Relación 1

Resolución numérica de ecuaciones y sistemas no lineales

Versión 22/3/2021 (soluciones)

1. Se considera el problema de encontrar las soluciones reales de la ecuación $x + \dfrac{1}{2} - 2\sin(\pi x) = 0$ en el intervalo $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

   a) ¿Se puede utilizar el método de bisección para resolver dicho problema tomando $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ como intervalo inicial? ¿Por qué? En caso afirmativo, calcule las tres primeras iteraciones de dicho método.

   b) Halle una cota del error que se comete si consideramos la última de las iteraciones del apartado anterior como el valor de la solución del problema dado.

   c) ¿Cuántas iteraciones del método de bisección son necesarias para garantizar un error menor que 10^{-5}?

Solución.

a),b) La función es continua y $f(\frac{1}{2}) = -1 < 0$, $f(\frac{3}{2}) = 4 > 0 \Rightarrow$ se cumple Bolzano en el intervalo $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$. Por tanto se puede aplicar Bisección.

La tabla muestra en detalle las tres primeras iteraciones.

n	a_n $\boxed{-}$	b_n $\boxed{+}$	m_n	$f(m_n)$		Cota de e_n
0	0.5	1.5	1	$\boxed{+}$	1.5	0.5
1	0.5	1	0.75	$\boxed{-}$	−0.164214	0.25
2	0.75	1	0.875	$\boxed{+}$	0.609633	0.125
3	0.75	0.875	0.8125			0.0625

¿Por qué no aparece $f(m_3)$ en la tabla?

c) $e_n \leq \frac{b-a}{2^{n+1}} < 10^{-5} \Rightarrow 2^{n+1} > 100\,000 \Rightarrow n > -1 + \log_2 100\,000 = 15.6096 \Rightarrow n \geq 16.$

2. Se quiere calcular el inverso de un número real $c > 0$ sin efectuar divisiones. Para ello, se elige un valor $x_0 > 0$ y se considera el método iterativo dado por $x_{n+1} = x_n(2 - cx_n)$, $n \geq 0$.

   a) Demuestre que la sucesión generada por dicho método converge a $\frac{1}{c}$ si y sólo si $0 < x_0 < \frac{2}{c}$. Sugerencia: comience demostrando por inducción que $r_n = r_0^{2^n}$ $\forall n \geq 0$ siendo $r_n = 1 - cx_n$.

   b) Demuestre que la convergencia referida en a) es al menos cuadrática. ¿Cuál es la constante asintótica del error?

   c) Compruebe que el método iterativo propuesto es el método de Newton-Raphson aplicado a una cierta ecuación $f(x) = 0$ cuya única raíz es $\frac{1}{c}$.

Solución.

a) En primer lugar $r_1 = 1 - cx_1 = 1 - cx_0(2 - cx_0) = (1 - cx_0)^2 = r_0^2$, luego para r_1 se cumple; ahora supuesto que se cumple hasta $r_n = r_0^{2^n}$ tenemos

$$r_{n+1} = 1 - cx_{n+1} = 1 - cx_n(2 - cx_n) = (1 - cx_n)^2 = r_n^2 = r_0^{2^{n+1}}.$$

Finalmente, $\lim x_n = \frac{1}{c} \Leftrightarrow \lim r_n = 0 \Leftrightarrow |r_0| < 1 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow 0 < x_0 < \frac{2}{c}$.

b) La función de iteración asociada es $g(x) = x(1 - 2cx)$; su derivada $g'(x) = 2(1 - cx)$ cumple $g'(\frac{1}{c}) = 0$. Además $g''(x) = -2c$ luego $C = |\frac{1}{2}g''(s)| = c$.

c) Tras ensayar diversas funciones sencillas como $f(x) = cx - 1$, $f(x) = x - \frac{1}{c}$, al final sale con $f(x) = c - \frac{1}{x}$.

3. Demuestre que la ecuación $x^3 - 2x^2 - 5 = 0$ tiene una única solución en el intervalo $[1,4]$. Elija una semilla x_0 que permita hallar, usando el método de Newton-Raphson, una aproximación a dicha solución y justifique dicha elección. Calcule las dos primeras iteraciones.

Solución. Comprobemos TCG-NR.

- La función $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5$ es continua por ser polinómica y presenta un cambio de signo en $[1,4]$, luego hay al menos una solución s.
- La derivada $f'(x) = 3x^2 - 4x$ se anula en 0 y $\frac{4}{3}$, por lo que f no es monótona en $[1,4]$. De hecho f decrece en $[1, \frac{4}{3}]$ y crece en $[\frac{4}{3}, 4]$.
- Como $f(1) < 0$ y el mínimo de f en $[1,4]$ es $f(\frac{4}{3}) < 0$, s no puede estar en $[1, \frac{4}{3}]$ y por tanto es única en $[1,4]$, concretamente en $[\frac{4}{3}, 4]$ donde f sí es monótona.
- Otra manera: mediante Sturm $\alpha = \max\{\frac{2}{1}, \frac{5}{2}\} = 5 \Rightarrow$ todas las raíces reales están en $[-6,6]$

	$x =$	-6	6	0	1	4
$P_0 =$	$P = x^3 - 2x^2 - 5$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$
$P_1 =$	$P' = 3x^2 - 4x$	$+$	$+$	0	$-$	$+$
$P_2 =$	$\frac{8}{9}x + 5$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$P_3 =$	$-\frac{7515}{9}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
	cambios de signo:	2	1	2	2	1

  luego hay exactamente una raíz real y está en $[1,4]$.

- $f''(x) = 6x - 4 > 0$ en $[\frac{4}{3}, 4]$.
- Para $x_0 = 4$ es $f(x_0)f''(x_0) > 0$ y por tanto se cumple el TCG-NR.
- $x_1 = 3.15625$, $x_2 = 2.694659946838$, $x_3 = 2.69064744807$.

4. Deduzca la fórmula para el cálculo de las iteraciones del método de la secante a partir de su interpretación gráfica.

Solución. Es un ejercicio simple de geometría. Se considera la recta que pasa por $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ y $(x_n, f(x_n))$, y se calcula su intersección con el eje X, llamándola x_{n+1}.

5. Dada la ecuación $x - \frac{1}{2}\cos x = 0$, se pide:

   a) Demuestre que tiene una única solución real en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$.

   b) Describa un método de iteración funcional, distinto del método de Newton-Raphson, que permita aproximar dicha solución, razonando la respuesta.

   c) Realice las dos primeras iteraciones del método descrito en el apartado anterior.

   d) ¿Cuántas iteraciones es preciso realizar para garantizar un error menor que 10^{-2} en el método dado en el apartado b)?

Solución.

a) $f(x) = x - \frac{1}{2}\cos x$ es continua, $f(0) < 0$, $f(\frac{\pi}{2}) > 0$ luego cumple Bolzano, y $f'(x) = 1 + \frac{1}{2}\sin x > 0$ en $[0, \frac{\pi}{2}]$ luego la solución es única en $[0, \frac{\pi}{2}]$.

b) La función de iteración $g(x) = \frac{1}{2}\cos x$ verifica $|g'(x)| = \left|-\frac{1}{2}\sin x\right| \leq \frac{1}{2} < 1$ donde convenga, luego produce un método localmente convergente.

c) $x_0 = \frac{\pi}{4} = 0.78539816339745$, $x_1 = 0.35355339059327$, $x_2 = 0.44599360142868$, $x_3 = 0.44998595330254$.

d) Como $L \leq \frac{1}{2}$ entonces

$$|e_n| \leq \frac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0| \leq \frac{1}{2^{n-1}}|x_1 - x_0|.$$

Por tanto $\frac{1}{2^{n-1}}|x_1 - x_0| \leq 10^{-2} \Rightarrow 2^{n-1} \geq |x_1 - x_0|10^2 \Rightarrow n \geq 1 + \log_2(|x_1 - x_0|10^2) = 6.43244\ldots \Rightarrow n = 7$ iteraciones necesarias.

6. Usando algún resultado sobre convergencia para los métodos de iteración funcional, demuestre el teorema de convergencia local para ceros simples del método de Newton-Raphson.

Solución. Para la ecuación $f(x) = 0$ con $f \in \mathcal{C}^2$, el método NR equivale a usar la función de iteración $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \in \mathcal{C}^1$. Si s es un cero simple de f, entonces $f'(s) \neq 0$, con lo cual $g(s) = s$ y $g'(s) = 0$. Se cumplen las condiciones del TCL para funciones de iteración, c0n lo que se asegura la convergencia local.

7. Para resolver la ecuación $f(x) = 0$ se considera el método $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{m}$, donde $m \neq 0$. Se pide

   a) Interprete gráficamente el cálculo de las iteraciones según dicho método.

   b) ¿Qué condiciones para la función f, para la constante m y para el valor inicial x_0 asegurarían unicidad de solución y convergencia a dicha solución del método considerado?

Solución.

a) La recta que pasa por $(x_n, f(x_n))$ y $(x_{n+1}, 0)$ tiene la ecuación (continua)

$$\frac{x - x_{n+1}}{x_n - x_{n+1}} = \frac{y - 0}{f(x_n) - 0} \quad \text{de donde} \quad y = (x - x_{n+1})\frac{f(x_n)}{x_n - x_{n+1}}$$

y por tanto su pendiente es

$$\frac{f(x_n)}{x_n - x_{n+1}} = \frac{f(x_n)}{x_n - x_n + \frac{f(x_n)}{m}} = m.$$

b) $g(x) = x - \frac{f(x)}{m} \Rightarrow g'(x) = 1 - \frac{f'(x)}{m}$. Entonces $|g'(s)| < 1 \Leftrightarrow |1 - \frac{f'(s)}{m}| < 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{f'(s)}{m} < 2$. Para convergencia local, x_0 debe estar suficientemente cerca de s.

8. Localice un intervalo $[a, b]$ en el que se encuentren todas las soluciones reales de la ecuación $2x^4 - 3x^2 + 3x - 4 = 0$. Tomando $x_0 = -2$ como semilla, calcule las tres primeras iteraciones del método de Newton-Raphson usando el algoritmo de Horner.

Solución.

a) Sturm: $\alpha = \text{máx}\{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}\} = 2 \Rightarrow$ todas las raíces reales están en $[-3, 3]$

	$x =$	-3	3	0
$P_0 =$	$P = 2x^4 - 3x^2 + 3x - 4$	$+$	$+$	$-$
$P_1 =$	$P' = 8x^3 - 6x + 3$	$-$	$+$	$+$
$P_2 =$	$\frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{4}x + 4$	$+$	$+$	$+$
$P_3 =$	$\frac{28}{3}x + 29$	$+$	$+$	$+$
$P_4 =$	$-\frac{39941}{1568}$	$-$	$-$	$-$
	cambios de signo:	3	1	2

luego hay dos raíces reales, una en $[-3, 0]$ y otra en $[0, 3]$.

b) $x_0 = -2$; $x_1 = -1.7959183673469$; $x_2 = -1.7389702353362$; $x_3 = -1.7389562564519$.

9. Sea $s = \sqrt{3}$. Para calcular s se considera el método de iteración funcional

$$x_{n+1} = g(x_n) \quad \text{con} \quad g(x) = \frac{ax + x^3}{3 + bx^2}.$$

Halle los valores de a y b para que, partiendo de una semilla x_0 suficientemente próxima a s, se asegure la convergencia al menos cuadrática. Para tales valores, calcule x_3 para $x_0 = 1$.

Solución. Se tiene que cumplir $g(s) = s$ y $g'(s) = 0$. Esto lleva a un sistema de 2 ecuaciones en (a, b) con dos soluciones: $(9, 3)$ y $(-3, -1)$. La segunda no es viable porque $g'(s)$ sería indeterminado. Por tanto $g(x) = \frac{9x+x^3}{3+3x^2}$. Con esto y $x_0 = 1$ sale $x_1 = 1.6666666666667$, $x_2 = 1.7320508075689$ y $x_3 = 1.7320508075689$.

10. Se desea aplicar un método iterativo del tipo $x_{n+1} = px_n + q\frac{7}{x_n^2} + r\frac{7^2}{x_n^5}$ para obtener $\sqrt[3]{7}$. Halle los valores de p, q, r para que la convergencia local del método sea al menos cúbica. Realice dos iteraciones partiendo de $x_0 = 2$.

Solución. Sean $s = \sqrt[3]{7}$, $g(x) = px_n + q\frac{7}{x_n^2} + r\frac{7^2}{x_n^5}$. Se tiene que cumplir que $g(s) = s$, $g'(s) = g''(s) = 0$. Esto lleva al sistema lineal

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cuya única solución es $p = q = \frac{5}{9}$, $r = -\frac{1}{9}$.

$x_0 = 2$, $x_1 = 1,9131944444444$, $x_2 = 1.9129311827807$, $x_3 = 1.9129311827724$.

11. Sea $f(x) = x^5 + x^2 - 1$.

   a) ¿Cuántas raíces tiene la ecuación $f(x) = 0$ en el intervalo $[0, 1]$?

   b) Pruebe que el método de iteración funcional

$$x_{n+1} = g(x_n) = \sqrt{\frac{1}{x_n^3 + 1}}$$

   converge en el intervalo $[0, 1]$ a una raíz de $f(x) = 0$.

Solución.

a) $f(0) = -1$, $f(1) = 1$, $f'(x) = 5x^4 + 2x > 0$ salvo en $x = 0$.

Por Sturm: $\alpha = 1 \Rightarrow$ todas las raíces reales están en $[-2, 2]$

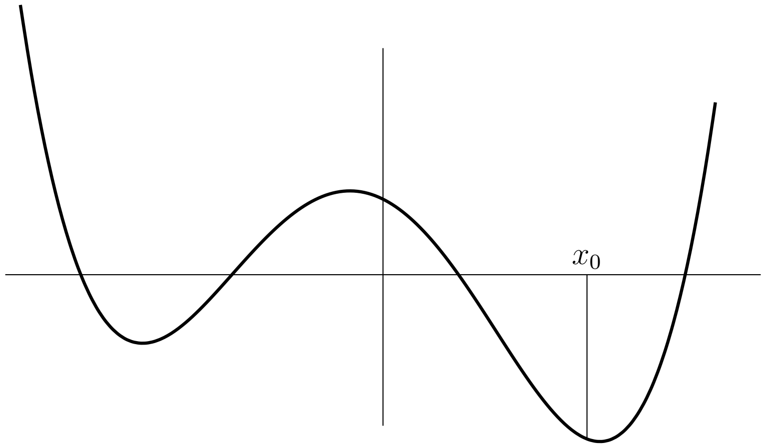
	$x =$	-2	0	1	2
$P_0 =$	$P = x^5 + x^2 - 1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$P_1 =$	$P' = 5x^4 + 2x$	$+$	0	$+$	$+$
$P_2 =$	$-\frac{3}{5}x^2 + 1$	$-$	$+$	$+$	$-$
$P_3 =$	$-2x - \frac{125}{9}$	$-$	$-$	$-$	$-$
$P_4 =$	$\frac{3017}{108}$	$+$	$+$	$+$	$+$
	cambios de signo:	3	3	2	2

luego sólo hay una raíz real y está en $[0, 1]$.

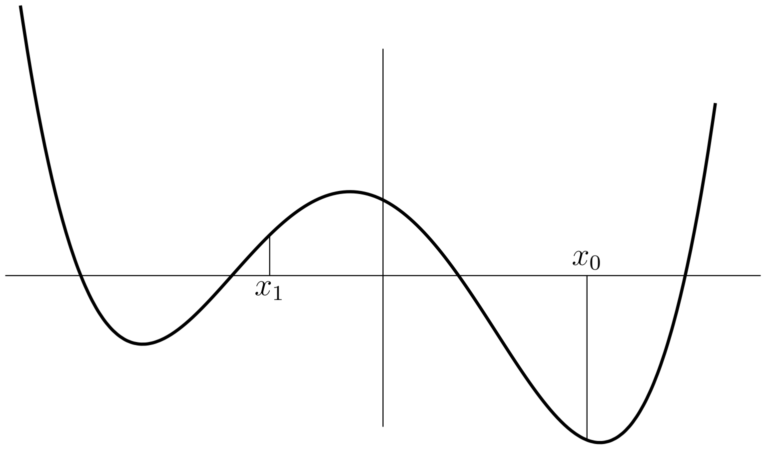
b) Para acotar $|g'(x)| = \left|\dfrac{-3x^2}{2(1+x^3)^{\frac{3}{2}}}\right|$ hay que ver que $g''(x) = \dfrac{3x(5x^3-4)}{4(1+x^3)^{\frac{5}{2}}}$ se anula en $x = 0$ y en $x = \sqrt[3]{\frac{4}{5}}$, por lo que $|g'(x)|$ tomará su valor máximo para $\left|g'\left(\sqrt[3]{\frac{4}{5}}\right)\right| \approx 0.535274 < 1$. Por tanto g es contráctil en $[0, 1]$ y cualquier semilla $x_0 \in [0, 1]$ servirá.

12. A partir de la gráfica de $y = f(x)$ que se muestra, determine gráficamente las dos aproximaciones siguientes que generan los métodos de Newton-Raphson y de la secante partiendo de las semillas que aparecen en cada caso. Deduzca si hay convergencia y hacia qué solución de $f(x) = 0$.

   a) Método de Newton-Raphson

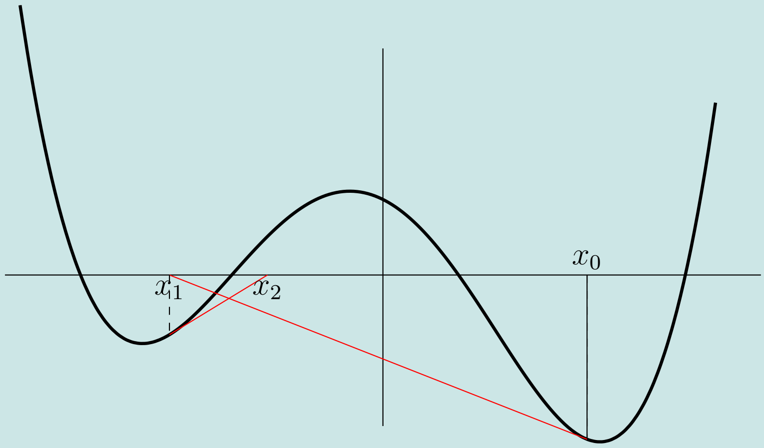


   b) Método de la secante

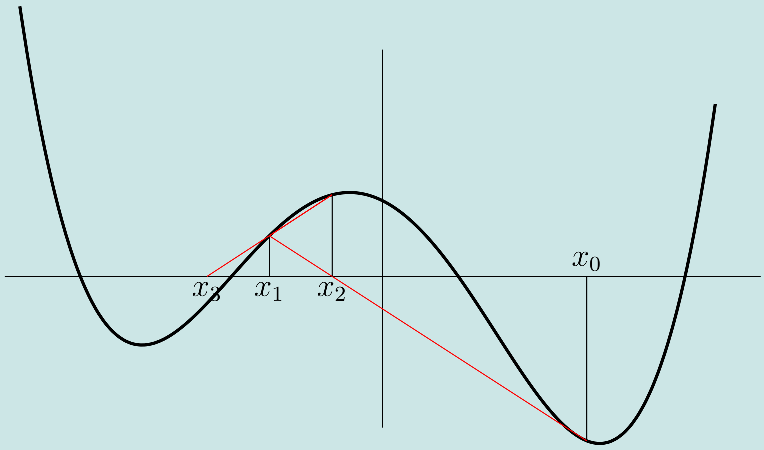


Solución.

a)



De la gráfica se puede deducir que la convergencia será hacia la segunda raíz de las cuatro, contando de izquierda a derecha, a pesar de haber partido de una semilla situada entre las raíces tercera y cuarta.



b)

De la gráfica se puede deducir que la convergencia será, igual que en el apartado anterior, hacia la segunda raíz de las cuatro, contando de izquierda a derecha, a pesar de haber partido de dos semillas a ambos lados de la tercera raíz. ¿Qué habría ocurrido de haber intercambiado el orden las semillas?

13. Se considera la ecuación $xe^{-\frac{x}{3}}+1=0$ y los métodos de iteración funcional $x_{n+1}=g(x_n)$ dados por las funciones

$$g_1(x)=-e^{\frac{x}{3}},\ g_2(x)=e^{\frac{x}{3}},\ g_3(x)=3\ln(-x)\ \text{ y }\ g_4(x)=\frac{x-e^{\frac{x}{3}}}{2}.$$

   a) Encuentre un intervalo de amplitud 1 donde haya una única raíz de la ecuación.

   b) Averigüe cuáles de los métodos propuestos son compatibles con la ecuación dada; es decir, para cuáles de ellos la solución es punto fijo.

   c) De entre los métodos compatibles con la ecuación ¿cuáles son convergentes localmente? Justifique la respuesta.

   d) De entre los métodos convergentes localmente ¿cuál es el más rápido? ¿Por qué?

Solución.

a) En $[-1,0]$ hay un cambio de signo. Como $f'(x)=(1-\frac{x}{3})e^{-\frac{x}{3}}>0$ en $[-1,0]$, la raíz es única.

b) $x=g_i(x)$ puede transformarse en $f(x)=0$ para g_1,g_3 y g_4 pero no para g_2, que se descarta por inconsistente. De hecho $g_4(x)=\frac{1}{2}(g_1(x)+x)$.

c) En $[-1,0]$ se tiene $|g_1'(x)|=|-\frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}}|\le\frac{1}{3}$ (converge), $|g_3'(x)|=|\frac{3}{x}|>1$ (diverge) y $g_4'(x)=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}})\in\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}}\right)\right]=[0.333333,0.380578]$ luego $|g_4'(x)|<0.4$ (converge).

d) g_1 es el más rápido porque $|g_4'(x)|\ge\frac{1}{3}$.

14. Supongamos que se modifica el método de bisección cambiando el punto de división del intervalo por el valor $a+\frac{b-a}{3}$ (porque se cree que la solución está más cerca del extremo a). ¿Es convergente dicho método? ¿Cuál es la cota del error absoluto después de n iteraciones?

Solución. Sea $\ell_n=b_n-a_n$ la amplitud del intervalo $[a_n,b_n]$ en la iteración $n\ge 0$. Como $m_n=a_n+\frac{1}{3}\ell_n$, se tiene $|e_n|\le\text{máx}\{\frac{1}{3}\ell_n,\frac{2}{3}\ell_n\}=\frac{2}{3}\ell_n$. Por otro lado, si $n\ge 1$, $[a_n,b_n]$ podría venir de $[a_{n-1},m_{n-1}]$ o bien $[m_{n-1},b_{n-1}]$ dependiendo de los signos, con lo que podría ser $\ell_n=\frac{1}{3}\ell_{n-1}$ o bien $\ell_n=\frac{2}{3}\ell_{n-1}$ y, en todo caso, será $\ell_n\le\frac{2}{3}\ell_{n-1}\le\left(\frac{2}{3}\right)^2\ell_{n-2}\le\cdots\le\left(\frac{2}{3}\right)^n\ell_0$. En conclusión, el método sigue siendo convergente y $|e_n|\le\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}(b-a)$ con lo que no hay ninguna garantía de que sea preferible al clásico.

15. Demuestre el teorema de convergencia global de los métodos de iteración funcional para sistemas. Sugerencia: generalice al caso k-dimensional la demostración del teorema de convergencia global de los métodos de iteración funcional unidimensional.

Solución.

1. La existencia se demuestra por el teorema del punto fijo de Banach: si D es un subconjunto cerrado no vacío de un especio métrico completo y $G : D \in D$, entonces G tiene un punto fijo en D. La unicidad viene de la condición de contractibilidad junto con una reducción al absurdo: si existiesen dos puntos fijos $S \neq S'$ se tendría
$$0 \neq ||S - S'|| = ||G(S) - G(S')|| \leq L||S - S'|| < ||S - S'||.$$
2. $||X_n - S|| = ||G(X_{n-1}) - G(S)|| \leq L||X_{n-1} - S|| \leq \cdots \leq L^n||X_0 - S||$, que tiende a 0 cuando $n \to \infty$.
3. Por otra parte, $||X_0 - S|| = ||X_0 - X_1 + X_1 - S|| \leq ||X_0 - X_1|| + ||X_1 - S|| \leq ||X_0 - X_1|| + L||X_0 - S||$, de donde $(1 - L)||X_0 - S|| \leq ||X_0 - X_1||$, con lo cual se tiene $(1 - L)||X_0 - S|| \leq \dfrac{1}{1 - L}||X_0 - X_1||$, y sustituyendo en la parte 2 queda
$$||X_n - S|| \leq L^n||X_0 - S|| \leq \frac{L^n}{1 - L}||X_0 - X_1||.$$

16. Sea $D = \prod_{i=1}^{k}[a_i, b_i]$ y sea $G : D \to \mathbb{R}^k$ con $G = (g_1, \ldots, g_k)$ tal que $G \in \mathcal{C}^1(D)$. Demuestre que si existe $L \in]0, 1[$ tal que $\forall i, j = 1, \ldots, k$ se verifique $\left|\frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j}\right| \leq \frac{L}{k}$ $\forall x \in D$, entonces G es contráctil. Sugerencia: considere la norma $|| \cdot ||_1$ o $|| \cdot ||_\infty$.

17. Se considera el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{x^2-y^2}{2} - x + \frac{7}{24} & = & 0 \\ xy - y + \frac{1}{9} & = & 0 \end{array}\right\}$$

a) Demuestre que tiene una única solución en el rectángulo $D = [0, 0.4] \times [0, 0.4]$.

b) Encuentre una sucesión que converja a dicha solución, justificando la respuesta.

c) Calcule, tomando $x_0 = (0.1, 0.2)$, las dos primeras iteraciones del método de Newton-Raphson para el sistema.

Solución.

a),b) Definimos $g_1(x, y) = \frac{x^2-y^2}{2} + \frac{7}{24}$, $g_2(x, y) = xy + \frac{1}{9}$. Ahora si $x, y \in [0, 0.4]$ entonces

$$x^2 - y^2 \in [-0.16, 0.16] \Rightarrow \frac{x^2 - y^2}{2} + \frac{7}{24} \in [0.211666, 0.371666] \subset [0, 0.4],$$

$$xy \in [0, 0.16] \Rightarrow xy + \frac{1}{9} \in [0.111111, 0.271111] \subset [0, 0.4],$$

lo que implica que $G = (g_1, g_2)$ aplica D en si mismo, por lo que tiene que haber al menos un punto fijo que será solución del sistema dado (Teor. del punto fijo de Banach en espacios métricos completos). Por otro lado, el jacobiano $G' = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ tiene $||G'||_1 = \max\{|x| + |y|, |-y| + |x|\} \leq 0.8$ por lo que la solución es única en D y la convergencia global está asegurada.

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{pmatrix} \to x_1 = \begin{pmatrix} 0.27667 \\ 0.131111 \end{pmatrix} \to x_2 = \begin{pmatrix} 0.321344 \\ 0.147385 \end{pmatrix} \to x_3 = \begin{pmatrix} 0.332436 \\ 0.158472 \end{pmatrix}$$

c) $$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_n - 1 & -y_n \\ y_n & x_n - 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{x_n^2-y_n^2}{2} - x_n + \frac{7}{24} \\ x_n y_n - y_n + \frac{1}{9} \end{pmatrix}.$$

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{pmatrix} \to x_1 = \begin{pmatrix} 0.303268 \\ 0.168627 \end{pmatrix} \to x_2 = \begin{pmatrix} 0.332704 \\ 0.166599 \end{pmatrix} \to x_3 = \begin{pmatrix} 0.333333 \\ 0.166667 \end{pmatrix}$$

18. Se considera el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcr} x - xy & = & \frac{1}{16} \\ x^2 - y & = & -\frac{1}{8} \end{array}\right\}$$

a) Demuestre que tiene una única solución en el rectángulo $D = \left[0, \frac{1}{8}\right] \times \left[0, \frac{1}{4}\right]$.

b) Encuentre una sucesión que converja a dicha solución, justificando la respuesta.

c) Calcule, tomando $x_0 = (0.1, 0.2)$, las dos primeras iteraciones del método de Newton-Raphson para el sistema.

Solución.

a) Sea $G\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy + \frac{1}{16} \\ x^2 + \frac{1}{8} \end{pmatrix}$. Si $(x, y) \in D \Rightarrow xy \in [0, \frac{1}{32}] \Rightarrow xy + \frac{1}{16} \in [0, \frac{3}{32}] \subset [0, \frac{1}{8}]$ y $x^2 \in [0, \frac{1}{64}] \Rightarrow x^2 + \frac{1}{8} \in [0, \frac{9}{64}] \subset [0, \frac{1}{4}]$, luego $G : D \to D$. Por otro lado, $G' = \begin{pmatrix} y & x \\ 2x & 0 \end{pmatrix}$ tiene $||G'||_1 = \text{máx}\{|y| + |2x|, |x|\} = \frac{1}{2}$ o también $||G'||_\infty = \text{máx}\{|y| + |x|, |2x|\} = \frac{3}{8}$, ambas < 1.

b) Cualquier $(x_0, y_0) \in D$ vale (teorema de conv. global).

c) Newton-Raphson corresponde a

$$G\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 - y & -x \\ 2x & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x - xy - \frac{1}{16} \\ x^2 - y + \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

de manera que

$$\begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0.06923076923077 \\ 0.12884615384615 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0.07184796591410 \\ 0.13015528048751 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0.07185252471221 \\ 0.13016278528674 \end{pmatrix}$$