专题四：微分方程模型

目录

1 Logistic 种群增长模型

1.1 模型原理与建模过程

（1）Logistic 增长模型的原理

Logistic 增长模型是一种**描述受限增长的数学模型**，常用于描述种群增长、疾病传播、市场饱和等现象。其核心思想是增长速率随资源限制逐渐减缓，最终趋于一个上限（称为“承载能力”）

Logistic 增长模型的微分方程形式为：$\frac{dP}{dt}=rP(1-\frac{P}{K})$

①$P(t)$是时间 t 时的种群规模（或其他变量）；r 是初始增长率

②K 是承载能力（种群规模的上限）

解该微分方程，得到 Logistic 增长函数：$P(t)=\frac{K}{1+\left(\frac{K-P_0}{P_0}\right)e^{-rt}}$

其中：P_0 是初始种群规模

（2）Logistic 增长模型的适用情形

Logistic 增长模型适用于**增长受限的情形**，常见于：

①**生物学：**种群增长（如细菌培养、动物种群）

②**经济学：**市场饱和（如产品销量增长、技术扩散）

③**医学：**疾病传播（如 SIR 模型中的感染人数预测）

④**社会学：**信息传播（如社交网络中的话题热度）

⑤**环境科学：**资源消耗（如森林再生、渔业资源）

（3）Logistic 增长模型的注意事项

①假设环境承载能力 K 恒定：

现实中 K 可能变化（如资源枯竭、技术进步），需动态调整模型。

②初始阶段可能不符合指数增长：

若初始数据不呈现指数增长趋势（如线性增长），Logistic 模型可能不适用。

③数据拟合需足够样本：

需要足够多的数据点（尤其是拐点附近），否则参数估计可能不准确。

④增长率 r 的影响：

r 过高可能导致模型过早饱和，过低则拟合效果差，需合理估计。

⑤外推预测需谨慎：

长期预测可能因环境变化（如政策干预、技术突破）失效。

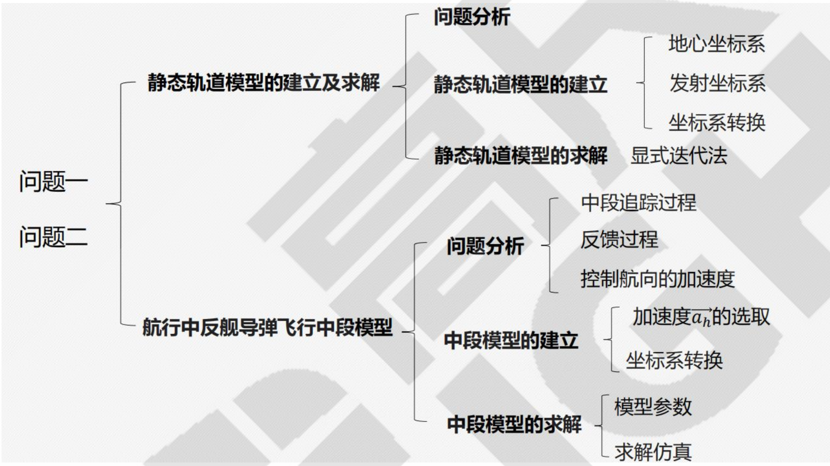
⑥不适用于无限增长或突变过程：

若增长不受限（如某些技术创新），指数模型可能更合适。

若增长受突发事件影响（如疫情封控），需结合其他模型（如分段 Logistic）。

1.2 Logistic 种群增长案例

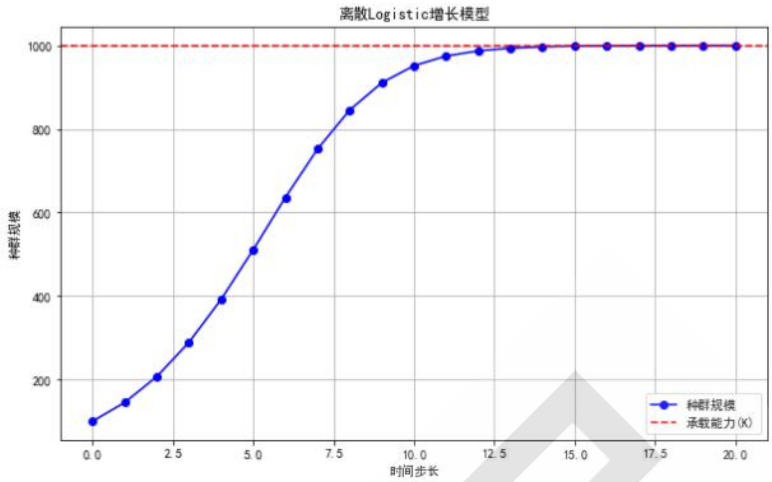
假设某地区某种动物的种群规模随时间增长，初始种群规模为 100，承载能力为 1000，增长率为 0.5。通过 Logistic 增长模型预测未来种群规模



微分方程模型事例【2018Mathorcup 数模挑战赛 C 题】

1.3 Logistic 种群增长模型代码

```python
# 离散时间的Logistic增长模型
N0 = 100
K = 1000
r = 0.5
time_steps = 20

population = [N0]
for t in range(1, time_steps+1):
    N_prev = population[-1]
    N_next = N_prev + r * N_prev * (1 - N_prev/K)
    population.append(N_next)

# 绘制结果
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(range(time_steps+1), population, 'bo-', label='种群规模')
plt.axhline(y=K, color='r', linestyle='--', label='承载能力(K)')
plt.title('离散Logistic增长模型')
plt.xlabel('时间步长')
plt.ylabel('种群规模')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

print("时间\t种群规模")
for t, pop in enumerate(population):
    print(f"{t}\t{pop:.2f}")
```



2 Lotka-Volterra 模型

2.1 模型原理与建模过程

Lotka-Volterra 模型（也称为捕食者-猎物模型）是描述两个物种（捕食者和猎物）相互作用的经典数学模型。它由 Alfred Lotka 和 Vito Volterra 独立提出，广泛应用于生态学、经济学等领域。

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy \\ \dfrac{dy}{dt} = \delta xy - \gamma y \end{cases}$$

符号	含义
$x(t)$	猎物种群规模
$y(t)$	捕食者种群规模
α	猎物的自然增长率
β	猎物被捕食者所捕食的速率
δ	捕食者通过捕食猎物增长的速率
γ	捕食者的自然死亡率

（2）Lotka-Volterra 模型的适用情形

①封闭系统

- 假设没有物种迁移（无迁入或迁出），系统与外界无交换。
- 适用于孤立环境（如岛屿、实验室封闭培养系统）。

②简单相互作用

- 仅包含一对捕食者-猎物关系，忽略其他物种或环境因素（如竞争、共生、疾病等）。
- 捕食者仅依赖猎物为食，猎物仅受捕食者威胁。

③无限资源假设

- 猎物种群的增长仅受捕食者限制（忽略资源竞争、承载能力等）。
- 捕食者的死亡率仅由猎物数量决定（忽略其他死亡因素）。

④瞬时响应

捕食率与猎物数量成正比，无时滞效应（如捕食者繁殖或捕食行为的延迟）。

⑤均质环境

空间分布均匀，忽略栖息地异质性（如避难所、地形差异）。

（3）Lotka-Volterra 模型的注意事项

①过度简化风险

现实生态系统中存在多物种交互、环境波动、时滞效应等，模型可能无法准确预测复杂动态。

②参数敏感性

模型结果高度依赖参数（如捕食率、繁殖率），需通过实验或观测精确校准，否则预测可能偏离实际。

③周期性振荡的局限性

模型预测的捕食者-猎物数量周期性振荡在自然界中较少见（受随机扰动、环境噪声影响）。

本文根据对 SARS 传播的分析，把人群分为 5 类：易感类、潜伏期类、患病未被发现类、患病已被发现类和治愈及死亡组成的免疫类，并考虑自愈因素，提出了两个模型：微分方程模型和基于 Small-World Network 的模拟模型。对微分方程模型，以香港为例讨论了自愈的影响，在一定意义下说明自愈现象在 SARS 传播中是普遍存在的。模拟模型利用 Small-World Network[1] 模拟现实中人们之间的接触；借鉴 Sznajd 模型[2] 观念传播的基本思想“考察区域内每个成员如何影响与其有联系的其他成员”，用影响类比传染，从患病者去传染与其有接触的健康人的角度，模拟 SARS 的传播过程；然后吸收元胞自动机模型[3] 同步更新的思想，最终建立了一个患病者传染邻居，且一个成员同时受所有邻居影响的基于 Small-WorldNetwork 的模拟模型。对此模型，我们讨论了一些主要参数及接种疫苗的影响，最后拟合北京数据，讨论了提前或推迟 5 天采取措施的影响。

借鉴以往微分方程建立传染病模型的思想[4-6]，我们得到如下的关于 SARS 传播的 SEI_uI_iR 微分方程模型：

$$\begin{cases} s' = -\sigma I_u S \\ E' = \sigma I_u S - gE - \mu E \\ I'_u = gE - zI_u \\ I'_i = zI_u - cI_i \\ R' = cI_i + \mu E \end{cases} \quad 其中，\begin{cases} S + E + I_u + I_i + R = N \\ S \geqslant 0,\ E \geqslant 0,\ I_u \geqslant 0,\ I_i \geqslant 0,\ R \geqslant 0 \\ g + \mu = \dfrac{1}{H} \\ 0 \leqslant g,\ z,\ c \leqslant 1 \end{cases}$$

微分方程模型实例**【SARS 传染病论文】**

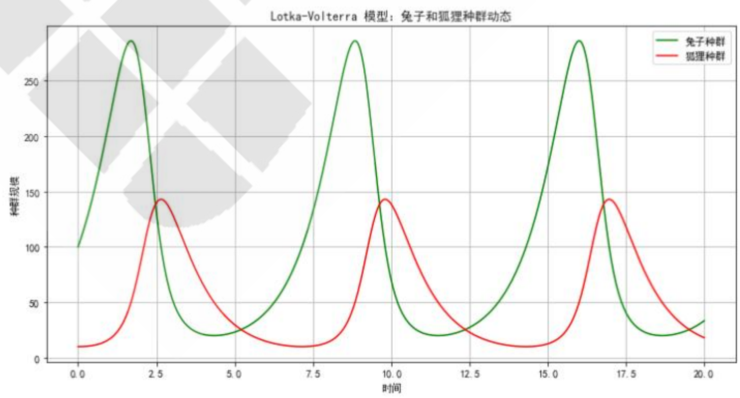
2.2 Lotka-Volterra 模型案例

狐狸和兔子的捕食关系

假设某生态系统中，兔子和狐狸的种群规模随时间变化。兔子的自然增长率为 1.0，被捕食率为 0.02；狐狸通过捕食兔子增长的速率为 0.01，自然死亡率为 1.0。初始时，兔子和狐狸的种群规模分别为 100 和 10

2.3Lotka-Volterra 模型代码

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint

# 定义 Lotka-Volterra 模型的微分方程
def lotka_volterra(populations, t, alpha, beta, gamma, delta):
    R, F = populations  # R: 兔子数量, F: 狐狸数量
    dRdt = alpha * R - beta * R * F
    dFdt = gamma * R * F - delta * F
    return [dRdt, dFdt]

# 参数设置
alpha = 1.0    # 兔子的自然增长率
beta = 0.02    # 兔子被捕食率
gamma = 0.01   # 狐狸的捕食效率
delta = 1.0    # 狐狸的自然死亡率

R0 = 100       # 初始兔子数量
F0 = 10        # 初始狐狸数量
t = np.linspace(0, 20, 500)  # 时间范围（0到20，500个时间点）

# 求解微分方程
solution = odeint(lotka_volterra, [R0, F0], t, args=(alpha, beta, gamma, delta))
R, F = solution.T  # 提取兔子和狐狸的种群数量

# 绘制结果
plt.figure(figsize=(12, 6))
plt.plot(t, R, 'g-', label='兔子种群')
plt.plot(t, F, 'r-', label='狐狸种群')
plt.title('Lotka-Volterra 模型：兔子和狐狸种群动态')
plt.xlabel('时间')
plt.ylabel('种群规模')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

# 输出部分时间点的种群数量
print("时间\t兔子数量\t狐狸数量")
for time, rabbits, foxes in zip(t[::50], R[::50], F[::50]):
    print(f"{time:.1f}\t{rabbits:.2f}\t\t{foxes:.2f}")
```



时间	兔子数量	狐狸数量
0.0	100.00	10.00
2.0	257.10	86.60
4.0	21.01	65.35
6.0	41.50	14.77
8.0	194.46	14.46
10.0	67.90	137.89
12.0	22.00	33.01
14.0	79.64	10.31
16.0	285.86	52.46
18.0	23.99	81.57

其中 K 为直线弹簧刚度。通过查阅文献 [2] 知，物体在波浪运动中所受的静水恢复力由重力和浮力的联合作用引起，仅考虑垂荡运动时，**静水恢复力**满足：

$$f_r = -\rho g A x_f(t) \tag{5}$$

其中，A 是海平面截面面积。浮子所受的**兴波阻尼力** f_{c_w} 满足：

$$f_{c_w} = -C_{zh} x_f'(t) \tag{6}$$

则由**牛顿第二定律**可得浮子和振子的**垂荡运动模型**为：

$$\begin{cases} (m_f + m')x_f''(t) = f_e + f_{c_w} + f_r - f_{PTO} \\ m_z x_z''(t) = f_{PTO} \end{cases} \tag{7}$$

其中 m_f，m_z，m' 分别是浮子质量，振子质量和附加惯性质量，$x_f(t)$，$x_z(t)$ 分别是浮子垂荡位移和振子垂荡位移。

微分方程模型事例【2022 年 A 题】

对浮子和振子分别进行受力分析、建立多元微分方程，利用 MATLAB 中的 ode45 功能函数求解，最终得到浮子和振子在 40 个波浪周期内的垂荡位移和速度，两小问各自条件下 10s、20s、40s、60s、100s 时的数据如下文 5.1 中表 1 和表 2 所示。

微分方程模型事例【2022 年 A 题】

在阻尼系数非恒定的情况下，将微分方程改写成四元一阶非常系数微分方程组，采用四阶 Runge - Kutta 法求微分方程组的数值解，得到 100s 时浮子位移为 $-0.0894m$，速度为 $-0.6066m/s$，振子位移为 $-0.0952m$，速度为 $-0.6467m/s$，其他时刻数据见正文。

微分方程模型事例【2022 年 A 题】