Relación Tema 2

2. Sea $X \neq \emptyset$

V es un $V(K)$

$F(X,V)$ conjunto de las aplicaciones $f: X \to V$. Se definen la suma y producto en $F(X,V)$ así:

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) \quad \forall x \in X, \ \forall f,g \in F(X,V)$$
$$(a\cdot f)(x) = a\cdot f(x) \quad \forall x \in X, \ \forall a \in K, \forall f \in F(X,V)$$

1°) $\forall f,g,h \in F(X,V)$

¿$(f+g)+h = f+(g+h)$?

$\forall x \in X \quad ((f+g)+h)(x) = (f+g)(x)+h(x) = (f(x)+g(x))+h(x) =$
$f(x)+(g(x)+h(x)) = f(x)+(g+h)(x) =$ $(f+(g+h))(x)$

Son elementos de V, donde la suma es asociativa

$\checkmark \Rightarrow$ La suma es asociativa

2°) $\forall f,g \in F(X,V)$

¿$f+g = g+f$?

La suma en V es conmutativa

Sea $x \in X \quad (f+g)(x) = f(x)+g(x) = g(x)+f(x) = (g+f)(x)$

$\checkmark \Rightarrow$ La suma es conmutativa

3°) Elemento neutro

$0: X \to V \quad \forall x \in X \quad 0(x) = 0 \in V$

$\forall x \in X \quad (0+f)(x) = 0(x)+f(x) = 0+f(x) = f(x) \quad 0+f = \ = f+0$

4°) Existencia opuestos

$\forall f \in F(X,V)$ Definimos $-f: X \to V \quad (-f)(x) = -f(x) \in V \quad \forall x \in X$

$\forall x \in X \quad (f+(-f))(x) = f(x)+(-f)(x) = f(x)-f(x) = 0 = 0(x) \Rightarrow f+(-f) = 0$
$(-f)+f = 0$

$(F(X,V),+) \Rightarrow$ Grupo abeliano

5°) $\forall a,b \in K$ $\quad$ ¿$(a+b)f = af + bf$? ✓
$\forall f \in F(X,V)$

Sea $x \in X$, $((a+b)f)(x) = \underbrace{(a+b)}_{\Uparrow K} \cdot \underbrace{f(x)}_{\Uparrow V} = af(x) + bf(x) = (a\cdot f)(x) + (b\cdot f)(x)$

$= (a\cdot f + b\cdot f)(x)$

6°) $\forall a \in K$ $\quad$ ¿$a\cdot(f+g) = af + ag$? ✓
$\forall f, g \in F(X,V)$
$\forall x \in X$ $\quad (a\cdot(f+g))(x) = a\cdot(f+g)(x) = a(\underbrace{f(x)+g(x)}_{\Uparrow}) = af(x) + ag(x) =$
$= (a\cdot f)(x) + (a\cdot g)(x) = (a\cdot f + a\cdot g)(x)$

7°) $\forall a,b \in K$ $\quad$ ¿$a\cdot(b\cdot f) = (a\cdot b)\cdot f$? $\rightarrow$ Se cumple la pseudoasocia. porque $f(x) \in V$
$\forall f \in F(X,V)$
$\forall x \in X$ $\quad (a\cdot(b\cdot f))(x) = a\cdot(b\cdot f)(x) = a\cdot b\cdot f(x)) = (a\cdot b)\cdot f(x) =$
$= ((a\cdot b)\cdot f)(x)$

8°) $\forall f \in F(X,V)$ $\quad$ ¿$1\cdot f = f$? ✓
$(1\cdot f)(x) = 1\cdot f(x) = f(x)$

4. Estudiar si U es subespacio vectorial de V en este caso:
i) $V = \mathbb{R}^3$ $\quad U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z \geq 0\}$
$(0,0,1) \in U$ $\quad 0+0+1 \geq 0$
$(-1)(0,0,1) = (0,0,-1) \in U$?? $\quad 0+0-1 = -1 < 0$

3. b) U_i subespacio de V_i para cada $i = 1,2$. Demostrar que $U_1 \times U_2$ es subespacio de $V_1 \times V_2$.

$\forall a,b \in K$
$\forall (u_1,u_2),(w_1,w_2) \in U_1 \times V_2$
$u_1, w_1 \in U_1 \quad u_2, w_2 \in U_2$

$a(u_1,u_2) + b(w_1,w_2) =$
$(\underbrace{au_1 + bw_1}_{\Uparrow U_1}, \underbrace{au_2 + bw_2}_{\Uparrow U_2})$
Por lo tanto es subespacio

¿Es todo subespacio de $V_1 \times V_2$ de la forma $U_1 \times U_2$ donde cada U_i es subespacio de V_i?

$p: V_1 \times V_2 \longrightarrow V_1$ $\quad q: V_1 \times V_2 \longrightarrow V_2$
$p(v_1,v_2) = v_1$ $\quad q(v_1,v_2) = v_2$

Sea U un subespacio de $V_1 \times V_2$
$p(U) = \{v \in V_1 / \forall v_2 \in V_2 \; (v,v_2) \in U\}$

Escaneado con CamScanner

$q(\mathcal{U}) = \{w \in V_2 / \forall v_1 \in V_1 \ (v_1, w) \in \mathcal{U}\}$

$u_1, v_1 \in p(\mathcal{U}) \quad a, b \in K \quad au_1 + bv_1 \quad (au_1 + bv_1, v_2) = a(u_1, v_2) + b(v_1, 0) \in \mathcal{U}$

$au_1 + bv_1 \in p(\mathcal{U})$ s.v. de V_1

$q(\mathcal{U})$ s.v. de V_2

Entonces, $p(\mathcal{U}) \times q(\mathcal{U}) = \{(v, w) / (v, w) \in \mathcal{U}\}$

$p(\mathcal{U}) \times q(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$

Cualquier subespacio se puede escribir como producto cartesiano.

10. $V = F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Analizar si $S = \{f, g, h\}$ es L.I. donde $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = 2x$ y $h(x) = e^x$.

$a, b, c \in \mathbb{R} \quad a \cdot f(x) + b \cdot g(x) + c \cdot h(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$x = 0 \quad a + c = 0$

$x = 1 \quad 2a + 2b + ec = 0$

$x = \frac{1}{2} \quad \frac{5}{4}a + b + \sqrt{e} \cdot c = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & e \\ \frac{5}{4} & 1 & \sqrt{e} \end{vmatrix} = 2\sqrt{e} + 2 - \frac{5}{2} - e = 2\sqrt{e} - e - \frac{1}{2} \neq 0$$

$a = b = c = 0 \Rightarrow$ Son L.I.

5. ¿Es $v \in L(S)$? Si pertenece, expresar como combinación lineal.

e) $V = \mathbb{R}[x] \quad v = x^2 + x + 1$, $S = \{-x, x^2 + 1, x^3\}$

$v = (-1)(-x) + 1 \cdot (x^2 + 1) + 0 \cdot x^3 = x^2 + x + 1$

Si pertenece

11. V espacio vect. Tomemos $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ y $\{a_1, \dots, a_n\}$ una familia en K con $a_i \neq 0$. Demostrar que $B' = \{a_1 \cdot v_1, \dots, a_n v_n\}$ es una base de V. Concluir que V tiene infinitas bases.

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & a_3 & \\ 0 & \vdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \dots & a_n \end{pmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0 \quad B' \text{ es lin. ind.}$$

B' es otra base de V

Escaneado con CamScanner

9. $U_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-y=0, z-t=0\}$

$U_2 = \mathcal{L}(\{(0,1,1,0)\})$

$U_3 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x-y+z-t=0\}$

$\dim_{\mathbb{R}}(U_1)=2 \quad \dim_{\mathbb{R}}(U_2)=1 \quad \dim_{\mathbb{R}}(U_3)=3$

¿$U_1+U_2=U_3$? ¿$U_3=U_1 \oplus U_2$? Estamos suponiendo la primera pregunta como afirmativa

$U_1 \cap U_2 = \{0\}$

$$\dim_{\mathbb{R}}(U_1+U_2) = \underset{3}{\dim_{\mathbb{R}}(U_3)} + \underset{0}{\dim_{\mathbb{R}}(U_1 \cap U_2)} = \underset{2}{\dim_{\mathbb{R}}(U_1)} + \underset{1}{\dim_{\mathbb{R}}(U_2)}$$

Base de U_1

$\{(1,1,0,0),(0,0,1,1)\}$ S. g. de $U_1+U_2 = \{(0,1,1,0),(1,1,0,0),(0,0,1,1)\}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow$$ Entonces es una base, por lo que $\dim(U_1+U_2)=3$

$U_1+U_2 \subset U_3 \Rightarrow$ Como los dos tienen la misma dimensión se da la igualdad.

Hay que ver que los tres vectores cumplen que $x-y+z-t=0$

Se cumple, por lo que $U_1+U_2 \subset U_3$

14. $S=\{v_1,\dots,v_m\}$

V es espacio vectorial

a) Si S es s.g. y al eliminar cualquier vector no es s.g., entonces es base.

Sea $c_1v_1+c_2v_2+\dots+c_mv_m=0$ (Supongamos que son L.D)

Si algún $c_i \neq 0$ $(c_1 \neq 0)$

$$v_1 = -c_1^{-1}c_2v_2 - \dots - c_1^{-1}c_mv_m$$

$\forall v \in V \ \exists d_1,d_2,\dots,d_m \in K \mid v = d_1v_1+\dots+d_mv_n =$

$= -d_1c_1^{-1}c_2v_2 - \dots - d_1c_1^{-1}c_mv_m + d_2v_2 + \dots + d_mv_m =$

$= (d_2-d_1c_1^{-1}c_2)v_2 + (d_3-d_1c_1^{-1}c_3)v_3 + \dots + (d_m-d_1c_1^{-1}c_m)v_m$

$\Rightarrow \{v_2,v_3,\dots v_m\}$ es s.g. de V

b) Si S es L.I. y al añadir un vector es L.D, entonces S es base de V

Si S no es un s.g. de V:

$\exists w \in V / w$ no es combinación lineal de $\{v_1, \dots, v_m\}$

Entonces $\{w, v_1, \dots, v_m\}$ es L.I.

$$aw + a_1v_1 + \dots + a_mv_m = 0$$

Si $a = 0 \Rightarrow a_1 = \dots = a_m = 0$

Si $a \neq 0$ $\exists a^{-1}$ $w = -a^{-1}a_1v_1 - \dots - a^{-1}a_mv_m$ contrad.

13. V es un espacio vectorial complejo $\dim_{\mathbb{C}}(V) = n$. Demostrar que V es un espacio vectorial real con $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 2n$

Si $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es base de $V(\mathbb{C})$

$\forall v \in V$ $\exists z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C} / v = z_1v_1 + z_2v_2 + \dots + z_nv_n$

$\forall j \in \{1, \dots, n\}$ $z_j = a_j + b_j i$ $a_j, b_j \in \mathbb{R}$

$$v = (a_1 + ib_1)v_1 + (a_2 + ib_2)v_2 + \dots + (a_n + ib_n)v_n =$$
$$= a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n + b_1(iv_1) + b_2(iv_2) + \dots + b_n(iv_n)$$

$\Rightarrow \{v_1, v_2, \dots, v_n, iv_1, iv_2, \dots, iv_n\}$ es sist. de gen. de $V(\mathbb{R})$

$\hookrightarrow$ Veamos que es L.I. Supongamos que $\exists d_1, d_2, \dots, d_n, e_1, e_2, \dots, e_n \in \mathbb{R} / d_1v_1 + d_2v_2 + \dots + d_nv_n + e_1(iv_1) + e_2(iv_2) + \dots + e_n(iv_n) = 0$

$$(d_1 + ie_1)v_1 + (d_2 + ie_2)v_2 + \dots + (d_n + ie_n)v_n = 0$$

Como $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ son L.I, entonces:

$$d_1 + ie_1 = d_2 + ie_2 = \dots = d_n + ie_n = 0 \Rightarrow d_n = e_n$$

Por lo tanto es una base de $V(\mathbb{R})$

La respuesta al 26a por esto es NO.

22. $P^2(\mathbb{R})$ $B = \{1, 1+x, 1+x^2+x\}$ $B' = \{1, x, x^2\}$

¿Relación coordenadas de un polinomio en la base B con respecto con las de la base B'?

$p(x) = (a_1, b_1, c_1)_B$ $p(x) = (a_1', b_1', c_1')_{B'}$

$p(x) = a_1 \cdot 1 + b_1(1+x) + c_1(1+x+x^2) = \underline{(a_1+b_1+c_1) + (b_1+c_1)x + c_1x^2}$

$a_1' \cdot 1 + b_1'x + c_1'x^2 \Rightarrow$ $a_1' = a_1 + b_1 + c_1$, $b_1' = b_1 + c_1$, $c_1' = c_1$

Encontrar un $p(x)$ tal que $p(x)_B = (1,-2,4)_B$

$p(x) = 1\cdot 1 - 2\cdot(1+x) + 4(1+x+x^2) = 4x^2+2x+3$

6. $V(K)$

c) Si $U_i = \mathcal{L}(S_i)$ para cada $i=1,\dots,m$. ¿Es cierto que

$\bigcap_{i=1}^{m} U_i = \mathcal{L}(\bigcap_{i=1}^{m} S_i)$?

$i=2$

$U_1 = \mathcal{L}(S_1)$ $\quad U_1\cap U_2 = \mathcal{L}(S_1\cap S_2)$

$U_2 = \mathcal{L}(S_2)$

$\mathcal{L}(S_1\cap S_2) = \{x = x_1t_1+\dots+x_nt_n \mid x_1,\dots,x_n\in K \mid t_1,\dots,t_n \in S_1\cap S_2\}$

$U_1\cap U_2 = \{x\in U_1\cap U_2\} = \left\{\begin{array}{l} x = y_1v_1+\dots y_kv_k \text{ con } v_1,\dots,v_k\in S_1 \\ x = z_1w_1+\dots z_\ell w_\ell \text{ con } w_1,\dots,w_\ell \in S_2\end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} t_1,\dots,t_n \in S_1 \quad x\in U_1 \\ t_1,\dots,t_n\in S_2 \quad x\in U_2\end{array}\right\} \mathcal{L}(S_1\cap S_2)\subset U_1\cap U_2$

NO

8. a) $V=\mathbb{R}^3$ $\quad U_1 = \mathcal{L}(\{(1,0,-1),(0,1,-1)\})$ $\quad \dim_{\mathbb{R}}(U_1)=2$

$U_2 = \mathcal{L}\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=0\}$ $\quad \dim_{\mathbb{R}}(U_2)=2$

$v = u_1+u_2$ $\quad v\in\mathbb{R}^3$ $\quad u_1\in U_1,\ u_2\in U_2$

Base de $U_2 = \{(1,0,0),(0,1,0)\}$

Base de $U_1 = \{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$

$U_1+U_2 = \mathcal{L}(\{\underbrace{(1,0,0),(0,1,0),(1,0,-1)}_{\text{Son L.I.}}, \cancel{(0,1,-1)}\}) = \mathbb{R}^3$

$U_1\cap U_2 =$

$\dim_{\mathbb{R}}(U_1+U_2) + \underbrace{\dim_{\mathbb{R}}(U_1\cap U_2)} = \dim_{\mathbb{R}}(U_1)+\dim_{\mathbb{R}}(U_2)$

$\dim_{\mathbb{R}}(U_1\cap U_2) = 1 \Rightarrow \mathbb{R}^3$ no es $U_1\oplus U_2$

Cada vector $v\in\mathbb{R}^3$

$v = a(1,0,0)+b(0,1,0)+c(1,0,-1) = (a,b,0)+(c,0,-c) = (x_1,x_2,x_3)$

$v = a(1,0,0)+b(0,1,0)+[c(1,0,-1)+d(0,1,-1)]$

$(a,b,0) = (-c,-d,c+d)$

$\left.\begin{array}{l} c=-a \\ d=-b \\ -a-b=0\end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} b=-a \\ c=-a \\ d=a\end{array}$ $\quad \forall k\in\mathbb{R}$ $\quad \underset{U_1}{\underset{\uparrow}{(k,-k,0)}}$ $\quad (k,-k,0)$

Escaneado con CamScanner

Ver qué soluciones tengo para el sistema:

$$\begin{aligned} a+c &= x_1 \\ b+d &= x_2 \\ -c-d &= x_3 \end{aligned} \qquad \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0 \quad rg(A)=3$$

Es un S.C.I.:

$$\left.\begin{aligned} a+c &= x_1 \\ b &= x_2-d \\ -c &= x_3+d \end{aligned}\right\} \text{ Sol. } \left\{\begin{aligned} b &= x_2-d \\ a &= x_1+x_3+d \\ c &= -x_3-d \end{aligned}\right.$$

$$\boxed{\begin{aligned} d &= 0 \\ c &= -x_3 \\ b &= x_2 \\ a &= x_1+x_3 \end{aligned}} \qquad \underset{U_1}{\underset{\cap}{(x_1+x_3, x_2, 0)}} + \underset{U_2}{\underset{\cap}{(-x_3, 0, x_3)}} = (x_1, x_2, x_3)$$

$$\boxed{\begin{aligned} d &= 1 \\ c &= -x_3-1 \\ b &= x_2-1 \\ a &= x_3+x_1+1 \end{aligned}} \qquad (x_1+x_3+1, x_2-1, 0) + (-x_3-1, 0, x_3+1) + (0, 1, -1) = (x_1, x_2, x_3)$$

Tenemos infinitas sumas posibles

c) $V = \mathbb{R}_n[x] = P^n(\mathbb{R})$ $\quad U_1 = \{p(x) \mid p(1) + p'(1) = 0\}$

$\dim_{\mathbb{R}}(V) = n+1$ $\quad U_2 = \{p(x) \mid p(0) + p''(0) = 0\}$

$¿V = U_1 \oplus U_2?$

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$$

$$p(1) = a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$p'(x) = a_1 + 2a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2}$$

$$p'(1) = a_1 + 2a_2 + \dots + n a_n + (n-1)a_{n-1}$$

$a_0 + 2a_1 + 3a_2 + \dots + n a_{n-1} + (n+1)a_n = 0 \}$ ec. impl. de U_1

$\dim_{\mathbb{R}}(U_1) = n \quad \dim_{\mathbb{R}}(U_2) = n$

$$\dim_{\mathbb{R}}(U_1+U_2) + \dim_{\mathbb{R}}(U_1 \cap U_2) = 2n$$

$$\dim_{\mathbb{R}}(U_1 \cap U_2) \geq 2n - n - 1 = n-1$$

Si $n=1$ esa dim. puede ser 0, si $n \geq 2$ $\dim_{\mathbb{R}}(U_1 \cap U_2) \geq 1$

Si $n \geq 2$ $\dim_{\mathbb{R}}(U_1 \cap U_2) \geq 1$

$U_1 = \mathcal{L}(\{-2+x\})$ $\quad U_2 = \mathcal{L}(\{x\})$

$U_1 + U_2 = \mathcal{L}(\{-2+x, x\})$

b) $F(\mathbb{R},\mathbb{R})=V \quad U_1=\{f\in V \mid f(-x)=f(x) \ \forall x\in\mathbb{R}\}$

$U_2=\{f\in V \mid f(-x)=-f(x) \ \forall x\in\mathbb{R}\}$

$\forall a,b\in\mathbb{R} \ \forall f,g\in U_1$ ¿$af+bg\in U_1$?

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ | $(af+bg)(x)=af(x)+bg(x)=af(-x)+bg(-x)$

$(kg)(x)=kg(x)$ | $\forall x\in\mathbb{R} \quad =(af+bg)(-x)$

U_1 es subespacio ✓

$\forall a,b\in\mathbb{R} \quad \forall f,g\in U_2$ ¿$af+bg\in U_2$?

$\forall x\in\mathbb{R}$

$(af+bg)(-x)=af(-x)+bg(-x)=$

$=-af(x)-bg(x)=-(af+bg)(x)$

$\Rightarrow af+bg\in U_2$ ✓

U_2 es subespacio ✓

¿$V=U_1\oplus U_2$? $\exists_1 g\in U_1 \ \exists_1 h\in U_2 \ \forall f\in V$

$f=g+h$

$\forall x\in X \quad g:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \quad g(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$

$h:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \quad h(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$

$g(-x)=\dfrac{f(-x)+f(x)}{2}=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}=g(x)\Rightarrow g\in U_1$

$h(-x)=\dfrac{f(-x)-f(x)}{2}=-\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}=-h(x)\Rightarrow h\in U_2$

$(g+h)(x)=g(x)+h(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}+\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}=\dfrac{2f(x)}{2}=f(x)$

$\boxed{g+h=f}$

Sea $l\in U_1\cap U_2$

$l\in U_1\Rightarrow l(-x)=l(x)$

$l\in U_2\Rightarrow l(-x)=-l(x)\Leftrightarrow -l(-x)=l(x) \ (2)$ } Se suman $\Rightarrow$ $2l(x)=0$, $l(x)=0 \ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow l=f_0$: neutro para $F(\mathbb{R},\mathbb{R})=V \quad U_1\cap U_2=\{f_0\}\Rightarrow V=U_1\oplus U_2$

Escaneado con CamScanner

9.

$U_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-y=0, z-t=0\}$

$U_2 = \mathcal{L}((0,1,1,0))$

$U_3 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-y+z-t=0\}$

¿ $U_1 + U_2 = U_3$? ¿ $U_3 = U_1 \oplus U_2$?

$\dim_{\mathbb{R}}(U_1) = 2$

Base de $U_1 = \{(1,1,0,0), (0,0,1,1)\}$

$U_2 = \mathcal{L}(\{(0,1,1,0)\})$ $\dim_{\mathbb{R}}(U_2) = 1$

$\dim_{\mathbb{R}}(U_3) = 3$

Base de $U_3 = \{(1,1,0,0), (1,0,-1,0), (1,0,0,1)\}$

$\boxed{U_1 + U_2 = U_3}$

$U_1 + U_2 = \mathcal{L}(\{(1,1,0,0), (0,0,1,1), (0,1,1,0)\})$

Vemos si son L.I. y lo son: $\dim_{\mathbb{R}}(U_1+U_2) = 3$

$U_1 + U_2 \subset U_3$

$U_1 + U_2 = U_3$

$$\left.\begin{array}{l} U_1 \cap U_2 = \{0\} \\ U_1 + U_2 = U_3 \end{array}\right\} U_3 = U_1 \oplus U_2$$

20. K cuerpo. S es una familia de K que no contiene 2 pol. con el mismo grado.

S es L.I $\Leftrightarrow$ $A \subseteq S$ es L.I.

Sea $\{p_0(x), p_1(x), p_2(x), \cdots, p_n(x)\} \subset S$

$\text{grado}(p_i(x)) \neq \text{grado}(p_j(x)) \quad \forall i,j \in \{0, \cdots, n\}$

Sea $K = \text{máx}\{\text{grado } p_i(x)\}$

Sup. $a_0 p_0(x) + a_1 p_1(x_1) + \cdots + a_n p_n(x) = 0$

Supong. que $\underbrace{\text{grado } p_0(x)}_{k} = b_0 + b_1 x + \cdots + b_k x^k \quad b_k \neq 0$

$$a_0 b_0 + a_0 b_1 x + \cdots + a_0 b_k x^k + a_1 (p_1(x) + \cdots + a_n p_n(x)) = 0$$

$$a_0 b_k = 0 \Rightarrow a_0 = 0$$

$$a_1 p_1(x) + \cdots + a_n p_n(x) = 0$$

Sea $\ell = \underset{1 \leq j \leq n}{\text{máx}} \text{ grad}(p_j(x))$ Supong. $\text{grado}(p_1(x)) = \ell$

$$p_1(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_\ell x^\ell \quad c_\ell \neq 0$$

$$a_1 c_0 + a_1 c_1 x + \cdots + a_1 c_\ell x^\ell + a_2 p_2(x) + \cdots + a_n p_n(x) = 0$$

$$a_1 c_\ell = 0 \Rightarrow a_1 = 0$$

Si sigo repitiendo el proceso y tengo un número finito de polinomios llegamos a que $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$

2. $P^3(\mathbb{R})$

$U = \mathcal{L}(\{1-x, 1+x^2\})$

$W = \{p(x) \in P^3(\mathbb{R}) \mid p(1)=0, p''(1)=0\}$.

a) ¿$U+W$? ¿$U \cap W$? ¿Es suma directa?

Necesitamos hallar una base de W:

$p(1)=0 \Rightarrow \boxed{a_0+a_1+a_2+a_3=0}$

$p''(1)=0 \Rightarrow a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$

$p'(x) \Rightarrow a_1+2a_2x+3a_3x^2$

$p''(x) \Rightarrow 2a_2+6a_3x$

$p''(1)=0 \Rightarrow \boxed{2a_2+6a_3=0}$

Como se tienen 2 ecuaciones y $P^3(\mathbb{R})$ tiene dimensión 4, entonces W tiene dimensión 2 y una base de W estará formada por 2 polinomios L.I. que cumplan sus ecuaciones cartesianas. Por ejemplo:

- $-1-x+3x^2-x^3 \in W$ con coordenadas $(-1,-1,3,-1)$
- $1-x \in W$ con coordenadas $(1,-1,0,0)$

Sus coordenadas muestran que ambos polinomios son L.I y, por lo tanto:

$W = \mathcal{L}\{(+1-x), (-1-x+3x^2-x^3)\}$

Entonces $U+W$:

$$U+W = \mathcal{L}\{(1-x),(-1-x+3x^2-x^3),(1-x),(1+x^2)\}$$

Veamos si son L.I con sus coordenadas:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1-3-1 = -5 \neq 0$$

Hemos visto que el 1ª, 2º y 4º polinomios son L.I., por lo que:

$$U+W = \mathcal{L}\{(1-x),(-1-x+3x^2-x^3),(1+x^2)\}$$

$$\dim_{\mathbb{R}}(U+W) = 3$$

$\boxed{U \cap W}$

Las ecuaciones de W son: $\begin{cases} a_0+a_1+a_2+a_3=0 \\ 2a_2+6a_3=0 \end{cases}$

Para hallar las de U:

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & a_0 \\ -1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} = 2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & a_0 \\ -1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{-a_0+a_2-a_1=0}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a_0 \\ -1 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{a_3=0}$$

Por lo que $U \cap W$ viene dado por las ecuaciones:

$$\begin{cases} a_0+a_1+a_2+a_3=0 \\ 2a_2+6a_3=0 \\ -a_0+a_2-a_1=0 \\ a_3=0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Veamos su rango}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2+2=0 \Rightarrow rg(A) \leq 3$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 3$$

Ec. cartesianas de $U \cap W$:

$$\begin{cases} 2a_2 + 6a_3 = 0 \\ -a_0 - a_1 + a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \end{cases} \qquad dim_{\mathbb{R}}(U \cap W) = 1$$

Solo necesitamos un vector que cumpla las ecuaciones para tener una base:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -6+2-6 = -10 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 3$$

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ 2a_2 + 6a_3 = 0 \\ -a_0 + a_2 - a_1 = 0 \end{cases} \qquad dim_{\mathbb{R}}(U \cap W) = 1$$

Para tener una base de $U \cap W$ solo necesitamos un vector que cumpla las ecuaciones, por ejemplo: $(-1, 1, 0, 0)$

$$U \cap W = \mathcal{L}\{(-1+x)\}$$

$U+W$ no es suma directa ya que $dim_{\mathbb{R}}(U \cap W) \neq 0$

b) Complementario de U y W.

El complementario de U estará formado por 2 polinomios L.I. con los de la base de U. Los de U son: $1-x$ $(1,-1,0,0)$
$1+x^2$ $(1,0,1,0)$

Si cogemos el determinante de 4×4 siguiente:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$ como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, entonces el determinante de 4x4 también por lo que los polinomios de coordenadas $(0,0,1,0),(0,0,0,1)$ forman un complementario de U al que llamaremos A:

$$A = \mathcal{L}\{(x^2),(x^3)\}$$

Ahora con W hacemos igual:

- $(1-x) \rightarrow (1,-1,0,0)$
- $(-1-x+3x^2-x^3) \rightarrow (-1,-1,3,-1)$

Si tomamos el determinante de 4x4:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$ Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, entonces el determinante de 4x4 desarrollando por la última columna también es distinto de 0. Por lo explicado antes, un complementario de W será: (Lo llamaremos B)

$(1,0,0,0) \rightarrow 1$

$(0,0,0,1) \rightarrow x^3$

$$B = \mathcal{L}\{(1),(x^3)\}$$

c) Base de $P^3(\mathbb{R})/U \cap W$.

Primero se busca un complementario de $U \cap W$:

$$U \cap W = \mathcal{L}\{(-1+x)\}$$

El complementario tendrá una base formada por 3 polinomios L.I. con $-1+x$:

- $(-1+x) \to (-1,1,0,0)$
- $1 \longrightarrow (1,0,0,0)$
- $x^2 \longrightarrow (0,0,1,0)$
- $x^3 \longrightarrow (0,0,0,1)$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ también y por lo tanto, el determinante de 4×4 también, por lo que el complementario de $U\cap W$ (llamémosle C) estará formado por los tres polinomios de las coordenadas que hemos añadido:

$$C = \mathcal{L}\{(1),(x^2),(x^3)\}$$

Y, por lo tanto, $\dfrac{P^3(\mathbb{R})}{U\cap W}$:

$$\frac{P^3(\mathbb{R})}{U\cap W} = \mathcal{L}\{((1)+U\cap W,(x^2)+U\cap W,(x^3)+U\cap W)\}$$

1. $U=\left\{p(x)\in \mathbb{R}_2[x] \mid \int_0^1 p(x)dx = 0\right\}$ $\quad V=\mathbb{R}_2[x]$

Calcular base, dimensión y subespacio complementario

$$p(x)=a_0x^2+a_1x+a_2$$

$$\int p(x)=\frac{3a_0x^3}{3}+\frac{a_1x^2}{2}+a_2x$$

$$\int_0^1 p(x)=0 \Rightarrow \frac{a_0}{3}+\frac{a_1}{2}+a_2=0 \Rightarrow \underbrace{2a_0+3a_1+6a_2=0}_{\text{Una ecuación cartesiana}} \Rightarrow \text{Dimensión } 2$$

$$B_U=\{3x^2-1,2x-1\} \qquad \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

Subespacio complementario: $W=\mathcal{L}\{1\}$

2. $V=\mathbb{R}_n[x]$ $\quad U_1=\{p(x)\in\mathbb{R}_n[x] / p(1)+p'(1)=0\}$

$U_2=\{p(x)\in\mathbb{R}_n[x] \mid p(0)+p''(0)=0\}$

¿Son subespacios? ¿$U_1\oplus U_2$?

$\boxed{U_1}$ $\quad p(x)=a_nx^n+\dots+a_0$

$$\left.\begin{aligned} p(1)&=a_n+\dots+a_0 \\ p'(1)&=na_n+\dots+a_1 \end{aligned}\right\} p(1)+p'(1)=0 \Rightarrow \underbrace{(n+1)a_n+\dots+2a_1+a_0=0}_{\text{Ec. cartesiana}}$$

$\boxed{U_2}$

$$\left.\begin{aligned} p(0)&=a_0 \\ p''(0)&=2a_2 \end{aligned}\right\} p(0)+p''(0)=0 \Rightarrow \underbrace{2a_2+a_0=0}_{\text{Ec. cartesiana}}$$

¿Es U_1 subespacio?

$p(x)\in U_1 \quad q(x)\in U_1 \quad a,b\in\mathbb{R}$

$\cancel{q(x)=b_nx^n+\dots+b_0}$

¿$ap(x)+bq(x)\in U_1$?

$\cancel{ap(x)+bq(x)=(aa_n+bb_n)x^n}+\dots+aa_0+bb_0$

¿$(n+1)(aa_n+bb_n)+\dots+$

$\cancel{ap(1)+bq(1)}$

$$ap(x)+bq(x)=r(x)$$

¿$r(1)+r'(1)=0$?

$$ap(1)+bq(1)+ap'(1)+b\cdot q'(1)=0$$

$$a(\underbrace{p(1)+p'(1)}_{0\Rightarrow p(x)\in U_1})+b(\underbrace{q(1)+q'(1)}_{0\Rightarrow q(x)\in U_1})=0$$

¿Es U_2 subespacio?

$p(x), q(x) \in U_2 \quad a, b \in \mathbb{R}$

$a p(x) + b q(x) = r(x)$

$¿r(0) + r''(0) = 0? \Rightarrow a p(0) + b q(0) + a p'(0) + b q'(0) = 0$

$$a(\underbrace{p(0) + p'(0)}_{0 \Rightarrow p(x) \in U_2}) + b(\underbrace{q(0) + q'(0)}_{0 \Rightarrow q(x) \in U_2}) = 0$$

Como U_1 y U_2 tienen una ecuación cartesiana, su dimensión será n. Por la fórmula de las dimensiones:

$$\dim_{\mathbb{R}}(U_1 + U_2) + \dim_{\mathbb{R}}(U_1 \cap U_2) = \dim_{\mathbb{R}}(U_1) + \dim_{\mathbb{R}}(U_2)$$
$$= 2n$$

$\dim_{\mathbb{R}}(U_1 + U_2) \leq n+1 \Rightarrow$ Siempre se cumple

$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}(U_1 \cap U_2) \geq 2n - n - 1 = n - 1$

Si $n = 1$, $\Rightarrow$ Suma directa (Se puede dar)

Si $n \geq 2$, no sería suma directa.

Escaneado con CamScanner

5. $U_\lambda = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}\lambda & \lambda\\ \lambda & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -\lambda\\ -\lambda & 2\end{pmatrix}\right\}$ Para cada λ, hallar la dimensión de $U_\lambda \cap W_\lambda$.

$W_\lambda = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & \lambda\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & -3\end{pmatrix}\right\}$ $S_2(\mathbb{R})$

Primero estudiemos las dimensiones de U_λ y W_λ:

$\boxed{U_\lambda}$ $\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ \lambda & -\lambda\\ \lambda & -\lambda\\ -1 & 2\end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix}\lambda & 0\\ \lambda & -\lambda\end{vmatrix} = -\lambda^2 - \lambda \Rightarrow \lambda^2 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda(1+\lambda) = 0$ $\boxed{\lambda = 0 \quad \lambda = -1}$

$\begin{vmatrix}\lambda & 0\\ -1 & 2\end{vmatrix} = 2\lambda \Rightarrow 2\lambda = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = 0}$

Para $\lambda = 0$, $\dim_{\mathbb{R}} U_\lambda = 1$
Para $\lambda \neq 0$, $\dim_{\mathbb{R}} U_\lambda = 2$

$\boxed{W_\lambda}$ $\begin{pmatrix}2 & 3\\ -2 & 1\\ -2 & 1\\ \lambda & -3\end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix}2 & 3\\ -2 & 1\end{vmatrix} = 2 + 6 = 8 \neq 0 \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} W_\lambda = 2$ para $\lambda \in \mathbb{R}$

$\boxed{U_\lambda \cap W_\lambda}$ Haré uso de la fórmula de las dimensiones por lo que me centraré en $U_\lambda + W_\lambda$ para deducir la dimensión de $U_\lambda \cap W_\lambda$:

$$\dim_{\mathbb{R}}(U_\lambda + W_\lambda) + \dim_{\mathbb{R}}(U_\lambda \cap W_\lambda) = \dim_{\mathbb{R}}(U_\lambda) + \dim_{\mathbb{R}}(W_\lambda)$$

Para $\lambda = 0 \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} U_\lambda = 1$, $\dim_{\mathbb{R}} W_\lambda = 2$:

Juntamos las bases $\begin{pmatrix}0 & 2 & 3\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & -2 & 1\\ -1 & 0 & -3\end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix}2 & 3\\ -2 & 1\end{vmatrix} = 8 \neq 0$

$\begin{vmatrix}0 & 2 & 3\\ 0 & -2 & 1\\ -1 & 0 & -3\end{vmatrix} = -2 - 6 = -8 \neq 0 \Rightarrow$ Rango 3

$\Downarrow$

$\dim_{\mathbb{R}}(U_\lambda + W_\lambda) = 3$

$\Downarrow$

$\dim_{\mathbb{R}}(U_\lambda \cap W_\lambda) = 0$

Para $\lambda \neq 0 \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} U_\lambda = 2$, $\dim_{\mathbb{R}} W_\lambda = 2$

Juntamos las bases $\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 2 & 3\\ \lambda & -\lambda & -2 & 1\\ \lambda & -\lambda & -2 & 1\\ -1 & 2 & \lambda & -3\end{pmatrix} \rightarrow \cancel{\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 8 & 3\\ \lambda & -\lambda & 0 & 1\\ \lambda & -\lambda & 0 & 1\\ -1 & 2 & \lambda-6 & -3\end{pmatrix}}$

$\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 2 & 3\\ \lambda & -\lambda & -2 & 1\\ -1 & 2 & \lambda & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -\lambda & -2 & 1 \\ 2 & \lambda & -3 \end{vmatrix} = 4 - 3\lambda^2 + 12 - 6\lambda \Rightarrow 3\lambda^2 + 6\lambda - 16 = 0$$

$$\lambda = \frac{-6 \pm \sqrt{36+192}}{6} = \begin{cases} -1 - \frac{\sqrt{57}}{3} \\ -1 + \frac{\sqrt{57}}{3} \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & 2 & 3 \\ \lambda & -2 & 1 \\ -1 & \lambda & -3 \end{vmatrix} = 6\lambda - 2 + 3\lambda^2 - 6 + 6\lambda - \lambda^2 \Rightarrow 2\lambda^2 + 12\lambda - 8 = 0$$

$$\lambda^2 + 6\lambda - 4 = 0$$

$$\lambda = \frac{-6 \pm \sqrt{36+16}}{2} = \begin{cases} -3 - \sqrt{13} \\ -3 + \sqrt{13} \end{cases}$$

Como no hay un λ común, $\dim_{\mathbb{R}}(V_\lambda + W_\lambda) = 3$ $\Rightarrow$ $\boxed{\dim_{\mathbb{R}}(V_\lambda \cap W_\lambda) = 1}$

Ejercicio Whatsapp

$U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x-y+z-t=0,\ x+y+z+t=0\}$
$W_\alpha = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x-2y=0,\ \alpha x - y + z - t = 0\}$

a) Base de $U \cap W_\alpha$ y $U + W_\alpha$ según los valores de α

$\left.\begin{array}{l} x-2y=0 \\ \alpha x - y + z - t = 0 \end{array}\right\}$ Ec. de W_α $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ \alpha & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ \alpha & -1 \end{vmatrix} = -1+2\alpha \Rightarrow -1+2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ Ambas ecuaciones serán siempre L.I.

$\dim_{\mathbb{R}} W_\alpha = 2 \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$\boxed{U \cap W_\alpha}$ Unimos las ecuaciones:

$\begin{cases} x-y+z-t=0 \\ x+y+z+t=0 \\ x-2y=0 \\ \alpha x - y + z - t = 0 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ \alpha & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ \alpha & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$2\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ \alpha & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2(-2-1+2\alpha+1) = -4+4\alpha \Rightarrow -4+4\alpha = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = 1}$

Para $\alpha = 1$, 3 ec. cartesianas L.I. y $\dim_{\mathbb{R}} U \cap W_\alpha = 1$
Para $\alpha \neq 1$, 4 ec. cartesianas L.I. y $\dim_{\mathbb{R}} U \cap W_\alpha = 0$

$U \cap W_\alpha = \{0\}$
$U + W_\alpha = \mathbb{R}^4$

Por ello, solo hemos de estudiar el caso $\alpha = 1$:

$\begin{cases} x-y+z-t=0 \\ x+y+z+t=0 \\ x-2y=0 \end{cases}$ $\left.\begin{array}{l} x+z = y+t \\ x+z = -y-t \end{array}\right\}$ $y+t = -y-t \Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} y=-t \\ x=-2t \\ z=2t \end{array}}$

$U \cap W_\alpha = \mathcal{L}\{(-2,-1,2,1)\}$

$\boxed{U+W_\alpha}$ $\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-y+z-t=0 \end{cases}$ $-y-z-t = y-z+t \Rightarrow y = z-t$
$x = -2t$

$U = \mathcal{L}\{(1,-1,0,1),(0,1,1,0)\}$

$$\begin{cases} x-2y=0 \\ x-y+z-t=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x-2y=0 \\ y+z-t=0 \Rightarrow y=-z+t \end{array} \qquad x=-2z+2t$$

$$W_2 = \mathcal{L}\{(2,1,0,1),(-2,-1,1,0)\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow - \begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-2+2-2)-(-1-2-1)$$