Tema 1_Parte II.- Distribuciones continuas

Asignatura: PROBABILIDAD
Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
(3er Curso - 1er semestre)

©Prof. Dr. José Luis Romero Béjar

Departamento de Estadística e Investigación Operativa
Facultad de Ciencias (Despacho 10)

Periodo de docencia: 12/09/2022 a 20/12/2022

1. Recordatorio
2. Distribución Uniforme Continua $X \sim \mathcal{U}(a,b);\ a < b \in \mathbb{R}$
3. Distribución Normal $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2); \mu \in \mathbb{R},\ \sigma^2 \in \mathbb{R}_+$
4. Distribución Exponencial $X \sim \exp(\lambda); \lambda > 0$
5. Distribución de Erlang $E \sim \mathcal{E}(n,\lambda);\ n \in \mathbb{N} - \{0\}, \lambda > 0$
6. Distribución Gamma $X \sim \Gamma(u,\lambda);\ u,\lambda \in \mathbb{R}_+$
7. Distribución Beta $X \sim \beta(p,q);\ p,q > 0$

Esquema de contenidos

Variables aleatorias continuas

Una variable aleatoria (v.a.) $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$, se dice **continua** si existe una función $f_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

La función f_X recibe el nombre de **función de densidad** de X y satisface:

(i) Es no negativa

(ii) Es integrable con $\int_{\mathbb{R}} f_X(x)dx = 1$.

Cualquier función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaciendo (i)–(ii) es la función de densidad de una v.a. continua. Además se tiene:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f_X(x) = \lim\limits_{x \to \infty} f_X(x) = 0.$

b) f_X es **continua** salvo a lo sumo en un conjunto de medida nula.

c) En los puntos de continuidad de f_X, se tiene que F_X es **derivable** y satisface

$$\frac{dF_X(x)}{dx} = f_X(x).$$

d) f_X se puede modificar en un conjunto numerable de puntos sin afectar a F_X.

Esperanza matemática de una función de una v.a.

Sea $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$ una v.a y sea $g : E_X \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible. Entonces:

- **Para v.a. continuas**. Si $\exists \int_{\mathbb{R}} |g(x)| f_X(x) dx < \infty$, entonces

$$\exists E[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x) f_X(x) dx.$$

Momentos

Sea $k \geq 1$,

- **Para v.a. continuas**.
  - Si $\exists \int_{\mathbb{R}} |x|^k f_X(x)dx < \infty$, entonces
  $$m_k = E[X^k] = \int_{\mathbb{R}} x^k f_X(x)dx.$$
  - Si $\exists \int_{\mathbb{R}} |x - E[X]|^k f_X(x)dx < \infty$, entonces
  $$\mu_k = E[(X - E[X])^k] = \int_{\mathbb{R}} (x - E[X])^k f_X(x)dx.$$

Función generatriz de momentos

Si $\exists\ E[e^{tX}], \quad \forall t \in (-t_0, t_1), \quad t_0, t_1 \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, se define la **función generatriz de momentos** (f.g.m) de X como:

$$M_X : (-t_0, t_1) \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$M_X(t) = E[e^{tX}], \quad \forall t \in (-t_0, t_1).$$

Relación con los momentos.
Si existe la función generatriz de momentos de una variable aleatoria, se tiene:

- $\exists E[X^k], \quad \forall k \in \mathbb{N}.$
- $M_X(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} E[X^j], \quad \forall t \in (-t_0, t_1)$
- $E[X^k] = \frac{d^k M_X(t)}{dt^k}_{t=0}.$

Esquema de contenidos

Definición

La **distribución uniforme continua** sobre un intervalo (a, b), se caracteriza por **tomar valores en dicho intervalo y tener una densidad de probabilidad constante**.
En concreto,

$$X \sim \mathcal{U}(a,b),\ a < b,\ \Leftrightarrow f_X(x) = \frac{1}{b-a}, \quad \forall x \in (a,b).$$

Longitud del intervalo

Función de distribución

Para cualquier $x \in (a, b)$, se tiene

$$F_X(x) = \int_a^x f_X(y)dy = \int_a^x \frac{1}{b-a}dy = \frac{x}{b-a} - \frac{a}{b-a} = \frac{x-a}{b-a}.$$

Para $x < a$, $F_X(x) = 0$ y para $x \geq b$, $F_X(x) = 1$, según se deriva de la definición de función de distribución de una variable aleatoria continua (ver capítulo de Preliminares).

Definición alternativa

Diremos que una variable aleatoria X sigue una distribución uniforme en el intervalo $[a, b]$ si **la probabilidad de que la variable aleatoria tome un valor en cualquier subintervalo es proporcional a la longitud del subintervalo**.

Utilidad

- La distribución uniforme **proporciona una representación adecuada para redondear las diferencias que surgen al medir cantidades físicas** entre los valores observados y los reales.
- **Por ejemplo**, si el peso de una persona se redondea al kg. más cercano, entonces, la diferencia entre éste y el peso verdadero será algún valor entre -0.5 y 0.5 kg. Es común que **el error de redondeo se encuentre distribuido uniformemente** en el intervalo $(-0.5, 0.5)$.
- Como **caso particular**, cuando $a = 0$ y $b = 1$ tenemos la distribución $\mathcal{U}(0,1)$, de gran utilidad en la práctica, como se puede comprobar con la transformada integral de probabilidad (ver proposición en diapositiva 12), y que **juega un papel muy importante en la generación de números aleatorios de ciertas distribuciones**.

Función generatriz de momentos

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \int_a^b \frac{e^{tx}}{b-a}dx = \frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}, \quad t \neq 0; \quad M_X(t) = 1, t = 0.$$

Momentos

- **No Centrados**

$$\begin{aligned} m_k &= E[X^k] = \int_a^b \frac{x^k}{b-a}dx = \left[\frac{x^{k+1}}{(k+1)(b-a)}\right]_{x=a}^{x=b} \\ &= \frac{b^{k+1}}{(k+1)(b-a)} - \frac{a^{k+1}}{(k+1)(b-a)} = \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{(k+1)(b-a)} \end{aligned}$$

- **Centrados**

$$\begin{aligned} \mu_k &= E[(X-m_1)^k] = \int_a^b \frac{(x-m_1)^k}{b-a}dx \\ &= \frac{1}{(k+1)(b-a)}\left[\left(\frac{b-a}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{a-b}{2}\right)^{k+1}\right] \\ &= \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad k \in \mathbb{N} \text{ impar} \\ \\ \frac{(b-a)^k}{2^k(k+1)} \quad k \in \mathbb{N} \text{ par} \end{cases} \end{aligned}$$

Proposición

Sea X una variable aleatoria continua con función de distribución F_X, entonces la variable $Y = F_X(X)$ tiene distribución $\mathcal{U}(0,1)$, i.e., $F_X(X) \sim \mathcal{U}(0,1)$.

Demostración

Para F_X una función inyectiva, aplicar directamente el teorema de cambio de variable, dado que X se puede definir mediante la igualdad en distribución

$$X \underset{d}{=} F_X^{-1}(U), \quad U \sim \mathcal{U}(0,1).$$

Aplicando este resultado, **es posible simular valores aleatorios de cualquier variable aleatoria continua a partir de valores aleatorios de una distribución uniforme en el intervalo** $(0,1)$; basta aplicar a dichos valores la inversa de la función de distribución de la variable que queremos simular.

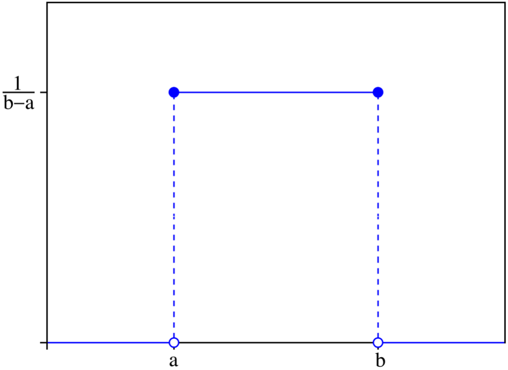
•) Si X es una v.a., $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función medible $\Rightarrow Y = g(X)$ es v.a.

•) X v.a., tengo $F_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ medible $\Rightarrow$ Puedo considerar y $Y = F_x(X)$ es v.a. tiene distribución $\mathcal{U}(0,1) \Rightarrow Y \sim \mathcal{U}(0,1)$

$X = F_x^{-1}(Y)$ Casella-Berger

Box-Jenkins

Gráficas de la función de densidad de una distribución uniforme



Esquema de contenidos

Distribución Normal $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2); \mu \in \mathbb{R},\ \sigma^2 \in \mathbb{R}_+$

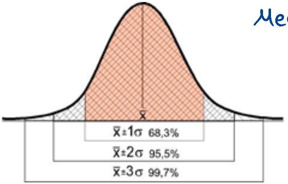
Se dice que una variable aleatoria (v.a.) continua X se **distribuye según una normal** de parámetros μ y σ^2 si su función de densidad f_X viene dada por la siguiente expresión:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Mediante el procedimiento de **tipificación** se tiene que,

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Leftrightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Gráfica de la función de densidad de una distribución normal



Media = Mediana = Moda

Utilidad

- La distribución normal **es la más importante y la de mayor uso** en la Teoría de la Probabilidad y la Estadística Matemática.
- **Fue obtenida inicialmente por De Moivre en 1733** como límite de la distribución binomial, siendo luego relegada al olvido hasta que **Gauss en 1809 y Laplace en 1812 la obtuvieron empíricamente al estudiar la distribución de errores accidentales en Astronomía y Geodesia** (de ahí que se conozca también como distribución de Gauss-Laplace).
- Esta distribución **es la piedra angular en la aplicación de la Inferencia Estadística en el análisis de datos**, puesto que las distribuciones de muchos estadísticos muestrales tienden a la distribución normal cuando el tamaño de la muestra crece.
- Además, la distribución normal **proporciona una adecuada representación de las distribuciones de una gran cantidad de variables físicas** (de hecho, el nombre de normal tiene carácter histórico, ya que, en un principio se creyó que la mayoría de las distribuciones eran de este tipo).

Algunos ejemplos son: datos meteorológicos como la temperatura, lluvias, etc.; mediciones efectuadas en organismos vivos: altura, peso, etc.; calificaciones en pruebas de aptitud; medidas físicas de productos manufacturados, etc.

Proposición

(i) $X \sim \mathcal{N}(0,1) \;\Leftrightarrow\; M_X(t) = E[e^{tX}] = e^{\frac{t^2}{2}}.$

(ii) $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2) \;\Leftrightarrow\; M_X(t) = E[e^{tX}] = e^{t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2}}.$

Demostración

(i) Sea $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, entonces

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{tx - \frac{x^2}{2}}\, dx = \frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2}\, dx = e^{\frac{t^2}{2}},$$

dado que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2}\, dx = 1$, puesto que $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2}$ es la densidad de probabilidad de una v.a. $X \sim \mathcal{N}(t,1)$.

(ii) Dado que $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2) \Leftrightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$, es decir, se tiene la siguiente igualdad en distribución

$$X \underset{d}{=} \sigma Z + \mu,$$

se obtiene entonces a partir del apartado (i),

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = E[e^{t(\sigma Z + \mu)}] = e^{t\mu} E[e^{(t\sigma)Z}] = e^{t\mu} M_Z(t\sigma) = e^{t\mu} e^{(t\sigma)^2/2} = e^{t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2}}$$

Teorema (De Moivre-Laplace de convergencia de la distribución binomial a la normal)

Sea $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, cuando el número de pruebas independientes de Bernoulli tiende a infinito, se tiene la siguiente convergencia en distribución:

$$Z_n = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}, \text{ se tiene } \ F_{Z_n}(z) \to F_Z(z), \ n \to \infty, \ z \in \mathbb{R}, \ Z \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Demostración

Su demostración se verá en el Tema 6.

Propiedades de la distribución normal

- Es simétrica respecto de su media μ.
- La moda y la mediana son ambas iguales a la media.
- Distribución de probabilidad en un entorno de la media:
  1. En el intervalo $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ se encuentra comprendida, aproximadamente, el 68.26% de la distribución.
  2. En el intervalo $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$ se encuentra, aproximadamente, el 95.44% de la distribución.
  3. En el intervalo $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ se encuentra, aproximadamente, el 99.74% de la distribución.
- El área total bajo la curva es 1.
- Tiene forma de campana.
- Toma valores en toda la recta real.
- La probabilidad de un valor concreto es 0.

Aplicación 1: aproximación de probabilidades binomiales (corrección por continuidad)

Dada $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, tal que $n > 10$, $np > 5$, $n(1-p) > 5$ y $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, entonces:

- $F_X(k) = P(X \leq k) = P(X \leq k + 1/2) \simeq F_Z\left(\frac{k+1/2-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$, $k = 0, \ldots, n-1$, siendo $F_X(n) = 1$.
- La función masa de probabilidad se puede aproximar igualmente, considerando su expresión en términos de la función de distribución como sigue:

  Para $k = 1, \ldots, n$,

$$
\begin{aligned}
P(X=0) &= P(X \leq 0) = F_X(0) \simeq F_Z\left(\frac{1/2-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \\
P(X=k) &= P(X \leq k) - P(X \leq k-1) = F_X(k) - F_X(k-1) \\
&\simeq F_Z\left(\frac{k+1/2-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - F_Z\left(\frac{k-1/2-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right).
\end{aligned}
$$

Aplicación 2: aproximación de las probabilidades de una v.a. de Poisson

Como aplicación del **Teorema límite de Lévy** (que se derivará en el Tema 6 del programa de esta asignatura), aplicando la propiedad de aditividad del modelo de Poisson, se tiene el siguiente resultado (**sobre convergencia de la distribución de Poisson a la normal**):

$$X \sim \mathcal{P}(\lambda) \text{ y } Z_\lambda = \frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}} \Rightarrow F_{Z_\lambda}(z) \to F_Z(z),\ \lambda \to \infty,\ \forall z \in \mathbb{R},\ Z \sim \mathcal{N}(0,1).$$

En base al resultado anterior, si $X \sim \mathcal{P}(\lambda), \lambda > 10$ y $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, se tiene que:

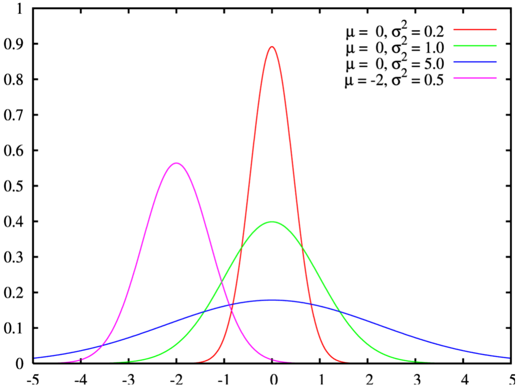
$$\begin{aligned}
P(X=0) &= P(X \leq 0) = F_X(0) \simeq F_Z\left(\frac{1/2-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) \\
P(X=k) &= P(X \leq k) - P(X \leq k-1) = F_X(k) - F_X(k-1) \\
&\simeq F_Z\left(\frac{k+1/2-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) - F_Z\left(\frac{k-1/2-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right), \quad k \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Manejo de la tabla $N(0,1)$

Teniendo en cuenta que la tabla suministrada al alumnado es parte del eje positivo de una distribución $N(0,1)$ con colas a la izquierda, las siguientes propiedades pueden ser de utilidad.

- $P[Z \geq a] = 1 - P[Z \leq a]$
- $P[Z \leq -a] = P[Z \geq a] = 1 - P[Z \leq a]$
- $P[Z \geq -a] = P[Z \leq a]$
- $P[|Z| \leq a] = 2P[Z \leq a] - 1$

Distintas gráficas de la función de densidad de una distribución normal



Esquema de contenidos

Definición

Una v.a X se dice que sigue una **distribución exponencial** si:

$$X \sim \exp(\lambda) \Leftrightarrow f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \ \forall x \geq 0.$$

- X puede representar el tiempo aleatorio entre dos fallos consecutivos en **Fiabilidad** o bien, entre dos llegadas o salidas en **Teoría de Colas**.
- También se aplica en la modelización de tiempos aleatorios de supervivencia (**Análisis de Supervivencia**).
- En general, X suele representar un tiempo aleatorio transcurrido entre dos sucesos, que se producen de forma aleatoria y consecutiva en el tiempo. Dichos sucesos se contabilizan mediante un proceso de Poisson homogéneo. El parámetro λ representa la razón de ocurrencia de dichos sucesos, que en este caso es constante.

Función de distribución

$$F_X(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0.$$

Función generatriz de momentos

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E[e^{tX}] = \int_0^\infty \lambda e^{x(t-\lambda)}dx = \left[\frac{\lambda e^{x(t-\lambda)}}{t-\lambda}\right]_{x=0}^{x=\infty} \\ &= -\frac{\lambda}{t-\lambda} = \left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^{-1}, \quad t < \lambda. \end{aligned}$$

Momentos

$$\begin{aligned} E[X^k] &= \frac{k!}{\lambda^k}, \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ E[X] &= \frac{1}{\lambda}; \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned}$$

Relación con la distribución de Poisson

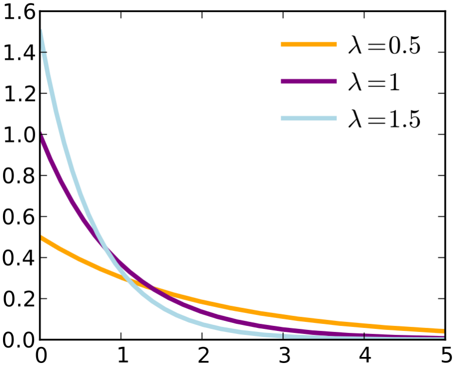
- Sea $Y \sim \mathcal{P}(\lambda t)$, Y indica **el número de sucesos aleatorios ocurridos en un intervalo de longitud** t, cuando su razón de ocurrencia es λ.
- Sea $X \sim \exp(\lambda)$, X indica **el tiempo aleatorio transcurrido hasta la ocurrencia del primer suceso aleatorio**, o bien, entre la ocurrencia de dos sucesos aleatorios consecutivos, cuando su razón de ocurrencia es constante.
  Su relación con la variable aleatoria $Y \sim \mathcal{P}(\lambda t)$ es la siguiente:

$$P(Y = 0) = e^{-\lambda t} = P(X > t) = 1 - F_X(t) = 1 - 1 + e^{-\lambda t}$$

- **La exponencial es la única distribución continua que verifica la propiedad de 'falta de memoria',** i.e.,

$$P(X > t + s / X > s) = P(X > t) \quad \forall s, t > 0.$$

Distintas gráficas de la función de densidad de una distribución exponencial



Esquema de contenidos

Definición

Indica el **tiempo aleatorio transcurrido hasta la ocurrencia del *n*-ésimo suceso** aleatorio, i.e., $X_i \sim \exp(\lambda)$, $i = 1, \ldots, n$, mutuamente independientes,

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = E \sim \mathcal{E}(n, \lambda).$$

Para $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, y $\lambda > 0$, la densidad de probabilidad f_X de la v.a. E se define como sigue

$$f_E(x) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\lambda x}, \quad \Gamma(n) = (n-1)! \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

Función generatriz de momentos

$$M_E(t) = \left[\left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)\right]^{-n}, \quad t < \lambda.$$

$$E[e^{tX}] = \int_0^{\infty} e^{tx} \cdot \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} \cdot e^{-\lambda x}\, dx = \int_0^{\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \cdot x^{n-1} \cdot e^{x(t-\lambda)}\, dx =$$

$$= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^{\infty} x^{n-1} \cdot e^{x(t-\lambda)}\, dx = \left[\begin{array}{ll} u = x^{n-1} & dv = e^{x(t-\lambda)} \\ du = (n-1)\, x^{n-2} & v = \dfrac{e^{x(t-\lambda)}}{t-\lambda} \end{array}\right] =$$

$$= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \cdot \left(\left[\frac{1}{t-\lambda} \cdot x^{n-1} \cdot e^{x(t-\lambda)} \right]_0^{\infty} - \frac{(n-1)}{t-\lambda} \int_0^{\infty} x^{n-2} e^{x(t-\lambda)}\, dx \right) =$$

$$= \frac{1}{t-\lambda} \cdot -\frac{\lambda^n}{(n-2)!} \int_0^{\infty} x^{n-2} e^{x(t-\lambda)}\, dx) =$$

$$= \frac{1}{t-\lambda} \cdot -\lambda \cdot \frac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!} \int_0^{\infty} x^{n-2} \cdot e^{x(t-\lambda)}\, dx)$$

$$I_n = -\frac{\lambda}{t-\lambda} \cdot I_{n-1} \Rightarrow \underbrace{I_n + \frac{\lambda}{t-\lambda} \cdot I_{n-1} = 0}_{x + \frac{\lambda}{t-\lambda} = 0 \Rightarrow x = \frac{\lambda}{\lambda - t}} \Rightarrow \text{Ec. homogénea}$$

Sol. recurrencia: $I_n = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^n = \left(\frac{\lambda - t}{\lambda}\right)^{-n} = \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-n}$

Esquema de contenidos

Función gamma, $\Gamma(u)$

Previamente al estudio de la distribución gamma, se define la **función gamma**, representada por $\Gamma(u)$ como:

$$\Gamma(u) = \int_0^{\infty} x^{u-1} e^{-x} dx, \quad u > 0.$$

Propiedades de la función Γ

- $\Gamma(1) = 1$
- $\Gamma(u+1) = u\Gamma(u), \quad u > 0$
- $\Gamma(u+k) = (u+k-1)(u+k-2)\ldots(u+1)u\Gamma(u), \quad k \in \mathbb{N},\ u > 0$
- $\Gamma(k) = (k-1)!, \quad k \in \mathbb{N}$
- $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$
- Puesto que $\lambda > 0$, a partir de la definición de la función Γ, considerando el cambio de variable $y = \lambda x$, se obtiene

$$\int_0^{\infty} x^{u-1} e^{-\lambda x} dx = \frac{\Gamma(u)}{\lambda^u}, \quad u > 0.$$

Distribución Gamma $X \sim \Gamma(u, \lambda);\ u, \lambda \in \mathbb{R}_+$

Es una **extensión de la distribución de Erlang**, definida cuando el parámetro n no es un número natural sino que es un número real. Es decir, se obtiene ampliando el espacio paramétrico de la distribución de Erlang.

$$X \sim \Gamma(u, \lambda),\ u, \lambda \in \mathbb{R}_+ \Leftrightarrow f_X(x) = \frac{\lambda^u}{\Gamma(u)} x^{u-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0.$$

- Al parámetro u se le suele llamar **parámetro de forma**.
- Al parámetro λ se le suele llamar **parámetro de escala**.
- La forma de **la función de densidad difiere claramente dependiendo si** $u \leq 1$ **o** $u > 1$. De hecho, si $u > 1$, **la densidad gamma presenta máximos** en los puntos $x = \frac{u-1}{\lambda}$.

Casos particulares

1. $X \sim \exp(\lambda) \Leftrightarrow X \sim \Gamma(1, \lambda), \quad \lambda > 0$
2. $E \sim \mathcal{E}(n, \lambda) \Leftrightarrow X \sim \Gamma(n, \lambda), \quad n \in \mathbb{N} - \{0\}, \lambda > 0$

Utilidad

- La **distribución gamma tiene muchas aplicaciones** en experimentos o fenómenos aleatorios que tienen asociadas **v.a. que siempre son no negativas y cuyas distribuciones son sesgadas a la derecha**, es decir, el área bajo la función de densidad disminuye a media que nos alejamos a la derecha.
- Algunos **ejemplos y aplicaciones** son: **intervalos de tiempo entre dos fallos** de un motor, también entre **dos llegadas** de automóviles a una gasolinera o **tiempos de vida** de sitemas electrónicos.

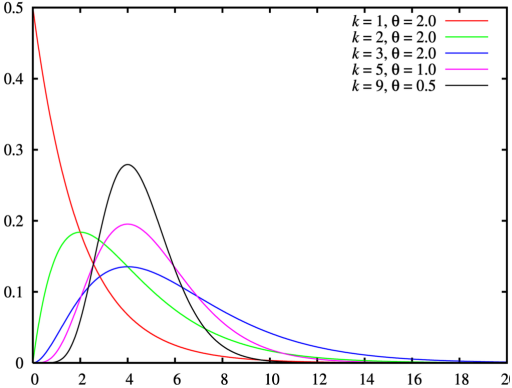
Función generatriz de momentos

$$M_X(t) = \left[\left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)\right]^{-u}, \quad t < \lambda.$$

Momentos

- $E[X^k] = \frac{\lambda^u}{\Gamma(u)} \int_0^\infty x^{k+u-1} e^{-\lambda x} dx = \frac{\Gamma(u+k)}{\lambda^k \Gamma(u)}, \quad k \geq 1$ (cambio de variable $z = \lambda x$)
- $E[X] = \frac{u}{\lambda}, \quad \mathrm{Var}(X) = E\left[X - \frac{u}{\lambda}\right]^2 = \frac{u}{\lambda^2}$

Distintas gráficas de la función de densidad de una distribución gamma



En las gráficas anteriores k corresponde con el parámetro de forma y θ con el de escala.

Esquema de contenidos

Función Beta, $\beta(p, q)$

Previamente al estudio de la distribución beta, se define la **función beta**, representada por $\beta(p, q)$ como:

$$\beta(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx.$$

Propiedades de la función β

- Es simétrica.
- $\beta(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

Distribución Beta $X \sim \beta(p, q);\; p, q > 0$

Una v.a. X sigue una **distribución beta** de parámetros p y q si:

$$X \sim \beta(p, q) \;\Leftrightarrow\; f_X(x) = \frac{1}{\beta(p, q)} x^{p-1}(1-x)^{q-1}, \quad x \in (0, 1), \quad p, q > 0.$$

Propiedades de la distribución β

1. Si $p = q = 1 \Rightarrow X \sim \mathcal{U}(0, 1)$
2. **Simetría**: $X \sim \beta(p, q) \Leftrightarrow 1 - X \sim \beta(q, p)$

Utilidad

- Es una distribución que **permite generar una gran variedad de perfiles** y se utiliza principalmente para representar **variables físicas cuyos valores se encuentran restringidos a un intervalo de longitud finita**.
- Juega un papel importante en **Inferencia Bayesiana**.
- La distribución beta tiene muchas **aplicaciones a experimentos o fenómenos aleatorios que tienen asociadas variables aleatorias que representen proporciones** (valores entre cero y uno).
- **Ejemplos y aplicaciones**: fracción de tiempo que un equipo está en reparación, proporción de piezas defectuosas en un lote, proporción de gasto de una familia en alimentación con respecto a los gastos totales, etc.

Momentos

- $E[X^k] = \frac{1}{\beta(p,q)} \int_0^1 x^k x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \frac{\Gamma(p+k)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+k)} = \frac{\Gamma(p+q)\Gamma(p+k)}{\Gamma(p)\Gamma(p+q+k)}$.
- $E[X] = \frac{p}{p+q}$ y $\mathrm{Var}(X) = \frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}$.

Forma de la función de densidad de la distribución $X \sim \beta(p, q);\ p, q > 0$

La **forma de la función de densidad** de una distribución β es **muy variada** según los **distintos valores de los parámetros** p y q. Esto es muy util puesto que nos permite elegir la forma de la densidad que más nos interese de acuerdo a nuestro problema de interés. En efecto,

- Si $p = q$ la función de densidad es simétrica con eje de simetría en la recta $x = \frac{1}{2}$.
- Si $p = q = 1 \Rightarrow X \sim \mathcal{U}(0, 1)$.
- Si $p < q$ es asimétrica a la derecha, mientras que si $p > q$ es asimétrica a la izquierda.
- Si $p < 1$ y $q \geq 1$ es decreciente y cóncava, mietras que si $q < 1$ y $p \geq 1$ es creciente y convexa.
- Si $p > 1$ y $q > 1$ tiene un sólo máximo.
- Si $p < 1$ y $q < 1$ tiene un sólo mínimo.

Distintas gráficas de la función de densidad de una distribución beta