Lección 4. La ecuación lineal de orden superior

Ecuaciones Diferenciales I
Apuntes de Rafael Ortega Ríos
transcritos por Gian Nicola Rossodivita

Consideremos ecuaciones del tipo

$$x^{(k)} + a_{k-1}(t)x^{(k-1)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t),$$

donde $k \geq 1$ es el orden de la ecuación y los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, b : I \to \mathbb{R}$ son funciones continuas definidas sobre un intervalo abierto I.

La ecuación se dice **homogénea** si $b(t) = 0$ para cada $t \in I$ y se dice **completa** en otro caso.

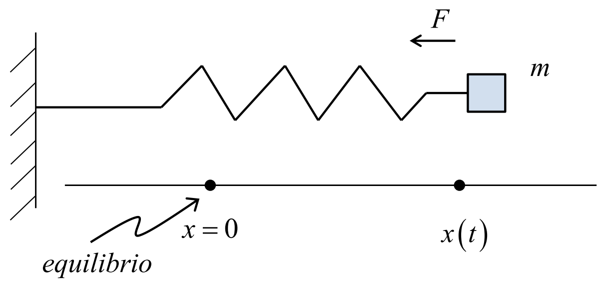
Ejemplos

1. Si $k = 1$ obtenemos $x' + a_0(t)\, x = b(t)$, la ecuación de primer orden que ya hemos estudiado.

2. $mx'' + \kappa x = 0$ con m y κ positivas.

   En este caso $k = 2$, $a_1 = 0$, $a_0 = \frac{\kappa}{m}$, $b = 0$.

   Se trata de una ecuación homogénea que describe el movimiento de un **oscilador armónico**. La posición de la partícula es $x = x(t)$, la aceleración $x''(t)$ y la fuerza $F = -\kappa x$ (Ley de Hooke).



3. $tx''' + (\cos t)x' + t^3 x = t^2$

   Ecuación completa, para escribirla en el formato general dividimos por t,

$$k = 3,\ a_2(t) = 0,\ a_1(t) = \frac{\cos t}{t},\ a_0(t) = t^2,\ b(t) = t.$$

   Podemos trabajar en el intervalo $I =]0, \infty[$ o bien $I =]-\infty, 0[$.

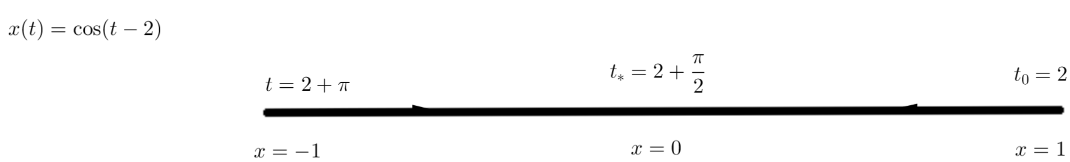
Volvamos a la ecuación general. Para distinguir soluciones impondremos **condiciones iniciales** en algún instante t_0 de I,

$$x(t_0) = \alpha_0,\ x'(t_0) = \alpha_1, \ldots, x^{(k-1)}(t_0) = \alpha_{k-1},$$

donde $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1} \in \mathbb{R}$ son números dados.

Ejemplo: $x'' + x = 0,\ x(2) = 1,\ x'(2) = 0.$

Tomamos un muelle con masa $m = 1$ y constante de elasticidad $\kappa = 1$ y lo estiramos una unidad respecto al equilibrio, en el instante $t_0 = 2$ lo soltamos sin dar impulso. El muelle oscila alrededor del equlibrio según la fórmula $x(t) = \cos(t - 2)$.



1 Teorema de existencia y unicidad

Teorema 1. ***(Existencia y unicidad)*** *Dadas las funciones continuas* $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, b : I \to \mathbb{R}$, $t_0 \in I$ *y números* $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1} \in \mathbb{R}$, *existe una única función* $x \in C^k(I)$, $x = x(t)$, *que cumple*

$$\left\{ \begin{array}{l} x^{(k)} + a_{k-1}(t)x^{(k-1)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t) \\ x(t_0) = \alpha_0,\ x'(t_0) = \alpha_1, \ldots, x^{(k-1)}(t_0) = \alpha_{k-1} \end{array} \right. .$$

Algunas observaciones:

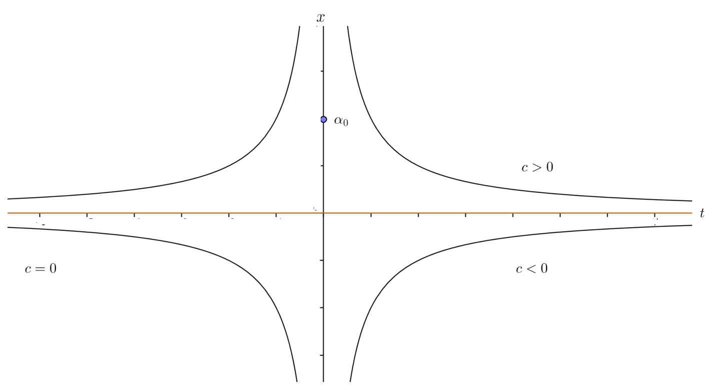
1. Es un resultado **global**, la solución está definida en el mismo intervalo I en el que están definidos los coeficientes.

2. Se supone que el coeficiente de la derivada de orden k es 1. Sería suficiente suponer que dicho coeficiente es continuo y no se anula.

   Si tomamos $k = 1$,

   $$tx' + x = 0, \ \ a_1(t) = t,\ a_0(t) = 1.$$

   Observamos que se trata de una ecuación exacta, con $\frac{d}{dx}(t\,x) = 0$. Entonces $x(t) = \frac{c}{t}$, $c \in \mathbb{R}$, y no podemos encontrar una solución que cumpla la condición inicial $x(0) = \alpha_0 \neq 0$.[1]



[1] También se puede argumentar directamente sobre la ecuación: si $x(0) = \alpha_0$ entonces $t\,x' + x = 0$ implica $(t = 0)$ que $\alpha_0 = 0$.

$x(t) \equiv 0 \qquad x(t) = t \qquad x(t) = ct$

Ejercicio. Demuestra que no hay unicidad para el problema $tx' - x = 0$, $x(0) = 0$.

Demostración en el caso de orden $k = 1$.

$$x' + a_0(t)\, x = b(t), \;\; x(t_0) = \alpha_0$$

Existencia: Definimos la función

$$x(t) = e^{-A_0(t)}\, (\alpha_0 + F(t)), t \in I,$$

donde $A_0(t) = \int_{t_0}^{t} a_0(s)\, ds$, $F(t) = \int_{t_0}^{t} e^{A_0(s)}\, b(s)\, ds$.

Por el Teorema del Cálculo sabemos que A_0 y F estan en $C^1(I)$ con $A_0' = a$, $\underbrace{F' = e^{A_0}\, b}$. Entonces también $x \in C^1(I)$ y se cumple

$$x'(t) = -a_0(t)\, \underbrace{e^{-A_0(t)}\, (\alpha_0 + F(t))}_{x(t)} + e^{-A_0(t)}\, F'(t) \Rightarrow x'(t) = -a_0(t)\, x + b(t).$$

Como $A_0(t_0) = F(t_0) = 0$, también se cumple la condición inicial $x(t_0) = \alpha_0$.
Unicidad. Suponemos que $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son dos soluciones del problema de valores iniciales y vamos a probar que $x_1(t) = x_2(t)$ en I. Para ello definimos $y(t) = x_1(t) - x_2(t)$, que cumple

$-a_0(t)x_1(t) + b(t) + a_0(t)x_2(t) - b(t) =$
$= a_0(t)(\underbrace{x_2(t) - x_1(t)}_{-y(t)})$

$$\begin{cases} y'(t) = x_1'(t) - x_2'(t) = -a_0(t)\, y(t) \\ y(t_0) = 0. \end{cases}$$

Multiplicamos $y' = -a_0\, y$ por e^{A_0} y obtenemos

$$e^{A_0}\, y' + \underbrace{A_0'}_{e^{A_0}}\, y = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{A_0}\, y\right) = 0.$$

Entonces $e^{A_0(t)}\, y(t) = c$ para alguna constante $c \in \mathbb{R}$. Como $y(t_0) = x_1(t_0) - x_2(t_0) = 0$, deducimos que $c = 0$ y por tanto $y(t) \equiv 0 \Rightarrow x_1(t) = x_2(t)$ en I. ■

Nota 1. *En el argumento anterior hemos usado que $e^{A_0(t)}$ es un factor integrante de $y' = -a_0(t)y$.*

La clave para la demostración anterior ha sido la fórmula explícita para la solución de la ecuación lineal de primer orden. No disponemos de una fórmula análoga para la ecuación de orden superior. Por eso emplearemos una estrategia diferente para la demostración del Teorema en el caso $k \geq 2$.

Esto lo haremos en la próxima lección, por ahora admitimos la validez del Teorema sin una prueba.

¿Por qué no hay que esperar una fórmula para la solución de la ecuación de segundo orden?

Consideramos la ecuación lineal homogénea

$$x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0$$

y suponemos que $x(t)$ es una solución no trivial. Trabajamos en un intervalo $J \subset I$ donde $x(t)$ no se anule y definimos

$$y(t) = \frac{x'(t)}{x(t)}, \quad t \in J.$$

$$-a_1(t)x' - a_0(t)x$$
$$\|$$
$$\frac{x''}{x} - \left(\frac{x'}{x}\right)^2$$

Entonces

$$y' = \frac{x''\,x - (x')^2}{x^2} = -a_1\,\frac{x'}{x} - a_0 - \left(\frac{x'}{x}\right)^2 \Rightarrow$$

$$y' = -a_1(t)\,y - a_0(t) - y^2 \text{ Ecuación de Ricatti.}$$

Liouville encontró ejemplos (con $a_0(t)$, $a_1(t)$ polinomios) para los que las soluciones de la Ricatti no son expresables en términos de funciones elementales, podemos decir que no tienen fórmula.

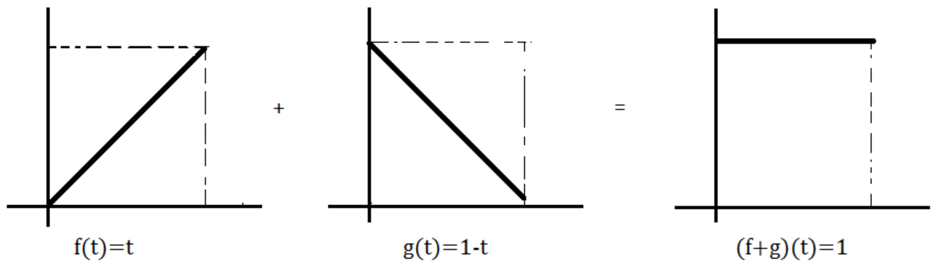
2 El espacio vectorial de las funciones

Ahora vamos a pensar nuestra ecuación en el marco del Álgebra Lineal abstracta. Para ello comenzaremos con algunos preliminares.

Denotamos por $F = F(I, \mathbb{R})$ al conjunto de todas la funciones $f : I \to \mathbb{R}$. La suma de funciones $f, g \in F$ se define de la manera usual

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t).$$

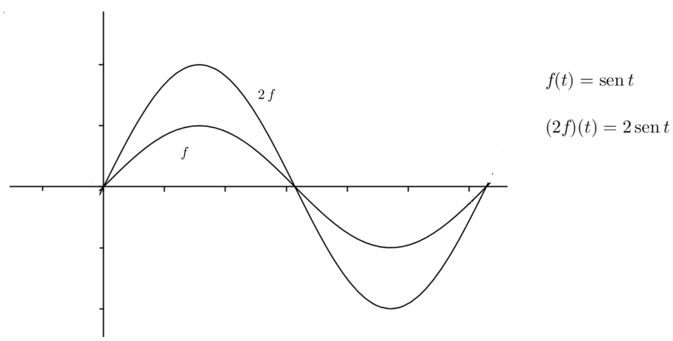
Ejemplo 1. $I =]0, 1[$



El producto por escalares ($\lambda \in \mathbb{R},\ f \in F$),

$$(\lambda f)(t) = \lambda f(t).$$

Ejemplo 2. $I =]0, 2\pi[$



Es fácil comprobar que con estas operaciones F se convierte en un espacio vectorial real.

Recordemos la definición de **independencia lineal:** las funciones $f_1, \ldots, f_n \in F$, son $l.i$ en F si la identidad $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i f_i = 0$ implica $\lambda_i = 0$ para cada i.

Conviene observar que la identidad $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i f_i = 0$ se entiende en F; es decir

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i f_i(t) = 0 \quad \text{para cada}\, t \in I,$$

mientras que los escalares λ_i son constantes en I.

Muchas veces trabajaremos en subespacios $V \subset F$, pero como los escalares son los mismos es claro que la noción de independencia lineal no cambia. Con precisión, dados $f_1, \dots, f_n \in V$

$$f_1, \dots, f_n \; l.i. \,\text{en}\, V \Leftrightarrow \; f_1, \dots, f_n \; l.i. \,\text{en}\, F.$$

Hay muchos métodos para probar la independencia lineal de una familia de funciones. Presentamos uno que está basado en la derivación.

Supongamos que las funciones $f_1, \dots, f_n : I \to \mathbb{R}$ admiten derivadas al menos hasta el orden $n-1$, un orden menos que el número de funciones. Partimos de la identidad

$$\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t) + \cdots + \lambda_n f_n(t) = 0,$$

que es válida para todo $t \in I$, y la derivamos,

$$\lambda_1 f_1'(t) + \lambda_2 f_2'(t) + \cdots + \lambda_n f_n'(t) = 0.$$

Repetimos la operación hasta el orden $n-1$

$$\begin{array}{rcl} \lambda_1 f_1''(t) + \lambda_2 f_2''(t) & + \cdots + & \lambda_n f_n''(t) = 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1 f_1^{(n-1)}(t) + \lambda_2 f_2^{(n-1)}(t) & + \cdots + & \lambda_n f_n^{(n-1)}(t) = 0 \end{array}$$

y de esta manera obtenemos n identidades. Para cada $t \in I$ podemos pensar que disponemos de n ecuaciones lineales con incógnitas $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ y coeficientes $f_1^{(j)}(t), \dots, f_n^{(j)}(t)$. Encontramos así un sistema lineal y homogéneo de n ecuaciones y n incógnitas.

Si para algún $t \in I$ la matriz de coeficientes tiene determinante distinto de cero, la única solución será la trivial, $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. Hemos llegado al siguiente resultado:

Proposición 2. *Sean $f_1, \dots, f_n : I \to \mathbb{R}$, n funciones derivables hasta el orden $n-1$. Se supone que, para algún $t \in I$,*

$$\begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) & \cdots & f_n(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) & \cdots & f_n'(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1^{(n-1)}(t) & f_2^{(n-1)}(t) & \cdots & f_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Entonces $f_1, \dots, f_n$ son $l.i.$ en F.

Al determinante anterior se le suele llamar **Wronskiano** y se le denota por $W(f_1, \dots, f_n)(t)$. Veamos algunos ejemplos del uso de esta Proposición.

Ejemplo 1. $f_1(t) = 1,\ f_2(t) = t,\ f_3(t) = t^2, \dots, f_n(t) = t^{n-1}$.

$$W(f_1, \dots, f_n)(t) = \begin{vmatrix} 1 & t & t^2 & \cdots & t^{n-1} \\ 0 & 1 & 2t & \cdots & (n-1)\, t^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (n-1)! \end{vmatrix} = 1{\cdot}1{\cdot}(2!){\cdot}(3!){\cdot}\cdots{\cdot}(n-1)!$$

Como $W(f_1, \dots, f_n)(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, estas funciones son *l.i.* en cualquier intervalo I. En particular deducimos que en el espacio F existen tantas funciones l.i. como se desee. Podemos decir que el espacio de funciones tiene infinitas dimensiones.

Ejemplo 2. $f_1(t) = \cos(t^2),\ f_2(t) = \operatorname{sen}(t^2)$.

$$W(f_1, f_2)(t) = \begin{vmatrix} \cos(t^2) & \operatorname{sen}(t^2) \\ -2t \operatorname{sen}(t^2) & 2t\, \cos(t^2) \end{vmatrix} = 2t.$$

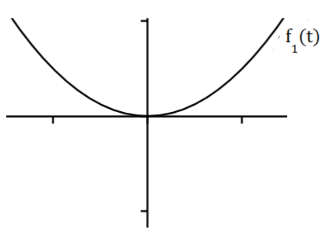
Observamos que el Wronskiano solo se anula en $t = 0$ y por tanto f_1 y f_2 son *l.i.* en cualquier intervalo.

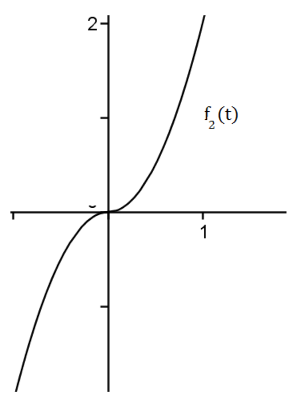
Ejemplo 3. $I =]-1, 1[,\ f_1(t) = t^2,\ f_2(t) = 2|t|\, t$.

Comenzamos por observar que $f_2(t)$ es derivable una vez, para ello es cómodo escribirla en la forma

$$f_2(t) = \begin{cases} 2t^2 & \text{si} \quad t \geq 0 \\ -2t^2 & \text{si} \quad t \leq 0. \end{cases} .$$

$$f_2'(t) = \begin{cases} 4t & \text{si } t \geq 0 \\ -4t & \text{si } t < 0 \end{cases} = 4|t|$$





Entonces

$$W(f_1, f_2)(t) = \begin{vmatrix} t^2 & 2|t|\,t \\ 2t & 4|t| \end{vmatrix} = 4|t|^3 - 4|t|^3 = 0.$$

Observamos que $W(f_1, f_2)(t)$ se anula en todo $t \in I$, la Proposición anterior no es aplicable. Sin embargo vamos a probar que f_1 y f_2 son $l.i.$ en I. Para ello seguimos otro método. Partimos de la identidad

$$\lambda_1\, f_1(t) + \lambda_2\, f_2(t) = 0, \quad \forall t \in I$$

y hacemos una elección afinada de valores de t. Por ejemplo, $t = -\frac{1}{2}$ y $t = \frac{1}{2}$, que llevan al sistema

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{4}\,\lambda_1 - \frac{2}{4}\,\lambda_2 \quad t = 0 \\ \frac{1}{4}\,\lambda_1 + \frac{2}{4}\,\lambda_2 \quad t = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

Este ejemplo es importante porque demuestra que el recíproco de la Proposición anterior es falso. Parece que fue G. Peano quien observó este hecho por primera vez.

Ejercicio. Demuestra que $f_2 \in C^1(I)$, pero $f_2 \notin C^2(I)$.

Ejercicio. Construye dos funciones $f_1\; f_2 : I \to \mathbb{R}$ que sean $l.i$ en $I =]-1, 1[$, pero cuyas restricciones a $J =]0, 1[$, $f_1|_J\; f_2|_J$ son $l.d$ (*La independencia lineal depende del intervalo*).

3 El operador diferencial

Dadas funciones continuas $a_0, a_1, \dots, a_{k-1} : I \to \mathbb{R}$, definimos el operador

$$L[x] = x^{(k)} + a_{k-1}\, x^{(k-1)} + \cdots + a_1\, x' + a_0\, x,$$

que actúa sobre funciones $x(t)$.

Por ejemplo, dado el operador $L[x] = x'' + t\,x' + x$, ($k = 2$, $I = \mathbb{R}$),

$$L[e^t] = (2 + t)\, e^t, \;\; L[t^2] = 3t^2 + 2.$$

Supondremos siempre que $x(t)$ es una función en $C^k(I)$ y así $L[x](t)$ estará en $C(I)$. El operador L queda definido entre dos subespacios de $F(I, \mathbb{R})$,

$$L : C^k(I) \to C(I),\; x = x(t) \mapsto x^{(k)} + a_{k-1}\, x^{(k-1)} + \cdots + a_1\, x' + a_0\, x.$$

Observamos que L es **lineal:**

$$L[x+y] = L[x] + L[y], \;\; L[\lambda\, x] = \lambda\, L[x], \text{ si } x, y \in C^k(I),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio. ¿Se cumple la propiedad $L[x \cdot y] = L[x] \cdot L[y]$?

Podemos escribir la ecuación diferencial lineal en la forma abreviada

$$L[x] = b(t),$$

donde $b : I \to \mathbb{R}$ es una función continua dada.

4 La ecuación lineal homogénea

Dados dos espacios vectoriales V y W y una aplicación lineal $\mathcal{L} : V \to W$, el conjunto de las soluciones de la ecuación

$$\mathcal{L}(v) = 0$$

es el **núcleo,** un subespacio vectorial de V,

$$\operatorname{Ker} \mathcal{L} = \{v \in V : \mathcal{L}(v) = 0\}.$$

En nuestro caso $V = C^k(I)$, $W = C(I)$ y el núcleo de L es precisamente el conjunto de soluciones de la ecuación homogénea,

$$\mathcal{Z} = \operatorname{Ker} L = \{x \in C^k(I) : L[x] = 0\}.$$

Entonces $\mathcal{Z}$ es un subespacio de vectorial de $C^k(I)$.

Vamos a utilizar el teorema de existencia y unicidad para calcular la dimensión de $\mathcal{Z}$. Para ello fijamos un instante inicial $t_0 \in I$ y asignamos a cada solución su condición inicial en t_0,

$$\Phi_{t_0} : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}^k, \;\; x \longmapsto \begin{pmatrix} x(t_0) \\ x'(t_0) \\ \cdots \\ x^{(k-1)}(t_0) \end{pmatrix}.$$

Observamos que Φ_{t_0} es lineal,

$$\Phi_{t_0}(x+y) = \Phi_{t_0}(x) + \Phi_{t_0}(y), \;\; \Phi_{t_0}(\lambda x) = \lambda \Phi_{t_0}(x).$$

Vamos a comprobar que Φ_{t_0} es biyectiva y por tanto es un **isomorfismo**:

- Φ_{t_0} es inyectiva. Si $x, y \in \mathcal{Z}$ son tales que $\Phi_{t_0}(x) = \Phi_{t_0}(y)$, entonces $x(t)$ y $y(t)$ son soluciones de la ecuación $L[x] = 0$ que cumplen la misma condición inicial en t_0; $\underbrace{\text{por unicidad,}}_{\text{Por el teorema}}$ $x = y$.

- Φ_{t_0} es sobreyectiva. Dado un vector $\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{(k-1)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k$ construimos la solución $x(t)$ de $L[x] = 0$ que cumple

$$x(t_0) = \alpha_0,\ x'(t_0) = \alpha_1, \ldots, x^{(k-1)}(t_0) = \alpha_{k-1}.$$

Entonces $x \in \mathcal{Z}$ cumple $\Phi_{t_0} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{(k-1)} \end{pmatrix}$.

Por la parte de "existencia" del teorema

Del isomorfismo $\mathcal{Z} \cong \mathbb{R}^k$ se sigue que

$$\dim \mathcal{Z} = k.$$

Ejemplo. $x'' + x = 0,\ I = \mathbb{R}$.

Sabemos que las funciones $\varphi(t) = \cos t,\ \psi(t) = \operatorname{sen} t$ son soluciones. Como $\mathcal{Z}$ es un espacio vectorial, también las combinaciones lineales $c_1 \varphi + c_2 \psi$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, son soluciones. Por otra parte φ, ψ son *l.i.* en $\mathbb{R}$, pues

$$W(\varphi, \psi)(t) = \begin{vmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{vmatrix} = 1 \text{ para cada } t \in \mathbb{R}.$$

Entonces $\{\varphi, \psi\}$ es una base de $\mathcal{Z}$ ($\dim \mathcal{Z} = 2$) y se cumple $\mathcal{Z} = \{c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t / \, c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$.

Ejercicio. Demuestra que $\mathcal{Z} = \{A \cos(t + \phi) / \, A \geq 0,\ \phi \in [0, 2\pi[\}$.

Observamos que el isomorfismo $\Phi_{t_0} : \mathcal{Z} \cong \mathbb{R}^k$ varía con t_0. Vamos a describir Φ_{t_0} para $t_0 = 0$ y $t_0 = \frac{\pi}{2}$ en el ejemplo anterior

$$t_0 = 0, \qquad \Phi_0 : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}^2,\ c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t \longmapsto \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$t_0 = \frac{\pi}{2}, \qquad \Phi_{\frac{\pi}{2}} : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}^2,\ c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t \longmapsto \begin{pmatrix} c_2 \\ -c_1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio. Calcula $\mathcal{Z}$ para $x'' + tx' = 0$.

Es costumbre llamar **sistema fundamental** a una base de $\mathcal{Z}$. Podemos caracterizar los sistemas fundamentales en términos del Wronskiano.

Teorema 3. *Sean $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in \mathcal{Z}$. Son equivalentes:*

(*i*) $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ *es un sistema fundamental,*

(*ii*) $W(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)(t) \neq 0$ *para cada* $t \in I$,

(*iii*) $W(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)(t_0) \neq 0$ *para algún* $t_0 \in I$.

$\varphi_1(t) = \cos t$

$\varphi_2(t) = \operatorname{sen} t$

$\varphi_3(t) = t + \cos t$

$x''' + a_2 x'' + a_1 x' + a_0 x = 0$

Observamos que $(ii) \Rightarrow (iii)$ es trivial, mientras que $(iii) \Rightarrow (i)$ se sigue de resultados anteriores, ya que (iii) implica que $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ son *l.i.* y como $\dim \mathcal{Z} = k$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ es una base de $\mathcal{Z}$. La implicación delicada es $(i) \Rightarrow (ii)$; antes de probarla vamos a presentar algunos ejemplos para entender bien el teorema.

Ejemplo 1. Consideremos $x'' - x = 0$, $I = \mathbb{R}$. Las soluciones $\varphi_1(t) = e^t$, $\varphi_2(t) = e^{-t}$ forman un sistema fundamental, pues

$$W(\varphi_1, \varphi_2) = \begin{vmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{vmatrix} = -2.$$

También las soluciones $\psi_1(t) = \cosh t$, $\psi_2(t) = \operatorname{senh} t$ forman un sistema fundamental,

$$W(\psi_1, \psi_2) = \begin{vmatrix} \cosh t & \operatorname{senh} t \\ \operatorname{senh} t & \cosh t \end{vmatrix} = \cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1.$$

Ejemplo 2. Las funciones $\varphi_1(t) = |t|^3$, $\varphi_2(t) = 2t^3$ están en $C^2(\mathbb{R})$ y son *l.i.* en $\mathbb{R}$. Como $W(\varphi_1, \varphi_2) \equiv 0$, no pueden ser soluciones de la misma ecuación del tipo $x'' + a_1(t)\, x' + a_0(t)x = 0$, con $a_0, a_1 \in C(\mathbb{R})$. Es interesante observar que ambas son soluciones de la ecuación $t^2 x'' - 6x = 0$.

Ejemplo 3. Las funciones $\varphi_1(t) = \cos t$, $\varphi_2(t) = \operatorname{sen} t$, $\varphi_3(t) = t + \cos t$ cumplen $W(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = t$. En el intervalo $I = \mathbb{R}$ se cumple (iii) pero no (ii). Esto quiere decir que no existe una ecuación $x''' + a_2(t)x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0$ con $a_0, a_1, a_2 \in C(\mathbb{R})$ que tenga a estas tres funciones como soluciones.

Ejercicio. Demuestra que sí existe esa ecuación si solo se supone $a_0, a_1, a_2 \in C(]0, \infty[)$.

Demostración del Teorema. Comenzamos recordando algunos resultados de Álgebra Lineal:

(I) Si $\mathcal{L} : V \to W$ es un isomorfismo y $v_1, \ldots, v_k$ una base de V, entonces $\mathcal{L}(v_1), \ldots, \mathcal{L}(v_k)$ es una base de W. (Un isomorfismo lleva bases en bases).

(II) Dados vectores $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^k$

$$\{v_1, \ldots, v_k\} \text{ base de } \mathbb{R}^k \Leftrightarrow \det(v_1 | \cdots | v_k) \neq 0.$$

Para probar probar $(i) \Rightarrow (ii)$ fijamos un instante $t \in I$ y consideramos el isomorfismo

$$\Phi_t : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}^k \; x \longmapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \cdots \\ x^{(k-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

Por (i) sabemos que $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ es una base de $\mathcal{Z}$ y, aplicando (I), deducimos que $\Phi_t(\varphi_1), \ldots, \Phi_t(\varphi_k)$ es una base de $\mathbb{R}^k$. Entonces, por (II),

$$\det(\Phi_t(\varphi_1) | \cdots | \Phi_t(\varphi_k)) \neq 0.$$

Identificamos este determinante,

$$\det(\Phi_t(\varphi_1) | \cdots | \Phi_t(\varphi_k)) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \cdots & \varphi_k(t) \\ \varphi_1'(t) & \cdots & \varphi_k'(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \cdots & \varphi_k^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} = W(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)(t).$$

Hemos probado que $W(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)(t) \neq 0$ y como t es arbitrario obtenemos (ii). ■

Del Teorema anterior deducimos que, dadas $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in \mathcal{Z}$ soluciones de una ecuación homogénea, el Wronskiano es siempre cero o nunca se anula. Este hecho también se puede deducir de la siguiente fórmula, que liga el Wronskiano en distintos instantes.

Fórmula de Liouville

Sean $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in \mathcal{Z}$, *entonces*

$$W(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)(t) = W(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)(t_0)\, e^{-\int_{t_0}^{t} a_{k-1}(s)\, ds}, \quad \text{si } t, t_0 \in I.$$

La demostración de esta fórmula nos enseñará dos cosas:

i) ¿Cómo se deriva un determinante?

ii) Un método de Cauchy para obtener identidades funcionales a partir de la unicidad de solución del problema de valores iniciales.

Derivada de un determinante

Suponemos que $f_{ij} : I \to \mathbb{R}$ son funciones derivables con $1 \leq i, j \leq k$. Entonces podemos construir la función $D : I \to \mathbb{R}$, $D(t) = \det(f_{ij}(t))_{1\leq i,j\leq k}$, y esta función es derivable con derivada

$$D'(t) = \begin{vmatrix} f'_{11}(t) & \cdots & f'_{1k}(t) \\ f_{21}(t) & \cdots & f_{2k}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k1}(t) & \cdots & f_{kk}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11}(t) & \cdots & f_{1k}(t) \\ f'_{21}(t) & \cdots & f'_{2k}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k1}(t) & \cdots & f_{kk}(t) \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} f_{11}(t) & \cdots & f_{1k}(t) \\ f_{21}(t) & \cdots & f_{2k}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f'_{k1}(t) & \cdots & f'_{kk}(t) \end{vmatrix}.$$

La derivada de un determinante se expresa como la suma de k determinantes, en cada uno de ellos se deriva una fila.

Para entender cómo se obtiene esta fórmula podemos pensar en la definición de determinante a partir del grupo de permutaciones,

$$D(t) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}} \epsilon(\sigma)\, f_{1,\sigma(1)}(t) \cdots f_{k,\sigma(k)}(t),$$

donde $\mathcal{S}$ es el grupo de permutaciones de orden k y $\epsilon(\sigma)$ es la signatura de σ (± 1).
Entonces $D(t)$ es una suma de productos de funciones derivables y es por tanto derivable. Además

$$\begin{aligned} D'(t) &= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}} \epsilon(\sigma)\, (f_{1,\sigma(1)}(t) \cdots f_{k,\sigma(k)}(t))' \\ &= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}} \epsilon(\sigma)\, f'_{1,\sigma(1)}(t) \cdot f_{2,\sigma(2)}(t) \cdots f_{k,\sigma(k)}(t) + \sum_{\sigma\in\mathcal{S}} \epsilon(\sigma)\, f_{1,\sigma(1)}(t) \cdot f'_{2,\sigma(2)}(t) \cdots f_{k,\sigma(k)}(t) \\ &\quad + \cdots + \sum_{\sigma\in\mathcal{S}} \epsilon(\sigma)\, f_{1,\sigma(1)}(t) \cdot f_{2,\sigma(2)}(t) \cdots f'_{k,\sigma(k)}(t) \end{aligned}$$

Demostración de la Fórmula de Liouville

La función $W(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)(t)$ es de clase $C^1(I)$, pues se trata de un determinante en el que todos los coeficientes son al menos C^1. La derivada cumple

$$\frac{d}{dt}W(\varphi_1,\ldots,\varphi_k)(t)=\begin{vmatrix}\varphi_1' & \cdots & \varphi_k'\\ \varphi_1' & \cdots & \varphi_k'\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_1^{(k-1)} & \cdots & \varphi_k^{(k-1)}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\varphi_1 & \cdots & \varphi_k\\ \varphi_1'' & \cdots & \varphi_k''\\ \varphi_1'' & \cdots & \varphi_k''\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_1^{(k-1)} & \cdots & \varphi_k^{(k-1)}\end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix}\varphi_1 & \cdots & \varphi_k\\ \varphi_1' & \cdots & \varphi_k'\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_1^{(k-2)} & \cdots & \varphi_k^{(k-2)}\\ \varphi_1^{(k)} & \cdots & \varphi_k^{(k)}\end{vmatrix}.$$

Observamos que en todos los determinantes hay una fila repetida salvo en el último (primera=segunda, segunda=tercera, etcétera). En el último determinante usamos que las funciones $\varphi_1,\ldots,\varphi_k$ son soluciones y podemos expresar la derivada $\varphi_i^{(k)}$ en términos de las derivadas de orden más bajo

$$\frac{d}{dt}W(\varphi_1,\ldots,\varphi_k)(t)=\begin{vmatrix}\varphi_1 & \cdots & \varphi_k\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_1^{(k-2)} & \cdots & \varphi_k^{(k-2)}\\ -a_{k-1}\,\varphi_1^{(k-1)}-\cdots-a_1\,\varphi_1'-a_0\,\varphi_1 & \cdots & -a_{k-1}\,\varphi_k^{(k-1)}-\cdots-a_1\,\varphi_k'-a_0\,\varphi_k\end{vmatrix}.$$

Multiplicamos la primera fila por a_0, la segunda por a_1, $\ldots$, la fila $k-1$ por a_{k-2}, y sumamos todo esto a la última fila,

$$\frac{d}{dt}W(\varphi_1,\ldots,\varphi_k)(t)=-a_{k-1}\begin{vmatrix}\varphi_1 & \cdots & \varphi_k\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_1^{(k-2)} & \cdots & \varphi_k^{(k-2)}\\ \varphi_1^{(k-1)} & \cdots & \varphi_k^{(k-1)}\end{vmatrix}=-a_{k-1}(t)W(\varphi_1,\ldots,\varphi_k)(t).$$

En resumen, la función $W(\varphi_1,\ldots,\varphi_k)(t)$ es solución del problema de valores iniciales

$$y'=-a_{k-1}(t)\,y,\;\; y(t_0)=W_0,$$

con $W_0=W(\varphi_1,\ldots,\varphi_k)(t_0)$. Sabemos que la solución de este problema es única y está dada por la fórmula

$$y(t)=W_0\,e^{-\int_{t_0}^t a_{k-1}(s)\,ds}.$$

Por tanto $y(t)=W(\varphi_1,\ldots,\varphi_k)(t)$ y hemos llegado a la fórmula.

Esta fórmula es útil para resolver la ecuación lineal homogénea de segundo orden cuando se conoce una solución no trivial. Veamos un **ejemplo:**

$$x''-\frac{2}{t^2}\,x=0,\;\; t\in I=]0,\infty[.$$

Comenzamos observando que $\varphi(t) = t^2$ es una solución no trivial. Nos proponemos a encontrar otra solución $\psi(t)$ de manera que $\{\varphi, \psi\}$ sea un sistema fundamental; para ello será suficiente exigir que $W(\varphi, \psi)(t_0) = W_0 \neq 0$ para algún $t_0 \in I$. Elegimos[2] $t_0 = 1$, $W_0 = -7$. Entonces

$$\begin{aligned}
W(\varphi, \psi)(t) &= -7\, e^{-\int_1^t a_1(s)\, ds} = -7 \Rightarrow \\
\begin{vmatrix} \varphi & \psi \\ \varphi' & \psi' \end{vmatrix} &= -7 \Rightarrow \\
\varphi'(t)\, \psi(t) - \varphi(t)\, \psi'(t) &= 7 \Rightarrow \\
2t\, \psi(t) - t^2\, \psi'(t) &= 7.
\end{aligned}$$

Interpretamos esta identidad como una ecuación lineal completa de primer orden (incógnita ψ). La podemos resolver con un cambio lineal o bien con el factor integrante $-\frac{1}{t^4}$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t^2}\, \psi'(t) - \frac{2}{t^3}\, \psi(t) &= -\frac{7}{t^4}, \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t^2}\, \psi(t)\right) &= -\frac{7}{t^4}, \\
\frac{1}{t^2}\, \psi(t) = c - 7\int_1^t \frac{ds}{s^4} &= c_* + \frac{7}{3t^3}, \\
\psi(t) &= c_*\, t^2 + \frac{7}{3t}.
\end{aligned}$$

En conclusión,

$$\varphi(t) = t^2, \;\; \psi(t) = \frac{7}{3t}, \quad \text{es un sistema fundamental.}$$

5 La ecuación completa

Comenzamos recordando dos propiedades importantes de las ecuaciones lineales abstractas. Dados espacios vectoriales V y W y una aplicación lineal $\mathcal{L} : V \to W$, consideramos la ecuación

$$\mathcal{L}(x) = b,$$

[2] la elección de $t_0 > 0$ y $W_0 \neq 0$ es arbitraria

donde $x \in V$ es la incógnita y $b \in W$ es un dato.

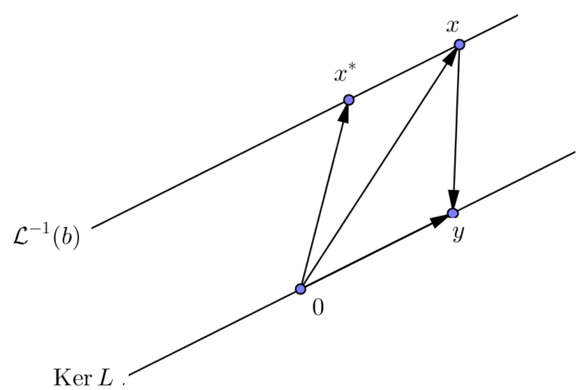
1. **Estructura del conjunto de soluciones**

   Si el sistema es compatible, las soluciones están dadas por la fórmula

   $$\mathcal{L}^{-1}(b) = \{x \in V : \mathcal{L}(x) = b\} = x^* + \operatorname{Ker} L,$$

   donde $x^* \in V$ cumple $\mathcal{L}(x^*) = b$ (**Solución particular**).

   Geométricamente esto nos dice que el conjunto de soluciones de la completa forma un espacio afín paralelo al espacio vectorial $\operatorname{Ker} L$. En el siguiente dibujo observamos que la solución particular x^* puede ser cualquier vector en el espacio afín $\mathcal{L}^{-1}(b)$.

   Desde el punto de vista algebraico esta fórmula nos dice que si conocemos una solución de la completa y sabemos resolver la homogénea, entonces podemos calcular todas las soluciones.

2. **Principio de Superposición**

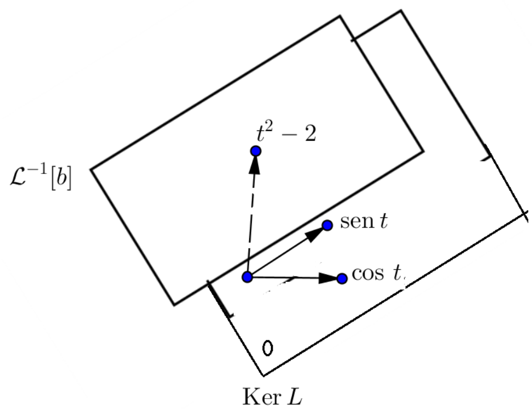
   Si $\mathcal{L}(x_i) = b_i$, $i = 1, \ldots, n$, entonces $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ es una solución de $\mathcal{L}(x) = b$ con $b = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i$.

Veamos dos ejemplos de la aplicación de estas propiedades a ecuaciones diferenciales.

Ejemplo 1. $x'' + x = t^2$.

Esta ecuación admite la solución particular $x^*(t) = t^2 - 2$. La ecuación homogénea $x''+x = 0$ tiene el sistema fundamental $\cos t$, $\operatorname{sen} t$. Las soluciones de la completa son de la forma

$$x(t) = t^2 - 2 + c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$



$b(t) = \underbrace{3}_{\lambda_1} \cdot e^t + \underbrace{5}_{\lambda_2} \cdot t^2$ Principio de superposición

Ejemplo 2. $x'' + x = 5t^2 + 3e^t$.

Observamos que $\frac{1}{2}e^t$ es solución de $x'' + x = e^t$. Entonces el conjunto de soluciones de la ecuación de partida es

$$x(t) = 5(t^2 - 2) + \frac{3}{2}e^t + c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t.$$

6 Variación de las constantes

Vamos a describir un método que permite resolver la ecuación completa si se conoce un sistema fundamental de la homogénea. Por sencillez lo vamos a formular para ecuaciones de segundo orden, más tarde pensaremos en su extensión a órdenes superiores. Partimos de la ecuación completa

$$x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t)$$

y de un sistema fundamental $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ de la ecuación homogénea. Sabemos que las soluciones de la homogénea son de la forma $c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t)$ con

c_1, c_2 constantes. Vamos a buscar las soluciones de la completa en la forma

$$x(t) = c_1(t)\,\varphi_1(t) + c_2(t)\,\varphi_2(t),$$

donde ahora c_1, c_2 son funciones a determinar.
Al comenzar teníamos una incógnita x pero ahora tenemos dos (c_1 y c_2), por eso debemos imponer un ligadura entre c_1 y c_2. Derivando,

$$x' = \underbrace{c_1'\,\varphi_1 + c_2'\,\varphi_2}_{0} + c_1\,\varphi_1' + c_2\,\varphi_2'.$$

Imponemos la ligadura

$$c_1'\,\varphi_1 + c_2'\,\varphi_2 = 0,$$

de esta manera x'' se simplifica

$$x'' = c_1'\,\varphi_1' + c_2'\,\varphi_2' + c_1\,\varphi_1'' + c_2\,\varphi_2''.$$

Sustituyendo en la ecuación

$$c_1'\,\varphi_1' + c_2'\,\varphi_2' + c_1\,\varphi_1'' + c_2\,\varphi_2'' + a_1(t)\,(c_1\,\varphi_1' + c_2\,\varphi_2') + a_0(t)\,(c_1\,\varphi_1 + c_2\,\varphi_2) = b(t).$$

Usando que φ_1 y φ_2 son soluciones de la homogénea, se tiene que

$$c_1'\,\varphi_1' + c_2'\,\varphi_2' + \underbrace{(c_1\,\varphi_1'' + c_2\,\varphi_2'') + a_1(t)\,(c_1\,\varphi_1' + c_2\,\varphi_2') + a_0(t)\,(c_1\,\varphi_1 + c_2\,\varphi_2)}_{0} = b$$

y así

$$c_1'\,\varphi_1' + c_2'\,\varphi_2' = b.$$

Juntando esta ecuación con la ligadura llegamos al sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas

$$\left.\begin{array}{r} c_1'\,\varphi_1 + c_2'\,\varphi_2 = 0 \\ c_1'\,\varphi_1' + c_2'\,\varphi_2' = b \end{array}\right\}. \quad \text{Incógnitas: } c_1', c_2'.$$

La matriz de coeficientes tiene determinante no nulo,

$$\det\begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{pmatrix} = W(\varphi_1, \varphi_2) \neq 0 \quad \text{para todo}\, t \in I.$$

Por tanto es un sistema compatible y determinado que resolvemos usando la regla de Cramer

$$
\begin{aligned}
c_1' &= \frac{1}{W(\varphi_1, \varphi_2)} \begin{vmatrix} 0 & \varphi_2 \\ b & \varphi_2' \end{vmatrix} = \frac{-b\,\varphi_2}{W(\varphi_1, \varphi_2)} \\
c_2' &= \frac{1}{W(\varphi_1, \varphi_2)} \begin{vmatrix} \varphi_1 & 0 \\ \varphi_1' & b \end{vmatrix} = \frac{b\,\varphi_1}{W(\varphi_1, \varphi_2)}.
\end{aligned}
$$

Integrando entre t_0 y t llegamos a la fórmula para una solución particular

$$
x(t) = \left(- \int_{t_0}^{t} \frac{b(s)\,\varphi_2(s)}{W(s)} \right) \varphi_1(t) + \left(\int_{t_0}^{t} \frac{b(s)\,\varphi_1(s)}{W(s)} \right) \varphi_2(t),
$$

donde $W(s) = W(\varphi_1, \varphi_2)(s)$.

Una crítica al argumento anterior: Hemos partido de la fórmula $x(t) = c_1(t)\,\varphi_1(t) + c_2(t)\,\varphi_2(t)$ sin saber de antemano que la solución de la ecuación completa se puede expresar de esa forma.

Una vez hechos los cálculos es posible proceder con rigor. Partimos de la fórmula final y derivamos dos veces para demostrar que se trata de una solución de la ecuación completa. Así justificamos la existencia de una solución del tipo que postula el método de variación de constantes.

Ejercicio. Demuestra que la función $x(t)$ dada por la fórmula anterior está en $C^2(I)$ y calcula $x''(t)$.

6.1 Extensión a un orden superior

Dada una ecuación de tercer orden

$$
x''' + a_2(t)x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t)
$$

y un sistema fundamental de la homogénea $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_3(t)$, buscamos la solución de la forma

$$
c_1(t)\varphi_1(t) + c_2(t)\varphi_2(t) + c_3(t)\varphi_3(t),
$$

imponiendo las ligaduras

$$
\left.\begin{aligned}
c_1'\,\varphi_1 + c_2'\,\varphi_2 + c_3'\,\varphi_3 = 0 \\
c_1'\,\varphi_1' + c_2'\,\varphi_2' + c_3'\,\varphi_3' = 0
\end{aligned}\right\}.
$$

$c_1\varphi_1' + c_2\varphi_2' + c_3\varphi_3'$

$x'' = \underbrace{c_1'\varphi_1' + c_2'\varphi_2' + c_3'\varphi_3'}_{0} + c_1\varphi_1'' + c_2\varphi_2'' + c_3\varphi_3''$

$x''' = c_1'\varphi_1'' + c_2'\varphi_2'' + c_3'\varphi_3'' + c_1\varphi_1''' + c_2\varphi_2''' + c_3\varphi_3'''$

Entonces la ecuación lleva a

$$c_1'\,\varphi_1'' + c_2'\,\varphi_2'' + c_3'\,\varphi_3'' = b$$

y de nuevo se obtiene un sistema compatible determinado

6.2 Un ejemplo importante

Dados números $\omega > 0, \Omega > 0$, consideramos la ecuación

$$x'' + \omega^2 x = \operatorname{sen}\Omega\, t.$$

Las funciones $\varphi_1(t) = \cos\omega\, t$, $\varphi_2(t) = \operatorname{sen}\omega\, t$, forman un sistema fundamental de la ecuación homogénea $x'' + \omega^2 x = 0$ con

$$W(\varphi_1, \varphi_2) = \begin{vmatrix} \cos\omega\, t & \operatorname{sen}\omega\, t \\ \operatorname{sen}\omega\, t & \cos\omega\, t \end{vmatrix} = \omega.$$

Buscamos una solución de la completa de la forma

$$c_1(t)\,\varphi_1(t) + c_2(t)\,\varphi_2(t), \;\; c_i = c_i(t)$$

con

$$\left.\begin{array}{l} c_1'\,\varphi_1 + c_2'\,\varphi_2 = 0 \\ c_1'\,\varphi_1' + c_2'\,\varphi_2' = \operatorname{sen}\Omega\, t \end{array}\right\}.$$

$$\begin{aligned} c_1' &= \frac{1}{\omega}\begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen}\omega\, t \\ \operatorname{sen}\Omega\, t & \omega\cos\omega\, t \end{vmatrix} = -\frac{\operatorname{sen}\omega\, t\operatorname{sen}\Omega\, t}{\omega} \\ c_2' &= \frac{1}{\omega}\begin{vmatrix} \cos\omega\, t & 0 \\ -\omega\operatorname{sen}\omega\, t & \operatorname{sen}\Omega\, t \end{vmatrix} = \frac{\cos\omega\, t\operatorname{sen}\Omega\, t}{\omega}. \end{aligned}$$

Para calcular c_1 y c_2 usamos la fórmulas

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta &= \frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}{2} \\ \operatorname{sen}\alpha\cos\beta &= \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{2}. \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{1}{2\omega}\int [\cos[(\omega-\Omega)\,t]-\cos[(\omega+\Omega)\,t]]\,dt \\ &= -\frac{1}{2\omega}\left[\frac{\operatorname{sen}[(\omega-\Omega)\,t]}{\omega-\Omega}-\frac{\operatorname{sen}[(\omega+\Omega)\,t]}{\omega-\Omega}\right]. \end{aligned}$$

Para que esta fórmula tenga sentido es necesario que $\omega \neq \Omega$.

En el caso $\omega = \Omega$ hacemos un cálculo distinto,

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{1}{\omega}\int \operatorname{sen}^2\omega\, t\,dt \underbrace{=}_{\text{ángulo mitad}} -\frac{1}{\omega}\int \frac{1-\cos 2\omega\, t}{2}\,dt \\ c_1 &= -\frac{1}{2\omega}\,t+\frac{1}{4\omega^2}\operatorname{sen}2\omega\, t. \end{aligned}$$

No hemos añadido constantes de integración porque solo estamos interesados en encontrar una solución particular. Un cálculo análogo lleva a la fórmula

$$c_2 = \begin{cases} \frac{1}{2\omega}\left[\frac{\cos[(\omega-\Omega)\,t]}{\omega-\Omega}+\frac{\cos[(\omega+\Omega)\,t]}{\omega-\Omega}\right] & \text{si} \quad \omega\neq\Omega \\ -\frac{1}{4\omega^2}\cos(2\omega\, t) & \text{si} \quad \omega=\Omega \end{cases}.$$

Caso I $\omega \neq \Omega$

$$x(t) = c_1(t)\cos\omega\, t + c_2(t)\operatorname{sen}\omega\, t + k_1\cos\omega\, t + k_2\operatorname{sen}\omega\, t,\ \ k_1,\ k_2\in\mathbb{R}$$

Caso II $\omega = \Omega$

$$x(t) = -\frac{1}{2\omega}\,t\,\cos\omega\, t+\frac{1}{4\omega^2}\operatorname{sen}2\omega\, t\,\cos\omega\, t-\frac{1}{4\omega^2}\,\cos 2\omega\, t\operatorname{sen}\omega\, t+k_1\cos\omega\, t+k_2\operatorname{sen}\omega\, t,\ \ k_1,\ k_2\in\mathbb{R}.$$

Analizamos las soluciones en cada caso

En el **caso I** observamos que

$$|c_i(t)| \leq \frac{1}{2\omega}\left[\frac{1}{|\omega-\Omega|}+\frac{1}{\omega+\Omega}\right],\ \ t\in\mathbb{R},\ \ i=1,2.$$

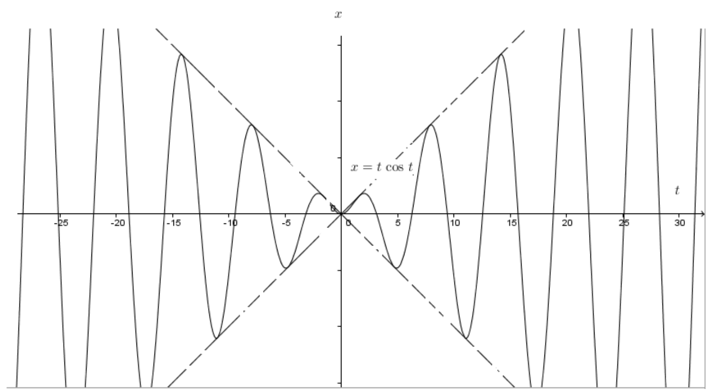
Entonces cada solución que escojamos resulta ser acotada,

$$|x(t)| \leq |c_1(t)|+|c_2(t)|+|k_1|+|k_2| \leq \frac{1}{\omega}\left[\frac{1}{|\omega-\Omega|}+\frac{1}{\omega+\Omega}\right]+|k_1|+|k_2|,\ \ t\in\mathbb{R}.$$

En el **caso II** escribimos la solución en la forma

$$x(t) = -\frac{1}{2\omega}\, t\, \cos \omega\, t + f(t)$$

con $f(t)$ acotada, $|f(t)| \leq \frac{1}{2\omega^2} + |k_1| + |k_2|$. La función $t \cos \omega\, t$ tiene oscilaciones cada vez más grandes.



Entonces se cumple

$$\lim_{t \to +\infty} \sup x(t) = \infty, \quad \lim_{t \to -\infty} \inf x(t) = -\infty.$$

Si $\omega = \Omega$ las soluciones oscilan con amplitud crecientes y son no acotadas.

6.3 A la hora de la práctica

El método de variación constantes tiene el mérito de ser universal: se aplica cualquier ecuación lineal. Como contrapartida los cálculos suelen ser largos. Cuando se trabaja con ecuaciones lineales de coeficientes constantes ($a_{k-1}, \ldots, a_1, a_0$ no dependen de t) se puede buscar la solución por el método de coeficientes indeterminados. La idea es buscar una solución del mismo tipo que $b(t)$. Por ejemplo, si $b(t)$ polinomio de grado N, buscamos $x(t) = \sum_{i=0}^{N} c_i\, t^i$. Si $b(t)$ es una exponencial del tipo $b(t) = e^{\lambda\, t}$, buscamos $x(t) = c\, e^{\lambda\, t}$. Si $b(t) = a \cos \omega\, t + b \operatorname{sen} \omega\, t$, $x(t) = c_1 \cos \omega\, t + c_2 \operatorname{sen} \omega\, t$. Se sustituye en la ecuación y se buscan los coeficientes c_i. Esto funciona en la mayoría de los casos, pero puede fallar.

Ejemplo. $x'' + \omega^2 x = \operatorname{sen} \Omega t$.

Buscamos $x(t) = c_1 \cos \Omega t + c_2 \operatorname{sen} \Omega t$. Sustituyendo en la ecuación, para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$-c_1 \Omega^2 \cos \Omega t - c_2 \Omega^2 \operatorname{sen} \Omega t + c_1 \omega^2 \cos \Omega t + c_2 \omega^2 \operatorname{sen} \Omega t = \operatorname{sen} \Omega t.$$

Como las funciones $\cos \Omega t$ y $\operatorname{sen} \Omega t$ son $l.i.$ en cualquier intervalo,

$$c_1 (\omega^2 - \Omega^2) = 0, \;\; c_2 (\omega^2 - \Omega^2) = 1$$

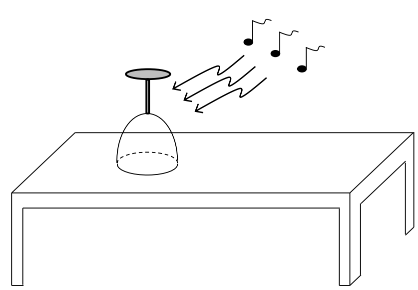
y obtenemos la solución particular

$$\frac{1}{\omega^2 - \Omega^2} \operatorname{sen} \Omega t \quad \text{si } \omega \neq \Omega.$$

El método lleva a una ecuación incompatible cuando las soluciones no son del tipo conjeturado.

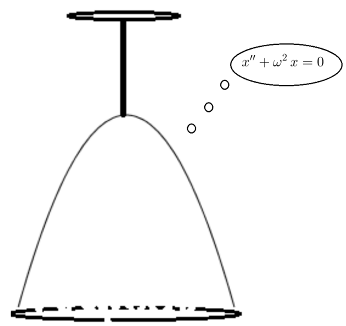
7 Resonancia

Hay un interesante video en YouTube en el que la soprano Ainhoa Arteta muestra este fenómeno. Lo puedes encontrar si buscas "Ainhoa Arteta rompe una copa de cristal". Hay una copa de cristal sobre una mesa y la cantante hace primero una conocida Aria, la copa no se rompe. Más tarde hace una escala y entonces sí, la copa se rompe.



Vamos a explicar este hermoso experimento a la luz de los cálculos que hemos hecho antes.

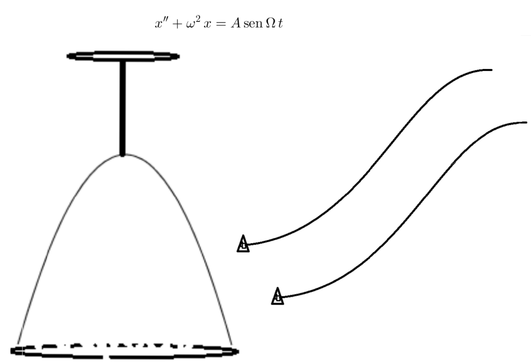
En primera aproximación podemos pensar que la copa puede vibrar como un oscilador armónico



$x(t) =$	desplazamiento del borde de la copa respecto a la posición de equilibrio
$\omega > 0$	es un parámetro que depende de la copa: grosor del cristal, forma geométrica, etcétera.

Por tanto ω está fijo en el experimento.

Al cantar se emite un sonido (vibración del aire) que choca con la copa y actúa como una fuerza externa.



La constante A depende de lo fuerte que se cante mientras que el parámetro Ω queda determinado por la nota y la octava. En el experimento podemos admitir que A se mantiene más o menos constante ($A = 1$) y lo que varía es Ω. A medida que Arteta recorre la escala, Ω va variando. Al crecer Ω el sonido se va haciendo más agudo. En algún momento del proceso la frecuencia natural de la copa ω y la frecuencia del canto Ω han entrado en resonancia, $\omega = \Omega$. La copa empieza a oscilar con amplitud creciente hasta llegar a romperse.