

# Lección 1. Ecuaciones y sistemas

## Ecuaciones Diferenciales I Apuntes de Rafael Ortega Ríos transcritos por Gian Nicola Rossodivita

### 1 Introducción a las ecuaciones diferenciales

En las ecuaciones polinómicas la incógnita  $x$  es un número y la ecuación establece una relación entre algunas potencias de  $x$ ; por ejemplo

$$3x^3 - 2x - 1 = 0,$$

que admite las soluciones  $x = 1, -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{6}$ .

Este curso vamos estudiar ecuaciones para las que la incógnita es una función  $x(t)$  y la ecuación va a establecer una relación entre dicha función y algunas de sus derivadas.

La notación viene de la Mecánica, pensamos en una partícula que ocupa la posición  $x$  en el instante  $t$

$t$  = variable independiente,  $x \equiv x(t)$  = incógnita o variable dependiente.

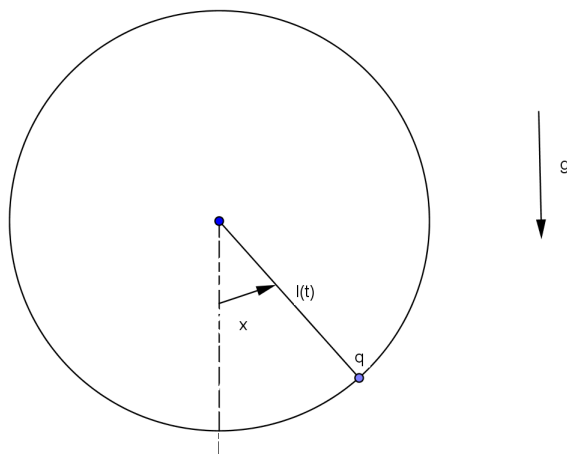
Supongamos por ejemplo que la partícula se mueve en una circunferencia de radio variable  $l(t)$  situada en el plano vertical. Si se conoce la función  $l(t)$ , longitud del péndulo, el ángulo incógnita  $x(t)$  cumple la ecuación diferencial

$$(l(t)^2 x'(t))' + g l(t) \sin x(t) = 0.$$

La derivada más alta que aparece en la ecuación determina el **orden**. En el ejemplo anterior el orden es 2 pues la ecuación se puede reescribir como

$$l(t) x''(t) + 2l'(t) x'(t) + g \sin x(t) = 0.$$

Esta ecuación es bastante complicada, comenzaremos el curso estudiando las ecuaciones de orden más bajo.



## 2 Ecuación de primer orden

Es una expresión del tipo

$$\Phi(t, x(t), x'(t)) = 0,$$

$\nearrow$  var. indep.  
 $\searrow$  var. dep.

donde  $\Phi = \Phi(t, x, y)$  es una función dada de tres variables

**Ejemplo 1.** 1.  $x(t)^2 + x'(t)^2 = 1$

En este caso  $\Phi(t, x, y) = x^2 + y^2 - 1$ .

Podemos encontrar algunas soluciones a ojo

$$x_1(t) = 1, x_2(t) = \cos t, x_3(t) = \sin t, x_4(t) = \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \dots$$

Otras soluciones son más complicadas

$$x_5(t) = \begin{cases} 1, & t \leq 0 \\ \cos t, & t > 0 \end{cases}$$

$\phi: D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(t, x, y) \mapsto \phi(t, x, y)$   
 Es continua en el dominio  $D$   
 (abierto y conexo)  
 $\phi(t, x, y) = y - x$

Ejemplo:  $x'(t) = \frac{1}{x(t)}$   
 $\phi(t, x, y) = y - \frac{1}{x}$   
 $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$   
 ¡No es conexo!  
 Habría que tomar  
 $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$   
 $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}$

2.  $x'(t) = -2t$ ,  $\Phi(t, x, y) = y + 2t$ .

Buscamos funciones cuya derivada sea  $-2t$  (cálculo de primitivas),  $x_1(t) = -t^2$ ,  $x_2(t) = -t^2 + 1$ , ...

3.  $x'(t) = -2x(t)$ ,  $\Phi(t, x, y) = y + 2x$ .

Buscamos funciones cuya derivada sea la propia función multiplicada por 2 (esto recuerda bastante a la función exponencial),  $x_1(t) = e^{-2t}$ ,  $x_2(t) = 6e^{-2t}$ ,  $x_3(t) = 0$ , ...

**Ejercicio 1.** En cada caso encuentra infinitas soluciones.

Las ecuaciones más tratables suelen ser aquellas en las que la derivada está despejada, se dice entonces que están en **forma normal**

$$\Phi(t, x(t), x'(t)) = 0 \rightarrow x'(t) = f(t, x(t)).$$

Esto ocurre en los ejemplos 2 y 3 pero no en el 1, en ese caso al intentar despejar nos aparece una expresión multivaluada ( $x'(t) = \pm\sqrt{1 - x(t)^2}$ ).

Hasta ahora hemos hablado de ecuación y de solución sin demasiada precisión, vamos a definir estas nociones.

Supondremos que  $\Phi : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(t, x, y) \rightarrow \Phi(t, x, y)$  es una función continua definida en un subconjunto  $D$  abierto y conexo de  $\mathbb{R}^3$ . La función  $\Phi$  nos proporciona la **ecuación**.

Una **solución** será una función  $x : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto x(t)$  que cumple:

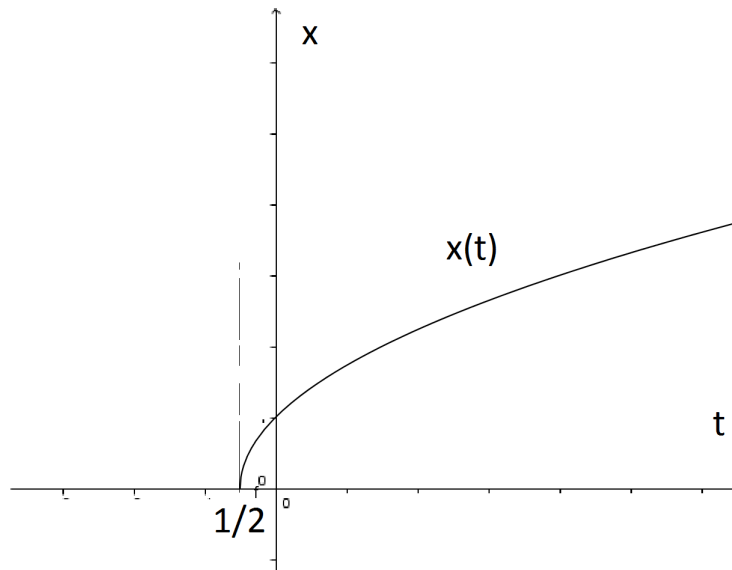
Definición

- (o)  $I$  es un intervalo abierto
- (i)  $x(t)$  es derivable en  $I$
- (ii)  $(t, x(t), x'(t)) \in D$  si  $t \in I$  (la solución permanece en el dominio de la ecuación)
- (iii)  $\Phi(t, x(t), x'(t)) = 0$  si  $t \in I$  (se cumple la ecuación).

**Ejemplo 2.** Ecuación:  $x'(t) = \frac{1}{x(t)}$ , solución  $x(t) = +\sqrt{2t+1}$ ,  $\Phi(t, x, y) = y - \frac{1}{x}$ , para que  $\Phi$  sea continua debemos eliminar  $x = 0$ . El conjunto  $D = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} - \{0\}) \times \mathbb{R}$  no es un dominio admisible para la ecuación porque no es conexo, tenemos dos posibilidades

$$D_+ = \mathbb{R} \times ]0, \infty[ \times \mathbb{R}$$

$$D_- = \mathbb{R} \times ]-\infty, 0[ \times \mathbb{R}.$$



Como la solución debe permanecer en el dominio de la ecuación (ii) y tenemos raíz positiva escogemos  $D_+$ . La función  $x(t) = +\sqrt{2t+1}$  está definida en  $[-\frac{1}{2}, +\infty[$  pero no es derivable en  $t = -\frac{1}{2}$ .

Escogemos  $I = ]-\frac{1}{2}, +\infty[$  y ahora es claro que las condiciones (o), (i), (ii) se cumplen. Verifiquemos (iii),

$$x'(t) = \frac{2}{2\sqrt{2t+1}} = \frac{1}{x(t)}.$$

### 3 Modelos de crecimiento ilimitado

Vamos a estudiar la ecuación

$$x'(t) = \lambda x(t),$$

donde  $\lambda$  es un parámetro real.

Podemos pensar que  $x(t)$  es una magnitud que varía con el tiempo ( $x(t)$  = capital que depositamos en un banco, altura de una planta de girasol, población de un país, ...) entonces la derivada  $x'(t)$  mide la variación de esa magnitud y podemos leer la ecuación en la forma:

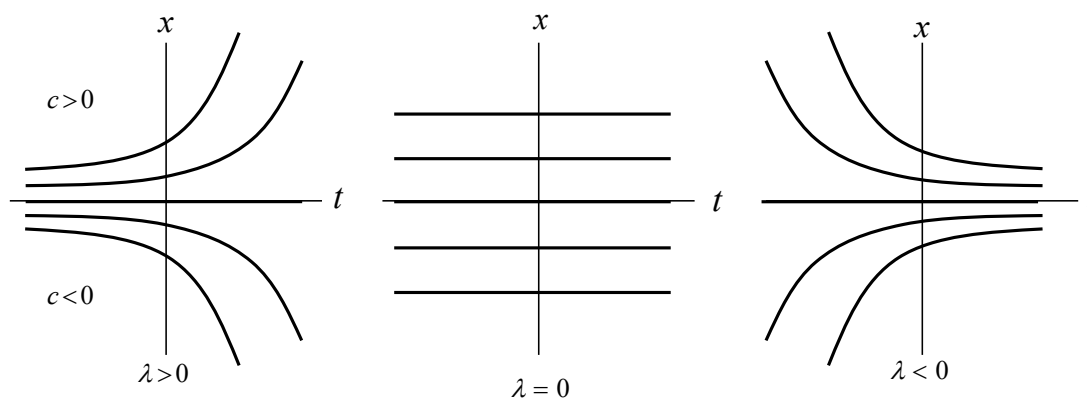
Crecimiento de  $x$  proporcional a  $x$ .

Por sustitución directa se comprueba que las funciones

$$x(t) = c e^{\lambda t}, \quad c \in \mathbb{R}$$

son soluciones de la ecuación.

Se trata de una familia uniparamétrica de soluciones cuyo comportamiento cualitativo varía según el signo de  $\lambda$ .



Vamos a comprobar que esta ecuación no tiene más soluciones

**Lema 1.** Si  $x(t)$  es una solución de

$$x'(t) = \lambda x(t)$$

definida en  $I$ , entonces existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que

$$x(t) = c e^{\lambda t}, \quad t \in I.$$

Buscamos inspiración para hacer la demostración; para ello vamos a partir de la fórmula que queremos probar y haremos algunos cálculos, luego invertiremos el sentido de las implicaciones

$$x(t) = c e^{\lambda t} \longrightarrow e^{-\lambda t} x(t) = c \longrightarrow (e^{-\lambda t} x(t))' = 0.$$

**Demostración.** Dada una solución  $x(t)$  definimos la función

$$y(t) = e^{-\lambda t} x(t).$$

Como  $y(t)$  es producto de funciones derivables también resulta ser derivable,

$$\begin{aligned} y'(t) &= (e^{-\lambda t} x(t))' = -\lambda e^{-\lambda t} x(t) + e^{-\lambda t} x'(t) \\ &= e^{-\lambda t} \underbrace{(-\lambda x(t) + x'(t))}_0 = 0. \end{aligned}$$

por ser  $x(t)$  solución

De  $y'(t) = 0, t \in I$  se sigue que  $y(t)$  es constante: existe  $c \in \mathbb{R} : y(t) = c \Rightarrow e^{-\lambda t} x(t) = c$

**Nota. 1.** En los modelos de crecimiento solo tienen sentido las soluciones con  $c \geq 0$  pues  $x(t)$  ha de ser una cantidad no negativa.

**Ejemplo 3.** 1. **Interés continuo.** Ingresamos 1000 euros en un banco que nos da el 3% anual de interés. El capital inicial  $C(0) = 1000$  se transforma después de un año en

$$C(1) = C(0) + \frac{3}{100} C(0) = 1030$$

después de dos años

$$C(2) = C(1) + \frac{3}{100} C(1) = 1060'90, \dots$$

Imaginemos ahora otro banco que nos ofrece también el 3% pero con pago semestral

$$C(\frac{1}{2}) = C(0) + \frac{3}{100} \frac{1}{2} C(0) = 1015$$

$$C(1) = C(\frac{1}{2}) + \frac{3}{100} \frac{1}{2} C(\frac{1}{2}) = 1030'225 \dots$$

este banco es más generoso.

Podemos imaginar bancos que hagan pagos mensuales, semanales, diarios,... En general la fórmula a aplicar es

$$C(t + \Delta t) = C(t) + \frac{3}{100} \Delta t C(t),$$

donde  $\Delta t$  es la fracción del año en la que se hacen pagos ( $\Delta t = 1$  pago anual,  $\Delta t = \frac{1}{2}$  pago semestral,  $\Delta t = \frac{1}{12}$  pago mensual... ) Imaginemos

ahora el banco más generoso, que nos ofrece un 3% con pagos continuos. Reescribimos la fórmula

$$\frac{C(t + \Delta t) - C(t)}{\Delta t} = \frac{3}{100} C(t)$$

y hacemos  $\Delta t \rightarrow 0$ . Por un paso al límite (no riguroso) llegamos a la ecuación diferencial

$$C'(t) = \frac{3}{100} C(t).$$

Se trata de la ecuación que venimos estudiando con  $\lambda = \frac{3}{100}$  y un cambio de nombre para la incógnita ( $x \rightarrow C$ ). Entonces

$$C(t) = c e^{\frac{3}{100}t}$$

y como sabemos que  $C(0) = 1000$  deducimos que

$$C(t) = 1000 e^{\frac{3}{100}t} \text{ nuestro capital en el instante } t.$$

2. **Desintegración radiactiva.** Las sustancias radioactivas van perdiendo masa al emitir radiaciones. La ley de desintegración dice que

$$m'(t) = -\lambda m(t)$$

donde  $m(t)$  es la masa en el instante  $t$  y  $\lambda > 0$  es un parámetro que depende de la sustancia (Uranio 238, Carbono 14, Cobalto 60...) Ahora la incógnita es  $m(t)$  ( $x \rightarrow m$ ) y las soluciones son de la forma

$$m(t) = c e^{-\lambda t}.$$

Por ejemplo, calculamos  $\lambda$  para el Carbono 14 a partir del periodo de semi-desintegración (la masa se reduce a la mitad en 5730 años)

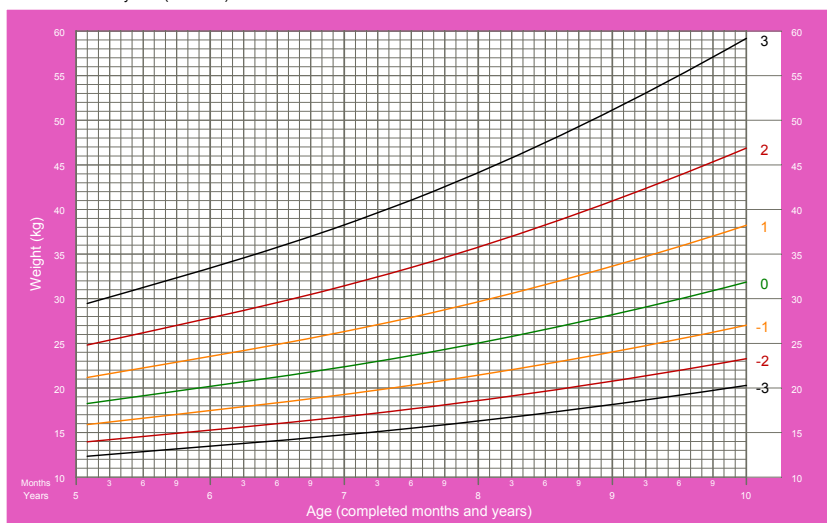
$$m(5730) = \frac{1}{2} m(0) \Rightarrow c e^{-\lambda 5730} = \frac{1}{2} c, \quad c > 0.$$

$$\Rightarrow e^{-\lambda 5730} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{5730}.$$

3. ¿Existe el crecimiento ilimitado? Si se observan las curvas del peso de las niñas en función de la edad se advierte que en los primeros años se parecen mucho a una exponencial (más o menos hasta los 12 años) pero después el crecimiento empieza a frenarse; es decir, un modelo del tipo anterior solo es aplicable a los primeros años

## Weight-for-age GIRLS

5 to 10 years (z-scores)



2007 WHO Reference

*Algo parecido ocurre cuando se requiere modelar la población de un país ( $P = P(t)$ ), al principio sigue un crecimiento Malthusiano ( $P'(t) = \lambda P(t)$ ) pero a partir de un tamaño la población se satura y apenas crece.*

**La notación abreviada.** Hasta ahora hemos escrito la ecuación general de orden 1 en la forma

$$\Phi(t, x(t), x'(t)) = 0,$$

pero lo usual es escribirla como

$$\Phi(t, x, x') = 0.$$

Los principiantes deben tener cuidado y distinguir el papel de la **variable independiente**  $t$  y de la **variable dependiente o incógnita**  $x$

$$\Phi(t, \underbrace{x}_{x=x(t)}, x') = 0.$$

Lo mismo ocurre con la ecuación de orden superior

$$\Phi(t, x, x', x'', \dots, x^{(m)}) = 0.$$



**Ejercicio 2.** Define solución para una ecuación de orden  $m$ .

Para entender mejor todo esto vamos a ver algunos ejemplos por parejas,

**Ejemplo 4.** 1.  $x' = -2x$ ,  $x' = -2t$ , Las soluciones de la primera ecuación son  $x(t) = c e^{-2t}$ , las de la segunda  $x(t) = -t^2 + c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .

2.  $x'' + x = 0$ ,  $x'' + t = 0$ , en el primer caso son soluciones las funciones  $x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$ , en el segundo  $x(t) = -\frac{t^3}{6} + c_1 t + c_2$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

**Ejercicio 3.** Encuentra el error en el cálculo siguiente

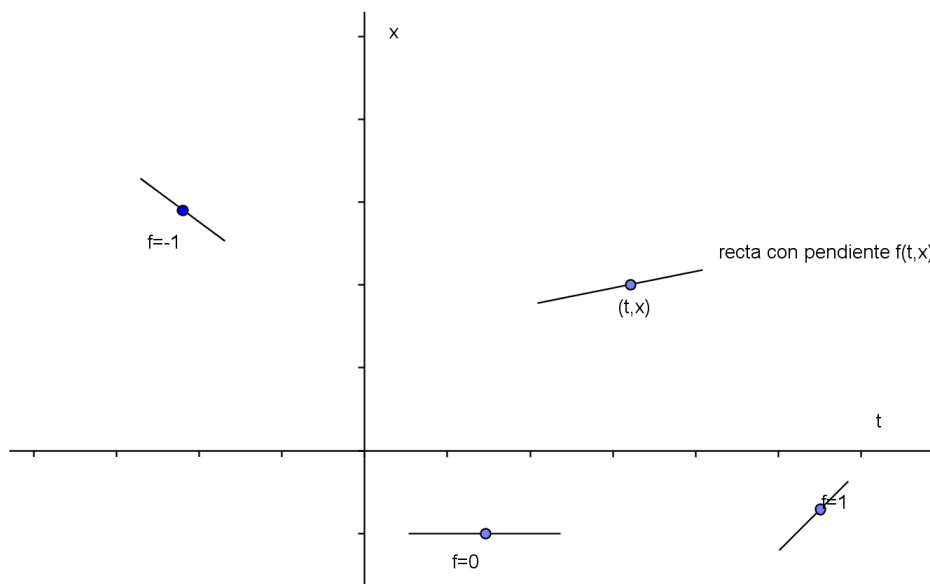
$$x' = 2x \Rightarrow x = -2 \int x \Rightarrow x = -x^2 + c.$$

## 4 Campo de direcciones

Consideremos una ecuación en forma normal

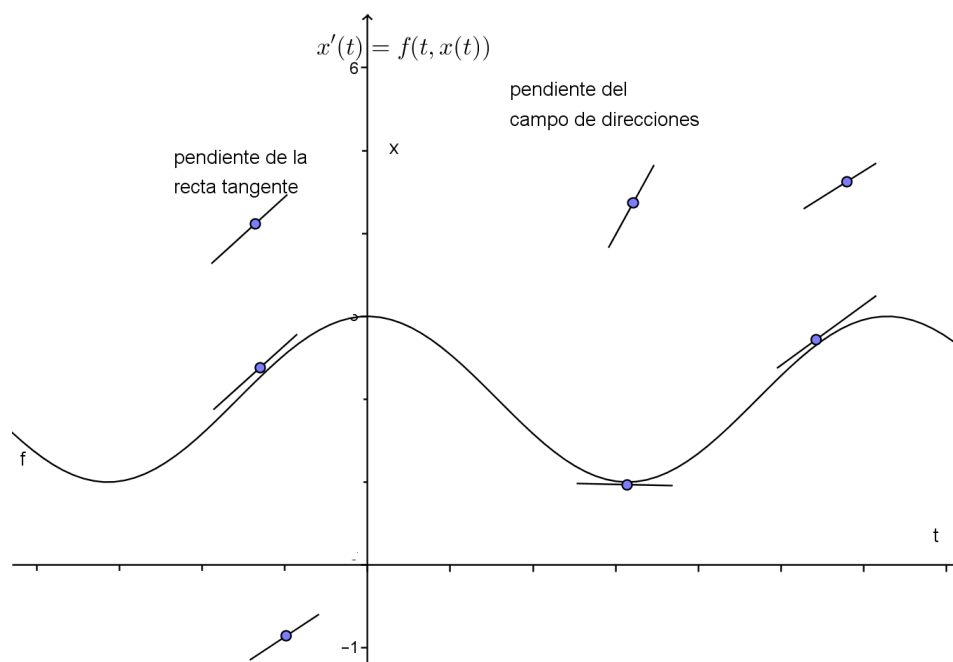
$$x' = f(t, x),$$

donde  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua. Vamos a dar una interpretación geométrica de la ecuación y las soluciones. Pensaremos en la función de dos variables  $f$  como una regla que asigna una dirección en cada punto del plano



Si tenemos en cuenta el significado geométrico de la derivada de la función  $x(t)$  podemos leer de la ecuación diferencial de manera geométrica.

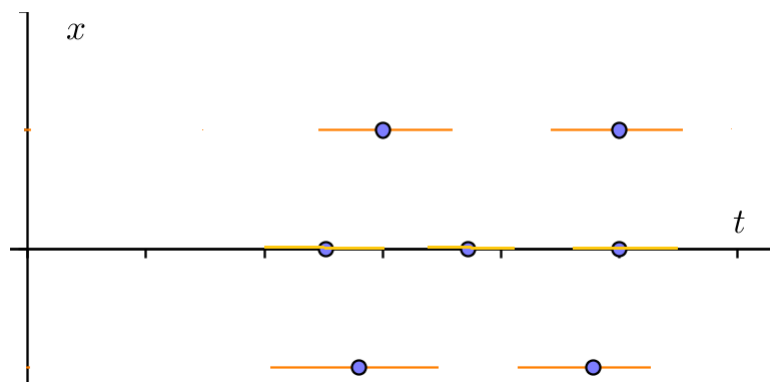
La recta tangente a la curva  $x = x(t)$  coincide con la recta dada por el campo de direcciones



Veamos algunos ejemplos:

**Ejemplo 5.** 1.  $x' = 0$

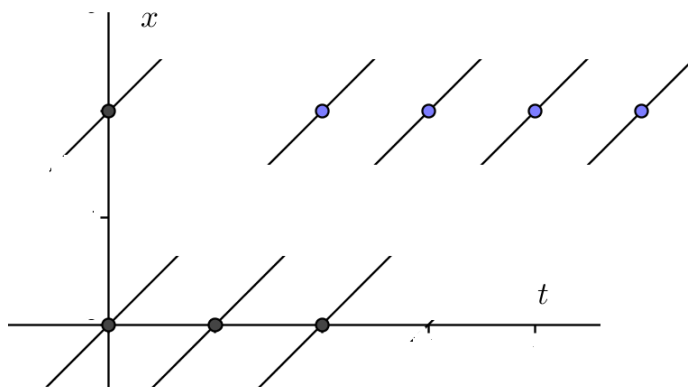
*Campo de direcciones: como  $f = 0$  se asigna a cada punto la recta de pendiente 0 (horizontal)*



Las soluciones  $x(t) = c$  son rectas horizontales

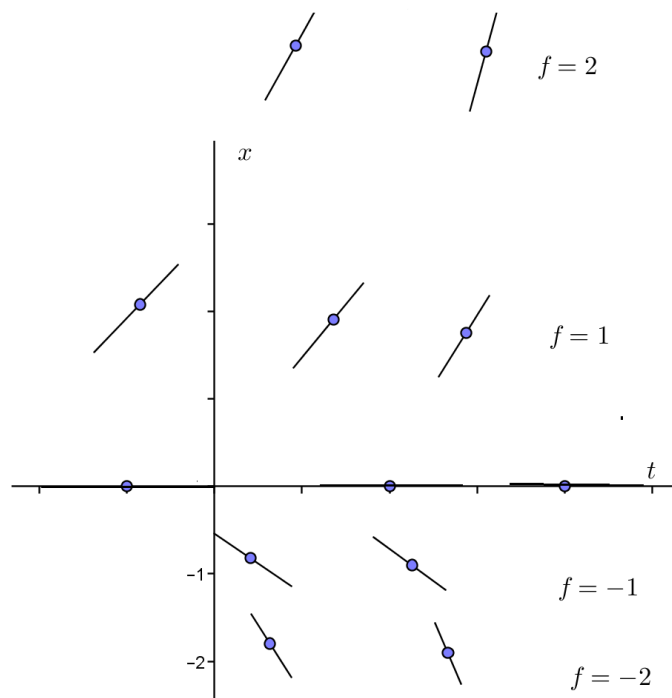
2.  $x' = 1$

Campo de direcciones: recta que pasa por el punto y hace  $45^\circ$  con el eje horizontal

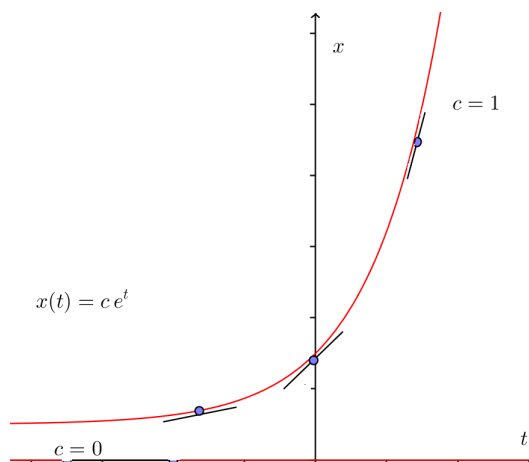


Las soluciones  $x(t) = t + c$  son las rectas de pendiente 1

3.  $x' = x$

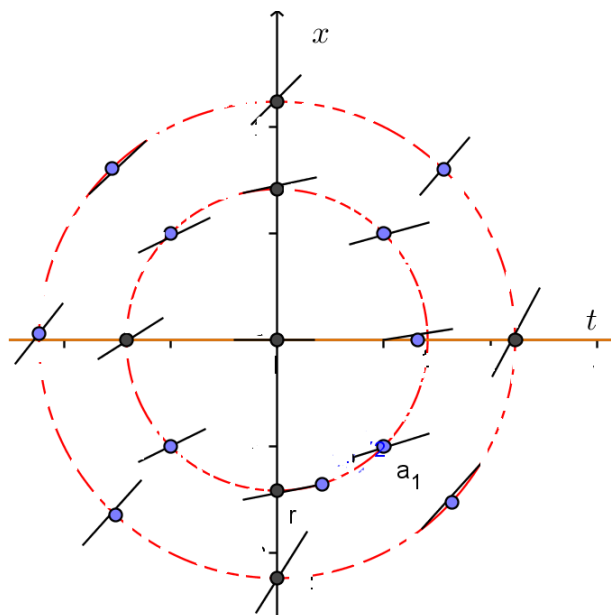


*Las direcciones son horizontales en el eje de las abscisas y se van abriendo a medida que suben por el eje de ordenadas*

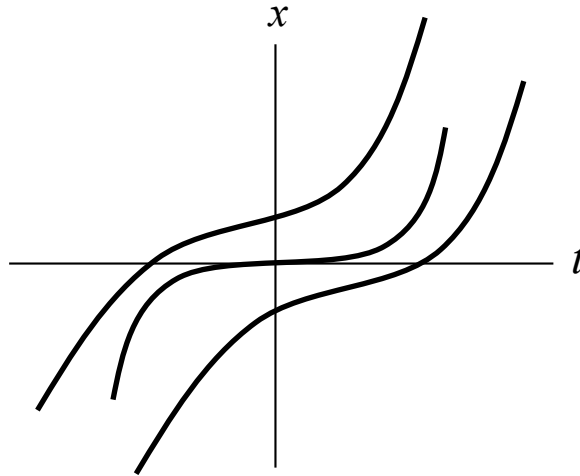


4.  $x' = t^2 + x^2$

*Observamos que la dirección de  $f(t, x) = t^2 + x^2$  depende de la distancia al origen del punto*



*Las soluciones crecen todo el tiempo*



*Este ejemplo es interesante porque no es posible obtener una fórmula explícita para las soluciones y sin embargo el campo de direcciones nos da una idea de su comportamiento.*

## 5 Derivación implícita

Estamos acostumbrados a tratar con funciones definidas en forma explícita  $x = x(t)$ , pero a veces la función está definida por una ecuación

$$F(t, x) = 0.$$

**Ejemplo.** Para cada  $t \in \mathbb{R}$  la ecuación polinómica

$$x^{101} + x + t = 0$$

tiene una única raíz real  $x = x(t)$ .

Supongamos que la función de dos variables

$$F : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (t, x) \rightarrow F(t, x)$$

es de clase  $C^1$  en un abierto  $\Omega$  y existe una función de una variable  $x : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que es de clase  $C^1$  en un intervalo  $I$

- $(t, x(t)) \in \Omega$  si  $t \in I$
- $F(t, x(t)) = 0$

Podemos aplicar la regla de la cadena y derivar esta última expresión

$$F(t, x(t)) = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{\partial F}{\partial x}(t, x(t)) x'(t) = 0.$$

En general, dada la ecuación  $F(t, x) = 0$ , será difícil saber en qué intervalo  $I$  está definida  $x(t)$  y cuándo es de clase  $C^1$ . El **teorema de la función implícita** nos da una respuesta local: si podemos encontrar  $(t_0, x_0) \in \Omega$  de manera que  $F(t_0, x_0) = 0$  y  $\frac{\partial F}{\partial x}(t_0, x_0) \neq 0$ , entonces existe una función  $x : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$  definida en algún intervalo abierto  $I$  que cumple  $t_0 \in I$ ,  $x(t_0) = x_0$  y

$$(t, x(t)) \in \Omega \text{ si } t \in I,$$

$$F(t, x(t)) = 0.$$

Además  $x(t)$  es la única solución continua de  $F(t, x) = 0$ ,  $x(t_0) = x_0$ , definida en  $I$ .

**Nota. 2.** Al principio la condición  $\frac{\partial F}{\partial x}(t_0, x_0) \neq 0$  puede resultar extraña, como la función  $\frac{\partial F}{\partial x}(t, x)$  es continua implica que  $\frac{\partial F}{\partial x}(t, x) \neq 0$  en un entorno de  $(t_0, x_0)$ . Es decir, podemos escribir una ecuación diferencial en forma explícita,

$$x' = -\frac{1}{\frac{\partial F}{\partial x}(t, x)} \frac{\partial F}{\partial t}(t, x).$$

**Ejemplo 6.** 1.  $x^{101} + x + t = 0$

En este caso  $F : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(t, x) = x^{101} + x + t$  es de clase  $C^1$  por tratarse de una función polinómica en dos variables. Sabemos que la ecuación

$$F(t, x) = 0$$

tiene una única solución para cada  $t \in I$ , en este caso  $I = \mathbb{R}$ . ¿Es  $x(t)$  de clase  $C^1$ ? Como  $\frac{\partial F}{\partial x}(t, x) = 101x^{100} + 1 > 0$  en todo punto  $(t, x) \in \mathbb{R}^2$  el teorema de la función implícita se puede aplicar en todos los puntos  $(t, x(t))$  y deducimos que  $x = x(t)$  está en  $C^1(\mathbb{R})$ .

Por derivación implícita ( $x = x(t)$ )

$$x^{101} + x + t \Rightarrow 101x^{100} x' + x' + 1 = 0$$

$$x' = \frac{-1}{101x^{100} + 1}.$$

Al principio la notación puede llevar a confusión, en los primeros cálculos  $t$  y  $x$  eran variables independientes, ahí tiene sentido  $\frac{\partial F}{\partial x}$ . Más tarde interpretamos  $x$  como variable dependiente.

2.  $x^2 + t^4 + 3 = 0$

Esta ecuación no define función implícita pues  $F(t, x) = x^2 + t^4 + 3$  es siempre positiva (no existe  $(t_0, x_0) \dots$ )

3.  $x^2 + t^4 - 3 = 0$

Hay dos soluciones  $x_1(t) = +\sqrt{3-t^4}$  y  $x_2(t) = -\sqrt{3-t^4}$ , ambas definidas en  $[-3^{1/4}, 3^{1/4}]$  ¿dónde son derivables?

4.  $x^3 - t^2 = 0$

Existe una única solución  $x(t) = t^{2/3}$  definida en todo  $\mathbb{R}$ , pero no es derivable en  $t_0 = 0$ . ¿Qué hipótesis del teorema falla?

$x^3 - t^2$  es  $C^1$  en  $\mathbb{R}^2$

$$(t_0, x_0) = (0, 0), \quad F(t_0, x_0) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t, x) = 3x^2, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(t_0, x_0) = 0.$$

La derivación implícita es válida si  $t \neq 0$

$$x^3 - t^2 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 x' - 2t = 0$$

$$x' = \frac{2t}{3x^2}.$$

## 6 Construcción de una ecuación diferencial a partir de soluciones

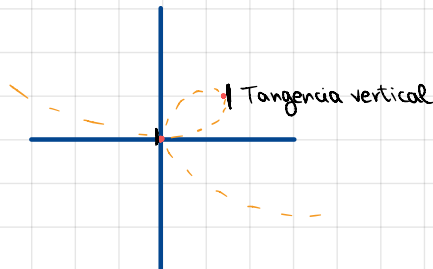
Es frecuente que las soluciones de una ecuación de primer orden se obtengan en forma implícita, como familia que depende de un parámetro,

$$F(t, x, c) = 0.$$

$$F(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0$$

$\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 - 3x \Rightarrow$  En los puntos de la curva donde es  $= 0$ , no se puede aplicar el T<sup>ma</sup> Función implícita

$$x = y^2 \Rightarrow y^6 + y^3 - 3y^3 = 0 \Rightarrow y^6 = 2y^3 \rightarrow \begin{matrix} y=0 \rightarrow (0,0) \\ y=2^{1/3} \rightarrow (\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2}) \end{matrix}$$



¿Qué ecuación diferencial verifica  $y(x)$ ?

Por la regla de la cadena:

$$3x^2 + 3y^2(x) \cdot y'(x) - 3y - 3xy' = 0$$

$$3(y^2 - x)y' = 3y - 3x^2$$

$$y'(x) = \frac{y - x^2}{y^2 - x}$$

$$x^3 + y^3 - \alpha xy = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 - \alpha x = 0 \Rightarrow \alpha x = 3y^2$$

$$x^3 + y^3 - \alpha xy = 0 \xrightarrow{\alpha \neq 0} \left(\frac{3y^2}{\alpha}\right)^3 + y^3 - 3y^3 = 0 \rightarrow \begin{matrix} y=0 \\ \left(\frac{3}{\alpha}\right)^3 y^3 = 2 \Rightarrow y = 2^{1/3} \cdot \frac{\alpha}{3} \end{matrix}$$

Por la regla de la cadena  $3x^2 + 3y^2 \cdot y' - \alpha y - \alpha xy' = 0$

$$(3y^2 - \alpha x)y' = \alpha y - 3x^2$$

$$y' = \frac{\alpha y - 3x^2}{3y^2 - \alpha x} = \frac{x^3 y - xy^4 - 3x^3 y}{3xy^3 - x^4 - xy^3} =$$

Consideremos una familia paramétrica de curvas:  $F(x,y,c) = 0$

¿E.d. asociada?  $F(x,y,c) = 0 \xrightarrow{\text{regla de la cadena}} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,c) + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,c) \cdot y' = 0$



Cada vez que fijamos el parámetro  $c$  obtenemos soluciones  $x = x(t)$ .

La misma ecuación puede llevar a fórmulas muy variadas para las soluciones.

**Ejemplo.**  $x' = -3x$

$$\begin{aligned} e^{3t} x + c = 0 &\rightarrow F_1 & x = -ce^{-3t} \\ \log x + 3t + c = 0 &\rightarrow F_2 & \log x = -c - 3t \Rightarrow x = e^{-c-3t} \\ x^2 - ce^{-6t} = 0 &\rightarrow F_3 \dots & x^2 = ce^{-6t} \Rightarrow x = \sqrt{c} \cdot e^{-3t} \end{aligned}$$

Nos planteamos ahora el problema inverso: dada una familia de soluciones  $F = 0$ , ¿Podemos encontrar la ecuación diferencial?

$$F(t, x(t), c) = 0 \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\substack{\text{derivación implícita} \\ x=x(t)}} \quad \frac{\partial F}{\partial t}(t, x, c) + \frac{\partial F}{\partial x}(t, x, c) x' = 0.$$

Esto no es todavía una ecuación diferencial, pues hay dependencia del parámetro  $c$ . La intentamos eliminar,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t}(t, x, c) + \frac{\partial F}{\partial x}(t, x, c) x' &= 0 \\ F(t, x, c) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \underbrace{\Phi}_{\text{eliminando } c}(t, x, x') = 0$$

**Nota. 3.** La justificación rigurosa de cada uno de los pasos anteriores requiere un buen manejo de las funciones implícitas. Nos conformaremos con usar el proceso de un modo formal; en cada caso concreto podemos comprobar luego que la ecuación es la correcta ¡ Esto también es riguroso !

**Ejemplo.** Construye una ecuación diferencial que admita la familia de soluciones  $e^{cx} - t^2 = 0$ ,  $c \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} e^{cx} - t^2 = 0 &\Rightarrow ce^{cx} x' - 2t = 0 \\ e^{cx} - t^2 = 0 &\Rightarrow cx = 2 \ln t \\ x' &= \frac{x}{t \ln t} \end{aligned}$$

$\begin{aligned} & \frac{2 \ln t}{x} e^{2 \ln t} x' - 2t = 0 \\ & \hookrightarrow \frac{2 \ln t}{x} t^2 x' = 2t \Rightarrow x' = \frac{x}{t \ln t} \end{aligned}$

**Ejercicio 4.** Estudia la familia  $e^{cx} - t^2 = 0$  expresando las funciones en forma explícita y comprueba que cumplen la ecuación diferencial.

Hay un proceso análogo para las ecuaciones de orden superior, dada una familia que depende de  $m$  parámetros

$$F(t, x, c_1, \dots, c_m) = 0$$

efectuamos derivación implícita  $m$  veces

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} x' = 0 \\ \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x} x' + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} (x')^2 + \frac{\partial F}{\partial t} x'' = 0 \\ \dots \end{cases}$$

e intentamos eliminar los  $m$  parámetros para llegar a una ecuación  $\Phi(t, x, x', x'', \dots, x^{(m)}) = 0$ .

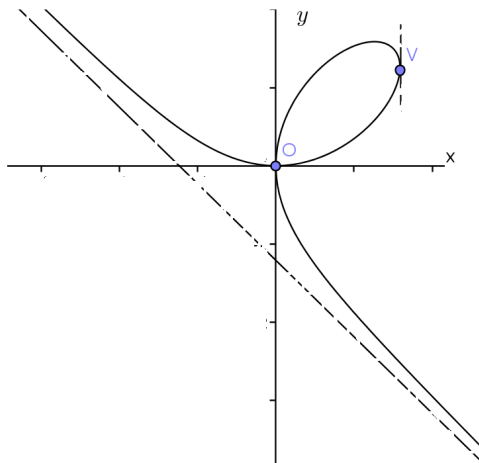
## 7 Problemas geométricos

Cambiamos la notación de la dinámica por la de la geometría. Trabajaremos en un plano con coordenadas  $(x, y)$ . Una curva en el plano se suele presentar por su ecuación en implícitas

$$F(x, y) = 0.$$

En la mayoría de los casos no es posible expresar la curva en explícitas de manera global  $y = f(x)$ , pero suele ser posible pasar a explícitas de manera local.

Consideremos por ejemplo el folium de **Descartes**



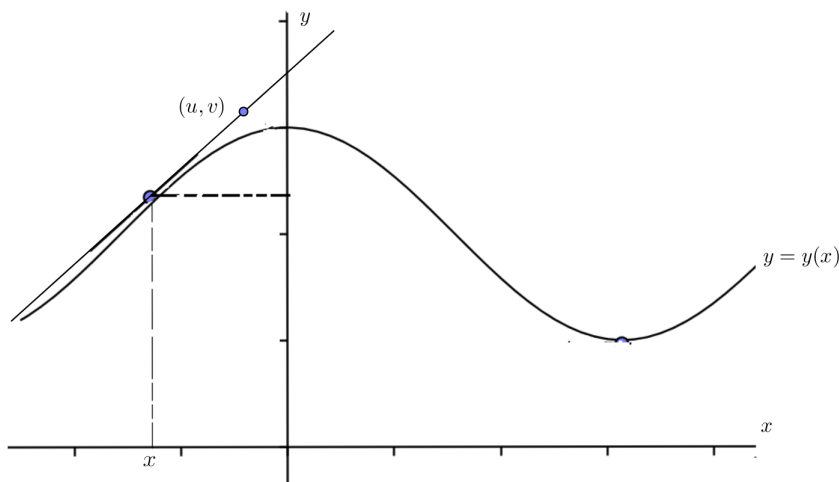
A la vista del dibujo se observa que es posible expresar la curva en explícitas  $y = y(x)$  en el entorno de cada uno de los puntos salvo 0 y  $V$ .

**Ejercicio 4.** Aplica el teorema de la función implícita a la ecuación  $F(x, y) = 0$  con  $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$  y encuentra los dos puntos en los que no es aplicable.

A partir de ahora trabajaremos con curvas en explícitas, así el análisis es más simple aunque solo se obtienen soluciones locales.

Partimos de una curva en explícitas  $y = y(x)$  donde  $x \in I$  (intervalo de  $\mathbb{R}$ ) y la función  $y$  es de clase  $C^1$ . Sabemos que en cada punto  $(x, y(x))$  la recta tiene pendiente  $y'(x)$ . Usamos la ecuación de la recta punto/pendiente para escribir la ecuación de la recta tangente

$$v - y(x) = y'(x)(u - x)$$

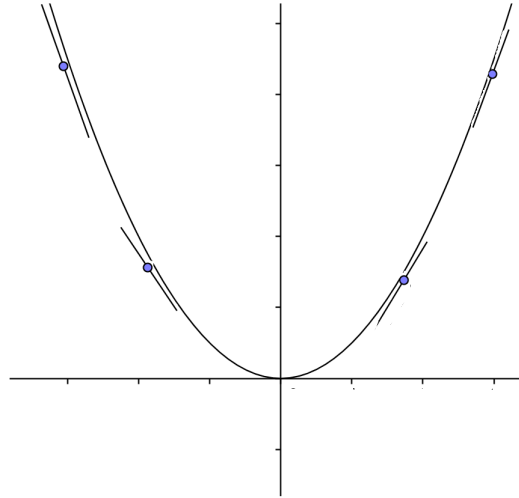


Es importante pensar en la notación: al variar  $x$  nos vamos moviendo por la curva

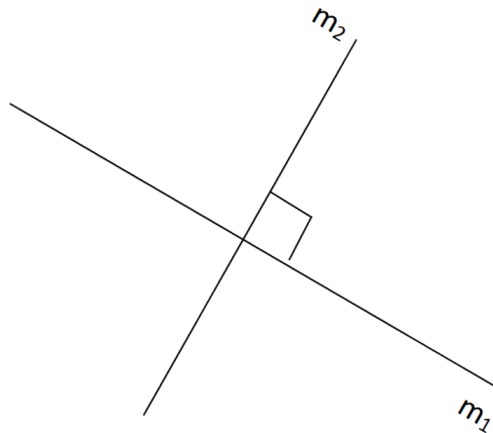
$$\underbrace{y}_{\text{variable dependiente}} = y \underbrace{(x)}_{\text{variable independiente}}$$

Si fijamos  $x$  y movemos  $u$  nos desplazamos por la recta tangente en el punto  $(x, y)$ , si variamos  $x$ ,  $u$  describimos el haz de todas las rectas tangentes a la curva.

**Ejemplo.** Parábola  $y = x^2$   
 $v - x^2 = 2x(u - x)$  Haz de rectas tangentes a la parábola



Recordamos que las pendientes de dos rectas perpendiculares cumplen  
 $m_1 \cdot m_2 = -1$



Así, la ecuación de la recta normal en  $(x, y(x))$  es

$$v - y(x) = -\frac{1}{y'(x)}(u - x).$$

Puede ser preferible

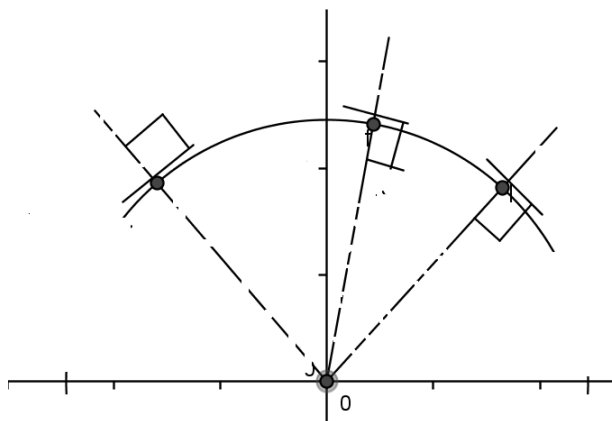
$$u - x = -y'(x)(v - y(x))$$

porque de esta forma incluimos el caso de tangente horizontal ( $y' = 0$ ).

En ocasiones aparece el problema de describir una curva a partir de alguna propiedad de las rectas normales o tangentes, esto suele llevar a una ecuación diferencial de primer orden

$$\Phi(x, y, y') = 0.$$

**Importante, hemos cambiado la notación, ahora  $x$  es la variable independiente,  $y = y(x)$  incógnita.** Veamos un **ejemplo**: buscamos una curva que pasa por el punto  $(1, 1)$  y todas las normales pasan por el origen



En cada punto  $(x, y(x))$  la recta normal es  $(u - x) = -y'(x)(v - y(x))$ , como pasa por el origen esta ecuación se debe cumplir para  $u = v = 0$ ,

$$-x = y'(x) y(x).$$

Llegamos a la ecuación diferencial  $y' y = -x$  o en forma normal,  $y' = -\frac{x}{y}$ . Para resolverla efectuamos el cálculo de la derivada de  $x^2 + y(x)^2$

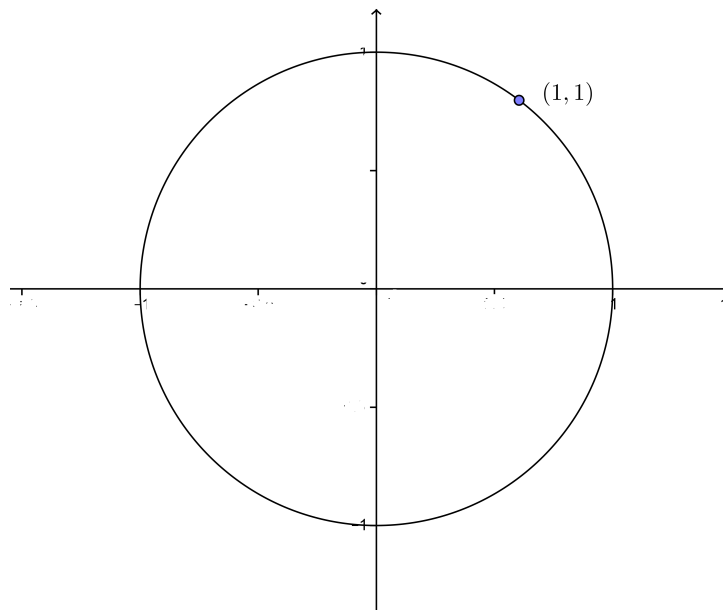
$$\frac{d}{dx}(x^2 + y(x)^2) = 2x + 2y(x) y'(x) = 0.$$

Al ser la derivada nula deducimos que la función es constante,

$$x^2 + y^2 = c.$$

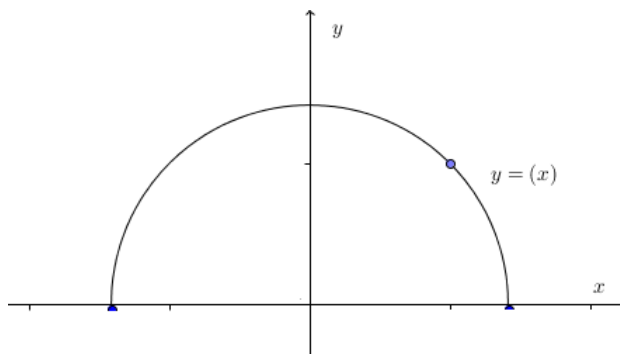
Como la curva pasa por el punto  $(1, 1)$ ,  $c = 2$ . Llegamos a la curva en implícitas

$$x^2 + y^2 = 2.$$



Como buscamos la curva en explícitas

$$y(x) = +\sqrt{2 - x^2}, x \in I = ] - \sqrt{2}, \sqrt{2}[.$$



La solución geométrica a nuestro problema es la circunferencia (pensemos en los radios de la rueda de una bicicleta), como hemos impuesto que la curva sea explícita nuestro análisis solo produce un arco de circunferencia.

## 8 Trayectorias ortogonales

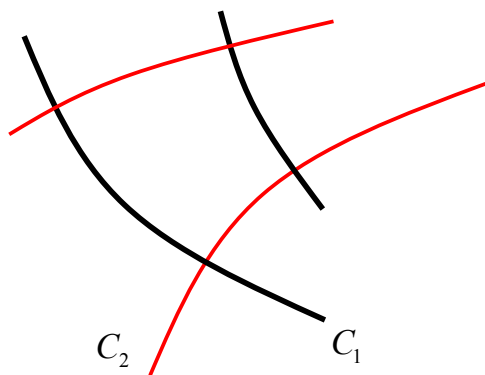
Dada una familia uniparamétrica de curvas

$$\Phi(x, y, c) = 0.$$

Construiremos otra familia

$$\Psi(x, y, c) = 0,$$

con la siguiente propiedad: si  $C_1$  es una curva de  $\Phi = 0$  y  $C_2$  es una curva de  $\Psi = 0$ , sus cortes son siempre ortogonales.



Veamos un método para calcular  $\Psi = 0$ .

(i) Construimos una ecuación diferencial para la primera familia

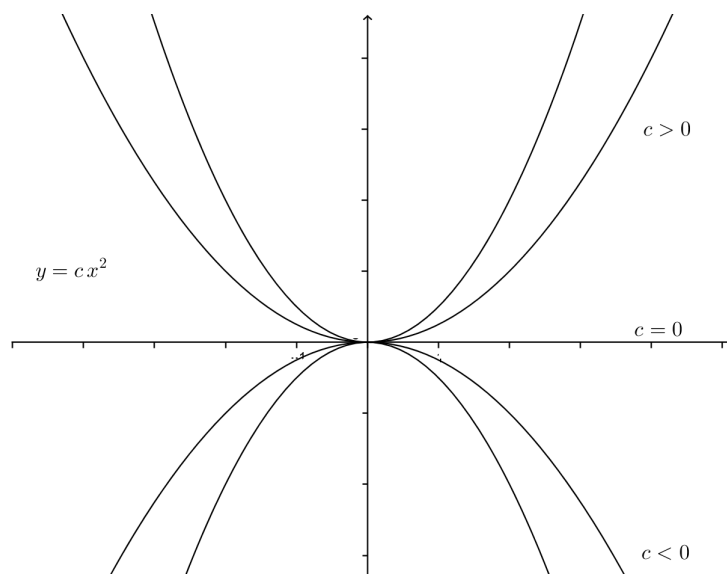
$$\left. \begin{array}{l} \Phi(x, y, c) = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y, c) + \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y, c) y' = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y' = f(x, y)$$

(ii) Ecuación diferencial para la segunda familia

$$y' = -\frac{1}{f(x, y)} \quad (\text{aquí usamos}) \quad m_1 \cdot m_2 = -1$$

Resolviendo,  $\Psi(x, y, c) = 0$ .

**Ejemplo.** Encuentra las trayectorias ortogonales a la familia de parábolas con eje vertical y vértice en el origen.



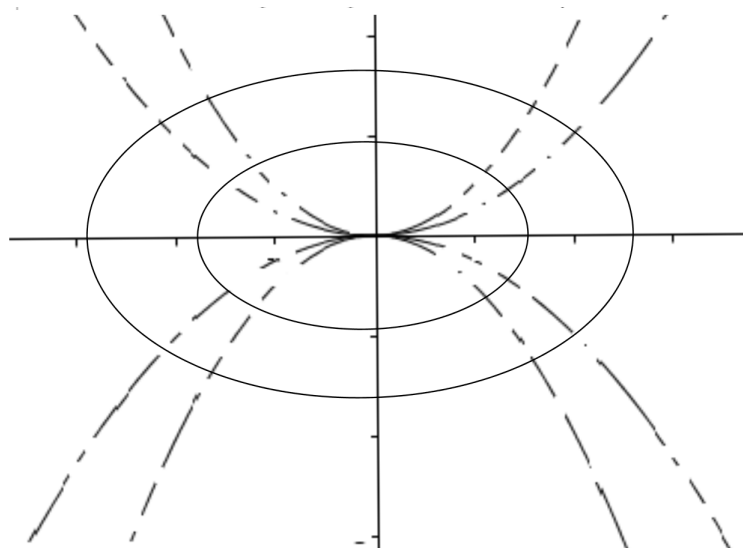
(i) Ecuación diferencial de  $\Phi(x, y, c) = y - cx^2 = 0$

$$\left. \begin{array}{l} y = cx^2 \\ y' = 2cx \end{array} \right\} \Rightarrow y' = \frac{2y}{x}$$

$\curvearrowright x y' = 2cx^2 \Rightarrow x y' = 2y$

(ii) Ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales  $y' = \frac{x}{-2y}$ ,  $2yy' + x = 0$ . Derivamos  $y(x)^2 + \frac{x^2}{2}$ ,  $\frac{d}{dx}\{y^2 + \frac{x^2}{2}\} = 2yy' + x = 0$   $y^2 + \frac{x^2}{2} = c$  familia de trayectorias ortogonales





Las soluciones en explícitas son de la forma

$$y(x) = +\sqrt{c - \frac{x^2}{2}}, \quad x \in ]-\sqrt{2c}, \sqrt{2c}[$$

o bien

$$y(x) = -\sqrt{c - \frac{x^2}{2}}, \quad x \in ]-\sqrt{2c}, \sqrt{2c}[$$

para cada  $c > 0$ .

## 9 Sistemas de ecuaciones diferenciales

Volvemos a la notación inicial y suponemos que  $t$  es la variable independiente, pero ahora suponemos que hay  $p$  incógnitas

$$x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_p = x_p(t)$$

y disponemos de  $q$  ecuaciones

$$\Phi_i(t, x_1, x_2, \dots, x_p, x'_1, x'_2, \dots, x'_p) = 0, \quad i = 1, \dots, q.$$

**Ejercicio 5.** Define solución de un sistema.

Normalmente se supone que hay tantas ecuaciones como incógnitas,  $p = q$ , y se esperan familias de soluciones que dependen de  $p$  parámetros. **Veamos un ejemplo con  $p = q = 2$**

$$x_1' = x_2, \quad x_2' = -x_1$$

Si  $(x_1(t), x_2(t))$  es solución entonces ambas coordenadas deben ser derivables, de la primera ecuación deducimos que  $x_1'(t) = x_2(t)$  y por tanto  $x_1(t)$  admite derivada segunda,

$$x_1' = x_2 \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{derivando}} \quad x_1'' = x_2' \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{segunda ecuación}} \quad x_1'' = -x_1.$$

Observamos que  $x(t)$  es solución de la ecuación de segundo orden  $x_1'' + x_1 = 0$ . Las soluciones de esta ecuación son de la forma

$$x_1(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t,$$

donde  $c_1$  y  $c_2$  son parámetros.

Usando ahora la primera ecuación encontramos las soluciones del sistema

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= c_1 \cos t + c_2 \sin t \\ x_2(t) &= x_1'(t) = -c_1 \sin t + c_2 \cos t \end{aligned} \right\} c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

## 9.1 Sistemas planos y ecuación de la órbitas

Trabajamos en el plano con coordenadas Cartesianas  $(x, y)$  y pensamos en las **ecuaciones paramétricas** de una curva

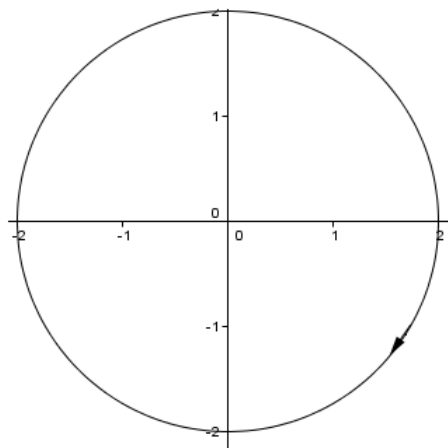
$$x = x(t) \quad y = y(t)$$

(una partícula se desplaza a lo largo de una curva y ocupa la posición  $(x(t), y(t))$  en el instante  $t$ ).

### Ejemplo 7.

$$x = 2 \cos t, \quad y = -2 \sin t$$

*Circunferencia con centro en el origen y radio 2 que está recorrida en sentido horario*



*Ecuaciones paramétricas:*  $x = 2 \cos t, y = -2 \sin t$

*Ecuación implícita:*  $x^2 + y^2 = 4$

*Ecuación explícita:*  $y = +\sqrt{4 - x^2}$  (también)  $y = -\sqrt{4 - x^2}$

Vamos a considerar un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas del tipo

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases} \quad f, g : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ continuas, } \Omega \text{ abierto de } \mathbb{R}^2 \quad (1)$$

Las soluciones se pueden interpretar como curvas paramétricas, las **órbitas** son los lugares geométricos recorridas por las soluciones. Es decir, si  $(x(t), y(t))$  es una solución definida en el intervalo  $I$ ,

$$\text{Órbita} = \{(x(t), y(t)) : t \in I\}.$$

### Continuación del Ejemplo 7.

$$\text{Sistema } (f = y, g = -x) \begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$$

$$\text{solución } (c_1 = 2, c_2 = 0) \begin{cases} x(t) = 2 \cos t \\ y(t) = -2 \sin t \end{cases}, t \in I = \mathbb{R}$$

$$\text{Órbita} = \{(2 \cos t, -2 \sin t) : t \in I = \mathbb{R}\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}.$$

Nos hacemos la siguiente pregunta: ¿qué ecuación diferencial cumplirá la órbita? Con más precisión, si expresamos la curva en explícitas,  $y = y(x)$ , (al menos de manera local) pretendemos encontrar una ecuación diferencial  $\Phi(x, y, y') = 0$  de la que sea solución. La respuesta la vamos a encontrar al usar de manera muy liberal la notación de diferenciales

Es importante observar que el sistema (1) está en forma normal y es autónomo ( $f, g$  no dependiente de  $t$ ).

1) Reescribimos el sistema:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = g(x, y) \quad (2)$$

2) Dividimos la segunda ecuación por la primera y **simplificamos**  $dt$ ,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}.$$

Esta es la ecuación, que también se puede escribir como

$$-g(x, y) dx + f(x, y) dy = 0.$$

En este curso no le vamos a dar sentido a esta expresión y por eso nos conformaremos con la ecuación (2).

**Ejemplo:**

$$\text{sistema } \begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}, \quad \text{ecuación de las órbitas } \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Esta ecuación ya nos apareció en el problema de la rueda.

¿Son correctos estos cálculos? ¿Qué significa la igualdad  $\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dx}$ ?

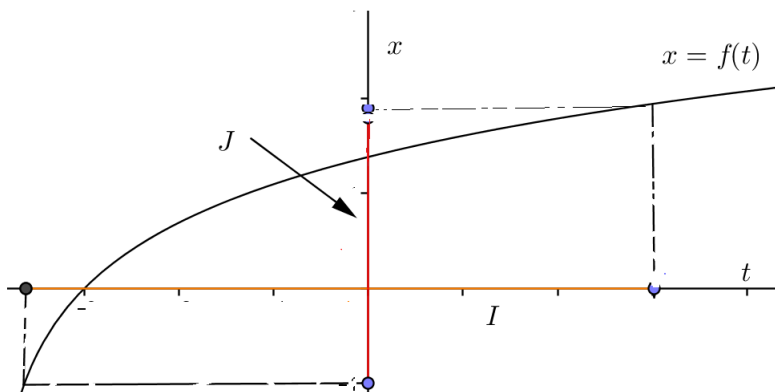
Para responder a estas preguntas debemos recordar algunas propiedades de las funciones inversas.

## 9.2 Derivada de la función inversa

Suponemos que  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f = f(t)$  es una función derivable que cumple

$$f'(t) > 0 \quad \text{si } t \in I.$$

Entonces  $f$  es estrictamente creciente y por tanto inyectiva



Definimos  $J = f(I)$

**Ejercicio.** Demuestra que  $J$  es un intervalo. Además,  $J$  es abierto si lo es  $I$ .

Pensemos ahora que  $f$  es una función de  $I$  a  $J$ , entonces es biyectiva y tiene inversa.

$$f : I \rightarrow J, x = f(t), \quad g = f^{-1}, g : J \rightarrow I, t = g(x)$$

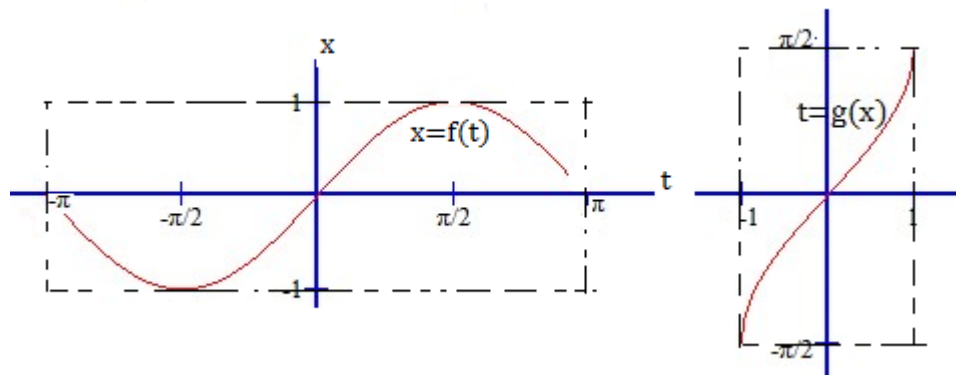
se cumple

$$g(f(t)) = t, t \in I, \quad f(g(x)) = x \text{ si } x \in J,$$

además  $g$  es derivable y su derivada cumple

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}, x \in J \quad \left( \frac{dx}{dt} = f'(t) \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{f'(t)} \right)$$

**Ejemplo.**  $f(t) = \sin t, t \in I = ]-\pi, \pi[$ . Se cumple  $f'(t) = \cos t > 0$  en  $I$



$$g(x) = \arcsen x, x \in J = ]-1, 1[, g'(x) = \frac{1}{f'(t)} = \frac{1}{\cos(\arcsen x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Se ha elegido la raíz cuadrada positiva porque el coseno es positivo en  $]-\pi, \pi[$

**Nota. 4.** Hay una discusión similar para el caso  $f'(t) < 0, \forall t \in I$ .

### De nuevo la ecuación de las órbitas

Volvemos al problema de justificar la ecuación de las órbitas y suponemos que  $x = \varphi(t), y = \psi(t)$  es una solución del sistema

$$x' = f(x, y), \quad y' = g(x, y).$$

Esta solución estará definida en un intervalo  $I$  y exigimos que en ese intervalo se cumpla la condición

$$f(\varphi(t), \psi(t)) > 0, \forall t \in I.$$

Esta condición es bastante natural ya que en la ecuación de las órbitas dividimos por  $f$ . También podríamos suponer

$$f(\varphi(t), \psi(t)) < 0, \forall t \in I.$$

De la primera ecuación del sistema deducimos que

$$\varphi'(t) = f(\varphi(t), \psi(t)) > 0, \text{ en } I.$$

Podemos encontrar una función inversa de  $\varphi$ , a la que llamaremos  $\mathcal{T} : J \rightarrow I$ ,  $t = \mathcal{T}(x)$ .

Observamos que en particular se cumple

$$\varphi(\mathcal{T}(x)) = x \quad \text{si } x \in J.$$

Podemos pasar de la curva en paramétricas  $x = \varphi(t), y = \psi(t)$  a la curva en explícitas  $y = y(x)$ . Para ello despejamos  $t$  en la primera ecuación y la sustituimos en la segunda

$$y = \psi(\mathcal{T}(x)).$$

Ya tenemos la ecuación en explícitas de la órbita.

Como  $\psi$  y  $\mathcal{T}$  son funciones derivables también lo es su composición

$$\begin{array}{ccccc} J & \xrightarrow{\mathcal{T}} & I & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathcal{T}(x) & \mapsto & \psi(\mathcal{T}(x)) \end{array}$$

De las definiciones previas se sigue la identidad

$$(x, y(x)) = (\varphi(\mathcal{T}(x)), \psi(\mathcal{T}(x))), \quad x \in J.$$

Como  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  es solución del sistema se cumple  $(\varphi(t), \psi(t)) \in \Omega$  para cada  $t \in I$ . Por tanto también se cumplirá  $(x, y(x)) \in \Omega$  si  $x \in J$ .

Por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} y'(x) &= \psi'(\mathcal{T}(x)) \mathcal{T}'(x) \quad \underbrace{\quad}_{\text{derivada de la inversa } \mathcal{T}=\varphi^{-1}} \quad \psi'(\mathcal{T}(x)) \frac{1}{\varphi'(\mathcal{T}(x))} \\ &\underbrace{\quad}_{\text{solución del sistema}} \quad \frac{g(\varphi(\mathcal{T}(x)), \psi(\mathcal{T}(x)))}{f(\varphi(\mathcal{T}(x)), \psi(\mathcal{T}(x)))} \quad \underbrace{\quad}_{\psi(\mathcal{T}(x))=x, \quad y(x)=\psi(\mathcal{T}(x))} \quad \frac{g(x, y(x))}{f(x, y(x))} \end{aligned}$$

Concluimos que  $y = y(x)$  definida en  $J$ , es solución de

$$y' = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}.$$

Revisamos estos argumentos en el **ejemplo** anterior

$$\left. \begin{array}{l} x' = y \\ y' = -x \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} x = 2 \cos t = \varphi(t) \\ y = -2 \sin t = \psi(t) \end{array}$$

Escogemos un intervalo  $I$  donde  $f(\varphi(t), \psi(t))$  tenga un signo; por ejemplo,  $I = ]0, \pi[$ ,  $f(\varphi(t), \psi(t)) = \psi(t) = -2 \operatorname{sen} t < 0$ . Resolvemos  $x = \varphi(t)$ ,  $x = 2 \cos t$ ,  $t = \mathcal{T}(x)$ ,  $\mathcal{T}(x) = \arccos(\frac{x}{2})$ ,  $x \in J = ]-2, 2[$ . Se usa la inversa parcial del coseno,  $\arccos : J^* \rightarrow I$ ,  $J^* = ]-1, 1[$ .

La curva en explícitas

$$\begin{aligned} y = y(x) &= \psi(\mathcal{T}(x)) = -2 \operatorname{sen}(\mathcal{T}(x)) \\ &= -2 \operatorname{sen} \arccos\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= -2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} = -\sqrt{4 - x^2} \end{aligned}$$

