Variable Compleja I
Tema 7: Teorema local de Cauchy

Teoremas de Cauchy

Esquema común a todos los teoremas de Cauchy

$$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}, \quad f \in \mathcal{H}(\Omega), \quad \gamma \text{ camino cerrado en } \Omega$$

Hipótesis adicional

$$\Downarrow$$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

Ejercicio: Sea $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$. Probar que $\int_{C(a,r)} \frac{1}{w-a}\,dw = 2\pi i$

Preliminares

Descomposición de un segmento

$$z_0, z_2 \in \mathbb{C}, \quad \alpha \in]0,1[, \quad z_1 = (1-\alpha)z_0 + \alpha z_2$$

- $[z_0, z_1, z_2]^* = [z_0, z_2]^*$
- $\displaystyle\int_{[z_0,z_1]} f(z)\,dz + \int_{[z_1,z_2]} f(z)\,dz = \int_{[z_0,z_2]} f(z)\,dz \qquad \forall f \in C\big([z_0,z_2]^*\big)$

Triángulos

- Triángulo de vértices $a,b,c \in \mathbb{C}$: $\displaystyle\Delta(a,b,c) = \bigcup_{z\in[b,c]^*} [a,z]^*$
- $\Delta(a,b,c) = \big\{ \alpha a + \beta b + \rho c : \alpha, \beta, \rho \in [0,1],\ \alpha+\beta+\rho = 1 \big\}$
- Mínimo conjunto convexo que contiene a a,b,c. También es compacto
- Diámetro de un conjunto. $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$, A acotado:

$$\operatorname{diam} A = \sup \big\{ |w-z| : z,w \in A \big\}$$

$\varphi : K \longrightarrow \mathbb{C}$

$\varphi(\alpha,\beta,\rho) = \alpha a + \beta b + \rho c$

φ continua $\Rightarrow \varphi(K) = \Delta(a,b,c)$ compacto

$K = \{(\alpha,\beta,\rho) \in [0,1]^3 / \alpha+\beta+\rho = 1\}$

- Caso de un triángulo: $\operatorname{diam} \Delta(a,b,c) = \max \big\{ |b-a|, |c-b|, |a-c| \big\}$

Teorema de Cauchy para el triángulo

Teorema de Cauchy-Goursat

$$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}, \qquad f \in \mathcal{H}(\Omega)$$

$$a, b, c \in \mathbb{C}, \quad \Delta(a,b,c) \subset \Omega$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{[a,b,c,a]} f(z)\,dz = 0$$

Observación adicional

El teorema anterior sigue siendo cierto si se supone solamente que $f : \Omega \to \mathbb{C}$ verifica:

$$\exists z_0 \in \Omega : f \in \mathcal{H}\big(\Omega \setminus \{z_0\}\big) \quad \text{y} \quad f \text{ es continua en } z_0$$

Esta versión del teorema parece más general,
¡¡ pero no lo es !! como se verá más adelante

Teorema local de Cauchy

Dominios estrellados

$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}$ es un dominio estrellado cuando:

$$\exists \alpha \in \Omega \; : \; [\alpha, z]^* \subset \Omega \quad \forall z \in \Omega$$

- Convexo $\Longrightarrow$ Estrellado
- $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$ es un dominio estrellado, pero no es convexo

Teorema de Cauchy para dominios estrellados

Ω dominio estrellado, $\quad f \in \mathcal{H}(\Omega)$

Entonces f tiene una primitiva, es decir:

$$\int_\gamma f(z)dz = 0 \text{ para todo camino cerrado } \gamma \text{ en } \Omega$$

Observación adicional

Nuevamente basta suponer que existe $z_0 \in \Omega$ tal que $f \in \mathcal{H}\big(\Omega \setminus \{z_0\}\big)$ y f es continua en z_0

Fórmula integral de Cauchy

Lema

Para $a \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}^+$ y $z \in D(a,r)$ se tiene:

$$\int_{C(a,r)} \frac{dw}{w-z} = 2\pi i$$

Fórmula de Cauchy para una circunferencia

Sean $\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$

Dados $a \in \Omega$ y $r \in \mathbb{R}^+$ tales que $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$, se tiene:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw \qquad \forall z \in D(a,r)$$