第7章 三维变换

7.1 简介

三维平移变换、比例变换可看成是二维情况的直接推广。但旋转变换则不然，因为我们可选取空间任意方向作旋转轴，因此三维变换处理起来更为复杂。

与二维变换相似，我们也采用齐次坐标技术来描述空间的各点坐标及其变换，这时，描述空间三维变换的变换矩阵是4×4的形式。

由此，一系列变换可以用单个矩阵来表示。

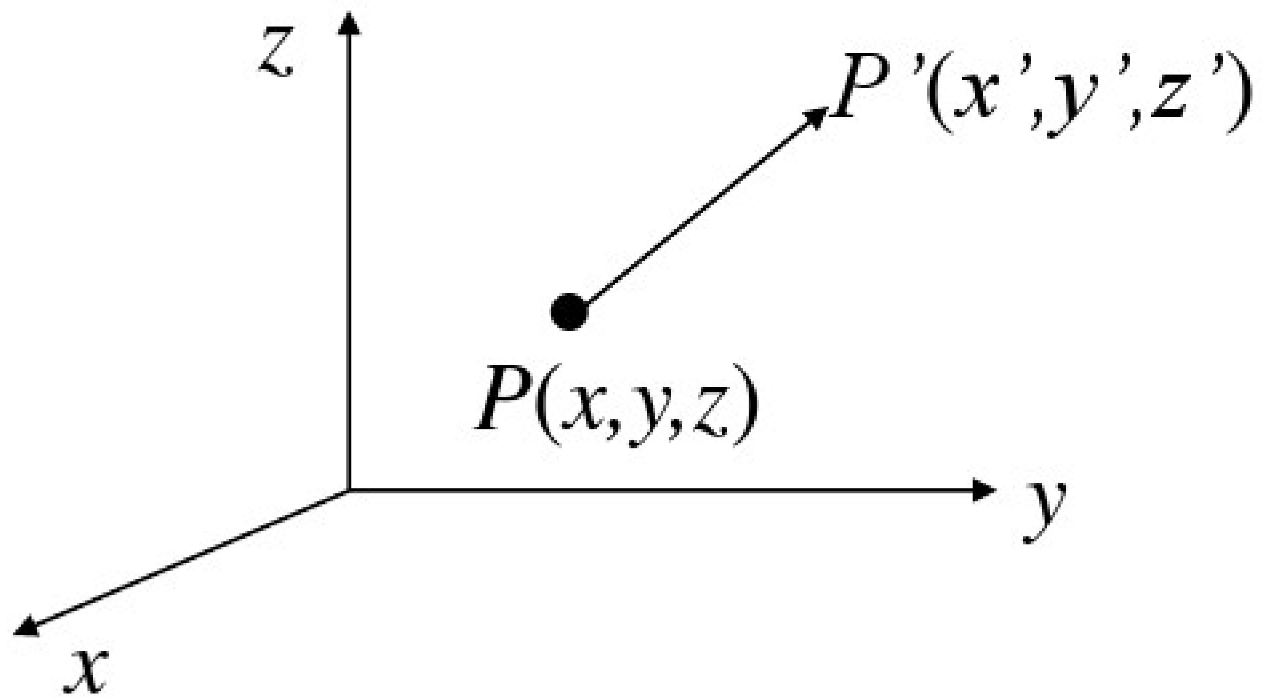
7.2 三维几何变换

7.2.1 基本三维几何变换

1. 平移变换

若空间平移量为(t_x, t_y, t_z)，则平移变换为

$$\begin{cases} x' = x + t_x \\ y' = y + t_y \\ z' = z + t_z \end{cases}$$



$$(x' \ y' \ z' \ 1) = (x \ y \ z \ 1)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ t_x & t_y & t_z & 1 \end{bmatrix}$$

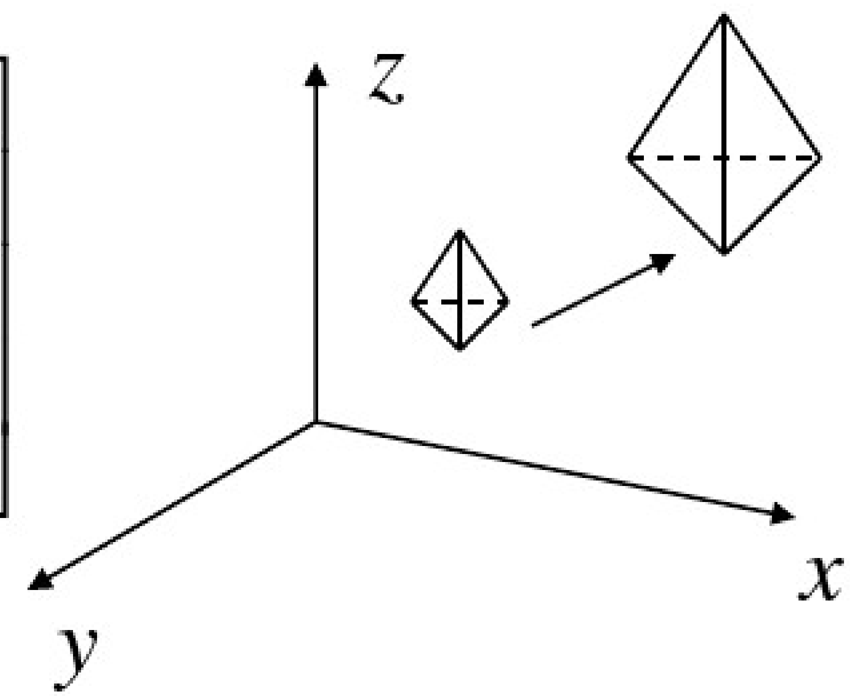
补充说明：点的平移、物体的平移、多面体的平移、逆变换

2. 比例变换

（1） 相对坐标原点的比例变换

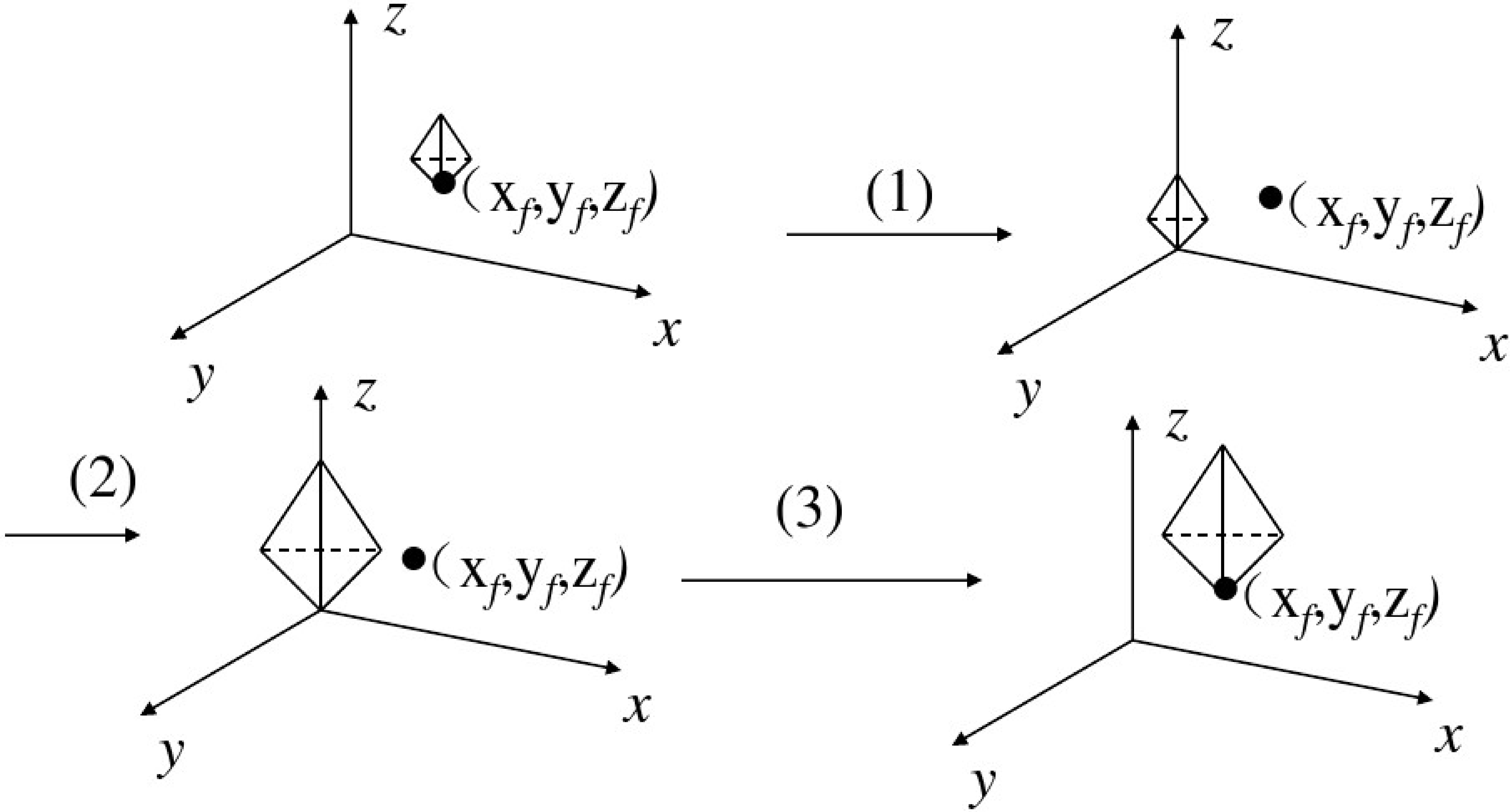
一个点P=(*x*,*y*,*z*)相对于坐标原点的比例变换的矩阵可表示为

$$(x' \ y' \ z' \ 1) = (x \ y \ z \ 1)\begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$x' = xs_x, y' = ys_y, z' = zs_z$ 其中 s_x, s_y, s_z 为正值。

（2） 相对于所选定的固定点的比例变换



$$T(-x_f,-y_f,-z_f)S(s_x,s_y,s_z)T(x_f,y_f,z_f)=\begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ (1-s_x)x_f & (1-s_y)y_f & (1-s_z)z_f & 1 \end{bmatrix}$$

3. 绕坐标轴的旋转变换

三维空间中的旋转变换比二维空间中的旋转变换复杂。除了需要指定旋转角外，还需指定旋转轴。

若以坐标系的三个坐标轴x,y,z分别作为旋转轴，则点实际上只在垂直坐标轴的平面上作二维旋转。此时用二维旋转公式就可以直接推出三维旋转变换矩阵。

规定在右手坐标系中，物体旋转的正方向是右手螺旋方向，即从该轴正半轴向原点看是逆时针方向。

（1）绕 z 轴旋转

$$x' = x\cos\gamma - y\sin\gamma$$
$$y' = x\sin\gamma + y\cos\gamma$$
$$z' = z$$

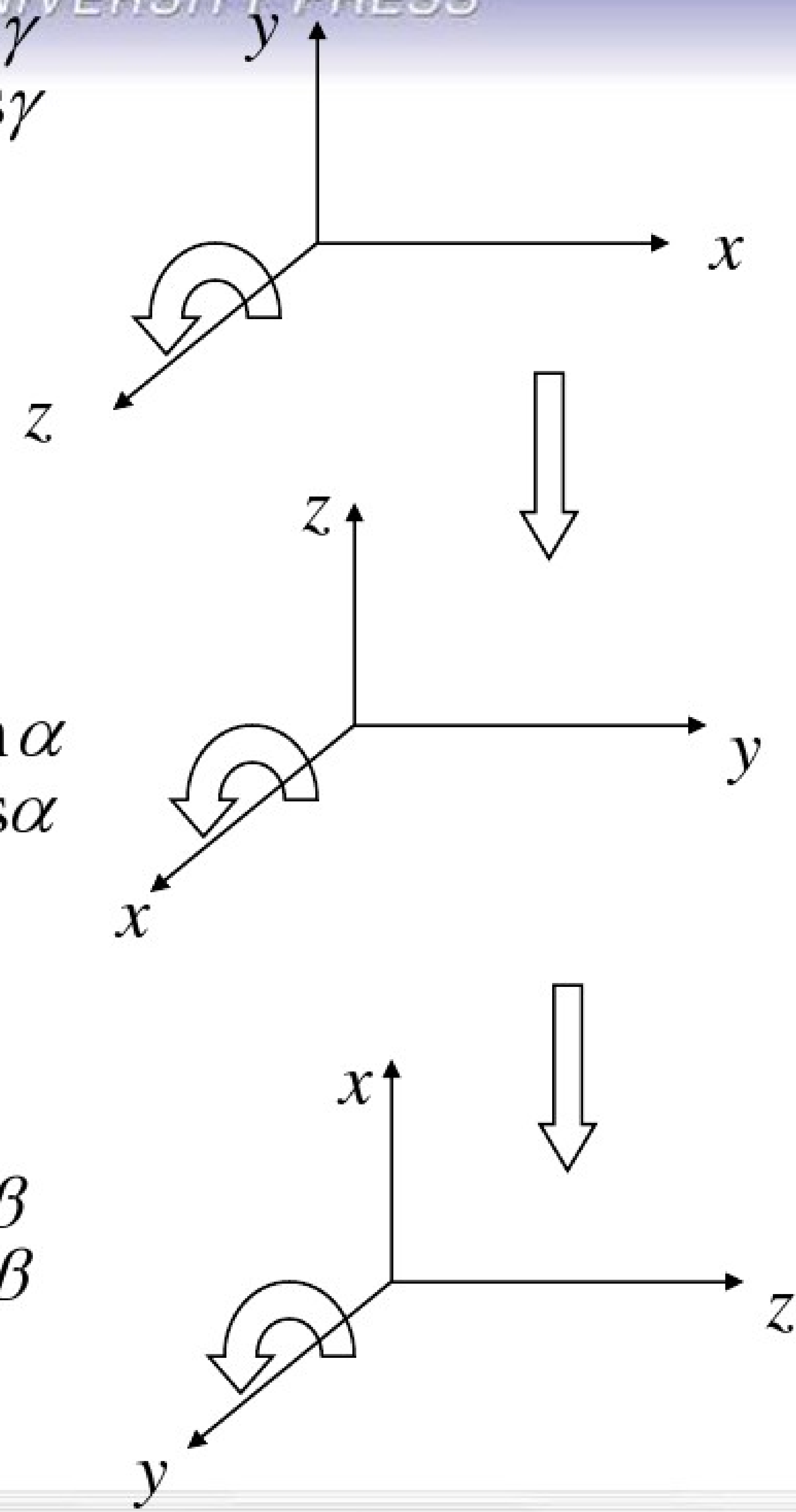
$$x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$$

（2）绕 x 轴旋转

$$y' = y\cos\alpha - z\sin\alpha$$
$$z' = y\sin\alpha + z\cos\alpha$$
$$x' = x$$

（3）绕 y 轴旋转

$$z' = z\cos\beta - x\sin\beta$$
$$x' = z\sin\beta + x\cos\beta$$
$$y' = y$$



$$\left(x'\ y'\ z'\ 1\right)=\left(x\ y\ z\ 1\right)\begin{bmatrix}\cos\gamma & \sin\gamma & 0 & 0\\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

绕 z 轴旋转

$$\left(x'\ y'\ z'\ 1\right)=\left(x\ y\ z\ 1\right)\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0\\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

绕 x 轴旋转

$$\left(x'\ y'\ z'\ 1\right)=\left(x\ y\ z\ 1\right)\begin{bmatrix}\cos\beta & 0 & -\sin\beta & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \sin\beta & 0 & \cos\beta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

绕 y 轴旋转

旋转变换矩阵规律:

对于单位矩阵 $\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} x & y & z & \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$，绕哪个坐标轴旋转，则该轴坐标的一列元素不变。按照二维图形变换的情况，将其旋转矩阵 $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

中的元素添入相应的位置中，即

(1) 绕z轴正向旋转 γ 角，旋转后点的z坐标值不变，x、y坐标的变化相当于在xoy平面内作正 γ 角旋转。

$$(x'\ y'\ z'\ 1)=(x\ y\ z\ 1)\begin{bmatrix}\cos\gamma & \sin\gamma & 0 & 0\\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & x & y & z & \\ \hline x & 1 & 0 & 0 & 0\\ y & 0 & 1 & 0 & 0\\ z & 0 & 0 & 1 & 0\\ & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}$$

(2)绕x轴正向旋转 α 角，旋转后点的x坐标值不变，Y、z坐标的变化相当于在yoz平面内作正 α 角旋转。

$$(x'\ y'\ z'\ 1)=(x\ y\ z\ 1)\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0\\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

(3) 绕y轴正向旋转 β 角，y坐标值不变，z、x的坐标相当于在zox平面内作正 β 角旋转，于是

$$\begin{pmatrix} z' & y' & x' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & y & x & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{pmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

这就是说，绕y轴的旋转变换的矩阵与绕x轴和z轴变换的矩阵从表面上看在符号上有所不同。

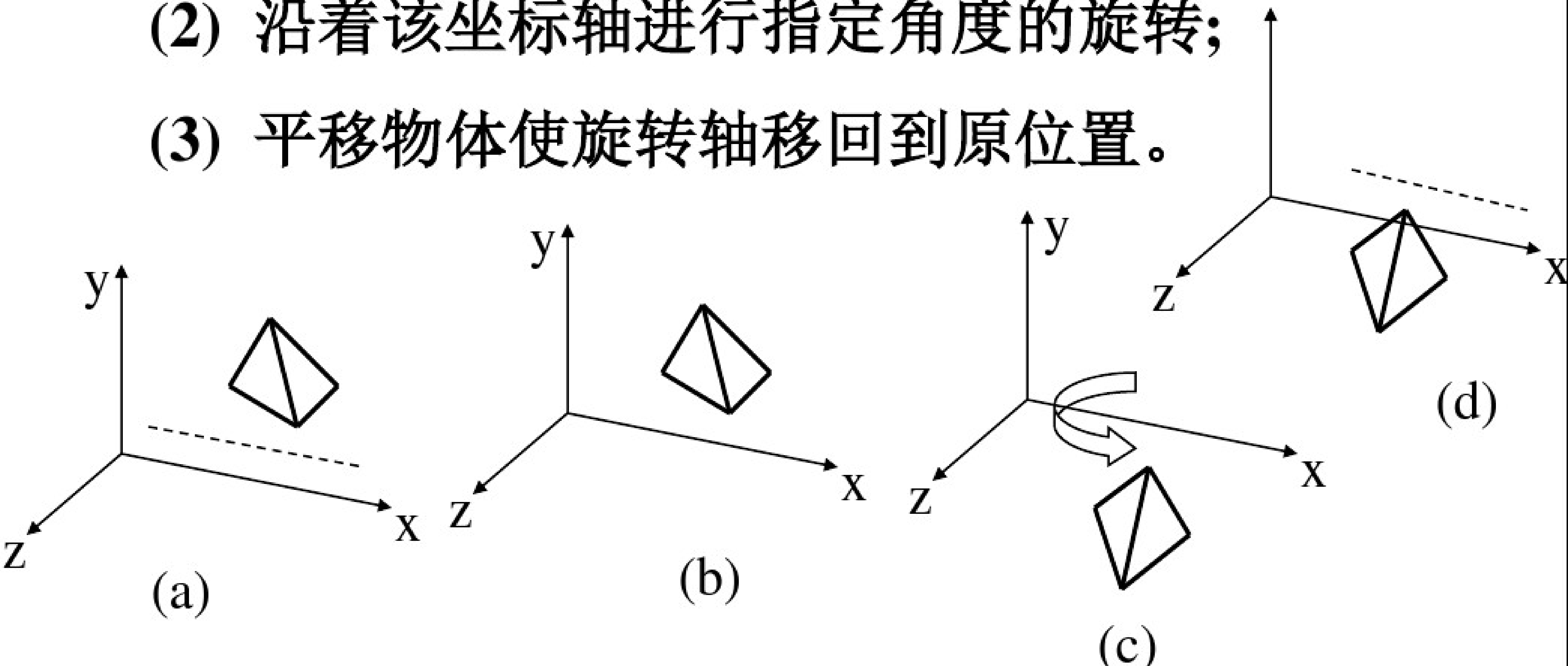
7.2.2 组合变换

1. 物体绕平行于某一坐标轴的旋转变换。基本步骤:

(1) 平移物体使旋转轴与所平行的坐标轴重合;

(2) 沿着该坐标轴进行指定角度的旋转;

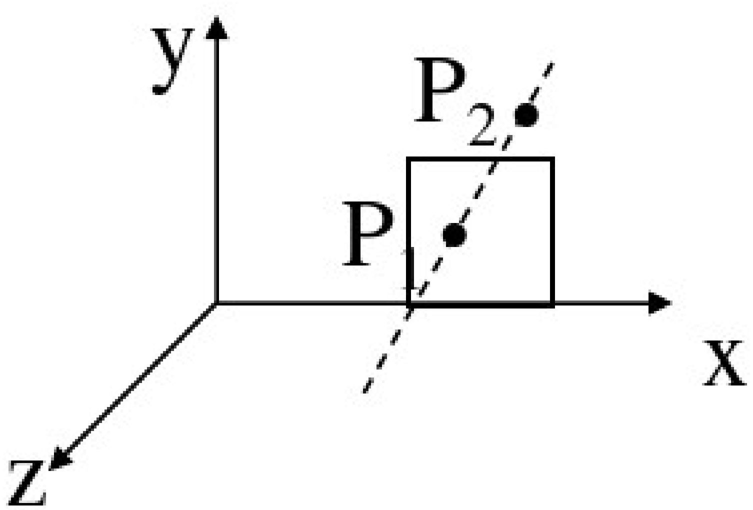
(3) 平移物体使旋转轴移回到原位置。

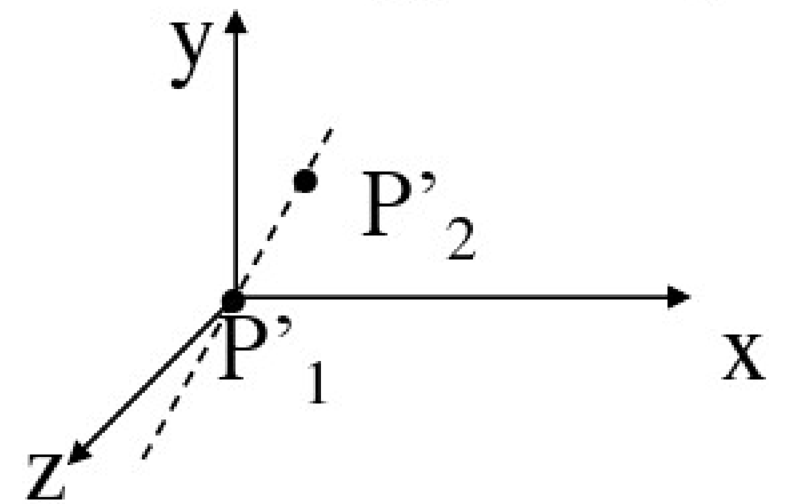


$$R(\alpha) = T \cdot R_x(\alpha) \cdot T^{-1}$$

2. 绕任意轴旋转的变换

(1)平移物体使旋转轴通过坐标原点;

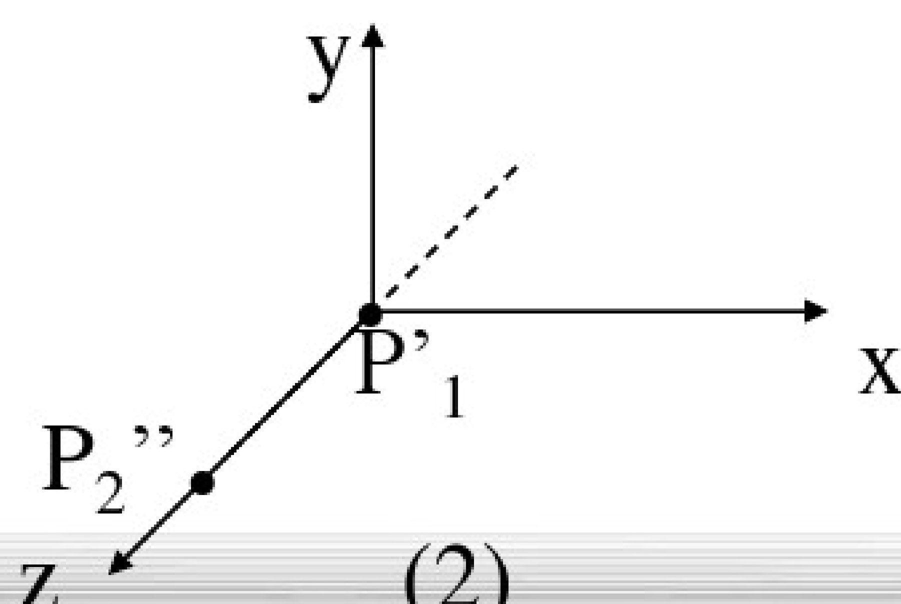




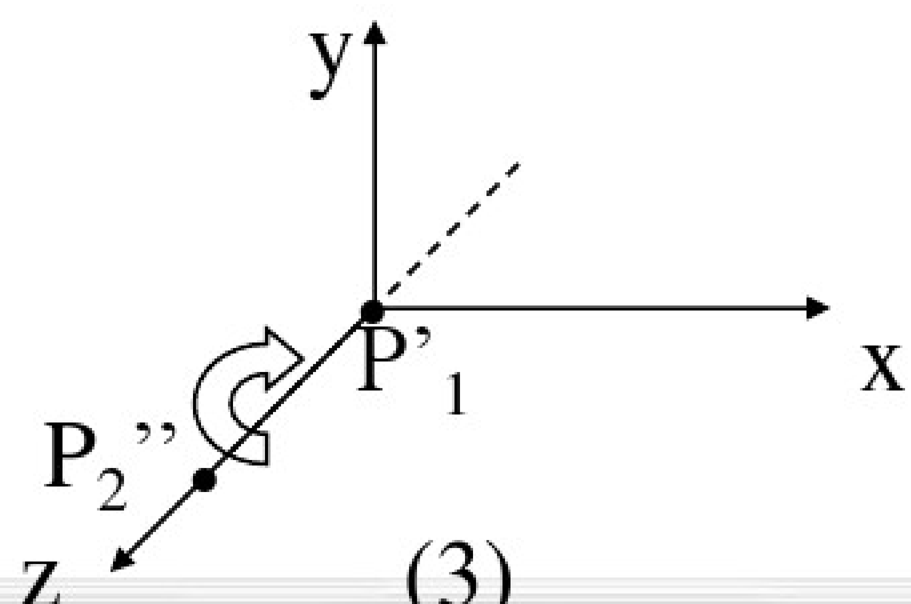
(1)

(2)旋转物体使旋转轴与某个坐标轴(如z轴)重合;

(3)关于该坐标轴进行指定角度的旋转;



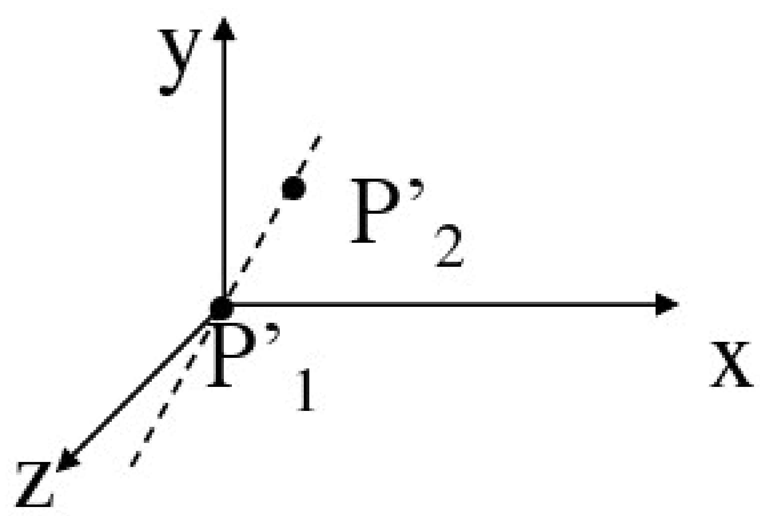
(2)



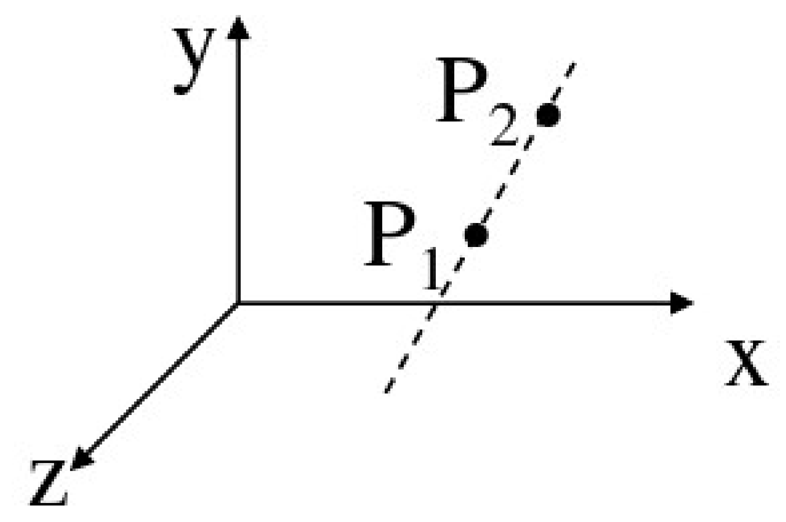
(3)

(4) 应用逆旋转变换将旋转轴回到原方向;

(5) 应用逆平移变换将旋转轴变换到原位置。

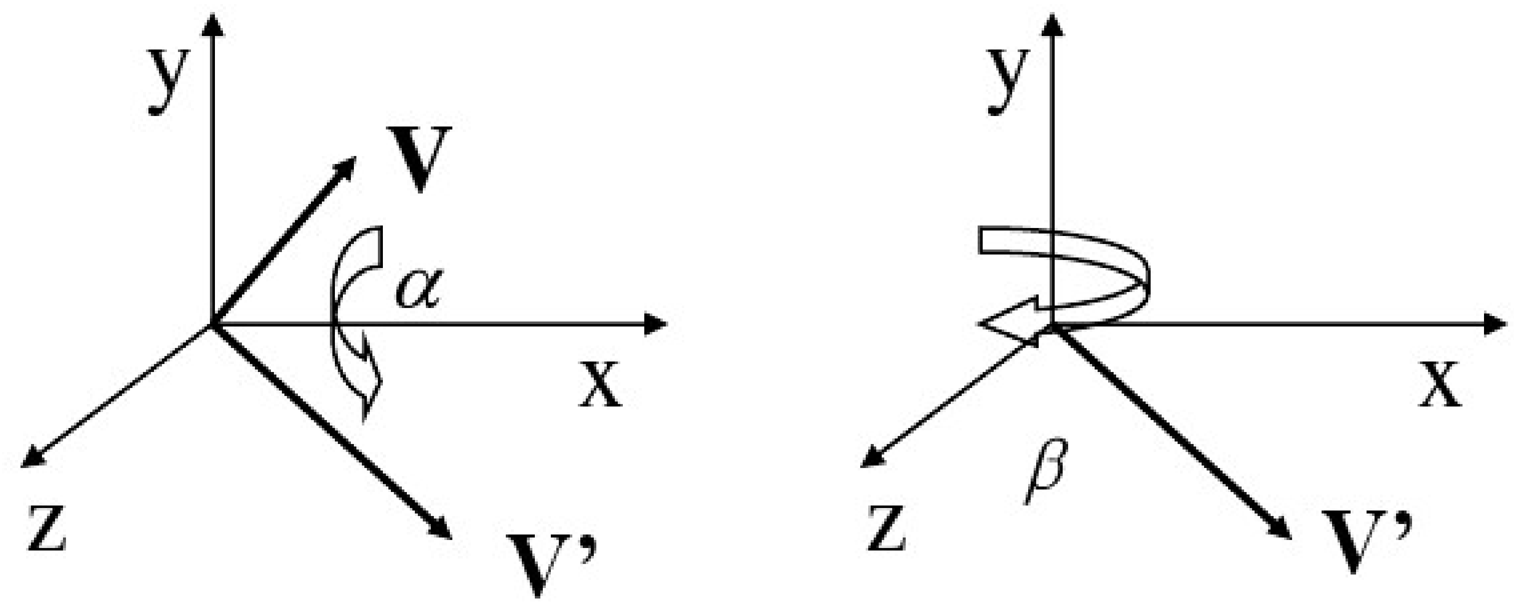


(4)



(5)

例. 求变换A_V，使过原点的向量V=(a,b,c)与z轴的正向一致。

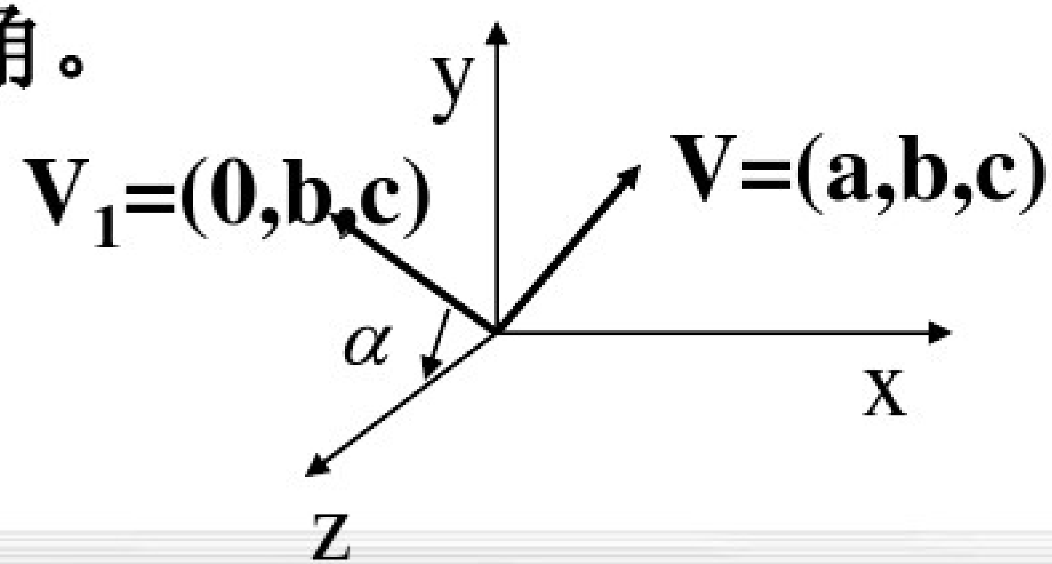


实现步骤:

(1)将V绕x轴旋转到xz 平面上;

(2)再绕y轴旋转使之与z轴正向重合。

旋转角度的确定：绕x轴旋转的角度 α 等于向量V在yz 平面上的投影向量与z 轴正向的夹角。



根据矢量的点乘与叉乘，可以算出：

$$\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}}, \cos\alpha = \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}}$$

因此，

$$R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} & \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}} & 0 \\ 0 & -\frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}} & \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$V' = VR_x(\alpha) = \left(a, 0, \sqrt{b^2 + c^2}\right)$$

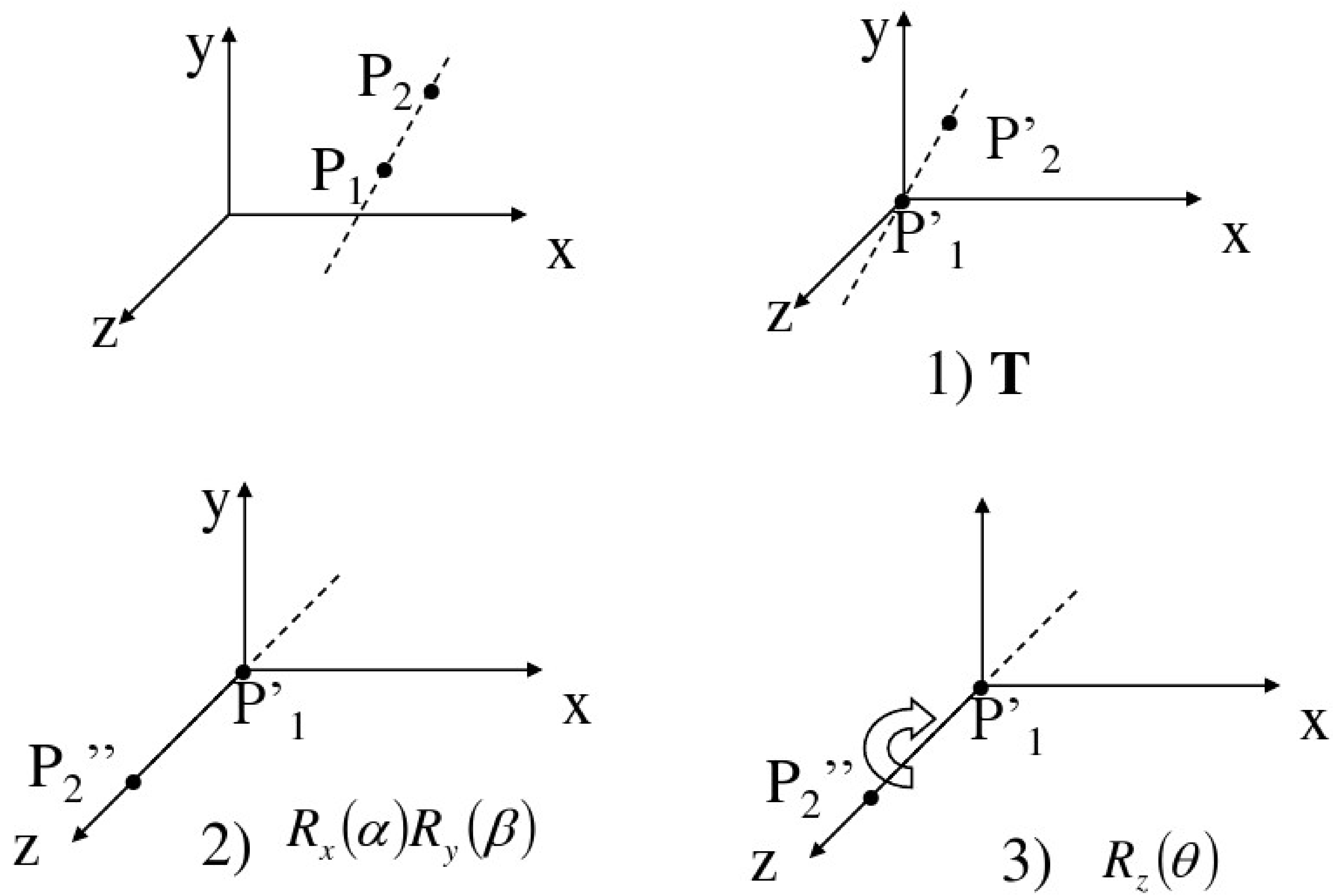
类似地，可以求出：

$$\sin\beta = -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \cos\beta = \frac{\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$R_y(\beta) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & 0 & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & 0 & \frac{\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_V = R_x(\alpha)R_y(\beta)$$

利用这一结果，则绕任意轴旋转的变换矩阵可表示为：



$$R(\theta)=T\cdot R_x(\alpha)\cdot R_y(\beta)\cdot R_z(\theta)\cdot R_y^{-1}(\beta)\cdot R_x^{-1}(\alpha)\cdot T^{-1}$$

7.2.3 绕任意轴旋转变换的简单算法

给定具有单位长的旋转轴$A=[a_x,a_y,a_z]$和旋转角 θ ，

则物体绕OA轴旋转变换的矩阵表示可确定如下：

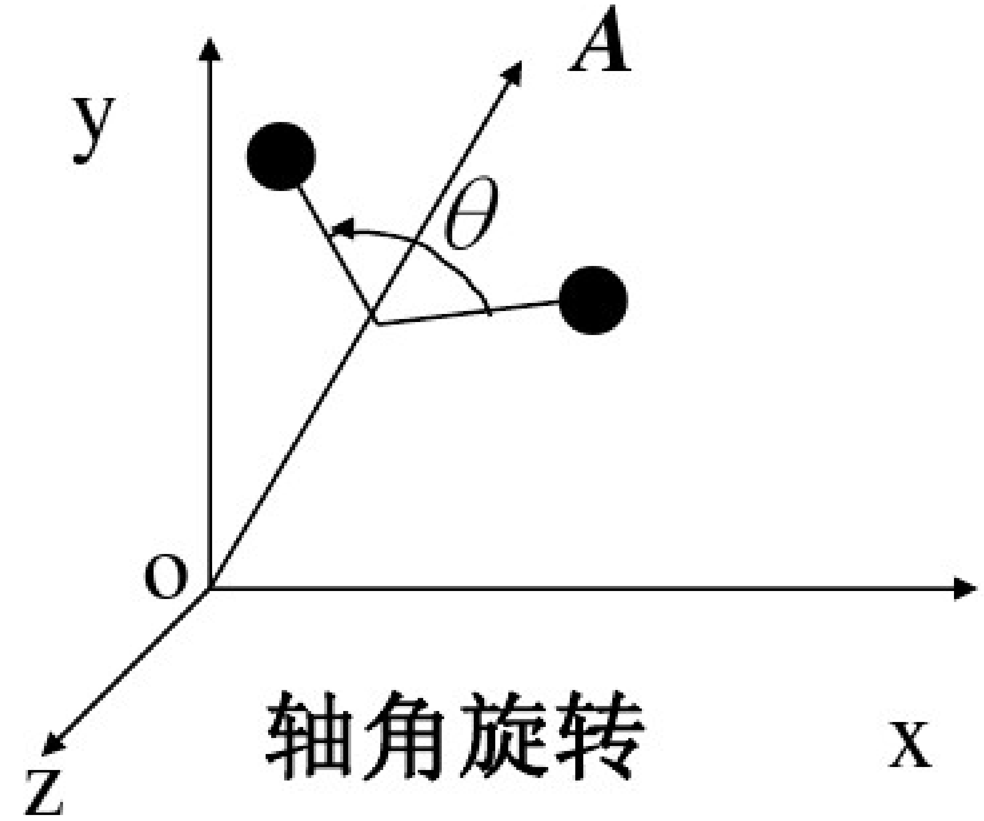
$$\hat{A}=\begin{bmatrix} a_x a_x & a_x a_y & a_x a_z \\ a_y a_x & a_y a_y & a_y a_z \\ a_z a_x & a_z a_y & a_z a_z \end{bmatrix}$$

$$\hat{A}=\begin{bmatrix} a_x a_x & a_x a_y & a_x a_z \\ a_y a_x & a_x a_x & a_x a_x \\ a_x a_x & a_x a_x & a_x a_x \end{bmatrix}$$

$$A^*=\begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$M=\hat{A}+\cos\theta\cdot\left(I-\hat{A}\right)+\sin\theta\cdot A^*$$

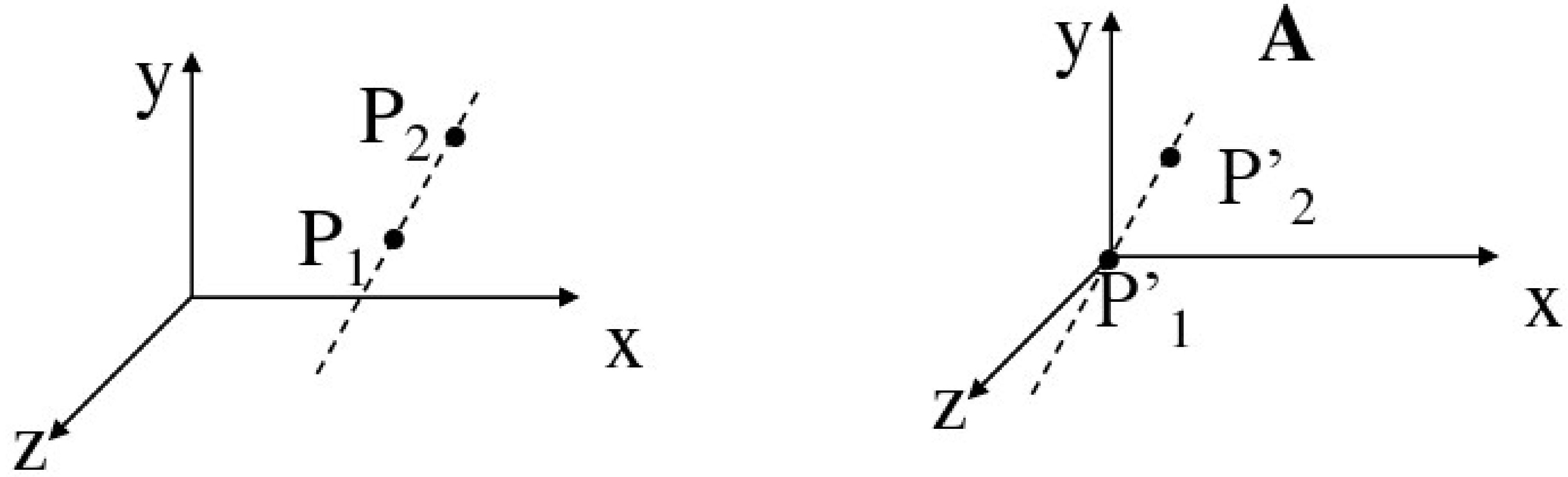
$$P'=P\cdot M^T$$



轴角旋转

其中 M^T 表示M的转置矩阵。

利用这一结果，则绕任意轴旋转的变换矩阵可表示为：



$$R(\theta)=T\cdot M^{T}\cdot T^{-1}$$

其中旋转轴**A=[a$_x$,a$_y$,a$_z$]**为 $\dfrac{\mathbf{P}_2-\mathbf{P}_1}{\left|\mathbf{P}_2-\mathbf{P}_1\right|}$

传统的方法通过绕坐标轴旋转变换的乘积表示绕任意轴旋转的变换。与之相比，这种方法更直观。

7.2.4 三维变换矩阵的功能分块

$$\left[\begin{array}{ccc:c} a_{11} & a_{21} & a_{31} & p_x \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & p_y \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & p_z \\ \hdashline t_x & t_y & t_z & s \end{array}\right]$$

（1）三维线性变换部分

（2）三维平移变换部分

（3）透视变换部分

（4）整体比例因子

7.3 三维坐标变换

几何变换：在一个参考坐标系下将物体从一个位置移动到另一个位置的变换。

坐标变换： 一个物体在不同坐标系之间的坐标变换。如从世界坐标系到观察坐标系的变换；观察坐标到设备坐标之间的变换。再如，对物体造型时，我们通常在局部坐标系中构造物体，然后重新定位到用户坐标系。

坐标变换的构造方法:

与二维的情况相同，为将物体的坐标描述从一个系统转换为另一个系统，我们需要构造一个变换矩阵，它能使两个坐标系统重叠。具体过程分为两步：

（1）平移坐标系统oxyz，使它的坐标原点与新坐标系统的原点重合；

（2）进行一些旋转变换，使两坐标系的坐标轴重叠。

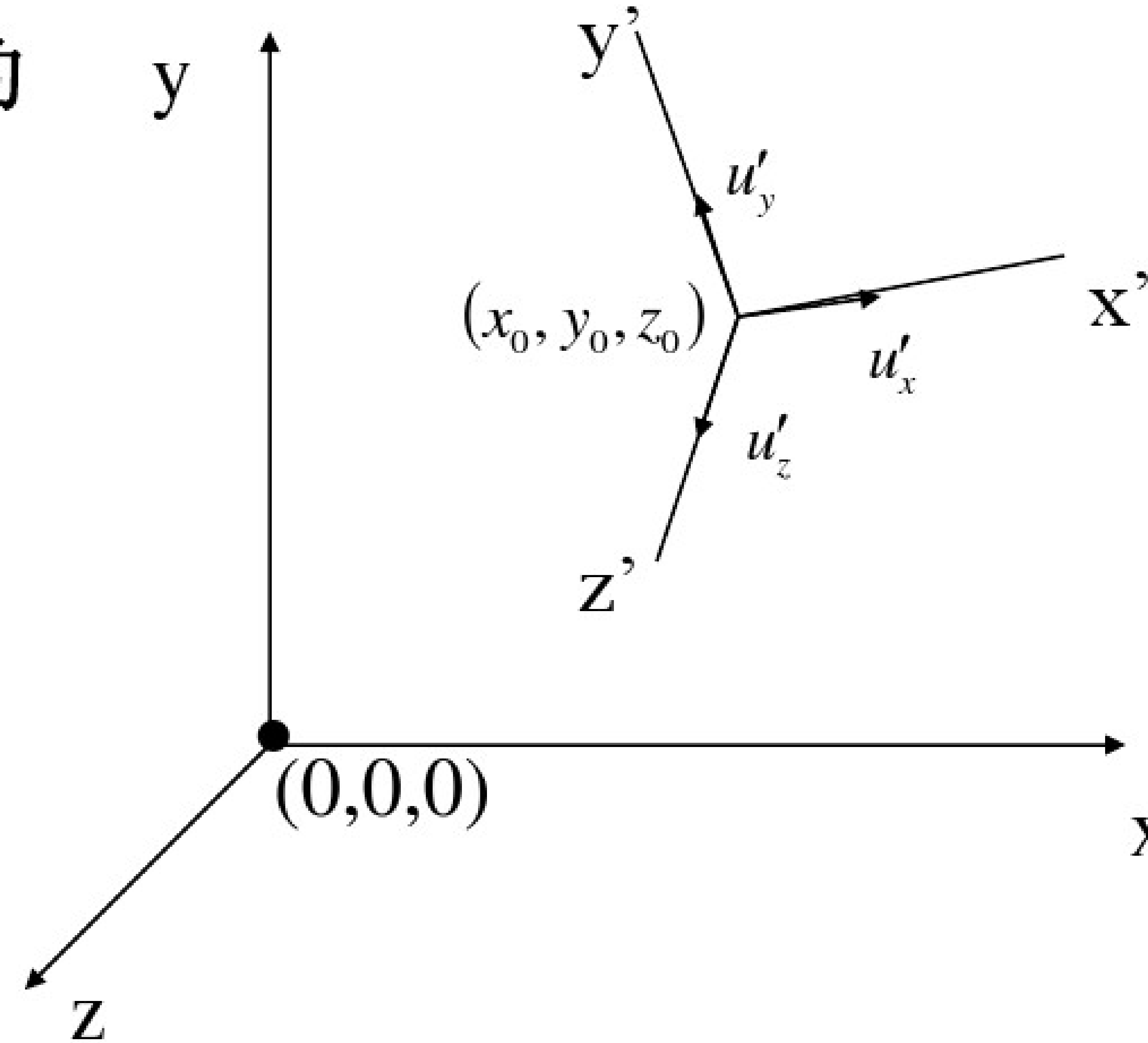
有多种计算坐标变换的方法，下面我们介绍一种简单的方法。

设新坐标系o'x'y'z' 原点的坐标为（x_0,y_0,z_0），相对原坐标系其单位坐标矢量为：

$$u'_x = \left(u'_{x1}, u'_{x2}, u'_{x3}\right)$$

$$u'_y = \left(u'_{y1}, u'_{y2}, u'_{y3}\right)$$

$$u'_z = \left(u'_{z1}, u'_{z2}, u'_{z3}\right)$$

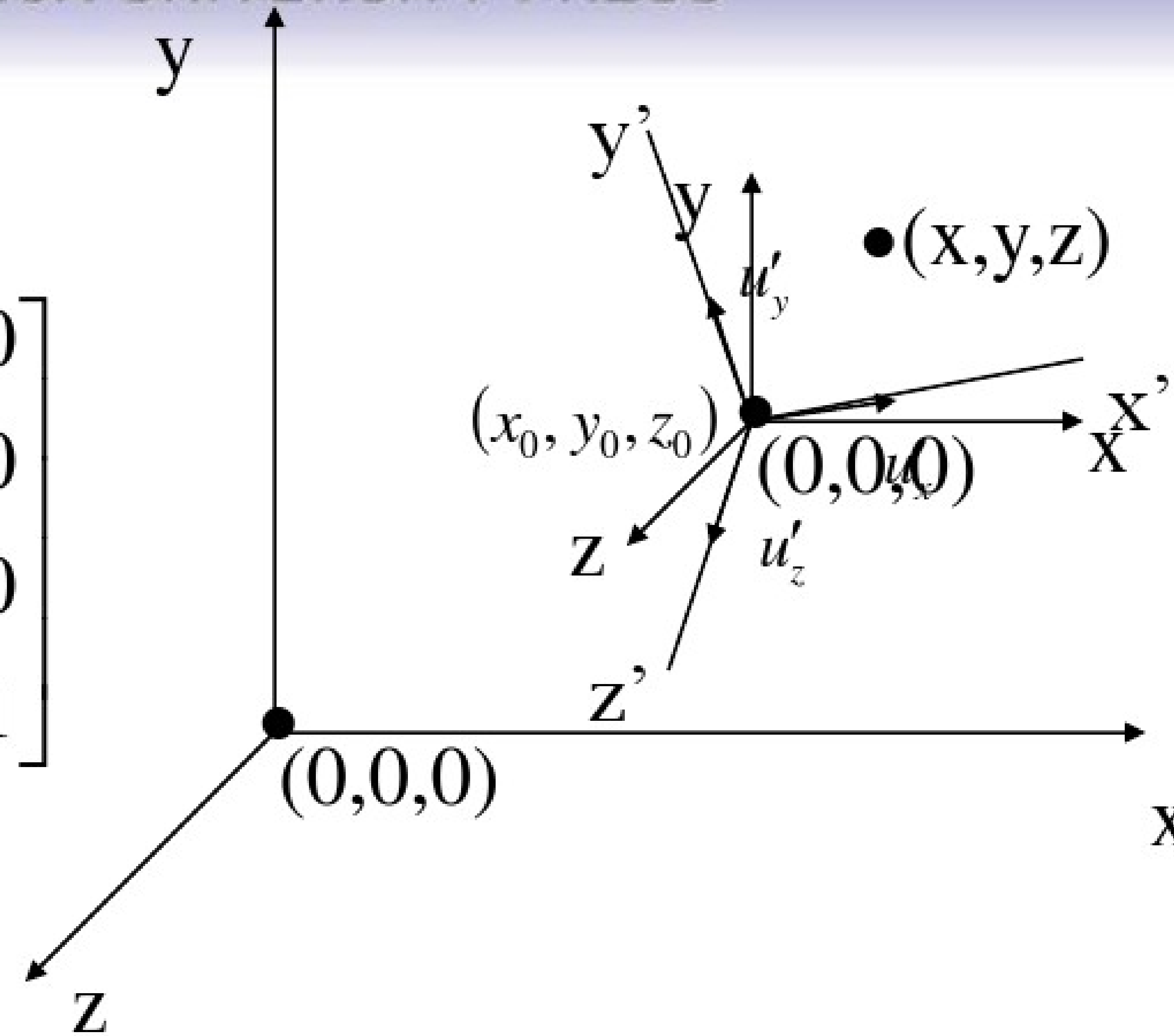


将原坐标系xyz下的坐标转换成新坐标系x'y'z'的坐标可由以下两步完成：

首先， 平移坐标系xyz，使其原点与新坐标系x'y'z'的原点（x_0,y_0,z_0）重合；

平移矩阵为：

$$T=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -x_0 & -y_0 & -z_0 & 1\end{bmatrix}$$



第二步，利用单位坐标向量构造坐标旋转矩阵

$$R=\begin{bmatrix}u'_{x1} & u'_{y1} & u'_{z1} & 0\\ u'_{x2} & u'_{y2} & u'_{z2} & 0\\ u'_{x3} & u'_{y3} & u'_{z3} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

该矩阵R将单位向量 u'_x u'_y u'_z 分别变换到x,y和z 轴。

综合以上两步，从oxyz到o'x'y'z'的坐标变换的矩阵为

$T(-x_0,-y_0,-z_0)\cdot R$ ，也即坐标变换公式为：

$$(x',y',z',1)=(x,y,z,1)\cdot T(-x_0,-y_0,-z_0)\cdot R$$

说明：变换矩阵TR将一个直角坐标系变换为另一个坐标系。即使一个坐标系是右手坐标系，另一个为左手坐标系，结论依然成立。

习题7

7-1 对于点P(x,y,z)，(1) 写出它绕x 轴旋转α角，然后再绕y轴旋转β角的变换矩阵。 (2)写出它绕 y 轴旋转β 角，然后再绕 x 轴旋转 α角的变换矩阵。所得到的变换矩阵的结果一样吗?

7-2 写出绕空间任意轴旋转的变换矩阵。