Variable Compleja I
Tema 2: Topología del plano

1. Topología del plano
   - Distancia y topología de $\mathbb{C}$
   - Sucesiones de números complejos
   - Acotación, compacidad y divergencia
   - Cálculo de límites

2. Funciones complejas de variable compleja
   - Operaciones con funciones complejas
   - Continuidad en un punto
   - Continuidad global
   - Límite funcional

Distancia y topología de $\mathbb{C}$

Distancia de $\mathbb{C}$

$$d(z,w) = |w-z| \quad \forall z,w \in \mathbb{C}$$
$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \quad \text{subespacio métrico}$$

Topología de $\mathbb{C}$

- Topología de $\mathbb{C}$: la generada por su distancia. Induce en $\mathbb{R}$ la usual
- Discos abiertos y cerrados: $a \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}^+$,

$$D(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < r\} \qquad \overline{D}(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| \leqslant r\}$$

- Los abiertos de $\mathbb{C}$ son las uniones (arbitrarias) de discos abiertos
- Interior de un conjunto: $A \subset \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$

$$z \in A^\circ \iff \exists r \in \mathbb{R}^+ : D(z,r) \subset A$$

- Otra descripción de los abiertos: Para $\Omega \subset \mathbb{C}$ se tiene:

$$\Omega \text{ abierto} \iff \Omega = \Omega^\circ \iff \forall z \in \Omega \ \exists r \in \mathbb{R}^+ : D(z,r) \subset \Omega$$

Sucesiones convergentes y conjuntos cerrados

Sucesiones convergentes

- Si $z_n \in \mathbb{C}\ \forall n \in \mathbb{N}$ y $z \in \mathbb{C}$, se tiene:

$$\begin{aligned}\{z_n\} \to z \quad &\Longleftrightarrow \quad \big[\forall \varepsilon > 0\ \exists m \in \mathbb{N}\ :\ n \geqslant m\ \Rightarrow |z_n - z| < \varepsilon\big] \\ &\Longleftrightarrow \quad \big\{|z_n - z|\big\} \to 0\end{aligned}$$

- En particular: $\{z_n\} \to 0 \iff \big\{|z_n|\big\} \to 0$

Conjuntos cerrados

- Cierre de un conjunto: $A \subset \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$

$$z \in \overline{A} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \{z_n\}\ :\ z_n \in A\ \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \{z_n\} \to z$$

- Conjuntos cerrados: $A \subset \mathbb{C}$

$$A \ \text{ cerrado } \quad \Longleftrightarrow \quad \big[z_n \in A\ \ \forall n \in \mathbb{N}, \{z_n\} \to z \in \mathbb{C}\ \Rightarrow\ z \in A\big]$$

Complitud

Sucesiones convergentes y sucesiones de Cauchy

$$\left.\begin{array}{c}\max\left\{|\operatorname{Re} w-\operatorname{Re} z|\,,\,|\operatorname{Im} w-\operatorname{Im} z|\right\}\leqslant|w-z|\\ |w-z|\leqslant|\operatorname{Re} w-\operatorname{Re} z|+|\operatorname{Im} w-\operatorname{Im} z|\end{array}\right\}\quad\forall w,z\in\mathbb{C}$$

$$z_n\in\mathbb{C}\quad\forall n\in\mathbb{N}\,,\,z\in\mathbb{C}$$

- $\{z_n\}\to z \iff \left\{\begin{array}{l}\{\operatorname{Re} z_n\}\to\operatorname{Re} z\\ \{\operatorname{Im} z_n\}\to\operatorname{Im} z\end{array}\right.$
- $\{z_n\}$ sucesión de Cauchy $\iff$ $\{\operatorname{Re} z_n\}$ y $\{\operatorname{Im} z_n\}$ sucesiones de Cauchy

Teorema de complitud

$\mathbb{C}$ es un espacio métrico completo

Acotación

Conjuntos acotados y sucesiones acotadas

- Conjuntos acotados: $A \subset \mathbb{C}$,

$$A \ \text{ acotado } \iff \exists M \in \mathbb{R} \ : \ |z| \leqslant M \quad \forall z \in A$$

- Sucesiones acotadas: $z_n \in \mathbb{C} \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

$$\{z_n\} \ \text{ acotada } \iff \exists M \in \mathbb{R} \ : \ |z_n| \leqslant M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- Toda sucesión convergente está acotada
- Una sucesión de números complejos $\{z_n\}$ está acotada si, y sólo si, las sucesiones de números reales $\{\operatorname{Re} z_n\}$ y $\{\operatorname{Im} z_n\}$ está acotadas.

Compacidad

Teorema de Bolzano-Weierstrass

Toda sucesión acotada de números complejos admite una sucesión parcial convergente

Caracterización de la compacidad

Para un conjunto $K \subset \mathbb{C}$, son equivalentes:

(a) K es compacto

(b) Toda sucesión de puntos de K admite una sucesión parcial que converge e un punto de K

(c) K es cerrado y acotado

En particular $\mathbb{C}$ es un espacio topológico localmente compacto

Ejercicio: $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C} \setminus A$

$d(z,A) := \inf\{|z-a| : a \in A\}$

Probar que si A es cerrado entonces existe $a_0 \in A$ tal que $d(z,A) = |z - a_0|$

Divergencia

Sucesiones divergentes

$z_n \in \mathbb{C} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\{z_n\} \to \infty \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \{|z_n|\} \to +\infty$$

Caracterización

Una sucesión de números complejos es divergente si, y sólo si, no admite ninguna sucesión parcial convergente

Ejemplo

$$z_n = n\left(\cos\frac{n\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{2}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Si n es impar, $\cos\frac{n\pi}{2} = 0 \rightsquigarrow \mathrm{Re}\, z_n = 0$
Si n es par, $\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{2} = 0 \rightsquigarrow \mathrm{Im}\, z_n = 0$

- $\{z_n\} \to \infty$
- Las sucesiones $\{\mathrm{Re}\, z_n\}$ y $\{\mathrm{Im}\, z_n\}$ no son divergentes ¡Hay parciales convergentes!

Cálculo de límites

Cálculo de límites

$$z_n, w_n \in \mathbb{C} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ z, w \in \mathbb{C}$$

- $\{z_n\} \to z \implies \{|z_n|\} \to |z|$
- $\{z_n\} \to z$, $\{w_n\} \to w \implies \{z_n + w_n\} \to z + w$
- * $\{z_n\} \to \infty$, $\{w_n\}$ acotada $\implies \{z_n + w_n\} \to \infty$
- $\{z_n\} \to 0$, $\{w_n\}$ acotada $\implies \{z_n w_n\} \to 0$
- $\{z_n\} \to z$, $\{w_n\} \to w \implies \{z_n w_n\} \to zw$
- * $\{z_n\} \to z \neq 0$, $\{w_n\} \to \infty \implies \{z_n w_n\} \to \infty$
- $\{z_n\} \to \infty$, $\{w_n\} \to \infty \implies \{z_n w_n\} \to \infty$
- $w_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, $\{w_n\} \to w \neq 0 \implies \{1/w_n\} \to 1/w$
- Si $w_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, entonces: $\{w_n\} \to 0 \iff \{1/w_n\} \to \infty$

* $|z_n + w_n| \geq |z_n| - |w_n| \geq |z_n| - M \longrightarrow +\infty$

$\{w_n\}$ acotada $\rightsquigarrow \exists M > 0$ tq $|w_n| \leq M$

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq si $n \geq n_0$

* $|z_n w_n| = |z_n| \cdot |w_n| \geq |w_n| \cdot \frac{|z|}{2}$

Operaciones con funciones complejas de variable compleja

Si $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$, $\mathcal{F}(A)$ es el conjunto de todas las funciones de A en $\mathbb{C}$

Estructura algebraica

Para $f, g \in \mathcal{F}(A)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, definimos:

- Suma: $(f+g)(z) = f(z) + g(z) \quad \forall z \in A$
- Producto: $(fg)(z) = f(z)g(z) \quad \forall z \in A$

  Con estas operaciones, $\mathcal{F}(A)$ es un anillo conmutativo con unidad
- Si $g(A) \subset \mathbb{C}^*$ tenemos la función cociente:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(z) = \frac{f(z)}{g(z)} \quad \forall z \in A$$

- Producto por escalares: $(\lambda f)(z) = \lambda f(z) \quad \forall z \in A$

  Con la suma y este producto por escalares, $\mathcal{F}(A)$ es un espacio vectorial complejo

Otras operaciones con funciones

Composición

$f \in \mathcal{F}(A)\,,\ f(A) \subset B \subset \mathbb{C},\ g \in \mathcal{F}(B)$:

$$(g \circ f)(z) = g\big(f(z)\big) \quad \forall z \in A$$

Partes real e imaginaria, conjugada y módulo

Para $f \in \mathcal{F}(A)$ podemos definir:

- $(\operatorname{Re} f)(z) = \operatorname{Re} f(z)$, $(\operatorname{Im} f)(z) = \operatorname{Im} f(z) \quad \forall z \in A$
- $\overline{f}(z) = \overline{f(z)} \quad \forall z \in A$
- $|f|(z) = |f(z)| \quad \forall z \in A$
- $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$, $\overline{f} = \operatorname{Re} f - i \operatorname{Im} f$
- $\operatorname{Re} f = \dfrac{f + \overline{f}}{2}$, $\operatorname{Im} f = \dfrac{f - \overline{f}}{2i}$
- $\big|f\big| = \big|\overline{f}\big| = \big(f\,\overline{f}\big)^{1/2} = \big((\operatorname{Re} f)^2 + (\operatorname{Im} f)\big)^{1/2}$

Continuidad en un punto (I)

Definición y caracterización

$\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{F}(A)$, $z \in A$. f es continua en z cuando:

- $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : w \in A, |w - z| < \delta \;\Rightarrow\; |f(w) - f(z)| < \varepsilon$
- $z_n \in A \; \forall n \in \mathbb{N}, \{z_n\} \to z \;\Rightarrow\; \{f(z_n)\} \to f(z)$

Carácter local

$z \in B \subset A$, $f \in \mathcal{F}(A)$:

- Si f es continua en z, entonces $f\big|_B$ es continua en z
- Si $f\big|_B$ es continua en z y existe $\delta > 0$ tal que $D(z, \delta) \cap A \subset B$, entonces f es continua en z

Operaciones algebraicas

$f, g \in \mathcal{F}(A)$ continuas en $z \in A$. Entonces:

- $f + g$ es continua en z
- fg es continua en z
- Si $g(A) \subset \mathbb{C}^*$, entonces f/g es continua en z

Continuidad en un punto (II)

Composición

$f \in \mathcal{F}(A)$, $f(A) \subset B \subset \mathbb{C}$, $g \in \mathcal{F}(B)$, $z \in A$

$$\left.\begin{array}{r} f \ \text{ continua en } \ z \\ g \ \text{ continua en } \ f(z) \end{array}\right\} \Longrightarrow g \circ f \ \text{ continua en } \ z$$

Consecuencias

$f \in \mathcal{F}(A)$, $z \in A$

- f continua en z $\iff$ $\overline{f}$ continua en z La conjugación es una isometría $|\overline{w}-\overline{z}| = |\overline{w-z}| = |w-z|$
- f continua en z $\iff$ $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ continuas en z $\operatorname{Re} f = \frac{f+\overline{f}}{2}$ $\operatorname{Im} f = \frac{f-\overline{f}}{2i}$
- f continua en z $\Longrightarrow$ $|f|$ continua en z. El recíproco es falso $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$
$\overline{f} = \operatorname{Re} f - i \operatorname{Im} f$

Continuidad global (I)

Definición y caracterización

$\emptyset \neq B \subset A \subset \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{F}(A)$

- f continua en B $\iff$ f continua en z, $\forall z \in B$
- f continua $\iff$ f continua en A
- $\mathcal{C}(A) = \{f \in \mathcal{F}(A) : f \text{ continua}\}$
- Si $f \in \mathcal{F}(A)$ y $\mathcal{T}$ es la topología de $\mathbb{C}$, entonces:

$$f \in \mathcal{C}(A) \iff \forall V \in \mathcal{T}\ \exists U \in \mathcal{T} : f^{-1}(V) = U \cap A$$

Carácter local

Supongamos $A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ donde Λ es un conjunto y A_λ es subconjunto abierto (relativo) de A, para todo $\lambda \in \Lambda$. Entonces, para $f \in \mathcal{F}(A)$ se tiene:

$$f \in \mathcal{C}(A) \iff f\big|_{A_\lambda} \in \mathcal{C}(A_\lambda) \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

Continuidad global (II)

Operaciones con funciones continuas

- $\mathcal{C}(A)$ es subanillo y subespacio vectorial de $\mathcal{F}(A)$
- $f, g \in \mathcal{C}(A)$, $g(A) \subset \mathbb{C}^* \implies f/g \in \mathcal{C}(A)$
- $f \in \mathcal{C}(A)$, $f(A) \subset B$, $g \in \mathcal{C}(B) \implies g \circ f \in \mathcal{C}(A)$
- Para $f \in \mathcal{F}(A)$ se tiene:

$$f \in \mathcal{C}(A) \Leftrightarrow \overline{f} \in \mathcal{C}(A) \Leftrightarrow \operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in \mathcal{C}(A) \Rightarrow |f| \in \mathcal{C}(A)$$

Propiedades de las funciones continuas

$\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{C}(A)$

Teorema de Heine

- A compacto $\implies f(A)$ compacto y f uniformemente continua
- A conexo $\implies f(A)$ conexo

Continuidad uniforme

Definición

$f \in \mathcal{F}(A)$ es uniformemente continua cuando:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; : \; z, w \in A \, , \, |z - w| < \delta \; \Rightarrow \; |f(z) - f(w)| < \varepsilon$$

Esto implica que $f \in \mathcal{C}(A)$ pero en general el recíproco es falso

Funciones lipschitzianas

$f \in \mathcal{F}(A)$ es lipschitziana cuando:

$$\exists M \in \mathbb{R}_0^+ \; : \; |f(z) - f(w)| \leqslant M \, |z - w| \quad \forall z, w \in A$$

La mínima M que verifica lo anterior es la constante de Lipschitz de f:

$$M_0 = \sup \left\{ \frac{|f(z) - f(w)|}{|z - w|} \; : \; z, w \in A \, , \, z \neq w \right\}$$

Toda función lipschitziana es uniformemente continua. El recíproco es falso

Conexión

Subconjuntos conexos de $\mathbb{C}$

$A \subset \mathbb{C}$, $\mathcal{T}_A =$ topología inducida en A por la usual de $\mathbb{C}$

$$A \text{ conexo}$$

$$\Updownarrow$$

$$U\,, V \in \mathcal{T}_A\,,\ \ A = U \cup V\,,\ \ U \cap V = \emptyset \ \Rightarrow\ U = \emptyset \ \text{ o bien } \ V = \emptyset$$

$$\Updownarrow$$

$$U \in \mathcal{T}_A\,,\ A \setminus U \in \mathcal{T}_A \ \Rightarrow\ U = \emptyset \ \text{ o bien } \ U = A$$

$$\Updownarrow$$

$$f \in \mathcal{C}(A)\,,\ f(A) \subset \mathbb{Z} \ \Rightarrow\ f \ \text{ constante}$$

A es conexo $\Leftrightarrow \forall f : A \longrightarrow (X, \text{top. discreta})$ es constante
continua

Límite funcional

Puntos de acumulación

$$A \subset \mathbb{C} \ , \ \alpha \in \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned} \alpha \in A' \quad & \Longleftrightarrow \quad D(\alpha,\varepsilon) \cap (A \setminus \{\alpha\}) \neq \emptyset \quad \forall \varepsilon > 0 \\ & \Longleftrightarrow \quad \exists \ \{z_n\} \ : \ z_n \in A \setminus \{\alpha\} \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \ \{z_n\} \to \alpha \end{aligned}$$

Límite de una función en un punto

$$\emptyset \neq A \subset \mathbb{C} \ , \ f \in \mathcal{F}(A) \ , \ \alpha \in A' \ , \ L \in \mathbb{C}$$

$$\lim_{z \to \alpha} f(z) = L$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ : \ z \in A, \ 0 < |z - \alpha| < \delta \ \Rightarrow \ |f(z) - L| < \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$z_n \in A \setminus \{\alpha\} \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \{z_n\} \to \alpha \ \Rightarrow \ \{f(z_n)\} \to L$$

Límite y continuidad

Observaciones inmediatas

$$\lim_{z\to\alpha} f(z) = L \iff \lim_{z\to\alpha} |f(z) - L| = 0$$

$$\lim_{z\to\alpha} f(z) = 0 \iff \lim_{z\to\alpha} |f(z)| = 0$$

$$\lim_{z\to\alpha} f(z) = L \iff \lim_{z\to\alpha} \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} L \quad \text{y} \quad \lim_{z\to\alpha} \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} L$$

Relación entre límite y continuidad

Para $f \in \mathcal{F}(A)$ y $\alpha \in A \cup A'$, se pueden dar tres casos:

- $\alpha \in A \setminus A'$. Entonces f es continua en el punto α
- $\alpha \in A \cap A'$. Entonces f es continua en α si, y sólo si, $\lim_{z\to\alpha} f(z) = f(\alpha)$
- $\alpha \in A' \setminus A$. Entonces f tiene límite en α si, y sólo si, existe una función $g \in \mathcal{F}\big(A \cup \{\alpha\}\big)$ que es continua en α y extiende a f, en cuyo caso se tiene $g(\alpha) = \lim_{z\to\alpha} f(z)$.

Divergencia de funciones. Carácter local

Divergencia de funciones

$$f \in \mathcal{F}(A)\ ,\ \alpha \in A'$$

Decimos que f diverge en α y escribimos $f(z) \to \infty \quad (z \to \alpha)$ cuando:

$$\forall M \in \mathbb{R} \ \ \exists \delta > 0 \ : \ z \in A, \ \ 0 < |z - \alpha| < \delta \ \ \Rightarrow \ \ |f(z)| > M$$

Caracterización mediante sucesiones:

$$f(z) \to \infty \ \ (z \to \alpha) \quad \Longleftrightarrow \quad \big[\, z_n \in A \setminus \{\alpha\} \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \ \{z_n\} \to \alpha \ \ \Rightarrow \ \ \{f(z_n)\} \to \infty \,\big]$$

Carácter local

$$f \in \mathcal{F}(A)\ ,\ \alpha \in A'\ ,\ \delta > 0\ ,\ B = A \cap D(\alpha, \delta)\ ,\ g = f\big|_B\ ,\ L \in \mathbb{C}$$

$$\lim_{z \to \alpha} f(z) = L \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{z \to \alpha} g(z) = L$$

$$f(z) \to \infty \ \ (z \to \alpha) \quad \Longleftrightarrow \quad g(z) \to \infty \ \ (z \to \alpha)$$

Cálculo de límites

Reglas para límites y divergencia de funciones

$$f, g \in \mathcal{F}(A)\ ,\ \alpha \in A'\ ,\ \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$

- $\lim_{z\to\alpha} f(z) = \lambda \implies \lim_{z\to\alpha} |f(z)| = |\lambda|$
- $\lim_{z\to\alpha} f(z) = \lambda\ ,\ \lim_{z\to\alpha} g(z) = \mu \implies \lim_{z\to\alpha} \big(f+g\big)(z) = \lambda + \mu$
- $f(z) \to \infty\ \ (z \to \alpha)\ ,\ g$ acotada $\implies \big(f+g\big)(z) \to \infty\ \ (z \to \alpha)$
- $\lim_{z\to\alpha} f(z) = 0\ ,\ g$ acotada $\implies \lim_{z\to\alpha} \big(f\,g\big)(z) = 0$
- $\lim_{z\to\alpha} f(z) = \lambda\ ,\ \lim_{z\to\alpha} g(z) = \mu \implies \lim_{z\to\alpha} \big(f\,g\big)(z) = \lambda\mu$
- $\lim_{z\to\alpha} f(z) = \lambda \in \mathbb{C}^*\ ,\ g(z) \to \infty\ \ (z \to \alpha) \implies (f\,g)(z) \to \infty\ \ (z \to \alpha)$
- $f(z) \to \infty\ \ (z \to \alpha)\ ,\ g(z) \to \infty\ \ (z \to \alpha) \implies (f\,g)(z) \to \infty\ \ (z \to \alpha)$
- $g(A) \subset \mathbb{C}^*\ ,\ \lim_{z\to\alpha} g(z) = \mu \in \mathbb{C}^* \implies \lim_{z\to\alpha} (1/g)(z) = 1/\mu$
- Si $\ g(A) \subset \mathbb{C}^*$, entonces: $\lim_{z\to\alpha} g(z) = 0 \iff (1/g)(z) \to \infty\ \ (z \to \alpha)$

Límite o divergencia en el infinito

Límite o divergencia en el infinito

$$A \subset \mathbb{C},\ A \text{ no acotado},\ f \in \mathcal{F}(A)\ ,\ L \in \mathbb{C}$$

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = L \iff \left[\ \forall \varepsilon > 0\ \ \exists R > 0\ :\ z \in A,\ \ |z| > R\ \Rightarrow\ |f(z) - L| < \varepsilon\ \right]$$

$$\iff \left[\ z_n \in A\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ \ \{z_n\} \to \infty\ \Rightarrow\ \{f(z_n)\} \to L\ \right]$$

$$f(z) \to \infty\ (z \to \infty) \iff \left[\forall M \in \mathbb{R}\ \ \exists R > 0\ :\ z \in A,\ \ |z| > R\ \Rightarrow\ |f(z)| > M\right]$$

$$\iff \left[z_n \in A\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ \ \{z_n\} \to \infty\ \Rightarrow\ \{f(z_n)\} \to \infty\right]$$

Reducción a límite o divergencia en un un punto

$$A \subset \mathbb{C}\ ,\ A \text{ no acotado},\ B = \{w \in \mathbb{C}^* : 1/w \in A\} \text{ verifica } 0 \in B'$$

$$f \in \mathcal{F}(A)\ ,\ g \in \mathcal{F}(B)\ ,\ \ g(w) = f(1/w)\ \ \forall w \in B\ ,\ L \in \mathbb{C}$$

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = L \iff \lim_{w\to 0} g(w) = L \iff \lim_{w\to 0} f(1/w) = L$$

$$f(z) \to \infty\ \ (z \to \infty) \iff g(w) \to \infty\ \ (w \to 0) \iff f(1/w) \to \infty\ \ (w \to 0)$$