数字电路学习笔记（十二）：时序逻辑设计

JoshCena

在了解了这么多时序逻辑的抽象概念之后，我们来研究怎么把它们变成实际可操作的逻辑设计方法论。

一般来说，如果已经给出需求，时序逻辑设计有如下几步：

1. 把自然语言描述的逻辑抽象化，确定电路状态数，画出状态转换图；
2. 列出三个方程：输出方程、驱动方程、状态方程；
3. 设计具体电路。

直接从具体案例分析。现在的需求是：

> 设计一个自动售饮料机的逻辑电路。它的投币口每次只能投入一枚五角或一元的硬币。累计投入一元五角硬币后机器自动给一杯饮料；投入二元硬币后，在给饮料的同时退回一枚五角的硬币。[1]

一、定义变量与状态

逻辑设计的过程和组合逻辑大致相同，首先要定义各个变量。此处有两个输入：投入五角硬币 A、投入一元硬币 B；有两个输出：给饮料 X、找回五角硬币 Y。除此之外，时序逻辑除了输入输出，还要定义状态。我们的电路可能有几种状态？在一个完整的服务周期中，它可能处于以下几种状态：

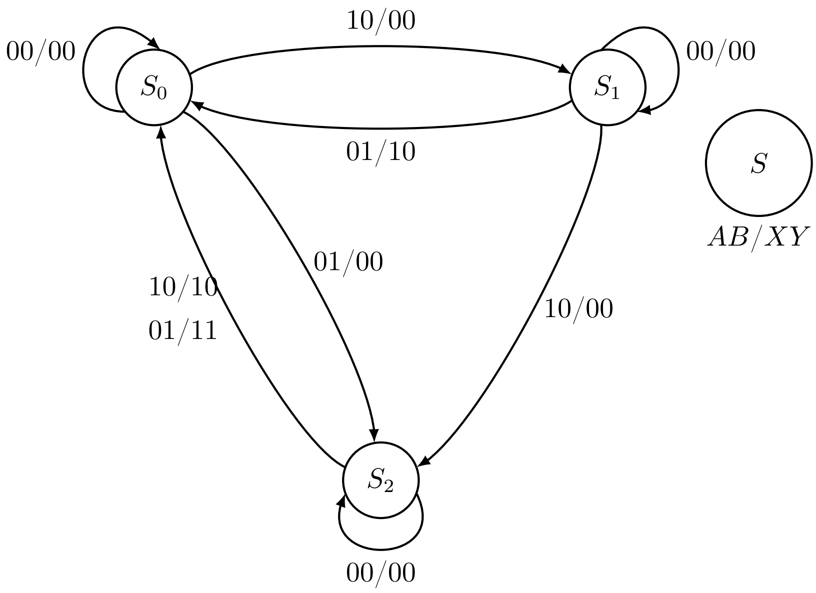
1. Q_0：无投币；
2. Q_1：共投入了五角，等待继续投币；
3. Q_2：共投入了一元，等待继续投币；

可能在一开始，会觉得投入了一元五角和两元也是状态，但实际上它们并不是可维持的状态。比如当电路处于 Q_2 状态时，一旦再投入一元，就会立刻有输出（给饮料），然后回到“无投币”的基态。因此可以直接把这种情况视作由输入 $B=1$ 导致的输出 $X=1, Y=1$，而不是一个瞬时的“投入两元”的状态。

二、状态转换图与状态编码

画状态转换图的过程，就是一个“从电路的角度思考”的过程。作为一个电路，我们以极快的频率（比如每秒 10 次）检测电路的输入，是 $AB=00$（无投币），$A=1$（投入五角）还是 $B=1$

（投入一元），然后根据自身状态决定次态和输出。我们从一个“基态”（比如 Q_0）出发，每次枚举所有可能的输入，研究它跳转到的状态以及同时给出的输出。画出如下的转换图：



这张图一旦自己绘制过一遍，就非常容易理解它的逻辑。每一次投币导致了状态变化，并决定是否产生输出。有一个值得注意的：S 和 Q 虽然都表示“状态”，但它们不是等价的。S 表示一个抽象的状态，下标表示状态的编号；Q 则是具象的，表示状态中的一个比特。比如可能有 $S_1 = Q_3Q_2Q_1Q_0 = 0001$。

接下来，把状态编码。由于只有三个状态，并且没有等价状态（也就是相同的输入会导致相同的输出和相同的次态），只要把它们顺序编码即可。我们先用最显然的 $S_0 = 00, S_1 = 01, S_2 = 10$，这用 2 个触发器即可表达。

最后，我们可以把转换图抽象成更适合逻辑分析的卡诺图。

$AB \backslash Q_1Q_0$	00	01	11	10
00	00/00	01/00	××/××	10/00
01	10/00	00/10	××/××	00/11
11	××/××	××/××	××/××	××/××
10	01/00	10/00	××/××	00/10

这样，我们就完成了逻辑抽象的步骤。

三、列出方程

再次回忆时序逻辑中的三组方程：

$$\text{输出方程：} Y = F(X, Q)$$
$$\text{驱动方程：} Z = G(X, Q)$$
$$\text{状态方程：} Q^* = H(Z, Q)$$

我们可以用和组合逻辑几乎一样的思路来得到这些方程，也就是真值表或卡诺图。由于时序逻辑往往有很多无关项（那些不可能出现的状态），卡诺图反倒更加常用。

第二节中给出的卡诺图是一张总图，同时出现了四个因变量（次态 $Q_1^*Q_0^*$ 和输出 XY），但如果要用卡诺图合并同类项，我们就只能一次处理一个变量。因此把总图拆成四张子图：

$AB \backslash Q_1Q_0$	00	01	11	10
00	0	0	×	1
01	1	0	×	0
11	×	×	×	×
10	0	1	×	0

Q_1^*

$AB \backslash Q_1Q_0$	00	01	11	10
00	0	1	×	0
01	0	0	×	0
11	×	×	×	×
10	1	0	×	0

Q_0^*

$AB \backslash Q_1Q_0$	00	01	11	10
00	0	0	×	0
01	0	1	×	1
11	×	×	×	×
10	0	0	×	1

X

$AB \backslash Q_1Q_0$	00	01	11	10
00	0	0	$\times$	0
01	0	0	$\times$	1
11	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
10	0	0	$\times$	0

Y

这样就不难得到输出方程和状态方程。

$$\begin{cases} X = Q_0B + Q_1B + Q_1A \\ Y = Q_1B \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q_1^* = Q_1'Q_0'B + Q_1A'B' + Q_0A \\ Q_0^* = Q_0A'B' + Q_1'Q_0'A \end{cases}$$

但为了确定驱动方程，表示出内部输入 Z，我们要先决定用什么触发器。最常用的是 JK 触发器和 D 触发器。前者功能更加强大，后者则在设计时更简单，但很可能最终逻辑更复杂。回忆它们的特性方程分别是:

$$Q^* = J \cdot Q' + K' \cdot Q$$

$$Q^* = D$$

其中 J, K, D 等便是内部输入。比如，如果我们选用 JK 触发器设计电路，就可以将特性方程和状态方程作比较:

$$\begin{cases} Q_1^* = Q_1'Q_0'B + Q_1A'B' + Q_0A \\ Q_0^* = Q_0A'B' + Q_1'Q_0'A \end{cases} \iff \begin{cases} Q_1^* = J_1 \cdot Q_1' + K_1' \cdot Q_1 \\ Q_0^* = J_0 \cdot Q_0' + K_0' \cdot Q_0 \end{cases}$$

我们要把 Q_i' 和 Q_i 对应的系数作为 J_i 和 K_i'。可以略微改写一下:

$$\begin{cases} Q_1^* = (Q_0'B + Q_0A)Q_1' + (A'B' + Q_0A)Q_1 \\ Q_0^* = (A'B')Q_0 + (Q_1'A)Q_0' \end{cases} \iff \begin{cases} Q_1^* = J_1 \cdot Q_1' + K_1' \cdot Q_1 \\ Q_0^* = J_0 \cdot Q_0' + K_0' \cdot Q_0 \end{cases}$$

从而得到驱动方程:

$$\begin{cases} J_1 = Q_0'B + Q_0A \\ K_1 = (A'B' + Q_0A)' = Q_0A + B \\ J_0 = Q_1'A \\ K_0 = (A'B')' = A + B \end{cases}$$

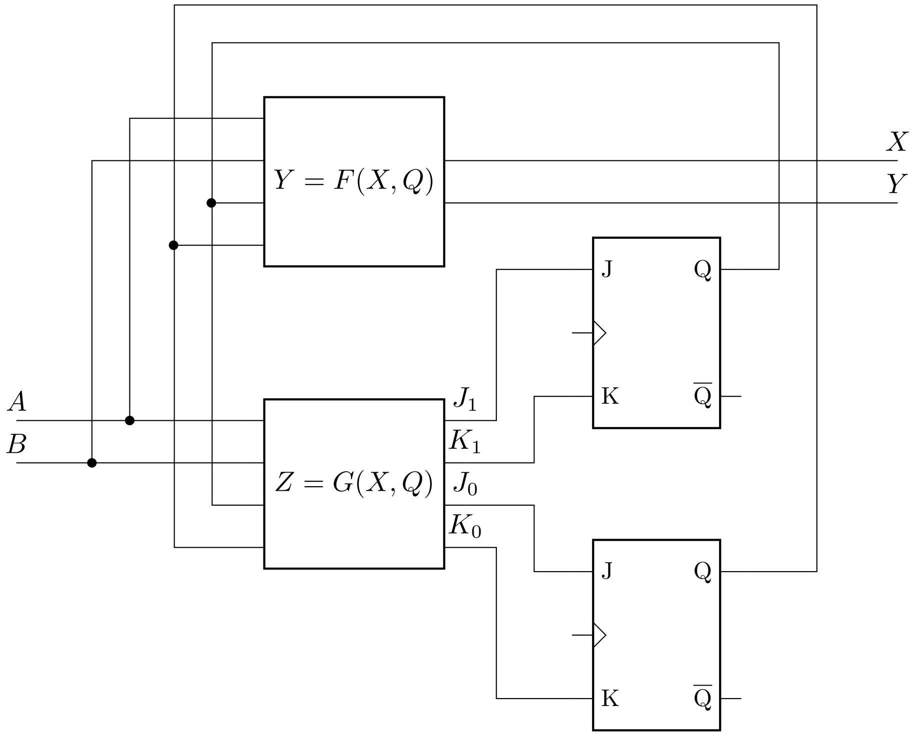
而如果选用了 D 触发器，那么由于 $Q^* = D$，只要把对应的 Q_i^* 改写成 D^* 即可:

$$\begin{cases} D_1 = Q_1'Q_0'B + Q_1A'B' + Q_0A \\ D_0 = Q_0A'B' + Q_1'Q_0'A \end{cases}$$

可以看到，JK 触发器得到的最终方程更简单。

四、画电路图

这是我们的电路图的抽象。



由于已经有了输出方程 $Y=F(X,Q)$ 和驱动方程 $Z=G(X,Q)$，分别是

$$\begin{cases} X = Q_0B + Q_1B + Q_1A \\ Y = Q_1B \end{cases} \text{和} \begin{cases} J_1 = Q_0'B + Q_0A \\ K_1 = (A'B' + Q_0A)' = Q_0A + B \\ J_0 = Q_1'A \\ K_0 = (A'B')' = A + B \end{cases},$$

可以直接把它们的方程代入，画出电路。

参考

[1] 数字电路与逻辑设计，张俊涛著，清华大学出版社 2017 版