Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada

Variable Compleja I, Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Convocatoria extraordinaria

Ejercicio 1. (**2.5 puntos**) Sea U un entorno reducido de un punto $a \in \mathbb{C}$ y supongamos que $f \in \mathcal{H}(U)$ tiene un polo en a. Probar que existe $R > 0$ de modo que $\mathbb{C} \setminus D(0, R) \subset f(U)$.

Ejercicio 2. (**2.5 puntos**) Integrando una conveniente función sobre la poligonal $[-R, R, R+i\pi, -R+i\pi, -R]$, con $R \in \mathbb{R}^+$, calcular la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\, dx.$$

Ejercicio 3. (**2.5 puntos**) Sea f una función entera verificando que $f\big(f(z)\big) = f(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. ¿Qué se puede afirmar sobre f?

Ejercicio 4. (**2.5 puntos**) Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sea $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$f_n(z) = \int_n^{n+1} \frac{\cos(t+z)}{1+t^2}\, dt \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

a) Probar que $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

b) Probar que la serie de funciones $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge en $\mathbb{C}$ y que su suma es una función entera.

Granada, 29 de junio de 2018

Ejercicio 4. (**2.5 puntos**) Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sea $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$f_n(z) = \int_n^{n+1} \frac{\cos(t+z)}{1+t^2}\, dt \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

a) Probar que $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

b) Probar que la serie de funciones $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge en $\mathbb{C}$ y que su suma es una función entera.

a) $\sigma : [n, n+1] \longrightarrow \mathbb{C}$ (arco)

$\sigma(t) = t$

$\sigma'(t) = 1$

$$\int_n^{n+1} \frac{\cos(t+z)}{1+t^2}\, dt = \int_\sigma \frac{\cos(t+z)}{1+t^2}\, dt$$

Sea $\phi : [n, n+1] \times \mathbb{C}$ dada por $\phi(t,z) = \dfrac{\cos(t+z)}{1+t^2}$. Es una función continua y $\phi_t \in H(\mathbb{C})$. Por el T^{ma} de holomorfía de integrales dependientes de un parámetro, $f_n \in H(\mathbb{C})$ $\forall n \in \mathbb{N}$