数字电路学习笔记（四）：逻辑代数系统

JoshCena

逻辑代数系统由基本公式、常用公式、基本规则三部分构成。掌握了这些，设计出的电路可以尽可能地简单，减少故障几率和元件使用；编程时，如果掌握了逻辑函数化简，也能增加条件判断式的可读性，避免写出垃圾代码。

一、基本公式

正如加减乘除中存在各式运算律一样，逻辑运算也有运算规律。本章中，我们主要考虑与、或、非运算；异或、同或的运算律可以很方便地推导出来。我们从**常量的运算**开始。

$$
\begin{aligned}
&0+0=0, \quad 0+1=1, \quad 1+1=1 \\
&0\times 0=0, \quad 0\times 1=0, \quad 1\times 1=1 \\
&0'=1, \qquad 1'=0
\end{aligned}
$$

以上相当于把真值表重新表达了一遍，比较直观。

接下来，我们开始把式子抽象化，把其中一个常量用变量 A 代替，看看**常量与变量的运算（0 律与 1 律）**：

$$
\begin{aligned}
&0+A=A, \quad 1+A=1 \\
&0\cdot A=0, \quad 1\cdot A=A
\end{aligned}
$$

这些也很好理解，只要把常量运算公式两两合并就可以得到。时刻要提示自己：变量的值只有 0 与 1 两种情况。

最后，是变量间的运算，即**基本运算律**：

提示：在布尔运算中，运算优先级是非 > 与 > 或。

（1）交换律、结合律、分配律

这些公式基本和四则运算中的形式一样：

$$
\begin{aligned}
A+B=B+A, &\qquad A\cdot B=B\cdot A \\
(A+B)+C=A+(B+C), &\qquad (AB)\cdot C=A\cdot (BC) \\
A(B+C)=AB+AC, &\qquad A+BC=(A+B)(A+C)
\end{aligned}
$$

特别的分配律：由于在布尔运算中，与运算和或运算常常处于可以互换的地位，因此，我们也有 $A+BC=(A+B)(A+C)$。它和与对或的分配律非常接近，只是“与”和“或”调换了而已。可以证明一下公式的正确性：

$$\begin{aligned}(A+B)(A+C) &= A\cdot A+AB+AC+BC\\ &= A+AB+AC+BC\\ &= A(1+B+C)+BC\\ &= A+BC\end{aligned}$$

分别用了：与逻辑分配律；重叠律（见（3））；与逻辑分配律逆命题；1 律。

（2）还原律

$$A'' = A$$

很直观，变量两次取反后回到它本身。和语言中的“双重否定”是一个概念。

（3）重叠律

$$A+A=A,\, A\cdot A=A$$

这两个式子比较难理解一点。但毕竟，布尔运算与四则运算中的“加法”“乘法”不是完全一致的——如果写成 $A\cup A=A, A\cap A=A$，或者`A || A == A, A && A == A`，表达的意思也是一样的。在学习逻辑运算时，有许多迷惑性的符号——比如“0”与“1”，它们并不存在大小关系，而只是“真”与“假”的对应关系，与数字 0 和 1 无关。

> 一道十分有趣的题目：能否通过 $A+A=A$ 推导出 $A=0$? 不能。由于布尔运算中没有“减法”运算，因此不可以把等式两端同时减去 A。这告诉我们，虽然乍一看形式十分接近，但仍然不能被算术运算中的思维误导。

（4）互补律

$$A+A'=1,\, A\cdot A'=0$$

因为 A 与 A' 中有且只有一个为 1，因此可以回到 1 与 0 的运算上来理解。

（5）德・摩根定律

迎接逻辑学中最著名、最经典、最实用的定律：

$$(A+B)'=A'B',\, (AB)'=A'+B'$$

它如此优美，如此简洁地表明了与逻辑和或逻辑相互转化的关系。用非常数学的话说：

> 并集的补集是补集的交集，交集的补集是补集的并集

或者，用实际生活中的例子——

> 一架飞机能成功降落的前提是前后起落架均已放下，缺一不可。所以，飞机不能降落，是因为“没有既放下前起落架又放下后起落架”，或者说是“没有放下前起落架或者没有放下后起落架”。

此公式的用途之一是去括号。初学时，常常不自觉地写出 $(AB)' = A'B'$ 这样的式子。但实际上，去掉带取反的括号时，或要变与，与要变或。

还有一个用处是转换与逻辑和或逻辑。如果在电路设计中只能使用“或”和“非”两种逻辑，我们也照样能表示出与逻辑——$AB = (A' + B')'$。就比如之前提到过的，Minecraft 游戏中便只有“或”和“非”，但能够创造出所有逻辑元件，原理就在于此。

二、常用公式

以上公式都比较简单，使用时局限性也比较大。所以，我们还推导出了一系列常用公式。它们的使用频率要高得多（基础公式中的德 · 摩根定律除外）。

注意：在之前的描述中，尽量避免了出现“相加”“乘积”这样的字眼，以防造成误会；但为了叙述方便，接下来会经常出现这些词汇，它们不是一般意义上的“加法”“乘法”，请务必注意。

（1）吸收公式

$$A + AB = A$$

两项相加，且其中一项（A）是另一项（AB）的因式时，另一项中的**其他因式**就被吸收了。

证明：$A + AB = A(1 + B) = A$。先提取公因式；再运用 1 律。

这里一系列公式的表达都非常简单抽象，而实际运用时，这两项不一定会长成 A 与 AB 的样子，但哪怕是 $A(X+Y)M' + A(X+Y)(B+C'+D)M'E'F'G$ 这种庞大的式子，只要眼光毒辣，也能发现公因式，并化简成 $A(X+Y)M'$。

（2）消因子公式

$$A + A'B = A + B$$

两项相加，且其中一项（A）**取反后**是另一项（$A'B$）的因式时，另一项中的**这个相反因式**就被消去了。（不要在意“吸收”“消去”这两个词到底有什么区别，只是为了区分这两个公式而已）

证明：$A + A'B = (A + A')(A + B) = 1 \cdot (A + B) = A + B$。其中提取公因式一步比较难想到，是证明过程的重点。

要注意区分吸收公式和消因子公式：一个是相同的因式，一个是相反的因式；一个直接消去两项中较大的一项，一个仅仅去除部分因式。

（3）并项公式

$$AB + AB' = A$$

两项相加，部分因子相等（A），剩下的互补（B 与 B'），那么可以合并成一项公有因子。

证明：$AB + AB' = A(B + B') = A \cdot 1 = A$。

（4）消项公式

$$AB + A'C + BC = AB + A'C$$

这个较为复杂：三项相加，两项中部分因子互补（AB 中的 A 与 $A'C$ 中的 A'），剩下的都是第三项（BC）的因式（这两项的乘积不一定要和第三项相同，只需都是第三项的部分因式），那么第三项可以消去。

证明:

$$
\begin{aligned}
AB + A'C + BC &= AB + A'C + (A + A')BC \\
&= AB + A'C + ABC + A'BC \\
&= (AB + ABC) + (A'C + A'BC) \\
&= AB(1 + C) + A'C(1 + B) \\
&= AB + A'C
\end{aligned}
$$

这个公式使用频率不算很高，但它的证明用到了一种很有用的思想——引入冗余项，以进行进一步简化。可以看到，证明开头，逆运用并项公式，创造了一个新的项，随后和另外两项分别合并。除了这种用法，还可以利用重叠律 $A = A + A$，重复写入一项，再和其他项化简。这种方法很有用，但需要训练才能掌握。

三、基本规则

何谓基本规则？很难说清楚。但大概地讲，它描述了对等式进行恒等变形的一些方法。

（1）代入规则

将逻辑函数式中任一变量（或函数）用另一变量（或函数）替换，等式仍成立。这类似方程化简中的“换元法”思想。

如果有方程：$F(M(X,Y,Z),B,C,...) = G(M(X,Y,Z),B,C,...)$，其中 F, G, M 均表示函数，则可以设 $A = M(X,Y,Z)$，从而得到 $F(A,B,C,\ldots) = G(A,B,C,\ldots)$。

举个例子，之前提到，常用公式不仅仅局限于两到三个变量的运算，还可以拓展到更多变量，这可以用代入规则解释。以消因子公式为例：如果有 $(M+N)' + (M+N)XY$，则可以设 $A = (M+N)'$, $B = XY$，把式子变形成 $A + A'B$，然后运用公式。

（2）反演规则

再看看德・摩根定律：$(AB)' = A' + B'$, $(A+B)' = A'B'$，它可以同样通过应用代入规则，拓展到多个变量：$(ABC\ldots)' = A' + B' + C' + \ldots$, $(A + B + C + \ldots)' = A'B'C'\ldots$。

注意到，等式的左边是一系列项的积或和，并进行了取反，而等式的右边则是这个反函数的展开。由此，我们可以推导出化简一个函数的反函数——或者叫反演——的规则。这个规则就是反演规则。得到函数的反演式有两步:

- 加变乘，乘变加——对应德・摩根定律中与和或的转换，并保证运算顺序不变;
- 对每个量取反（包括变量变为反变量和 0 变 1，1 变 0），但保留非单变量的非号。

比如，$((A+B)C+0)D' \cdot 1$，先变换符号：$((AB)+C \cdot 0)+D'+1$，再对变量逐个取反：$((A'B')+C' \cdot 1)+D+0$，最后检查运算顺序，并通过添加去除括号调整：$(A'B'+C') \cdot 1+D+0$。就这样，得到了原函数的反演函数。

（3）对偶规则

这个规则便是之前提到的“与逻辑和或逻辑常常可以互换”的一个严谨定义。对偶式的得到也有两步:

- 加变乘，乘变加，保证运算顺序不变;

- 0 变 1，1 变 0。

对偶式的性质是：若两个逻辑式 $F_1 = F_2$ 成立，则它们的对偶式 $F_1^D = F_2^D$ 也成立。比如由于 $A(B+C) = AB + AC$，通过对偶变换就可以得到 $A + BC = (A+B)(A+C)$。这一套东西其实比较无聊，也没什么用，但挺神奇的。

对偶规则也是由德 · 摩根定律推导而来的，具体证明过程比较 trivial，不再赘述。其实，对偶式和反演式的本质区别就是没有了"对所有量取反"这一步。但为什么要保留"对常数取反"呢？如果没有这一步——比如，$0 + A = A$ 的对偶等式是 $1 \cdot A = A$；如果不对常数取反，就有 $0 \cdot A = A$，显然不成立。

第三、四章一开始非常难理解，总结一下公式：

- 0 律：$0 + A = A, 0 \cdot A = 0$
- 1 律：$1 + A = 1, 1 \cdot A = A$
- 交换律：$A + B = B + A, A \cdot B = B \cdot A$
- 结合律：$A + (B + C) = (A + B) + C, A \cdot (B + C) = (AB) \cdot C$
- 分配律：$A(B + C) = AB + AC, A + BC = (A + B)(A + C)$
- 还原律：$A'' = A$
- 重叠律：$A + A = A, A \cdot A = A$
- 互补律：$A + A' = 1, A \cdot A' = 0$
- 德 · 摩根定律：$(A'B') = A' + B', (A + B)' = A'B'$
- 吸收公式：$A + AB = A$
- 消因子公式：$A + A'B = A + B$
- 并项公式：$AB + AB' = A$
- 消项公式：$AB + A'C + BC = AB + A'C$

为了加深理解，可以尝试一下用公式化简这些逻辑函数式。化简要求：写成若干乘积项相加的形式，没有括号，乘积项数量最少，每个乘积项中因子最少。如果思路受阻，可以随时查看上面的公式。

1. $AB(A + BC)$
2. $A'BC(B + C')$
3. $(AB + A'B' + A'B + AB')'$
4. $(A + B + C')(A + B + C)$
5. $AC + A'BC + B'C + ABC'$
6. $ABD + AB'CD' + AC'DE + AD$
7. $(A'B + AB')C + ABC + A'B'C$
8. $A'(C'D + CD') + BC'D + ACD' + AB'C'D$
9. $(A + A'C)(A + CD + D)$[1]

参考答案:

1. AB
2. $A'BC$
3. 0
4. $A+B$
5. $AB+C$
6. $AD+AB'C$
7. C
8. $CD'+C'D$
9. $A+CD$

参考

[1] 题目来源:数字电路与逻辑设计,张俊涛著,清华大学出版社 2017 版