UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS
MECÁNICA CLÁSICA II CICLO 2018-2

MATERIAL DE ESTUDIO N°2

Integrales de movimiento

Problema 1. Halle los puntos de parada del sistema mecánico, si su función de Lagrange $\mathcal{L}$ y las condiciones iniciales para $t = 0$ están dadas:

a) $\mathcal{L} = \dot{q}^2 - 3\tan^2 q, \quad q(0) = 0, \quad \dot{q}(0) = 1;$

b) $\mathcal{L} = \dfrac{\dot{q}^2 - q^2 - 2}{q + 1}, \quad q(0) = 1, \quad \dot{q}(0) = 1;$

c) $\mathcal{L} = \dot{q}^2 - (e^q - 2)^2, \quad q(0) = 0, \quad \dot{q}(0) = 1;$

d) $\mathcal{L} = -\sqrt{1 - \dot{q}^2} - q, \quad q(0) = 0, \quad \dot{q}(0) = \dfrac{1}{3}$

Problema 2. Una partícula de masa m con energía $\mathcal{E}$se desplaza en unapozo de pontencial unidimensional $U(x)$. Halle el período del movimiento si:

a) $U(x) = U_0\dfrac{x^2}{a^2}$ para $x \leq 0$ y $U(x) = U_0\dfrac{x^2}{b^2}$ para $x \geq 0$;

b) $U(x) = U_0 e^{-\frac{x}{a}}$ para $x \leq 0$ y $U(x) = U_0 e^{\frac{x}{b}}$ para $x \geq 0$;

c) $U(x) = U_1\dfrac{x^2}{a^2}$ para $x \leq 0$ y $U(x) = U_2\tan^2\dfrac{x}{b}$ para $x \geq 0$;

Problema 3. Determinar las condiciones para las cuales el movimiento es finito y hallar el periodo T de este movimiento en dependencia de la energía $\mathcal{E}$, si la función de Lagrange en notación adimensional tiene la forma:

a) $\mathcal{L} = \dot{q}^2 - \tanh^2 q;$

b) $\mathcal{L} = \dot{q}^2 - \tan^2 q;$

c) $\mathcal{L} = \dot{q}^2 + \dfrac{1}{\cosh^q};$

d) $\mathcal{L} = \dot{q}^2 - e^{2q} + 2e^q;$

e) $\mathcal{L} = \dot{q}^2 - \dfrac{2a}{q} - \dfrac{1}{q^2}, \quad a > 0;$

f) $\mathcal{L} = \dfrac{\dot{q}^2}{q} - q - \dfrac{a^2}{4q}$.

Problema 4. Demostrar que en el campo de Coulomb $U = \dfrac{\alpha}{r}$ el vector $\vec{I} = \vec{v} \times \vec{M} + \alpha\dfrac{\vec{r}}{r}$ mantiene unvalor contante, donde $\vec{r}$ es el radio vector, $\vec{v}$ la velocidad y $\vec{M}$ el momento del punto material.

Problema 5. Una partícula de masa m se mueve en un campo potencial esférico-simétrico $U = \dfrac{1}{2}ar^2$. Demostrar que el tensor $T_{\alpha\beta} = m\dot{x}_\alpha\dot{x}_\beta + ax_\alpha x_\beta$, es integral de movimiento, donde la magnitud x_α para $\alpha = 1, 2, 3$ representa las componentes x, y y z del radio vector $\vec{r}$ de la partícula.

Problema 6. Demostrar que al moverse una partícula cargada en un campo eléctrico constante homogéneo con intensidad $\vec{E}$ las magnitudes $I_1 = \vec{E}\vec{M}$ y $I_2 = \vec{E}(\vec{v} \times \vec{M}) + \dfrac{e}{2}(\vec{r} \times \vec{E})^2$, son integrales de movimiento

Problema 7. Una partícula con masa m y carga e se mueve en un campo magnético constante y homogéneo con intensidad $\vec{H}$. Demostrar que las magnitudes $I_1 = (m\vec{v} + \dfrac{e}{c}\vec{H} \times \vec{r})^2$ y$I_2 = m(\vec{r} \times \vec{v})\vec{H} + \dfrac{e}{2c}(\vec{r} \times \vec{H})^2$ son integrales de movimiento.

Problema 8. Determinar todas las integrales de movimiento independientes que no contienen explícitamente al tiempo para los siguientes sistemas mecánicos:

a) un punto material de masa m;

b) una partícula de masa m en el campo de Coulomb $U = \dfrac{\alpha}{r}$;

c) una partícula con carga e en un campo eléctrico constante con intensidad $\vec{E}$.