Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada

Variable Compleja I, Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Convocatoria extraordinaria

Ejercicio 1. (**2.5 puntos**) Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$f_n(z) = \int_n^{n+1} \frac{\operatorname{sen}(z^2 + t)}{1 + t^2}\, dt \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

a) Probar que $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

b) Probar que la serie de funciones $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge en $\mathbb{C}$ y que su suma es una función entera.

Ejercicio 2. (**2.5 puntos**) Integrando la función $z \longmapsto \dfrac{\log(z+i)}{1+z^2}$ sobre un camino cerrado que recorra la frontera del conjunto $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < R, \ \operatorname{Im} z > 0\}$, con $R \in \mathbb{R}$ y $R > 1$, evaluar la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2}\, dx.$$

Ejercicio 3. (**2.5 puntos**) Sean f y g funciones enteras verificando que $g\big(f(z)\big) = zf(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. ¿Qué se puede afirmar sobre f y g?

Ejercicio 4. (**2.5 puntos**) Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Probar que si la función $\operatorname{Re} f$ tiene un extremo relativo entonces f es constante.

Granada, 7 de julio de 2021