Tarea 6

Física Computacional 1

Tema: Vectores y Matrices en LaTeX

Joseph Edrei Moreno Cruz

October 4, 2017

1 Matrices

Una matriz de orden (m×n) es un conjunto de $m \times n$ números ordenados en una tabla:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

La matriz es de orden (m × n), pues tiene m filas y n columnas. Si $m = n$, entonces nuestra matriz es <u>cuadrada</u>.

Las matrices suelen expresarse en forma abreviada:

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\leq \mathrm{i} \leq \mathrm{n} \\ 1\leq \mathrm{j} \leq \mathrm{m}}},$$

es decir, en la expresión anterior, de a_{ij} vemos que el subíndice i corresponde a la

la i-ésima, cuyo recorrido va desde 1 hasta m; y el segundo subíndice, j, corresponde a la columna j-ésima, que va desde 1 hasta n.

1.1 Operaciones con Matrices

Estas son las operaciones que podemos realizar con las matrices.

Adición

Sean A y B son dos matrices del mismo orden, entonces la matriz suma $S = A + B$ es:

$$\left.\begin{matrix} A = (a_{ij}) \\ B = (b_{ij}) \end{matrix}\right\} (s_{ij}) = (a_{ij}) + (a_{ij})$$

Producto por un escalar

Sea A una matriz y k un escalar, entonces la matriz $B = kA$ es:

$$\left.\begin{matrix} A = (a_{ij}) \\ k \in R \end{matrix}\right\} (b_{ij}) = (k \cdot a_{ij})$$

Producto de matrices

Sea A una matriz de orden (m× n), y B una matriz de orden (n×r), entonces la matriz producto, es una matriz $P = A \cdot B$ de orden (m×r):

$$\left.\begin{matrix} A = (a_{ij}) \\ B = (b_{ij}) \end{matrix}\right\} p_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

1.2 Definición de determinante de una matriz cuadrada

Supongamos una matriz cuadrada A de orden n:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Llamamos determinante de A, $detA$, al número obtenido al sumar todos los diferentes productos de n elementos que se pueden formar con los elementos de dicha matriz, de modo que en cada producto figure un elemento de cada distinta fila y uno de cada distinta columna, a cada producto se le asigna el signo $(+)$ si la permutación de los subíndices de filas es del mismo orden que la permutación de los subíndices de columnas, y signo $(+)$ si son de distinto orden.

Determinante de una matriz de 2×2

Para una matriz de orden 2, su determinante se calcula:

$$detA = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} + (a_{12}a_{21})$$

Cada producto tiene que estar formado por un elemento de la *primera fila* y un elemento de la *segunda fila*, pero al mismo tiempo tienen que ser un elemento de la *primera columna* y un elemento de la *segunda*. En este caso solo hay dos emparejamientos posibles, los que están arriba indicados. En cuanto al signo de cada producto, como el primer producto representa una permutación par su signo es positivo, en cambio en el segundo es impar y es negativo.

Determinante de una matriz de 3×3

Sea A una matriz de orden 3

$$detA = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

para expresar $|A|$ hay que considerar todas las permutaciones de (123), son seis:

$$\begin{aligned} a_{11}a_{22}a_{33} &\rightarrow + \text{ (par)} \\ a_{11}a_{23}a_{32} &\rightarrow - \text{ (impar)} \\ a_{12}a_{21}a_{33} &\rightarrow - \text{ (impar)} \\ a_{12}a_{23}a_{31} &\rightarrow + \text{ (par)} \\ a_{13}a_{21}a_{32} &\rightarrow + \text{ (par)} \\ a_{13}a_{22}a_{31} &\rightarrow - \text{ (impar)} \end{aligned}$$

por lo tanto, el determinante será:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

1.3 Matriz inversa de una matriz cuadrada

Definición de determinante de matriz inversa de una matriz cuadrada

Supongamos una matriz cuadrada A de orden n:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Decimos que la matriz A es *invertible* si existe una matriz cuadrada de orden n tal que $AA^{-1} = I$ y $A^{-1}A = I$ donde I es la matriz identidad de orden n esto es, sus componentes $a_{ij} = 0$ siempre que $i \neq j$ y $a_{ij} = 1$ siempre que $i = j$. Un críterio útil para saber que una matriz es invertible nos lo da el siguiente teorema:

Teorema 1 *Sea $A \in M_{n\times n}(K)$, A es invertible si y solo si $detA \neq 0$*

Matriz inversa de una matriz de 3×3

Sea A una matriz de 3×3 y I la matriz identidad de orden 3.

Ahora hacemos el arreglo siguiente que llamaremos *Matriz aumentada* y la simbolizaremos con $A|I$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Llamaremos ahora a las *operaciones fundamentales* como aquellas operaciones podemos realizar sobre una matriz, o matriz aumentada obteniendo matrices semejantes, dichas operaciones son las siguientes:

1. Intercambiar filas
2. Multiplicar filas por escalares
3. Intercambiar una de las filas por la suma de dicha fila mas alguna otra fila de la matriz.

Realizamos operaciones fundamentales a la matriz $A|I$ hasta obtener

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 1 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{32} \\ 0 & 0 & 1 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{array}\right]$$

La matriz de la derecha será la matriz inversa de la matriz A, i.e., A^{-1}

2 Vectores

Un espacio vectorial V sobre un campo K consiste en un conjunto en el que están definidas dos operaciones, tal que para cualquier par de elementos x y y exista un elemento único $x+y$ en V, y para cada elemento a en K y cada elemento x en V exista un elemento único ax en V, de manera que se cumplan las siguientes condiciones:

1. Para toda $x, y \in V$, $x+y=y+x$
2. Para toda $x, y, z \in V$, $(x+y)+z=x+(y+z)$
3. Existe un elemento en V llamado 0 tal que $x+0=x$ para toda $x \in V$
4. Para cada elemento $x \in V$, existe un elemento $y \in V$ tal que $x+y=0$
5. Para cada $x \in V$, $1x=x$
6. Para cada $a, b \in K$ y para cada $x \in V$: $(ab)x=a(bx)$
7. Para cada $a \in K$ y para cada $x, y \in V$: $a(x+y)=ax+ay$
8. Para cada $a, b \in K$ y para cada $x \in V$: $(a+b)x=ax+bx$

A los elementos de V se les llama **vectores**. Esta definición de vector no es breve pero es precisa ...

2.1 Operaciones con vectores

Cómo sabemos por la definición de espacio vectorial los elementos de V pueden sumarse entre ellos y multiplicarse a la izquierda por escalares, pero también podemos definir más operaciones entre vectores, en ciertos espacios vectoriales.

Suma y diferencia de vectores

Hemos definido a las suma de vectores como una operación cerrada en V con alguna función que nos manda parejas de elementos en V a un elemento en V. Sea $V=\mathbb{R}^3$, ahora definimos la suma de la siguiente manera:
Sea $(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$, definimos la suma usual en $\mathbb{R}^3$como

$$(a_1, a_2, a_3)+(b_1, b_2, b_3)=(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$$

Y a la diferencia como sigue:
Sea $(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$, definimos la suma usual en $\mathbb{R}^3$como

$$(a_1, a_2, a_3)-(b_1, b_2, b_3)=(a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3)$$

Producto escalar

Podemos definir una nueva operación de vectores en $\mathbb{R}^3$ de la siguiente manera:
Sea $(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$, definimos al producto escalar en $\mathbb{R}^3$como

$$(a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = (a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3)$$

Producto vectorial

Definiremos una nueva operación de vectores en $\mathbb{R}^3$ de la siguiente manera:
Sea $(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$, definimos al producto vectorial en $\mathbb{R}^3$como

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Producto vectorial utilizando el tensor de Levi-Civita
El símbolo Levi-Civita ϵ_{ijk} es un tensor de rango tres y está definido por:

$$\left.\begin{array}{r} 0 \text{ si cualquier dos subinidices son el mismo} \\ 1 \text{ si } i, j, k \text{ son una permutación par de 1,2 o 3} \\ -1 \text{ si } i, j, k \text{ son una permutación impar de 1,2 o 3} \end{array}\right\} \epsilon_{ijk}$$

Así tenemos que:

$$det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = \epsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k}$$

Por lo que podemos representar a $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ como:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \epsilon_{ijk} \hat{\mathbf{i}} a_j b_k$$

3 Conclusión

Gran parte del trabajo es buscar los comandos necesarios en la Red, sin embargo un detalle que debes revisar todo el tiempo es que los espacios en el texto sean siempre los correctos, adémas no hay que olvidar cerrar todos los brackets, ocurrieron errores inexplicables a la hora de compilar este documento en múltiples ocasiones, aún no entiendo el por que, pero la única manera que logre solucionarlos fue copiando la parte que no compilaba en el bloc de notas y volverlo a pegar, eso resolvía el problema la mayoria de las ocasiones.

Referencias

References

[1] Richard L. Burden, J. Douglas Faires, *Análisis Numérico*, *Grupo Editorial Iberoamérica*(1985).

[2] Stephen H. Friedberg, Arnold J. Insel, Lawrence E. Spence, *Álgebra lineal*, *Publicaciones Cultura, S.A*(1982).

[3] Patrick Guio, *Levi-Civita symbol and cross product vector/tensor*, `http://www.ucl.ac.uk/~ucappgu/seminars/levi-civita.pdf`