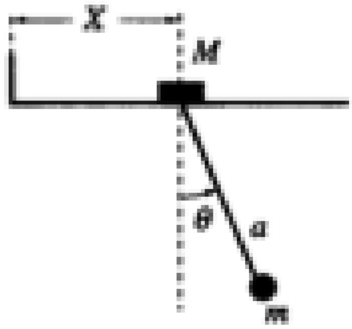
Mecánica Teórica
Boletín de problemas

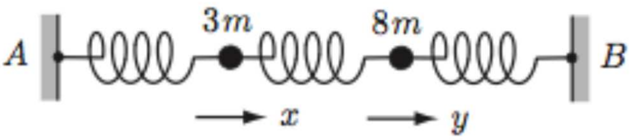
1.- Una partícula de masa m se mueve con un movimiento en una dimensión sometida a las siguientes funciones de energía potencial:
a) $V(x) = \frac{k}{2}x^2 + \frac{k^2}{x}$, b) $V(x) = kxe^{-bx}$, c) $V(x) = k(x^4 - b^2x^2)$,
donde todas las constantes son reales y positivas. Encontrar las posiciones de equilibrio para cada caso y determinar su estabilidad. d) Encontrar la frecuencia angular ω para oscilación pequeña alrededor de las posiciones respectivas de equilibrio estable para las partes a), b) y c), y encontrar el periodo en segundos para cada caso si $m = 1\,g$, y si k y b tienen valor unidad en el sistema cgs.

2.- La función energía potencial de una partícula de masa m en un movimiento en una dimensión está dada por, $V(x) = -\frac{k}{2}x^2$, tal que la fuerza es anti restauradora, $F(x) = kx$, con $x = 0$ la posición de equilibrio inestable donde k es una constante positiva. Si las condiciones iniciales son $t = 0$, $x = x_0$, y $\dot{x} = 0$, mostrar que el movimiento tiene la solución, $x(t) = x_0(e^{\alpha t} + e^{-\alpha t})/2$ con $\alpha = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

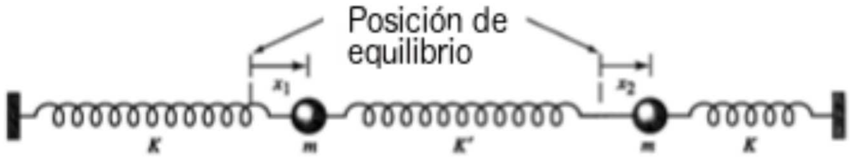
3.- Encontrar las frecuencias normales y los modos normales de oscilación de un péndulo simple de masa m y longitud l unido a un bloque de masa M que desliza sin fricción sobre una superficie horizontal.



4.- Una partícula P de masa $3m$ está conectada a una partícula Q de masa $8m$ por muelles elásticos ligeros de longitud natural a e intensidad α. Dos muelles similares se usan para conectar P y Q a los puntos fijos A y B respectivamente, que están a una distancia $3a$ distantes entre si en una mesa horizontal. Las partículas pueden realizar oscilaciones longitudinales a lo largo de la línea recta AB Encontrar las frecuencias normales y la forma de los modos normales. El sistema está en equilibrio cuando la partícula P recibe un empuje que le da una velocidad C en la dirección $\vec{AB}$. Encontrar el desplazamiento de cada partícula en el instante t en el movimiento siguiente.

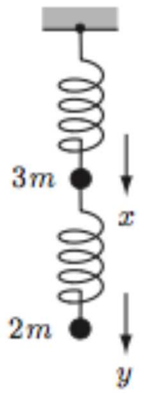


5.- Para el sistema de la figura de partículas unidas por muelles elásticos suponemos que los osciladores son idénticos y se mueven en línea recta. El acoplo está representado por el muelle de constante K'. El sistema tiene dos grados de libertad. a) Obtener las ecuaciones de movimiento en coordenadas normales.



b) Un oscilador comienza con amplitud inicial A_0, mientras que el otro está en reposo en su posición de equilibrio, con las condiciones iniciales: $t = 0$, $x_1(0) = A_0$, $x_2(0) = 0$, $\dot{x_1}(0) = \dot{x_2}(0) = 0$. Mostrar que la amplitud de la componente simétrica es igual a la amplitud de la componente antisimétrica en este caso y que la solución completa puede expresarse como:
$x_1(t) = \frac{1}{2}A_0(cos\omega_a t + cos\omega_b t) = A_0 cos\overline{\omega}t cos\Delta t,$
$x_2(t) = \frac{1}{2}A_0(cos\omega_a t - cos\omega_b t) = A_0 sen\overline{\omega}t sen\Delta t,$
donde $\overline{\omega} = \frac{\omega_a+\omega_b}{2}$ y $\Delta = \frac{\omega_a-\omega_b}{2}$

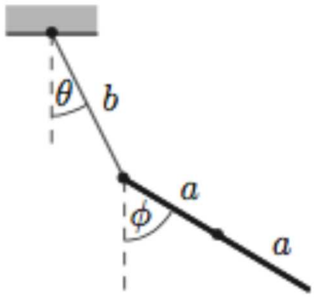
6.- Una partícula A de masa $3m$ está suspendida de un punto fijo O por un muelle de intensidad α y una segunda partícula B de masa $2m$ está suspendida de A por un segundo muelle idéntico. El sistema realiza pequeñas oscilaciones en la línea recta vertical que pasa por O. Encontrar las frecuencias normales, las formas de los modos normales.



7.- Una varilla uniforme de longitud $2a$ está suspendida de un punto fijo O por una cuerda inextensible de longitud b sujeta a uno de sus extremos. El sistema se mueve en un plano vertical que contiene a O. Tomar las coordenadas angulares θ y Φ entre la cuerda y la varilla respectivamente y la vertical hacia abajo. Mostrar que las ecuaciones (Lagrange) que gobiernan las pequeñas oscilaciones del sistema alrededor de $\theta = \Phi = 0$ son

$$b\ddot{\theta} + a\ddot{\Phi} = -g\theta,$$
$$b\ddot{\theta} + \frac{4}{3}a\ddot{\Phi} = -g\Phi$$

Para el caso especial en que $b = 4a/5$, encontrar las frecuencias normales y las formas de los modos normales.



8.- Consideremos el sistema de la figura. Una varilla se mueve horizontalmente a una pared con dos cuentas insertadas en ella. Suponer que no hay fricción entre las cuentas y la varilla. La cuenta mas grande, que tiene $m_1 = 2m$, es la próxima a la pared y está conectada a la pared por un muelle horizontal, sin masa, de constante de fuerza γk y longitud en reposo a.

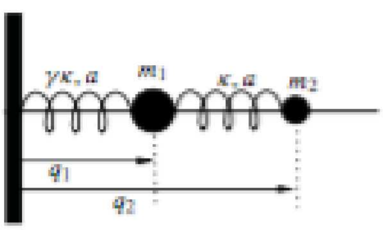
Aquí γ es una constante sin dimensiones que caracteriza la intensidad relativa de los dos resortes (puede hacerse la unidad cuando convenga). Otro resorte, sin masa, horizontal, de constante de fuerza k y longitud en reposo a conecta m_1 a la cuenta mas pequeña $m_2 = m$.

a) Determinar los puntos de equilibrio del sistema,

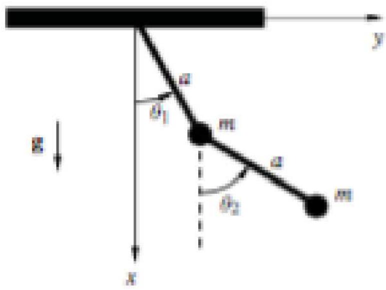
b) Obtener las matrices de energía cinética y de energía potencial.

c) Obtener los autovalores y autovectores de este sistema para pequeñas oscilaciones

d) Obtener los valores de las condiciones iniciales sin ambas masas parten del reposo

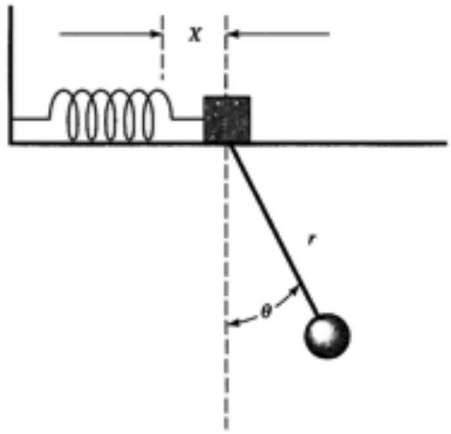


(a) Problema 8



(b) Problema 10

9.- En el sistema de la figura: a) Encontrar los modos normales de oscilación. b) Si la masa del soporte es M y la masa del péndulo es m, suponiendo que $\alpha = \frac{m}{m+M} \ll 1$. Encontrar ahora los modos normales de oscilación y las frecuencias de los modos normales.



10.- Considerar el péndulo doble de la figura. Suponer que las cuerdas tienen ambas la misma longitud a y que las masas tienen el mismo valor m. a) Escribir la Lagrangiana reducida con las variables libres $q_1 = \theta_1$ y $q_2 = \theta_2$. b) Encontrar los valores $\mathbf{q^0}$ que dan el punto de equilibrio estable. c) Encontrar las matrices $\mathbf{T}$ y $\mathbf{V}$ usadas para escribir la Lagrangiana de las oscilaciones pequeñas en función de desplazamientos pequeños. d) Encontrar las frecuencias normales y los modos normales correspondientes, indicando su forma. e) Encontrar las coordenadas normales.

11.- Una molécula triatómica lineal tiene átomos A_1, A_2, A_3 con masas m_1, m_2 y m_3. Los enlaces químicos entre A_1 y A_2 se representa por un muelle de intensidad α_{12} y el enlace entre A_2 y A_3 se representa por un muelle de intensidad α_{23} Mostrar que las frecuencias de vibración de la molécula satisface la ecuación

$$m_1 m_2 m_3 \omega^4 \left[\alpha_{12} m_3 (m_1 + m_2) + \alpha_{23} m_1 (m_2 + m_3)\right] \omega^2 + \alpha_{12}\alpha_{23}(m_1 + m_2 + m_3) = 0.$$

Encontrar las frecuencias de vibración para el caso especial en que $m_1 = 3m$, $m_2 = m$, $m_3 = 2m$ y $\alpha_{12} = 3\alpha$, $\alpha_{23} = 2\alpha$.