Variable Compleja I
Tema 1: Números complejos

El cuerpo de los números complejos

El cuerpo $\mathbb{C}$

$$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}\}$$

- Suma: $(x,y)+(u,v) = (x+u, y+v) \quad \forall x,y,u,v \in \mathbb{R}$
- Producto por escalares: $\lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y) \quad \forall \lambda, x, y \in \mathbb{R}$
- Producto: $(x,y)(u,v) = (xu - yv, xv + yu) \quad \forall x,y,u,v \in \mathbb{R}$

- $\mathbb{R}^2$ con la operación suma es un grupo abeliano
- El producto es asociativo, conmutativo y distributivo respecto a la suma
- $(x,y)(1,0) = (x,y) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$
- $(x,y)\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{-y}{x^2+y^2}\right) = (1,0) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Por tanto, con las dos operaciones tenemos un cuerpo conmutativo:

El cuerpo de los números complejos, que se denota por $\mathbb{C}$

Como conjuntos: $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$

Partes real e imaginaria de un número complejo

Inclusión de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$

- $x \mapsto (x,0)$, de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$, monomorfismo de cuerpos.

  Por tanto, $\mathbb{R} \cong \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$

  Identificamos $\mathbb{R} \ni x \equiv (x,0) \in \mathbb{C}$ con lo que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- El producto por escalares en $\mathbb{R}^2$ es caso particular del producto en $\mathbb{C}$:

$$\lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y) = (\lambda,0)(x,y)$$

Partes real e imaginaria de un número complejo

Base usual de $\mathbb{R}^2$: $(1,0) \equiv 1$ y $(0,1) \stackrel{\text{def}}{=} i$

$$(x,y) = x(1,0) + y(0,1) = x + yi$$

Cada $z \in \mathbb{C}$ se escribe de manera única como $z = x + iy$ con $x,y \in \mathbb{R}$

- x es la parte real de z: $x = \operatorname{Re} z$
- y es la parte imaginaria de z: $y = \operatorname{Im} z$

Operaciones con parte real e imaginaria

$$z, w \in \mathbb{C} \ , \ z = x + iy \ , \ w = u + iv \ , \ x, y, u, v \in \mathbb{R}$$

Suma

$$z + w = (x + iy) + (u + iv) = (x + u) + i(y + v)$$

$$\operatorname{Re}(z + w) = \operatorname{Re} z + \operatorname{Re} w$$

$$\operatorname{Im}(z + w) = \operatorname{Im} z + \operatorname{Im} w$$

Producto

Basta tener en cuenta que $i^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1$

$$zw = (x + iy)(u + iv) = xu + xiv + iyu + i^2 yv = (xu - yv) + i(xv + yu)$$

$$\operatorname{Re}(zw) = \operatorname{Re} z \operatorname{Re} w - \operatorname{Im} z \operatorname{Im} w$$

$$\operatorname{Im}(zw) = \operatorname{Re} z \operatorname{Im} w + \operatorname{Im} z \operatorname{Re} w$$

Conjugación

Complejo conjugado

$$\overline{z} = \operatorname{Re} z - i \operatorname{Im} z \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} \overline{z} = \frac{z + \overline{z}}{2} \quad , \quad \operatorname{Im} z = -\operatorname{Im} \overline{z} = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

Propiedades de la conjugación

- $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$
- $\overline{zw} = \overline{z}\ \overline{w}$
- $\overline{\overline{z}} = z$

Automorfismo involutivo del cuerpo $\mathbb{C}$

Módulo de un número complejo

Módulo de un número complejo

$$|z| = (z\,\overline{z})^{1/2} = \left((\mathrm{Re}\,z)^2 + (\mathrm{Im}\,z)^2\right)^{1/2} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Propiedades del módulo

- $|z| \in \mathbb{R}_0^+ \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $|z| = 0 \iff z = 0$
- $\big||z| - |w|\big| \leqslant |z \pm w| \leqslant |z| + |w| \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$
- $\max\{|\mathrm{Re}\,z|, |\mathrm{Im}\,z|\} \leqslant |z| \leqslant |\mathrm{Re}\,z| + |\mathrm{Im}\,z| \quad \forall z \in \mathbb{C}$ Norma máx $\leq$ Norma euclídea $\leq$ Norma uno
- $|zw| = |z|\,|w| \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$

$|zw|^2 = zw \cdot \overline{zw} = zw \cdot \overline{z} \cdot \overline{w} = z \cdot \overline{z} \cdot w \cdot \overline{w} = |z|^2 \cdot |w|^2 \Rightarrow |zw| = |z| \cdot |w|$

$z \cdot \overline{z} = |z|^2 \Rightarrow z \cdot \frac{\overline{z}}{|z|^2} = 1 \Rightarrow z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$

Argumentos

$$|z+w|^2=(z+w)\overline{(z+w)}=(z+w)(\bar z+\bar w)=\underbrace{z\bar z}_{=|z|^2}+z\bar w+w\bar z+\underbrace{w\bar w}_{=|w|^2}=$$

$$=|z|^2+2\mathrm{Re}(z\bar w)+|w|^2$$

Argumentos de un número complejo no nulo

$$z\in\mathbb{C}^*\overset{\text{def}}{=}\mathbb{C}\setminus\{0\}$$

$$\operatorname{Arg} z=\left\{\theta\in\mathbb{R}\;:\;z=|z|\left(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta\right)\right\}$$

Equivalentemente, para $z\in\mathbb{C}^*$ y $\theta\in\mathbb{R}$ se tiene:

$$\theta\in\operatorname{Arg} z\iff\begin{cases}\cos\theta=\operatorname{Re} z/|z|\\ \operatorname{sen}\theta=\operatorname{Im} z/|z|\end{cases}$$

Relación entre ellos

$$z\in\mathbb{C}^*\;,\;\theta_1,\theta_2\in\operatorname{Arg} z\implies\exists k\in\mathbb{Z}\;:\;\theta_2=\theta_1+2k\pi$$

Por tanto:

$$\theta\in\operatorname{Arg} z\implies\operatorname{Arg} z=\{\theta+2k\pi:k\in\mathbb{Z}\}$$

El argumento principal

Argumento principal

Para cada $z \in \mathbb{C}^*$, existe un único argumento de z que pertenece al intervalo semiabierto $]-\pi, \pi]$.

Se le llama argumento principal de z y se denota por $\arg z$.

De hecho se tiene:

$$\arg z = \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} z) \arccos\left(\frac{\operatorname{Re} z}{|z|}\right) \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

Por convenio

entendiendo que $\operatorname{sgn}(0) = 1$.

A partir del argumento principal obtenemos los demás:

$$\operatorname{Arg} z = \left\{ \arg z + 2k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Dem.: Buscamos $\theta \in]-\pi,\pi]$ que cumpla

① $\cos\theta = \frac{Re z}{|z|}$ y ② $\operatorname{sen}\theta = \frac{Im z}{|z|}$

Para resolver ① podemos considerar $\theta = \underset{\{-1,1\}}{\varepsilon} \cdot \overbrace{\arccos\left(\frac{Re z}{|z|}\right)}^{[0,\pi]} \in [-\pi,\pi]$

Tenemos que elegir ε para que se cumpla ②.

$$\operatorname{sen}^2\theta = \operatorname{sen}^2\left(\varepsilon \arccos\left(\frac{Re z}{|z|}\right)\right) = \underset{1}{\varepsilon^2} \cdot \operatorname{sen}^2\left(\arccos\left(\frac{Re z}{|z|}\right)\right) = 1 - \frac{(Re z)^2}{|z|^2} = \frac{\overset{(Re z)^2 + (Im z)^2}{|z|^2} - (Re z)^2}{|z|^2} = \frac{(Im z)^2}{|z|^2}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \varepsilon \cdot \operatorname{sen}\left(\arccos\left(\frac{Re z}{|z|}\right)\right) \qquad \operatorname{sgn}\left(\frac{Im z}{|z|}\right)$$

Dem.: $z = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$ $\qquad w = |w| \cdot (\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)$

$\varphi \in Arg(w)$

$Arg(zw) = \xi + 2\pi\mathbb{Z}$

Si $\xi \in Arg(zw)$

$$Arg(z) + Arg(w) = \theta + 2\pi\mathbb{Z} + \varphi + 2\pi\mathbb{Z} = \theta + \varphi + 2\pi\mathbb{Z}$$

Para probar que $Arg(zw) = Arg(z) + Arg(w)$ basta probar que $\theta + \varphi \in Arg(zw)$:

$$\underbrace{|z| \cdot |w|}_{|z \cdot w|} \cdot (\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi) = |zw|\left(\underbrace{\cos\theta\cos\varphi - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi}_{\cos(\theta+\varphi)} + i(\underbrace{\cos\theta\operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen}\theta\cos\varphi}_{\operatorname{sen}(\theta+\varphi)})\right) = |zw|(\cos(\theta+\varphi) + i\operatorname{sen}(\theta+\varphi))$$

$$\Downarrow$$

$$\theta + \varphi \in Arg(zw)$$

Argumento de un producto

Planteamiento algebraico:

$2\pi\mathbb{Z} = \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ es un subgrupo aditivo de $\mathbb{R}$

Considerando el grupo cociente $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, es claro que

$$\operatorname{Arg} z \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

luego tenemos una aplicación (sobreyectiva) $\operatorname{Arg} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

Propiedad clave del conjunto de todos los argumentos

Para cualesquiera $z, w \in \mathbb{C}^*$ se tiene:

$$\operatorname{Arg}(zw) = \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w = \{\theta + \varphi \,:\, \theta \in \operatorname{Arg} z\,,\ \varphi \in \operatorname{Arg} w\}$$

Así pues, $\operatorname{Arg} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ es un epimorfismo de grupos

Restringido a $\mathbb{T} \overset{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ es un isomorfismo: $\mathbb{T} \cong \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

Demostración arriba

Argumento de un producto (cont.)

Consecuencias

- $\operatorname{Arg}(z/w) = \operatorname{Arg} z - \operatorname{Arg} w \quad \forall z, w \in \mathbb{C}^*$
- $\operatorname{Arg}(1/z) = \operatorname{Arg} \overline{z} = -\operatorname{Arg} z \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$

Inconvenientes de elegir un argumento

- Para $z = w = -1$ se tiene $\arg z + \arg w = 2\pi \neq 0 = \arg(zw)$
- No existe una función $\varphi : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$ que verifique $\varphi(z) \in \operatorname{Arg} z \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$ y $\varphi(zw) = \varphi(z) + \varphi(w) \quad \forall z, w \in \mathbb{C}^*$ Veámoslo

Sup. que existe $\varphi : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ tq $\varphi(z) \in \operatorname{Arg}(z)$

$\varphi(zw) = \varphi(z) + \varphi(w)$

$$\varphi(1) = \varphi(1 \cdot 1) = \varphi(1) + \varphi(1) \Longrightarrow \varphi(1) = 0$$

$$0 = \varphi(1) = \varphi((-1)\cdot(-1)) = \varphi(-1) + \varphi(-1) \Longrightarrow 0 = \varphi(-1) \in \operatorname{Arg}(-1) = \pi + 2\pi\mathbb{Z} \;!!$$

Jamás recuperaremos el cero

Argumento de un producto (cont.)

Interpretación geométrica del producto

- Dado $u \in \mathbb{T}$, la aplicación $z \to uz$ es el giro de ángulo $\theta = \arg u$:

$$|uz| = |z| \ , \ \arg u + \arg z \in \operatorname{Arg}(uz) \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

- Dado $\rho \in \mathbb{R}^+$ la aplicación $z \to \rho z$ es la homotecia de razón ρ:

$$|\rho z| = \rho\,|z| \ , \ \arg(\rho z) = \arg z \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

- Por tanto, dado $w \in \mathbb{C}^*$, la aplicación $z \to wz$ es composición de la homotecia de razón $\rho = |w|$ con el giro de ángulo $\theta = \arg w$.