Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada

Variable Compleja I, Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Convocatoria ordinaria

Ejercicio 1. (**2.5 puntos**) Sean f, g funciones enteras verificando

$$(f \circ g)\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar que existen $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ con $\alpha \neq 0$ de modo que $g(z) = \alpha z + \beta$ y $f(z) = \dfrac{z-\beta}{\alpha}$ para cada $z \in \mathbb{C}$.

Ejercicio 2. (**2.5 puntos**) Dado $a \in \mathbb{R}$ con $a > 1$, integrar la función $z \mapsto \dfrac{z}{a - \mathrm{e}^{-iz}}$ sobre la poligonal $[-\pi, \pi, \pi + in, -\pi + in, -\pi]$, con $n \in \mathbb{N}$, para probar que:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{x \operatorname{sen}(x) dx}{1 + a^2 - 2a\cos(x)} = \frac{2\pi}{a} \ln\left(\frac{1+a}{a}\right).$$

Ejercicio 3. (**2.5 puntos**) Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$f_n(z) = \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{e}^{\frac{z^2}{1+t^2}}}{(1+t)^2}\, dt \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

a) Probar que $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

b) Probar que la serie de funciones $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge en $\mathbb{C}$ y que su suma es una función entera.

Ejercicio 4. (**2.5**) Probar el **Lema de Schwarz**: Sea $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ verificando $f(0) = 0$ y $|f(z)| \leqslant 1$ para cada $z \in D(0,1)$. Entonces $|f'(0)| \leqslant 1$ y $|f(z)| \leqslant |z|$ para cada $z \in D(0,1)$. Además, si ocurre $|f'(0)| = 1$ ó $|f(z_0)| = |z_0|$ para algún $z_0 \in D(0,1) \setminus \{0\}$, entonces existe $\alpha \in \mathbb{T}$ de modo que $f(z) = \alpha z$ para cada $z \in D(0,1)$.

Pista: Para cada $0 < r < 1$ estimar convenientemente el valor $\max\{|g(z)| : z \in \overline{D}(0,r)\}$ donde la función $g : D(0,1) \to \mathbb{C}$ viene dada por $g(0) = f'(0)$ y $g(z) = \dfrac{f(z)}{z}$ para cada $z \in D(0,1)$.

Granada, 11 de junio de 2019