

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada
Variable Compleja I, Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Convocatoria extraordinaria

Ejercicio 1. (2.5 puntos) Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ la función dada por

$$f_n(z) = \int_n^{n+1} \frac{\cos(e^z - t)}{1 + t^2} dt \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

a) Probar que $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

b) Probar que la serie de funciones $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge en \mathbb{C} y que su suma es una función entera.

Ejercicio 2. (2.5 puntos) Integrando una conveniente función sobre la poligonal $[-R, R, R + i\pi, -R + i\pi, -R]$, con $R \in \mathbb{R}^+$, calcular la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{e^x + e^{-x}} dx.$$

Ejercicio 3. (2.5 puntos) Sea $f \in \mathcal{H}(D(0, 1))$ verificando que

$$|f(z)| \leq |f(z^2)| \quad \forall z \in D(0, 1).$$

Probar que f es constante.

Ejercicio 4. (2.5 puntos) Sea a una singularidad aislada de una función f . Probar que la función $\operatorname{Re} f$ no puede estar acotada en un entorno reducido de a .

Granada, 18 de julio de 2023