Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Métodos Numéricos II (curso 2022/23)

1 Dado el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(a) = \mu \end{cases}$$

se pretende utilizar el siguiente método numérico para estimar el valor de $x(b)$, con $b > a$:

$$x_{n+2} = \alpha_1 x_{n+1} + \alpha_0 x_n + h\left(\beta_1 f(t_{n+1}, x_{n+1}) + \beta_0 f(t_n, x_n)\right)$$

a) Determina el valor de los parámetros (en función del parámetro α_1) para que el método tenga orden 2. ¿Sería consistente en ese caso?

b) Estima el error de truncatura local (también en función de α_1).

c) Estudia la estabilidad y la convergencia en función del parámetro α_1.

d) Si $\alpha_1 = 0$ ¿encuentras relación con algún método conocido? ¿Y en el caso $\alpha_1 = 1$?

e) Utiliza este método con $\alpha_1 = 1/2$ en el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x'(t) = -3x + t \\ x(0) = 0.3 \end{cases}$$

para estimar el valor de $x(1)$. Realiza cuatro iteraciones del método haciendo uso del método de Euler para calcular los datos iniciales que necesites. Muestra todas las iteraciones.

a) Se impone que $C_1 = C_2 = C_0 = 0 \Longrightarrow$ $\alpha_0 = 1 - \alpha_1$
$\beta_0 = -1/2\,\alpha_1$
$\beta_1 = 2 - 1/2\,\alpha_1$

Consistente $\Longleftrightarrow$ $C_0 = C_1 = 0$

b) Error truncatura

$$R_{n+2} = \mathcal{L}_2(x(t_n), h) = C_3 x'''(t) h^3 + \dots$$

$$C_3 = \frac{8}{6} - \frac{1}{6}\alpha_1 - \frac{1}{2}\beta_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}\alpha_1$$

•) Para $\alpha_1 \neq -4$ $\quad R_{n+2} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{12}\alpha_1\right) x'''(t_n) h^3 + O(h^4)$

•) Para $\alpha_1 = -4$. $C_3 = 0 \Longrightarrow C_4 = \frac{1}{6} \Longrightarrow R_{n+2} = \frac{1}{6} x^{iv} h^4 + O(h^5)$

c) Estabilidad + Convergencia

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \alpha_0 - \lambda\alpha_1 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = \frac{\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 + 4\alpha_0}}{2}$$

•) Raíz doble fuera de $D(0,1) \Longleftrightarrow |\alpha_1| \geq 2$

•) Raíces fuera de $\bar{D}(0,1) \Longleftrightarrow$ •) $\left|\alpha_1 - \sqrt{\alpha_1^2 + 4\alpha_0}\right| > 2$
•) $\left|\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 + 4\alpha_0}\right| > 2$

Conv. $\Longleftrightarrow$ Cons. + Estab.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet)\ \alpha_0 = 1 - \alpha_1 \\ \bullet)\ \alpha_1 = 2 - \beta_1 - \beta_0 \end{array}\right\} \text{Consistencia}$$