Universidad de Granada. Ecuaciones Diferenciales I
22 de Enero de 2021. Prueba final.

NOMBRE: José Alberto Hoces Castro

1. Encuentre la familia de trayectorias ortogonales en el primer cuadrante a la familia de curvas $x^2 + y^2 = Cx$, donde $C \in \mathbb{R}$.

2. Determine el conjunto de funciones $f(t)$ para las que la ecuación

$$x^2 \operatorname{sen} t + x f(t) \frac{dx}{dt} = 0$$

es exacta, y encuentre la solución para cada una de ellas.

3. Sea $_0$ un cero doble del polinomio cuadrático $p(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ (es decir, λ_0 verifica $p(\lambda_0) = p'(\lambda_0) = 0$). Por sustitución directa en la ecuación, demuestre que $te^{\lambda_0 t}$ es solución de la ecuación lineal de segundo orden

$$x'' + a_1 x' + a_0 x = 0.$$

4. Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se pide

4..1 probar que $A(A - 3I) = 0$.

4.2. Calcule e^{At} (*sugerencia: aunque no es obligatorio, el uso del apartado anterior simplifica los cálculos necesarios)*

1. Encuentre la familia de trayectorias ortogonales en el primer cuadrante a la familia de curvas $x^2 + y^2 = Cx$, donde $C \in \mathbb{R}$.

$x^2 + y^2 = Cx \Longrightarrow y = \pm\sqrt{Cx - x^2}$

Primer cuadrante: $y = \sqrt{Cx - x^2}$

$2x + 2y \cdot y' = C \quad \Longrightarrow y' = \frac{C-2x}{2y}$

$y' = \frac{2y}{2x-C} \Longrightarrow \int \frac{dy}{2y} = \int \frac{1}{2x-C}\, dx$

$y = e^k \cdot (2x - C)$

2. Determine el conjunto de funciones $f(t)$ para las que la ecuación

$$\underbrace{x^2 \operatorname{sen} t}_{P(t,x)} + \underbrace{x f(t)}_{Q(t,x)} \frac{dx}{dt} = 0$$

es exacta, y encuentre la solución para cada una de ellas.

Condición de exactitud: $2x \operatorname{sen} t = x \cdot f'(t)$

$f'(t) = 2 \cdot \operatorname{sen} t \Longrightarrow f(t) = -2 \cdot \cos t + C$

$u(t,x) = \int P(t,x)\, dt = -x^2 \cos t + \varphi(x)$

$\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = -2 \cos t \cdot x + \varphi'(x) = \underbrace{Q(t,x)}_{-2x\cos t + Cx} \Longrightarrow \varphi'(x) = Cx$

Sol. implícita: $u(x,y) = k \Longrightarrow -x^2 \cos t + \frac{Cx^2}{2} = k$

3. Sea $_0$ un cero doble del polinomio cuadrático $p(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ (es decir, λ_0 verifica $p(\lambda_0) = p'(\lambda_0) = 0$). Por sustitución directa en la ecuación, demuestre que $te^{\lambda_0 t}$ es solución de la ecuación lineal de segundo orden

$$x'' + a_1x' + a_0x = 0.$$

$$x(t) = te^{\lambda_0 t}$$

$$x'(t) = \lambda_0 te^{\lambda_0 t} + e^{\lambda_0 t}$$

$$x''(t) = \lambda_0^2 te^{\lambda_0 t} + \lambda_0 e^{\lambda_0 t} + \lambda_0 e^{\lambda_0 t} = \lambda_0^2 \cdot t \cdot e^{\lambda_0 t} + 2\lambda_0 e^{\lambda_0 t}$$

Sustituimos en la ecuación

$$\lambda_0^2 \cdot t \cdot e^{\lambda_0 t} + 2\lambda_0 e^{\lambda_0 t} + a_1\lambda_0 te^{\lambda_0 t} + a_1 e^{\lambda_0 t} + a_0 te^{\lambda_0 t}$$

$$te^{\lambda_0 t}\underbrace{(\lambda_0^2 + a_1\lambda_0 + a_0)}_{0} + 2\lambda_0 e^{\lambda_0 t} + a_1 e^{\lambda_0 t} =$$

$$= 2\lambda_0 e^{\lambda_0 t} + a_1 e^{\lambda_0 t} = \underbrace{e^{\lambda_0 t}(2\lambda_0 + 1)}_{0} = 0$$

$$p'(\lambda) = 2\lambda + a_1 \Rightarrow p'(\lambda_0) = 0$$

4. Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se pide

4..1 probar que $A(A-3I) = 0$.

4.2. Calcule e^{At} (*sugerencia: aunque no es obligatorio, el uso del apartado anterior simplifica los cálculos necesarios*)

$$A - 3I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A(A-3I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda^2-2\lambda+1)(1-\lambda) + 2 - 3(1-\lambda) =$$

$$= -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda + \lambda^2 - 2\lambda + 1 + 2 - 3 + 3\lambda = -\lambda^3 + 3\lambda^2 = -\lambda^2(\lambda-3)$$

Valores propios : $\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 3$

$(A-0I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$ Sale un sistema de una ecuación, luego A es diagonalizable. $x+y+z=0 \Longrightarrow v_1 = (1,-1,0) \quad v_2 = (1,0,-1)$

$$(A-3I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x-2y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases} \Longrightarrow \left.\begin{cases} -x+2y-z=0 \\ 3y-3z=0 \end{cases}\right\} \begin{matrix} x=z \\ y=z \end{matrix}$$

$v_3 = (1,1,1)$

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & e^{3t} \\ -1 & 0 & e^{3t} \\ 0 & -1 & e^{3t} \end{pmatrix} \qquad \psi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det(\psi(0)) = 3$

$$\psi^{-1}(0) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = \psi(t)\cdot\psi^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 2/3 + \frac{e^{3t}}{3} & -2/3 + 1/3 + \frac{e^{3t}}{3} & \frac{1}{3} - \frac{2e^{3t}}{3} + \frac{1}{3} \\ -1/3 + \frac{e^{3t}}{3} & 2/3 + \frac{e^{3t}}{3} & -1/3 + \frac{e^{3t}}{3} \\ -1/3 + \frac{e^{3t}}{3} & -1/3 + e^{3t}/3 & 2/3 + e^{3t}/3 \end{pmatrix}$$

Otra forma:

$A^2 = 3A$

$A^3 = 3^2 A$

$A^4 = 3^3 A$

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3^{k-1} t^k)}{k!} A + I = \frac{1}{3} e^{3t} A + I$$

¡Cuidado!