Variable Compleja I
Tema 9: Ceros de las funciones holomorfas

Desigualdades de Cauchy y CONSECUENCIAS

Desigualdades de Cauchy

$$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}, \quad f \in \mathcal{H}(\Omega), \quad a \in \Omega, \quad r \in \mathbb{R}^+, \quad \overline{D}(a,r) \subset \Omega$$

$$M(f,a,r) = \max \left\{ |f(z)| : z \in C(a,r)^* \right\}$$

Entonces se tiene: $$\frac{|f^{(n)}(a)|}{n!} \leqslant \frac{M(f,a,r)}{r^n} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Teorema de Liouville

Toda función entera y acotada es constante

De hecho, si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ no es constante, entonces: $\overline{f(\mathbb{C})} = \mathbb{C}$

Teorema Fundamental del Álgebra

El cuerpo de los números complejos es algebraicamente cerrado:

$$P \in \mathcal{P}(\mathbb{C}), \quad P \text{ no constante} \quad \Longrightarrow \quad \exists z_0 \in \mathbb{C} \; : \; P(z_0) = 0$$

Motivación: ceros de polinomios

Ceros de un polinomio y orden de un cero

$$P \in \mathcal{P}(\mathbb{C}), \quad P \quad \text{no constante:} \quad Z(P) = \{a \in \mathbb{C} : P(a) = 0\}$$

- $Z(P)$ es un conjunto no vacío y finito
- Para cada $a \in Z(P)$ existe un único $m \in \mathbb{N}$ tal que:

  $$P(z) = (z-a)^m Q(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad \text{donde} \quad Q \in \mathcal{P}(\mathbb{C}) \quad \text{y} \quad Q(a) \neq 0$$

  Decimos que P tiene en a un cero de orden m
- El orden se caracteriza por: $m = \min\{n \in \mathbb{N} : P^{(n)}(a) \neq 0\}$, es decir,

  $$P(a) = P'(a) = \ldots = P^{(m-1)}(a) = 0 \quad \text{y} \quad P^{(m)}(a) \neq 0$$

Ceros de funciones holomorfas

Ceros de una función holomorfa y orden de un cero

$$\Omega \text{ dominio}, \quad f \in \mathcal{H}(\Omega) \quad \text{no idénticamente nula}$$

$$Z(f) = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$$

- Orden de un cero: Para cada $a \in Z(f)$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^{(n)}(a) \neq 0$.

  El orden del cero de f en a es: $m = \min\{n \in \mathbb{N} : \ f^{(n)}(a) \neq 0\}$

- Caracterización: $a \in \Omega$ es un cero de orden $m \in \mathbb{N}$ si, y sólo si,

$$\exists g \in \mathcal{H}(\Omega) \ : \ g(a) \neq 0 \quad \text{y} \quad f(z) = (z-a)^m g(z) \quad \forall z \in \Omega$$

- Principio de los ceros aislados: En un entorno de cero, f no se anula

$$\forall a \in Z(f) \ \ \exists \delta > 0 \ : \ D(a,\delta) \subset \Omega \quad \text{y} \quad f(z) \neq 0 \ \ \forall z \in D(a,\delta) \setminus \{a\}$$

  Equivalentemente, $Z(f)$ no tiene puntos de acumulación en Ω:

$$Z(f)' \cap \Omega = \emptyset$$

Demostración

Se considera $A = \{z \in \Omega : f^{n)}(z) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \{z \in \Omega / f^{n)}(z) = 0\}$

1) Como f no es cte. cero $\Rightarrow A \neq \Omega$

2) $f \in H(\Omega) \xRightarrow{\text{T. Taylor}} f^{n)}$ es cont. $\Rightarrow \{z \in \Omega : f^{n)}(z) = 0\}$ es cerrado relativo a Ω

$\Rightarrow$ A también es cerrado relativo a Ω.

3) A es abierto:

Fijamos $a \in A \subset \Omega \Rightarrow \exists r > 0 \;\; D(a,r) \subset \Omega \xRightarrow{\text{T. Taylor}} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(a)}{n!}(z-a)^n \;\; \forall z \in D(a,r)$

$\Rightarrow f^{n)}(z) = 0 \quad \forall z \in D(a,r) \;\; \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} D(a,r) \subset A \\ + \\ a \text{ arbitrario} \end{array} \right\} \Rightarrow A$ es abierto

$$\left. \begin{array}{l} A \text{ cerrado relativo a } \Omega \\ A \text{ es abierto} \\ A \neq \Omega \\ \Omega \text{ conexo} \end{array} \right\} \Rightarrow A = \phi \Rightarrow \forall z \in Z(f) \;\; \exists n \in \mathbb{N} \text{ tq } f^{n)}(a) = 0$$

ii) Sea un cero de orden $m(a)$:

Sea $r > 0$ tq $D(a,r) \subset \Omega \xRightarrow{\text{T. Taylor}} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(a)}{n!}(z-a)^n \quad \forall z \in D(a,r)$

$$= \sum_{n=m}^{\infty} \frac{f^{n)}(a)}{n!}(z-a)^n = (z-a)^m \sum_{n=m}^{\infty} \frac{f^{n)}(a)}{n!}(z-a)^{n-m}$$

Definimos $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ por

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z-a)^m} \text{ si } z \neq a \quad y \quad g(a) = \frac{f^{m)}(a)}{m!} \neq 0$$

$g \in H(\Omega \setminus \{a\})$

g es derivable en a: $\quad g(z) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{f^{n)}(a)}{n!}(z-a)^n$

(si $z \neq a$ por (*) y def. de g)

$\Rightarrow g$ es derivable en a porque coincide con la suma de una serie de potencias centrada en a en un disco centrado en a.

Suponemos ahora que $f(z) = (z-a)^m g(z) \quad \forall z \in \Omega$

con $g \in H(\Omega)$ y $g(a) \neq 0$ con $m \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow f(a) = f'(a) = \cdots = f^{m-1)}(a) \qquad f^{m)}(a) = g(a)\, m! \neq 0 \xRightarrow{\text{Con } m \in \mathbb{N}} f$ tiene un cero de orden m en a

iii) Sea $a \in Z(f)$ por ii) existe $g \in H(\Omega)$ con $g(a) \neq 0$ y $f(z) = (z-a)^m g(z) \;\; \forall z \in \Omega$

$\left. \begin{array}{l} g(a) \neq 0 \\ + \\ g \text{ cont.} \end{array} \right\} \exists \delta > 0$ tal que $g(z) \neq 0 \;\; \forall z \in D(a,\delta) \Rightarrow f(z) \neq 0 \;\; \forall z \in D(a,\delta)$

Veamos que $Z(f)$ no tiene puntos de acumulación en Ω:

$Z(f)$ son puntos aislados $\Longrightarrow Z(f) \cap Z(f)' = \phi$

Como $Z(f)$ es cerrado relativo a Ω tenemos que

$(Z(f)' \cap \Omega \subseteq Z(f)) \cap Z'(f) \Longrightarrow Z(f)' \cap Z(f)' \cap \Omega$

Consecuencia

Algunas cuestiones topológicas

- En cualquier espacio métrico X, la distancia a un conjunto no vacío $E \subset X$ es una función no expansiva:

$$d(x,E) = \inf\{d(x,y) : y \in E\} \quad \forall x \in X. \text{ Se tiene:}$$

$$|d(x_1,E) - d(x_2,E)| \leqslant d(x_1,x_2) \quad \forall x_1,x_2 \in X$$

- Todo abierto Ω de $\mathbb{C}$ es unión numerable de compactos:

$$\mathbb{C} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{D}(0,n); \quad \Omega \neq \mathbb{C} \implies \Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant n, \quad d(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) \geqslant 1/n\}$$

Esto es un subconjunto cerrado de un compacto

- Todo subconjunto infinito de un espacio métrico compacto tiene al menos un punto de acumulación.

Ω como unión de compactos
A corta a todos esos compactos

- $\emptyset \neq A \subset \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}, \quad A' \cap \Omega = \emptyset \implies A$ numerable

Corolario

Si Ω es un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ no es idénticamente nula, entonces $Z(f) = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$ es numerable

Principio de identidad

Teorema

$$\Omega \text{ dominio}, \quad f,g \in \mathcal{H}(\Omega)$$

$$A \subset \Omega, \quad f(z) = g(z) \quad \forall z \in A$$

$$A' \cap \Omega \neq \emptyset \quad \Longrightarrow \quad f(z) = g(z) \quad \forall z \in \Omega$$

$$\text{En particular, } A \text{ no numerable} \quad \Longrightarrow \quad f(z) = g(z) \quad \forall z \in \Omega$$

Es decir, si f y g coinciden en una suc. de puntos convergente a un punto en Ω, coinciden

Ejemplo

$$f,g \in \mathcal{H}(\mathbb{C}), \quad f(1/n) = g(1/n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad f(z) = g(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$\left\{\frac{1}{n}\right\} \longrightarrow 0$$

La exponencial compleja es la única extensión entera de la real