UNIVERSIDAD DE GRANADA

Métodos Numéricos II
Grado en Matemáticas
Curso 2020/2021

Departamento de Matemática Aplicada

Relación 3

—

Problemas de Valores Iniciales (PVI)

Versión 8/6/2021 (con soluciones)

En la mayoría de los ejercicios se hacer referencia al problema de valores iniciales (PVI)

$$\boxed{\begin{array}{l} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = \mu \end{array}} \quad \begin{array}{l} f : D = [a = t_0, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (t_0, \mu) \in D \end{array} \tag{1}$$

siendo $x = x(t)$ una función desconocida de t.

1. Sea $f : D \to \mathbb{R}$ lipschitziana en su segunda variable con constante de Lipschitz M, y $f \in \mathcal{C}^1(D)$. Sea $h = \frac{b-a}{N}$. Se considera el método de Euler para resolver el PVI (1) con tamaño de paso h. Demuestre que

   - Si $M = 0$, entonces $|e_n| \leq (b-a)\dfrac{M^*}{2}h \ \forall n = 0, \ldots, N$.
   - Si $M > 0$, entonces $|e_n| \leq \dfrac{e^{(b-a)M} - 1}{M}\dfrac{M^*}{2}h \ \forall n = 0, \ldots, N$.

   donde e_n es el error de truncatura global del método en el punto t_n, y M^* es tal que $|x''(t)| \leq M^* \ \forall t \in [a, b]$ siendo $x(t)$ la única solución de (1).

Solución. Primero acotemos R_{n+1}.

$$\begin{aligned}
R_{n+1} &= x(t_{n+1}) - x(t_n) - hf(t_n, x(t_n)) \\
& \text{(...Taylor...)} \\
&= x(t_n) + hx'(t_n) + \frac{1}{2}h^2x''(\xi_n) - x(t_n) - hx'(t_n) \\
&= \frac{1}{2}h^2x''(\xi_n),
\end{aligned}$$

luego $|R_{n+1}| \leq \frac{1}{2}h^2M^*$. Ahora (llamando $f_n = f(t_n, x_n)$)

$$\begin{aligned}
e_{n+1} &= x(t_{n+1}) - x_{n+1} \\
&= x(t_{n+1}) - x_n - hf_n \\
&= [x(t_{n+1}) - x(t_n) - hf(t_n, x(t_n))] + [x(t_n) - x_n] + [hf(t_n, x(t_n)) - hf_n] \\
&= R_{n+1} + e_n + h(f(t_n, x(t_n)) - f(t_n, x_n)), \quad \text{luego} \\
|e_{n+1}| &\leq |R_{n+1}| + |e_n| + hM|e_n| \\
&\leq \frac{1}{2}h^2M^* + (1 + hM)|e_n| \\
&\leq \frac{1}{2}h^2M^* + (1 + hM)\left[\frac{1}{2}h^2M^* + (1 + hM)|e_{n-1}|\right] \\
& \cdots (1 + hM = A) \cdots \\
&\leq \frac{1}{2}h^2M^*(1 + A) + A^2|e_{n-1}| \\
&\leq \cdots \leq \frac{1}{2}h^2M^*(1 + A + \cdots + A^n) + A^{n+1}|e_0|
\end{aligned}$$

y como $|e_0| = 0$ se tiene $|e_n| \leq \frac{1}{2}h^2M^*(1 + A + \cdots + A^{n-1})$.

Caso $M = 0$: $A = 1$ luego $|e_n| \leq \dfrac{1}{2}h^2M^*n \leq \dfrac{1}{2}h^2M^*N = (b-a)\dfrac{M^*}{2}h$.

Caso $M > 0$: teniendo en cuenta que $1 + x \leq e^x \ \forall x$, entonces $A = 1 + hM \leq e^{hM}$, luego $|e_n| \leq \dfrac{1}{2}h^2M^*\dfrac{A^n - 1}{A - 1} \leq \dfrac{1}{2}h^2M^*\dfrac{e^{nhM} - 1}{hM} \leq \dfrac{1}{2}hM^*\dfrac{e^{(b-a)M} - 1}{M}$.

2. Demuestre que el PVI $x' = -\frac{1}{2}x,\ x(0) = 2$ tiene una única solución en $[0, 1]$ y halle una cota del error de truncatura global en cada nodo del método de Euler de tamaño de paso h para aproximar dicha solución.

Solución. El PVI tiene solución única por ser $f(t, x) = -\frac{1}{2}x$ lipschitziana en su segunda variable con constante $M = \frac{1}{2}$.

Aplicando lo visto en el problema anterior, tendríamos

$$|e_n| \leq \frac{e^{\frac{1}{2}} - 1}{\frac{1}{2}} \frac{M^*}{2} h = (e^{\frac{1}{2}} - 1)M^* h$$

Si resolvemos la EDO $x(t) = Ke^{-\frac{1}{2}t}$, $x(0) = 2 \Rightarrow K = 2$ tendríamos $M^* = 2$ y entonces $|e_n|| \leq (e^{\frac{1}{2}} - 1)2h$.

3. Demuestre que si $f : D \to \mathbb{R}$ es continua y lipschitziana en su segunda variable, entonces el método del punto medio para resolver el PVI (1) es estable, consistente con (1) y converge a la solución de (1).

Solución. $x_{n+1} = x_n + hf(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}f(t_n, x_n))$; $\Phi(x; t, h) = f(t + \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}f(t, x))$. Veamos si Φ es lipschitziana. Supongamos que f lo es con constante L.

$$\begin{aligned}
|\Phi(z; t, h) - \Phi(w; t, h)| &= \left| f\left(t + \frac{h}{2}, z + \frac{h}{2}f(t, z)\right) - f\left(t + \frac{h}{2}, w + \frac{h}{2}f(t, w)\right) \right| \\
&\leq L\left| z + \frac{h}{2}f(t, z) - w - \frac{h}{2}f(t, w) \right| \\
&\leq L|z - w| + L\frac{h}{2}|f(t, z) - f(t, w)| \\
&\leq L|z - w| + \frac{h}{2}L^2|z - w| \\
&= \left(L + \frac{h}{2}L^2\right)|z - w|
\end{aligned}$$

luego Φ es lipschitziana con constante $M = L + \frac{h}{2}L^2$. Con esto queda probado que el método es estable. Por otro lado, $\lim_{h \to 0} \Phi(x; t, h) = f(t, x)$ implica que es consistente, y finalmente siendo estable y consistente, es convergente.

4. Razone la veracidad o falsedad de la afirmación siguiente: El método de Euler modificado (Heun) proporciona la solución exacta de la EDO $x' = -2\lambda t$.

Solución. La solución exacta es $x(t) = \mu - \lambda t^2$ donde μ es la constante de integración. Para $x_0 = \mu$ y paso h, se tiene

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \frac{h}{2}(f(t_0, x_0) + f(t_0 + h, x_0 + hf(t_0, x_0))) \\ &= \mu + \frac{h}{2}(f(0, \mu) + f(h, \mu + hf(0, \mu))) \\ &= \mu + \frac{h}{2}(0 - 2\lambda h) \;=\; \mu - 2\lambda h \end{aligned}$$

luego $x_1 = x(t_1)$, lo que confirma la veracidad de la afirmación, ya que vale para cualquier h y cualquier número de pasos.

5. Demuestre que si $f : D \to \mathbb{R}$ es continua y y lipschitziana en su segunda variable, entonces el método de Runge-Kutta clásico para resolver el PVI (1) es estable, consistente con (1) y converge a la solución de (1).

Solución.

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\
K_1 &= f(t_n, x_n) \\
K_2 &= f(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}K_1) \\
K_3 &= f(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}K_2) \\
K_4 &= f(t_n + h, x_n + hK_3)
\end{aligned}
$$

Si $h \to 0$ entonces todos los K_j tienden a $f(t_n, x_n)$, luego es consistente. Veamos la estabilidad. Cualquier combinación lineal de funciones lipschitzianas también lo es, pero de todos modos se detalla.

$$
\begin{aligned}
|\Phi(z;t,h) - \Phi(w;t,h)| &= \frac{1}{6}\,|K_1(z) - K_1(w) + 2K_2(z) - 2K_2(w) + \cdots \\
&\quad \cdots + 2K_3(z) - 2K_3(w) + K_4(z) - K_4(w)| \\
&\leq \frac{1}{6}\,|K_1(z) - K_1(w)| + \frac{2}{6}\,|K_2(z) - K_2(w)| + \cdots \\
&\quad \cdots + \frac{2}{6}\,|K_3(z) - K_3(w)| + \frac{1}{6}\,|K_4(z) - K_4(w)|
\end{aligned}
$$

Ahora miremos cada K_j por separado. Sea L la constante de Lipschitz de f.

$$
\begin{aligned}
|K_1(z) - K_1(w)| &= |f(t,z) - f(t,w)| \leq L|z-w|. \\
|K_2(z) - K_2(w)| &= \cdots \ \leq \ L\left|z - w + \frac{h}{2}K_1(z) - \frac{h}{2}K_1(w)\right| \\
&\leq L|z-w| + \frac{h}{2}L^2|z-w| = \left(L + \frac{h}{2}L^2\right)|z-w| \\
|K_3(z) - K_3(w)| &= \cdots \ \leq \ L|z-w| + \frac{h}{2}L\left(L + \frac{h}{2}L^2\right)|z-w| \\
&= \left(L + \frac{h}{2}L^2 + \frac{h^2}{4}L^3\right)|z-w| \\
|K_4(z) - K_4(w)| &= \cdots \ \leq \ L|z-w| + hL\left(L + \frac{h}{2}L^2 + \frac{h^2}{4}L^3\right)|z-w| \\
&= \left(L + hL^2 + \frac{h^2}{2}L^3 + \frac{h^3}{4}L^4\right)|z-w|
\end{aligned}
$$

y de aquí se deduce que el método es estable, y finalmente convergente.

6. Razone la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

   a) Al aplicar el método de un paso del punto medio al problema $x'(t) = -x(t) + 1,\ x(0) = 2$ se obtiene la solución numérica $\{t_n, x_n\}_{n=0}^{N}$ donde $x_n = A^n + 1$ con $A = 1 - h + \frac{h^2}{2}$.

   b) El orden de un método explícito de un paso cuya ecuación en diferencias es

   $$x_{n+1} = x_n + h\Phi(x_n; t_n, h), \quad n = 0, \ldots, N-1$$

   con $\Phi(x; t, h) = f(t, x) + \frac{h}{2}x''(t)$ es al menos 2.

7. Demuestre que el PVI $x' = t - x,\ x(0) = 1$ tiene una única solución en $[0, 1]$. ¿Se puede aproximar dicha solución mediante

- el método de Taylor de orden 2?
- el método de Heun?
- el método del punto medio?

¿Por qué? Escriba la ecuación en diferencias de cada uno de estos métodos para resolver el PVI considerado. ¿Ocurre algo reseñable?

Solución. La función $f(t, x) = t - x$ es lipschitziana con constante $L = 1$, luego existe solución y es única.

- Método de Taylor de orden 2.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + hx'_n + \frac{h^2}{2}x''_n \\ x'_n &= f(t_n, x_n) \ = \ t_n - x_n \\ x''_n &= F(t_n, x_n) \ = \ \left(\frac{\partial}{\partial t} + f\frac{\partial}{\partial x}\right) f = 1 - f(t_n, x_n) = 1 - t_n + x_n \\ &\ \text{y por tanto el método es} \\ x_{n+1} &= x_n + h(t_n - x_n) + \frac{h^2}{2}(1 - t_n + x_n) \end{aligned}$$

  que se puede aplicar sin duda.

- Método de Heun.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n, x_n) + f(t_n + h, x_n + hf(t_n, x_n))\right) \\ &= x_n + \frac{h}{2}(t_n - x_n + t_n + h - x_n - h(t_n - x_n)) \\ &= x_n + h(t_n - x_n) + \frac{h^2}{2}(1 - t_n + x_n) \end{aligned}$$

  que se puede aplicar sin duda.

- Método del punto medio.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}f(t_n, x_n)\right) \\ &= x_n + h\left(t_n + \frac{h}{2} - x_n - \frac{h}{2}(t_n - x_n)\right) \\ &= x_n + h(t_n - x_n) + \frac{h^2}{2}(1 - t_n + x_n) \end{aligned}$$

  que se puede aplicar sin duda.

El hecho reseñable es que resultan ser los tres el mismo método, consistente, estable y convergente.

8. Demuestre que el PVI $x' = t^2 x,\ x(0) = 1$ tiene una única solución $x(t)$ en $[0, 1]$. Demuestre que el método de Taylor de orden 2 y el método de Runge-Kutta clásico convergen a $x(t)$ y halle las aproximaciones de cada uno de los estos dos métodos para el tamaño de paso $h = 0.2$.

9. Utilizando el método de Runge-Kutta clásico para resolver el PVI $x' = f(t),\ x(0) = \mu$, deduzca una conocida fórmula de integración numérica e indique de qué fórmula se trata.

Solución. En este caso se tiene que f no depende de x.

$$\begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & x_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ K_1 & = & f(t_n, x_n) \qquad\qquad\quad = \ f(t_n) \\ K_2 & = & f(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}K_1) \ = \ f(t_n + \frac{h}{2}) \\ K_3 & = & f(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}K_2) \ = \ f(t_n + \frac{h}{2}) \\ K_4 & = & f(t_n + h, x_n + hK_3) \ \ = \ f(t_n + h) \\ \text{y por tanto} & & \\ x_{n+1} & = & x_n + \frac{h}{6}\left(f(t_n) + 4f(t_n + \frac{h}{2}) + f(t_n + h)\right) \end{array}$$

y como $x_{n+1} - x_n \approx \displaystyle\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t)\,dt$, estamos ante la conocida fórmula simple de Simpson.

10. Para el método de Runge-Kutta de 2 evaluaciones con arreglo de Butcher

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ \hline & \frac{1-\alpha}{2} & \frac{1+\alpha}{2} \end{array}$$

a) Determine el orden del método según los valores del escalar α.

b) Para α adecuado para que el método tenga orden máximo, ¿cuál es el término principal del error local de truncatura?

c) ¿Es estable (cero-estable) el método para todo α si $f(t, x)$ es continua y lipschitziana respecto de x sobre D?

Solución. Véase la sección 3.4.1 de las notas de clase. Es el mismo problema, pero donde pone α hay que poner $\frac{1}{2}(1 + \alpha)$, y donde pone β hay que poner α. De este modo se puede responder.

a) El método será de orden 2 si el coeficiente de h^2 del desarrollo de Taylor de $R_{n+1}(t)$ se anula, que aquí es $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1 + \alpha)\alpha$, dando como posibles soluciones $\alpha = \frac{\pm\sqrt{5}-1}{2}$ de las que la negativa no interesa. Conclusión: si $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ tenemos orden al menos 2, de lo contrario orden 1.

b) El término principal se obtiene como la constante que acompaña a h^3 en el desarrollo citado, haciendo los cambios oportunos de notación.

c) El primer polinomio característico es $p(\lambda) = \lambda - 1$, luego es estable.

11. Considere el MML definido por: $x_{n+2} + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = h\left(b_0 f_n + b_1 f_{n+1}\right)$

a) Exprese los valores de a_0, b_0, b_1 respecto de a_1 para que el método sea de orden, al menos, 2.

b) Para la familia de métodos obtenida en a),

- ¿Qué valor(es) de a_1 hacen el MML estable?
- ¿Qué métodos particulares se obtienen si $a_1 = 0$ y $a_1 = -1$?
- ¿Es estable y de orden 3 el MML para algún valor de a_1?

Solución.

a) Construimos las constantes

$$\begin{array}{lllllll} C_0 & = & 1-\alpha_0-\alpha_1 & = & 1+a_0+a_1 & = 0 & \Rightarrow \boxed{a_0=-a_1-1} \\ C_1 & = & 2-\alpha_1-\beta_0-\beta_1 & = & 2+a_1-b_0-b_1 & = 0 & \Rightarrow b_0 = 2+a_1-b_1 \\ C_2 & = & \frac{2^2}{2!}-\frac{1^2}{2!}\alpha_1-\frac{1}{1!}\beta_1 & = & 2+\frac{a_1}{2}-b_1 & = 0 & \Rightarrow \boxed{b_1 = 2+\dfrac{a_1}{2}} \\ & & & & & & \Rightarrow \boxed{b_0 = \dfrac{a_1}{2}} \end{array}$$

b) Veamos las raíces del primer polinomio característico, en función de a_1.

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \alpha_1\lambda - \alpha_0 = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = \lambda^2 + a_1\lambda - a_1 - 1$$

sus raíces son

$$\lambda = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2+4a_1+4}}{2} = \frac{-a_1 \pm (a_1+2)}{2} = 1 \text{ y } -a_1-1$$

Las raíces deben estar en el disco unidad, y las de la circunferencia unidad deben ser simples. 1 ya está en la circunferencia, luego $-1 \leq -a_1 - 1 < 1$, con lo que finalmente el método será estable para $\boxed{-2 < a_1 \leq 0}$.

Para $a_1 = 0$ se tiene $x_{n+2} - x_n = 2hf_{n+1}$ que es el método del punto medio.

Para $a_1 = -1$ se tiene $x_{n+2} - x_{n+1} = h\left(-\frac{1}{2}f_n + \frac{3}{2}f_{n+1}\right)$, que es el método de Adams-Bashforth con $q = 1, m = 0, r = 1$.

Veamos la posible estabilidad y orden 3.

$$C_3 = \frac{2^3}{3!} - \frac{1^3}{3!}\alpha_1 - \frac{1^2}{2!}\beta_1 = \frac{8}{6} + \frac{a_1}{6} - \frac{3}{6}\left(2 + \frac{a_1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 4}$$

pero para este valor de a_1 no puede ser estable.

12. Determine los parámetros α, β para los que el método lineal de ecuación en diferencias

$$x_{n+2} - (1+\alpha)x_{n+1} + \alpha x_n = h\left((1+\beta)f_{n+2} - (\alpha+\beta+\alpha\beta)f_{n+1} + \alpha\beta f_n\right)$$

$n = 0, \ldots, N-2$, tiene el mayor orden posible. ¿Cuál es dicho orden? ¿Es convergente el método obtenido? ¿Por qué?

Solución. Identificando tenemos $k = 2$, $\alpha_0 = -\alpha$, $\alpha_1 = 1+\alpha$, $\beta_0 = \alpha\beta$, $\beta_1 = -(\alpha+\beta+\alpha\beta)$, $\beta_2 = 1+\beta$. Es fácil ver que $C_0 = C_1 = 0$.

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{4}{2} - \frac{\alpha_1}{2} - \beta_1 - 2\beta_2 = \frac{1}{2}(-1+\alpha-2\beta+2\alpha\beta) \\ C_3 &= \frac{8}{6} - \frac{\alpha_1}{6} - \frac{\beta_1}{2} - \frac{4\beta_2}{2} = \frac{1}{6}(-5+2\alpha-9\beta+3\alpha\beta) \end{aligned}$$

Igualando a cero y resolviendo se tiene la solución única $\alpha = 1$, $\beta = -\frac{1}{2}$. Siendo así, se tiene

$$C_4 = \frac{16}{24} - \frac{\alpha_1}{24} - \frac{\beta_1}{6} - \frac{8\beta_2}{6} = \cdots = -\frac{1}{4} \neq 0$$

con lo que el máximo orden posible es 3. El primer polinomio característico es $p(\lambda) = \lambda^2 - (1+\alpha)\lambda + \alpha = (\lambda-1)(\lambda-\alpha)$, y para que sea convergente la raíz $\lambda = 1$ ha de ser simple, es decir, $\alpha \neq 1$, luego si es del máximo orden no puede ser convergente.

13. Construya una familia 1-paramétrica de MML implícitos de dos pasos con el mayor orden posible. ¿Cuál es dicho orden?

- Si $x(t)$ es suficientemente diferenciable, ¿cuál es la parte principal de error de truncatura local?
- ¿Qué valores del parámetro aseguran la convergencia?

Solución. Un MML genérico implícito de 2 pasos es de la forma

$$x_{n+2} - \alpha_1 x_{n+1} - \alpha_0 x_n = h(\beta_0 f_n + \beta_1 f_{n+1} + \beta_2 f_{n+2})$$

donde vemos 5 parámetros. Para obtener una familia 1-paramétrica requerimos 4 ecuaciones relacionadas con el orden

$$\begin{aligned} C_0 &= 1 - \alpha_1 - \alpha_0 \\ C_1 &= 2 - \alpha_1 - \beta_0 - \beta_1 - \beta_2 \\ C_2 &= 2 - \frac{\alpha_1}{2} - \beta_1 - 2\beta_2 \\ C_3 &= \frac{2^3}{6} - \frac{\alpha_1}{6} - \frac{\beta_1}{2} - 2\beta_2 \end{aligned}$$

e igualando las cuatro constantes a cero puede quedar todo en función de α_1:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 1 - \alpha_1 \\ \beta_0 &= -\frac{1}{12}(4 - 5\alpha_1) \\ \beta_1 &= \frac{2}{3}(2 - \alpha_1) \\ \beta_2 &= \frac{1}{12}(4 + \alpha_1) \end{aligned}$$

con lo que el orden sería al menos 3. Veamos si fuera posible el orden 4.

$$\begin{aligned} C_4 &= \frac{16}{24} - \frac{\alpha_1}{24} - \frac{\beta_1}{6} - \frac{8}{6}\beta_2 \\ &= \cdots = \boxed{-\frac{\alpha_1}{24}} \end{aligned}$$

con lo cual el orden llegaría a 4 si $\alpha_1 = 0$. La parte principal del error de truncatura local es

$$\boxed{-\frac{\alpha_1}{24} h^4 x^{iv}(t_n)}.$$

Para ver la convergencia, el primer polinomio característico $\lambda^2 - \alpha_1\lambda - (1 - \alpha_1)$ tiene las raíces 1 y $\alpha_1 - 1$, luego tiene que ser $\boxed{-1 \leq \alpha_1 - 1 < 1}$, es decir, $0 \leq \alpha_1 < 2$ para que ambas estén en el disco unidad y no haya raíces múltiples en la circunferencia. El valor $\alpha_1 = 0$ está dentro de ese rango, por lo que el orden 4 es alcanzable sin perder la convergencia.

14. Obtenga la ecuación en diferencias del método de Adams-Bashforth de tres pasos y la del método de Adams-Moulton de dos pasos. Estudie la convergencia y el orden de dichos métodos.

15. Usando integración numérica sobre el intervalo $[t_{n+1}, t_{n+3}]$, deduzca dos métodos lineales de tres pasos explícitos diferentes para resolver el p.v.i. de ecuación $x' = f(t,x)$ y condición inicial $x(t_0) = \mu$. ¿Es alguno de ellos un método óptimo? Justifique la respuesta.

Solución. Los métodos han de seguir el modelo $x_{n+3} - x_{n+1} \approx \int_{t_{n+1}}^{t_{n+3}} f(t,x(t))\,dt$ y hay que aplicar a la integral una fórmula de integración numérica basada en los nodos t_n, t_{n+1} y t_{n+2}. El nodo t_{n+3} no puede formar parte de la fórmula porque se indica que los métodos han de ser explícitos, y el nodo t_n ha de aparecer con peso no nulo para que el método sea de 3 pasos. Los nodos t_{n+1} y t_{n+2} no son obligatorios. Si ponemos los tres

$$\int_{t_n+h}^{t_n+3h} f(t,x(t))\,dt \approx a_0 f_n + a_1 f_{n+1} + a_2 f_{n+2}, \quad a_0 \neq 0$$

al obligar exactitud en $1, t-t_n, (t-t_n)^2$ surge el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & h & 2h \\ 0 & h^2 & 4h^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2h \\ \frac{(3h)^2}{2} - \frac{h^2}{2} \\ \frac{(3h)^3}{3} - \frac{h^3}{3} \end{pmatrix}$$

cuya solución es $a_0 = \frac{1}{3}h,\ a_1 = -\frac{2}{3}h,\ a_2 = \frac{7}{3}h$, dando lugar al método

$$\text{A}: \quad x_{n+3} - x_{n+1} = \frac{h}{3}(f_n - 2f_{n+1} + 7f_{n+2})$$

Por otro lado, si (arbitrariamente) omitimos el nodo t_{n+1} en la fórmula de integración, surge un sistema lineal cuya solución $a_0 = 0,\ a_2 = 2h$ no es admisible. Omitimos, pues, el nodo t_{n+2} y surge el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2h \\ \frac{(3h)^2}{2} - \frac{h^2}{2} \end{pmatrix}$$

cuya solución es $a_0 = -2h,\ a_1 = 4h$, dando lugar al método

$$\text{B}: \quad x_{n+3} - x_{n+1} = 2h(-f_n + 2f_{n+1})$$

Veamos si alguno es óptimo. El orden máximo es $k+1 = 3+1 = 4$ porque k es impar. Método A: $\alpha_0 = 0,\ \alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 0,\ \beta_0 = \frac{1}{3},\ \beta_1 = -\frac{2}{3},\ \beta_2 = \frac{7}{3}$.

$$\begin{array}{lcllll}
C_0 & = & 1 - 0 - 1 = 0 & \Rightarrow & \text{orden } p \geq 0 \\
C_1 & = & 3 - 1 - 2 = 0 & \Rightarrow & \text{orden } p \geq 1 \\
C_2 & = & \frac{3^2}{2} - \frac{1}{2}1 - (-\frac{2}{3} + 2\frac{7}{3}) = 0 & \Rightarrow & \text{orden } p \geq 2 \\
C_3 & = & \frac{27}{6} - \frac{1}{6}1 - \frac{1}{2}(-\frac{2}{3} + 2^2\frac{7}{3}) = 0 & \Rightarrow & \text{orden } p \geq 3 \\
C_4 & = & \frac{81}{24} - \frac{1}{24} - \frac{18}{6} \neq 0 & \Rightarrow & \text{orden } p = 3 < 4 \text{ no óptimo}
\end{array}$$

Método B: $\alpha_0 = 0,\ \alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 0,\ \beta_0 = -2,\ \beta_1 = 4,\ \beta_2 = 0$.

$$\begin{array}{lcllll}
C_0 & = & 0 & \Rightarrow & \text{orden } p \geq 0 \\
C_1 & = & 3 - 1 - 2 = 0 & \Rightarrow & \text{orden } p \geq 1 \\
C_2 & = & 4 - 4 = 0 & \Rightarrow & \text{orden } p \geq 2 \\
C_3 & = & \frac{26}{6} - \frac{1}{2}4 \neq 0 & \Rightarrow & \text{orden } p = 2 < 4 \text{ no óptimo}
\end{array}$$

16. Dado el MML $x_{n+3}+\alpha\left(x_{n+2}-x_{n+1}\right)-x_n=\frac{h}{2}\left(3+\alpha\right)\left(f_{n+1}+f_{n+2}\right)$, razone si es cierto que

a) $\exists\alpha$ para el que el orden es 4.

b) Si $-3<\alpha<1$, el método es cero-estable.

c) Si el MML dado es convergente su orden es exactamente 2.

Solución.

a) Identificando coeficientes tenemos $k=3$, $\alpha_0=1$, $\alpha_1=\alpha$, $\alpha_2=-\alpha$, $\beta_0=0$, $\beta_1=\beta_2=\frac{1}{2}(3+\alpha)$. Por tanto las constantes son

$$\begin{aligned}
C_0 &= 1-\alpha_0-\alpha_1-\alpha_2 = 1-1-\alpha+\alpha = 0\\
C_1 &= 3-\alpha_1-2\alpha_2-\beta_0-\beta_1-\beta_2 = 3-\alpha+2\alpha-0-\frac{1}{2}(3+\alpha)-\frac{1}{2}(3+\alpha) = 0\\
C_2 &= \frac{9}{2}-\frac{\alpha}{2}+\frac{4}{2}\alpha-\frac{3}{2}(3+\alpha) = 0\\
C_3 &= \cdots = \frac{3}{4}-\frac{\alpha}{12}
\end{aligned}$$

por lo que para conseguir orden mayor que 3 es necesario que $\alpha=9$. Siendo así, resulta también $C_4=0$ y $C_5=\frac{1}{10}$. Conclusión: para $\alpha=9$ el orden es 4. La afirmación es falsa.

b) El primer polinomio característico es

$$p(\lambda)=\lambda^3+\alpha\lambda^2-\alpha\lambda-1 = (\lambda-1)(\lambda^2+(\alpha+1)\lambda+1)$$

y sus raíces son $\lambda=-\frac{1}{2}(1+\alpha\pm\sqrt{d})$ con $d=(3+\alpha)(\alpha-1)$, ambas complejas en el caso $-3<\alpha<1$. Su módulo es

$$|\lambda|^2=\frac{1}{4}((1+\alpha)^2-d)=\cdots=1$$

por lo que las tres están en la circunferencia unidad y son simples al ser $d\neq 0$. Conclusión: el método es estable. La afirmación es verdadera.

c) Es convergente si y solo si es consistente (lo es) y estable (lo es para $-3<\alpha<1$). Si es convergente, el valor $\alpha=9$ queda descartado y sería $C_3\neq 0$, luego el orden sería exactamente 2. La afirmación es verdadera.

17. Para que un MML sea estable es necesario que las raíces del primer polinomio característico $p(\lambda)$ sean de módulo no mayor que 1, y todas las de módulo 1 sean simples. Cualquier MML ya tiene la raíz $\lambda = 1$ entre las de su primer polinomio característico. Podemos afinar algo más distinguiendo los MML que no tienen ninguna otra raíz de módulo 1, de aquellos en los que hay más de una raíz de módulo 1. Los primeros se denominan *fuertemente estables* y los segundos *débilmente estables*.

   a) Compruebe que el método **AB4** es fuertemente estable

   $$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{24}(-9f_{n-3} + 37f_{n-2} - 59f_{n-1} + 55f_n).$$

   b) Compruebe que la fórmula abierta de 4 pasos es débilmente estable

   $$x_{n+1} = x_{n-3} + \frac{4h}{3}(2f_{n-2} - f_{n-1} + 2f_n).$$

   c) (Práctica) Considere el PVI $x' = -6x + 6,\ 0 \le t \le 1,\ x(0) = 2$, que tiene como solución exacta $x(t) = 1 + e^{-6t}$. Con $h = 0.1$ y valores iniciales exactos x_0, x_1, x_2, x_3, aproxime $x(1)$ con las dos fórmulas anteriores, incluyendo los errores acumulados en cada paso para ambos métodos. Comente los resultados.

Solución.

a) El método se puede reformular de forma equivalente

$$x_{n+4} = x_{n+3} + \frac{h}{24}(-9f_n + 37f_{n+1} - 59f_{n+2} + 55f_{n+3}).$$

El primer polinomio característico es

$$p(\lambda) = \lambda^k - \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j \lambda^j = \lambda^4 - \lambda^3$$

cuyas raíces son $\lambda = 1$ (simple) y $\lambda = 0$ (triple), luego es fuertemente estable.

b) El método se puede reformular de forma equivalente

$$x_{n+4} = x_n + \frac{4h}{3}(2f_{n+1} - f_{n+2} + 2f_{n+3}).$$

El primer polinomio característico es

$$p(\lambda) = \lambda^k - \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j \lambda^j = \lambda^4 - 1$$

cuyas raíces son $\lambda = 1$, $\lambda = -1$, $\lambda = i$ y $\lambda = -i$, todas simples y de módulo 1, luego es débilmente estable.

c)

n	t	AB4	error	abierta-4	error
0	0.00	2.00000000	0.0000×10^{0}	2.00000000	0.0000×10^{0}
1	0.10	1.54881164	0.0000×10^{0}	1.54881164	0.0000×10^{0}
2	0.20	1.30119421	0.0000×10^{0}	1.30119421	0.0000×10^{0}
3	0.30	1.16529889	0.0000×10^{0}	1.16529889	0.0000×10^{0}
4	0.40	1.09962362	8.9057×10^{-3}	1.09837853	7.6606×10^{-3}
5	0.50	1.05133498	1.5479×10^{-3}	1.04173436	-8.0527×10^{-3}
6	0.60	1.04256144	1.5238×10^{-2}	1.04864384	2.1320×10^{-2}
7	0.70	1.00479895	-1.0197×10^{-2}	0.96345058	-5.1545×10^{-2}
8	0.80	1.03590898	2.7679×10^{-2}	1.12899770	1.2077×10^{-1}
9	0.90	0.96579362	-3.8723×10^{-2}	0.72826835	-2.7625×10^{-1}
10	1.00	1.07093043	6.8452×10^{-2}	1.64509171	6.4261×10^{-1}

de los cálculos se observa que el método fuertemente estable consigue un error acumulado final diez veces inferior al débilmente estable.