UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS
MECÁNICA CLÁSICA II CICLO 2018-2

Problemas sobre oscilaciones

1. Oscilaciones Unidimensionales

1. Determinar la frecuencia y el período de las oscilaciones pequeñas libre del sistema mecánico de un grado de libertad, despreciando las fuerzas de resistencia y la masa de las cuerdas.

Halle la ley de movimiento del cuerpo (1) $y = y(t)$, tomando como posición inicial la posición de equilibrio del cuerpo (1) (para una deformación estática del resorte). Halle también la amplitud de las oscilaciones del cuerpo (1).

En los problemas se han tomado las siguientes notaciones: 1 – es un cuerpo de masa m_1; 2 – es una polea de masa m_2 y radio r_2 (disco sólido homogéneo); 3 – es una polea de masa m_3 y momento de inercia i_x; 4 – es un disco rígido homogéneo de masa m_4 y radio r_4; 5 – es un disco de masa m_5 y radio de inercia i'_x; 6 – es una barra delgada de masa m_6 y longitud l; 7 – es una barra cuya masa es despreciable; c – es el coeficiente de elasticidad del resorte; $\dot{y}_0$ – es la proyección de la velocidad inicial $\vec{v}_0$ del cuerpo 1 en el eje vertical.

Los sistemas 1 – 7 muestran la posición de equilibrio (para la deformación estática del resorte).

En los problemas 5, 6 y 14 la barra 6 se encuentra firmemente unida con el disco 4.

Ejemplo 1.1. Hallar la frecuencia cíclica y el período de las oscilaciones pequeñas del sistema mostrado en la figura 1 (esquema de la izquierda). Obtener la ley de movimiento $y = y(x)$ del cuerpo 1 y la amplitud de sus oscilaciones.

Datos: $m_1 = 1\ kg$; $m_2 = 2\ kg$; $m_4 = 1\ kg$; $m_6 = 3\ kg$; $c = 20\ N/m$; $y_0 = 0,2\ cm$; $\dot{y}_0 = 8\ cm/s$.

Solución: Tomaremos como coordenada generalizada la desviación vertical de la posición y con respecto a la posición de equilibrio del cuerpo 1, correspondiente a la deformación estática del resorte. La ecuación de Lagrange tendrá la forma:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{\partial U}{\partial y}. \tag{1}$$

La energía cinética T la hallamos con exactitud hasta los términos infinitésimos de segundo orden con respecto a $\dot{y}$ y la energía potencial U con exactitud hasta los términos infinitésimos de segundo orden con respecto a la coordenada generalizada y.

La energía cinética es la suma de las energías cinéticas de los cuerpos 1, 2, 6 y 4. Expresemos la velocidad del centro de masas del cuerpo 4 y las velocidades angulares de los cuerpos 2, 4 y 6 en función de la velocidad generalizada $\dot{y}$:

$$v_1 = \dot{y}, \quad \omega_2 = \dot{y}/r_2, \quad \omega_6 = \omega_2 = \dot{y}/r_2.$$

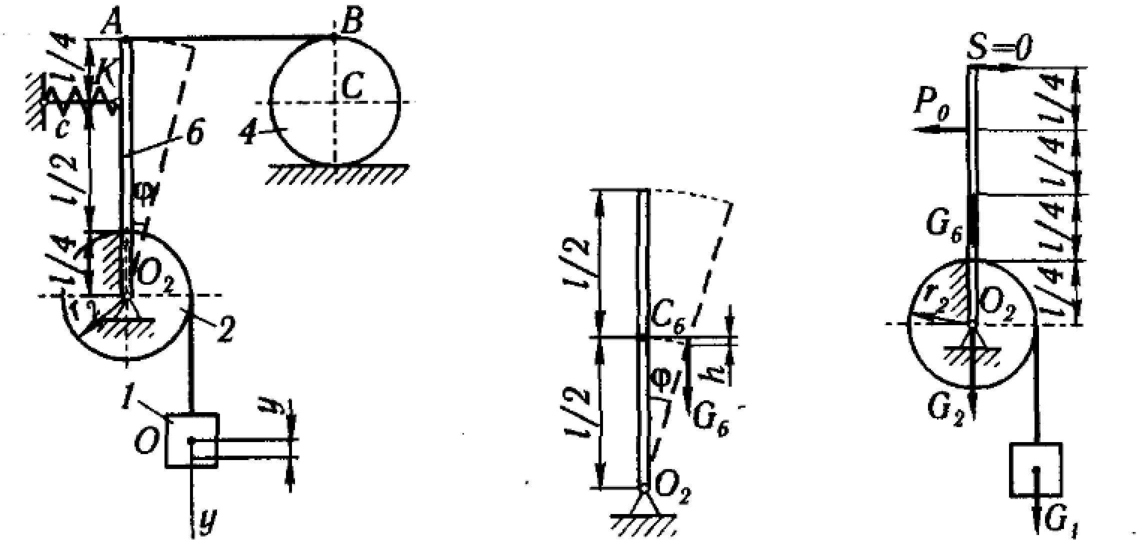

Figura 1: Sistema mecánico del ejemplo

Dado que se están analizando las oscilaciones pequeñas, entonces $v_B = v_A$ y dado que el disco 4 gira sin resbarar $v_C = v_B/2$. En consecuencia:

$$v_C = v_A/2 = \omega_6 l/2 = \omega_2 l/2 = \dot{y}l/(2r_2) = 2\dot{y}; \quad \omega_4 = \models_C /4_4 = 2\dot{y}/r_4.$$

El momento de inercia del cuerpo 4 con respecto al eje central es $displaystyle J_C = m_4 r_4^2/2$. Los momentos de inercia de los cuerpos 2 y 6 con respecto a sus ejes de giro son

$$J_2 = m_2 r_2^2/2, \quad J_6 = m_6 l^2/3.$$

Por lo tanto para la energía cinética tenemos:

$$T = T_1 + T_2 + T_6 + T_4 = \frac{1}{2}m_1\dot{y}^2 + \frac{1}{4}m_2\dot{y}^2 + \frac{8}{3}m_6\dot{y}^2 + 3m_4\dot{y}^2 = \frac{1}{2}\left[m_1 + \frac{1}{2}m_2 + \frac{16}{3}m_6 + 6m_4\right]\dot{y}.$$

La energía potencial se determina por el trabajo de la fuerza de gravedad y de la fuerza elástica del resorte, al desplazarse de la posición de equilibrio y_0 del sistema:

$$U = U_I + U_{II}$$

La energía potencial correspondiente a la fuerza de atracción de la Tierra, para el desplazamiento señalado es

$$U_I = -m_1 g y - m_6 g h,$$

donde h es el desplazamiento vertical de la posición del centro de masas de la barra 6, la cual debemos calcular con exactitud hasta el infinitésimo de segundo orden con respecto a la coordenada y.

De la segunda imagen de la figura 1 tenemos que:

$$h = \frac{l}{2} - \frac{l}{2}\cos\varphi = \frac{1}{2}(1 - \cos\varphi).$$

Teniendo en cuenta que:

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \dots\ , \text{ y } \ \varphi = \frac{y}{r_2} = \frac{4y}{l},$$

obtenemos,

$$H = \frac{l}{2}\frac{\varphi^2}{2} = \frac{l}{4}\left(\frac{4y}{l}\right)^2 = \frac{4y^2}{l}.$$

Por lo tanto:

$$U_I = -m_1 g y - m_6 g \frac{4y^2}{l}.$$

La energía potencial de deformación del resorte será

$$U_{II} = c\frac{(\Delta l_0 + \lambda_K)^2}{2} - c\frac{(\Delta l_0)^2}{2},$$

donde Δl_0 es la deformación estática del resorte y λ_K es el desplazamiento del punto de fijación K del resorte, correspondiente a la coordenada y.

Dado que (ver figura 1) $\dfrac{\lambda_K}{y} = \dfrac{\frac{3}{4l}}{\frac{1}{4l}}$ es decir, $\lambda_K = 3y$, entonces

$$U_{II} = c\frac{(\Delta l_0 + 3y)^2}{2} - c\frac{(\Delta l_0)^2}{2} = 3\Delta l_0 y + \frac{9}{2}y^2.$$

Por lo tanto la energía potencial será:

$$U_I = U_I + U_{II} = -m_1 g y - \frac{4m_6 g}{l}y^2 + 3c\Delta l_0 y + \frac{9}{2}cy^2.$$

Dado que la posiciuón de equilibrio corresponde a la deformación estática del resorte

$$\frac{\partial U}{\partial y}|_{y=0} = 0, \longleftrightarrow -m_1 g + 3c\Delta l_0 = 0.$$

En consecuencia la energía potencial del sistema será:

$$U = \frac{9}{2}cy^2 - \frac{4m_6 g}{l}y^2 = \frac{1}{2}\left(9c - \frac{8m_6 g}{l}\right)y^2.$$

Utilizando la ecuación de Lagrange hallamos la ecuación de movimiento:

$$\ddot{y} + k^2 y = 0, \tag{2}$$

donde $k^2 = \dfrac{9c - \dfrac{8m_6 g}{l}}{m_1 + \dfrac{m_2}{2} + \dfrac{16}{3}m_6 + 6m_4}$.

Por lo tanto la frecuencia cíclica de las oscilaciones será:

$$k = \sqrt{\frac{9c - \dfrac{8m_6 g}{l}}{m_1 + \dfrac{m_2}{2} + \dfrac{16}{3}m_6 + 6m_4}} = 27,1\ rad/s.$$

El período de las oscilaciones pequeñas $displaystyleT = \frac{2}{k} = \frac{2\cdot 3{,}14}{27{,}1} = 0,23\ s.$

Integrando la ecuación (2) hallamos las ley de movimiento para el cuerpo 1:

$$y = C_1 \cos kt + C_2 \operatorname{sen} kt.$$

Aplicando las condiciones iniciales finalmente hallamos:

$$y = 3,6 \cdot 10^{-2} \operatorname{sen}(27,1t + 0,597))\ \ m$$

Número de problema	l	i_x	i'_x	r_4	m_1	m_2	m_3, m_4, m_5	m_6	c	Condición inicial ($t = 0$)	
	m				kg				N/cm	y_0, cm	$\dot{y}_0$, cm/s
1	0,5	–	–	–	1	2	–	3	40	0,1	5,0
2	0,5	–	–	0,2	1	2	2	3	40	0	6,0
3	0,5	3/2r	–	–	1	–	4	3	20	0,2	7,0
4	0,6	–	–	–	1	2	3	2	36	0,2	0
5	0,6	–	–	0,15	1	–	3	3	16	0	8,0
6	0,6	–	–	0,15	1	–	1	1	40	0,3	7,0
7	–	–	–	–	1	–	2	2	40	0,4	0
8	–	–	–	–	1	3	2	–	40	0	6,0
9	0,6	–	–	–	1	2	–	3	38	0,5	5,0
10	0,6		–	–	1	2	–	3	32	0	6,0
11	–	–	–	–	1	2	–	3	30	0,4	7,0
12	0,5	–	–	–	1	2	–	3	20	0,2	0
13	0,3	–	–	–	1	1	1	2	32	0	8,0
14	0,4	–	–	0,1	1	–	2	3	20	0	7,0
15	0,4	$r\sqrt{3}$	–	–	1	–	2	2	20	0,1	0
16	–	–	–	–	1	2	3	–	32	0,3	6,0
17	–	–	–	–	1	2	–	2	20	0	5,0
18	–	–	–	–	1	2	1	–	40	0	6,0
19	0,2	–	–	–	1	1	–	1	32	0,1	0
20	0,5	–	–	–	1	2	–	3	20	0,4	7,0

Figura 2: Datos para los problemas 1 – 20

Renato Tovar Landeo

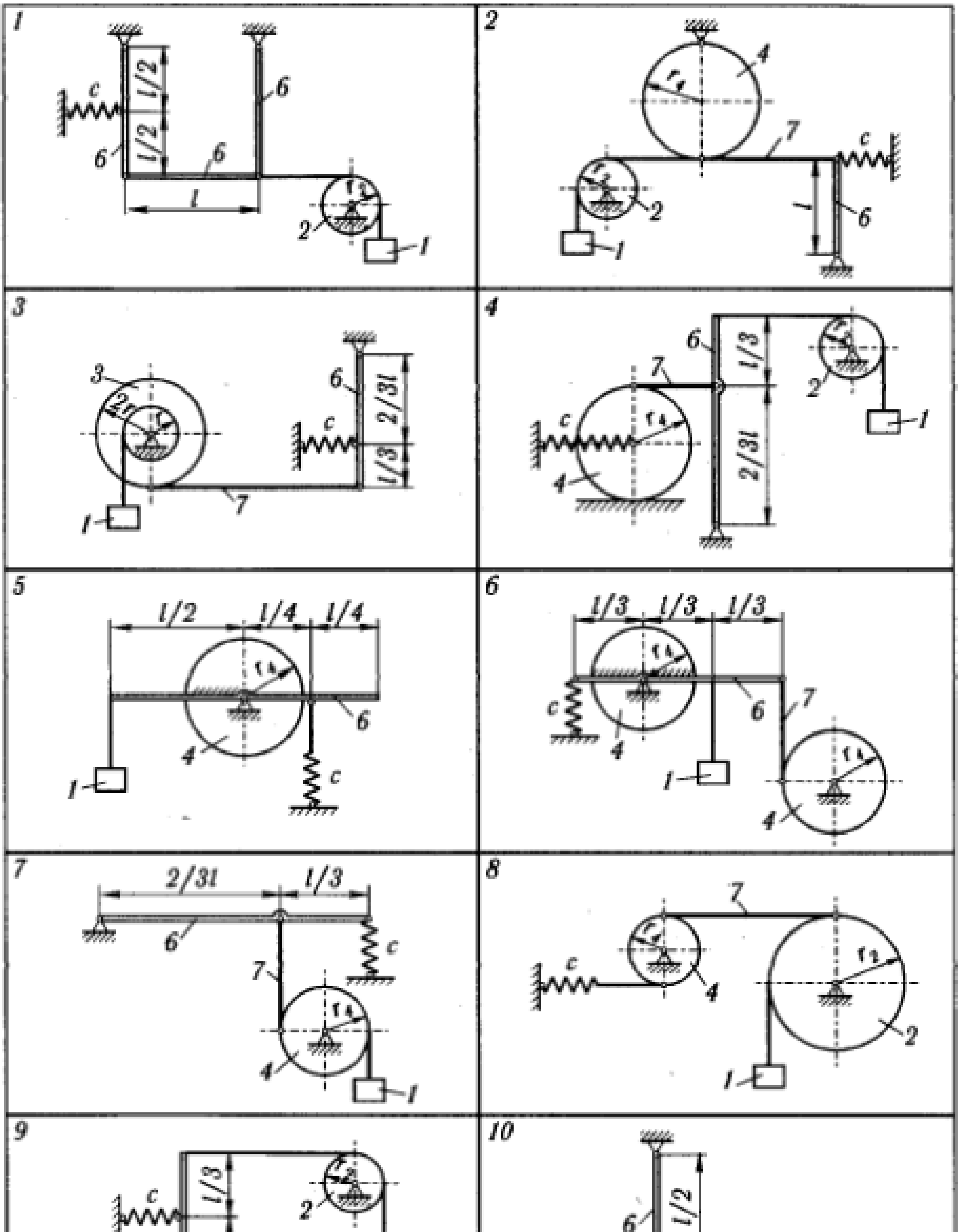

Figura 3: Sistemas mecánicos 1 – 10

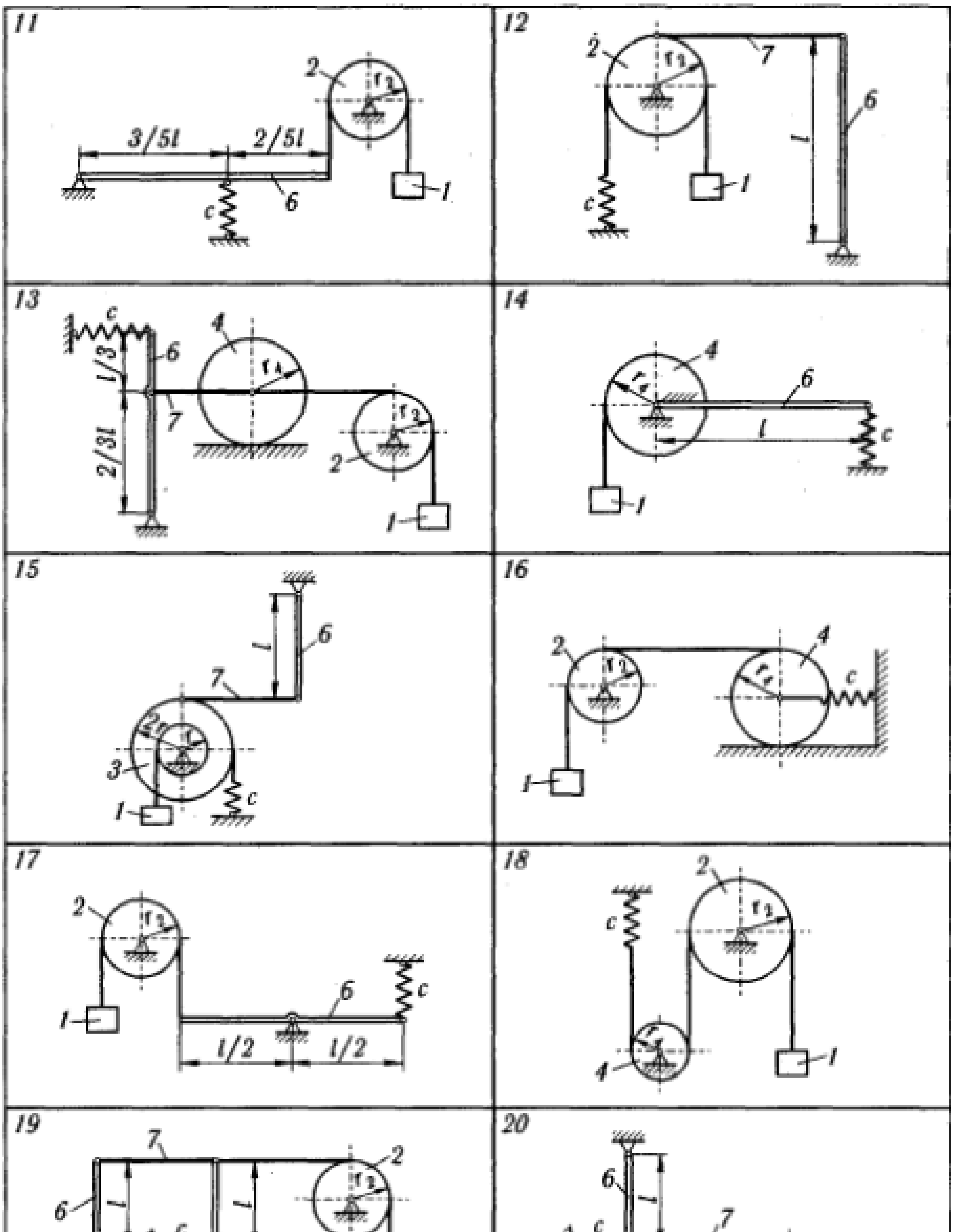

Figura 4: Sistemas mecánicos 11 – 20