TEMA 6.- Leyes de los Grandes Números. Teorema Central del Límite

Asignatura: PROBABILIDAD

Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

(3er Curso - 1er semestre)

©Prof. Dr. José Luis Romero Béjar

Departamento de Estadística e Investigación Operativa
Facultad de Ciencias (Despacho 10)

Outline

Outline

Recordatorio

Convergencia puntual de sucesiones de funciones

Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones reales definida sobre un conjunto Ω. Se dice que f_n **converge puntualmente** a otra función f real definida sobre el miso conjunto Ω si: $\forall\omega\in\Omega$ y $\forall\varepsilon>0$, $\exists n_0=n_0(\omega,\varepsilon)\in\mathbb{N}$ tal que $\forall n\geq n_0$ se tiene que $|f_n(\omega)-f(\omega)|<\varepsilon$.

Convergencia uniforme de sucesiones de funciones

Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones reales definida sobre un conjunto Ω. Se dice que f_n **converge uniformemente** a otra función f real definida sobre el miso conjunto Ω si: $\forall\varepsilon>0$, $\exists n_0\in\mathbb{N}$ tal que $\forall n\geq n_0(\varepsilon)$ se tiene que $|f_n(\omega)-f(\omega)|<\varepsilon\ \forall\omega\in\Omega$.

Obervaciones

- La convergencia uniforme es una generalización de la puntual cuando n_0 es independiente de ω.
- La **convergencia uniforme implica convergencia puntual**.
- La **convergencia puntual no implica, necesariamente, la convergencia uniforme**. (Pensar en la sucesión de funciones $f_n=\omega^n$ para $\omega\in[0,1]$).

Convergencia de sucesiones de variables aleatorias

Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y X variables aleatorias sobre el mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ con funciones de distribución $\{F_{X_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, y F_X, respectivamente. Se definen los siguientes **tipos de convergencia**:

- **Convergencia casi segura**:

$$X_n \to^{c.s.} X, \quad n \to \infty \;\Leftrightarrow\; P\left[\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right] = 1.$$

- **Convergencia en probabilidad**:

$$X_n \to^{P} X, \quad n \to \infty \;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon > 0,\ \lim_{n\to\infty} P\left[\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \leq \varepsilon\right] = 1.$$

- **Convergencia en Ley o en distribución**:

$$X_n \to^{L} X, \quad n \to \infty \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x), \quad \forall x \in C(F_X),$$

  siendo $C(F_X)$ el conjunto de puntos de continuidad de F_X.

Observaciones

1. En teoría de la medida la **convergencia casi segura** es equivalente al concepto de **convergencia en casi todo punto**.
2. En teoría de la medida la **convergencia en probabilidad** es equivalente al concepto de **convergencia para la medida**.
3. La convergencia en probabilidad indica que fijado un $\varepsilon > 0$ hay un subconjunto de Ω con una probabilidad tan cercana a uno como se quiera en el que la distancia entre X_n y X se puede hacer menor que ε sin más que tomar n suficientemente grande.

Algunos resultados

1. $X_n \rightarrow^P X \Leftrightarrow X_n - X \rightarrow^P 0$.
2. $X_n \rightarrow^P X \Rightarrow X_n - X_m \rightarrow^P 0 \ \forall n, m \in \mathcal{N}$.
3. $aX_n + bY_n \rightarrow^P aX + bY$ con $X_n \rightarrow^P X$, $Y_n \rightarrow^P Y$, con $a, b \in \mathcal{R}$.
4. $X_n \rightarrow^P X$, $Y_n \rightarrow^P Y \Rightarrow X_n Y_n \rightarrow^P XY$.
5. $X_n \rightarrow^P X \Rightarrow X_n Y \rightarrow^P XY$ con Y una variable aleatoria cualquiera.
6. $X_n \rightarrow^P X \Rightarrow g(X_n) \rightarrow^P g(X)$ con g cualquier función continua en los reales.
7. $X_n \rightarrow^{c.s.} X \ \Rightarrow \ X_n \rightarrow^P X \ \Rightarrow \ X_n \rightarrow^L X$.
8. $X_n \rightarrow^L c \ (c \in \mathbb{R}) \Rightarrow \ X_n \rightarrow^P c$.

Teorema de continuidad para funciones generatrices de momentos

Sean $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y X variables aleatorias sobre el mismo espacio de probabilidad. Supongamos que **existen las funciones generatrices de momentos** M_{X_n}, $n \in \mathbb{N}$, y M_X **sobre un intervalo común** de $\mathbb{R}$ con límites finitos o infinitos, conteniendo al cero, i.e., sobre $(-a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$. Se tiene entonces que:

$$\text{Si } M_{X_n}(t) \to M_X(t), \quad n \to \infty, \quad \forall t \in (-a, b) \Rightarrow X_n \to^{L} X.$$

Ejemplo

Sea X_n, $n \in \mathbb{N}$, una sucesión de variables aleatorias con f.m.p. dada por $P[X_n = 1] = \frac{1}{n}$ y $P[X_n = 0] = 1 - \frac{1}{n}$.

Comprobar que la familia de funciones generatices de momentos de X_n, $M_{X_n}(t)$, converge puntualmente a la función constante 1, que es la función generatriz de momentos de una v.a., X, degenerada en 0 y por tanto aplicando este teorema de continuidad se tiene que $X_n \to^{L} X$.

Outline

Leyes de los grandes números

Sean X_n, $n \in \mathbb{N}$, variables aleatorias sobre el mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ **independientes**. Adicionalmente, sea S_n la variable aleatoria que define las **sumas parciales** de la sucesión $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, i.e.,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad n \geq 1.$$

Se consideran dos sucesiones de números reales $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $b_n \uparrow \infty$.

- **Ley débil de los grandes números respecto $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.** Se dice que la sucesión aleatoria $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisface la ley débil respecto a $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} \to^{P} 0.$$

- **Ley fuerte de los grandes números respecto $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.** Se dice que la sucesión aleatoria $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisface la ley fuerte respecto a $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} \to^{c.s.} 0.$$

Leyes de los grandes números

A continuación se formulan resultados que proporcionan **condiciones suficientes** o **condiciones necesarias y suficientes** para que una sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **satisfaga la anteriores leyes** respecto a sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ apropiadas.

Teorema 1 Ley débil de Bernoulli

Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según una Bernoulli con parámetro p, i.e., $X_n \sim \mathcal{B}(1,p)$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\frac{S_n - E[S_n]}{n} \rightarrow^P 0, \text{ y en consecuencia } \frac{S_n}{n} \rightarrow^P p.$$

Lema 0 Desigualdad de Chebychev

Sea X una v.a. con esperanaza finita $E[X] < \infty$, entonces $\forall \varepsilon > 0$ se tiene que:

$$P[\{|X| \geq \varepsilon\}] = P[\omega : |X(\omega)| \geq \varepsilon] \leq \frac{E[X^2]}{\varepsilon^2}.$$

Observaciones:

- Si se considera la v.a. $X - E[X]$ se obtiene la versión clásica de esta desigualdad,

$$P[\{|X - E[X]| \geq \varepsilon\}] = P[\omega : |X(\omega) - E[X]| \geq \varepsilon] \leq \frac{E[(X - E[X])^2]}{\varepsilon^2} = \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}.$$

- Si se toman complementarios también se puede escribir como sigue:

$$P[\{|X - E[X]| < \varepsilon\}] = P[\omega : |X(\omega) - E[X]| < \varepsilon] \geq 1 - \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}.$$

Teorema 2 Ley débil de Khintchine

Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas y existe $E[X_n]=\mu$, para cualquier $n\in\mathbb{N}$, entonces

$$\frac{S_n - E[S_n]}{n} \to^P 0, \text{ y en consecuencia } \frac{S_n}{n} \to^P \mu.$$

Demostración: se derivará para el caso particular en el que existe $E[X_n^2]$, para cualquier $n\in\mathbb{N}$. A partir de la desigualdad de Chebychev, para cualquier $\varepsilon>0$, teniendo en cuenta que X_i, $i=1,\dots,n$, son independientes y con la misma distribución, y por tanto,

$$\mathbf{Var}(S_n) = \mathbf{Var}(S_n - E[S_n]) = \mathbf{Var}\left(\underbrace{\sum_{i=1}^n X_i}_{S_n}\right) = \sum_{i=1}^n Var(X_i) = n\mathbf{Var}(X_1),$$

Idénticamente distribuidas

$E[(S_n-E[S_n])^2]$

$E[(S_n-E[S_n]-E[S_n-E[S_n]])^2]$

$E[(S_n-E[S_n]-E[S_n]+E[E[S_n]])^2]$

$E[(S_n-E[S_n]-E[S_n]+E[S_n])^2]$

$E[(S_n-E[S_n])^2]=Var(S_n)$

Desigualdad de Chebyshev

$$P\left(\left|\frac{S_n-E[S_n]}{n}\right|\geq\varepsilon\right) \leq \frac{\mathbf{Var}(S_n-E[S_n])}{\varepsilon^2 n^2} = \frac{n\mathbf{Var}(X_1)}{n^2\varepsilon^2} \to 0, \quad n\to\infty.$$

$$\frac{Var(X_1)}{n\varepsilon^2} = \frac{Var(X_1)}{\varepsilon^2}\cdot\frac{1}{n}$$

$\varepsilon^2 \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{n} \to 0$

Por lo de antes

En particular, dado que $E[S_n]=n\mu$, se obtiene $S_n/n \to^P \mu$, $n\to\infty$.

La ley débil de Bernoulli, se obtiene entonces considerando $\mu=p$.

Outline

Teorema 3 Primer teorema límite (Bernoulli)

Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según una Bernoulli con parámetro p, i.e., $X_n \sim \mathcal{B}(1,p)$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\frac{S_n - E[S_n]}{n} \to^L 0.$$

Demostracion: Se obtiene de forma directa del Corolario 2, dado que la convergencia casi segura implica la convergencia en Ley. En realidad es porque la ley débil es igual y la convergencia en probabilidad $\Rightarrow$ Convergencia en ley de distribución

Teorema 4 Segundo teorema límite (De Moivre y Laplace)

Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según una Bernoulli con parámetro p, i.e., $X_n \sim \mathcal{B}(1,p)$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}} = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \to^L Z \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Observación

A continuación se formulará un resultado sobre **el problema clásico de límite central**, que consiste en derivar condiciones suficientes que garanticen, que para una sucesión de variables aleatorias independientes, sobre el mismo espacio probabilístico base $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, se dan los siguientes límites:

$$\begin{aligned} \frac{S_n - E[S_n]}{n} &\to^L 0, \quad \exists E[X_n], \ \forall n \in \mathbb{N} \\ \frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{\operatorname{Var}(S_n)}} &\to^L Z \sim \mathcal{N}(0,1), \quad \exists E[X_n^2], \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{1}$$

Se considera el siguiente lema que se aplicará en la demostración del **Teorema límite de Lévy** que posteriormente se enuncia.

Lema 1

Sea $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números complejos tal que $c_n \to c$, $n \to \infty$. Entonces

$$\left(1 + \frac{c_n}{n}\right)^n \to \exp(c), \quad n \to \infty.$$

Teorema 5 Teorema límite de Lévy

Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Se tienen los siguientes límites en ley:

(i) Si $\exists E[X_1] \Rightarrow \exists E[X_n]$, $\forall n$, se tiene $\frac{S_n - E[S_n]}{n} \to^L 0$.

(ii) Si $\exists E[X_1^2] \Rightarrow \exists E[X_n^2]$, $\forall n$, se tiene $\frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}} \to^L Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Teorema límite de Levy (Demostración)

La afirmación (i) se obtiene como consecuencia directa del Teorema 2 o bien, del Teorema 3.

La afirmación (ii) se demostrará para el caso particular, donde existe la función generatriz de momentos de las variables aleatorias de la sucesión $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, definidas, todas ellas, sobre un intervalo común.

Se considera la secuencia

$$S_n^* = \frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}} = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma},$$

$\text{Var}(S_n) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \text{Var}(X_i) = n\text{Var}(X_1) = n\sigma^2$

donde $\sigma = \sqrt{\text{Var}(X_n)}$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Se asume que $\mu = E[X_n] = 0$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$. En caso contrario, se considera $\widetilde{X}_n = X_n - \mu$, $n \in \mathbb{N}$.

Dado que X_n, $n \in \mathbb{N}$, son independientes e idénticamente distribuidas, con $\mu = 0$, la función generatriz de momentos

$$M_{S_n^*}(t) = \left[M_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)\right]^n,$$

donde $M_{X_1} = M_{X_n} = M_X$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se considera ahora el desarrollo de Taylor de segundo orden de $M_X = E[\exp(tX)]$, $t \in (-a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}_+$, que relaciona las derivadas en cero de la función generatriz de momentos con los momentos de X. Es decir,

$m_2 - 0^2 = \text{Var}(X)$

$$\begin{aligned} M_X(t) &= 1 + \frac{dM_X(0)}{dt}t + \frac{1}{2}\frac{d^2M_X(0)}{dt^2}t^2 + t^2 e_2(t) \\ &= 1 + \frac{\sigma^2}{2}t^2 + t^2 e_2(t) = 1 + t^2\left[\frac{\sigma^2}{2} + e_2(t)\right], \quad \lim_{t\to 0} e_2(t) = 0. \end{aligned}$$

$$E[e^{tS_n^*}] = E\left[e^{\frac{tS_n - tn\mu}{\sqrt{n}\sigma}}\right] = E\left[e^{\frac{t\sum_{i=1}^{n} X_i - tn\mu}{\sqrt{n}\sigma}}\right] \underset{\uparrow}{=} E\left[e^{\frac{tX_1}{\sqrt{n}\sigma}}\right]\cdot\ldots\cdot E\left[e^{\frac{tX_n}{\sqrt{n}\sigma}}\right]\cdot \underbrace{E\left[e^{\frac{-tn\mu}{\sqrt{n}\sigma}}\right]}_{e^{-\frac{tn\mu}{\sqrt{n}\sigma}} \xrightarrow[\mu=0]{} e^0 = 1} = E\left[e^{\frac{tX_1}{\sqrt{n}\sigma}}\right]\cdot\ldots\cdot \underbrace{E\left[e^{\frac{tX_n}{\sqrt{n}\sigma}}\right]}_{M_{X_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)} = \left[M_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)\right]^n$$

Son independientes

Porque están idénticamente distribuidas

Teorema límite de Levy (Demostración continuación)

Se considera ahora la correspondiente aproximación para $M_{S_n^*}(t)$. Más concretamente,

$$M_{S_n^*}(t) = \left(1 + \left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)^2 \left[\frac{\sigma^2}{2} + e_2\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)\right]\right)^n = \left(1 + \frac{t^2}{n}\left[\frac{1}{2} + \frac{e_2\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)}{\sigma^2}\right]\right)^n$$

Además,

$$t^2\left[\frac{1}{2} + \frac{e_2\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)}{\sigma^2}\right] \to \frac{t^2}{2}, \quad n \to \infty.$$

Aplicando el Lema 1, fijado un t, siendo

$$\{c_n\} \xrightarrow[n\to+\infty]{} c = \frac{t^2}{2}$$

$$\left\{\left(1+\frac{c_n}{n}\right)^n\right\} \longrightarrow \exp(c)$$

$$c_n = t^2\left[\frac{1}{2} + \frac{e_2\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)}{\sigma^2}\right], \quad c = \frac{t^2}{2}$$

se obtiene

$$M_{S_n^*}(t) \to \exp\left(\frac{t^2}{2}\right), \quad n \to \infty,$$

Si $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$M_Z(t) = e^{t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2}} \underset{\substack{\mu=0\\ \sigma=1}}{=} e^{\frac{t^2}{2}}$$

que corresponde a la función generatriz de momentos de una variable aleatoria normal con media cero y varianza uno. Por el teorema de continuidad para funciones generatrices de momentos se obtiene que

$$S_n^* \to^L Z \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Observación

El nombre del **teorema del límite central** se debe a que **proporciona una buena aproximación en el centro** de la distribución, **pero no tan buena en las colas** de la misma.

Último comentario

¡Se acabó ...!