Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Cálculo I – Evaluación 1

1. Sean A y B conjuntos no vacíos y mayorados de números reales positivos. Prueba que el conjunto

$$C = \left\{ab - c^2 \ : \ a \in A,\ b \in B,\ c \in B\right\}$$

está mayorado y minorado y calcula su supremo y su ínfimo.

2. Sean A y B conjuntos no vacíos de números reales tales que $B \subset \mathbb{R}^+$ y A está mayorado. Sea $\alpha = \sup(A)$ y $\beta = \text{ínf}(B)$. Supongamos que $\alpha < \beta^2$. Definamos:

$$C = \left\{ \frac{1}{b^2 - a} \ : \ b \in B,\ a \in A \right\}$$

Prueba que $\sup(C) = \dfrac{1}{\beta^2 - \alpha}$. ¿Qué puedes decir del ínfimo de C?

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Cálculo I – Evaluación 2

1. Prueba, usando el principio de inducción, que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica la desigualdad:

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdots (2n+3)} < \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}}$$

2. Sea A un conjunto infinito y acotado de números reales. Un número $z \in \mathbb{R}$ se dice que es un *casi-mayorante* de A si el conjunto $\{x \in A : z < x\}$ es finito (puede ser vacío). Sea B el conjunto de todos los casi-mayorantes de A. Prueba que B no es vacío, está minorado y $\inf(B) \leqslant \sup(A)$. Prueba también que si $\inf(B) < \sup(A)$ entonces A tiene máximo.

3. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ creciente. Para cada $\alpha \in]a,b[$ definamos:

$$\omega(f,\alpha) = \inf\{f(t) : \alpha < t \leqslant b\} - \sup\{f(s) : a \leqslant s < \alpha\}$$

   Prueba que:

   i) $\omega(f,\alpha) \geqslant 0$ y si $a \leqslant u < \alpha < v \leqslant b$ entonces $\omega(f,\alpha) \leqslant f(v) - f(u)$.

   ii) Si $a < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_p < b$, entonces:

$$\omega(f,\alpha_1) + \omega(f,\alpha_2) + \cdots + \omega(f,\alpha_p) \leqslant f(b) - f(a)$$

   iii) Para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto $S_n = \{\alpha \in]a,b[: \omega(f,\alpha) \geqslant 1/n\}$ es finito.

   iv) El conjunto $S = \{\alpha \in]a,b[: \omega(f,\alpha) > 0\}$ es numerable.

   Sugerencias. Para ii) considera puntos

$$a = x_0 < \alpha_1 < x_1 < \alpha_2 < x_2 < \alpha_3 < \cdots < x_{p-1} < \alpha_p < x_p = b$$

   Y usa i).

   Usando un resultado de teoría, iv) se deduce de iii).

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Cálculo I – Evaluación 3

1. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función estrictamente creciente verificando que $a < f(x) \leqslant b$ para todo $x \in [a, b]$. Definamos $x_1 = a$, y $x_{n+1} = f(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

   a) Prueba que $\{x_n\}$ converge a un número $\beta \in]a, b]$.

   b) Sea $C = \{f(x) \colon x \in [a, b],\ x < \beta\}$. Prueba que $\beta = \sup(C)$ y $\beta \leqslant f(\beta)$.

   c) Si la imagen de f es un intervalo prueba que $\beta = f(\beta)$.

2. Sea $\{x_n\}$ la sucesisón definida por

$$x_1 = 2, \qquad x_{n+1} = \frac{4x_n + a}{x_n + 4} \quad (4 < a < 16)$$

   a) Estudia la convergencia de dicha sucesión.

   b) Prueba que $0 < \sqrt{a} - x_{n+1} < \frac{1}{3}(\sqrt{a} - x_n)$ y deduce que $0 < \sqrt{a} - x_{n+1} < \frac{1}{3^n}(\sqrt{a} - 2)$.

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Cálculo I – Evaluación 4

1. Supongamos que $\{x_n\}$ es una sucesión mayorada y sean $A_n = \{x_k : k \geqslant n\}$, $\beta_n = \sup(A_n)$. Sea $A = \{n \in \mathbb{N} : \beta_n \in A_n\}$. Prueba que:

   i) Si el conjunto A es finito entonces $\{x_n\}$ tiene una sucesión parcial estrictamente creciente.

   ii) Si el conjunto A es infinito entonces $\{x_n\}$ tiene una sucesión parcial decreciente.

2. Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada y α, β, números reales. Se verifica entonces que:

   i) $\alpha = \underline{\text{lím}}\{x_n\}$ si, y sólo si, para todo $\varepsilon > 0$ el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n < \alpha - \varepsilon\}$ es finito y el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n < \alpha + \varepsilon\}$ es infinito.

   ii) $\beta = \overline{\text{lím}}\{x_n\}$ si, y sólo si, para todo $\varepsilon > 0$ el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n > \beta + \varepsilon\}$ es finito y el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n > \beta - \varepsilon\}$ es infinito.

3. Calcula los límites de las sucesiones:

$$a)\ x_n = \left(1 + \log \frac{n^2+1}{n^2+n+1}\right)^n; \quad b)\ y_n = \frac{\frac{1}{2\log 2} + \frac{1}{3\log 3} + \cdots + \frac{1}{n\log n}}{\log(\log(n+1))}$$

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Cálculo I – Evaluación 5

1. Estudia según los valores de $a \in \mathbb{R}$ la convergencia de las series:

   a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{((3n)!)^2}{(n!)^6} a^{6n}$; b) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{4 \cdot 6 \cdot 8 \dots (2n+2)}{9 \cdot 11 \cdot 13 \dots (2n+7)} \right)^a$

2. Estudia la convergencia y la convergencia absoluta de las series:

   a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+1}$; b) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+2}\,\sqrt[n+2]{3}}$

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Cálculo I – Evaluación 6

1. a) Sea $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ continua y definamos $Z = \{x \in [c, d] : f(x) = 0\}$. Supuesto que $Z \neq \emptyset$, prueba que Z tiene máximo y mínimo.

   b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a) < 0$, $f(b) < 0$ y $f(c) > 0$ para algún $c \in]a, b[$. Prueba que hay dos números u, v verificando que $a < u < v < b$, $f(u) = f(v) = 0$ y $f(x) > 0$ para todo $x \in]u, v[$.

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y creciente. Prueba que para todo conjunto $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y mayorado se verifica que $\sup(f(A)) = f(\sup(A))$.

   Debes hacer este ejercicio de dos formas: una usando sucesiones y otra sin usar sucesiones (usando *épsilons* y *deltas*).

3. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Prueba que la función $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada para todo $x \in [a, b]$ por $g(x) = \max f([a, x])$, es continua.

   Sugerencia. Prueba que $g([a, b]) = [f(a), M]$ donde $M = \max f([a, b])$. En mi libro *Cálculo diferencial e integral para funciones de una variable* puedes encontrar alguna ayuda adicional.

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Cálculo I – Evaluación 1. Soluciones

Ejercicio 1. Sean A y B conjuntos no vacíos y mayorados de números reales positivos. Prueba que el conjunto

$$C = \left\{ ab - c^2 \ : \ a \in A, \ b \in B, \ c \in B \right\}$$

está mayorado y minorado y calcula su supremo y su ínfimo.

Solución. En estos ejercicios hay que partir de los datos que nos dan. Nos dicen que A y B son conjuntos no vacíos mayorados, y por tanto podemos considerar sus supremos. También nos dicen que $A \subset \mathbb{R}^+$ y $B \subset \mathbb{R}^+$ por lo que están minorados, y podemos considerar sus extremos inferiores. Como nos piden calcular el supremo y el ínfimo de C tenemos que conjeturar su posible valor. Para ello podemos guiarnos por lo que pasaría en el caso de que A y B tuvieran máximo y mínimo. En tal caso está claro que C tendría máximo igual a $\max(A)\max(B) - \min(B)^2$, y mínimo igual $\min(A)\min(B) - \max(B)^2$. Como no sabemos si A o B tienen máximo o mínimo, la conjetura razonable es que el supremo de C debería ser $\sup(A)\sup(B) - \inf(B)^2$ y el ínfimo $\inf(A)\inf(B) - \sup(B)^2$. Vamos a demostrarlo partiendo de los datos del ejercicio sin suponer nada más.

Pongamos $\alpha = \sup(A)$, $\beta = \sup(B)$, $\gamma = \inf(B)$. Como α es un mayorante de A, para todo $a \in A$ tenemos que $a \leqslant \alpha$. Como para todo $b \in B$ es $b > 0$, deducimos que $ab \leqslant \alpha b$. Como $b \leqslant \beta$ y $\alpha > 0$, deducimos que $\alpha b \leqslant \alpha\beta$. Por tanto $ab \leqslant \alpha\beta$ para todos $a \in A$, $b \in B$. Como $B \subset \mathbb{R}^+$, se verifica que 0 es un minorante de B por lo que $\gamma \geqslant 0$. Para todo $c \in B$ tenemos que $0 \leqslant \gamma \leqslant c$ y por tanto $\gamma^2 \leqslant c^2$. Hemos probado que para todos $a \in A$, $b, c \in B$ se verifica que $ab - c^2 \leqslant \alpha\beta - \gamma^2$. Por tanto $\alpha\beta - \gamma^2$ es un mayorante de C. Ahora que ya sabemos que C está mayorado, podemos considerar su supremo. Sea $\delta = \sup(C)$. Por definición de supremo, mínimo mayorante, tenemos que $\delta \leqslant \alpha\beta - \gamma^2$.

Para probar la desigualdad contraria partimos ahora de δ. Observa que ya hemos usado que δ es el mínimo mayorante de C pero no hemos usado todavía que α y β sean los mínimos mayorantes de A y de B ni que γ sea el máximo minorante de B. Partiendo de δ, tenemos que para todos $a \in A$, $b, c \in B$ se verifica que $ab - c^2 \leqslant \delta$ y, teniendo en cuenta que $b > 0$, deducimos que $a \leqslant \frac{1}{b}(\delta + c^2)$. Esta desigualdad nos dice que para cada par de números $b, c \in B$ el número $\frac{1}{b}(\delta + c^2)$ es un mayorante de A y, por tanto, $\alpha \leqslant \frac{1}{b}(\delta + c^2)$ (fíjate que ahora sí usamos que α es el mínimo mayorante de A). Deducimos ahora que para todos $b, c \in B$ se verifica que $b \leqslant \frac{1}{\alpha}(\delta + c^2)$, lo que nos dice que para cada $c \in B$ el número $\frac{1}{\alpha}(\delta + c^2)$ es un mayorante de C y, por tanto, $\beta \leqslant \frac{1}{\alpha}(\delta + c^2)$ (fíjate que ahora sí usamos que β es el mínimo mayorante de B). Deducimos que $c^2 \geqslant \alpha\beta - \delta$ para todo $c \in B$. Para tomar raíces cuadradas en esta desigualdad debemos asegurarnos de que $\alpha\beta - \delta \geqslant 0$, pero ello es consecuencia de que, por la primera desigualdad antes obtenida $\delta \leqslant \alpha\beta - \gamma^2$, se verifica que $\alpha\beta - \delta \geqslant \gamma^2$ (también podemos razonar: como $\alpha\beta$ es evidentemente un mayorante de C debe ser $\alpha\beta \geqslant \delta$). Por tanto podemos tomar raíces cuadradas y obtenemos $c \geqslant \sqrt{\alpha\beta - \delta}$, lo que nos dice que el número $\sqrt{\alpha\beta - \delta}$ es un minorante de C por lo que $\sqrt{\alpha\beta - \delta} \leqslant \gamma$ (fíjate que ahora sí usamos que γ es el máximo minorante de B). Hemos probado que $\alpha\beta - \delta \leqslant \gamma^2$, esto es, $\delta \geqslant \alpha\beta - \gamma^2$. Concluimos que $\delta = \alpha\beta - \gamma^2$.

Para probar que el ínfimo de C es $\inf(A)\inf(B) - \sup(B)^2$ se razona de forma parecida. $\square$

Comentarios. Como tantas veces he repetido en clase, comprender muy bien los conceptos de supremo e ínfimo y saber usarlos es imprescindible para progresar en el Análisis Matemático. Y ése es un trabajo que hay que hacer en este curso porque después ya es tarde. Hemos hecho ejercicios parecidos a este y, salvo alguna excepción, casi todos lo hacéis correctamente. Hay un detalle que es importante y quiero comentarlo. En el razonamiento anterior podríamos haber procedido como sigue:

> Para todos $a \in A$, $b, c \in B$ se verifica que $ab - c^2 \leqslant \delta$. *Fijamos* $a \in A$ y $b \in B$ y deducimos que $ab - \delta \leqslant c^2$,de donde, $\sqrt{ab - \delta} \leqslant c$ *etcétera*. ¿Te das cuenta de que aquí hay algo que

no es correcto? A saber, el número $ab-\delta$ podría ser negativo para algunos valores de $a\in A$ y de $b\in B$.

Antes de aplicar la función "raíz cuadrada" a un número debes asegurarte de que no es negativo.

Ejercicio 2. Sean A y B conjuntos no vacíos de números reales tales que $B\subset\mathbb{R}^+$ y A está mayorado. Sea $\alpha=\sup(A)$ y $\beta=\inf(B)$. Supongamos que $\alpha<\beta^2$. Definamos:

$$C=\left\{\frac{1}{b^2-a}\,:\,b\in B,\,a\in A\right\}$$

Prueba que $\sup(C)=\dfrac{1}{\beta^2-\alpha}$. ¿Qué puedes decir del ínfimo de C?

Solución. Para todo $a\in A$ y para todo $b\in B$ se verifica que:

$$\left.\begin{array}{c} a\leqslant\alpha \\ 0\leqslant\beta\leqslant b\end{array}\right\} \implies \left\{\begin{array}{c} -\alpha\leqslant -a \\ \beta^2\leqslant b^2\end{array}\right\} \implies 0<\beta^2-\alpha\leqslant b^2-a \implies 0<\frac{1}{b^2-a}\leqslant\frac{1}{\beta^2-\alpha}$$

Hemos probado así que $\dfrac{1}{\beta^2-\alpha}$ es un mayorante de C. Sea $\gamma=\sup(C)>0$. Por definición de supremo, tenemos que $\gamma\leqslant\dfrac{1}{\beta^2-\alpha}$.

Por otra parte, para todo $a\in A$ y para todo $b\in B$ se verifica que:

$$0<\frac{1}{b^2-a}\leqslant\gamma \implies \frac{1}{\gamma}\leqslant b^2-a \implies a\leqslant b^2-\frac{1}{\gamma}$$

Esta última desigualdad nos dice que para cada $b\in B$ el número $b^2-\dfrac{1}{\gamma}$ es un mayorante de A, luego, por definición de supremo, ha de ser $\alpha\leqslant b^2-\dfrac{1}{\gamma}$.

Deducimos que para todo $b\in B$ se verifica que $\alpha+\dfrac{1}{\gamma}\leqslant b^2$. Como $\alpha+\dfrac{1}{\gamma}\geqslant\alpha+\beta^2-\alpha=\beta^2\geqslant 0$, deducimos que $\sqrt{\alpha+\dfrac{1}{\gamma}}\leqslant b$. Lo que nos dice que el número $\sqrt{\alpha+\dfrac{1}{\gamma}}$ es un minorante de B, luego, por definición de ínfimo, ha de de ser $\sqrt{\alpha+\dfrac{1}{\gamma}}\leqslant\beta$, es decir, $\alpha+\dfrac{1}{\gamma}\leqslant\beta^2$. Hemos probado así que $\dfrac{1}{\gamma}\leqslant\beta^2-\alpha$, es decir, $\gamma\geqslant\dfrac{1}{\beta^2-\alpha}$. Esta desigualdad y la anterior prueban la igualdad del enunciado.

Puesto que $C\subset\mathbb{R}^+$ tenemos que $\inf(C)\geqslant 0$. Es claro que el valor de $\inf(C)$ depende de cómo sean los conjuntos A y B.

- B no mayorado. En este caso, dado $\varepsilon>0$, y fijado un elemento $a_0\in A$, existe $b_0\in B$ tal que $b_0^2>a_0+\frac{1}{\varepsilon}$ lo que implica que $\frac{1}{b_0^2-a_0}<\varepsilon$. Concluimos que $\inf(C)=0$.
- A no está minorado. En este caso, dado $\varepsilon>0$, y fijado un elemento $b_0\in B$, existe $a_0\in A$ tal que $a_0<b_0^2-\frac{1}{\varepsilon}$, y por tanto $\frac{1}{\varepsilon}<b_0^2-a_0$ lo que implica que $\frac{1}{b_0^2-a_0}<\varepsilon$. Concluimos que $\inf(C)=0$.
- Si B está mayorado y A minorado, entonces puede probarse que $\inf(C)=\dfrac{1}{\sup(B)^2-\inf(A)}$.

Comentario. Creo que la gran mayoría del curso ha entendido los conceptos de supremo e ínfimo y sabe trabajar con ellos. Es un buen logro para empezar. Por otra parte, hay detalles que muchos no tenéis en cuenta como, por ejemplo, antes de usar la raíz cuadrada de un número asegurarse de que dicho número no es negativo, o asegurarse de que un número es distinto de cero antes de dividir por él. Los matemáticos siempre tenemos muy presentes estas cosas. He querido darle a esos detalles la importancia que merecen y eso ha hecho que las calificaciones sean un poco más bajas. No creo que a nadie perjudique mucho tener un 7 en vez de un 8. Calificar no es una ciencia exacta y creo que merece la pena dar un toque de atención sobre la importancia que tiene en Matemáticas estar muy atento a lo que se hace y justificar cualquier paso que no sea más o menos evidente.

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Cálculo I – Evaluación 2 – Soluciones

Ejercicio 1. Prueba, usando el principio de inducción, que para todo $n\in\mathbb{N}$ se verifica la desigualdad:

$$\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{5\cdot 7\cdot 9\cdots(2n+3)} < \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}} \tag{1}$$

Solución.

Sea

$$A=\left\{n\in\mathbb{N} : \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{5\cdot 7\cdot 9\cdots(2n+3)} < \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}}\right\}$$

Se trata de probar que $A=\mathbb{N}$ para lo cual, puesto que $A\subset\mathbb{N}$, probaremos que A es un conjunto inductivo.

Claramente $\frac{2}{5}<\frac{1}{2}$, lo que prueba que $1\in A$.

Supongamos que $n\in A$ y probemos que $n+1\in A$. Puesto que suponemos que $n\in A$, se verifica la desigualdad (1), por lo que

$$\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)(2n+2)}{5\cdot 7\cdot 9\cdots(2n+3)(2n+5)} < \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}}\frac{2n+2}{2n+5} \tag{2}$$

Por tanto, bastará con probar que

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}}\frac{2n+2}{2n+5} \leqslant \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{(n+2)(n+3)(n+4)}} \tag{3}$$

Simplificando, esta desigualdad es lo mismo que

$$\frac{2\sqrt{n+1}}{2n+5} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n+4}}$$

Desigualdad que es equivalente a

$$4(n+1)(n+4)\leqslant(2n+5)^2 \iff 4n^2+20n+16\leqslant 4n^2+20n+25 \iff 16\leqslant 25$$

Queda así probada la desigualdad (3) que, junto con la desigualdad (2), prueba que

$$\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)(2n+2)}{5\cdot 7\cdot 9\cdots(2n+3)(2n+5)} < \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{(n+2)(n+3)(n+4)}}$$

Es decir, $n+1\in A$. Hemos probado que A es un conjunto inductivo de números naturales lo que, por el principio de inducción, nos dice que $A=\mathbb{N}$. En consecuencia, la desigualdad (1) es cierta para todo $n\in\mathbb{N}$. ☺

Comentario. En un ejercicio tan sencillo como este debe indicarse explícitamente lo que se va a hacer y su fundamento matemático. No debes dar por supuesto que el profesor ya sabe lo que tú vas a hacer y no explicar nada, cosa que hacéis algunos. En matemáticas, como regla general, siempre hay que simplificar todas las expresiones que encontréis, quien no simplifica correctamente la desigualdad (3) tiene que hacer más cálculos y es más fácil que se equivoque. Casi todos hacéis más o menos bien este ejercicio.

Ejercicio 2. Sea A un conjunto infinito y acotado de números reales. Un número $z \in \mathbb{R}$ se dice que es un *casi-mayorante* de A si el conjunto $\{a \in A : z < a\}$ es finito (puede ser vacío). Sea B el conjunto de todos los casi-mayorantes de A. Prueba que:

a) B no es vacío.

b) B está minorado y $\inf(B) \leqslant \sup(A)$.

c) Si $\inf(B) < \sup(A)$ entonces A tiene máximo.

Solución. a) Si z es un mayorante de A el conjunto $\{a \in A : z < a\}$ es vacío, luego $z \in B$. Así, todo mayorante de A pertenece a B, en particular $\sup(A) \in B$.

b) Si u es un minorante de A, el conjunto $\{a \in A : u \leqslant a\} \supset A$ y, como A es infinito, deducimos que si $b \in B$ necesariamente debe ser $u < b$. Así, todo minorante de A también es minorante de B.

Como B es un conjunto no vacío y minorado, podemos considerar su extremo inferior; y, como $\sup(A) \in B$, se verifica que $\inf(B) \leqslant \sup(A)$.

c) Si $\inf(B) < \sup(A)$ entonces, por la definición de ínfimo, existe algún $b_0 \in B$ tal que $b_0 < \sup(A)$. El conjunto $C = \{a \in A : b_0 < a\}$ es finito (porque $b_0 \in B$) y no es vacío (porque b_0 no es un mayorante de A ya que $b_0 < \sup(A)$). Puesto que C es finito y no vacío, tiene máximo, y es evidente que $\max(C) = \max(A)$, luego A tiene máximo. ☺

Comentario. En este ejercicio hay de todo. Lo considero un ejercicio muy fácil pero debo estar equivocado porque casi nadie lo ha hecho completamente bien. Casi todos hacéis bien el punto a) probando que $\sup(A) \in B$ o también que cualquier mayorante de A pertenece a B.

Para probar que B está minorado, muchos razonáis que si z es un minorante de A entonces $z \notin B$, y de ahí, sin ninguna otra explicación, afirmáis que B está minorado. Eso me da la impresión de que algunos pensáis que si $z \notin B$ entonces z es un minorante de B. En general, si B es un conjunto cualquiera, eso no es correcto, pero en este caso sí lo es. Algunos probáis que si $b \in B$ entonces cualquier número mayor que b también pertenece a B (algo evidente). Eso implica que B es un intervalo, y como no está mayorado tiene que ser una semirrecta hacia la derecha, luego $B =]\inf(B), +\infty[$ o $B = [\inf(B), +\infty[$. Por tanto, si $z \notin B$ entonces z es un minorante de B. También puede deducirse que B está minorado teniendo en cuenta que los minorantes de A son el conjunto $]-\infty, \inf(A)]$, y como ningún minorante de A pertenece a B se sigue que $B \subset]\inf(A), +\infty[$ y, en particular, B está minorado. Por otra parte, del hecho de que si $b \in B$ entonces cualquier número mayor que b también pertenece a B, no se deduce directamente sin más que $B \supset]\inf(B), +\infty[$, para justificar esa inclusión considero que hay que dar alguna explicación adicional (por ejemplo, como arriba, que B es una semirrecta hacia la derecha, o razonando directamente: si $\inf(B) < x$ entonces hay algún $b \in B$ tal que $b < x$ luego $x \in B$).

Pero donde más cosas raras hay en la prueba del punto c). Creo que salvo una única excepción, todos os empeñáis en probarlo por reducción al absurdo, es decir queréis probar que si $\inf(B) < \sup(A)$ entonces la suposición de que A no tiene máximo lleva a contradicción. Para llegar a esa contradicción necesitas probar que si A no tiene máximo entonces para todo $u < \sup(A)$ se verifica que el conjunto $A \cap]u, \sup(A)[$ es infinito, cosa que nadie hace, o al menos dice, de forma explícita. En este punto hay muchos errores.

No tengo nada en contra de las demostraciones por reducción al absurdo, pero, siempre que pueda darse, una demostración directa es preferible. Supongo que, después de leer la solución, estaréis de acuerdo conmigo en que es un ejercicio sencillo.

Ejercicio 3. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ creciente. Para cada $\alpha \in]a, b[$ definamos:

$$\omega(f, \alpha) = \inf\{f(t) : \alpha < t \leqslant b\} - \sup\{f(s) : a \leqslant s < \alpha\}$$

Prueba que:

i) $\omega(f,\alpha) \geqslant 0$ y si $a \leqslant u < \alpha < v \leqslant b$ entonces $\omega(f,\alpha) \leqslant f(v) - f(u)$.

ii) Si $a < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_p < b$, entonces:

$$\omega(f,\alpha_1) + \omega(f,\alpha_2) + \cdots + \omega(f,\alpha_p) \leqslant f(b) - f(a)$$

iii) Para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto $S_n = \{\alpha \in]a,b[: \omega(f,\alpha) \geqslant 1/n\}$ es finito.

iv) El conjunto $S = \{\alpha \in]a,b[: \omega(f,\alpha) > 0\}$ es numerable.

Sugerencias. Para ii) considera puntos

$$a = x_0 < \alpha_1 < x_1 < \alpha_2 < x_2 < \alpha_3 < \cdots < x_{p-1} < \alpha_p < x_p = b$$

Y usa i).

Usando un resultado de teoría, iv) se deduce de iii).

Demostración. i) Pongamos $A = \{f(s) : a \leqslant s < \alpha\}$, $B = \{f(t) : \alpha < t \leqslant b\}$. Como para todos $a \leqslant s < \alpha < t \leqslant b$ se tiene que $f(s) \leqslant f(\alpha) \leqslant f(t)$, deducimos que $f(\alpha)$ es un mayorante de A y un minorante de B. Luego, por las definiciones de supremo e ínfimo, tenemos que $\sup(A) \leqslant f(\alpha) \leqslant \text{ínf}(B)$. Luego $\omega(f,\alpha) = \text{ínf}(B) - \sup(A) \geqslant 0$.

Es claro que si $a \leqslant u < \alpha < v \leqslant b$ entonces $f(u) \in A$ y $f(v) \in B$, por lo que $f(u) \leqslant \sup(A) \leqslant \text{ínf}(B) \leqslant f(v)$ y, por tanto, $\omega(f,\alpha) \leqslant f(v) - f(u)$.

ii) Haciendo uso de la sugerencia y del punto i) tenemos que

$$\sum_{k=1}^{p} \omega(f,\alpha_k) \leqslant \sum_{k=1}^{p} \big(f(x_k) - f(x_{k-1})\big) = f(b) - f(a)$$

iii) Supongamos que $S_n \neq \varnothing$ y sean $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ elementos distintos de S_n. Tenemos entonces que

$$\frac{p}{n} \leqslant \sum_{k=1}^{p} \omega(f\alpha_k) \leqslant f(b) - f(a) \Longrightarrow p \leqslant n(f(a) - f(b))$$

Por tanto en S_n no puede haber más de $n(f(b) - f(a))$ elementos distintos, es decir, S_n es finito.

iv) Es evidente que para todo $n \in \mathbb{N}$ $S_n \subset S$, por lo que $S \supset \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$. Para probar la inclusión contraria, sea $x \in S$, es decir, $\omega(f,x) > 0$ y sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n\omega(f,x) > 1$ (propiedad arquimediana del orden de $\mathbb{R}$). Tenemos que $\omega(x,f) > \frac{1}{n}$, por lo que $x \in S_n$. Hemos probado que $S = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$ y por tanto S es numerable por ser unión numerable de conjuntos numerables (finitos o vacíos). ☺

Comentario. En este ejercicio también hay de todo. Por ejemplo, afirmar que un número está mayorado o minorado. Eso no tiene ningún sentido porque los conceptos de *estar mayorado* o *estar minorado* se refieren a un conjunto, no a un número. Algunos escriben cosas como $\text{ínf}(f(s))$ o $\sup(f(t))$ ¿ínfimo de un número? ¿supremo de un número? Eso no tiene sentido. La notación es importante, debéis ser cuidadosos con la notación. Algunos se complican sin necesidad introduciendo *épsilon* donde para nada son necesarios. Pero donde hay más fallos es en los puntos iii) y iv). En el punto iii) os empeñáis en hacer una demostración por reducción al absurdo y no sabéis expresar bien lo que hacéis. Tenéis la idea clara de lo que pasa pero no sabéis expresarlo bien dando la impresión de que suponéis que S_n es finito que es justo lo que hay que probar. En el punto iv), salvo una excepción, nadie prueba la igualdad $S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$ sino que la dais como evidente, y después para probar que S es numerable hacéis unas distinciones innecesarias. En los apuntes del curso hay un resultado que dice literalmente:

Sea B un conjunto numerable no vacío. Supongamos que para cada $x \in B$ tenemos un conjunto numerable no vacío A_x. Se verifica entonces que el conjunto $\mathcal{A} = \bigcup_{x \in B} A_x$ es numerable.

Ese enunciado es así porque en la demostración se usan aplicaciones sobreyectivas sobre los conjuntos A_x y, claro está, si A_x es vacío no tiene mucho sentido una aplicación sobreyectiva sobre el conjunto vacío. Por eso se supone que los A_x son no vacíos. Pero debería estar clarísimo que si a una unión numerable de conjuntos numerable no vacíos agregáis cualquier colección de conjuntos vacíos eso no cambia para nada la unión inicial que sigue siendo la misma y por tanto numerable. Así que cuando uséis este resultado olvidaros de la precisión *no vacíos*: la unión numerable de conjuntos numerables (vacíos o no vacíos) es numerable.

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Cálculo I – Evaluación 3 – Soluciones

Ejercicio 1. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función estrictamente creciente verificando que $a < f(x) \leqslant b$ para todo $x \in [a, b]$. Definamos $x_1 = a$, y $x_{n+1} = f(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

a) Prueba que $\{x_n\}$ converge a un número $\beta \in]a, b]$.

b) Sea $C = \{f(x) : x \in [a, b], x < \beta\}$. Prueba que $\beta = \sup(C)$ y $\beta \leqslant f(\beta)$.

c) Si la imagen de f es un intervalo prueba que $\beta = f(\beta)$.

Solución. a) Sea $A = \{n \in \mathbb{N} : x_n < x_{n+1}\}$. Como $x_1 = a < f(a) = x_2$ tenemos que $1 \in A$. Supuesto que $n \in A$ tenemos que $x_n < x_{n+1}$ y, como f es estrictamente creciente $x_{n+1} = f(x_n) < f(x_{n+1}) = x_{n+2}$, luego $n + 1 \in A$. Hemos probado así que A es un conjunto inductivo de números naturales por lo que $A = \mathbb{N}$ y por tanto la sucesión $\{x_n\}$ es estrictamente creciente. Como por hipótesis $f([a, b]) \subset]a, b]$, deducimos que b es un mayorante de la sucesión, por lo que dicha sucesión es convergente y sabemos que $\beta = \lim\{x_n\} = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, por lo que $a < \beta \leqslant b$.

b) Observa que $C = \{f(x) : x \in [a, \beta[\}$. Como $\{x_n\}$ es estrictamente creciente, para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $x_n < \beta$. Deducimos que $\{x_{n+1} : n \in \mathbb{N}\} \subset C$. Puesto que todo mayorante de C también es mayorante del conjunto $\{x_{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$ deducimos que ningún número menor que β puede ser mayorante de C. Por tanto, si probamos que β es mayorante de C tendremos que $\beta = \sup(C)$. Sea, pues $a \leqslant x < \beta$. Por definición de supremo, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $x < x_p$, por lo que $f(x) < f(x_p) = x_{p+1} < \beta$, por tanto $f(x) < \beta$, lo que prueba que β es un mayorante de C. Por otra parte, para todo $x \in [a, \beta[$ se tiene que $f(x) < f(\beta)$, luego, $f(\beta)$ es un mayorante de C por lo que $\beta \leqslant f(\beta)$.

c) Veamos que suponer que $\beta < f(\beta)$ lleva a una contradicción. En efecto, supuesto que la imagen de f es un intervalo, deberá ser $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$. Ahora, si $\beta < f(\beta)$, entonces como $]\beta, f(\beta)[\subset [f(a), f(b)] = f([a, b])$ tiene que haber algún $t \in [a, b]$ tal que $\beta < f(t) < f(\beta)$. Como f es estrictamente creciente ha de ser $t < \beta$, pero entonces $f(t) \in C$ por lo que $f(t) \leqslant \beta$ y así llegamos a que $\beta < f(t) \leqslant \beta$ que es claramente contradictorio. ☺

Comentarios. Casi todos hacéis bien el punto a), pocos hacen bien los puntos b) y c). Algunas expresiones que me han llamado la atención son *"conjunto estrictamente creciente"*, *"la función es convergente"*, *"la sucesión será convergente si y sólo si es monótona y acotada"*. Quienes afirman esto último deben pensar que solamente hay sucesiones monótonas. En lo referente a los puntos b) y c) algunos razonan a *mocosuena* y afirman haber probado lo que se pide cuando en realidad no han probado nada. Un ejemplo de esto es ponerse de partida en situación imposible, como suponer que $f(\beta) > x_n > \beta$, para llegar a una contradicción. No se puede suponer que se cumple algo que ya se sabe que no se cumple. Son bastantes quienes no entienden la definición del conjunto C. Algunos, pocos, menos mal, afirman que $C = \{x_{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$. Está claro que en C hay puntos que no son valores de la sucesión $\{x_n\}$. Por ejemplo, considera cualquier punto u tal que $a = x_1 < u < x_2 = f(a)$ y define $u_1 = u$, $u_{n+1} = f(u_n)$. La sucesión $\{u_n\}$ así definida no tienen ningún valor en común con la $\{x_n\}$. Lo que es peor, si f es continua se verifica que $C = f([a, \beta[) = [f(a), f(\beta)[$ es un intervalo, por lo que no es un conjunto numerable y no se pueden expresar sus puntos como una sucesión. Algunos usan en su razonamiento, sin probarlo porque les parece evidente, que para todo $x \in C$ se verifica que $x < f(x)$. Y eso es cierto pero me parece más difícil probarlo que lo que se pide en el ejercicio. Veámoslo:

> Supongamos $x \in [a, \beta[$. Si existe algún $n \in \mathbb{N}$ tal que $x = x_n$ entonces es claro que $x = x_n < x_{n+1} = f(x_n) = f(x)$, es decir, $x < f(x)$. Si para todo $n \in \mathbb{N}$ es $x \neq x_n$, definamos $q = \min\{n \in \mathbb{N} : x < x_n\}$ (ese conjunto de números naturales no es vacío). Observa que $q \geqslant 2$. Tenemos que $x_{q-1} < x < x_q$ por lo que $x < x_q = f(x_{q-1}) < f(x)$, luego $x < f(x)$.

Por supuesto, la desigualdad $x < f(x)$ no tiene por qué ser cierta si $\beta < x \leqslant b$, es fácil verlo con una gráfica apropiada.

En los dos ejercicios se repite una confusión frecuente que consiste en *olvidar* que un conjunto del tipo $A = \{n \in \mathbb{N} : x_n < x_{n+1}\}$ está formado por números naturales y escribir cosas que no tienen sentido, como $x_n \in A$ porque x_n puede ser cualquier número real. Creo que he insistido mucho en que tenéis que leer bien los conjuntos para evitar ese tipo de confusiones.

En el punto c) algunos usan un teorema sobre funciones monótonas y propiedad del valor intermedio que asegura la continuidad de la función f en las hipótesis hechas en dicho punto. Si lo hacen correctamente lo he considerado bien aunque la idea de este ejercicio no era usar la continuidad.

Ejercicio 2. Sea $\{x_n\}$ la sucesisón definida por

$$x_1 = 2, \qquad x_{n+1} = \frac{4x_n + a}{x_n + 4} \quad (4 < a < 16)$$

a) Estudia la convergencia de dicha sucesión.

b) Prueba que $0 < \sqrt{a} - x_{n+1} < \dfrac{1}{3}(\sqrt{a} - x_n)$ y deduce que $0 < \sqrt{a} - x_{n+1} < \dfrac{1}{3^n}(\sqrt{a} - 2)$.

Solución. a) Es claro que todos los términos de la sucesión son positivos. Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \dfrac{4x + a}{x + 4}$ para todo $x > 0$. Tenemos que $f(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ es $x_{n+1} = f(x_n)$. Cualesquiera sean $x, y \in \mathbb{R}^+$ tenemos:

$$f(y) - f(x) = \frac{4y + a}{y + 4} - \frac{4x + a}{x + 4} = \frac{4yx + 16y + ax + 4a - 4xy - 16x - ay - 4a}{(y + 4)(x + 4)} = \frac{(16 - a)}{(y + 4)(x + 4)}(y - x)$$

Como $a < 16$ se verifica que $\frac{(16-a)}{(y+4)(x+4)} > 0$ y deducimos que $x < y \Longleftrightarrow f(x) < f(y)$ por lo que f es estrictamente creciente en $\mathbb{R}^+$. Como $x_2 = \frac{8+a}{6} > \frac{12}{6} = 2 = x_1$, deducimos, al igual que en el ejercicio anterior, o por un resultado conocido que podemos aplicar en esta situación, que $\{x_n\}$ es estrictamente creciente. Además como $f(x) < \frac{4x_n+16}{x_n+4} = 4$ se sigue que $\{x_n\}$ está mayorada por lo que es convergente. Pongamos $\ell = \lim\{x_n\}$. Claro está, $\ell > 0$, y usando los resultados conocidos del álgebra de límites deducimos que debe verificarse la igualdad

$$\ell = \frac{4\ell + a}{\ell + 4} \Longrightarrow \ell^2 = a \Longrightarrow \ell = \sqrt{a}$$

b) Como $\{x_n\}$ es estrictamente creciente, para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $x_n < \sqrt{2}$. Tenemos que

$$0 < \sqrt{2} - x_{n+1} = \sqrt{a} - \frac{4x_n + a}{x_n + 4} = \frac{\sqrt{a}x_n + 4\sqrt{a} - 4x_n - a}{x_n + 4} = \frac{(4 - \sqrt{a})(\sqrt{a} - x_n)}{x_n + 4} < \frac{1}{3}(\sqrt{a} - x_n) \quad (1)$$

Donde hemos tenido en cuenta que $4 - \sqrt{a} < 2$ y $x_n + 4 \geqslant 6$. A partir de esta desigualdad se deduce fácilmente por inducción o por aplicación reiterada de la misma que $0 < \sqrt{a} - x_{n+1} < \dfrac{1}{3^n}(\sqrt{a} - 2)$. Para hacerlo por inducción se considera el conjunto

$$A = \left\{ n \in \mathbb{N} : 0 < \sqrt{a} - x_{n+1} < \frac{1}{3^n}(\sqrt{a} - 2) \right\}$$

Como consecuencia de la desigualdad (1) para $n = 1$, se verifica que $1 \in A$. Supuesto que $n \in A$, sustituyendo n por $n + 1$ en la desigualdad (1) se deduce enseguida que $n + 1 \in A$, luego $A = \mathbb{N}$. ☺

Comentarios. Este ejercicio lo hacéis bien casi todos. Eso sí, algunos se complican de forma increíble. Hicimos un ejercicio muy parecido en el que la sucesión convergía a $\sqrt{5}$ y siguiendo su modelo podía hacerse este. Tanto es así que algunos sustituyen $\sqrt{a}$ por $\sqrt{5}$ sin darse cuenta del despiste. Quiero insistir en la importancia de usar correctamente la notación matemática. No inventéis símbolos nuevos, como flechas y cosas así, respetad el significado de cada símbolo, no quitéis las llaves $\{\,.\,\}$ a las sucesiones, no es lo mismo una implicación que una equivalencia. Cuando quieres convertir una desigualdad en otra equivalente debes usar símbolos de equivalencia. He comprobado al calificar que este ejercicio se puede hacer casi de cualquier forma, lo hagas como lo hagas, si no cometes errores, llegas a donde tienes que llegar.

Lo que me ha llamado la atención en general, es la poca importancia que muchos dais a explicar correctamente lo que hacéis, parece que os diera pereza escribir unas pocas palabras para despejar posibles ambigüedades, y eso hace que quien evalúa se quede a veces con la duda de si quien se expresa de esa forma tan concisa, sin explicar mínimamente lo que hace o explicándolo de forma confusa, entiende realmente lo que ha escrito. Todo esto tiene que ver con la ingrata tarea de evaluar, a los profesores nos disgusta vernos en la necesidad de tener que interpretar lo que no está claramente escrito porque queda la duda de si lo hacemos correctamente.

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Cálculo I – Evaluación 4 – Soluciones

Ejercicio 1. Sea $\{x_n\}$ una sucesión mayorada y pongamos

$$A_n = \{x_k : k \geqslant n\}, \quad \beta_n = \sup(A_n).$$

Sea $A = \{n\in\mathbb{N} : \beta_n \in A_n\}$. Prueba que:

i) Si el conjunto A es finito entonces $\{x_n\}$ tiene una sucesión parcial estrictamente creciente.

ii) Si el conjunto A es infinito entonces $\{x_n\}$ tiene una sucesión parcial decreciente.

Solución. i) Teniendo en cuenta que $\beta_n \in A_n$ significa que A_n tiene máximo, es claro que el conjunto $B = \{n\in\mathbb{N} : x_n = \text{máx}(A_n)\}$ está contenido en A por lo que es finito. Si $B = \emptyset$ pongamos $m_0 = 1$, en otro caso $m_0 = \text{máx}(B) + 1$. Para todo $n \geqslant m_0$ se verifica que x_n no es máximo de A_n por lo que existe $p > n$, tal que $x_n < x_p$. Definimos $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ por:

$$\sigma(1) = m_0, \quad \sigma(n+1) = \text{mín}\,\{p\in\mathbb{N} : p > \sigma(n),\ x_\sigma(n) < x_p\}$$

Con ello tenemos que $\{x_{\sigma(n)}\}$ es una sucesión parcial estrictamente creciente de $\{x_n\}$.

ii) Para cada $n\in\mathbb{N}$, como A es infinito, existe $p\in A$ con $p > n$ y $q \geqslant p$ tal que $x_q = \text{máx}(A_p)$. Como $A_q \subset A_p$ se verifica que x_q es un mayorante de A_q, es decir, $x_q = \text{máx}(A_q)$. Hemos probado así que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $q > n$ tal que $x_q = \text{máx}(A_q)$, por tanto el conjunto $B = \{n\in\mathbb{N} : x_n = \text{máx}(A_n)\}$ es infinito. Sea $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una aplicación estrictamente creciente con $\sigma(\mathbb{N}) = B$. Con ello tenemos que $\{x_{\sigma(n)}\}$ es una sucesión parcial de $\{x_n\}$, y como $x_{\sigma(n)} = \text{máx}(A_{\sigma(n)})$ y $x_{\sigma(n+1)} \in A_{\sigma(n)}$, se verifica que $x_{\sigma(n)} \geqslant x_{\sigma(n+1)}$, es decir, la sucesión $\{x_{\sigma(n)}\}$ es decreciente. ☺

Comentarios. La forma en que he hecho este ejercicio es la que me parece más directamente relacionada con lo que hemos visto en clase. La clave del punto i) es probar que hay un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant n_0$ se verifica que hay algún $p > n$ con $x_n < x_p$. Podemos probar esto como sigue. Como A es finito, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant n_0$ se tiene que $n \notin A$, es decir, A_n no tiene máximo, por lo que $x_n \in A_n$ no puede ser mayorante de A_n, es decir, existe $p > n$ tal que $x_n < x_p$. O también, como para $n \geqslant n_0$ $\beta_n \notin A_n$, se tiene que $x_n < \beta_n$ y, por definición de supremo, debe existir algún $p > n$ tal que $x_n < x_p$. Algunos razonáis esto de una forma algo diferente, como sigue. Decís:

> Como $\beta_{n_0} \notin A_{n_0}$ entonces para todo $n \geqslant n_0$ se tiene que $x_n < \beta_{n_0}$ por lo que existe $p > n$ tal que $x_n < x_p$.

Esa afirmación no es del todo evidente, lo que sí es evidente es que existe algún $p \geqslant n_0$ tal que $x_n < x_p$. Se me ocurre la siguiente justificación: si $n \geqslant n_0$, el conjunto $\{p\in\mathbb{N} : p \geqslant n_0, x_n < x_p\}$ no puede ser finito porque si lo fuera A_{n_0} tendría máximo, luego existe $p > n$ tal que $x_n < x_p$.

Donde hay bastantes errores es en el punto ii) porque algunos razonáis como sigue.

> Como A es infinito, sea $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una aplicación estrictamente creciente tal que $\sigma(\mathbb{N}) = A$, entonces $\{\beta_{\sigma(n)}\}$ es una sucesión parcial de $\{x_n\}$, y como $A_{\sigma(n+1)} \subset A_{\sigma(n)}$ se tiene que $\beta_{\sigma(n)} \geqslant \beta_{\sigma(n+1)}$ y la sucesión $\{\beta_{\sigma(n)}\}$ es decreciente.

El error está en afirmar que $\{\beta_{\sigma(n)}\}$ es una parcial de $\{x_n\}$. Claro está que como $\beta_{\sigma(n)} = \text{máx}(A_{\sigma(n)})$, hay números $p \geqslant \sigma(n)$ tales que $\beta_{\sigma(n)} = x_p$ ¿cómo elegimos uno de ellos? Si no lo especificamos no estamos definiendo una parcial de $\{x_n\}$. La elección más razonable es quedarse con el primer término de $A_{\sigma(n)}$ que sea igual a su máximo, esto lleva a definir una aplicación $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ como sigue

$$\varphi(n) = \text{mín}\left\{p\in\mathbb{N} : p \geqslant \sigma(n), x_p = \beta_{\sigma(n)}\right\} \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

Pero no está nada claro que esa aplicación φ sea estrictamente creciente (intenta probarlo o dar un contraejemplo). Un arreglo que se me ocurre es modificar la definición como sigue:

$$\begin{aligned} \varphi(1) &= \text{mín}\left\{p\in\mathbb{N} : p \geqslant \sigma(1), x_p = \beta_{\sigma(1)}\right\} \\ \varphi(n+1) &= \text{mín}\left\{p\in\mathbb{N} : p \geqslant \sigma(\varphi(n)+1), x_p = \beta_{\sigma(\varphi(n)+1)}\right\} \quad \forall n\in\mathbb{N} \end{aligned}$$

Con ello nos aseguramos de que al ser $\varphi(n+1) \geqslant \sigma(\varphi(n)+1) \geqslant \varphi(n)+1 > \varphi(n)$, la aplicación φ es estrictamente creciente y por tanto $\{x_{\varphi(n)}\}$ es una parcial de $\{x_n\}$. Además para todo $n\in\mathbb{N}$ con $n \geqslant 2$ se tiene que $x_{\varphi(n+1)} = \beta_{\sigma(\varphi(n)+1)} \leqslant \beta_{\sigma(\varphi(n-1)+1)} = x_{\varphi(n)}$; y $x_{\varphi(2)} = \beta_{\sigma(\varphi(1)+1)} \leqslant \beta_{\sigma(1)} = x_{\varphi(1)}$, luego la sucesión $\{x_{\varphi(n)}\}$ es decreciente.

Si esto te parece complicado trata de encontrar una solución más sencilla, a mí no se me ocurre. El problema está en la consideración de la sucesión $\{\beta_{\sigma(n)}\}$ que lo complica todo. También hay algunos que tratan de atajar y consideran la sucesión $\{x_{\sigma(n)}\}$ pero esa sucesión no tiene por qué ser decreciente, claro quienes hacen eso posiblemente piensan que $x_{\sigma(n)} = \beta_{\sigma(n)}$ lo que no tiene por qué ser así.

Hay quien prueba que si el conjunto A es infinito entonces $A = \mathbb{N}$. Y es cierto. Dado $q\in\mathbb{N}$, por ser A infinito, existe $n \in A$ con $n > q$. Como $A_n \subset A_q$ se tiene que $\beta_n \in A_q$ y como $\beta_n \geqslant x_k$ para todo $k \geqslant n$, deducimos que $\text{máx}\left\{ \{x_k : q \leqslant k \leqslant n-1\} \cup \{\beta_n\} \right\} = \text{máx}(A_q)$, luego $q \in A$. Por tanto, la aplicación σ antes considerada es la identidad, lo que simplifica un poco las cosas.

También hay quien prueba que si el conjunto A es finito entonces la sucesión $\{\beta_n\}$ es constante a partir de un término en adelante. En efecto, sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geqslant n_0$ se tiene que $n \notin A$. Para $n > n_0$ se tiene que $\beta_n \leqslant \beta_{n_0}$. Si fuera $\beta_n < \beta_{n_0}$ entonces como $A_{n_0} = A_n \cup \{x_k : n < k \leqslant n_0\}$, se verifica que $\beta_{n_0} = \text{máx}\left\{\beta_n, \text{máx}\{x_k : n < k \leqslant n_0\}\right\}$, por lo que si $\beta_n < \beta_{n_0}$ debe ser $\beta_{n_0} = \text{máx}\{x_k : n < k \leqslant n_0\}$, luego $\beta_{n_0} \in A_{n_0}$, esto es $n_0 \in A$, lo que es contradictorio, luego $\beta_n = \beta_{n_0}$. Este resultado es bastante evidente si tienes en cuenta que la sucesión parcial, $\{x_{\sigma(n)}\}$, definida en el punto i) verifica que es estrictamente creciente y para todo $n \geqslant m_0$ es $x_n \leqslant x_{\sigma(n)}$ de donde se deduce enseguida que para $n \geqslant m_0$ es $\beta_n = \beta_{m_0} = \sup\left\{x_{\sigma(n)} : n\in\mathbb{N}\right\}$.

Lo que tienes que sacar en claro de este ejercicio es que si quieres probar la existencia de una sucesión parcial $\{x_{\sigma(n)}\}$ tienes que definir la aplicación σ, con frecuencia ello obliga a probar que ciertos conjuntos de números naturales no son vacíos.

Ejercicio 2. Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada y α, β, números reales. Se verifica entonces que:

i) $\alpha = \underline{\text{lím}}\{x_n\}$ si, y sólo si, para todo $\varepsilon > 0$ el conjunto $\{n\in\mathbb{N} \colon x_n < \alpha - \varepsilon\}$ es finito y el conjunto $\{n\in\mathbb{N} \colon x_n < \alpha + \varepsilon\}$ es infinito.

ii) $\beta = \overline{\text{lím}}\{x_n\}$ si, y sólo si, para todo $\varepsilon > 0$ el conjunto $\{n\in\mathbb{N} \colon x_n > \beta + \varepsilon\}$ es finito y el conjunto $\{n\in\mathbb{N} \colon x_n > \beta - \varepsilon\}$ es infinito.

Solución. i) Sea $A_n = \{x_k : k \geqslant n\}$ y $\alpha_n = \text{ínf}(A_n)$. Sabemos que la sucesión $\{\alpha_n\}$ es creciente y $\text{lím}\{\alpha_n\} = \sup\{\alpha_n : n\in\mathbb{N}\} = \underline{\text{lím}}\{x_n\}$. Pongamos $\alpha = \underline{\text{lím}}\{x_n\}$. Dado $\varepsilon > 0$, por definición de supremo, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $\alpha - \varepsilon < \alpha_{n_0} \leqslant \alpha$, luego para todo $n \geqslant n_0$ se verifica $x_n \geqslant \alpha_{n_0} > \alpha - \varepsilon$, por tanto el conjunto $\{n\in\mathbb{N} \colon x_n < \alpha - \varepsilon\}$ es finito. Dado $n\in\mathbb{N}$ como $\alpha_n < \alpha + \varepsilon$, por la definición de ínfimo, debe existir $p \geqslant n$ tal que $x_p < \alpha + \varepsilon$. Por tanto el conjunto $\{n\in\mathbb{N} \colon x_n < \alpha + \varepsilon\}$ es infinito.

Recíprocamente, dado $\varepsilon > 0$, como el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n < \alpha - \varepsilon\}$ es finito, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant n_0$ se verifica que $\alpha - \varepsilon \leqslant x_n$, luego $\alpha - \varepsilon \leqslant \alpha_{n_0}$ y, como $\{\alpha_n\}$ es creciente, para todo $n \geqslant n_0$ tenemos que $\alpha_n \geqslant \alpha - \varepsilon$, lo que implica que $\text{lím}\{\alpha_n\} \geqslant \alpha - \varepsilon$. Ahora, como el conjunto $\{n\in\mathbb{N} \colon x_n < \alpha + \varepsilon\}$ es infinito, deducimos que cualquiera sea $n\in\mathbb{N}$ hay algún $p > n$ tal que

$x_p < \alpha + \varepsilon$ lo que implica que $\alpha_n < \alpha + \varepsilon$ y deducimos que $\lim\{\alpha_n\} \leqslant \alpha + \varepsilon$. Hemos probado así que para todo $\varepsilon > 0$, se verifica que $\alpha - \varepsilon \leqslant \lim\{\alpha_n\} \leqslant \alpha + \varepsilon$, lo que implica que $\lim\{\alpha_n\} = \alpha$, es decir, $\alpha = \underline{\lim}\{x_n\}$.

La segunda parte de este ejercicio se hace de forma muy parecida. ☺

Comentarios. Sería demasiado extenso recoger aquí todas las cosas extrañas que he leído en este ejercicio. Algunos afirman que la sucesión $\{\alpha_n\}$ es decreciente, otros confunden A_n con α_n y escriben cosas como $\alpha - \varepsilon < A_n < \alpha + \varepsilon$. Por supuesto, algunos afirman que el conjunto $\{x_n : x_n < \alpha + \varepsilon\}$ es infinito, porque no saben distinguir entre ese conjunto y el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n < \alpha + \varepsilon\}$. En un ejercicio como este, y en muchos otros, el anterior sin ir más lejos, es muy conveniente considerar algunas sucesiones particulares sencillas para comprobar nuestras afirmaciones; por ejemplo, conviene considerar una sucesión constante, y una sucesión estrictamente monótona creciente o decreciente, o la sucesión $\{(-1)^n\}$, así pueden evitarse muchos errores. También puedes considerar sucesiones en las que un mismo término se repite un número finito de veces. Por ejemplo, definamos

$$x_{2^k} = x_{2^k+1} = \cdots = x_{2^{k+1}-1} = 1 + \frac{1}{k+1} \qquad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Se trata de una sucesión decreciente y el término x_{2^k} aparece repetido 2^k veces. Ahora podemos definir $z_{2n} = x_{2n}$ y $z_{2n-1} = -x_{2n-1}$. La sucesión $\{z_n\}$ tiene una parcial creciente y otra decreciente y los términos de la primera son menores que los de la segunda. Pongo este ejemplo porque creo que tenéis una idea demasiado simple de las sucesiones.

Me ha llamado la atención la forma tan extraña en que muchos habláis de los conjuntos de números naturales. Si A es un conjunto de números naturales no vacío, las expresiones A *está acotado* o A *está mayorado* no se usan, sino que se dice que A es finito, la expresión *supremo de* A tampoco se usa sino máximo de A.

Ejercicio 3. Calcula los límites de las sucesiones:

$$a)\ x_n = \left(1 + \log\frac{n^2+1}{n^2+n+1}\right)^n; \qquad b)\ y_n = \frac{\frac{1}{2\log 2} + \frac{1}{3\log 3} + \cdots + \frac{1}{n\log n}}{\log(\log(n+1))}$$

Solución. a) Se trata de una sucesión de la forma $x_n = u_n^{v_n}$ donde $u_n = 1 + \log\dfrac{n^2+1}{n^2+n+1}$ y $v_n = n$. Puesto que $\dfrac{n^2+1}{n^2+n+1} \to 1$, se tiene que $u_n \to 1$, por lo que el límite pedido es una indeterminación del tipo 1^∞. Usaremos el criterio de equivalencia logarítmica según el cual $x_n = u_n^{v_n} \to \mathrm{e}^L$ donde $L = \lim v_n(u_n - 1)$. Tenemos:

$$v_n(u_n-1) = n\log\frac{n^2+1}{n^2+n+1} \sim n\left(\frac{n^2+1}{n^2+n+1} - 1\right) = -\frac{n^2}{n^2+n+1} \to -1$$

Concluimos que $\lim\{x_n\} = 1/\mathrm{e}$.

b) Puesto que la sucesión $\{\log(\log(n+1))\}$ es estrictamente creciente y divergente podemos aplicar el criterio de Stolz. Pongamos $y_n = \dfrac{a_n}{b_n}$. Tenemos:

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \frac{\dfrac{1}{(n+1)\log(n+1)}}{\log(\log(n+2)) - \log(\log(n+1))} = \frac{1}{(n+1)\log(n+1)\log\left(\dfrac{\log(n+2)}{\log(n+1)}\right)}$$

Puesto que $\dfrac{\log(n+2)}{\log(n+1)} \to 1$, tenemos que:

$$(n+1)\log(n+1)\log\left(\frac{\log(n+2)}{\log(n+1)}\right) \sim (n+1)\log(n+1)\left(\frac{\log(n+2)}{\log(n+1)} - 1\right) =$$
$$(n+1)(\log(n+2) - \log(n+1)) = (n+1)\log\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \sim (n+1)\left(\frac{n+2}{n+1} - 1\right) = 1$$

Obtenemos así que $\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \to 1$ y, por el criterio de Stolz, $\{y_n\} \to 1$. ☺

Comentario. Nada nuevo hay en este ejercicio. Hemos hecho algunos parecidos. Los criterios de equivalencia logarítmica y de Stolz los hemos usado para calcular límites. La equivalencia asintótica $\log(z_n) \sim z_n - 1$, válida cuando $\{z_n\} \to 1$, la hemos usado repetidas veces. Llama la atención la forma en que muchos de vosotros os las arregláis para hacer complicado lo que es sencillo. Por ejemplo, hay quien para justificar que $\dfrac{n^2+1}{n^2+n+1} \to 1$ (algo que no necesita ninguna justificación) ¡aplica el criterio de Stolz! Alguno incluso utiliza derivadas y la ¡regla de l'Hôpital! debe pensar que todo vale. Bastantes siguen sin enterarse de que solamente pueden hacerse sustituciones por equivalencias asintóticas en productos. Insisto: solamente en productos. Por ejemplo, no es cierto en general que si $a_n \sim b_n \sim 1$ y $c_n \to +\infty$ se verifique que $(a_n)^{c_n} \sim (b_n)^{c_n}$. Basta considerar:

$$\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^{n^2} = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \to \mathrm{e}, \qquad \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \to +\infty$$

Y claramente $\dfrac{n^2+1}{n^2} \sim \dfrac{n+1}{n} \sim 1$. Tampoco es cierto que si $\{x_n\} \sim \{y_n\}$ se verifique que $\{\mathrm{e}^{x_n}\} \sim \{\mathrm{e}^{y_n}\}$. Por ejemplo, $\{n^2\} \sim \{n^2+n\}$, pero $\frac{\mathrm{e}^{n^2+n}}{\mathrm{e}^{n^2}} = \mathrm{e}^n \to +\infty$. Tampoco pueden hacerse equivalencias asintóticas en diferencias. Por ejemplo, aunque $\log\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^4}\right) \sim \frac{1}{n}+\frac{1}{n^4}$ y $\log\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$, no es verdad que $\log\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^4}\right) - \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$ sea asintóticamente equivalente a $\frac{1}{n^4}$.

Para terminar, quiero que sepáis que soy consciente de que los dos primeros ejercicios tienen *cierto grado de dificultad* porque para hacerlos no basta con usar una regla más o menos mecánica, como puede ser una equivalencia asintótica, sino que *hay que pensar un poco*. En general, vuestra respuesta ha sido buena. Creo que muchos de vosotros sois ya conscientes del alto nivel de exigencia que tienen las matemáticas, de la necesidad de ser rigurosos en los razonamientos y claros y precisos en la exposición, lo que no debe extrañaros porque, eso debéis de saberlo bien vosotros que estudiáis Informática y Matemáticas, la programación es un arte que no permite absolutamente ningún error, ni más ni menos que como hacer matemáticas.

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Cálculo I – Evaluación 5 – Soluciones

1. Estudia según los valores de $a \in \mathbb{R}$ la convergencia de las series:

$$\text{a)} \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{((3n)!)^2}{(n!)^6} a^{6n}; \qquad\qquad \text{b)} \sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{4\cdot 6\cdot 8\ldots(2n+2)}{9\cdot 11\cdot 13\ldots(2n+7)}\right)^a$$

Solución.

a) Pongamos $a_n = \dfrac{((3n)!)^2}{(n!)^6} a^{6n}$. Si $a=0$, se trata de la serie nula que, evidentemente, converge a 0. Supuesto que $a \neq 0$, se trata de una serie de términos positivos. La forma de a_n sugiere aplicar el criterio del cociente. Tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{((3(n+1))!)^2}{((n+1)!)^6}\frac{(n!)^6}{((3n)!)^2}a^6 = \frac{((3n+3)!)^2}{((3n)!)^2}\frac{1}{(n+1)^6}a^6 = \\ &= \frac{(3n+3)^2(3n+2)^2(3n+1)^2}{(n+1)^6}a^6 = \frac{3^2(3n+2)^2(3n+1)^2}{(n+1)^4}a^6 \quad \longrightarrow \quad 3^6a^6\end{aligned}$$

Por tanto, si $3^6a^6 < 1$, es decir, $|a| < \frac{1}{3}$, la serie es convergente, y si $|a| > \frac{1}{3}$, la serie es divergente. El caso en que $|a| = \frac{1}{3}$, el cociente $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge a 1 por valores menores que 1, por lo que el criterio del cociente no proporciona información sobre la convergencia de la serie. Para estudiar este caso podemos usar el criterio de Raabe en su forma alternativa. Si $|a| = \frac{1}{3}$, tenemos que

$$\begin{aligned}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^n &= \left(\frac{3^4(n+1)^4}{(3n+2)^2(3n+1)^2}\right)^n = \left(\frac{3n+3}{3n+2}\right)^{2n}\left(\frac{3n+3}{3n+1}\right)^{2n} = \\ &= \left(1+\frac{1}{3n+2}\right)^{2n}\left(1+\frac{2}{3n+1}\right)^{2n} \longrightarrow \mathrm{e}^{\frac{2}{3}}\,\mathrm{e}^{\frac{4}{3}} = \mathrm{e}^2\end{aligned}$$

Concluimos que para $|a| = \frac{1}{3}$ la serie es convergente.

b) Pongamos $a_n = \left(\dfrac{4\cdot 6\cdot 8\ldots(2n+2)}{9\cdot 11\cdot 13\ldots(2n+7)}\right)^a$. Para $a \leqslant 0$ se tiene que $a_n \geqslant 1$, por lo que, al no cumplirse la condición necesaria de convergencia, la serie es divergente. Supuesto que $a > 0$, tenemos que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{2n+4}{2n+9}\right)^a \longrightarrow 1$$

Como el cociente $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge a 1 por valores menores que 1, el criterio del cociente no proporciona información sobre la convergencia de la serie. Usaremos seguidamente el criterio de Raabe en su forma alternativa.

$$\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^n = \left(\frac{2n+9}{2n+4}\right)^{an} = \left(1+\frac{5}{2n+4}\right)^{an} \longrightarrow \mathrm{e}^{\frac{5}{2}a}$$

Luego si $a > \frac{2}{5}$ la serie es convergente y si $a < \frac{2}{5}$ la serie es divergente.

Comentarios. Como las potencias de exponente positivo son estrictamente crecientes en $\mathbb{R}^+$, es claro que $3^6a^6 < 1 \Leftrightarrow \sqrt[6]{3^6a^6} < 1 \Leftrightarrow 3\sqrt[6]{a^6} < 1 \Leftrightarrow 3|a| < 1$, porque las raíces pares son positivas y $\sqrt[6]{a^6} = |a|$. Algunos lo olvidan, y no es igual afirmar que la serie en a) converge para $a < \frac{1}{3}$ que para $|a| < \frac{1}{3}$. Para estudiar el caso en que $|a| = \frac{1}{3}$, la mayoría no usáis la forma alternativa del criterio de Raabe sino que lo aplicáis directamente con lo que trabajáis más de lo necesario, si hubierais simplificado del todo puede que hubierais reconocido al número e y podríais haberos ahorrado un poco de trabajo.

En la segunda serie algunos han estudiado lo que pasa cuando $a = \frac{2}{5}$, y para ello han usado una técnica que está explicada en mi libro *Cálculo diferencial e integral de funciones de una variable*. Me parece estupendo, ha sido una agradable sorpresa para mí que algunos de vosotros consultéis ese libro que mis compañeros de Departamento silencian y no recomiendan a sus alumnos aunque sí lo hacen profesores de otras universidades. En este curso hay un grupo de estudiantes a quienes se les dan bien las matemáticas y les gusta esta asignatura pero, como dije, no era necesario hacer este estudio, porque, a diferencia de la primera serie en la que el caso dudoso se resuelve fácilmente con un criterio conocido, en esta segunda serie la técnica aludida es muy específica y no la hemos visto en clase.

2. Estudia la convergencia y la convergencia absoluta de las series:

$$\text{a)} \sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+1}; \qquad \text{b)} \sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n+2}\,\sqrt[n+2]{3}}$$

Solución.

a) Estudiaremos en primer lugar la convergencia absoluta, es decir, la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$ donde $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+1}$. Tenemos que:

$$\frac{1}{n+1} = \frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+\sqrt{n}} \leqslant a_n = \frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+1} < \frac{1}{n}$$

La desigualdad de la izquierda implica, por el criterio básico de comparación, que la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es divergente, es decir, la serie $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}a_n$ no converge absolutamente.

Para ver si es convergente, como se trata de una serie alternada, aplicaremos el criterio de Leibniz. La desigualdad de la derecha implica que $\{a_n\} \to 0$. Probaremos que la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente. Tenemos que:

$$a_{n+1} < a_n \Longleftrightarrow \frac{\sqrt{n+1}}{(n+1)\sqrt{n+1}+1} < \frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+1} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow n\sqrt{n(n+1)} + \sqrt{n+1} < (n+1)\sqrt{n(n+1)} + \sqrt{n} \Longleftrightarrow \sqrt{n+1} < \sqrt{n(n+1)} + \sqrt{n}$$

Como esta última desigualdad es evidentemente cierta para todo $n \in \mathbb{N}$, concluimos que $\{a_n\}$ es decreciente y, por el criterio de Leibniz, la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}a_n$ es convergente.

b) Pongamos $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+2}\,\sqrt[n+2]{3}}$. Puesto que $1 < \sqrt[n+2]{3} < 2$, tenemos que

$$\frac{1}{2\sqrt{n+2}} < a_n < \frac{1}{\sqrt{n+2}}$$

y deducimos, por el criterio básico de comparación, que la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ no es convergente, es decir, la serie $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n a_n$ no converge absolutamente. También deducimos que $\{a_n\} \to 0$. Si probamos que $\{a_n\}$ es decreciente, por el criterio de Leibniz, la serie $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n a_n$ será convergente. Tenemos que

$$\frac{1}{\sqrt{n+3}\,\sqrt[n+3]{3}} < \frac{1}{\sqrt{n+2}\,\sqrt[n+2]{3}} \iff \frac{3^{\frac{1}{n+2}}}{3^{\frac{1}{n+3}}} < \frac{\sqrt{n+3}}{\sqrt{n+2}} \iff 3^{\frac{1}{(n+2)(n+3)}} < \sqrt{\frac{n+3}{n+2}} \tag{1}$$

$$\iff 9^{\frac{1}{(n+2)}} < \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{n+3}$$

Recordemos que para todo $m\in\mathbb{N}$ es $(1+\frac{1}{m})^{m+1} > \mathrm{e}$, y además, como $\mathrm{e}^3 > (\frac{5}{2})^3 = \frac{125}{8} > 9$, es claro que para todo $n\in\mathbb{N}$ es $\mathrm{e}^{n+2} > 9$. Por tanto:

$$\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{n+3} = \left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n+3} > \mathrm{e} > 9^{\frac{1}{(n+2)}}$$

Concluimos que $\{a_n\}$ es decreciente y, por el criterio de Leibniz, la serie $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n a_n$ es convergente.

Comentario. Hay muchas alternativas para estudiar estas series. Por ejemplo, para la primera puede usarse la evidente equivalencia asintótica $\{n+1/\sqrt{n}\} \sim \{n\}$ para deducir que

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+1} = \frac{1}{n+1/\sqrt{n}} \sim \frac{1}{n}$$

Como la serie $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ es divergente, se deduce, por el criterio límite de comparación, que $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ también es divergente, es decir, la serie $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}a_n$ no es absolutamente convergente. Naturalmente, también se deduce que $\{a_n\}\to 0$ puesto que sucesiones asintóticamente equivalentes tienen el mismo límite.

En la segunda serie, puesto que $\left\{\sqrt[n]{3}\right\}\to 1$, puede usarse la equivalencia asintótica

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+2}\,\sqrt[n+2]{3}} \sim \frac{1}{\sqrt{n+2}}$$

para deducir, por el criterio límite de comparación, que $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es divergente, es decir, la serie $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}a_n$ no es absolutamente convergente. Naturalmente, también se deduce que $\{a_n\}\to 0$.

Donde muchos se equivocan es al tratar de probar que la sucesión $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+2}\,\sqrt[n+2]{3}}$ es decreciente. Para probar desigualdades no pueden usarse equivalencias asintóticas ni razonamientos que impliquen límites de sucesiones que convergen más o menos rápidamente como algunos hacéis. Cuando la demostración directa es trabajosa o no evidente, pueden usarse, como he hecho yo, otras desigualdades conocidas. Algunos utilizan la desigualdad básica

$$ab^n < \left(\frac{a+nb}{n+1}\right)^{n+1}$$

Haciendo en ella $a=2, b=1$ y sustituyendo n por $n+1$ para obtener que

$$2 < \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{n+2}$$

y como para todo $n\in\mathbb{N}$ se verifica que $2 > 9^{\frac{1}{n+3}}$, deducir que

$$\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{n+2} > 2 > 9^{\frac{1}{n+3}}.$$

Lo que prueba la desigualdad (1) y por tanto que la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente.

Como podéis comprobar el número e, es decir, las sucesiones que usamos para definirlo, aparecen con frecuencia algo escondidas y hay que saber reconocerlas porque de eso depende muchas veces la resolución de un ejercicio.

En general, los resultados de esta evaluación son buenos, creo que mi insistencia y constante repetición de lo que es una serie han servido para que la mayoría entienda qué es una serie. No es un logro menor, muchos doctores en matemáticas no saben lo que es una serie.