Tests Álgebra

AXIOMÁTICA

Pregunta 2

Si $A \subseteq B$ entonces: $P(A) \subseteq P(B) \Rightarrow$ Está claro

Pregunta 3

Si $x \in A$... Las otras dos opciones son falsas.

Contraejemplo

$A = \{\underbrace{\{1,2\}}_{x},3,4\}$ $\quad P(A) = \{\emptyset, \{1,2\}, \{3\}, \{4\}, \{\{1,2\},3\}, \{\{1,2\},4\}, \{3,4\}, \{\{1,2\},3,4\}\}$

$\Downarrow$

$P(x) = \{\emptyset, 1, 2, \{1,2\}\} \Rightarrow$ Está claro que no se cumple que $P(x) \in P(A)$ ni que $P(x) \subseteq P(A)$

Pregunta 4

$A = \{x,y\}$ $\quad P(A) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x,y\}\}$

De ahí se deduce que $\{x\} \in P(A)$

Pregunta 5

Si P es falsa y Q es falsa entonces $\neg(P \vee Q)$ es cierta.
Se deduce al razonarlo como conjuntos:

$\overline{P \cup Q} = \overline{P} \cap \overline{Q}$ $\quad$ Como $\overline{P}$ y $\overline{Q}$ son verdaderos, se deduce la respuesta.

Pregunta 6

$A = \{x,y\}$

Ninguna de las respuestas anteriores es correcta. Contraejemplo:

- Si $z \subseteq x \Rightarrow z \subseteq A$ NO pues $x = \{1,2\}$, $z = \{1\}$ y $A = \{\{1,2\},3$
  Está claro que z no está contenido en A.
- Si $z \in x \Rightarrow z \in A$ NO pues $x = \{1,2\}$ y $z = 1$ y $A = \{\{1,2\},3\}$.
  Está claro que $z \notin A$.

Pregunta 7

$X = \{\{1,2,4\},5,7\}$, $A = \{4,2,1\}$, $B = \{1,2,4\}$

Se cumple que $A \in X$, $B \in X$ y $A = B$.

Pregunta 8

$X=\{1,2,4,5,7\}$, $A=\{4,2,1\}$, $B=\{1,2,4\}$

Se cumple que $A\subseteq X$, $B\subseteq X$ y $A=B$.

Pregunta 9

El conjunto $\{\{\emptyset\}\}$

Tiene un elemento que no es el vacío.

Pregunta 10

$X=\{a,b\}$

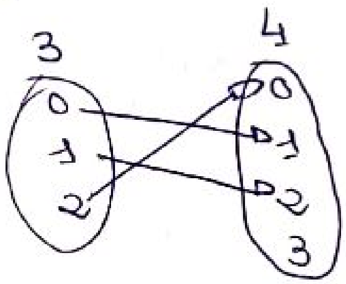
Está claro que $a\in X$.

PRODUCTO CARTESIANO Y APLICACIONES

Pregunta 1

$3=\{0,1,2\}$ $4=\{0,1,2,3\}$ $G=\{(0,1),(1,2),(2,0)\}$

G No puede ser la gráfica de una aplicación de 4 en 3 ya que faltaría la imagen de 3. Sí puede serlo de 3 en 4:



Es inyectiva pues $\forall x,y\in 3$ con $x\neq y$ se cumple que $f(x)\neq f(y)$.

No es sobreyectiva ya que $4\notin \mathrm{Im} f$ y $\mathrm{Im} f\subseteq 4$.

Pregunta 2

$f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Z}$ con $f\left(\frac{n}{m}\right):=n$

No está bien definida ya que $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$ son el mismo racional y $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$, $f\left(\frac{2}{4}\right)=2$. Cada elemento del dominio debe tener una única imagen, pero no es el caso.

Pregunta 3

$f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ $f(m)=m^2-1$ $Par\subseteq\mathbb{Z}$ $Neg\subseteq\mathbb{Z}$

¿Qué ocurre con el 3?

$$\left.\begin{array}{l} f_*(Neg)=\{0,3,8,15,\dots\} \\ f^*f_*(Neg)=\{\dots,-4,-3,-2,-1,1,2,3,4,\dots\}\end{array}\right\} 3\in f^*f_*(Neg)$$

$f^*(Par) = \{\dots,-5,-3,3,5,\dots\} \Rightarrow 3 \in f^*(Par)$

Por lo tanto, concluimos que $3 \in f^* f_*(Neg) \cap f^*(Par)$

Pregunta 4

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \quad f(n) = \dfrac{n(n-1)}{2}$

Está claro que está bien definida. No es sobreyectiva ya que $f(0)=0,\ f(1)=0,\ \underbrace{f(2)=1,\ \underbrace{f(3)=3}_{\text{Aquí falta la imagen 2}},\ f(4)=6}_{\text{Aquí faltan el 4 y 5 como imagen}}$

No es sobreyectiva

Pregunta 5

$3 = \{0,1,2\} \quad G = \{(0,1),(0,2),(1,2),(2,1)\}$

No puede ser la gráfica de una aplicación de 3 en 3 ya que el 0 no puede tener dos imágenes distintas.

Pregunta 6

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \quad f(m) := m^2 \quad Par \subseteq \mathbb{Z} \quad Neg \subseteq \mathbb{Z}$

¿Qué ocurre con el 4?

$\left.\begin{array}{l} f_*(Neg) = \{1,4,9,16,\dots\} \\ f^*(Par) = \{2,4,6,8,\dots\} \end{array}\right\} \Rightarrow 4 \in f_*(Neg) \cap f^*(Par)$

Pregunta 7

$f: \mathbb{Z} \to \{0,1,2\} \quad f(n) := \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es múltiplo de } 3 \\ 1 & \text{si } n-1 \text{ es múltiplo de } 3 \\ 2 & \text{si } n-2 \text{ es múltiplo de } 3 \end{cases}$

$f_*(\mathbb{N}) = \{0,1,2\}$

$f^* f_*(\mathbb{N}) = \{\dots,-2,-1,3,4,5,\dots\}$

b) $f^* f_*(\mathbb{N})$ no es ni $\mathbb{Z}$ ni $\mathbb{N}$

Pregunta 8

$f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \to \mathbb{Q} \quad f(n,m) := \dfrac{n}{m}$

¿Es inyectiva? $\Rightarrow$ NO pues $f(2,1) = \frac{2}{1} = f(4,2) = \frac{4}{2}$.

¿Es sobreyectiva $\Rightarrow$ Está claro.

Sí es sobreyectiva

Pregunta 9

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}^* \quad f(n) := n!$

¿Es inyectiva? $\Rightarrow$ NO pues $f(0) = 0! = 1 = f(1) = 1! = 1$

¿Es sobreyectiva? $\Rightarrow$ NO pues $f(0)=1,\ f(1)=1,\ \underbrace{f(2)=2,\ f(3)=6}_{\text{Faltan el 3, 4 y 5}}$

y la aplicación es creciente.

Pregunta 10

$f: A \to B \quad g: X \to Y \quad f \times g: A \times X \to B \times Y$

f y g inyectivas $\Rightarrow f \times g$ inyectiva está claro

$f \times g$ inyectiva $\not\Rightarrow f$ y g inyectivas

$\hookrightarrow$ Contraejemplo

$(f \times g)(1,2) = (3,4)$ $\Rightarrow$ Si f o g no son inyectivas,
$(f \times g)(2,2) = (3,4)$ $\quad$ $f \times g$ tampoco pues por el ejemplo visto, si f no es inyect., podríamos coger como primera coordenada elementos de A con la misma imagen por f y como segunda coordenada un elemento fijo de X, obteniendo así elementos de $A \times X$ con misma imagen. Por ello, f y g deben ser inyectivas también. He usado la demostración del antirecíproco:

$f \times g$ inyectiva $\Rightarrow f$ y g inyectivas

Esto hemos probado $\{$ No inyectivas f o $g \Rightarrow f \times g$ no inyectiva

RELACIONES DE EQUIVALENCIA Y COCIENTES

Pregunta 1

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \quad f(n) = |n| \quad R_f \quad \bar{f}: \mathbb{Z}/R_f \to \mathbb{N}; \bar{f}(\bar{x}) = f(x) = |x|$

Está claro que es sobreyectiva. También es inyectiva porque cada clase tiene su propia imagen, por eso se caracteriza $\bar{f}$. Por ello, la respuesta correcta es la:

c) Salvo la clase del 0, todas tienen 2 elementos y $\mathbb{Z}/R_f \simeq \mathbb{N}$.

Pregunta 2

$0 = \emptyset, 1 = \{0\}, 2 = \{0,1\}, \ldots, n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$

$aRb \Leftrightarrow a \in b$ $\quad$ Simétrica no es pues $1 \in 2$, pero $2 \notin 1$
Está claro que no es reflexiva.

Sí es transitiva por cómo se definen los conjuntos del enunciado: Si $1 \in 2$ y $2 \in 3$, entonces $1 \in 3$.

Pregunta 3

$nRm \Leftrightarrow n-m$ es múltiplo de 2

El conjunto $\mathbb{N}/R$ tiene solo 2 elementos:

- La clase del 0 formada por todos los pares
- La clase del 1 formada por todos los impares.

Esto se debe a que: Par - Par = Par, Par - Impar = Impar y que Impar - Impar = Par

Pregunta 4

Sea X un conjunto y definamos en $P(X)$ la siguiente relación: $ARB \Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset$

Reflexiva: $A \cap A \neq \emptyset \Rightarrow ARA$ (Es obvio) ✓

Simétrica: $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow B \cap A \neq \emptyset \Rightarrow aRb \Rightarrow bRa$ ✓

Transitiva: No se cumple:

$$A = \{1,2\},\ B = \{2,3\},\ C = \{3,4\}$$

Está claro que $A \cap B = \{2\} \neq \emptyset$ y $B \cap C = \{3\} \neq \emptyset$ pero $A \cap C = \emptyset$.

Pregunta 5

$f, g : A \to B \qquad R_f = R_g$

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$

$$f \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ par} \\ -1 & \text{si } n \text{ impar} \end{cases} \qquad g \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ impar} \\ -1 & \text{si } n \text{ par} \end{cases}$$

Ambas cumplen que impar$R$impar y que par$R$par, pero $f(\text{impar}) = -1 \neq 1 = g(\text{impar})$ y $f(\text{par}) = 1 \neq -1 = g(\text{par})$

Está claro que f y g no son iguales. Sin embargo, si $R_f = R_g$, entonces A/R_f tiene los mismos elementos que A/R_g, y como $\bar{f} : A/R_f \to B$ y $\bar{g} : A/R_g \to B$ son inyectivas, se deduce que $\operatorname{Im} f \simeq \operatorname{Im} g$.

Pregunta 6

Sea X un conjunto, en $P(X)$ definimos la siguiente relación: $ARB \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$.

- La reflexiva no se cumple ya que $A \cap A \neq \emptyset$
- La simétrica se cumple ya que si $A \cap B = \emptyset$, entonces $B \cap A = \emptyset$.
- Transitiva: No se cumple. Ejemplo:

$A = \{1,2\} \quad B = \{3,4\} \quad C = \{2,5\} \Rightarrow A \cap B = \emptyset,\ B \cap C = \emptyset$

pero $A \cap C \neq \emptyset$

Pregunta 7

En $\mathbb{Z}$ se considera la relación de equivalencia $n^2 = m^2 \Rightarrow nRm$. Se considera $\mathbb{Z}/R$. La correspondencia $\mathbb{Z}/R \to \mathbb{Z}$ con $\bar{a} \to a$

No está bien definida ya que 2 y -2 pertenecen a la misma clase y por lo tanto, $\bar{f}(\bar{2}) = 2 = -2$, lo cual no puede ser ya que un elemento del dominio solo puede tener como imagen un elemento.

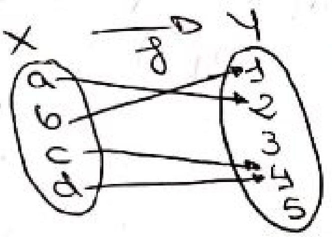
Pregunta 8

En $\mathbb{Z}$ se considera la relación de equivalencia R definida por $nRm \Leftrightarrow |n| = |m|$ y la correspondencia $\bar{n} \to n^2$ definida sobre $\mathbb{Z}/R$.

!! Sí está bien definida ya que el cuadrado de cualquier entero, sea negativo o positivo, es positivo o 0, y como cada clase salvo la del 0 tiene 2 elementos (un entero positivo y su opuesto), cada elemento de $\mathbb{Z}/R$ tendrá solo un elemento como imagen por $\bar{f}$. Además, es inyectiva ya que es creciente pero no es sobreyectiva, ya que los enteros negativos no están en la imagen.

Pregunta 9

Dada la aplicación:



No es inyectiva ya que $c \neq d$ pero $f(c) = f(d)$.

Tampoco es sobreyectiva ya que $3, 5 \notin Im(f)$

El conjunto cociente X/R_f tiene 3 elementos ya que $f(a) = 1 \neq 2 = f(b) \neq 4 = f(c) = f(d)$

Pregunta 10

$f: A \to B \quad R_f$

Descartamos la c), ya que $A/R_f \simeq Im(f)$ siempre se cumple pero f podría ser no inyectiva, un ejemplo de esto es justo la pregunta anterior. La b) se descarta porque directamente no tiene sentido. La correcta es a), f es inyectiva $\Leftrightarrow$ la clase de equivalencia de cada elemento $a \in A$ tiene sólo al elemento a.

ANILLOS, DEFINICIÓN Y EJEMPLOS

Pregunta 2

Las unidades del anillo $\mathbb{Z}_5$ son: $U(\mathbb{Z}_5)=\{1,2,3,4\}$

Pregunta 3

$\mathbb{Z}_n \hookrightarrow \mathbb{Z};\ i \mapsto i$

Está claro que está bien definida. Sin embargo, no es morfismo de anillos:

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(1)=1\\ \varphi(ab)=\varphi(a)\cdot\varphi(b)\\ \varphi(a+b)=\varphi(a)+\varphi(b)\end{array}\right\}\ \text{¿Se cumplen?}$$

$\boxed{\mathbb{Z}_4}$ $$\left.\begin{array}{l}\varphi(2\cdot 3)=\varphi(2)\cdot\varphi(3)=2\cdot 3=6\\ \varphi(6)=\varphi(2)=2\end{array}\right\}\ \text{No es morfismo}$$

* Pregunta 5

Sean $\mathbb{Z}[i]$ y $\mathbb{Q}[i]$.

$\mathbb{Z}[i]$ no es un cuerpo pues solo tiene 4 unidades: $1,-1,i,-i$. $\mathbb{Q}[i]$ sí es un cuerpo.

Pregunta 6

$N:\mathbb{Z}[i]\to\mathbb{Z};\ N(a+bi):=a^2+b^2$

Está claro que está bien definida. Veamos si es morfismo: $N(3)=9$, $N(2)=4$

$N(3+2)=N(5)=25 \neq N(3)+N(2)=13$

No es morfismo

* $(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$

Para ser unidad en $\mathbb{Z}[i]$, la norma debe ser 1 o -1:

$a^2+b^2=-1 \Rightarrow$ Imposible

$$a^2+b^2=1\Rightarrow\left\{\begin{array}{ll}a=1 & b=0\\ a=-1 & b=0\\ a=0 & b=1\\ a=0 & b=-1\end{array}\right.\Rightarrow \left.1,-1,i,-i\right\}\ 4\ \text{unidades}$$

$\mathbb{Q}[i]$ sí es un cuerpo ya que $a=\sqrt{1-b^2}$ tiene solución para todo $a\in\mathbb{Q}$.

Pregunta 7

$f: A[x] \to A$ Asocia a cada polinomio su término independiente.

Es un morfismo ya que el término independiente de la suma de 2 polinomios es igual a la suma de sus términos independientes y el térm. indep. del producto de 2 polinomios es igual al producto de sus términos independientes. Por lo tanto:

$$\varphi(p(x)+q(x)) = \varphi(p(x)) + \varphi(q(x))$$
$$\varphi(p(x)\cdot q(x)) = \varphi(p(x))\cdot \varphi(q(x))$$

Además está claro que: $\varphi(1)=1$ y $\varphi(0)=0$. Es claramente sobreyectivo pero no inyectivo ya que hay polinomios con el mismo término independiente.

Pregunta 8

El elemento $2+\sqrt{3}$

$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 4 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 3 = 1 \Rightarrow$ Es unidad ya que tiene norma 1 y su inverso es $2-\sqrt{3}$

Pregunta 9

A es un anillo y $B \subseteq A$ un subanillo.

Si A no es cuerpo, B puede serlo o no serlo:

$A = \mathbb{Z}_6$ $\quad B = \mathbb{Z}_5 \Rightarrow B \subseteq A$, A no cuerpo, B cuerpo

$\quad B = \mathbb{Z}_4 \Rightarrow B \subseteq A$, A y B no son cuerpos

Si A es cuerpo, B puede serlo o no serlo:

$A = \mathbb{Z}_5$ $\quad B = \mathbb{Z}_4 \Rightarrow B \subseteq A$, A cuerpo y B no cuerpo

$\quad B = \mathbb{Z}_3 \Rightarrow B \subseteq A$, A y B cuerpos

Cada uno va a su bola.

Pregunta 10

Sea $\mathbb{Z}[x]$ y $\mathbb{Z}[x]^*$.

No hay respuesta correcta ya que $\mathbb{Z}[x]^*$ ni siquiera es anillo, pues no es cerrado para la suma:

$3x+3-(3x+3) = 0 \Rightarrow$ ¡El polinomio nulo no está en $\mathbb{Z}[x]^*$!

Pregunta 4

$f: \mathbb{Z}_9 \longrightarrow \mathbb{Z}_6$ $f(n) :=$ resto de dividir n entre 6 para $n = 0, 1, \dots, 8$

Está claro que está bien definida pero no es morfismo de anillos ya que:

$$\left.\begin{array}{l} f(10) = f(1) = 1 \\ f(5+5) = f(5) + f(5) = 5+5 = 10 = 4 \end{array}\right\} 1 \neq 4$$

Pregunta 1

$f: \mathbb{Z}_6 \longrightarrow \mathbb{Z}_3$ $f(n) :=$ resto de dividir n entre 3 para $n = 0, 1, \dots, 5$

Sí es morfismo de anillos ya que $3 | 6$.

CONGRUENCIAS, IDEALES Y COCIENTES

Pregunta 1

En $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definimos la siguiente relación:

$$(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow a-c \text{ es un múltiplo de } 2 \text{ y } b=d$$

Veamos si es rel. equivalencia

Reflexiva: $(a,b) \sim (a,b) \Leftrightarrow a-a=0$ es múltiplo de 2 y $b=b$ ✓

Simétrica: Si $\underbrace{(a,b) \sim (c,d)}_{b=d \text{ y } a-c \text{ es múltiplo de } 2}$, ¿$(c,d) \sim (a,b)$?

$(c,d) \sim (a,b) \Leftrightarrow b=d$ ✓ y $c-a$ es múltiplo de $2 \Rightarrow$ Sí, pues $c-a = -(a-c)$ y $a-c$ es múltiplo de 2

Transitiva: Si $\underbrace{(a,b) \sim (c,d)}_{b=d \quad a-c \text{ múlt. } 2}$ y $\underbrace{(c,d) \sim (e,f)}_{d=f \quad c-e \text{ múlt. } 2}$, ¿$(a,b) \sim (e,f)$?

$$(a,b) \sim (e,f) \Leftrightarrow \begin{cases} b=f \Rightarrow \text{Sí pues } b=d=f \\ a-e \text{ múlt. } 2 \Rightarrow \text{Sí pues } \underbrace{(a-c)+(c-e)}_{\text{múlt. } 2} = a-e \end{cases}$$

Ahora veamos si es congruencia:

$$\left.\begin{array}{l} (a,b) \sim (c,d) \\ (e,f) \sim (g,h) \end{array}\right\} ¿(a+e, b+f) \sim (c+g, d+h)?$$

¿$b+f = d+h$? $\Rightarrow$ Sí pues $b=d$ y $f=h$

¿$a+e-(c+g)$ múlt. 2? $\Rightarrow$ Sí pues $\overbrace{(a-c)+(e-g)}^{\text{múlt. } 2}$

$\left.\begin{matrix}(a,b)\sim(c,d)\\(e,f)\sim(g,h)\end{matrix}\right\}$ ¿$(ae,bf)\sim(cg,dh)$?

¿$bf=dh$? $\Rightarrow$ Sí pues $b \overset{!}{=} d$ y $f=h$

¿$ae-cg$ múlt. 2? Sabemos que $a-c$ es múlt. 2 al igual que $e-g$. Si ahora multiplicamos así: $\underbrace{(a-c)g+(e-g)a}_{\text{Sigue siendo múlt. 2}} = ag-cg+ae-ag = ae-cg$ ✓

Es congruencia.

Pregunta 2

En $\mathbb{Q}$ tenemos la relación $a\sim b \Leftrightarrow a-b\in\mathbb{Z}$

Reflexiva: Está clara ✓

Simétrica: $a\sim b$, ¿$b\sim a$? ✓

Si $a-b\in\mathbb{Z}$, $-(a-b)=b-a\in\mathbb{Z}$ también

Transitiva: $a\sim b$ y $b\sim c$, ¿$a\sim c$?

$\left.\begin{matrix}a-b\in\mathbb{Z} & b-c\in\mathbb{Z}\end{matrix}\right\}$ $(a-b)+(b-c)\in\mathbb{Z}\Rightarrow a-c\in\mathbb{Z}$ ✓

Es de equivalencia.

Veamos si es congruencia: $a-b\in\mathbb{Z}$ y $c-d\in\mathbb{Z}$

$\left.\begin{matrix}a\equiv b\\c\equiv d\end{matrix}\right\}$ ¿$a+c\equiv b+d$? $\rightarrow$ ¿$(a+c)-(b+d)\in\mathbb{Z}$? ✓

$\underbrace{(a-b)}_{\in\mathbb{Z}}+\underbrace{(c-d)}_{\in\mathbb{Z}}\in\mathbb{Z}$

$\left.\begin{matrix}a\equiv b\\c\equiv d\end{matrix}\right\}$ ¿$ac\equiv bd$? $\rightarrow$ ¿$ac-bd\in\mathbb{Z}$? NO. Contraejemplo

$\left.\begin{matrix}0\equiv 1\\2.15\equiv 1.15\end{matrix}\right\}$ $0\cdot 2.15-1\cdot 1.15 = -1.15\notin\mathbb{Z}$

No es congruencia.

Pregunta 3

Sea el morfismo: $E_1:\mathbb{Z}[x]\to\mathbb{Z}$ que evalúa cada polinomio en 1, $E_1(f(x)):=f(1)$ y sea $I=\langle x-1\rangle\leq\mathbb{Z}[x]$ el ideal generado por $\langle x-1\rangle$.

Está claro que $I\subseteq \ker E_1$, pues $\ker E_1=\{p(x)\in\mathbb{Z}[x]:E_1(p(x))=0\}$ y $\forall p(x)\in\mathbb{Z}[x]$; $p(1)=0$, $p(x)\in\ker E_1$. Cualquier polinomio del ideal generado por $\langle x-1\rangle$ tendrá como factor $(x-1)$, por lo que al evaluarlo en 1 valdrá 0. Para saber si $\mathbb{Z}[x]/\ker E_1\simeq\mathbb{Z}$ ó $\mathrm{Im}(f)$, razonamos de la siguiente manera:

En $\mathbb{Z}[x]$, tomando polinomios de coeficientes todos negativos o todos positivos, al evaluarlos en 1, se puede obtener todo $\mathbb{Z}$ como $\mathrm{Im}\, E_1$:

Ejemplo

Si quiero que $p(1)=-2$, basta con $-2x$. Si quiero que $p(1)=3$, basta con $3x$. Y esto se puede hacer con cualquier entero. Por ello, $\mathbb{Z}[x]/\mathrm{Ker}\, E_1 \simeq \mathbb{Z}$.

Pregunta 4

En $\mathbb{Z}[x]$, sea P el conjunto de los polinomios con grado par

No es un ideal ya que no es cerrado para sumas:

$(x^2+x+1)+(-x^2+x)=2x+1 \notin P$

Al no ser cerrado, tampoco es subanillo

Pregunta 5

El cuerpo de los números complejos

Solo tiene 2 ideales, que son el trivial y el total, pero tiene infinitos subanillos.

JUSTIFICACIÓN

Sea $\{0\} \neq I \leq A$ con A un cuerpo. Como todos los elementos de A son unidades, sea u una unidad $u \in I$.

Como I es cerrado para productos, $v=u^{-1}$ y $u \cdot v = 1 \in I$.

Como I es cerrado para productos, $\forall a \in A$, $a \cdot 1 \in I$.

Por lo tanto, $I=A$ o bien $I=\{0\}$.

Pregunta 6

Sea A un anillo

Todo ideal de A tiene al cero (por la propia definición de ideal y el único ideal que tiene al 1 es el propio anillo ya que si $1 \in I$, como I es cerrado para el producto, $\forall a \in A$ se cumple que $a \cdot 1 \in I$, $a \in I$, y se concluye que $I=A$.

Pregunta 7

Dados dos ideales $I, J \leq A$.

La intersección $I \cap J$ es un ideal pero la unión $I \cup J$ no lo es.

JUSTIFICACIÓN

$\boxed{I \cap J}$ 1º $0 \in J$, $0 \in I \Rightarrow 0 \in I \cap J$ ✓

2º $a \in I \cap J$, $b \in I \cap J$, ¿$a+b \in I \cap J$?

Escaneado con CamScanner

Como $a \in I \cap J \begin{cases} \to a \in I \\ \to a \in J \end{cases}$ Como $b \in I \cap J \begin{cases} \to b \in I \\ \to b \in J \end{cases}$

Como I es ideal, $a+b \in I$. Como J es ideal, $a+b \in J$.
Concluimos que $a+b \in I \cap J$

3º $a \in I \cap J$, $b \in I \cap J$, ¿$ab \in I \cap J$?

$a \in I$ $a \in J$ $b \in I$ $b \in J$

Como I es ideal, es cerrado para productos, $ab \in I$. Lo mismo ocurre con J ya que es ideal, $ab \in J$.

Concluimos que $ab \in I \cap J$

$\boxed{I \cup J}$ $a \in I \cup J$ $b \in I \cup J$, ¿$a+b \in I \cup J$?

Si $a \in I \cup J$, supongamos que $a \in I$ y $a \notin J$, y que $b \notin I$ pero $b \in J$. $\underset{I}{\overset{\cap}{a}} + \underset{J}{\overset{\cap}{b}}$ no sabemos qué ocurre con este elemento, podría pertenecer o no a I o J, y por lo tanto no podemos afirmar que $a+b \in I \cup J$. Ejemplo: $2\mathbb{Z}$ y $5\mathbb{Z}$,
$2+5=7$ y $7 \notin 2\mathbb{Z} \cup 5\mathbb{Z}$

Pregunta 8

Sean $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$.
Todos los ideales de $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ son principales. Los de $\mathbb{Z}$ se probó en teoría, y los de $\mathbb{Q}$ son el trivial, es decir, $0 \cdot \mathbb{Q}$, y $\mathbb{Q}$, $1 \cdot \mathbb{Q}$, los cuales ambos son principales (sabemos que solo tiene esos 2 ideales por la pregunta 5 de este test.

Pregunta 9

En el anillo $\mathbb{Z}[i]$ se considera el ideal I generado por el elemento i, entonces
$I = \mathbb{Z}[i]$, ya que si $i \in I$, como I es cerrado para productos, $-i \cdot i \in I$, $1 \in I$. Como $1 \in I$ y I es cerrado para productos, $\forall a \in \mathbb{Z}[i]$, $a \cdot 1 \in I$, $a \in I \Rightarrow I = \mathbb{Z}[i]$

Pregunta 10

Sea la aplicación $T: \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}$ que asocia a cada polinomio su término independiente, y el ideal $I \doteq \langle x \rangle \leq \mathbb{Z}[x]$ generado por x.
Por la pregunta 7 del anterior test sabemos que T es un morfismo. Además, $T_*(x\mathbb{Z}[x]) = 0$. Por el primer teorema de isomorfía, un morfismo de anillos con estas propiedades induce un único morfismo $\overline{T}$:
$\overline{T}: \mathbb{Z}[x]/I \to \mathbb{Z}$, tal que $\overline{T}(\overline{f(x)}) = T(f(x))$.

DIVISIBILIDAD EN DOMINIOS DE INTEGRIDAD

Pregunta 1

En $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, 2 y $2-2\sqrt{2}$...

$$\frac{2-2\sqrt{2}}{2} = 1-\sqrt{2} \qquad \frac{2}{2-2\sqrt{2}} = \frac{2(2+2\sqrt{2})}{-4} = 1+\sqrt{2}$$

Son asociados.

$$N(a+b\sqrt{2}) = (a+b\sqrt{2})(a-b\sqrt{2}) = a^2-2b^2$$

$N(2)=4 \qquad N(2-2\sqrt{2})=-4$

Pero no tienen la misma norma.

Pregunta 2

El anillo $\mathbb{Z}_{11}[x]$

Es un DI con 10 unidades.

JUSTIFICACIÓN

$\mathbb{Z}_{11}$ es un DI ya que es un cuerpo. Como $\mathbb{Z}_{11}$ es DI, $\mathbb{Z}_{11}[x]$ también lo será: Si tomamos 2 polinomios no nulos de grado r y s y consideramos su producto fg, tendremos un polinomio de grado $r+s$ y el coeficiente de x^{r+s} será el producto de los coeficientes líderes de ambos polinomios: $a_r b_s$. Es obvio que $a_r b_s \neq 0$, pues $a_r \neq 0$ y $b_s \neq 0$, y como $a_r, b_s \in \mathbb{Z}_{11}$, es obvio que $fg \neq 0$

Pregunta 3

Sea A un DI y $a \in A$ un elemento no nulo. Considera la aplicación $f: A \to A$ definida como $f(x) := ax$, entonces

Es inyectiva ya que si $f(b)=f(c) \Rightarrow ab=ac \Rightarrow b=c$

Sin embargo, no tiene por qué ser sobreyectiva ya que no es un DI infinito. (Proposición 4.1.3.)

Pregunta 4

En $\mathbb{Q}[x]$ el polinomio x^2+1

Es claro que x^2+1 tiene infinitos asociados, basta con coger alguna de las infinitas unidades de $\mathbb{Q}[x]$ y multiplicarla por x^2+1 para obtener un asociado cualquiera. Para saber si tiene o no divisores propios, hemos de ver si es irreducible.

$f(1)=2 \quad f(-1)=2 \Rightarrow$ Como no tiene factores lineales, es irreducible y no tiene divisores propios.

Pregunta 5

Cualquier subanillo de un cuerpo es DI ya que un cuerpo es DI y cualquier subanillo de un DI también es un DI. También se cumple que todo DI es un subanillo de un cuerpo, pues a partir de él se puede construir el cuerpo de fracciones de ese DI en concreto (se denota $\mathbb{Q}(A)$).

Pregunta 6

$a, b \in A$, A es DI, $a \sim_{as} b$

$\left.\begin{array}{l} a \sim_{as} b \\ c \sim_{as} d \end{array}\right\}$ ¿$ac \sim_{as} bd$? ¿$a+c \sim_{as} b+d$?

$\Rightarrow a = ub \qquad ac = \underbrace{(uv)}_{\text{unidad}} bd \Rightarrow$ Se cumple que $ac \sim_{as} bd$

$\Rightarrow c = vd$

Con u y v unidades

$a + c = ub + vd \Rightarrow$ Si $u = v$, podríamos sacar factor común, pero esto no ocurre siempre.

Pregunta 7

En $\mathbb{Z}[i]$, $1+2i$ y $1-2i$:

$N(1+2i) = 3 \quad N(1-2i) = 3 \Rightarrow$ Misma norma

$(-1)(1+2i) = -1-2i \quad i(1+2i) = -2+i \quad -i(1+2i) = 2-i$

Pero no son asociados

$3+i$ y $1-3i$:

$N(3+i) = 10 \quad N(1-3i) = 10 \Rightarrow$ Misma norma

$(3+i)(-i) = 1-3i \Rightarrow$ Son asociados

Pregunta 8

En $\mathbb{Q}[x]$ el polinomio x^3+1:

Tiene infinitos asociados por la misma razón que en la pregunta 4. Para ver si tiene divisores propios, hemos de estudiar si es irreducible o no:

$f(1)=2 \quad f(-1)=0 \Rightarrow$ Tiene un factor lineal. Es reducible y por lo tanto, tiene divisores propios (infinitos, cualquier polinomio de la forma $a(x+1)$ con a una unidad).

Pregunta 9

En el anillo $\mathbb{Z}[i][x]$

Como $\mathbb{Z}[i]$ es un DI, $\mathbb{Z}[i][x]$ también. Sin embargo, $\mathbb{Q}[i][x]$ no es su cuerpo de fracciones:

Pregunta 10

El cuerpo de fracciones de $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ es $\mathbb{Q}[\sqrt{-2}]$, pues: $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}] \subseteq \mathbb{Q}[\sqrt{-2}]$ está claro. Cualquier cuerpo que contenga a $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ contiene a $\mathbb{Q}[\sqrt{-2}]$, pues al contener a $\mathbb{Z}$ también contiene a $\mathbb{Q}(\mathbb{Z})$, y entonces a todo número de la forma $a+b\sqrt{-2}$ con $a,b \in \mathbb{Q}$ contiene a $\mathbb{Q}[\sqrt{-2}]$. En particular, el cuerpo de fracciones de $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ contiene a $\mathbb{Q}[\sqrt{-2}]$.