Matteprosjekt – TMA4101

Av Johannes Slagnes Dale og Mats Tobiasson Børgund

Kai har alltid hatt en drøm om å besøke alle verdens kontinenter helt siden han var liten. Nå var det bare verdens største ørken igjen, nemlig Antarktis. Kai er tilfeldigvis også leder i den norske nudistforeningen og vil dermed ikke bruke klær i hans ekspedisjon. Hans mednudister prøvde å fortelle han at det kom til å bli alt for kaldt, men Kai hadde tenkt på dette og valgte derfor å reise dit om sommeren. Kai visste at sommeren på Antarktis er i vintermånedene for Norge, men på grunn av alt snakket om smeltende is og global oppvarming tenkte han at en kjølig bris var alt han skulle oppleve.

Vår oppgave handler derfor om å finne ut hvor lang tid det tar for Kai å dø etter å ha satt foten på Antarktis. Dette gjør vi ved å måle temperaturen til en ytrefilet i en fryser. Kjøttstykke har starttemperatur på 39 grader (kroppstemp. Med litt feber), og fryseren har en temperatur på -18 grader (mulig temp. på Antarktis på sommeren). Vi tar dermed utgangspunkt i disse verdiene til å modellere temperaturen til kjøttstykke ved hjelp av Newtons avkjølingslov for å se hvor nøyaktig det er.

Newtons avkjølingslov sier at endringen av temperaturen til et objekt er proporsjonal med differansen mellom temperaturen til objektet og dens omgivelser. Dette er selvfølgelig helt åpenbart, som fikk oss til å lure på hvordan ingen skjønte det før Newton. Men under er utregningen i hvert fall:

$$\dot{x} = \alpha (T - x)$$

$$x = T + Ce^{-\alpha t}$$

LETT!

Vi målte innsiden av kjøttstykket (for å prøve å simulere kjernetemperatur) med varierende intervaller over en drøy time. Ettersom vi ikke kan ta forhold til diverse variabler som for eks. tykkelsen på en faktisk menneskekropp og hvordan kroppen kan divertere varme for å holde kjernetemperaturen oppe har vi valgt å definere dødelig temperatur i målingene våre som under 10 grader celsius (selvom dødelig kjernetemp. Er nærmere 20 grader. (Rowan, 2014)). Målingene som ble gjort:

Tid	Temperatur	T(kjøtt)	T(fryser)
0	39°C	39°C	-18°C
1 min	37.8°C		
2 min	36°C		
3 min	33°C		
4 min	32°C		
5 min	30°C		
6 min	29°C		
7 min	27°C		
8 min	25°C		
9 min	24°C		
10 min	23°C		
12 min	20°C		
15 min	17°C		
20 min	13°C		
25 min	7°C		
30 min	5°C		
40 min	3°C		
50 min	1°C		
60 min	0°C		

Ved hjelp av disse målingene kan vi komme fram til et faktisk uttrykk for temperaturendringen:

$x(0)=39$, $x(10)=23$ ENDA LETTERE!

$$x(t) = -18 + 57e^{\left(\frac{\ln 41 - \ln 57}{-10}\right)t}$$

$\boxed{\text{Newtons Avkjølingslov}}$: $\dot{x}(t) = \alpha(T - x(t))$

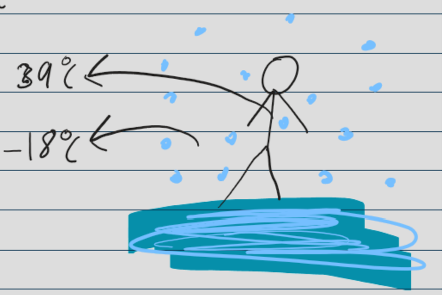
$\dot{x}(t) + \alpha x(t) = \alpha T \mid \cdot e^{\alpha t}$

$\Rightarrow \dot{x}(t)\cdot e^{\alpha t} + \alpha e^{\alpha t} x(t) = \alpha T e^{\alpha t}$ $\rightarrow T\int \alpha e^{\alpha t} dt$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(x(t)e^{\alpha t}\right) = \int \alpha T e^{\alpha t} dt$

$\Rightarrow x(t)e^{\alpha t} = Te^{\alpha t} + c \mid \cdot e^{-\alpha t}$

$\Rightarrow \boxed{x(t) = T + ce^{-\alpha t}}$



$x(0) = 39,\ x(10) = 23$

$\rightarrow -18 + c\cdot e^{-\alpha\cdot 0} = 39,\ c = 39 + 18 = 57$

$\rightarrow -18 + 57\cdot e^{-\alpha\cdot 10} = 23$

$\Rightarrow 57\cdot e^{-10\alpha} = 41$

$\Rightarrow e^{-10\alpha} = \frac{41}{57} \Rightarrow \ln e^{-10\alpha} = \ln\frac{41}{57}$

$\Rightarrow -10\alpha = \ln 41 - \ln 57$

$\Rightarrow \alpha = \frac{\ln 41 - \ln 57}{-10} \approx 0{,}032947$

$\boxed{x(t) = -18 + 57e^{-0{,}032947t}}$

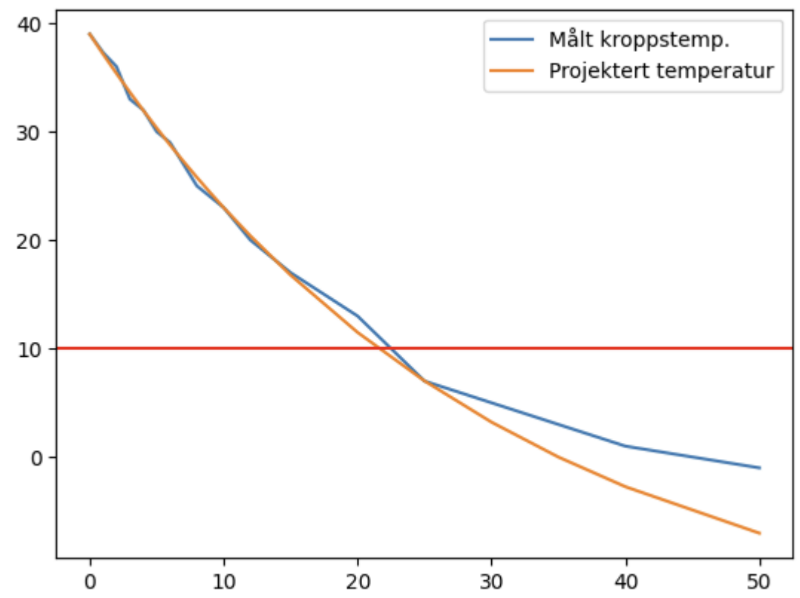
Her er de faktiske utregningene ;)

Å modellere forskjellen mellom de faktiske målingene og den antatte utviklingen med bakgrunn i Newtons avkjølingslov er også ganske simpelt:

```python

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

x = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 50]
y1 = [39, 37.3, 36, 33, 32, 30, 29, 27, 25, 24, 23, 20, 17, 13, 7, 5, 3, 1, -1]
y2 = -18 + 57*np.e**(-0.032947*np.array(x))

plt.plot(x, y1, label= "Målt kroppstemp.")
plt.plot(x, y2, label= "Projektert temperatur")
plt.axhline(y = 10, color = 'r')
plt.legend()
plt.show()
```

1. Vi importerer bibliotekene numpy, og pyplot fra matplotlib.
2. Vi definerer x som en liste med x-verdier for tidspunktene vi målte temperaturen.
3. Y1 blir definert som en liste av alle verdiene for kroppstemperatur som vi målte.
4. Y2 er uttrykket vi fant ved hjelp av Newtons avkjølingslov i henhold til listen x som en array.
5. Det siste vi gjør er å plotte y1 i forhold til x og y2 i forhold til x, samt. plotte en "dødslinje".

Outputen fra kodingen ble dette:



Som man kan se er den målte temperaturendringen og den antatte utviklingen i forhold til Newtons avkjølingslov veldig lik. Grafene for en litt større differanse mot slutten, men dette kommer nok av at vi målte i større grad innsiden av kjøttstykket i motsetning til overflatetemperaturen som Newtons avkjølingslov er mest tilpasset til, samtidig som temperaturen i fryseren ikke vil være stabil.

Ifølge våre målinger, vil Kai krepere etter ca. 23 minutter og etter ca. 22 minutter i henhold til Newtons avkjølingslov. Det var dermed en svært kortvarig ekspedisjon for Kai, men han fikk hvert fall dø etter å ha oppfylt drømmen sin.

Det er mange begrensninger som gjør at dette forsøket ikke vil kunne reflektere virkeligheten. Hovedgrunnen til dette er som nevnt funksjonaliteten til kroppen. For å kunne leve lengst mulig vil kroppen bruke mer energi for å holde livsviktige organer varme som vil si at hele kroppen ikke vil ha samme temperatur. Vi har ikke en måte å implementere dette inn i kjøttstykket vi måler på, samtidig som vi ikke ønsker å eksperimentere på et faktisk menneske. En annen begrensning for forsøket vårt er hvordan temperaturen i fryseren vil variere i mye større grad enn en faktisk lufttemperatur. Temperaturen i fryseren vil bli påvirket av temperaturen til kjøttstykket samtidig som temperaturen til rommet når fryseren blir åpnet for å gjennomføre målingene. Dette gjør at fryseren ikke vil holde en konstant temperatur på -18 grader, og vil dermed være en faktor i hvorfor det blir en voksende differanse mellom modellene.

Konklusjonen vi har tatt fra dette forsøket er at Newtons avkjølingslov kan fungere godt til å modellere temperaturendringen til et objekt gitt at temperaturen til objektet og omgivelsene er kjent. For å få best resultater må temperaturen til omgivelsene være stabil, og målingene bør gjennomføres på overflaten av objektet. Vi har også konkludert at å dra på ekspedisjon til Antarktis bør gjøres med klær på kroppen.

Rowan, K. (2014). Polar Vortex: Can a Person Freeze to Death? *nbcnews,* https://www.nbcnews.com/id/wbna54005645