José Alberto Hoces Castro 3º DGIIM

DEMOSTRAR QUE EL SIGUIENTE PROGRAMA CALCULA LA SUMA DE LOS FACTORIALES DE LOS N PRIMEROS NATURALES

```
i = 1; suma = 0; f = 1;
while(i != n+1) do
    begin
    suma = suma + f;
    i = i + 1;
    f = f * i;
    end
enddo
```

Hemos de probar la postcondición $\{suma = \sum_{i=1}^{n} i!, f = n!\}$, siendo nuestra precondición inicial $\{i=1; suma=0; f=1\}$. Tras ver las 2 primeras líneas del código, añadimos a la precondición inicial la condición de parada del bucle y dos expresiones que forman el invariante, pues tras cada iteración del bucle siguen siendo ciertas:

$$\{i=1;\ suma=0;\ f=1;\ \underbrace{i \neq n+1}_{\text{Condición de parada del bucle}};\ \underbrace{suma=\sum_{j=1}^{i-1}\left(\prod_{k=1}^{j} k\right),\ f=\prod_{j=1}^{i} j}_{\text{Invariante}}\}$$

La definición de f está clara ya que f e i empiezan valiendo 1 y en cada iteración se hace $f=f*i$ tras incrementar i en una unidad, luego estamos multiplicando los naturales desde el 1 hasta el i.

La definición de suma se deduce de la anterior, pues en cada iteración se hace $suma = suma + f$. El resto de la demostración va a consistir en ir línea a línea aplicando el axioma de asignación para probar que el invariante es el que se ha dicho:

$suma = suma + f$

$$\left\{ i \neq n+1,\ suma = \sum_{j=1}^{i-1}\left(\prod_{k=1}^{j} k\right),\ f = \prod_{j=1}^{i} j \right\}^{suma}_{suma-f} =$$

$$= \left\{ i \neq n+1,\ suma - f = \sum_{j=1}^{i-1}\left(\prod_{k=1}^{j} k\right),\ f = \prod_{j=1}^{i} j \right\} =$$

$$= \left\{ i \neq n+1,\ suma = \sum_{j=1}^{i}\left(\prod_{k=1}^{j} k\right),\ f = \prod_{j=1}^{i} j \right\}$$

$i = i + 1$

$$\left\{ i \neq n+1,\ suma = \sum_{j=1}^{i}\left(\prod_{k=1}^{j} k\right),\ f = \prod_{j=1}^{i} j \right\}^{i}_{i-1} =$$

$$= \left\{ i \neq n+2,\ suma = \sum_{j=1}^{i-1}\left(\prod_{k=1}^{j} k\right),\ f = \prod_{j=1}^{i-1} j \right\}$$

$f = f * i$

$$\left\{ i \neq n+2,\ suma = \sum_{j=1}^{i-1}\left(\prod_{k=1}^{j} k\right),\ f = \prod_{j=1}^{i-1} j \right\}^{f}_{f/i} =$$

$$= \left\{ i \neq n+2,\ suma = \sum_{j=1}^{i-1}\left(\prod_{k=1}^{j} k\right),\ f/i = \prod_{j=1}^{i-1} j \right\} =$$

$$= \left\{ i \neq n+2,\ suma = \sum_{j=1}^{i-1}\left(\prod_{k=1}^{j} k\right),\ f = \prod_{j=1}^{i} j \right\}$$

Por lo tanto, al llegar al final de cada iteración end y del bucle enddo, el invariante permanece igual como hemos visto, y por ello se cumple la regla de la iteración. Así, tras n iteraciones:

$$\left\{ i = n+1,\ suma = \sum_{j=1}^{i-1}\left(\prod_{k=1}^{j} k\right),\ f = \prod_{j=1}^{i-1} j \right\} =$$

Sustituimos i por n+1

$$\left\{ suma = \sum_{j=1}^{n}\left(\prod_{k=1}^{j} k\right),\ f = \prod_{j=1}^{n} j \right\} = \underbrace{\left\{ suma = \sum_{i=1}^{n} i!,\ f = n! \right\}}_{\text{Que es justo la postcondición que queríamos probar}}$$