Problemas para Examen

Sistemas de Coordenadas

Problema 1. Obtenga las expresiones para los vectores de la base local de las coordenadas polares y cilíndricas en función de la base de las coordenadas cartesianas

Problema 2. Obtenga la expresión para la base local de las coordenadas esféricas, en función de la base de las coordenadas cartesianas.

Problema 3. Obtenga por medio de la derivación directa la expresión para el vector velocidad en coordenadas polares y cilíndricas.

Problema 4. Obtenga por medio de la derivación directa la expresión para el vector velocidad en coordenadas polares y esféricas.

Problema 5. Obtenga la expresión que determina la base local y el vector velocidad $\mathbf{v}$ de un punto en coordenadas parabólicas (ξ, η, φ).

$$\rho = \sqrt{\xi\eta}, \quad z = \frac{1}{2}(\xi - \eta), \quad \varphi = \varphi.$$

Problema 6. Obtenga la expresión que determina la base local y el vector velocidad $\mathbf{v}$ de un punto en coordenadas elípticas (u, v).

$$x = a \cosh u \cos v, \quad y = a \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v, \quad (a = \text{ const}).$$

Formalismo de Lagrange

Problema 7. Escriba el lagrangiano y las ecuaciones de Lagrange para un punto material que se desplaza en un campo potencial $U(\mathbf{r}, t)$, utilizando como coordenadas generalizadas las coordenadas parabólicas (ξ, η, φ).

$$\rho = \sqrt{\xi\eta}, \quad z = \frac{1}{2}(\xi - \eta), \quad \varphi = \varphi.$$

Problema 8. Escriba el lagrangiano y las ecuaciones de Lagrange para un punto material que se desplaza en un campo potencial $U(\mathbf{r}, t)$, utilizando como coordenadas generalizadas las coordenadas elípticas (u, v).

$$x = a \cosh u \cos v, \quad y = a \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v, \quad (a = \text{ const}).$$

Problema 9. Obtenga la expresión para las componentes de la fuerza generalizada Q_i de un punto material en coordenadas parabólicas (ξ, η, φ).

$$\rho = \sqrt{\xi\eta}, \quad z = \frac{1}{2}(\xi - \eta), \quad \varphi = \varphi.$$

Problema 10. Obtenga la expresión para las componentes de la fuerza generalizada Q_i de un punto material en coordenadas elípticas (u, v).

$$x = a \cosh u \cos v, \quad y = a \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v, \quad (a = \text{ const}).$$

Problema 11. Un sistema se describe por el lagrangiano

$$\mathcal{L} = e^{\beta t/m} \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x) \right).$$

Demostrar que su ecuación de movimiento coincide con la ecuación del movimiento unidimensional de una partícula de masa m en el campo potencial $U(x)$ bajo la acción de la fuerza de resistencia $\mathbf{F}_{res} = -\beta \mathbf{v}$.

Problema 12. Demostrar que la ecuación de movimiento de un oscilador unidimensional con lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}$$

bajo la acción de fuerza de resistencia viscosa $\mathbf{F}_{res} = -\beta \mathbf{v}$, coincide con la ecuación de movimiento del sistema sin disipación, cuyo lagrangiano es:

$$\mathcal{L} = e^{\beta t/m} \left[\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{\beta x \dot{x}}{2} - \frac{1}{2} \left(k - \frac{\beta^2}{2m} \right) x^2 \right].$$

Problema 13. Demostrar que el sistema con lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{\dot{x} + \gamma x}{\omega x} \arctan \left(\frac{\dot{x} + \gamma x}{\omega x} \right) - \frac{1}{2} \ln \left((\dot{x} + \gamma x)^2 + \omega^2 x^2 \right),$$

donde *gamma* y ω son coeficientes dimensionales, es equivalente al oscilador lineal armónico con resistencia viscosa, cuya ecuación de movimiento es:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + (\gamma^2 + \omega^2)x = 0.$$

Integrales de movimiento

Problema 14. Una partícula de masa m se mueve en el campo de la Tierra por la curva $y = a/x + bx$ $(a > 0, b > 0)$, ubicada en el plano vertical $(\} = -g\hat{e}_y)$. Escriba el lagrangiano y la ecuación de movimiento. Halle la ley de movimiento en cuadraturas.

Problema 15. Construya la expresión para la energía generalizada y la ecuación de movimiento para un sistema unidimensional descrito por el lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{m\dot{x}^2}{2} + ae^{-\gamma t} (\dot{x} - \gamma x) - \frac{kx^2}{2}, \quad (a, \gamma = \text{const}).$$

Halle de ser posible las integrales de movimiento.

Problema 16. Construya la expresión para la energía generalizada y la ecuación de movimiento para un sistema unidimensional descrito por el lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{m\dot{x}^2}{2} + a\left(\dot{x}\,\mathrm{sen}\,\Omega t + x\Omega\cos\Omega t\right) - \frac{kx^2}{2}, \quad (\Omega = \mathrm{const}).$$

Halle de ser posible las integrales de movimiento.

Problema 17. Halle la ley de movimiento en cuadraturas para el sistema con lagrangiano ($b = \mathrm{const}$)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + b\dot{x}\,\mathrm{sen}\,x - \frac{1}{2}\omega_0^2 x.$$

Problema 18. Una cuenta de masa m desliza sin fricción bajo la acción de la gravedad por un alambre circular de radio R. El alambre gira con velocidad constante Ω alrededor de su diámetro vertical. a) Escriba el lagrangiano y las ecuaciones de movimiento. b) Halle los puntos de equilibrio y su estabilidad. c) Halle la frecuencia de las pequeñas vibraciones alrededor de los puntos de equilibrio estables.

Problema 19. Sea un lagrangiano dado por

$$L = e^{-x^2-\dot{x}^2} + 2\dot{x}e^{-x}\int_0^{\dot{x}} e^{-y^2}\,dy.$$

Encuentre las ecuaciones de movimiento. ¿A qué sistema físico es equivalente el lagrangiano anterior?

Problema 20. Una partícula de masa m se mueve por la acción de la gravedad en la superficie de un paraboloide cuya ecuación viene dada por

$$x^2 + y^2 = ax.$$

Usando los multiplicadores de Lagrange, encuentre el lagrangiano y las ecuaciones de movimiento. Demuestre que una posible trayectoria de la partícula es un círculo en el plano $z = h$. $>$Halle las condiciones para que esta trayectoria tenga lugar.

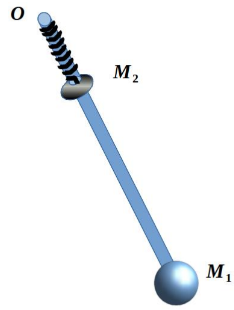
Problema 21. Una varilla rígida de masa despreciable y longitud L está sujeta por uno de sus extremos, punto O, alrededor del cual puede oscilar libremente en un plano vertical. Una masa M_1 está fija del otro extremo. Una cuenta de masa M_2 puede deslizarse sin rozamiento a lo largo de la varilla bajo la acción de la gravedad y de la acción de un muelle de constante k y longitud natural lk_0 que está sujeto en O.

a) Escriba y describa las ligaduras. ¿cuántos grados de libertad hay? Encuentre coordenadas generalizadas convenientes.

b) ¿cuáles son las fuerzas activas? Encuentre sus componentes generalizadas.

c) Halle las ecuaciones de movimiento.

d) Encuentre las de reacción de ligaduras.



Problema 22. Una superficie de revolución hiperbólica descrita por la ecuación $z = a^2/r$, donde OZ apunta verticalmente hacia abajo y donde r, ϕ, z son coordenadas cilíndricas. La superficie es perfectamente lisa. Una partícula puntual de masa m se desliza en el interior de la superficie. a) dibuje todas las fuerzas que actúan sobre la partícula. ¿Cuáles son las fuerzas activas y las der ligadura? Clasifique las ligaduras. b) Demuestre que las ecuaciones de movimiento vienen dadas por

$$r^2\dot{\phi} = h, \qquad \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r\dot{\phi}^2 + \dot{z}\right) - mgz = E,$$

donde E y h son constantes. c) Si inicialmente la velocidad de la partícula solo tiene la componente horizontal $a\omega$ y se encuentra en la superficie a una altura z debajo de O, deduzca la ecuación de movimiento que solo contenga z y $\dot{z}$. Demuestre que el movimiento será circular si $a\omega = g$ y que de no ser así, la partícula sube o baja, dependiendo del signo de $a\omega - g$.

Problema 23. Una partícula de masa m se desliza sin rozamiento a lo largo de una parábola de ecuación $x^2 = 2ay$. si en el instante t el valor de x es $x(t)$ y el valor de la componente x de la fuerza de ligadura es $R(x)$, ¿cuál es el valor de la componente y de la fuerza de ligadura en ese instante?

Problema 24. Dos partículas de masas m y M, respectivamente, están conectados por una barra sin masa de longitud a. La partícula de masa m está obligada a moverse sobre la superficie de una esfera de radio b, mientras que la de masa M se mueve a lo largo del diámetro vertical de la esfera. Encuentre un conjunto apropiado de coordenadas generalizadas y obtenga las ecuaciones de movimiento.,

Oscilaciones pequeñas

Problema 25. Halle las frecuencias propias del sistema con lagrangiano

$$\mathcal{L} = \dot{x}^2 + \frac{5}{2}\dot{y}^2 + 3\dot{x}\dot{y} - \frac{5}{2}x^2 - 4y^2 - 6xy.$$

Problema 26. Halle las frecuencias propias del sistema con lagrangiano

$$\mathcal{L} = \dot{x}^2 + \frac{5}{2}\dot{y}^2 + \dot{x}\dot{y} - 2x^2 - \frac{7}{2}y^2 + xy.$$

Problema 27. Halle la ley de las oscilaciones pequeñas del sistema con lagrangiano

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = &\frac{1}{2}\left(6\dot{q}_1^2 + 11\dot{q}_2 + 22\dot{q}_2 + 12\dot{q}_1\dot{q}_2 + 22\dot{q}_1\dot{q}_3 + 28\dot{q}_2\dot{q}_3\right) - \\ &- \frac{1}{2}\left(9q_1^2 + 38q_2^2 + 49q_3^2 + 30q_1q_2 + 40q_1q_3 + 82q_2q_3\right).\end{aligned}$$

Problema 28. Un sistema oscilatorio se describe por el lagrangiano

$$\mathcal{L} = \left(q_2\dot{q}_1^2 + q_1\dot{q}_2^2\right) - \left(\frac{1}{q_1q_2} + q_1 + q_2\right).$$

Halle la ley de las oscilaciones pequeñas posibles para el sistema.

Problema 29. Un sistema oscilatorio se describe por el lagrangiano

$$\mathcal{L} = \left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2\right) - \ln(q_1q_2) - \frac{1}{q_1q_2} - \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2}.$$

Halle la ley de las oscilaciones pequeñas posibles para el sistema.

Problema 30. Halle la ley de las oscilaciones pequeñas que se describe por el lagrangiano

$$\mathcal{L} = \dot{q}_1^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2 + \frac{5}{2}\dot{q}_2^2 - 3\left(q_1^2 + 2q_1q_2 + 3q_2^2\right),$$

si las condiciones iniciales son: $q_1(0) = q_2(0) = 0$, $\dot{q}_1(0) = 0$, $\dot{q}_2(0) = 3$.

Problema 31. Halle las coordenadas normales del sistema descrito por el lagrangiano

$$\mathcal{L} = m\left(\frac{1}{2}\dot{x}_1^2 + \dot{x}_1\dot{x}_2 + \dot{x}_2\right) - \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 - kx_1x_2.$$

Problema 32. Halle la ley de las oscilaciones pequeñas y las coordenadas normales del sistema con lagrangiano ($\gamma = \text{const}$)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(m\dot{x}^2 + m\dot{y}^2\right) - \frac{1}{2}\left(\omega_1^2x^2 + \omega_2^2y^2\right) + \gamma xy.$$

Problema 33. Halle la ley de las oscilaciones pequeñas y las coordenadas normales del sistema con lagrangiano ($\beta = \text{const}$)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(m_1\dot{x}^2 + m_2\dot{y}^2\right) - \beta\dot{x}\dot{y} - \frac{k}{2}\left(x^2 + y^2\right).$$

Problema 34. Un sistema se describe por el lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(q_1^2\dot{q}_1^2 + q_2\dot{q}_2^2\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{q_1^2} + \frac{1}{q_2} + 2\quad\square_1q_2\right).$$

Halle la ley de las oscilaciones pequeñas que son posibles en el sistema. Halle las coordenadas normales. Lleve el lagrangiano a su forma normal.

Problema 35. Un sistema oscilatorio se describe por el lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{m\dot{x}_1^2}{2} + m\dot{x}_2^2 - \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2} - \sqrt{\frac{3}{8}}kx_1x_2.$$

Halle la ley de las oscilaciones pequeñas del sistema si: $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = a$, $\dot{x}_1(0) = v_1$, $\dot{x}_2(0) = v_2$. Halle las coordenadas normales.

Problema 36. Un sistema oscilatorio se describe por el lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + m\Omega\left(x\dot{y} - y\dot{x}\right) + mg\sqrt{l^2 - x^2 - y^2}.$$

Considerando que $\Omega^2 << g/l$, halle la ley de las oscilaciones pequeñas del sistema si: $x(0) = 0$, $y(0) = o$, $\dot{x}(0) = V$, $\dot{y}(0) = 0$. Halle las coordenadas normales.

Problema 37. Un sistema oscilatorio se describe por el lagrangiano

$$\mathcal{L} = a\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + \beta\dot{y}\dot{x} + b\sqrt{l^2 - x^2 - y^2}.$$

Formalismo de Hamilton

Problema 38. Construya el hamiltoniano del sistema que se describe por el lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\operatorname{sen}^2\theta\dot{\phi}^2\right) - U(r)$$

Problema 39. Construya el lagrangiano del sistema descrito por el hamiltoniano

$$H = \frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2m\rho^2} + U(r,\phi).$$

Problema 40. Construya el lagrangiano del sistema descrito por el hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\right)^2 + e\varphi(\mathbf{r},t).$$

Problema 41. Construya el hamiltoniano descrito por el lagrangiano

$$\mathcal{L} = -mc^2\sqrt{1 - \frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{c^2}} - U(\mathbf{r},t).$$

Problema 42. Construya el hamiltoniano descrito por el lagrangiano

$$\mathcal{L} = -mc^2\sqrt{1 - \frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{c^2}} + \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r},t) - e\varphi(\mathbf{r},t).$$

Problema 43. Construya el lagrangiano del sistema descrito por el hamiltoniano

$$H = \frac{p\rho^2}{2m} + \frac{1}{2m\rho^2}\left(p_\phi - \frac{eH_0}{2c}\rho^2\right) + \frac{p_z}{2m} + mgz.$$

Problema 44. El lagrangiano de un péndulo matemático tiene la forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{\varphi}^2 - m\omega^2(1 - \cos\varphi).$$

construya el hamiltoniano del péndulo, eligiendo como coordenada generalizada

$$x = \operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}.$$

Corchetes de Poisson

Problema 45. Calcular los corchetes de Poisson: (a) $\{p_k, F(q)\}$; (b) $\{q_k, F(p)\}$.

Problema 46. Un sistema se describe por la variables dinámicas A, B y C, cullos corchetes de Poisson son conocidos:

$$\{A, B\} = C - \frac{AB}{C}, \quad \{A, C\} = -A, \quad \{B, C\} = B.$$

El hamiltoniano del sistema tiene la forma,

$$H = \frac{1}{4}C.$$

Halle las ecuaciones de movimiento para las variables A, B y C y halle la ley de movimiento del sistema $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$.

Problema 47. Para una partícula que se mueve en el campo central $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$ (problema de kepler), con hamiltoniano,

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{\alpha}{r},$$

halle el corchete de Poisson $\{H; \mathbf{A}\}$, donde $\mathbf{A}$ es el vector de Laplace-Runge-Lentz,

$$\mathbf{A} = \frac{1}{m}\mathbf{p} \times \mathbf{L} - \frac{\alpha \mathbf{r}}{r}.$$

$\mathbf{L}$ es el vector momento de la cantidad de movimiento de la partícula.

Problema 48. Demostrar por medio del cálculo directo del corchete de Poisson $\{L_z, H\}$, que la componente L_z del momento de la cantidad de movimiento de una partícula que se desplaza en un campo central es una integral de movimiento. El hamiltoniano de la partícula es

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + U(\sqrt{x^2 + y^2 +^2}).$$

Integrales de movimiento

Problema 49. Halle la ecuación de movimiento en cuadraturas para el sistema que se describe por el lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 \rho^2 \dot{\phi}^2\right) - \frac{a\cos\phi}{\rho^2}, \quad (a = \text{const}).$$

Problema 50. Una partícula se desplaza por la superficie de una esfera de radio R en el campo gravitacional de la Tierra. Construya el hamiltoniano de la partícula. Escriba las ecuaciones de movimiento. Halle la ley de movimiento en cuadraturas.

Problema 51. Un sistema es descrito por el hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2}p_1^2\left(\frac{1}{2}p_2^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2 q_2^2\right) + \frac{1}{2}\omega_0^2 q_1^2.$$

Halle la ley de movimiento.

Problema 52. Un sistema es descrito por el hamiltoniano

$$H = \frac{p_3^2}{2} + \frac{\omega_0^2 q_3^2}{2} + a\frac{p_1^2}{2}\left(\frac{1}{2}p_2^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2 q_2^2\right) + b\left(\frac{1}{2}p_2^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2 q_2^2\right)\left(\frac{1}{2}p_3^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2 q_3^2\right)$$

Halle la ley de movimiento (a, b son constantes).

Problema 53. Un sistema es descrito por el hamiltoniano

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 q^2}{2} + \lambda\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 q^2}{2}\right)^n.$$

Halle la ley de movimiento del sistema ($n > 2$, $\lambda = \text{const.}$).

Problema 54. Un sistema es descrito por el hamiltoniano

$$H = \frac{p_1^2}{p_2 + \operatorname{sen}^2 q_2} + \operatorname{sen}^2 q_1.$$

Halle la ley de movimiento del sistema.

Problema 55. Un sistema es descrito por el hamiltoniano

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 q_1^2}{2}\left(\frac{p_2^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 q_2^2}{2}\right)$$

Halle la ley de movimiento del sistema.

Problema 56. Utilizando el método de las integrales de movimiento, halle de forma explícita la ley de movimiento del sistema que es descrito por el lagrangiano

$$\mathbf{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + x^4\dot{y}^2\right) - \frac{a\cosh y}{x^4}.$$

Problema 57. Una partícula es descrita por el lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\theta^2 + r^2\,\dot{}\operatorname{sen}^2\theta\dot{\varphi}^2\right) - a\dot{\varphi}\cos\theta.$$

Halle la ley de movimiento en cuadraturas.

Problema 58. Un sistema es descrito por el hamiltoniano ($\lambda = \text{const}$),

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 q_1^2}{2} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 q_2^2}{2} + \lambda\left(\frac{p_1^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 q_1^2}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{p_2^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 q_2^2}{2}\right).$$

Halle la ley de movimiento en forma explícita.

Problema 59. Un sistema es descrito por el lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\operatorname{sen}^2\theta\dot{\varphi}^2\right) - \frac{U(\varphi)}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}.$$

Construya el hamiltoniano, indique las integrales de movimiento y halle la ley de movimiento en cuadraturas ($U(\varphi)$ es una función dada).

Transformaciones canónicas

Problema 60. Demostrar que la transformación $(q, p) \to (Q, P)$ es canónica y halle su función generadora:

$$\begin{cases} P = q + e^{-q} + \ln p, \\ Q = pe^{q}. \end{cases}$$

Problema 61. Demostrar que la transformación $(q, p) \to (Q, P)$ es canónica y halle su función generadora:

$$\begin{cases} P = q^{-4}\left(p^4 - \dfrac{1}{2}q^6\right), \\ Q = pq^{-1}. \end{cases}$$

Problema 62. Demostrar que la transformación $(q, p) \to (Q, P)$ es canónica y halle su función generadora:

$$\begin{cases} P = -qp + q^5, \\ Q = \ln(p - q^4). \end{cases}$$

Problema 63. Demostrar que la transformación $(q, p) \to (Q, P)$ es canónica y halle su función generadora:

$$\begin{cases} P = \ln \dfrac{P}{3q^3}, \\ Q = \dfrac{1}{4}qp. \end{cases}$$

Problema 64. Demostrar que la transformación $(q, p) \to (Q, P)$ es canónica y halle su función generadora:

$$\begin{cases} Q = (\gamma p)^{1/\alpha} q^{(1-\alpha)/\alpha} \\ P = (\gamma p)^{(\alpha-1)/\alpha} q^{(2\alpha-1)/\alpha}. \end{cases}$$

(α y γ son constantes).

Problema 65. Demostrar que la transformación $(q, p) \to (Q, P)$ es canónica y halle su función generadora:

$$\begin{cases} Q = -pq, \\ P = \ln\left(\dfrac{1}{\alpha} q^{\gamma} p^{\alpha}\right) \end{cases}$$

(α y γ son constantes).

Problema 66. Demostrar que la transformación $(q, p) \to (Q, P)$ es canónica y halle su función generadora:

$$\begin{cases} Q = -(bq)^{\alpha+1} p^{\alpha+2}, \\ P = (bq)^{-\alpha} p^{-\alpha-1}. \end{cases}$$

(α y b son constantes).

Problema 67. Demostrar que la transformación $(q, p) \to (Q, P)$ es canónica y halle su función generadora:

$$\begin{cases} Q = 2\cosh qt, \\ P = \dfrac{p}{t \operatorname{senh} qt}. \end{cases}$$

Problema 68. Demostrar que la transformación $(q,p) \to (Q,P)$ es canónica y halle su función generadora:

$$\begin{cases} Q = ap + \left(\dfrac{3q}{abt}\right)^{1/(b-1)}, \\ P = -\dfrac{3q}{a} \end{cases}$$

(a y b son constantes).

Problema 69. Demostrar que la transformación $(q,p) \to (Q,P)$ es canónica y halle su función generadora:

$$\begin{cases} Q = \ln q, \\ P = pq. \end{cases}$$

Problema 70. Demostrar que la transformación $(q,p) \to (Q,P)$ es canónica y halle su función generadora:

$$\begin{cases} Q = \ln\left(\dfrac{p}{\alpha q^{\alpha-1}}\right), \\ P = pq \end{cases}$$

Problema 71. Demostrar que la transformación $(q,p) \to (Q,P)$ es canónica y halle su función generadora:

$$\begin{cases} Q = -\gamma q, \\ P = p + \exp(\gamma q - 1). \end{cases}$$

(γ es constante).

Método de Hamilton Jacobi

Problema 72. Usando el método de Hamilton-Jacobi halle la ley de movimiento en cuadraturas para el sistema descrito por el lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2\right) - \frac{a\cos\varphi}{\rho^2}, \quad (a = \text{const}).$$

Problema 73. Usando el método de Hamilton-Jacobi halle la ley de movimiento en cuadraturas para el sistema descrito por el lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\operatorname{sen}^2\theta\dot{\varphi}^2\right) - a\dot{\varphi}\cos\theta.$$

Problema 74. Usando el método de Hamilton-Jacobi halle la ley de movimiento en cuadraturas para el sistema descrito por el lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + x^4\dot{y}^2\right) - \frac{a\cosh y}{x^4}$$

Problema 75. Un sistema es descrito por el hamiltoniano

$$H = \frac{p_3^2}{2} + \frac{\omega_0^2 q_3^2}{2} + a\frac{p_1^2}{2}\left(\frac{p_2^2}{2} + \frac{\omega_0^2 q_2^2}{2}\right) + b\left(\frac{p_2^2}{2} + \frac{\omega_0^2 q_2^2}{2}\right)\left(\frac{p_3^2}{2} + \frac{\omega_0^2 q_3^2}{2}\right)$$

Usando el método de Hamilton-Jacobi halle la ley de movimiento del sistema en forma explícita $(a, b = \text{const})$

Problema 76. Un sistema es descrito por el hamiltoniano

$$H = \frac{p_1^2}{2} + \frac{\omega_0^2 q_1^2}{2} + \frac{p_2^2}{2} + \frac{\omega_0^2 q_2^2}{2} + \lambda \left(\frac{p_1^2}{2} + \frac{\omega_0^2 q_1^2}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{p_2^2}{2} + \frac{\omega_0^2 q_2^2}{2} \right).$$

Usando el método de Hamilton-Jacobi halle la ley de movimiento del sistema en forma explícita ($\lambda = \text{const}$)

Problema 77. Un sistema es descrito por el hamiltoniano

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 q^2}{2} + \lambda \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 q^2}{2} \right)^n$$

Usando el método de Hamilton-Jacobi halle la ley de movimiento del sistema en forma explícita ($\lambda, n = \text{const},\ n > 1$)

Problema 78. Un sistema es descrito por el hamiltoniano

$$H = \frac{p_1^2}{2} \left(\frac{p_2^2}{2} + \frac{\omega_0^2 q_2^2}{2} \right) + \frac{\omega_0^2 q_1^2}{2}$$

Usando el método de Hamilton-Jacobi halle la ley de movimiento del sistema en forma explícita.

Problema 79. Un sistema es descrito por el hamiltoniano

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 q_1^2}{2} \left(\frac{p_2^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 q_2^2}{2} \right)$$

Usando el método de Hamilton-Jacobi halle la ley de movimiento del sistema en forma explícita ($a, b = \text{const}$)