4. Dado $\alpha \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{N}$, probar que existe una única función $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$, verificando que

$$z f'(z) - \alpha f(z) = \frac{1}{1+z} \qquad \forall z \in D(0,1)$$

El Tma Taylor nos dice que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n \ \forall z \in D(0,1)$. El T. de H. de funciones dadas como suma de una serie de potencias nos dice que $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n z^{n-1} \ \forall z \in D(0,1)$

Tenemos entonces que $\forall z \in D(0,1)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n z^n - \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n = \frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \quad \forall z \in D(0,1)$$

$$\parallel$$

$$-\alpha \cdot \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (n\alpha_n - \alpha \cdot \alpha_n) z^n$$

Por el principio de identidad para series de potencias $\Big\} \Rightarrow$

$$-\alpha\alpha_0 = 1 \Rightarrow \alpha_0 = \frac{1}{\alpha} \quad (\alpha \neq 0)$$

$$\wedge$$

$$n\alpha_n - \alpha \cdot \alpha_n = (-1)^n \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \alpha_n = \frac{(-1)^n}{n-\alpha}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha \neq n$$

Esto determina a f de manera unívoca. Con esos coeficientes α_n el radio de conv. de $\sum_{n \geq 0} \alpha_n z^n$ es $1 \Rightarrow f$ así definida es holomorfa en $D(0,1)$

7. En cada uno de los siguientes casos, decidir si existe una función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ verificando que $f^{(n)}(0) = a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$:

(a) $\Omega = \mathbb{C}, \; a_n = n$

(b) $\Omega = \mathbb{C}, \; a_n = (n+1)!$

(c) $\Omega = D(0,1), \; a_n = 2^n n!$

(d) $\Omega = D(0,1/2), \; a_n = n^n$

d) Si $\exists f \in H(D(0,1/2))$ con $f^{n)}(0) = n^n$ tiene que ocurrir que la serie (T. Taylor) $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{n)}(0)}{n!} z^n$ tenga radio de convergencia $\geq \frac{1}{2}$

$$\sum_{n\geq 0} \frac{f^{n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n\geq 0} \frac{n^n}{n!} z^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e \Longrightarrow R = \frac{1}{e} < \frac{1}{2}$$

luego no existe f en las condiciones del ejercicio.

Dice que el resto son análogos

9. Calcular la integral $\int_\gamma \frac{e^z\,dz}{z^2(z-1)}$, para $\gamma = C(1/4, 1/2)$, $\gamma = C(1,1/2)$ y $\gamma = C(0,2)$.

c) $\gamma = C(0,2)$

$$\frac{1}{z^2(z-1)} = \frac{A}{z^2} + \frac{B}{z} + \frac{C}{z-1} = -\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}$$

$$\int_{C(0,2)} \frac{e^z}{z^2(z-1)}\,dz = \underbrace{\int_{C(0,2)} \frac{e^z}{z^2}\,dz}_{k=1} - \underbrace{\int_{C(0,2)} \frac{e^z}{z}\,dz}_{k=0} + \underbrace{\int_{C(0,2)} \frac{e^z}{z-1}\,dz}_{k=0} \overset{*}{=}$$

$$f^{k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i}\int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}}\,dw \Longrightarrow$$ Fórmula de Cauchy para las derivadas

Vemos la derivada primera del numerador evaluada en 0:

$$\overset{*}{=} -2\pi i - 2\pi i + e2\pi i = (e-2)2\pi i$$

Si $z \notin \overline{D}(0,2)$, empleamos el T^{ma} de Cauchy para dominios estrellados

o

T^{ma} local de Cauchy