UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS
MECÁNICA CLÁSICA II

CICLO 2018-2

MATERIAL DE ESTUDIO Nº1

Escribir la función de Lagrange.

Problema 1. Escriba la función de Lagrange de un punto material de masa m que se desplaza:

a) en el campo potencial: $U = \dfrac{a}{r} + \dfrac{\vec{b}\vec{r}}{r^3}$, donde a y $\vec{b}$ son magnitudes constantes, y r es la distancia al origen de coordenadas (utilizar coordenadas esféricas);

b) en un campo potencial con simetría axial $U = U(r)$, donde r es la distancia al eje de simetría (utilizar coordenadas cilíndricas);

c) por la curva que se describe por las ecuaciones:

$$x = x(s); \quad y = y(s); \quad z = z(s),$$

donde el parámetro s toma valores aleatorios, y el eje z del sistema de coordenadas cartesianas es anti paralelo a la fuerza de atracción de la Tierra;

d) por la espiral $r = F(\psi)$, en el campo potencial $U = U(r, \psi)$, donde r y ψ son coordenadas polares elegidas en el plano XY;

e) por la superficie de rotación $z = F(x^2 + y^2)$, si el eje Z de las coordenadas cartesianas es antiparalelo al campo gravitacional de la Tierra.

Problema 2. Un péndulo esférico es un punto material de masa m que se mueve por una esfera de radio R en el campo gravitacional de la Tierra. Halle su función de Lagrange.

Problema 3. Dada la función de Lagrange $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, t)$ en representación adimensional, pasar a una nueva función de Lagrange $\mathcal{L}' = \mathcal{L}'(q, t)$, excluyendo de $\mathcal{L}(q, t)$ la derivad total con respecto al tiempo de una función de las coordenadas generalizadas q y del tiempo t en los siguientes casos:

a) $\mathcal{L} = \dot{q}^2 + 2\dot{q}t \tanh t + \dfrac{q}{\cosh^2 t}$;

b) $\mathcal{L} = \dot{q}^2 + tq^2\dot{q} + q^3$;

c) $\mathcal{L} = \dot{q}^2 + (t \sin 2q + q^2)\dot{q} - \cos q$;

d) $\mathcal{L} = \dot{q}^2 + f_1(q)\dot{q} + f_2(t)$, donde $f_1(q)$ y $f_2(t)$ son funciones arbitrarias de su argumento.

Problema 4. Escriba la función de Lagrange de un péndulo plano cuya masa m es constante y la longitud l varía según una ley dada $l(t)$.

Problema 5. Un electrón de masa m y carga e se mueve alrededor del núcleo con carga Q. Determine la función de Lagrange del electrón en coordenadas esféricas, asumiendo que el sistema se encuentra en un campo eléctrico externo con intensidad $\vec{E}$.

Ecuaciones de movimiento

Problema 6. Expresar la aceleración en función de las coordenadas generalizadas y las velocidades cuando la función de Lagrange en notación adimensional tiene la forma:

a) $\mathcal{L} = \dot{q}^2 \cosh t + q^4$;

b) $\mathcal{L} = (\dot{q}^2 + q + t)q^2$;

c) $\mathcal{L} = \dot{q}^2 + t^2 q^2 \dot{q}$;

d) $\mathcal{L} = \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2 + q_1 q_2$.

Problema 7. El movimiento de partículas de masa m en coordenadas cartesianas se describe por la función de Lagrange

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + F_0 t\dot{x} - \frac{1}{2}\alpha x^2,$$

Donde F_0 y αson constantes . Determinar la fuerza $\vec{F}$ aplicada a la partícula.

Problema 8. El punto material de masa m se mueve en el campo de la Tierra por la superficie de un cono con ángulo 2θ. El cono se encuentra vertical con el vértice hacia abajo, hacia la dirección de la fuerza de gravedad. Escriba las ecuaciones de Lagrange que describe las ecuaciones de movimiento en coordenadas esféricas.

Problema 9. Un punto material de masa m se desplaza por un paraboloide de rotación $az = x^2 + y^2$. El eje Z de las coordenadas cartesianas es antiparalelo a la atracción de la Tierra. Halle las ecuaciones de Lagrange en coordenadas cilíndricas.

Problema 10. Un protón de masa m con carga e se mueve en el campo potencial $U = 2eq \ln \frac{R}{r}$ de un hilo uniformemente cargado, paralelo a la fuerza de atracción de la Tierra. q es la densidad lineal de carga del hilo, r distancia del hilo al protón yR alguna constante con dimensión de longitud . Determine las ecuaciones de Lagrange en coordenadas cilíndricas.