Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada

Variable Compleja I, Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Convcatoria de septiembre

Ejercicio 1. (**2.5 puntos**) Sea Ω un dominio de $\mathbb{C}$ y $f,g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Supongamos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(z) = g^n(z)$ para todo $z \in \Omega$. Probar que existe $\lambda \in \mathbb{C}$, con $\lambda^n = 1$, tal que $f(z) = \lambda g(z)$ para todo $z \in \Omega$.

Ejercicio 2. (**2.5 puntos**) Integrando una conveniente función sobre la poligonal $[-R, R, R+2\pi i, -R+2\pi i, -R]$ con $R > 0$, calcular la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{x/2}}{e^x+1}\, dx.$$

Ejercicio 3. (**2.5 puntos**) Sean Ω un abierto de $\mathbb{C}$, $a \in \Omega$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$. Supongamos que f tiene un polo en el punto a. Probar que el polo es simple si, y sólo si, f es inyectiva en $D(a,r) \setminus \{a\}$ para algún $r > 0$ con $D(a,r) \subset \Omega$.

Ejercicio 4. (**2.5 puntos**) Para cada $n \in \mathbb{N}$ se considera la función $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por

$$f_n(z) = \int_0^n \sqrt{t} e^{-tz}\, dt \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

a) Probar que f_n es una función entera y calcular su desarrollo en serie de Taylor centrado en el origen.

b) Estudiar la convergencia de la sucesión $\{f_n\}$ en el dominio $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \,:\, \operatorname{Re} z > 0\}$.

c) Deducir que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, donde $f(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{t} e^{-tz}\, dt$ para todo $z \in \Omega$.

Granada, 6 de septiembre de 2017