Relación Tema 2

2. Sea $X \neq \emptyset$

V es un $V(K)$

$F(X,V)$ conjunto de las aplicaciones $f: X \to V$. Se definen la suma y producto en $F(X,V)$ así:

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) \quad \forall x \in X, \ \forall f,g \in F(X,V)$$
$$(a \cdot f)(x) = a \cdot f(x) \quad \forall x \in X, \ \forall a \in K, \forall f \in F(X,V)$$

1°) $\forall f,g,h \in F(X,V)$

¿$(f+g)+h = f+(g+h)$?

$\forall x \in X \quad ((f+g)+h)(x) = (f+g)(x)+h(x) = (f(x)+g(x))+h(x) =$
$f(x)+(g(x)+h(x)) = f(x)+(g+h)(x) = (f+(g+h))(x)$

Son elementos de V, donde la suma es asociativa

$\checkmark \Rightarrow$ La suma es asociativa

2°) $\forall f,g \in F(X,V)$

¿$f+g = g+f$?

La suma en V es conmutativa

Sea $x \in X \quad (f+g)(x) = f(x)+g(x) = g(x)+f(x) = (g+f)(x)$

$\checkmark \Rightarrow$ La suma es conmutativa

3°) Elemento neutro

$0: X \to V \quad \forall x \in X \quad 0(x) = 0 \in V$

$\forall x \in X \quad (0+f)(x) = 0(x)+f(x) = 0+f(x) = f(x) \quad 0+f = \ = f+0$

4°) Existencia opuestos

$\forall f \in F(X,V)$ Definimos $-f: X \to V \quad (-f)(x) = -f(x) \in V \quad \forall x \in X$

$\forall x \in X \quad (f+(-f))(x) = f(x)+(-f)(x) = f(x)-f(x) = 0 = 0(x) \Rightarrow f+(-f) = 0$
$\qquad (-f)+f = 0$

$(F(X,V),+) \Rightarrow$ Grupo abeliano

5°) $\forall a,b \in K$ ¿$(a+b)f = af+bf$? ✓
$\forall f \in F(X,V)$

Sea $x \in X$, $((a+b)f)(x) = \underbrace{(a+b)}_{\Uparrow K} \cdot \underbrace{f(x)}_{\Uparrow V} = af(x)+bf(x) = (a\cdot f)(x)+(b\cdot f)(x)$

$= (a\cdot f + b\cdot f)(x)$

6°) $\forall a \in K$ ¿$a\cdot(f+g) = af+ag$? ✓
$\forall f,g \in F(X,V)$

$\forall x \in X$ $(a\cdot(f+g))(x) = a\cdot(f+g)(x) = a(\underbrace{f(x)+g(x)}_{\Uparrow}) = af(x)+ag(x) =$

$= (a\cdot f)(x)+(a\cdot g)(x) = (a\cdot f + a\cdot g)(x)$

7°) $\forall a,b \in K$ ¿$a\cdot(b\cdot f) = (a\cdot b)\cdot f$? → Se cumple la pseudoasocia. porque $f(x) \in V$
$\forall f \in F(X,V)$

$\forall x \in X$ $(a\cdot(b\cdot f))(x) = a\cdot(b\cdot f)(x) = a\cdot b\cdot f(x)) = (a\cdot b)\cdot f(x) =$

$= ((a\cdot b)\cdot f)(x)$

8°) $\forall f \in F(X,V)$ ¿$1\cdot f = f$? ✓
$(1\cdot f)(x) = 1\cdot f(x) = f(x)$

4. Estudiar si U es subespacio vectorial de V en este caso:

i) $V = \mathbb{R}^3$ $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z \geq 0\}$

$(0,0,1) \in U$ $0+0+1 \geq 0$

$(-1)(0,0,1) = (0,0,-1) \in U$?? $0+0-1 = -1 < 0$

3. b) U_i subespacio de V_i para cada $i=1,2$. Demostrar que $U_1 \times U_2$ es subespacio de $V_1 \times V_2$.

$\forall a,b \in K$
$\forall (u_1,u_2),(w_1,w_2) \in U_1 \times V_2$
$u_1,w_1 \in U_1$ $u_2,w_2 \in U_2$

$a(u_1,u_2)+b(w_1,w_2) =$
$(\underbrace{au_1+bw_1}_{\Uparrow U_1}, \underbrace{au_2+bw_2}_{\Uparrow U_2})$

Por lo tanto es subespacio

¿Es todo subespacio de $V_1 \times V_2$ de la forma $U_1 \times U_2$ donde cada U_i es subespacio de V_i?

$p: V_1 \times V_2 \to V_1$ $q: V_1 \times V_2 \to V_2$
$p(v_1,v_2) = v_1$ $q(v_1,v_2) = v_2$

Sea U un subespacio de $V_1 \times V_2$

$p(U) = \{v \in V_1 / \forall v_2 \in V_2 \ (v,v_2) \in U\}$

Escaneado con CamScanner

$q(U) = \{w \in V_2 / \forall v_1 \in V_1 \ (v_1, w) \in U\}$

$u_1, v_1 \in p(U) \quad a, b \in K \quad au_1 + bv_1 \quad (au_1+bv_1, v_2) = a(u_1, v_2) + b(v_1, 0) \in U$

$au_1 + bv_1 \in p(U)$ s.v. de V_1

$q(U)$ s.v. de V_2

Entonces, $p(U) \times q(U) = \{(v,w) / (v,w) \in U\}$

$p(U) \times q(U) = U$

Cualquier subespacio se puede escribir como producto cartesiano.

10. $V = F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Analizar si $S = \{f, g, h\}$ es L.I. donde $f(x) = x^2+1$, $g(x) = 2x$ y $h(x) = e^x$.

$a, b, c \in \mathbb{R} \quad a \cdot f(x) + b \cdot g(x) + c \cdot h(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$x = 0 \quad a + c = 0$

$x = 1 \quad 2a + 2b + ec = 0$

$x = \frac{1}{2} \quad \frac{5}{4}a + b + \sqrt{e} \cdot c = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & e \\ \frac{5}{4} & 1 & \sqrt{e} \end{vmatrix} = 2\sqrt{e} + 2 - \frac{5}{2} - e = 2\sqrt{e} - e - \frac{1}{2} \neq 0$$

$a = b = c = 0 \Rightarrow$ Son L.I.

5. ¿Es $v \in L(S)$? Si pertenece, expresar como combinación lineal.

e) $V = \mathbb{R}[x] \quad v = x^2 + x + 1, \ S = \{-x, x^2+1, x^3\}$

$v = (-1)(-x) + 1 \cdot (x^2+1) + 0 \cdot x^3 = x^2 + x + 1$

Si pertenece

11. V espacio vect. ~~inf~~. Tomemos $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ y $\{a_1, \dots, a_n\}$ una familia en K con $a_i \neq 0$. Demostrar que $B' = \{a_1 \cdot v_1, \dots, a_n v_n\}$ es una base de V. Concluir que V tiene infinitas bases.

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & a_3 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \ a_n \end{pmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0 \quad B' \text{ es lin. ind.}$$

B' es otra base de V

9. $U_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x-y=0, z-t=0\}$

$U_2 = \mathcal{L}(\{(0,1,1,0)\})$

$U_3 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x-y+z-t=0\}$

$\dim_{\mathbb{R}}(U_1)=2 \quad \dim_{\mathbb{R}}(U_2)=1 \quad \dim_{\mathbb{R}}(U_3)=3$

¿$U_1+U_2=U_3$? ¿$U_3=U_1 \oplus U_2$? Estamos suponiendo la primera pregunta como afirmativa

$U_1 \cap U_2 = \{0\}$

$$\dim_{\mathbb{R}}(U_1+U_2) = \underset{3}{\dim_{\mathbb{R}}(U_3)} + \underset{0}{\dim_{\mathbb{R}}(U_1 \cap U_2)} = \underset{2}{\dim_{\mathbb{R}}(U_1)} + \underset{1}{\dim_{\mathbb{R}}(U_2)}$$

Base de U_1

$\{(1,1,0,0),(0,0,1,1)\}$ S. g. de $U_1+U_2 = \{(0,1,1,0),(1,1,0,0),(0,0,1,1)\}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow$$ Entonces es una base, por lo que $\dim(U_1+U_2)=3$

$U_1+U_2 \subset U_3 \Rightarrow$ Como los dos tienen la misma dimensión se da la igualdad.

Hay que ver que los tres vectores cumplen que $x-y+z-t=0$

Se cumple, por lo que $U_1+U_2 \subset U_3$

14. $S=\{v_1,\dots,v_m\}$

V es espacio vectorial

a) Si S es s.g. y al eliminar cualquier vector no es s.g., entonces es base.

Sea $c_1v_1+c_2v_2+\dots+c_mv_m=0$ (Supongamos que son L.D)

Si algún $c_i \neq 0$ $(c_1 \neq 0)$

$$v_1 = -c_1^{-1}c_2v_2 - \dots - c_1^{-1}c_mv_m$$

$\forall v \in V \; \exists d_1,d_2,\dots,d_m \in K \mid v = d_1v_1+\dots+d_mv_n =$

$= -d_1c_1^{-1}c_2v_2 - \dots - d_1c_1^{-1}c_mv_m + d_2v_2+\dots+d_mv_m =$

$= (d_2-d_1c_1^{-1}c_2)v_2 + (d_3-d_1c_1^{-1}c_3)v_3 + \dots + (d_m-d_1c_1^{-1}c_m)v_m$

$\Rightarrow \{v_2,v_3,\dots v_m\}$ es s.g. de V

b) Si S es L.I. y al añadir un vector es L.D, entonces S es base de V

Si S no es un s.g. de V:

$\exists w \in V / w$ no es combinación lineal de $\{v_1, \dots, v_m\}$

Entonces $\{w, v_1, \dots, v_m\}$ es L.I.

$aw + a_1v_1 + \dots + a_mv_m = 0$

Si $a=0 \Rightarrow a_1 = \dots = a_m = 0$

Si $a \neq 0$ $\exists a^{-1}$ $w = -a^{-1}a_1v_1 - \dots - a^{-1}a_mv_m$ contrad.

13. V es un espacio vectorial complejo $\dim_{\mathbb{C}}(V)=n$. Demostrar que V es un espacio vectorial real con $\dim_{\mathbb{R}}(V)=2n$

Si $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es base de $V(\mathbb{C})$

$\forall v \in V \; \exists z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C} / v = z_1v_1 + z_2v_2 + \dots + z_nv_n$

$\forall j \in \{1, \dots, n\}$ $z_j = a_j + b_j i$ $a_j, b_j \in \mathbb{R}$

$v = (a_1+ib_1)v_1 + (a_2+ib_2)v_2 + \dots + (a_n+ib_n)v_n =$
$= a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n + b_1(iv_1) + b_2(iv_2) + \dots + b_n(iv_n)$

$\Rightarrow \{v_1, v_2, \dots, v_n, iv_1, iv_2, \dots, iv_n\}$ es sist. de gen. de $V(\mathbb{R})$

$\hookrightarrow$ Veamos que es L.I. Supongamos que $\exists d_1, d_2, \dots, d_n, e_1, e_2, \dots, e_n \in \mathbb{R} / d_1v_1 + d_2v_2 + \dots + d_nv_n + e_1(iv_1) + e_2(iv_2) + \dots + e_n(iv_n) = 0$

$(d_1+ie_1)v_1 + (d_2+ie_2)v_2 + \dots + (d_n+ie_n)v_n = 0$

Como $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ son L.I, entonces:

$d_1+ie_1 = d_2+ie_2 = \dots = d_n+ie_n = 0 \Rightarrow d_n = e_n$

Por lo tanto es una base de $V(\mathbb{R})$

La respuesta al 26a por esto es NO.

22. $P^2(\mathbb{R})$ $B = \{1, 1+x, 1+x^2+x\}$ $B' = \{1, x, x^2\}$

¿Relación coordenadas de un polinomio en la base B con respecto con las de la base B'?

$p(x) = (a_1, b_1, c_1)_B$ $p(x) = (a_1', b_1', c_1')_{B'}$

$p(x) = a_1 \cdot 1 + b_1(1+x) + c_1(1+x+x^2) = \underline{(a_1+b_1+c_1) + (b_1+c_1)x + c_1x^2}$

$a_1' \cdot 1 + b_1'x + c_1'x^2 \Rightarrow$
$a_1' = a_1+b_1+c_1$
$b_1' = b_1+c_1$
$c_1' = c_1$

Encontrar un $p(x)$ tal que $p(x)_B = (1,-2,4)_B$

$p(x) = 1\cdot 1 - 2\cdot(1+x) + 4(1+x+x^2) = 4x^2 + 2x + 3$

6. $V(K)$

c) Si $U_i = \mathcal{L}(S_i)$ para cada $i=1,\dots,m$. ¿Es cierto que

$\bigcap_{i=1}^{m} U_i = \mathcal{L}(\bigcap_{i=1}^{m} S_i)$?

$i=2$

$U_1 = \mathcal{L}(S_1)$ $\quad U_1 \cap U_2 = \mathcal{L}(S_1 \cap S_2)$

$U_2 = \mathcal{L}(S_2)$

$\mathcal{L}(S_1 \cap S_2) = \{x = x_1 t_1 + \dots + x_n t_n \mid x_1,\dots,x_n \in K \mid t_1,\dots,t_n \in S_1 \cap S_2\}$

$U_1 \cap U_2 = \{x \in U_1 \cap U_2\} = \left\{\begin{matrix} x = y_1 v_1 + \dots y_k v_k \text{ con } v_1,\dots,v_k \in S_1 \\ x = z_1 w_1 + \dots z_\ell w_\ell \text{ con } w_1,\dots,w_\ell \in S_2 \end{matrix}\right\}$

$\left.\begin{matrix} t_1,\dots,t_n \in S_1 \quad x \in U_1 \\ t_1,\dots,t_n \in S_2 \quad x \in U_2 \end{matrix}\right\} \mathcal{L}(S_1 \cap S_2) \subset U_1 \cap U_2$

NO

8. a) $V = \mathbb{R}^3$ $\quad U_1 = \mathcal{L}(\{(1,0,-1),(0,1,-1)\})$ $\quad \dim_{\mathbb{R}}(U_1) = 2$

$U_2 = \mathcal{L}\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z=0\}$ $\quad \dim_{\mathbb{R}}(U_2) = 2$

$v = u_1 + u_2$ $\quad v \in \mathbb{R}^3$ $\quad u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$

Base de $U_2 = \{(1,0,0),(0,1,0)\}$

Base de $U_1 = \{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$

$U_1 + U_2 = \mathcal{L}(\{\underbrace{(1,0,0),(0,1,0),(1,0,-1)}_{\text{Son L.I.}}, \cancel{(0,1,-1)}\}) = \mathbb{R}^3$

$U_1 \cap U_2 =$

$\dim_{\mathbb{R}}(U_1+U_2) + \underbrace{\dim_{\mathbb{R}}(U_1 \cap U_2)} = \dim_{\mathbb{R}}(U_1) + \dim_{\mathbb{R}}(U_2)$

$\dim_{\mathbb{R}}(U_1 \cap U_2) = 1 \Rightarrow \mathbb{R}^3$ no es $U_1 \oplus U_2$

Cada vector $v \in \mathbb{R}^3$

$v = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(1,0,-1) = (a,b,0) + (c,0,-c) =$

$v = a(1,0,0) + b(0,1,0) + [c(1,0,-1) + d(0,1,-1)]$ $\quad (x_1,x_2,x_3)$

$(a,b,0) = (-c,-d,c+d)$

$\left.\begin{matrix} c=-a \\ d=-b \\ -a-b=0 \end{matrix}\right\}$ $\begin{matrix} b=-a \\ c=-a \\ d=a \end{matrix}$ $\quad \forall k \in \mathbb{R}$ $\quad (k,-k,0)$ $\quad (k,-k,0)$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \cap U_1$

Escaneado con CamScanner

Ver qué soluciones tengo para el sistema:

$$\begin{aligned} a+c &= x_1 \\ b+d &= x_2 \\ -c-d &= x_3 \end{aligned} \qquad \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0 \quad rg(A)=3$$

Es un S.C.I.:

$$\left.\begin{aligned} a+c &= x_1 \\ b &= x_2-d \\ -c &= x_3+d \end{aligned}\right\} \text{ Sol. } \left\{\begin{aligned} b &= x_2-d \\ a &= x_1+x_3+d \\ c &= -x_3-d \end{aligned}\right.$$

$$\boxed{\begin{aligned} d &= 0 \\ c &= -x_3 \\ b &= x_2 \\ a &= x_1+x_3 \end{aligned}} \qquad \underbrace{(x_1+x_3, x_2, 0)}_{\in U_1} + \underbrace{(-x_3, 0, x_3)}_{\in U_2} = (x_1, x_2, x_3)$$

$$\boxed{\begin{aligned} d &= 1 \\ c &= -x_3-1 \\ b &= x_2-1 \\ a &= x_3+x_1+1 \end{aligned}} \qquad (x_1+x_3+1, x_2-1, 0) + (-x_3-1, 0, x_3+1) + (0,1,-1) = (x_1, x_2, x_3)$$

Tenemos infinitas sumas posibles

c) $V = \mathbb{R}_n[x] = P^n(\mathbb{R})$ $\qquad U_1 = \{p(x) \mid p(1)+p'(1)=0\}$

$\dim_{\mathbb{R}}(V) = n+1$ $\qquad U_2 = \{p(x) \mid p(0)+p''(0)=0\}$

$¿V = U_1 \oplus U_2?$

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$$

$$p(1) = a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$p'(x) = a_1 + 2a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2}$$

$$p'(1) = a_1 + 2a_2 + \dots + n a_n + (n-1)a_{n-1}$$

$$a_0 + 2a_1 + 3a_2 + \dots + n a_{n-1} + (n+1)a_n = 0 \} \text{ ec. impl. de } U_1$$

$\dim_{\mathbb{R}}(U_1) = n \quad \dim_{\mathbb{R}}(U_2) = n$

$$\dim_{\mathbb{R}}(U_1+U_2) + \dim_{\mathbb{R}}(U_1 \cap U_2) = 2n$$

$$\dim_{\mathbb{R}}(U_1 \cap U_2) \geq 2n-n-1 = n-1$$

Si $n=1$ esa dim. puede ser 0, si $n \geq 2$ $\dim_{\mathbb{R}}(U_1 \cap U_2) \geq 1$

Si $n \geq 2$ $\dim_{\mathbb{R}}(U_1 \cap U_2) \geq 1$

$U_1 = \mathcal{L}(\{-2+x\}) \quad U_2 = \mathcal{L}(\{x\})$

$U_1 + U_2 = \mathcal{L}(\{-2+x, x\})$

b) $F(\mathbb{R},\mathbb{R})=V \quad U_1=\{f\in V \mid f(-x)=f(x) \ \forall x\in\mathbb{R}\}$

$U_2=\{f\in V \mid f(-x)=-f(x) \ \forall x\in\mathbb{R}\}$

$\forall a,b\in\mathbb{R} \ \forall f,g\in U_1$ ¿$af+bg\in U_1$?

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ | $(af+bg)(x)=af(x)+bg(x)=af(-x)+bg(-x)$

$(kg)(x)=kg(x)$ | $\forall x\in\mathbb{R} \quad =(af+bg)(-x)$

U_1 es subespacio ✓

$\forall a,b\in\mathbb{R} \ \forall f,g\in U_2$ ¿$af+bg\in U_2$?

$\forall x\in\mathbb{R}$

$(af+bg)(-x)=af(-x)+bg(-x)=$

$=-af(x)-bg(x)=-(af+bg)(x)$

$=af+bg\in U_2$ ✓

U_2 es subespacio ✓

¿$V=U_1\oplus U_2$? $\exists_1 g\in U_1 \ \exists_1 h\in U_2 \ \forall f\in V$

$f=g+h$

$\forall x\in X \quad g:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \quad g(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$

$h:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \quad h(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$

$g(-x)=\dfrac{f(-x)+f(x)}{2}=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}=g(x)\Rightarrow g\in U_1$

$h(-x)=\dfrac{f(-x)-f(x)}{2}=-\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}=-h(x)\Rightarrow h\in U_2$

$(g+h)(x)=g(x)+h(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}+\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}=\dfrac{2f(x)}{2}=f(x)$

$\boxed{g+h=f}$

Sea $\ell\in U_1\cap U_2$

$\ell\in U_1\Rightarrow \ell(-x)=\ell(x)$

$\ell\in U_2\Rightarrow \ell(-x)=-\ell(x)\Leftrightarrow -\ell(-x)=\ell(x) \quad (2)$ } Se suman

$\Downarrow$

$2\ell(x)=0$

$\ell(x)=0 \ \forall x\in\mathbb{R}$

$\ell=f_0$: neutro para $F(\mathbb{R},\mathbb{R})=V \quad U_1\cap U_2=\{f_0\}\Rightarrow V=U_1\oplus U_2$

9.

$U_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-y=0,\ z-t=0\}$

$U_2 = \mathcal{L}((0,1,1,0))$

$U_3 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-y+z-t=0\}$

¿ $U_1 + U_2 = U_3$? ¿ $U_3 = U_1 \oplus U_2$?

$\dim_{\mathbb{R}}(U_1) = 2$

Base de $U_1 = \{(1,1,0,0),(0,0,1,1)\}$

$U_2 = \mathcal{L}(\{(0,1,1,0)\})$ $\quad \dim_{\mathbb{R}}(U_2) = 1$

$\dim_{\mathbb{R}}(U_3) = 3$

Base de $U_3 = \{(1,1,0,0),(1,0,-1,0),(1,0,0,1)\}$

$\boxed{U_1 + U_2 = U_3}$

$U_1 + U_2 = \mathcal{L}(\{(1,1,0,0),(0,0,1,1),(0,1,1,0)\})$

Vemos si son L.I. y lo son: $\dim_{\mathbb{R}}(U_1+U_2) = 3$

$U_1 + U_2 \subset U_3$

$U_1 + U_2 = U_3$

$\left.\begin{array}{l} U_1 \cap U_2 = \{0\} \\ U_1 + U_2 = U_3 \end{array}\right\} U_3 = U_1 \oplus U_2$

20. K cuerpo. S es una familia de K que no contiene 2 pol. con el mismo grado.

S es L.I $\Leftrightarrow$ $A \subseteq S$ es L.I.

Sea $\{p_0(x), p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)\} \subset S$

$\text{grado}(p_i(x)) \neq \text{grado}(p_j(x)) \quad \forall i, j \in \{0, \dots, n\}$

Sea $K = \text{máx}\{\text{grado } p_i(x)\}$

Sup. $a_0 p_0(x) + a_1 p_1(x_1) + \dots + a_n p_n(x) = 0$

Supong. que $\underbrace{\text{grado } p_0(x)}_{K} = b_0 + b_1 x + \dots + b_k x^k \quad b_k \neq 0$

$a_0 b_0 + a_0 b_1 x + \dots + a_0 b_k x^k + a_1(p_1(x) + \dots + a_n p_n(x)) = 0$

$a_0 b_k = 0 \Rightarrow a_0 = 0$

$a_1 p_1(x) + \dots + a_n p_n(x) = 0$

Sea $\ell = \underset{1 \le j \le n}{\text{máx}} \text{ grad}(p_j(x))$ Supong. $\text{grado}(p_1(x)) = \ell$

$p_1(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_\ell x^\ell \quad c_\ell \neq 0$

$a_1 c_0 + a_1 c_1 x + \dots + a_1 c_\ell x^\ell + a_2 p_2(x) + \dots + a_n p_n(x) = 0$

$a_1 c_\ell = 0 \Rightarrow a_1 = 0$

Si sigo repitiendo el proceso y tengo un número finito de polinomios llegamos a que $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$