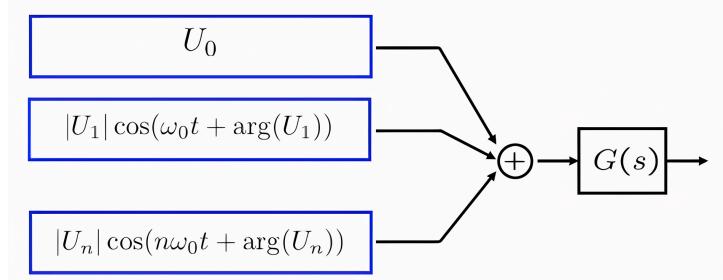
In base a quanto visto per un ingresso sinusoidale e sfruttando il principio di sovrapposizione degli effetti per sistemi BIBO stabili si può dimostrare che per t elevati

$$y(t) \approx Y_0 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} |Y_n| \cos(n\omega_0 t + \arg(Y_n)) \quad (7.2.35)$$

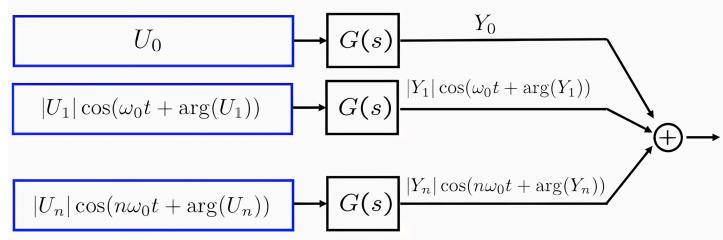
con $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ e

$$Y_n = G(jn\omega_0) U_n \quad n = 0, 1, \dots$$

Il risultato appena visto può essere schematizzato come segue. Dato in ingresso un segnale periodico, esso può essere rappresentato come la somma delle armoniche dello sviluppo in serie di Fourier



Sfruttando la sovrapposizione degli effetti tale schema è equivalente a considerare lo schema seguente per t elevati



7.3 Risposta a segnali dotati di trasformata di Fourier

Dato un segnale non periodico dotato di trasformata di Fourier, possiamo scriverlo come

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2|U(j\omega)| \cos(\omega t + \arg(U(j\omega))) d\omega$$

con

$$U(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt$$

Ovvero l'ingresso è scomponibile come una infinità non numerabile di armoniche con valori di ω reali maggiori o uguali a zero.

Quindi se il sistema è BIBO stabile per t elevati

$$y(t) \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2|Y(j\omega)| \cos(\omega t + \arg(Y(j\omega))) d\omega \quad (7.3.36)$$

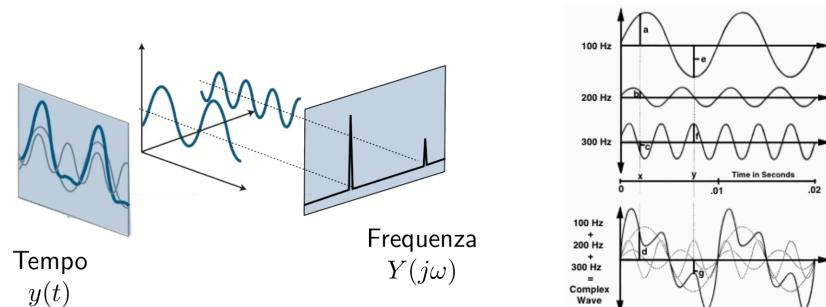
con

$$Y(j\omega) = G(j\omega)U(j\omega)$$

7.4 Richiami

7.4.1 Spettro di un segnale

Ogni segnale reale si può ottenere sommando opportune onde sinusoidali



Uno stesso segnale può essere quindi visto equivalentemente nel dominio del tempo ($y(t)$) o delle frequenze ($Y(j\omega)$). Le funzioni $y(t)$ e $Y(j\omega)$ sono ugualmente informative e offrono due prospettive complementari per osservare lo stesso fenomeno.

La pulsazione ω e la frequenza f sono legate dalla relazione $\omega = 2\pi f$.

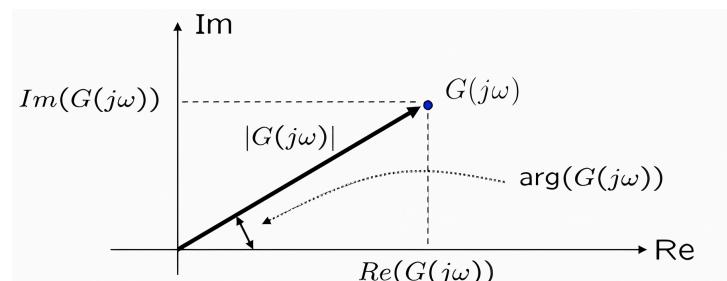
7.5 Risposta in frequenza

La funzione complessa $G(j\omega)$ ottenuta valutando $G(s)$ per $s = j\omega$ è detta *risposta in frequenza*.

$$G(s)|_{s=j\omega} = G(j\omega)$$

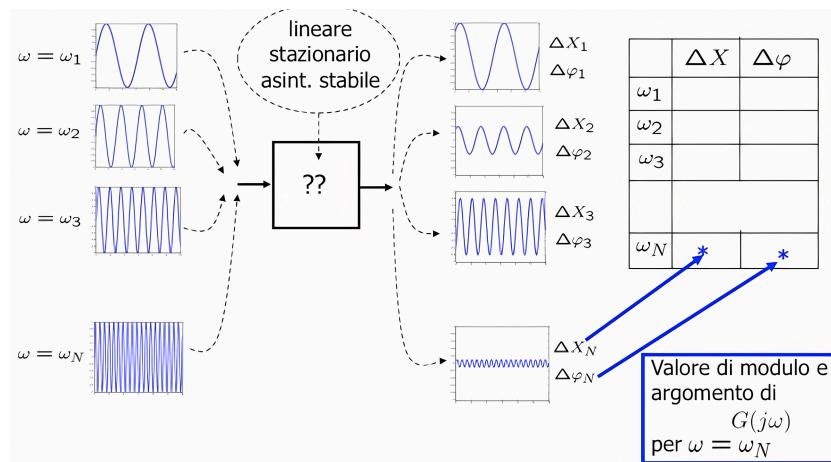
La risposta in frequenza viene estesa anche a sistemi non asintoticamente stabili.

Per un certo valore di ω , $G(j\omega)$ è un numero complesso



7.5.1 Identificazione sperimentale della risposta in frequenza (approccio data-driven)

Nel caso in cui la risposta in frequenza non sia nota possiamo sfruttare i risultati precedenti per ricavarla sperimentalmente.



Diciamo che con questo tipo di approccio riusciamo a stimare la $G(j\omega)$ (non la $G(s)$!).

7.6 Rappresentazione della risposta in frequenza

Vi sono diversi modi di rappresentare la risposta in frequenza. Uno dei modi più usati sono i (diagrammi di Bode), in cui si rappresentano separatamente $|G(j\omega)|$ e $\arg(G(j\omega))$ in funzione di ω . Nei diagrammi di Bode si utilizza una scala logaritmica in base dieci per l'ascissa, dove è riportata la pulsazione ω . In particolare, nei diagrammi di Bode si chiama *decade* l'intervallo tra due pulsazioni che hanno un rapporto tra loro pari a dieci. Per come abbiamo definito i diagrammi, segue che la pulsazione nulla non compare nell'asse "finito" (si può avere pulsazione nulla solo a $-\infty$).

Nel tracciamento dei diagrammi di Bode conviene scrivere la funzione $G(s)$ nella forma fattorizzata (4.5.30), qui riportata

$$G(s) = \frac{\mu \prod_i (1 + \tau_i s) \prod_i \left(1 + \frac{2\zeta_i}{\alpha_{ni}} + \frac{s^2}{\alpha_{ni}^2}\right)}{\left(s^g \prod_i (1 + T_i s) \prod_i \left(1 + \frac{2\xi_i}{\omega_{ni}} + \frac{s^2}{\omega_{ni}^2}\right)\right)}$$

e la risposta in frequenza associata corrispondente è

$$G(j\omega) = \frac{\mu \prod_i (1 + j\omega \tau_i) \prod_i \left(1 + 2j\zeta_i \frac{\omega}{\alpha_{ni}} - \frac{\omega^2}{\alpha_{ni}^2}\right)}{(j\omega)^g \prod_i (1 + j\omega T_i) \prod_i \left(1 + 2j\xi_i \frac{\omega}{\omega_{ni}} - \frac{\omega^2}{\omega_{ni}^2}\right)}$$

Il diagramma delle ampiezze è espresso in (decibel): $|G(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log|G(j\omega)|$. Il diagramma delle fasi è espresso in gradi: $\arg(G(j\omega))$

7.6.1 Proprietà dei numeri complessi e logaritmi

Dati due numeri complessi $a \in \mathbb{C}$ e $b \in \mathbb{C}$ si ha

$$|ab| = |a| |b|$$

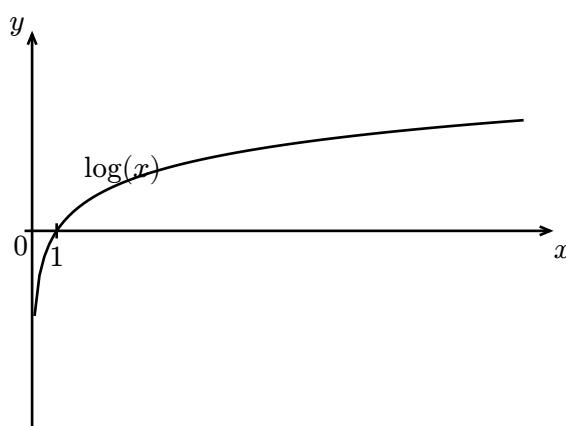
e

$$\begin{aligned} \log(|a||b|) &= \log(|a|) + \log(|b|) & \arg(ab) &= \arg(a) + \arg(b) \\ \log\left(\frac{|a|}{|b|}\right) &= \log(|a|) - \log(|b|) & \arg\left(\frac{a}{b}\right) &= \arg(a) - \arg(b) \\ \log(|a|^k) &= k \log(|a|) & \arg(a^k) &= k \arg(a) \end{aligned}$$

7.6.2 Esempio operazioni in decibel

Definiamo il *modulo in decibel* di un numero a

$$|a|_{\text{dB}} = 20 \log_{10}|a|$$



inoltre

$$\begin{aligned} |a| \geq 1 &\implies |a|_{\text{dB}} \geq 0 \\ 0 \leq |a| \leq 1 &\implies |a|_{\text{dB}} \leq 0 \end{aligned}$$

7.7 Diagrammi di Bode

7.7.1 Diagramma del modulo

Partiamo col calcolare il valore del modulo della risposta in frequenza in Decibel

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} |G(j\omega)|$$

Prendiamo una risposta in frequenza così definita

$$G(j\omega) = \mu \frac{(1 + j\omega\tau)(1 + 2\frac{\zeta}{\alpha_n}j\omega - \frac{\omega^2}{\alpha_n^2})}{j\omega(1 + j\omega T)(1 + \frac{2\xi}{\omega_n}j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_n^2})}$$

$$\begin{aligned} |G(j\omega)|_{\text{dB}} &= 20 \log |\mu| + 20 \log |1 + j\omega\tau| + 20 \log \left| 1 + 2\frac{\zeta}{\alpha_n}j\omega - \frac{\omega^2}{\alpha_n^2} \right| \\ &\quad - 20 \log |j\omega| - 20 \log |1 + j\omega T| - 20 \log \left| 1 + \frac{2\xi}{\omega_n}j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right| \\ &= |\mu|_{\text{dB}} + |1 + j\omega\tau|_{\text{dB}} + \left| 1 + 2\frac{\zeta}{\alpha_n}j\omega - \frac{\omega^2}{\alpha_n^2} \right|_{\text{dB}} - |j\omega|_{\text{dB}} \\ &\quad - |1 + j\omega T|_{\text{dB}} - \left| 1 + \frac{2\xi}{\omega_n}j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right|_{\text{dB}} \end{aligned}$$

7.8 Diagramma della fase

$$\begin{aligned} \arg(G(j\omega)) &= \arg \mu - g \arg(j\omega) + \sum_i \arg(1 + j\omega\tau_i) + \sum_i \arg \left(1 + 2j\zeta_i \frac{\omega}{\alpha_{n,1}} - \frac{\omega^2}{\alpha_{n,i}^2} \right) \\ &\quad - \sum_i \arg(1 + j\omega T_i) - \sum_i \arg \left(1 + 2j\xi_i \frac{\omega}{\alpha_{n,1}} - \frac{\omega^2}{\omega_{n,i}^2} \right) \end{aligned}$$

7.8.1 Contributi elementari

Possiamo quindi studiare l'andamento dei seguenti contributi elementari

$$G_{a(j\omega)} = \mu$$

$$G_{b(j\omega)} = \frac{1}{(j\omega)^g}$$

$$G_{c(j\omega)} = (1 + j\omega\tau_i)$$

$$G_{c(j\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega T_i}$$

$$G_{d(j\omega)} = \left(1 + 2j\zeta_i \frac{\omega}{\alpha_{n,1}} - \frac{\omega^2}{\alpha_{n,1}^2} \right)$$

$$G_{d(j\omega)} = \frac{1}{\left(1 + 2j\zeta_i \frac{\omega}{\alpha_{n,1}} - \frac{\omega^2}{\alpha_{n,1}^2} \right)}$$

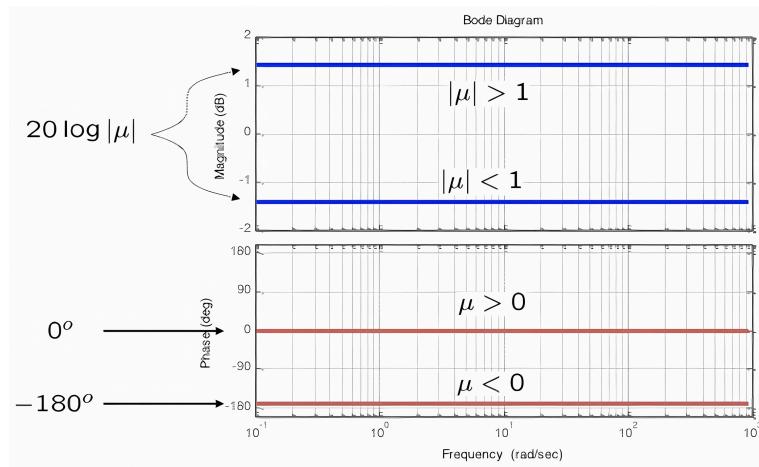
La rappresentazione di questi diagrammi avviene su carte logaritmiche che vanno per *decade*, cioè per potenze di dieci.

7.8.2 Guadagno statico

$$G_{a(j\omega)} = \mu$$

$$|G_{a(j\omega)}|_{\text{dB}} = 20 \log |\mu|$$

$$\arg(G(j\omega)) = \arg(\mu)$$



Per quanto riguarda il diagramma dell'ampiezza,

- se $|\mu| \geq 1$ allora $20 \log |\mu| \geq 0$
- se $|\mu| < 1$ allora $20 \log |\mu| < 0$.

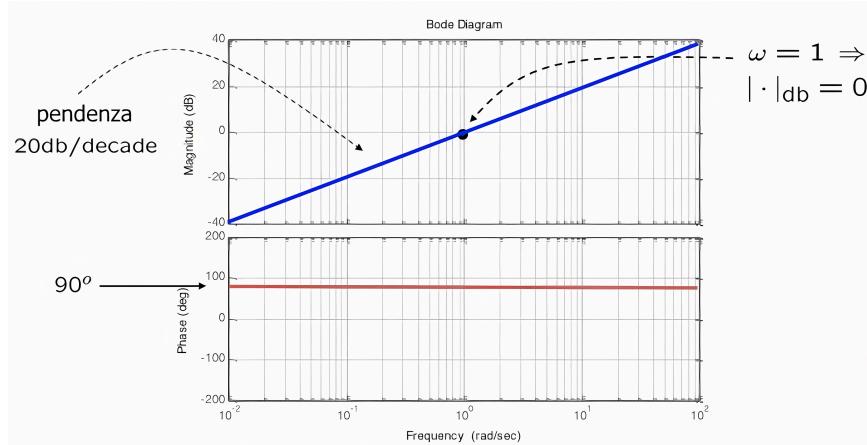
Per il diagramma della fase invece

- se $\mu > 0$ allora $\arg(\mu) = 0$
- se $\mu < 0$ allora $\arg(\mu) = -180^\circ$.

7.8.3 Zeri nell'origine

Consideriamo una risposta con uno zero nell'origine (cioè $g = -1$)

$$G_{b(j\omega)} = \frac{1}{(j\omega)^g} = j\omega |G_{b(j\omega)}|_{\text{dB}} = 20 \log \omega \arg(G_{b(j\omega)}) = \arg(j\omega)$$

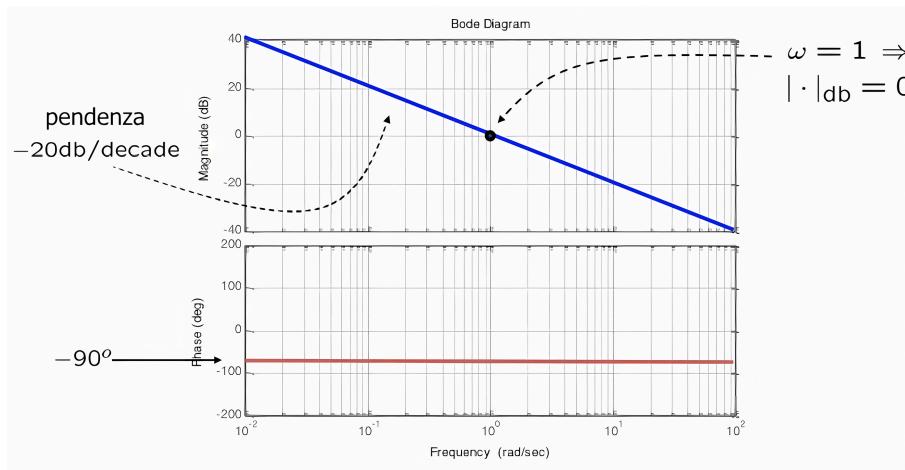


La retta che definisce l'ampiezza $\log \omega \mapsto 20 \log \omega$ ha pendenza 20 dB/dec; se ho g zeri nell'origine allora la pendenza della retta sarà $20 \cdot g$ dB/dec.

7.8.4 Poli nell'origine

Consideriamo una risposta con un polo nell'origine (cioè $g = 1$)

$$G_{b(j\omega)} = \frac{1}{(j\omega)^g} = \frac{1}{j\omega} \quad |G_{b(j\omega)}|_{\text{dB}} = -20 \log \omega \quad \arg(G_{b(j\omega)}) = -\arg(j\omega)$$



Anche in questo caso, se ho g poli nell'origine allora la pendenza della retta sarà -20 dB/dec . Per quanto riguarda la fase $-j\omega$ è un punto sul semiasse immaginario negativo $\forall \omega > 0$, quindi la fase è -90° .

7.8.5 Zero reale (ampiezza)

Consideriamo una risposta con uno zero reale

$$G_{c(j\omega)} = 1 + j\omega\tau$$

$$|G_{c(j\omega)}|_{\text{dB}} = 20 \log \sqrt{1 + \omega^2\tau^2} \approx \begin{cases} 20 \log 1 = 0 & \omega \ll \frac{1}{|\tau|} \\ 20 \log \omega |\tau| = -20 \log \frac{1}{|\tau|} + 20 \log \omega & \omega \gg \frac{1}{|\tau|} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \left| G_c \left(j \frac{1}{|\tau|} \right) \right|_{\text{dB}} &= 20 \log \sqrt{1 + \frac{1}{|\tau|^2} \tau^2} \\ &= 20 \log \sqrt{2} \approx 3 \end{aligned}$$

per $\omega = \frac{1}{|\tau|}$ abbiamo lo scostamento massimo.

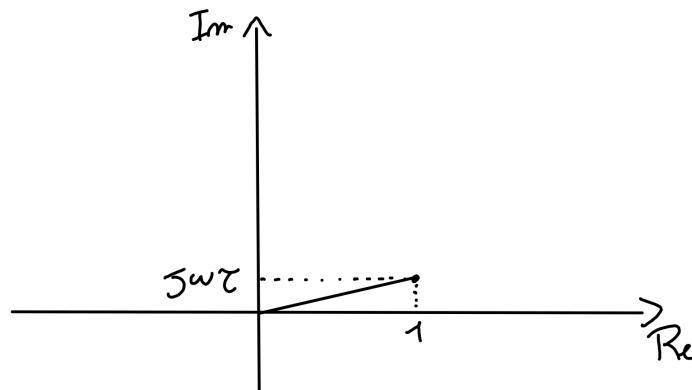
7.8.6 Zero reale negativo (fase)

Consideriamo una una risposta con uno zero reale negativo

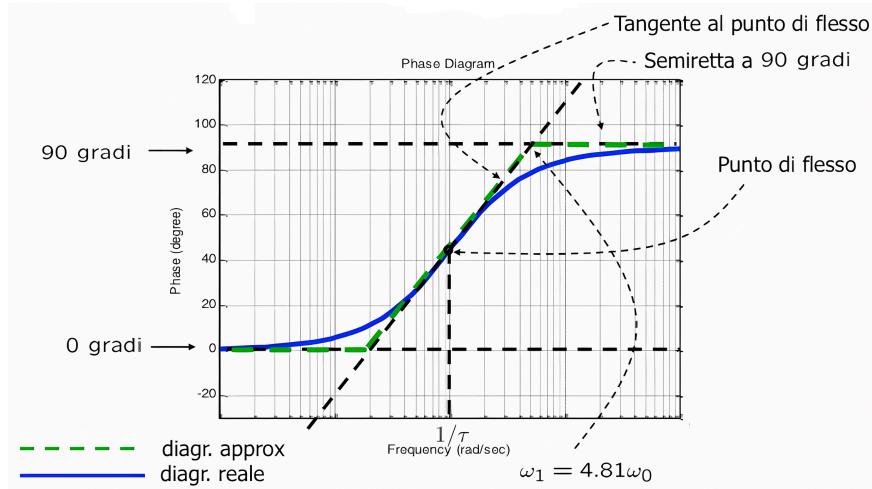
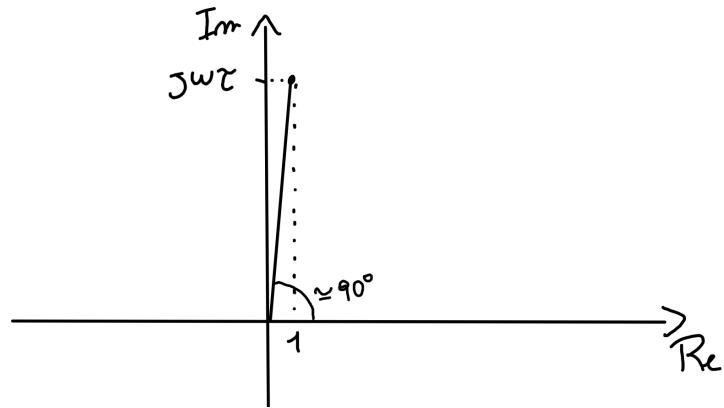
$$G_{c(j\omega)} = 1 + j\omega\tau \quad \tau > 0$$

$$\arg(G_{c(j\omega)}) = \arg(1 + j\omega\tau) \approx \begin{cases} 0 & \omega \ll \frac{1}{\tau} \\ 90^\circ & \omega \gg \frac{1}{\tau} \end{cases}$$

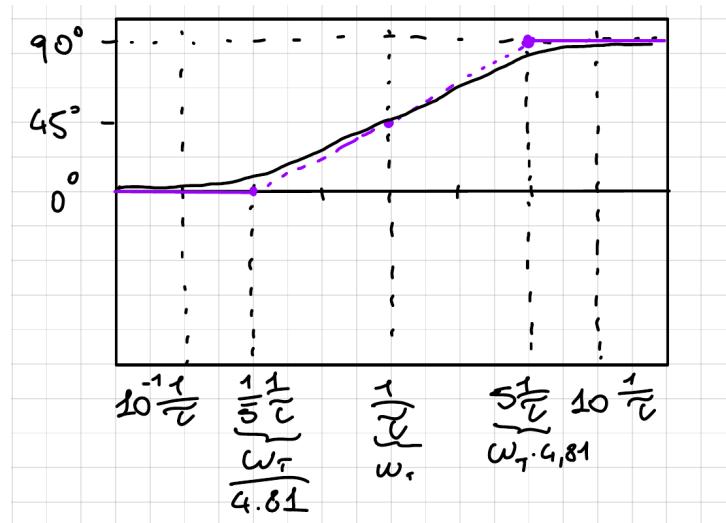
Se $\omega \rightarrow 0$ allora $\arg(1 + j\omega\tau) \approx \arg(1) = 0$



se $\omega \gg \frac{1}{\tau}$ allora graficamente



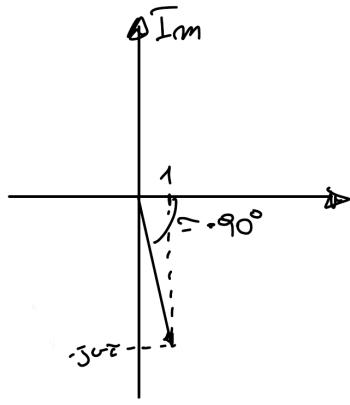
il cambio di fase inizia circa una decade prima e finisce circa una decade dopo la pulsazione di taglio
 $\omega = \frac{1}{\tau}$.



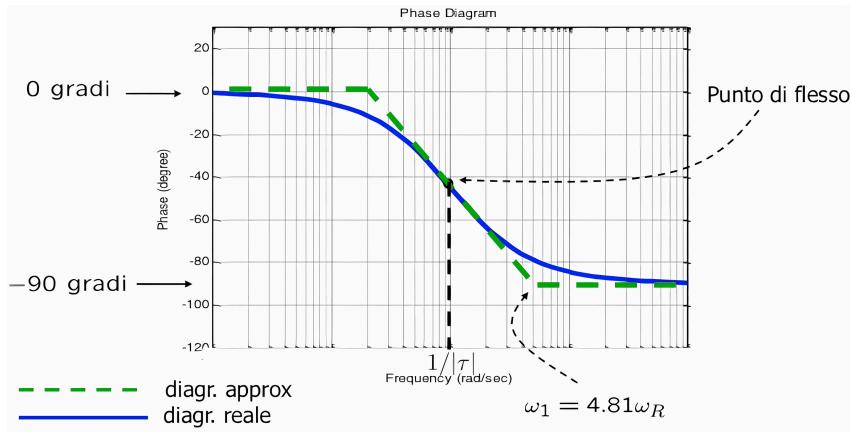
$$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\tau} = 0.2 \cdot \frac{1}{\tau} = 2 \cdot 10^{-1} \frac{1}{\tau}, \text{ il doppio in scala logaritmica è } \frac{1}{3} \text{ di una decade.}$$

7.8.7 Zero reale positivo (fase)

Consideriamo $G_{c(j\omega)} = 1 + j\omega\tau, \tau < 0$ (cioè una risposta con uno zero reale positivo)



$$\arg(G(j\omega)) = \arg(1 + j\omega\tau) \approx \begin{cases} 0 & \omega \ll \frac{1}{|\tau|} \\ -90^\circ & \omega \gg \frac{1}{|\tau|} \end{cases}$$

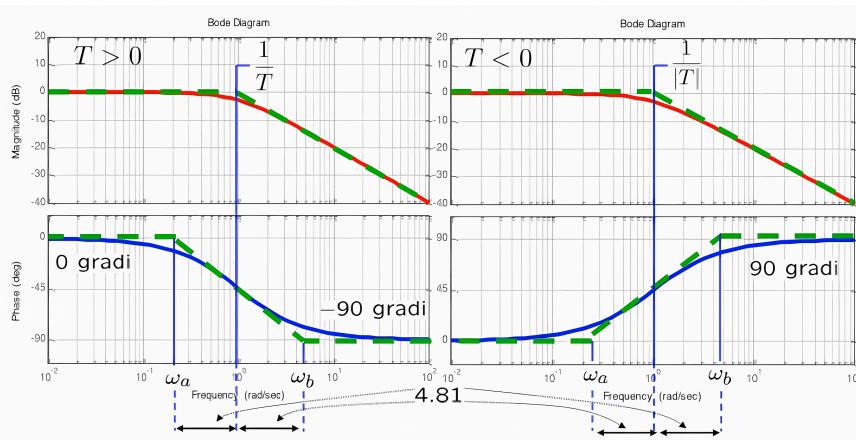


7.8.8 Polo reale

Consideriamo $G_{c(j\omega)} = \frac{1}{1+j\omega T}$ (cioè una risposta con un polo reale)

$$\begin{aligned} |G_{c(j\omega)}|_{\text{dB}} &= 20 \log \left| \frac{1}{1+j\omega\tau} \right| \\ &= -20 \log|1 + j\omega\tau| \end{aligned}$$

$$|G_{c(j\omega)}|_{\text{dB}} = -20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \quad \arg(G_{c(j\omega)}) = -\arg(1 + j\omega T)$$

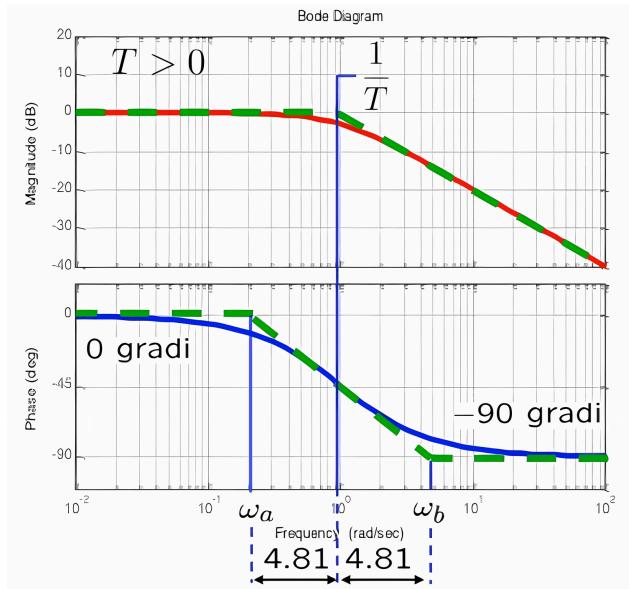


Il diagramma è uguale al diagramma dello zero ma ribaltato rispetto all'asse reale (consistentemente con il segno di T).

7.8.9 Polo reale negativo

Consideriamo $G_{c(j\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega T}, T > 0$ (cioè una risposta con un polo reale negativo)

$$|G_{c(j\omega)}|_{\text{dB}} = -20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \quad \arg(G_{c(j\omega)}) = -\arg(1 + j\omega T)$$



Fino a $\frac{1}{T}$, (pulsazione di taglio), si ha un andamento costante a 0 dB, cioè il modulo della sinusoide in uscita non cambia. A partire da $\frac{1}{T}$ si ha una retta $\log \omega \mapsto 20 \log \frac{1}{|T|} - 20 \log \omega$ con pendenza -20 dB/dec .

Lo scostamento massimo (tra diagramma asintotico e diagramma reale) si ha in $\omega = \frac{1}{T}$ dove

$$\begin{aligned} |G_{c(j\omega)}|_{\text{dB}} &= -20 \log \sqrt{1 + 1} \\ &= -20 \log \sqrt{2} \approx -3 \end{aligned}$$

Il cambio di fase inizia circa una decade prima e finisce circa una decade dopo la pulsazione di taglio $\omega = \frac{1}{T}$.

7.8.10 Zeri complessi coniugati (ampiezza)

Consideriamo $G_{d(j\omega)} = 1 + 2j\zeta \frac{\omega}{\alpha_n} - \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}$, una risposta con una coppia di zeri complessi coniugati

$$|G_{d(j\omega)}|_{\text{dB}} = 20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}}$$

per $\omega \gg \alpha_n$

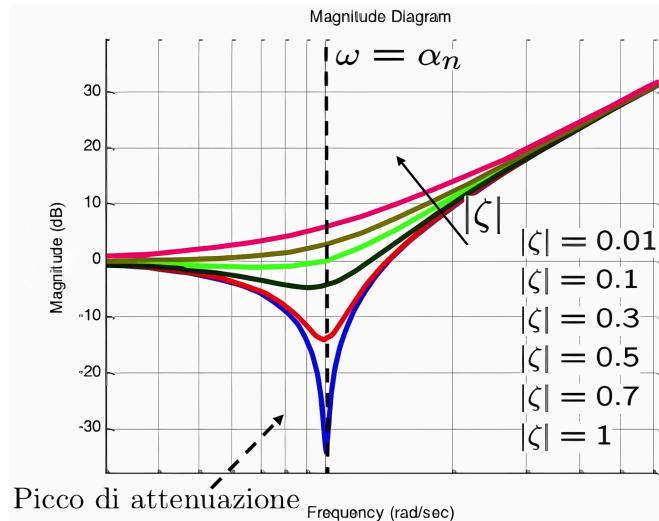
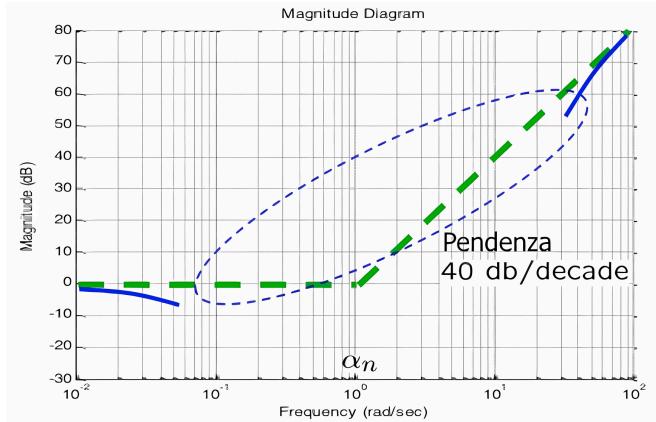
$$\begin{aligned} |G_{d(j\omega)}|_{\text{dB}} &\approx 20 \log \sqrt{\left(\frac{\omega^2}{\alpha_n^2}\right)} \\ &= 20 \log \frac{\omega^2}{\alpha_n^2} \\ &= 20 \log \left(\frac{\omega}{\alpha_n}\right)^2 \\ &= 40 \log \frac{\omega}{\alpha_n} \\ &= \underbrace{40 \log \omega}_{\text{variabile}} - \underbrace{40 \log \alpha_n}_{\text{costante}} \end{aligned}$$

Quindi la risposta si comporta come una retta, di pendenza pari a 40 dB. Analizziamo ora la risposta per $\omega = \alpha_n$

$$\begin{aligned}
|G_{d(j\omega)}|_{\text{dB}} &= 20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}} \\
&= 20 \log \sqrt{4\zeta^2} \\
&= 23 \log 2|\zeta| \\
&= \underbrace{20 \log 2}_{6 \text{ dB}} + 20 \log |\zeta|
\end{aligned}$$

quindi scostamento significativo dipendente dal valore di ζ .

$$|G_{d(j\omega)}|_{\text{dB}} = 20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}} \approx \begin{cases} 20 \log(1) = 0 & \omega \ll \alpha_n \\ 20 \log \frac{\omega^2}{\alpha_n^2} = -40 \log \alpha_n + 40 \log \omega & \omega \gg \alpha_n \end{cases}$$

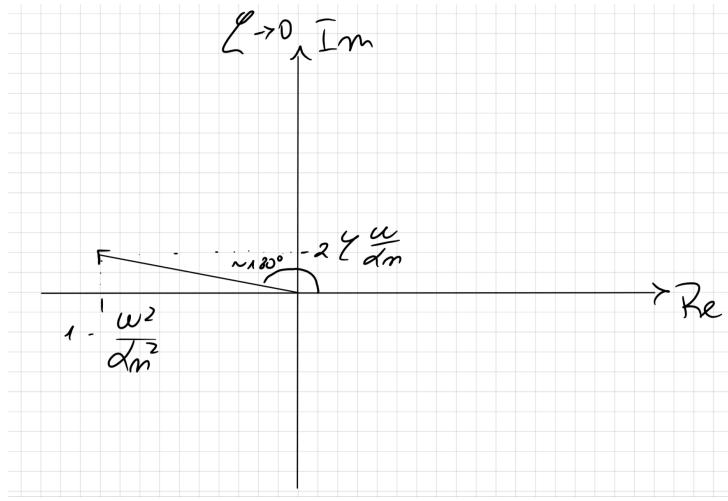


Il minimo dell'ampiezza si ha alla pulsazione $\omega_r = \alpha_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$ con $|G_{d(j\omega_r)}| = 2|\zeta| \sqrt{1 - \zeta^2}$

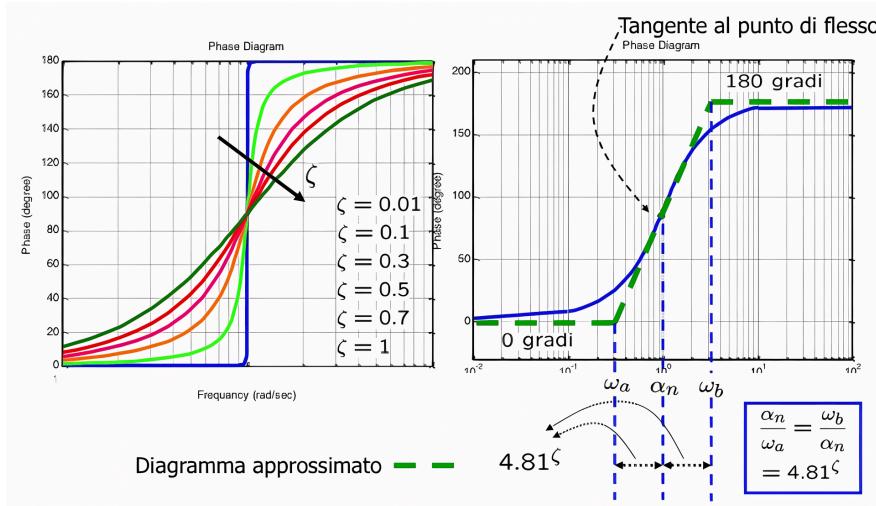
7.8.11 Zeri complessi coniugati a parte reale negativa (fase)

Consideriamo $G_{d(j\omega)} = 1 + 2j\zeta \frac{\omega}{\alpha_n} - \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}$, $\zeta > 0$, una risposta con una coppia di zeri complessi coniugati a parte reale negativa

$$\arg(G_{d(j\omega)}) \approx \begin{cases} 0 & \omega \ll \alpha_n \\ 180^\circ & \omega \gg \alpha_n \end{cases}$$



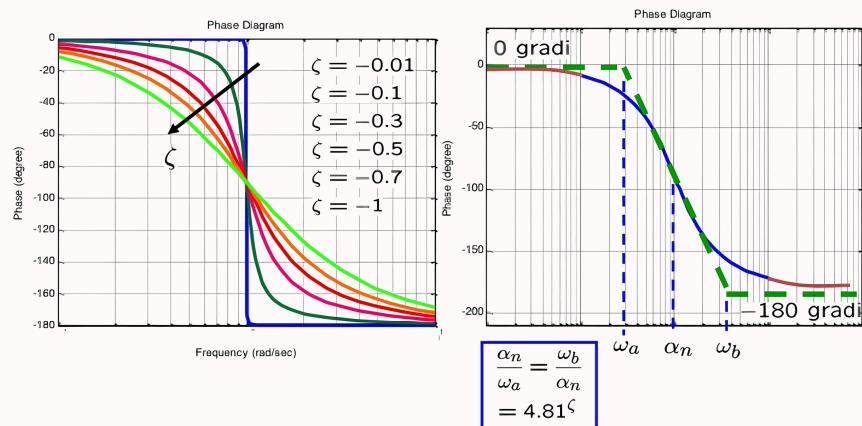
Vediamo che la risposta, per $\omega \gg \alpha_n$, nel piano complesso ha sicuramente una parte reale molto negativa, mentre la parte immaginaria dipende dal valore ζ , il quale influenza molto l'andamento della fase. Ad esempio se $\zeta \rightarrow 0$ la parte immaginaria nel piano complesso tenderà anch'essa a 0, così da rendere molto facile appurare che l'argomento della nostra risposta sia quasi 180° . Anche con $\zeta = 1$ l'argomento sarà circa 180° , ma solo per pulsazioni molto grandi, perché la parte reale tende a $\frac{\omega^2}{\alpha_n^2}$, che è $O\left(\frac{\omega}{\alpha_n}\right)$ (la parte immaginaria) per $\omega \rightarrow \infty$.



Nel diagramma di fase più ζ è piccolo e più la discontinuità da 0° a 180° è rapida.

7.8.12 Zeri complessi coniugati a parte reale positiva

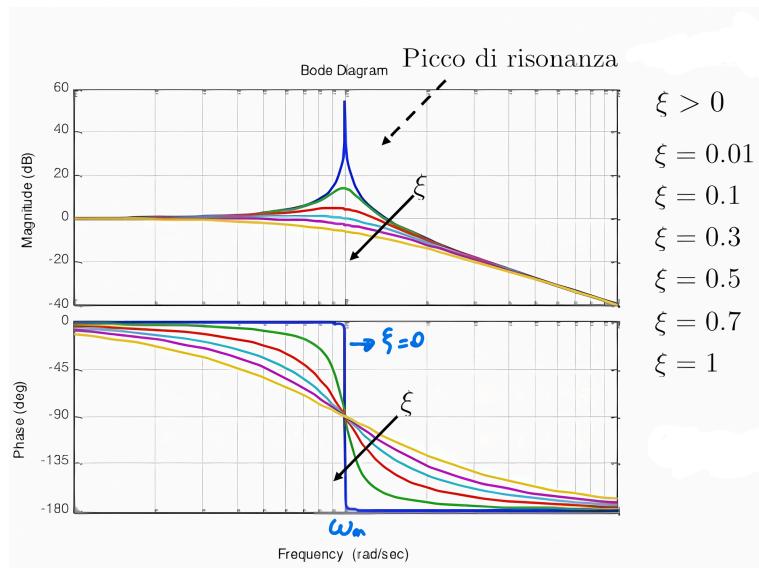
Consideriamo $G_{d(j\omega)} = 1 + 2j\zeta \frac{\omega}{\alpha_n} - \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}$, $\zeta < 0$, una risposta con una coppia di zeri complessi coniugati a parte reale positiva. Il diagramma di fase di è speculare a quello precedente



7.8.13 Poli complessi coniugati a parte reale negativa

Consideriamo una risposta in frequenza con poli complessi coniugati a parte reale negativa

$$G_{d(j\omega)} = \frac{1}{1 + 2j\xi \frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}, \xi > 0$$



I diagrammi sono quelli precedenti ribaltati rispetto all'asse reale, infatti la retta del diagramma di ampiezza asintotico dopo la pulsazione ω_n ha pendenza -40 "dB/dec". Il picco di risonanza si trova alla pulsazione (di risonanza) $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$ con $|G_{d(j\omega_r)}| = \frac{1}{2|\xi| \sqrt{1 - 2\xi^2}}$; alla frequenza ω_n si ha $|G_{d(j\omega_n)}| = \frac{1}{2|\xi|}$

Soffermiamoci un attimo sul caso in cui $\xi \rightarrow 0$: se do una sinusoide con frequenza inferiore a ω_n essa non viene sfasata; se invece la sua frequenza è di poco superiore a ω_n la sua fase viene sfasata di 90° ; il modulo viene amplificato di molto se la frequenza della sinusoide è nell'intorno di ω_n .

7.8.14 Poli complessi coniugati a parte reale positiva

Consideriamo una risposta in frequenza con una coppia di poli complessi coniugati a parte reale positiva

$$G_{d(j\omega)} = \frac{1}{1 + 2j\xi \frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \quad \xi < 0$$

Calcoliamo i poli

$$\begin{aligned} G_{d(s)} &= \frac{1}{1 + 2\frac{\xi}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}} \\ &= \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \\ \implies p_{1/2} &= -\xi\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \end{aligned}$$

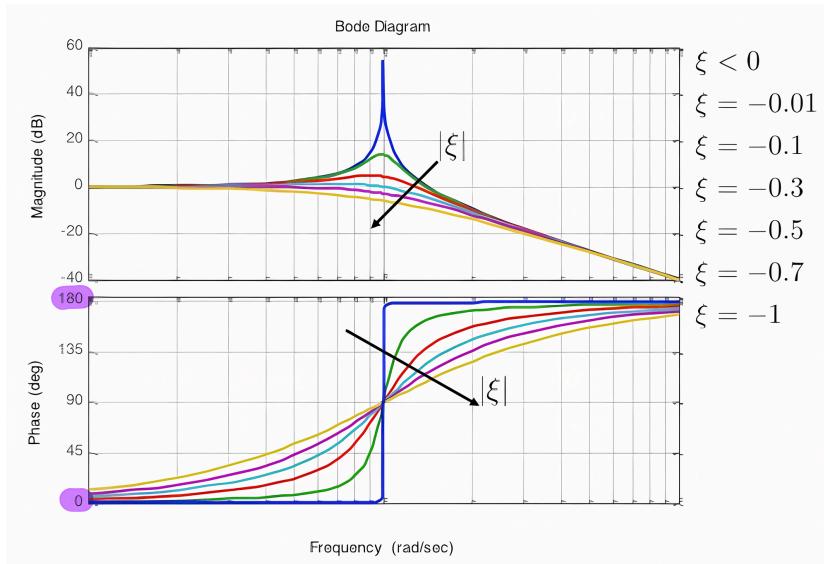


Diagramma ottenuto da quello degli zeri (caso $\zeta < 0$) ribaltando rispetto all'asse reale.

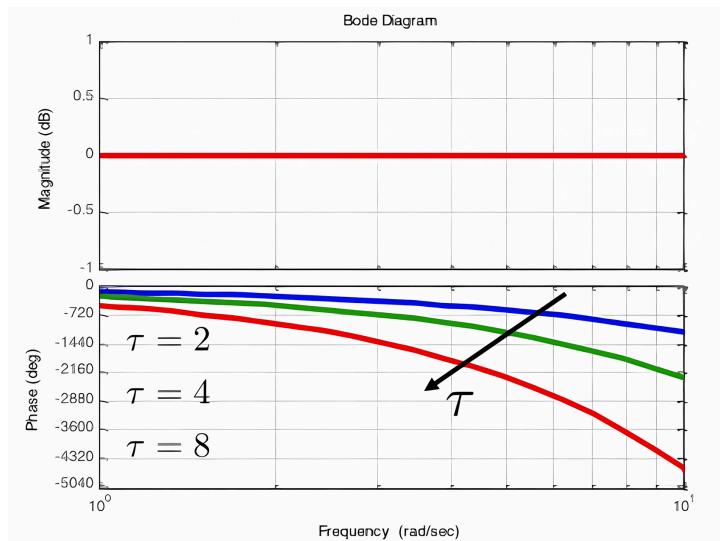
7.8.15 Ritardo temporale

Consideriamo $G(s) = e^{-\tau s}$ con $G(j\omega) = e^{-j\omega\tau}$

$$\begin{aligned}|G(j\omega)|_{\text{dB}} &= 20 \log|e^{-j\omega\tau}| \\&= 20 \log 1 \\&= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\arg(G(j\omega)) &= \arg(e^{-j\omega\tau}) \\&= -\omega\tau\end{aligned}$$

Questo tipo di sistema ritarda di τ il segnale in ingresso, quindi la fase viene attenuata mentre il modulo rimane invariato.



7.8.16 Proprietà bloccante degli zeri

Supponiamo di avere $G(s) = \mu \frac{s^2 + \alpha_n^2}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}$, con $T_1, T_2 > 0$ (quindi abbiamo un sistema asintoticamente stabile). Calcoliamo l'uscita del sistema supponendo un ingresso del tipo $u(t) = U \cos(\omega_u t)$. La trasformata dell'ingresso è $U(s) = \frac{Us}{s^2 + \omega_u^2}$

- Caso 1: $\omega_u \neq \alpha_n$.

La trasformata dell'uscita sarà uguale a

$$Y(s) = G(s)U(s) = \mu \frac{Us(s^2 + \alpha_n^2)}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)(s^2 + \omega_u^2)}$$

In base al denominatore, i modi presenti nell'uscita sono:

- e^{-t/T_1} dovuto al termine $1 + T_1 s$
- e^{-t/T_2} dovuto al termine $1 + T_2 s$
- $|G(j\omega_u)|U \cos(\omega_u t + \arg(G(j\omega_u)))$ dovuto al termine $s^2 + \omega_u^2$

- Caso 2: $\omega_u = \alpha_n$.

La trasformata dell'uscita sarà uguale a

$$Y(s) = G(s)U(s) = \mu \frac{Us(s^2 + \alpha_n^2)}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)(s^2 + \alpha_n^2)} = \mu \frac{Us}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}$$

In base al denominatore, i modi presenti nell'uscita sono:

- e^{-t/T_1} dovuto al termine $1 + T_1 s$
- e^{-t/T_2} dovuto al termine $1 + T_2 s$

Pertanto nell'uscita $y(t) = k_1 e^{-t/T_1} + k_2 e^{-t/T_2}$ non sono presenti i modi corrispondenti agli zeri del sistema.

7.9 Risonanza

Supponiamo di avere un sistema con poli immaginari coniugati $\pm j\omega_n$, ovvero $G(s) = \mu \frac{\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2}$ (rispetto al caso generale qui $\xi = 0$); il diagramma di Bode ha un picco di risonanza infinito alla pulsazione ω_n .

Analizziamone il significato calcolando l'uscita del sistema in corrispondenza dell'ingresso $u(t) = U \cos(\omega_n t)$. La trasformata dell'ingresso è $U(s) = U \frac{s}{s^2 + \omega_n^2}$, quindi quella dell'uscita è

$$Y(s) = G(s)U(s) = \mu \frac{U\omega_n^2 s}{(s^2 + \omega_n^2)^2}$$

1) $\omega_u \neq \omega_n$

$$Y(s) = \frac{k_1}{s - j\omega_n} + \frac{\bar{k}_1}{s + j\omega_n} + \frac{k_2}{(s - j\omega_u)^2} + \frac{\bar{k}_2}{(s + j\omega_u)^2}$$

$$y(t) = 2 |k_1| \cos(\omega_n t + \arg(k_1)) + 2 |k_2| \cos(\omega_u t + \arg(k_2))$$

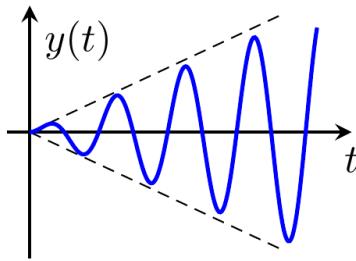
L'uscita è la somma di due sinusoidi a frequenza ω_n e ω_u

2) $\omega_u = \omega_n$

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s)U(s) \\ &= \mu U \frac{s\omega_n^2}{(s^2 + \omega_n^2)(s^2 + \omega_n^2)} \\ &= \mu U \frac{s\omega_n^2}{(s^2 + \omega_n^2)^2} \\ &= \frac{k_1}{s - j\omega_n} + \frac{\bar{k}_1}{s + j\omega_n} + \frac{k_2}{(s - j\omega_n)^2} + \frac{\bar{k}_2}{(s + j\omega_n)^2} \end{aligned}$$

$$y(t) = 2 |k_1| \cos(\omega_n t + \arg(k_1)) + 2 |k_2| \cos(\omega_n t + \arg(k_2))$$

L'uscita tende a infinito per $t \rightarrow \infty$, quindi il sistema non è BIBO stabile; questo fenomeno viene chiamato **risonanza**.



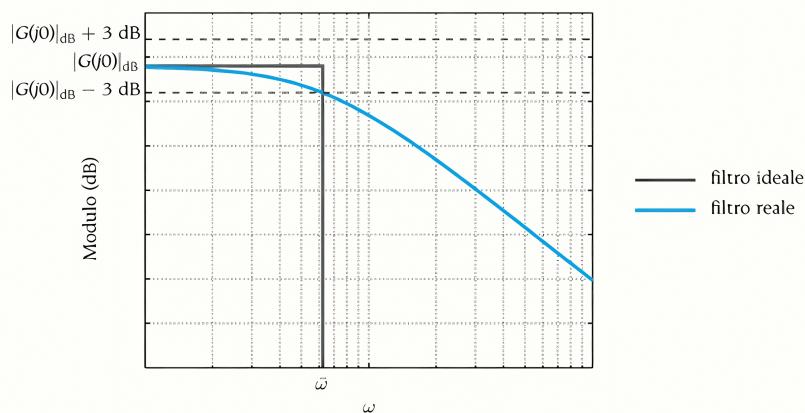
7.10 Azione filtrante dei sistemi dinamici

Quanto visto mostra come un sistema dinamico lineare e stazionario si comporta sostanzialmente come un *filtro* per l'ingresso, modellandolo per produrre l'uscita.

7.10.1 Filtro passa-basso

Un filtro ideale passa-basso è un sistema che lascia passare inalterata, o amplificate di un valore costante, unicamente le armoniche del segnale di ingresso con pulsazione inferiore o uguale a un dato valore $\bar{\omega}$; il diagramma di Bode del filtro è costante fino a $\bar{\omega}$ e vale $-\infty$ "dB" per $\omega > \bar{\omega}$, mentre il diagramma della fase è nullo fino a $\bar{\omega}$. La realizzazione di un filtro ideale passa-basso è di fatto impossibile, quindi definiamo un filtro reale passa-basso come un sistema con $G(j\omega)$ che soddisfa le seguenti relazioni

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{|G(j\omega)|}{|G(j0)|} \leq \sqrt{2} & \omega \leq \bar{\omega} \\ \frac{|G(j\omega)|}{|G(j0)|} < \frac{1}{\sqrt{2}} & \omega > \bar{\omega} \end{cases} \quad (7.10.37)$$



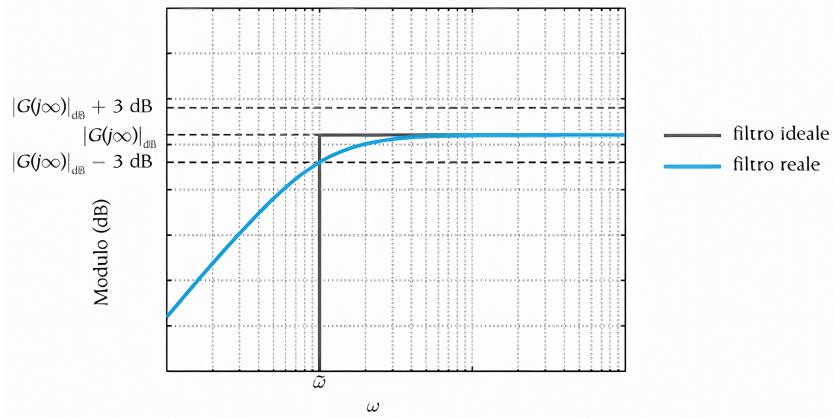
N.B. Nella (7.10.37) lo sfasamento introdotto da $G(s)$ non ha alcun ruolo, mentre in realtà il contributo di fase di un filtro (reale) può essere significativo e non va trascurato.

7.10.2 Filtro passa-alto

Un *filtro ideale passa-alto* è un sistema che lascia passare inalterate, o amplificate di una quantità costante, unicamente le armoniche del segnale di ingresso con pulsazione maggiore o uguale a $\tilde{\omega}$.

Un *filtro reale passa-alto* è un sistema caratterizzato da una risposta in frequenza $G(j\omega)$ il cui modulo soddisfa le seguenti relazioni

$$\begin{cases} \frac{|G(j\omega)|}{|G(j0)|} < \frac{1}{\sqrt{2}} & \omega < \tilde{\omega} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{|G(j\omega)|}{|G(j0)|} \leq \sqrt{2} & \omega \geq \tilde{\omega} \end{cases} \quad (7.10.38)$$



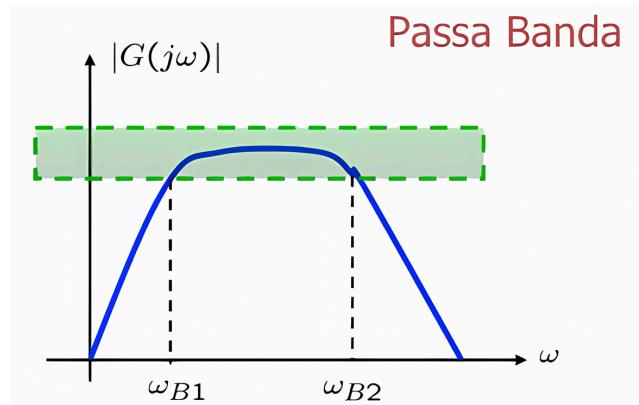
Solo sistemi non strettamente propri possono avere le caratteristiche di un filtro passa-alto, dato che la (7.10.38) implica che $G(j\infty) \neq 0$.

7.10.3 Passa banda

I *filtri passa banda ideali* sono sistemi che lasciano passare solo armoniche del segnale in ingresso comprese tra ω_{B1} e ω_{B2} .

I *filtri passa banda reali* sono sistemi che hanno una $G(j\omega)$ che soddisfa le seguenti relazioni

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{|G(j\omega)|}{|G(j\omega_{\max})|} \leq \sqrt{2} & \omega \in [\omega_{B1}, \omega_{B2}] \\ \frac{|G(j\omega)|}{|G(j\omega_{\max})|} < \frac{1}{\sqrt{2}} & \omega \in [0, \omega_{B1}] \cup [\omega_{B2}, 0] \end{cases} \quad (7.10.39)$$

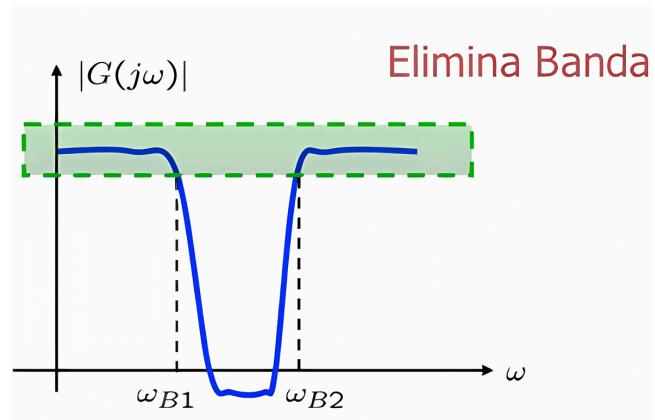


7.10.4 Elimina banda

I *filtri elimina banda ideali* sono sistemi che non lasciano passare solo armoniche del segnale in ingresso comprese tra ω_{B1} e ω_{B2} .

I *filtri elimina banda reali* sono sistemi che hanno una $G(j\omega)$ che soddisfano le seguenti relazioni

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{|G(j\omega)|}{|G(j\omega_{\max})|} \leq \sqrt{2} & \omega \in [0, \omega_{B1}] \cup [\omega_{B2}, 0] \\ \frac{|G(j\omega)|}{|G(j\omega_{\max})|} < \frac{1}{\sqrt{2}} & \omega \in [\omega_{B1}, \omega_{B2}] \end{cases}$$



7.11 Esempio diagramma di Bode

Prendiamo una risposta in frequenza

$$G(s) = 10 \cdot \frac{1 + 0.1s}{1 + 10s}$$

Il guadagno è $\mu = 10$, che in decibel è

$$\begin{aligned} 20 \log \mu &= 20 \log 10 \\ &= 20 \text{ dB} \end{aligned}$$

C'è uno zero

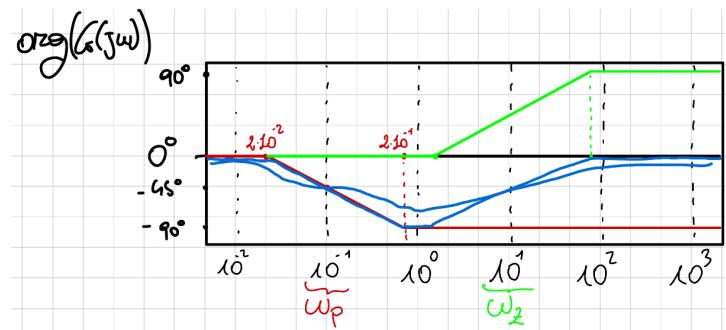
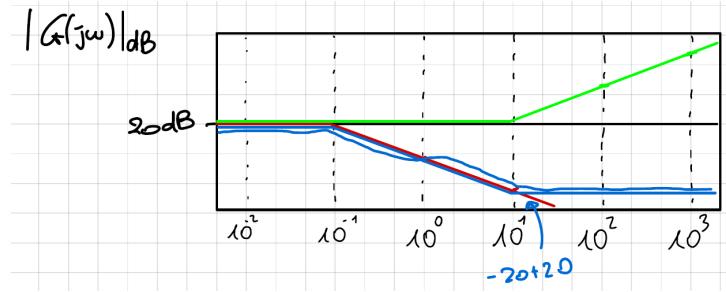
$$1 + 10^{-1}s \longrightarrow s_z = -10 \quad \omega_z = 10$$

e un polo

$$1 + 10^s \longrightarrow s_p = -10^{-1} \quad \omega_p = 10^{-1}$$

$$G(j\omega) = 10 \cdot \frac{1 + 10^{-1}j\omega}{1 + 10j\omega}$$

Il diagramma d'ampiezza risultante può essere visto come la somma dei contributi del polo e dello zero (in verde il contributo dello zero, in rosso il contributo del polo, in blu la somma)

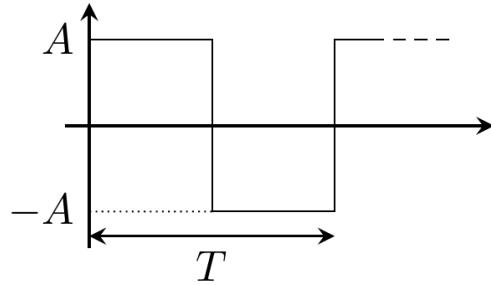


Per quanto riguarda il diagramma di fase, -90° è un valore asintotico che si può raggiungere solo per $\omega \rightarrow \infty$, quindi non sarà mai raggiunto in un sistema reale; inoltre la presenza di uno zero aumenta la fase nel diagramma.

7.11.1 Filtrare un'onda quadra con disturbo in alta frequenza

Consideriamo un segnale $s(t)$ ad onda quadra con periodo T e ampiezza A :

$$s(t) = A \operatorname{sign} \left(\sin \left(\frac{2\pi t}{T} \right) \right) = \begin{cases} A & \text{se } \sin \left(\frac{2\pi t}{T} \right) \geq 0 \\ -A & \text{se } \sin \left(\frac{2\pi t}{T} \right) < 0 \end{cases}$$



Supponiamo che l'ingresso consista nell'onda quadra più un disturbo sinusoidale ad alta frequenza $\omega_N \gg \frac{2\pi}{T}$ con ampiezza A_N

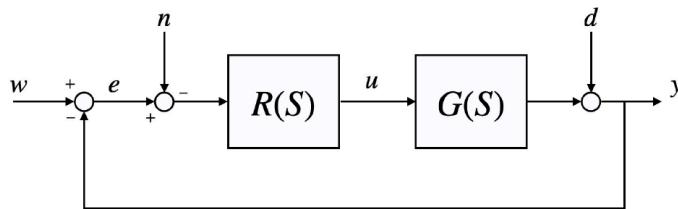
$$u(t) = s(t) + A_N \sin(\omega_N t)$$

Per filtrare il disturbo in alta frequenza possiamo usare un filtro passa-basso, cioè un sistema dinamico del primo ordine con un polo reale in $-\frac{1}{T_p}$: $G(s) = \frac{1}{1 + sT_p}$. Scegliendo opportunamente la costante di tempo T_p il segnale in uscita sarà una versione filtrata dell'onda quadra con disturbo in alta frequenza quasi completamente attenuato.

8 Sistemi di controllo: stabilità e prestazioni

8.1 Schema di controllo in retroazione

Consideriamo il seguente schema di controllo in retroazione



Ci poniamo come obiettivo quello di garantire che l'uscita $y(t)$ segua il riferimento $w(t)$ (scelto dall'ucente) in presenza di

- disturbi (non misurabili) in uscita $d(t)$ e disturbi di misura $n(t)$
- incertezze sul modello $G(s)$ del sistema fisico (impianto) considerato

soddisfacendo opportune specifiche di prestazione.

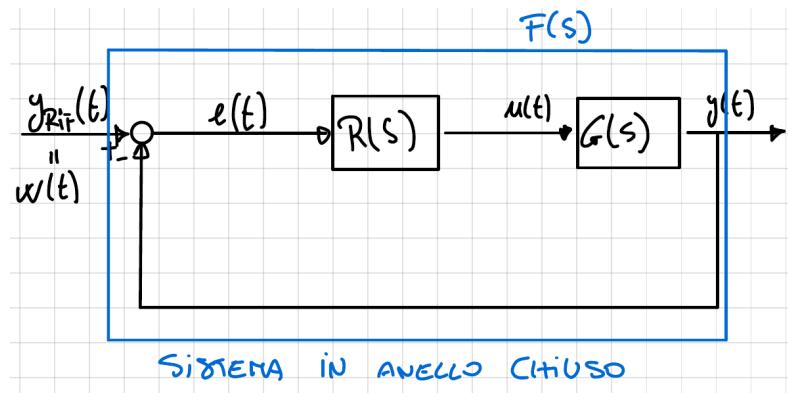
Definiamo

$$L(s) = R(s)G(s) \quad (8.1.40)$$

come **funzione d'anello**, cioè la funzione di trasferimento in anello aperto del sistema.
 $R(s)$ è chiamato (regolatore).

8.1.1 Sistema in anello chiuso

Prendiamo un sistema in retroazione in anello chiuso (caso ideale senza rumore o disturbi)



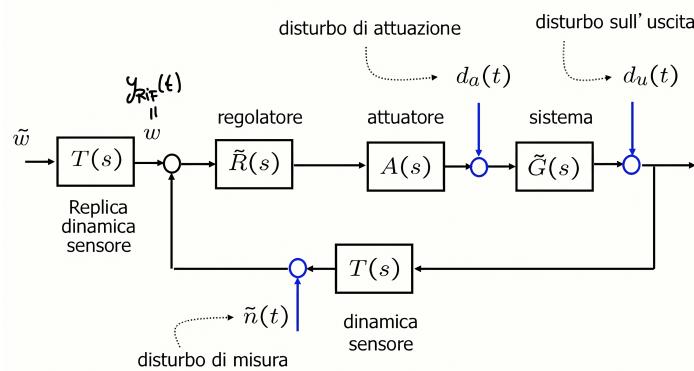
N.B. Chiameremo sempre la $w(t)$ come uscita di riferimento $y_{T(\text{RIF})}(t)$; quindi $y_{T(\text{RIF})}(t)$ è quello che voglio ottenere dal sistema, mentre $y(t)$ è come si comporta il sistema.

$$Y(s) = \underbrace{F(s) Y_{\text{RIF}}(s)}_{W(s)} \quad (8.1.41)$$

è ovvio che se potessimo decidere il valore di $F(s)$ sarebbe 1.

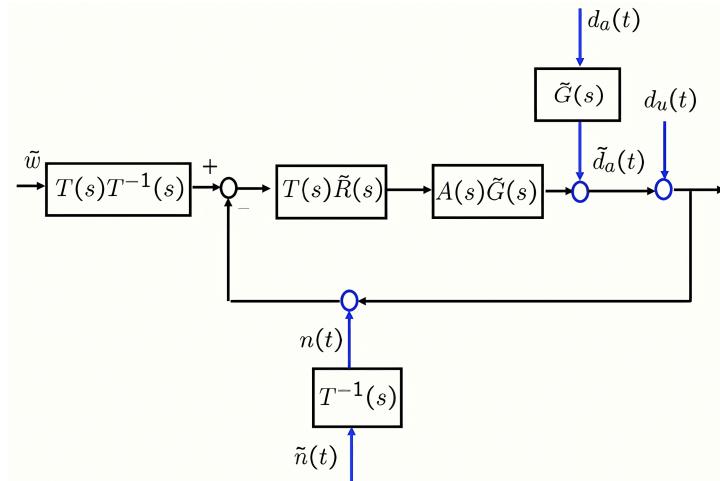
8.2 Schema generale e semplificazione

Lo schema del sistema in retroazione ad anello aperto cattura anche strutture più complesse che includono attuatori e trasduttori

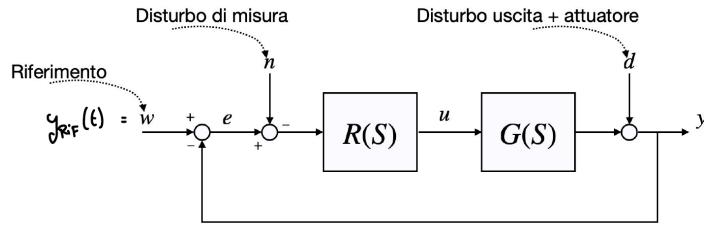


N.B. Il riferimento w viene filtrato con una replica della dinamica del sensore $T(s)$ in modo che sia "compatibile" con la dinamica dell'uscita y retroazionata.

Usando le proprietà di schemi a blocchi interconnessi, si può riscrivere lo schema precedente in modo equivalente.



Così lo schema diventa



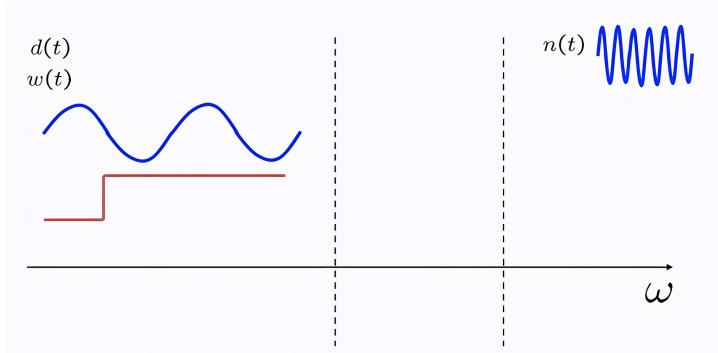
- Sistemi: $R(s) = T(s)\tilde{R}(s)$, $G(s) = A(s)\tilde{G}(s)$
- Segnali: $W(s) = \tilde{W}(s)$, $N(s) = T^{-1}(s)\tilde{N}(s)$, $D(s) = D_a(s)\tilde{G}(s) + D_{u(s)}$

il disturbo sull'attuatore $d_{a(t)}$ viene filtrato dal sistema. Bisogna tenerne conto quando si fanno considerazioni sul disturbo in uscita $d(t)$.

$R(s)$ è la funzione di trasferimento del regolatore e $G(s)$ del sistema sotto controllo; inoltre assumiamo che $R(s)$ e $G(s)$ sono funzioni razionali, con $G(s)$ strettamente propria, mentre $R(s)$ può essere rappresentativa di sistemi non strettamente propri e non dinamici. La funzione ad anello $L(s) = R(s)G(s)$ risulta sempre strettamente propria.

8.3 Disaccoppiamento frequenziale dei segnali

Nelle applicazioni di interesse ingegneristico tipicamente le bande dei segnali di ingresso $w(t)$, $d(t)$, $n(t)$ sono limitate in opportuni range.



- $w(t)$, $d(t)$ hanno bande a "basse frequenze", ad esempio posizioni, rotazioni, velocità, etc ... di sistemi meccanici
- $n(t)$ ha bande ad "alte frequenze", ad esempio disturbi termici in componenti elettronici, accoppiamenti con campi elettromagnetici, etc dots

Lo stesso vale per le trasformate: $W(j\omega)$, $D(j\omega)$ hanno valori non nulli a "basse frequenze", mentre $N(j\omega)$ ha valori non nulli ad "alte frequenze".

8.4 Requisiti di un sistema di controllo

8.4.1 Stabilità

Stabilità in condizioni nominali Il requisito fondamentale per il sistema in retroazione che stiamo considerando è l'asintotica stabilità (2.16.3) o stabilità BIBO (5.5).

Stabilità robusta La stabilità deve essere garantita anche in condizioni perturbate (errori di modello o incertezze nei parametri), perché la $G(s)$ rappresenta soltanto un modello approssimato del sistema sotto controllo.

8.4.2 Prestazioni

Oltre alla stabilità, è necessario che il sistema abbia determinate prestazioni, cioè che abbia le proprietà elencate.

Prestazioni statiche in condizioni nominali Il sistema ha un errore e limitato o nullo per $t \rightarrow \infty$, cioè dopo che si è esaurito il transitorio iniziale, a fronte di ingressi w , d , n con determinate caratteristiche.

Esempi:

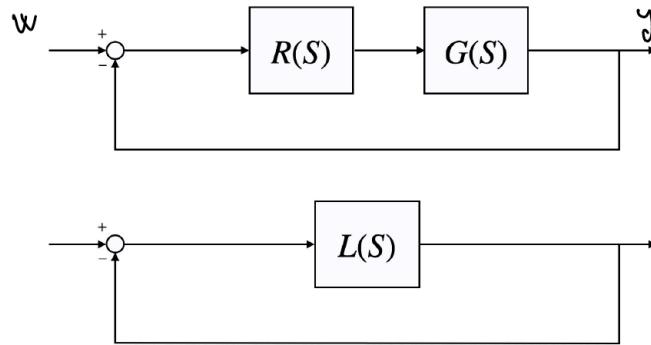
- errore in risposta a un ingresso a gradino (transizione ad un nuovo riferimento o disturbi costanti su attuatori/sensori) o rampa;
- risposta a un ingresso sinusoidale a date frequenze (disturbi con certe componenti frequenziali)

Prestazioni dinamiche in condizioni nominali Prestazioni del sistema in transitorio relative a

- risposta a un riferimento w , data in termini di assestamento $T_{a,\varepsilon}$ e sovraelongazione $S\%$ massimi;
- risposta a disturbi d e n , data in termini di attenuazione in certi range di frequenze (bande di frequenza dei disturbi);
- moderazione della variabile di controllo u , data in termini di contenimento dell'ampiezza (per evitare saturazione di attuatori, uscita da range in cui la linearizzazione è valida o costi eccessivi).

8.4.3 Stabilità robusta del sistema retroazionato (Criterio di Bode)

Poiché la stabilità di un sistema lineare non dipende dagli ingressi, consideriamo il seguente schema a blocchi



Per studiare la stabilità robusta, in presenza di incertezze, del sistema retroazionato ci baseremo su un principio fondamentale: il **Criterio di Bode**, che lega la stabilità del sistema retroazionato a quella del sistema in anello aperto.

$$F(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} \Rightarrow Y(s) = F(s)W(s)$$

Tenendo conto che, logicamente, l'errore del sistema $e(t)$ è la differenza tra il l'uscita di riferimento $y_{T(\text{RIF})}$ e l'uscita reale $y(t)$

$$\begin{aligned} Y(s) &= R(s)G(s) \overbrace{E(s)}^{\mathcal{L}[e(t)]} \\ &= R(s)G(s)(W(s) - Y(s)) \\ &= R(s)G(s)W(s) - R(s)G(s)Y(s) \end{aligned}$$

Riarrangiamo i termini

$$\begin{aligned} Y(s) + R(s)G(s)Y(s) &= R(s)G(s)W(s) \\ (1 + R(s)G(s))Y(s) &= R(s)G(s)W(s) \end{aligned}$$

quindi

$$Y(s) = \underbrace{\frac{R(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)}}_{F(s)} W(s)$$

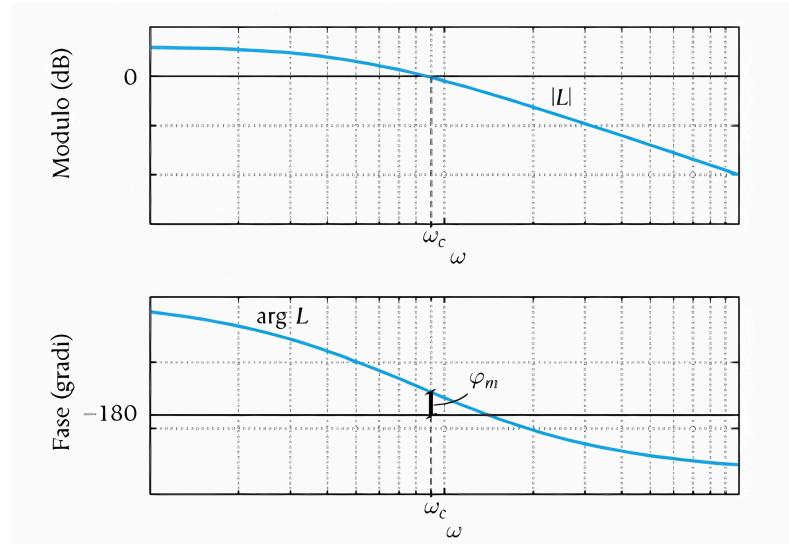
$$\left. \begin{aligned} F(s) &= \frac{R(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)} \\ L(s) &= R(s)G(s) \end{aligned} \right\} \Rightarrow F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

8.5 Margini di fase e ampiezza

8.5.1 Margine di fase

$$M_f = 180^\circ + \arg(L(j\omega_c)) \text{ con } \omega_c \text{ tale che } |L(j\omega_c)|_{\text{dB}} = 0 \quad (8.5.42)$$

Nota: $M_f = \arg(L(j\omega_c)) - (-180^\circ) = 180^\circ + \arg(L(j\omega_c))$. La seguente figura può aiutare a comprendere meglio cos'è il margine di fase (in figura il margine di fase è indicato con φ_m)



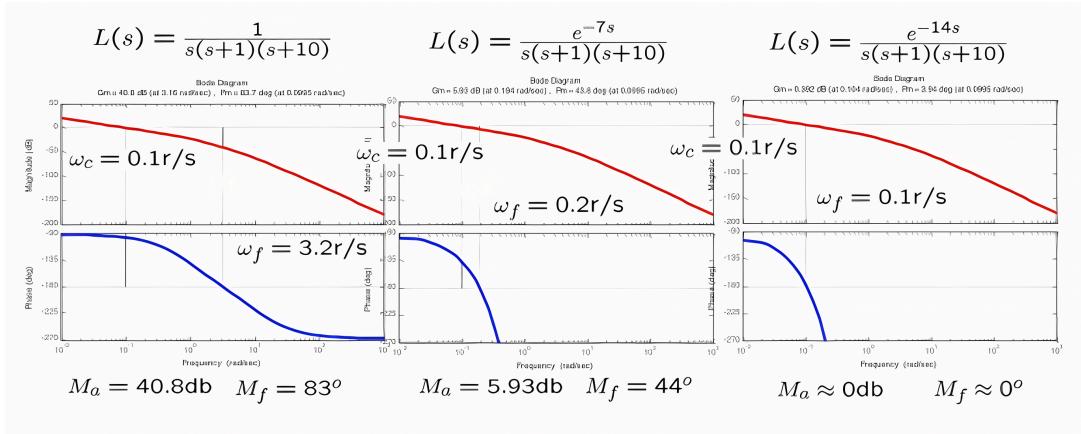
Il margine di fase indica il ritardo massimo che può essere introdotto nel sistema mantenendolo stabile.

Consideriamo un sistema che ritarda il suo input di τ , che quindi ha funzione di trasferimento $e^{-s\tau}$. Il suo diagramma di Bode delle ampiezze è costante a 0 dB. Lo sfasamento è $-\omega\tau$, che nel diagramma di Bode delle fasi, in scala semi-logaritmica, ha un andamento di tipo esponenziale. Se $L(s) = e^{-s\tau} \tilde{L}(s)$ la pulsazione critica ω_c non cambia, è la stessa per entrambe. Un ritardo quindi riduce il margine di fase in quanto, per $\omega = \omega_c$, riduce la fase:

$$\arg(L(j\omega_c)) = \arg(\tilde{L}(j\omega_c)) = \tau\omega_c$$

quindi per essere asintoticamente stabile, un sistema deve poter tollerare un ritardo τ che soddisfi la disequazione

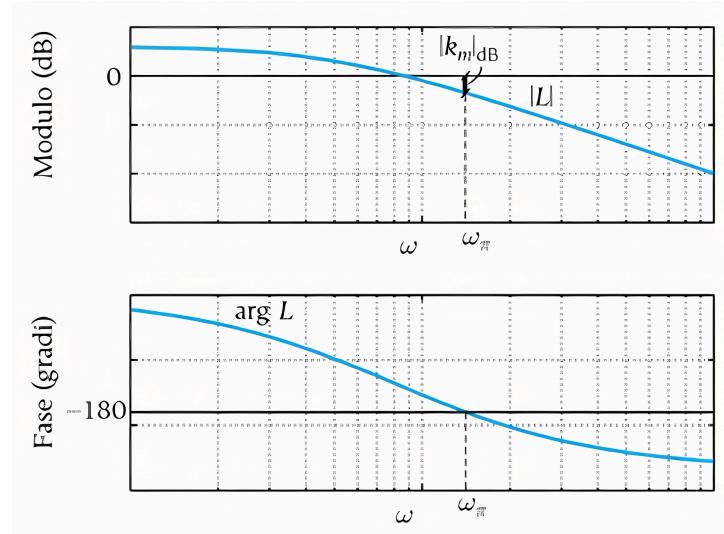
$$\tau < \frac{M_f}{\omega_c}$$



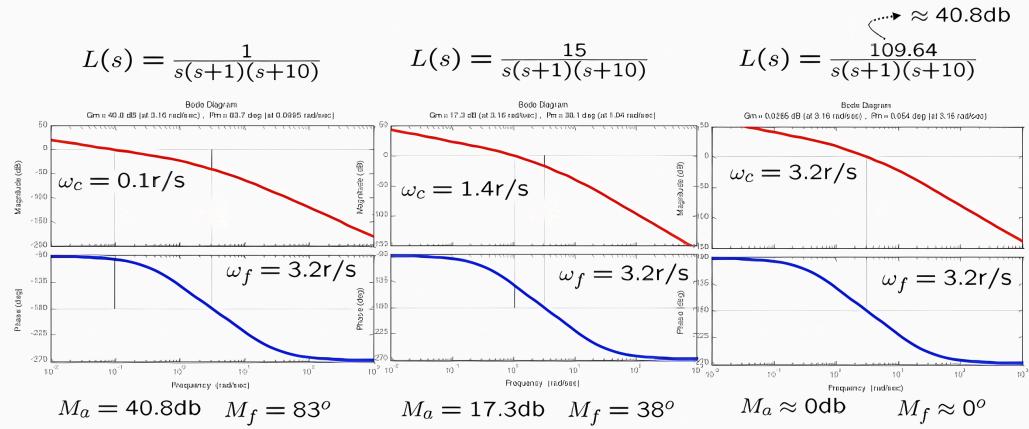
8.5.2 Margine di ampiezza

$$M_a = -|L(j\omega_\pi)|_{T(\text{dB})} \text{ con } \omega_\pi \text{ tale che } \arg(L(j\omega_\pi)) = -180^\circ$$

La seguente figura può aiutare a comprendere meglio cos'è il margine di ampiezza (in figure il margine di ampiezza è indicato con $|k_m|_{T(\text{dB})}$)



Il margine di ampiezza indica il guadagno massimo che può essere integralrodotto mantenendo il sistema asintoticamente stabile. Supponendo di integralrodurre un ulteriore guadagno k nel sistema, esso rimane asintoticamente stabile per tutti i valori di k inferiori a M_a .



8.5.3 Casi patologici

Ci sono casi in cui M_f e M_a non sono definiti o non sono informativi:

- nel caso di **intersezioni multiple**, in cui il diagramma delle ampiezze attraversa l'asse a 0 dB più di una volta;
- nel caso di **assenza di intersezioni**, in cui il diagramma delle ampiezze non attraversa mai l'asse a 0 dB;
- nel caso di margini di ampiezza e fase con **segni discordi**, perché per essere informativi M_f e M_a devono avere lo stesso segno.

8.6 Criterio di Bode

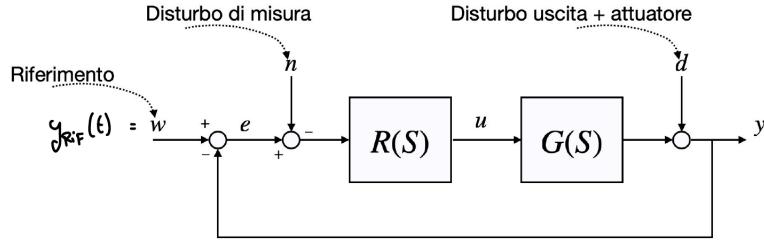
Si supponga che

- 1) $L(s)$ non abbia poli a parte reale (strettamente) positiva
- 2) il diagramma di Bode del modulo di $L(j\omega)$ attraversi una sola volta l'asse a 0 dB.

Allora, condizione necessaria e sufficiente perché il sistema retroazionato sia asintoticamente stabile è che risulti $\mu > 0$ (con μ guadagno statico di $L(j\omega)$) e $M_f > 0$.

In questo modo quindi la stabilità del sistema in retroazione è determinata dalla lettura di un solo punto sul diagramma di Bode di $L(j\omega)$. Si rammenta che M_f e M_a in genere vanno considerati simultaneamente e forniscono una misura della robustezza rispetto a incertezze su $L(s)$.

8.7 Funzioni di sensitività



Ingressi del sistema in anello chiuso:

- $w(t)$ riferimento (andamento desiderato per $y(t)$)
- $d(t)$ disturbo in uscita
- $n(t)$ disturbo di misura

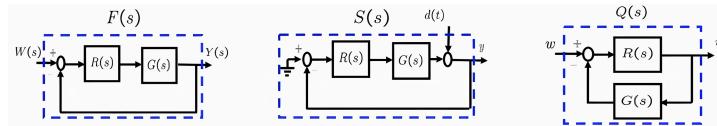
Uscite di interesse:

- $e(t) = w(t)y(t)$ errore di inseguimento
- $y(t)$ uscita controllata
- $u(t)$ ingresso di controllo del sistema in anello aperto (impianto)

Definiamo le *funzioni di sensitività* come funzioni di trasferimento tra ingressi e uscite di interesse.

$$\begin{cases} S(s) = \frac{1}{1 + R(s)G(s)} & \text{Funzione di sensitività} \\ F(s) = \frac{R(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)} & \text{Funzione di sensitività complementare} \\ Q(s) = \frac{R(s)}{1 + R(s)G(s)} & \text{Funzione di sensitività del controllo} \end{cases} \quad (8.7.43)$$

$$\begin{bmatrix} Y(s) \\ U(s) \\ E(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(s) & S(s) & -F(s) \\ Q(s) & -Q(s) & -Q(s) \\ S(s) & -S(s) & F(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W(s) \\ D(s) \\ N(s) \end{bmatrix}$$



Definiamo $y_w(t)$ l'uscita con ingresso $w(t)$, $y_d(t)$ l'uscita con ingresso $d(t)$ e $y_n(t)$ l'uscita con ingresso $n(t)$; per il principio di sovrapposizione degli effetti

$$y(t) = y_{w(t)} + y_{d(t)} + y_{n(t)}$$

8.7.1 Funzione di sensitività complementare

Prendiamo in considerazione solo l'ingresso $w(t)$.

Sappiamo dalla (8.1.41) che la funzione di trasferimento che lega $Y_w(s)$ e $W(s)$ è $F(s)$

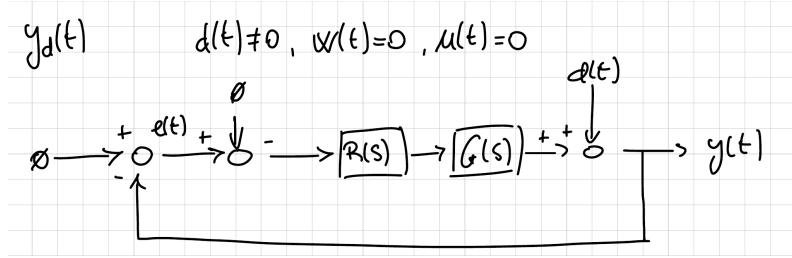
$$Y_w(s) = F(s)W(s)$$

e sappiamo che la $F(s)$ è così definita

$$F(s) = \frac{R(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)} := \text{Funzione di sensitività complementare} \quad (8.7.44)$$

8.7.2 Funzione di sensitività

Prendiamo in considerazione solo l'ingresso $d(t)$.



$$\begin{aligned}
 Y_d(s) &= \underbrace{D(s)}_{\mathcal{L}[d(t)]} + R(s)G(s) \underbrace{E_{d(s)}}_{\mathcal{L}[e(t)]} \\
 &= D(s) + R(s)G(s)(0 - Y_d(s)) \quad \Leftarrow E_{d(s)} = \underbrace{Y_w(s)}_0 - Y_d(s)
 \end{aligned}$$

riarrangiamo i termini

$$\begin{aligned}
 Y_d(s) + R(s)G(s)Y_d(s) &= D(s) \\
 (1 + R(s)G(s))Y_d(s) &= D(s)
 \end{aligned}$$

quindi

$$Y_d(s) = \frac{1}{1 + R(s)G(s)}D(s)$$

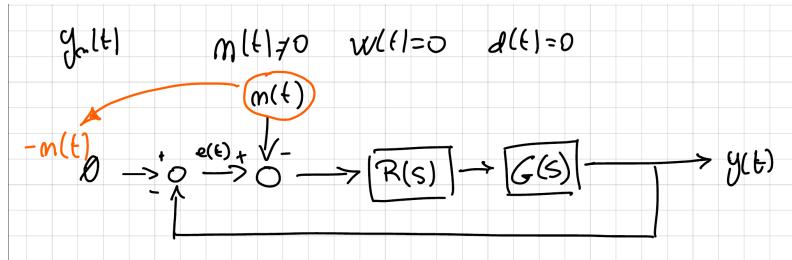
$$S(s) = \frac{1}{1 + R(s)G(s)} := \text{Funzione di sensitività} \quad (8.7.45)$$

siccome $L(s) = R(s)G(s)$ la funzione di sensitività può essere scritta come

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)}$$

8.7.3 Funzione di sensitività del controllo

Prendiamo in considerazione solo l'ingresso $n(t)$.



$$\begin{aligned}
 Y_n(s) &= F(s)(-N(s)) \\
 &= -F(s)N(s)
 \end{aligned}$$

8.7.4 Considerazioni

Stabilità Il denominatore di tutte le funzioni di sensitività è lo stesso. Si ricordi che la stabilità è determinata dai poli della funzione di trasferimento. Questo è consistente con il fatto che la stabilità del sistema (retroazionato) non dipende dal particolare ingresso considerato.

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= Y_w(s) + Y_d(s) + Y_n(s) \\
 &= F(s)W(s) + S(s)D(s) - F(s)N(s)
 \end{aligned}$$

Per seguire fedelmente il riferimento $w(t)$ vorremmo $F(s) = 1$, che è il caso ideale

$$Y_n(s) = -N(s) \quad S(s) = \frac{1}{1 + L(s)}$$

e per annullare l'effetto del disturbo $d(t)$ vorremmo $S(s) = 0$. Tuttavia si nota che se annulliamo $F(s)$ il disturbo $n(t)$ non sarebbe per niente attenuato.

Inoltre $S(s) + F(s) = 1$ sempre

$$\begin{aligned} S(s) + F(s) &= \frac{1}{1+L(s)} + \frac{L(s)}{1+L(s)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

è il motivo per cui $F(s)$ viene chiamata funzione di sensitività complementare.

Noi lavoreremo in frequenze in modo da avere, per $F(j\omega) = \frac{L(j\omega)}{1+L(j\omega)}$

- $|F(j\omega)| \approx 1$ a "basse" frequenze (inseguimento di $w(t)$)
- $|F(j\omega)| \approx 0$ ad "alte" frequenze (abbattimento di $n(t)$)

Quindi progetteremo $R(j\omega)$ in modo che

- $|L(j\omega)| \gg 1$ a basse frequenze
- $|L(j\omega)| \ll 1$ ad alte frequenze

Ricordando che

- $w(t), d(t)$ hanno componenti frequenziali a "basse" frequenze
- $n(t)$ ha componenti frequenziali ad "alte" frequenze

8.7.5 Errori

$$\begin{aligned} E_w(s) &= W(s) - Y_w(s) & E_d(s) &= W(s) - Y_d(s) & E_n(s) &= W(s) - Y_n(s) \\ &= W(s) - F(s)W(s) & &= 0 - Y_d(s) & &= 0 - Y_n(s) \\ &= (1 - F(s))W(s) & &= -Y_d(s) & &= -Y_n(s) \\ S(s) = 1 - F(s) \Rightarrow & S(s)W(s) & &= -S(s)D(s) & &= -(-F(s)N(s)) \\ & & & & &= F(s)N(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_n(s) &= W(s) - Y_n(s) \\ &= 0 - Y_n(s) \\ &= -Y_n(s) \\ &= -(-F(s)N(s)) \\ &= F(s)N(s) \end{aligned}$$

8.7.6 Analisi in frequenza della funzione di sensitività complementare

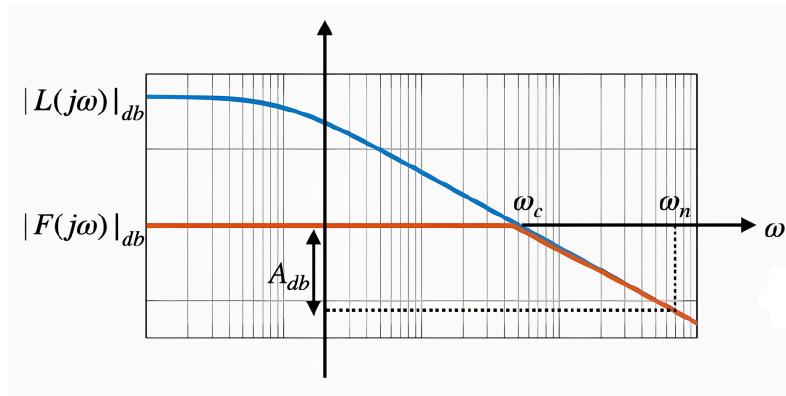
$$F(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$$

passiamo alle frequenze

$$\begin{aligned} |F(j\omega)| &= \left| \frac{L(j\omega)}{1+L(j\omega)} \right| \\ &= \frac{|L(j\omega)|}{|1+L(j\omega)|} \\ \xrightarrow[\text{scelta di design su } R(j\omega)]{} &\approx \begin{cases} 1 & \omega \ll \omega_c \\ |L(j\omega)| & \omega \gg \omega_c \end{cases} \end{aligned}$$

Consideriamo ω_c pulsazione di taglio

$$|F(j\omega)|_{T(\text{dB})} \approx \begin{cases} 0 \text{ dB} & \omega \leq \omega_c \\ |L(j\omega)|_{\text{dB}} & \omega > \omega_c \end{cases}$$



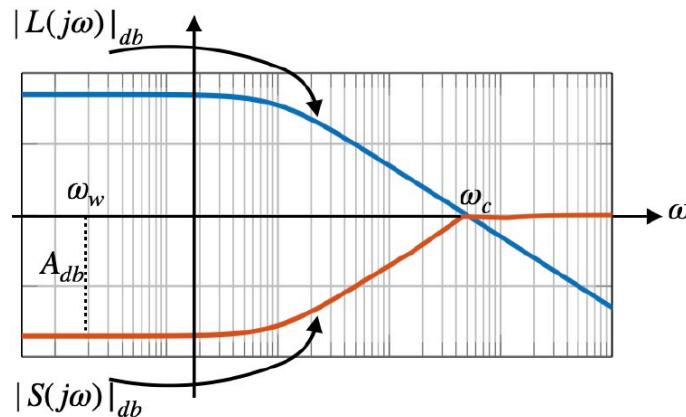
8.7.7 Analisi in frequenza della funzione di sensitività

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)}$$

$$|S(j\omega)| = \frac{1}{|1 + L(j\omega)|}$$

$$\approx \begin{cases} \frac{1}{|L(j\omega)|} & \omega \leq \omega_c \\ 1 & \omega > \omega_c \end{cases}$$

$$|S(j\omega)|_{\text{dB}} \approx \begin{cases} -|L(j\omega)|_{\text{dB}} & \omega \leq \omega_c \\ 0 \text{ dB} & \omega > \omega_c \end{cases}$$



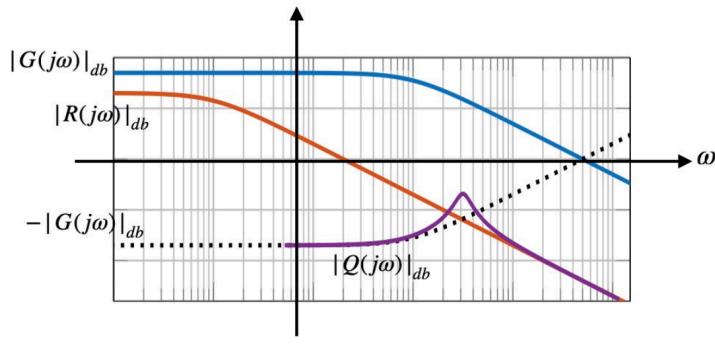
8.7.8 Analisi in frequenza della funzione di sensitività del controllo

$$Q(s) = \frac{R(s)}{1 + R(s)G(s)}$$

$$|Q(j\omega)| = \left| \frac{R(s)}{1 + R(s)G(s)} \right|$$

$$\approx \begin{cases} \frac{1}{G(j\omega)} & \omega \leq \omega_c \\ R(j\omega) & \omega > \omega_c \end{cases}$$

$$|Q(j\omega)|_{\text{dB}} \approx \begin{cases} -|G(j\omega)|_{\text{dB}} & \omega \leq \omega_c \\ |R(j\omega)|_{\text{dB}} & \omega > \omega_c \end{cases}$$

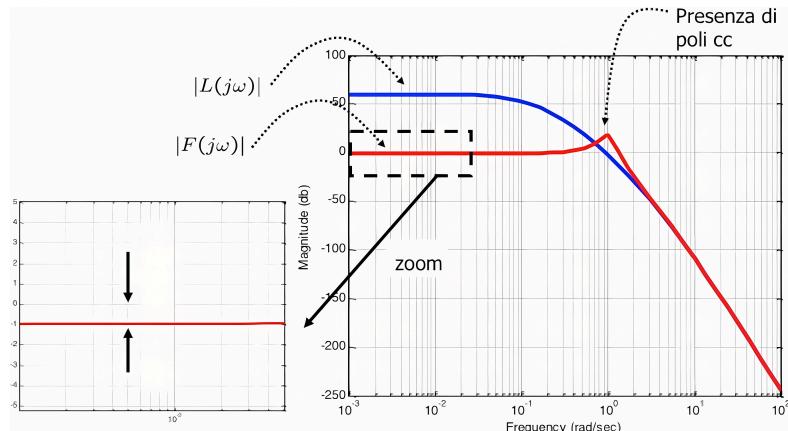


A basse frequenze il modulo di $Q(j\omega)$ dipende da $G(j\omega)$, quindi non possiamo influenzarlo con il regolatore. Occorre evitare valori di ω_c troppo elevati.

8.7.9 Poli complessi coniugati di $F(s)$ (sensitività complementare)

La funzione di sensitività complementare può avere una coppia di poli c.c. dominanti

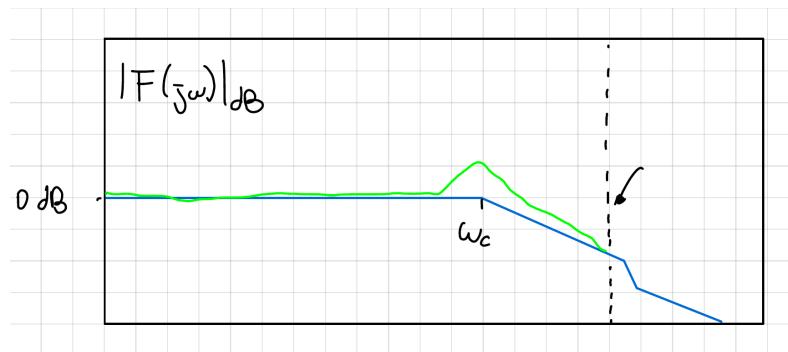
$$L(s) = \frac{20}{(1+10s)(1+2s)(1+0.2s)}$$



Mettiamo in relazione il picco di risonanza di $F(j\omega)$ con lo smorzamento ξ associato, assumendo che $\omega_n \approx \omega_C$.

$$|F(j\omega)| \approx \begin{cases} 0 \text{ dB} & \omega \leq \omega_c \\ |L(j\omega)|_{\text{dB}} & \omega > \omega_c \end{cases}$$

Approssimazione di $F(s)$ a poli complessi coniugati dominanti:



Assumendo $\omega_n \approx \omega_c$, la funzione di sensitività complementare vale (si veda la 7.8.13)

$$|F(j\omega_c)| \approx \frac{1}{2\xi}$$

dove ξ è lo smorzamento dei poli complessi coniugati.

Altrimenti, tenendo conto che il modulo di $|L(j\omega)|$ alla frequenza di taglio ω_c , come si vede dal grafico, vale 0 dB (quindi 1)

$$\begin{aligned}
|F(j\omega_c)| &= \frac{\overbrace{|L(j\omega_c)|}^1}{|1 + L(j\omega_c)|} \\
&= \frac{1}{|1 + \underbrace{e^{j\varphi_c}}_{1 \cdot e^{j\varphi_c}}|} \\
&= \frac{1}{|1 + \cos \varphi_c + j \sin \varphi_c|} \\
&= \frac{1}{\sqrt{(1 + \cos \varphi_c)^2 + (\sin \varphi_c)^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 \varphi_c + \sin^2 \varphi_c + 2 \cos \varphi_c}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2(1 + \cos \varphi_c)}}
\end{aligned}$$

dalla trigonometria sappiamo che $\cos(\varphi_c) = -\cos(\pi + \varphi_c)$ e, ricordando la definizione di [margine di fase \(8.5.42\)](#)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2(1 + \cos(\varphi_c))}} &= \frac{1}{\sqrt{2(1 - \cos M_f^{\text{rad}})}} \\
1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \alpha \implies &= \frac{1}{\sqrt{4 \sin^2 \frac{M_f^{\text{rad}}}{2}}} \\
&= \frac{1}{2 \sin \frac{M_f^{\text{rad}}}{2}}
\end{aligned}$$

Uguagliando le due espressioni si ha

$$\xi = \sin \frac{M_f^{\text{rad}}}{2} \approx \frac{M_f^{\text{rad}}}{2}$$

si è potuto approssimare il seno perché la pulsazione di taglio è molto bassa.

Convertendo i radienti in gradi

$$\begin{aligned}
\xi &= \frac{M_f}{2} \frac{\pi}{180} \\
&= M_f \cdot \frac{\pi}{360} \\
&= M_f \cdot \frac{3.14}{3.6 \times 100} \\
&\approx \frac{M_f}{100}
\end{aligned}$$

questa equazione mette in relazione la $F(j\omega)$ e la $L(j\omega)$.

8.8 Analisi statica: errore a un gradino

Sia $e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$ con $e(t) = w(t) - y(t)$ errore in risposta a un *gradino* $w(t) = W1(t)$.

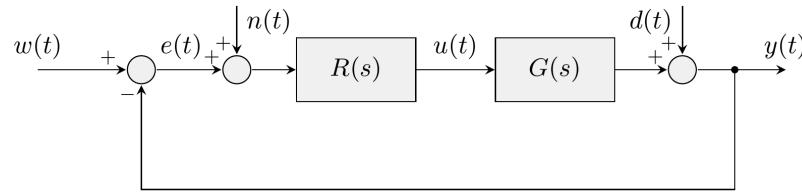
Utilizzando il [teorema del valore finale 3.4.9](#)

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$$

RIVEDI!!!

9 Sistemi di controllo: progetto del regolatore

Consideriamo il seguente schema di controllo in retroazione:



9.1.1 Riepilogo specifiche

Stabilità robusta rispetto a incertezze

stabilità in presenza di errori di modello o incertezze di parametri.

Precisione statica

Sia $e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$ il valore a regime dell'errore in risposta a riferimenti $w(t)$ o disturbi in uscita $d(t)$ "canonici"; la specifica da seguire è

$$|e_\infty| \leq e^* \quad \text{oppure} \quad e_\infty = 0$$

Precisione dinamica

Tipicamente specifiche in termini di sovraelongazione e tempo di assestamento massimi; le specifiche da seguire sono

$$S\% \leq S^* \quad T_{a,\varepsilon} \leq T^*$$

Attenuazione disturbo in uscita

Il disturbo in uscita $d(t)$, con una banda limitata in un range di pulsazioni $[w_{d,\min}, w_{d,\max}]$, deve essere attenuato di A_d dB ($A_d > 0$).

Attenuazione disturbo di misura

Il disturbo di misura $n(t)$, con una banda limitata in un range di pulsazioni $[w_{n,\min}, w_{n,\max}]$, deve essere attenuato di A_n dB ($A_n > 0$).

Nota: in applicazioni ingegneristiche in genere $w_{d,\max} \ll \omega_{n,\min}$

Moderazione variabile di controllo $u(t)$

Contenimento dell'ampiezza della variabile di controllo u in ingresso al sistema fisico (impianto).

Fisica realizzabilità del regolatore $R(s)$

Il regolatore deve essere un sistema proprio, quindi il grado relativo (differenza tra poli e zeri) deve essere maggiore o uguale a zero.

9.2 Specifiche in termini di guadagno d'anello

Stabilità robusta rispetto a incertezze

Stabilità in presenza di errori di modello o incertezze di parametri; ad esempio massimo ritardo temporale τ_{\max} o massima incertezza sul guadagno statico $\Delta\mu_{\max}$.

Specifiche su $L(j\omega)$

$$M_f \geq M_f^*$$

Precisione statica

Per soddisfare tali specifiche va considerata l'analisi statica effettuata sulla funzione di sensitività $S(s)$. Ad esempio: $|e_\infty| \leq e^*$ in risposta a un gradino $w(t) = W1(t)$, $d(t) = D1(t)$ con $|W| \leq W^*$ e $|D| \leq D^*$.

$$\begin{aligned}e_{\infty}&=\frac{W}{1+\mu}+\frac{D}{1+\mu}\\&=\frac{D+W}{1+\mu}\\&\approx \frac{D+W}{\mu}\end{aligned}$$

$$\mu=L(0)\geq \frac{D^*+W^*}{e^*}$$