UNIVERSIDAD DE GRANADA

Métodos Numéricos II
Grado en Matemáticas
Curso 2020/2021

Departamento de Matemática Aplicada

Relación 2

—

Derivación e integración numérica

Versión 7/6/2021 (soluciones)

1. *a*) Use el método interpolatorio para obtener la fórmula de diferencia progresiva en dos nodos para aproximar $f'(a)$. ¿Cuál es el grado de exactitud de dicha fórmula? Justifique la respuesta.

   b) Utilice la fórmula de Taylor para hallar la fórmula mencionada en el apartado anterior y la expresión de su error cuando $f_2 \in \mathcal{C}^2[a, a+h]$.

   c) Use el método interpolatorio para obtener la fórmula de diferencia centrada en dos nodos para aproximar $f'(a)$. ¿Cuál es el grado de exactitud de dicha fórmula? Justifique la respuesta.

   d) Utilice la fórmula de Taylor para hallar la fórmula mencionada en el apartado anterior y la expresión de su error cuando $f_2 \in \mathcal{C}^3[a-h, a+h]$.

Solución.

a) $f'(a) \approx \alpha_0 f(a+h) + \alpha_1 f(a)$.

$$\begin{array}{c|ll} a & f(a) & \\ a+h & f(a+h) & \frac{1}{h}(f(a+h)-f(a)) \end{array}$$

$$\begin{aligned} p(x) &= f(a) + (x-a)\tfrac{1}{h}(f(a+h)-f(a)) \\ p'(a) &= \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \end{aligned}$$

Ya es exacta en $\mathbb{P}_1$ por construcción. No es exacta en x^2.

b)

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + f'(a)h + \frac{f''(\xi)}{2!}h^2 \\ f'(a) &= \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - \frac{h}{2}f''(\xi) \end{aligned}$$

c) $f'(a) \approx \alpha_0 f(a+h) + \alpha_1 f(a-h)$.

$$\begin{array}{c|ll} a-h & f(a-h) & \\ a+h & f(a+h) & \frac{1}{2h}(f(a+h)-f(a-h)) \end{array}$$

$$\begin{aligned} p(x) &= f(a-h) + (x-a+h)\tfrac{1}{2h}(f(a+h)-f(a-h)) \\ p'(a) &= \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} \end{aligned}$$

Ya es exacta en $\mathbb{P}_1$ por construcción. También lo es en x^2. No es exacta en x^3.

d)

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \frac{f'''(\xi_1)}{3!}h^3 \\ f(a-h) &= f(a) - f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 - \frac{f'''(\xi_2)}{3!}h^3 \end{aligned}$$

Se combinan ambos desarrollos con α_0, α_1 para que se anule la columna en $f(a)$ y resulte 1 la columna en $f'(a)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ h & -h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha_0 = \frac{1}{2h} \\ \alpha_1 = -\frac{1}{2h} \end{array}$$

$$\begin{aligned} f'(a) &= \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} - \frac{h^2}{12}(f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)) \\ &= \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} - \frac{h^2}{6}f'''(\xi) \end{aligned}$$

2. Usando el método de los coeficientes indeterminados deduzca la fórmula de diferencia centrada en tres nodos para aproximar $f'(a)$ y compruebe que coincide con la fórmula de diferencia centrada en dos nodos.

Solución. La fórmula es

$$f'(a) = \alpha_0 f(a-h) + \alpha_1 f(a) + \alpha_2 f(a+h) + R(f),$$

y obligando exactitud en $\mathbb{P}_2$ se obtiene el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a-h & a & a+h \\ (a-h)^2 & a^2 & (a+h)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_0 = -\frac{1}{2h} \\ \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = \frac{1}{2h} \end{cases}$$

y como $\alpha_1 = 0$, la formula centrada en dos nodos $a-h$ y $a+h$ ha de ser la misma. En efecto, para

$$f'(a) = \alpha_0 f(a-h) + \alpha_1 f(a+h) + R(f),$$

obligando exactitud en $\mathbb{P}_1$ se obtiene el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a-h & a+h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_0 = -\frac{1}{2h} \\ \alpha_1 = \frac{1}{2h} \end{cases}$$

3. Obtenga la fórmula de diferencia progresiva en tres nodos para aproximar $f'(a)$ calculando directamente sus coeficientes mediante la base de Lagrange del problema de interpolación unisolvente asociado a dicha fórmula. Halle la expresión del error para esta fórmula cuando $f \in \mathcal{C}^4[a, a+2h]$.

Solución. Modelo de fórmula, polinomios fundamentales de Lagrange y coeficientes:

$$\begin{aligned}
f'(a) &\approx \alpha_0 f(a) + \alpha_1 f(a+h) + \alpha_2 f(a+2h) \\
\ell_0 &= \frac{(x-a-h)(x-a-2h)}{-h(-2h)} = \frac{(x-a-h)(x-a-2h)}{2h^2}; \quad \alpha_0 = \ell_0'(a) = -\tfrac{3}{2h} \\
\ell_1 &= \frac{(x-a)(x-a-2h)}{h(-h)} = \frac{(x-a)(x-a-2h)}{-h^2}; \quad \alpha_1 = \ell_1'(a) = \tfrac{2}{h} \\
\ell_2 &= \frac{(x-a)(x-a-h)}{2h \cdot h} = \frac{(x-a)(x-a-h)}{2h^2}; \quad \alpha_2 = \ell_2'(a) = -\tfrac{1}{2h}
\end{aligned}$$

Error de interpolación y término de error de la fórmula:

$$\begin{aligned}
E(f) &= f[a, a+h, a+2h, x](x-a)(x-a-h)(x-a-2h) \\
R(f) &= E'(a) = f[a, a+h, a+2h, a](-h)(-2h) = 2h^2 \frac{1}{3!} f'''(\xi) = \frac{h^2}{3} f'''(\xi).
\end{aligned}$$

4. Se considera la fórmula de tipo interpolatorio en $\mathbb{P}_n$ siguiente:

$$f''(c) \approx \alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_n f(x_n)$$

con $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$. Demuestre que si $f \in \mathcal{C}^{n+3}[a,b]$ con $[a,b]$ tal que $x_0, x_1, \cdots, x_n, c \in [a,b]$, entonces

$$R(f) = 2\frac{f^{(n+3)}(\xi_2)}{(n+3)!}\Pi(c) + 2\frac{f^{(n+2)}(\xi_1)}{(n+2)!}\Pi'(c) + \frac{f^{(n+1)}(\xi_0)}{(n+1)!}\Pi''(c)$$

siendo $\xi_0,\ \xi_1,\ \xi_2 \in \,]\text{mín}\{x_0, c\}, \text{máx}\{x_n, c\}[$ y $\Pi(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$.

Solución. $R(f) = L(E)$ siendo $L(f) = f''(c)$ y $E(x)$ el error de interpolación. Derivando dos veces, sustituyendo y aplicando propiedades de las diferencias divididas se tiene

$$\begin{aligned}
E(x) &= f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]\Pi(x) \\
E'(x) &= f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x, x]\Pi(x) + f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]\Pi'(x) \\
E''(x) &= 2f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x, x, x]\Pi(x) + 2f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x, x]\Pi'(x) \\
&\quad + f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]\Pi''(x) \\
L(E) = E''(c) &= 2\frac{f^{(n+3)}(\xi_2)}{(n+3)!}\Pi(c) + 2\frac{f^{(n+2)}(\xi_1)}{(n+2)!}\Pi'(c) + \frac{f^{(n+1)}(\xi_0)}{(n+1)!}\Pi''(c).
\end{aligned}$$

5. Use el método de los coeficientes indeterminados para obtener la fórmula de diferencia regresiva en tres nodos para aproximar $f''(a)$. Halle la expresión del error de truncamiento para esta fórmula cuando $f \in \mathcal{C}^5[a-2h, a]$.

Solución. La fórmula es $f''(a) \approx \alpha_0 f(a-2h) + \alpha_1 f(a-h) + \alpha_2 f(a)$. Obligando exactitud en $\{1, x, x^2\}$ tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a-2h & a-h & a \\ (a-2h)^2 & (a-h)^2 & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \alpha_0 = \frac{1}{h^2} \\ \alpha_1 = -\frac{2}{h^2} \\ \alpha_2 = \frac{1}{h^2} \end{cases}$$

El error se obtiene como $R(f) = E''(a)$ siendo $E(x) = f[a-2h, a-h, a, x]\Pi(x)$ con $\Pi(x) = (x-a+2h)(x-a+h)(x-a)$. Por tanto

$$\begin{aligned}
R(f) = \cdots &= 2f[a-2h, a-h, a, a, a]\Pi'(a) + f[a-2h, a-h, a, a]\Pi''(a) \\
&= 2\frac{f^{iv}(\xi_1)}{4!}2h^2 + \frac{f'''(\xi_2)}{3!}6h = \frac{h^2}{6}f^{iv}(\xi_1) + hf'''(\xi_2)
\end{aligned}$$

6. Use la fórmula de Taylor para obtener, cuando $f \in \mathcal{C}^4[a-h, a+h]$, la fórmula de diferencia centrada en tres nodos para aproximar $f''(a)$ y la expresión de su error. ¿Cuál es el orden de precisión de esta fórmula? ¿Por qué?

Solución. Se combinan los desarrollos en la forma

$$\begin{array}{lcccccccccccl} \alpha_0 & \times [& f(a-h) & = & f(a) & - & f'(a)h & + & \frac{f''(a)}{2!}h^2 & - & \frac{f'''(a)}{3!}h^3 & + & \frac{f^{iv}(\xi_1)}{4!}h^4 \quad] \\ \alpha_1 & \times [& f(a) & = & f(a) & & & & & & & & \quad] \\ \alpha_2 & \times [& f(a+h) & = & f(a) & + & f'(a)h & + & \frac{f''(a)}{2!}h^2 & + & \frac{f'''(a)}{3!}h^3 & + & \frac{f^{iv}(\xi_2)}{4!}h^4 \quad] \\ \hline & & \text{fórmula} & = & 0 & + & 0 & + & f''(a) & + & 0 & - & R(f) \end{array}$$

en donde se ha aumentado un orden de derivación porque la columna en f''' también se va a anular, y se tiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ h & 0 & -h \\ h^2 & 0 & h^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_0 = \frac{1}{h^2} \\ \alpha_1 = -\frac{2}{h^2} \\ \alpha_2 = \frac{1}{h^2} \end{cases}$$

y por tanto $R(f) = -\frac{h^2}{24}(f^{iv}(\xi_1) + f^{iv}(\xi_2)) = -\frac{h^2}{12} f^{iv}(\xi)$, con lo que la fórmula queda

$$f''(a) = \frac{1}{h^2}(f(a-h) - 2f(a) + f(a+h)) - \frac{h^2}{12} f^{iv}(\xi).$$

7. *a*) Halle la fórmula de tipo interpolatorio en $\mathbb{P}_2$ de la forma

$$f'(a) \approx \alpha_0 f(a-h_1) + \alpha_1 f(a) + \alpha_2 f(a+h_2)$$

con $h_1, h_2 > 0$, así como la expresión de su error de truncamiento cuando $f \in \mathcal{C}^4[a-h_1, a+h_2]$. ¿Cuál es el grado de exactitud de esta fórmula? Justifique la respuesta.

b) Use la tabla de valores

x	0.7	1.25	1.50	1.75
$f(x)$	−0.1	0.2	0.3	0.25

para dar valores aproximados de $f'(0.7)$, $f'(1.25)$, $f'(1.5)$ y $f'(1.75)$ utilizando para cada uno de ellos la fórmula de derivación numérica más adecuada. Indique la fórmula usada en cada caso y justifique su uso.

Solución.

a) Obligando exactitud

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a-h_1 & a & a+h_2 \\ (a-h_1)^2 & a^2 & (a+h_2)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha_0 = -\frac{h_2}{h_1(h_1+h_2)} \\ \alpha_1 = \frac{h_2-h_1}{h_1h_2} \\ \alpha_2 = \frac{h_1}{h_2(h_1+h_2)} \end{array}$$

$$E(f) = f[a-h_1, a, a+h_2, x](x-a+h_1)(x-a)(x-a-h_2)$$

$$R(f) = E'(a) = -f[a-h_1, a, a+h_2, a]h_1h_2 = -\frac{h_1h_2}{6}f'''(\xi)$$

Ya es exacta en $\mathbb{P}_2$ por construcción. En x^3 resulta $3a^2 + h_1h_2 \neq 3a^2$.

b)
- Para $x = 0.7$ se puede emplear la fórmula progresiva con dos nodos $f'(a) \approx \frac{1}{h}(f(a+h) - f(a))$ con $a = 0.7$ y $h = 1.25 - 0.7 = 0.55$, que da $\frac{1}{0.55}(0.2 + 0.1) = 0.54545455$.
- Para $x = 1.25$ se puede emplear la del apartado anterior con $a = 1.25$, $h_1 = 0.55$ y $h_2 = 0.25$, que da 0.44545455.
- Para $x = 1.50$ se puede emplear la fórmula centrada con dos nodos (o tres, da igual) $f'(a) \approx \frac{1}{2h}(f(a+h) - f(a-h))$ con $a = 1.50$ y $h = 0.25$, que da $\frac{1}{0.50}(0.25 - 0.2) = 0.1$.
- Para $x = 1.75$ se puede emplear la fórmula regresiva con dos nodos $f'(a) \approx \frac{1}{h}(f(a) - f(a-h))$ con $a = 1.75$ y $h = 0.25$, que da $\frac{1}{0.25}(0.25 - 0.3) = -0.2$.

8. Halle una cota del valor absoluto del error que se comete al aproximar la derivada de la función $f(x) = \cos^2 x$ en $x = 0.8$ mediante la correspondiente fórmula de derivación numérica de tipo interpolatorio que usa los valores de f en los puntos 0.6, 0.8 y 1.

Solución. Se trata de la fórmula centrada con $a = 0.8$ y $h = 0.2$. Da igual dos o tres nodos, ya que el coeficiente en el nodo central es nulo. La fórmula es

$$f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} - \frac{h^2}{6} f'''(\xi)$$

con $\xi \in [0.6, 1.0]$. En nuestro caso se tiene

$$|R(f)| = \left| -\frac{h^2}{6} f'''(\xi) \right| = \left| -\frac{0.2^2}{6} 8 \cos(\xi) \sin(\xi) \right| < 0.053333.$$

9. Se considera la siguiente fórmula de integración numérica:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx \approx \alpha_0 f(-1) + \alpha_1 f(0) + \alpha_2 f(1).$$

a) Halle de tres formas distintas los valores $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2$ para que dicha fórmula sea de tipo interpolatorio en $\mathbb{P}_2$.

b) Halle el grado de exactitud de la fórmula obtenida en el apartado anterior.

c) Proporcione una fórmula de la forma propuesta que no sea de tipo interpolatorio en $\mathbb{P}_2$. Justifique la respuesta.

Solución.

a) 1) Primera forma: integrando los polinomios fundamentales de Lagrange.

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= \int_{-1}^{1} \ell_0\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{x(x-1)}{2}\,dx = \frac{1}{3},\\ \alpha_1 &= \int_{-1}^{1} \ell_1\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{x^2-1}{-1}\,dx = \frac{4}{3},\\ \alpha_2 &= \int_{-1}^{1} \ell_2\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{x(x+1)}{2}\,dx = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

2) Segunda forma: obligando exactitud en $\mathbb{P}_2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\\ 0\\ 2/3\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_0 = \frac{1}{3}\\ \alpha_1 = \frac{4}{3}\\ \alpha_2 = \frac{1}{3}\end{cases}$$

3) Tercera forma: integrando el polinomio de interpolación (fórmula de Newton)

Tabla de diferencias divididas:

$$\begin{array}{r|llll} -1 & f(-1) & & \\ & & f(0)-f(-1) & \\ 0 & f(0) & & \frac{1}{2}(f(1)-2f(0)+f(-1))\\ & & f(1)-f(0) & \\ 1 & f(1) & & \end{array}$$

Interpolante:

$$\begin{aligned} p(x) &= f(-1) + (x+1)(f(0)-f(-1)) + x(x+1)\tfrac{1}{2}(f(1)-2f(0)+f(-1))\\ &= \tfrac{1}{2}x(x-1)f(-1) + (1-x^2)f(0) + \tfrac{1}{2}x(x+1)f(1)\end{aligned}$$

Fórmula:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \int_{-1}^{1} p(x)\,dx\\ &= \frac{1}{2}f(-1)\int_{-1}^{1} x(x-1)\,dx + f(0)\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx + \frac{1}{2}f(1)\int_{-1}^{1} x(x+1)\,dx\\ &= \frac{1}{3}f(-1) + \frac{4}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1).\end{aligned}$$

b) Ya es exacta en $\mathbb{P}_2$ por construcción. Se comprueba que también lo es en x^3 pero no en x^4, luego su grado es 3.

c) $\frac{2}{3}(f(-1)+f(0)+f(1))$ no es exacta en x^2.

10. Para evaluar el funcional lineal $L(f) = f(\frac{1}{2}) + \int_0^1 f(x)\,dx$ con $f \in \mathcal{C}^1[0,1]$ se propone la siguiente fórmula de aproximación lineal:

$$L(f) \approx \frac{1}{8}(13f(0) + 5f'(0) + 3f(1)).$$

a) ¿La fórmula es exacta para $f(x) = x^3$? ¿Por qué? ¿Cuál es el grado de exactitud de la fórmula? ¿Por qué?

b) ¿La fórmula es de tipo interpolatorio en $\mathbb{P}_2$? ¿Por qué? Si no lo es, deduzca los coeficientes de la fórmula para que sí lo sea.

c) Deduzca el error de la fórmula obtenida en el apartado *b*) cuando $f \in \mathcal{C}^3[0,1]$. (Nota: el error de interpolación puede escribirse como $E(f) = f(x) - p(x) = f[0,0,1,x]x^2(x-1)$).

d) ¿Qué fórmula se obtiene si deseamos que sea de tipo interpolatorio en el espacio $V = \langle 1, \sin(\pi x), \cos(\pi x)\rangle$?

Solución.

a) Para todo $k \geq 2$ se tiene $L(x^k) = \dfrac{1}{2^k} + \dfrac{1}{k+1}$, mientras que la fórmula propuesta daría siempre $\dfrac{1}{8}(0+0+3) = \dfrac{3}{8}$. La exactitud solo se daría si $k = 3$. Es fácil ver que es exacta para $f(x) = 1$ y para $f(x) = x$ pero no para $f(x) = x^2$, luego es exacta de grado 1.

b) No es de tipo interpolatorio en $\mathbb{P}_2$ por no ser exacta en x^2. Para que lo sea imponemos exactitud en $1, x, x^2$ y resulta el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7/12 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_0 = \frac{17}{12} \\ \alpha_1 = \frac{5}{12} \\ \alpha_2 = \frac{7}{12} \end{cases}$$

c) $R(f) = L(E) = f[0,0,1,\frac{1}{2}]\frac{1}{2^2}(\frac{1}{2}-1) + \int_0^1 f[0,0,1,x]x^2(x-1)dx$. Aplicando la propiedad de las diferencias divididas y el teorema del valor medio integral generalizado, tenemos

$$\begin{aligned} R(f) &= -\frac{f'''(\xi_1)}{3!}\frac{1}{8} + f[0,0,1,\xi_2]\int_0^1 x^2(x-1)dx \\ &= -\frac{5}{144}\frac{3f'''(\xi_1) + 2f'''(\xi_3)}{5} \quad = \quad -\frac{5}{144}f'''(\xi) \end{aligned}$$

d) Obligando exactitud para $1, \sin(\pi x), \cos(\pi x)$ sale el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \pi & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 + \frac{2}{\pi} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_0 = 1 \\ \alpha_1 = \frac{\pi+2}{\pi^2} \\ \alpha_2 = 1 \end{cases}$$

11. *a*) Use el método interpolatorio para obtener la fórmula del rectángulo izquierda y deducir la expresión del error de esta fórmula cuando $f \in \mathcal{C}^1[a,b]$. ¿Cuál es el grado de exactitud de dicha fórmula? Justifique la respuesta.

b) Utilice el método interpolatorio para obtener la fórmula del punto medio y deduzca la expresión del error de esta fórmula cuando $f \in \mathcal{C}^2[a,b]$.

Solución.

a)

$$
\begin{aligned}
p(x) &= f(a)\\
\int_a^b p(x)\,dx &= (b-a)f(a)\\
R(f) &= \int_a^b f[a,x](x-a)\,dx = f'(\xi)\frac{(b-a)^2}{2} \Rightarrow \text{ grado } 0
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
p(x) &= f(m), \quad m = \frac{a+b}{2}\\
\int_a^b p(x)\,dx &= (b-a)f(m)\\
R(f) &= \int_a^b f[m,x](x-m)\,dx\\
&= \int_a^b f[m,m](x-m)\,dx + \int_a^b f[m,m,x](x-m)^2\,dx\\
&= \frac{1}{2}f''(\xi)\frac{(b-a)^3}{12} \Rightarrow \text{ grado } 1
\end{aligned}
$$

12. Obtenga la fórmula del trapecio calculando directamente sus coeficientes mediante la base de Lagrange del problema de interpolación unisolvente asociado a dicha fórmula. Halle la expresión del error de cuadratura de esta fórmula cuando $f \in \mathcal{C}^2[a,b]$ y deduzca cuál es su grado de exactitud.

Solución. El modelo para la fórmula del trapecio es

$$\int_a^b f(x)\,dx = \alpha_0 f(a) + \alpha_1 f(b) + R(f).$$

Para los datos $f(a), f(b)$, la fórmula de Lagrange del polinomio de interpolación es

$$p(x) = f(a)\frac{x-b}{a-b} + f(b)\frac{x-a}{b-a}$$

de donde se tienen los coeficientes

$$\alpha_0 = \int_a^b \frac{x-b}{a-b}dx = \frac{b-a}{2}, \quad \alpha_1 = \int_a^b \frac{x-a}{b-a}dx = \frac{b-a}{2}.$$

El error $R(f)$ se obtiene integrando el error de interpolación

$$\begin{aligned} R(f) &= \int_a^b E(x)\,dx = \int_a^b f[a,b,x](x-a)(x-b)dx \\ &= f[a,b,\xi]\int_a^b (x-a)(x-b)dx \\ &= -\frac{f''(\xi)}{2!}\frac{(b-a)^3}{6} \end{aligned}$$

por lo que la fórmula es exacta de grado 1.

13. Halle la fórmula de Newton-Cotes abierta con dos nodos.

Solución. Es mucho mejor fijar $[a,b] = [-1,1]$ y después hacer un cambio de variable.

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx \approx \alpha_0 f(-\frac{1}{3}) + \alpha_1 f(\frac{1}{3}) \quad \text{exacta en } \mathbb{P}_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha_0 = 1 \\ \alpha_1 = 1 \end{array}$$

Ahora para $x \in [-1,1]$ se hace el cambio $t = a + (b-a)\frac{x+1}{2} \in [a,b]$, $dt = \frac{b-a}{2}dx$.

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)\,dt &= \int_{-1}^1 f\left(a + (b-a)\frac{x+1}{2}\right)\frac{b-a}{2}dx \\ &\approx \alpha_0\frac{b-a}{2}f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + \alpha_1\frac{b-a}{2}f\left(\frac{a+2b}{3}\right) \\ &= \frac{b-a}{2}\left(f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + f\left(\frac{a+2b}{3}\right)\right) \end{aligned}$$

14. Aproxime el valor de $\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ usando la fórmula del punto medio, la fórmula del trapecio y la fórmula de Simpson. Calcule una cota del valor absoluto del error que se comete en cada una de las aproximaciones obtenidas.

Solución. Tenemos $f(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = \frac{2}{x^3}$, $f^{iv}(x) = \frac{24}{x^5}$, con cotas respectivas $|f''(x)| \leq 2$, $|f^{iv}(x)| \leq 24$ en $x \in [1,2]$.

- *Punto medio:* $\ln 2 \approx \frac{1}{1.5} = 0.666666$; $|R(f)| = \left|\frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi)\right| \leq \frac{1}{12}$
- *Trapecio:* $\ln 2 \approx \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}) = 0.75$; $|R(f)| = \left|-\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)\right| \leq \frac{1}{6}$
- *Simpson:* $\ln 2 \approx \frac{1}{6}(1 + 4\frac{1}{1.5} + \frac{1}{2}) = 0.694444$; $|R(f)| = \left|-\frac{(b-a)^5}{2880} f^{iv}(\xi)\right| \leq \frac{1}{120}$

No se pueden comparar los errores porque Punto medio requiere una sola evaluación de f, Trapecio dos, y Simpson tres. El valor exacto (para referencia) es $\ln 2 = 0.693147$.

15. Halle la expresión del error de la fórmula del trapecio compuesta cuando $f \in \mathcal{C}^2[a,b]$.

Solución. En la fórmula simple es $R(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)$ con $\xi \in [a,b]$. En la compuesta hay que sumar los términos de error individuales:

$$\begin{aligned} R(f) &= -\sum_{i=1}^{N} \frac{h^3}{12} f''(\xi_i) \qquad \text{con } \xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \\ &= -\frac{Nh^3}{12} \sum_{i=1}^{N} \frac{f''(\xi_i)}{N} = -\frac{Nh^3}{12} f''(\xi) = -\frac{b-a}{h}\frac{h^3}{12} f''(\xi) = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi) \end{aligned}$$

16. La fórmula de integración numérica de tipo interpolatorio en $\mathbb{P}_3$ de la forma

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \alpha_0 f(a) + \alpha_1 f(b) + \alpha_2 f'(a) + \alpha_3 f'(b)$$

es conocida como *fórmula del trapecio corregida.*

a) Halle dicha fórmula, así como la expresión de su error si $f \in \mathcal{C}^4[a,b]$. ¿Cuál es su grado de exactitud? Razone la respuesta.

b) Escriba la fórmula de cuadratura compuesta que se obtiene a partir de ella para una partición uniforme del intervalo de integración y halle la expresión de su error cuando $f \in \mathcal{C}^4[a,b]$.

Solución.

a) Obligando exactitud en $\{1, x, x^2, x^3\}$ se tiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ a & b & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & 2a & 2b \\ a^3 & b^3 & 3a^2 & 3b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-a \\ (b^2-a^2)/2 \\ (b^3-a^3)/3 \\ (b^4-a^4)/4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_0 = (b-a)/2 \\ \alpha_1 = (b-a)/2 \\ \alpha_2 = (b-a)^2/12 \\ \alpha_3 = -(b-a)^2/12 \end{cases}$$

Por otro lado, $R(f) = \int_a^b f[a,a,b,b,x](x-a)^2(x-b)^2\,dx = \frac{f^{iv}(\xi)}{4!}\frac{(b-a)^5}{30}$.

La fórmula del trapecio corregida queda así:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) + \frac{(b-a)^2}{12}(f'(a)-f'(b)) + \frac{f^{iv}(\xi)}{4!}\frac{(b-a)^5}{30}.$$

b) Fórmula compuesta:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx &= \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \\ &= \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{h}{2}(f_{i-1}+f_i) + \frac{h^2}{2}(f'_{i-1}-f'_i) \right) + \sum_{i=1}^{N} \frac{f^{iv}(\xi_i)}{4!}\frac{h^5}{30} \\ &= \frac{h}{2}\left(f_0 + 2\sum_{i=1}^{N-1} f_i + f_N \right) + \frac{h^2}{2}(f('(a) - f'(b)) + \frac{(b-a)h^4}{720} f^{iv}(\xi). \end{aligned}$$

17. De una función f(x) se conocen los valores

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	2	1	0.5	0.75	1.5

. Se pide:

a) Calcule un valor aproximado de $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$ usando la fórmula

1) del punto medio compuesta,

2) del trapecio compuesta,

3) de Simpson compuesta.

b) Interprete geométricamente cada una de las fórmulas anteriores para aproximar $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$ y haga un dibujo que ilustre la respuesta.

Solución.

a) 1) En $N = 2$ subintervalos $[-2, 0]$ y $[0, 2]$, $h = 2$:

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx \approx \frac{2+2}{2}(f(-1) + f(1)) = 3.5.$$

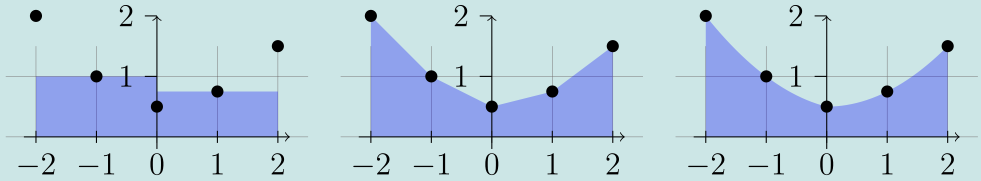
2) En $N = 4$ subintervalos, $h = 1$:

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx \approx \frac{2+2}{2\cdot 4}(f(-2) + 2f(-1) + 2f(0) + 2f(1) + f(2)) = 4.$$

3) En $N = 2$ subintervalos:

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx \approx \frac{2+2}{6\cdot 2}(f(-2) + 4f(-1) + 2f(0) + 4f(1) + f(2)) = 3.8\overline{3}.$$

b) Punto medio calcula el área de dos rectángulos con bases $[-2, 0]$ y $[0, 2]$ y alturas respectivas 1 y 0.75; trapecio suma las áreas de 4 trapecios bajo la poligonal que une los 4 puntos; Simpson suma dos áreas bajo las parábolas $y = 0.25x^2 - 0.25x + 0.5$ que interpola los tres primeros puntos y $y = 0.25x^2 + 0.5$ que interpola los tres últimos puntos.



Punto medio Trapecio Simpson

18. Calcule valores aproximados para $\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ usando

   a) La fórmula del punto medio compuesta con 4 subintervalos.

   b) La fórmula del trapecio compuesta con 4 subintervalos.

   c) La fórmula de Simpson compuesta con 2 subintervalos.

   Halle una cota del valor absoluto del error cometido en cada uno de los valores aproximados calculados. Compare los resultados obtenidos con los del problema 14.

Solución. Se tienen en cuenta las acotaciones calculadas en el problema 14.

a) Punto medio: $N = 4, h = \frac{1}{4}$;

$$\begin{aligned} \ln 2 &\approx \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1.125} + \frac{1}{1.375} + \frac{1}{1.625} + \frac{1}{1.875}\right) = 0.691220 \\ |R(f)| &= \left|\frac{(b-a)h^2}{24} f''(\xi)\right| \leq \frac{2}{16 \cdot 24} = \frac{1}{192} \end{aligned}$$

b) Trapecio: $N = 4, h = \frac{1}{4}$;

$$\begin{aligned} \ln 2 &\approx \frac{1}{8}\left(\frac{1}{1} + 2\frac{1}{1.25} + 2\frac{1}{1.5} + 2\frac{1}{1.75} + \frac{1}{2}\right) = 0.697024 \\ |R(f)| &= \left|\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi)\right| \leq \frac{1}{96} \end{aligned}$$

c) Simpson: $N = 2, h = \frac{1}{2}$;

$$\begin{aligned} \ln 2 &\approx \frac{1}{12}\left(\frac{1}{1} + 4\frac{1}{1.25} + 2\frac{1}{1.5} + 4\frac{1}{1.75} + \frac{1}{2}\right) = 0.693254 \\ |R(f)| &= \left|-\frac{(b-a)h^4}{2880} f^{iv}(\xi)\right| \leq \frac{24}{16 \cdot 2880} = \frac{1}{1920} \end{aligned}$$

En esta ocasión los resultados son comparables porque el número de evaluaciones es casi idéntico (4,5,5). Simpson es mucho más precisa.

19. Se quiere calcular $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ usando la fórmula del punto medio compuesta. ¿Cuántos subintervalos deberá tener la partición uniforme a considerar para que el valor absoluto del error que se cometa al aproximar dicha integral sea menor que 5×10^{-7}?

Solución. El error de la fórmula del punto medio compuesta es $R(f) = \frac{b-a}{24}h^2 f''(\xi)$. En nuestro caso es $f''(x) = e^{-x^2}(4x^2 - 2)$, acotada en $[0, 1]$ por $|f''(x)| \leq 2$, luego tendrá que ser $R(f) \leq \frac{2}{24N^2} \leq 5 \times 10^{-7}$, de donde $N \geq \sqrt{\frac{1\,000\,000}{6}} = 408.248 \Rightarrow N = 409$ subintervalos.

20. Se quiere hallar un valor aproximado de $\displaystyle\int_1^2 \ln^2(x)\,dx$.

   a) ¿Cuántos subintervalos deberá tener la partición uniforme para que el valor absoluto del error que se cometa al aproximar dicha integral usando la fórmula del trapecio compuesta sea menor que 10^{-3}?

   b) ¿Cuántos subintervalos deberá tener la partición uniforme para que el valor absoluto del error que se cometa al aproximar dicha integral utilizando la fórmula de Simpson compuesta sea menor que 10^{-3}?

   c) ¿Cuál de las fórmulas compuestas de los apartados anteriores será preferible utilizar para aproximar la integral dada? Justifique la respuesta.

Solución. Tenemos $f(x) = \ln^2 x,\ f''(x) = \frac{2}{x^2}(1-\ln x),\ f^{iv}(x) = \frac{2}{x^4}(11 - 6\ln x)$, acotadas respectivamente en valor absoluto por $M_2 = 2,\ M_4 = 22$.

   a) Trapecio: $R(f) = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi)$; $|R(f)| \leq \frac{2}{12N^2} \leq 10^{-3} \Rightarrow N \geq \sqrt{\frac{1000}{6}} \approx 12.9099$ luego $N = 13$ (requiere 14 evaluaciones de f).

   b) Simpson: $R(f) = -\frac{(b-a)h^4}{2880} f^{iv}(\xi)$; $|R(f)| \leq \frac{22}{2880N^4} \leq 10^{-3} \Rightarrow N \geq \sqrt[4]{\frac{22000}{2880}} \approx 1.66248$ luego $N = 2$ (dobles, requiere 5 evaluaciones de f).

   Simpson alternativa: $R(f) = -\frac{(b-a)h^4}{180} f^{iv}(\xi)$; $|R(f)| \leq \frac{22}{180N^4} \leq 10^{-3} \Rightarrow N \geq \sqrt[4]{\frac{22000}{180}} \approx 3.32497$ luego $N = 4$ (simples, requiere 5 evaluaciones de f).

21. Se consideran las fórmulas simples del rectángulo, del punto medio, del trapecio y de Simpson. ¿Alguna de ellas es una fórmula de cuadratura gaussiana? Justifique la respuesta.

Solución. Una fórmula con $n+1$ puntos tiene grado estándar de exactitud n. Si es gaussiana debe alcanzar el grado de exactitud máximo $2n+1$.

	Rectángulo	Punto medio	Trapecio	Simpson
Puntos $n+1$	1	1	2	3
Grado estándar n	0	0	1	2
Grado real	0	$\boxed{1}$	1	$\boxed{3}$
Grado máximo $2n+1$	1	1	3	5
¿Es gaussiana?	No	Sí	No	No

22. *a*) La fórmula numérica $f''(a) \approx \frac{3f(-2h)-5f(0)+2f(3h)}{15h^2}$

    1) ¿es de tipo interpolatorio clásico?

    2) ¿cuál su grado de exactitud?

b) ¿Existe alguna fórmula de derivación numérica, basada en $n+1$ nodos distintos, de la forma: $f''(a) \approx \alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_n f(x_n)$ que sea de tipo interpolatorio en $\mathbb{P}_n$ y tenga grado de exactitud $n+3$? Justifique la respuesta.

c) Justifique que la fórmula de integración numérica $\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{2}{3}(3f(0) + 3f'(0) + 2f''(0)) + R(f)$ es de tipo interpolatorio en $\mathbb{P}_2$ y para $f \in \mathcal{C}^3[0,2]$ su error se puede escribir como $R(f) = \frac{2}{3}f'''(\xi)$ con $\xi \in]0,2[$.

Solución.

a) 1) Es fácil ver que es exacta en $\{1, x, x^2\}$, luego es de t.i. clásico.

2) Al obligar exactitud en x^3 resulta que tendría que ser $a = h/3$. Si esto no se cumple, el grado de exactitud se queda en 2. Si se cumple $a = h/3$, entonces se pasa a comprobar en x^4 y tendría que salir $12a^2 = 14h^2$ con $a = h/3$, lo que no es posible, con lo que el grado se quedaría en 3.

b) El teorema visto en clase limita el grado de exactitud a un máximo de $n+k$, en este caso $n+2$. No existe ninguna fórmula de t.i. exacta en $\mathbb{P}_{n+3}$.

c) Se comprueba con facilidad que es exacta en $1, x, x^2$. Por otro lado (véase la interpolación de Taylor en Métodos Numéricos I)

$$R(f) = \int_0^2 E(x)\,dx = \int_0^2 f[0,0,0,x]x^3\,dx = \frac{f'''(\xi)}{3!}\frac{2^4}{4} = \frac{2}{3}f'''(\xi).$$

23. *a*) Calcule la fórmula de Gauss-Legendre con 2 nodos y halle la expresión de su error cuando $f \in \mathcal{C}^4[-1,1]$.

b) Usando la fórmula del apartado anterior, obtenga una fórmula para aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$ con $[a,b]$ un intervalo cualquiera. ¿Cuál es la expresión del error de dicha fórmula cuando f es suficientemente regular?

Solución.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(x_1) + R(f)$. Recursión de los polinomios ortogonales de Legendre:

$$P_0 = 1, \quad P_1 = x, \quad P_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} x P_n - \frac{n}{n+1} P_{n-1}$$

con lo que $P_2 = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} \Rightarrow x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}},\ x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Ahora los coeficientes

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_0 = \alpha_1 = 1.$$

Y el resto: $\displaystyle R(f) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \int_{-1}^{1} \Pi^2(x)\,dx = \frac{f^{iv}(\xi)}{24} \int_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx = \frac{1}{135} f^{iv}(\xi).$

b) Sea $x = a + (b-a)\frac{t+1}{2},\ dx = \frac{b-a}{2}dt,\ x_0 = a + \frac{b-a}{2}(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}),\ x_1 = a + \frac{b-a}{2}(1 + \frac{1}{\sqrt{3}})$. Entonces

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx &= \int_{-1}^{1} f\left(a + (b-a)\frac{t+1}{2}\right) \frac{b-a}{2}\,dt + R(f) \\ &= \frac{b-a}{2}(f(x_0) + f(x_1)) + R(f); \\ R(f) &= \frac{b-a}{2} \frac{1}{135} \left(\frac{b-a}{2}\right)^4 f^{iv}(\xi) = \frac{(b-a)^5}{4320} f^{iv}(\xi). \end{aligned}$$

24. Calcule la fórmula de Gauss-Legendre con 3 nodos y halle la expresión de su error cuando $f \in \mathcal{C}^6[1,1]$.

Solución. $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + R(f)$. Del problema anterior obtenemos: $P_3 = \frac{1}{2}x(5x^2 - 3) \Rightarrow x_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}},\ x_1 = 0,\ x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}$. Ahora los coeficientes

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{\frac{3}{5}} & 0 & \sqrt{\frac{3}{5}} \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_0 = \frac{5}{9} \\ \alpha_1 = \frac{8}{9} \\ \alpha_2 = \frac{5}{9} \end{cases}$$

Y el resto: $R(f) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \int_{-1}^{1} \Pi^2(x)\,dx = \frac{f^{vi}(\xi)}{6!} \frac{8}{175} = \frac{1}{15750} f^{vi}(\xi).$

25. Calcule la fórmula gaussiana con dos nodos de la forma $\int_{-1}^{1}|x|f(x)\,dx \approx \alpha_0 f(x_0)+\alpha_1 f(x_1)$ y halle la expresión de su error cuando $f \in \mathcal{C}^4[1,1]$.

Solución.

$$\int_{-1}^{1}|x|f(x)\,dx = \alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(x_1) + R(f)$$

Para ver los nodos sea $\Pi(x) = (x-x_0)(x-x_1) = x^2 - ax - b$. Entonces

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}|x|\Pi(x)\,dx &= 0 = \int_{-1}^{0}-x\Pi(x)\,dx + \int_{0}^{1}x\Pi(x)\,dx \\
&= \cdots = \frac{1}{2} - b \Rightarrow b = \frac{1}{2}; \\
\int_{-1}^{1}|x|x\Pi(x)\,dx &= 0 = \int_{-1}^{0}-x^2\Pi(x)\,dx + \int_{0}^{1}x^2\Pi(x)\,dx \\
&= \cdots = -\frac{a}{2} \Rightarrow a = 0; \\
&\Rightarrow \Pi(x) = x^2 - \frac{1}{2} \Rightarrow x_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Ahora los coeficientes

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_0 = \alpha_1 = \frac{1}{2}.$$

El error en las fórmulas gaussianas es en general

$$R(f) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\int_a^b \omega(x)f(x)\,dx$$

y en nuestro caso ($n=1$)

$$R(f) = \frac{f^{iv}(\xi)}{24}\int_{-1}^{1}|x|\Pi^2(x)\,dx = \frac{f^{iv}(\xi)}{24}\left(\int_{-1}^{0}-x\Pi^2(x)\,dx + \int_{0}^{1}x\Pi^2(x)\,dx\right) = \frac{f^{iv}(\xi)}{288}.$$

26. *a*) Determine los valores de A, B, C de forma que la fórmula de cuadratura $\int_0^3 f(x)\,dx \approx Af(0) + Bf(C)$ tenga grado de exactitud máximo.

b) Utilizando la fórmula obtenida en *a*), obtenga una fórmula para aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$ con $[a,b]$ un intervalo cualquiera.

c) Deduzca la fórmula de cuadratura compuesta asociada a la fórmula obtenida en *b*) para una partición uniforme del intervalo de integración $[a,b]$ en N subintervalos.

Solución.

a) Sea $\Pi(x) = x(x-C)$. La fórmula será exacta en al menos $\mathbb{P}_1$ por construcción. Para que lo sea en $\mathbb{P}_2$ es necesario que $\displaystyle\int_0^3 \Pi(x)\,dx = 9\left(1-\frac{C}{2}\right) = 0$, luego $C=2$. Ahora se impone exactitud en $1, x$ y resulta $A = \frac{3}{4},\ B = \frac{9}{4}$. Con esto la fórmula queda

$$\int_0^3 f(x)\,dx \approx \frac{3}{4}(f(0)+3f(2)),$$

exacta en $\mathbb{P}_2$ pero no en $\mathbb{P}_3$ puesto que es fácil ver que no lo es para x^3.

b) Cambio de variable

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \begin{bmatrix} x = a+(b-a)\frac{t}{3} \\ dx = \frac{b-a}{3}dt \end{bmatrix} = \int_0^3 f\left(a+(b-a)\frac{t}{3}\right)\frac{b-a}{3}dt \\ &\approx \frac{3}{4}\left(f(a)\frac{b-a}{3} + 3f\left(a+(b-a)\frac{2}{3}\right)\frac{b-a}{3}\right) \\ &= \frac{b-a}{4}\left(f(a)+3f(\tfrac{a+2b}{3})\right).\end{aligned}$$

c) Compuesta:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^N \frac{h}{4}\left(f(x_{i-1})+3f(\frac{x_{i-1}+2x_i}{3})\right) \\ &= \frac{h}{4}\left(\sum_{i=0}^{N-1} f(x_i) + 3\sum_{i=1}^N f(\frac{x_{i-1}+2x_i}{3})\right).\end{aligned}$$

27. Halle la fórmula de cuadratura de la forma $\int_{-1}^1 f(x)\,dx \approx \alpha_0 f(-1)+\alpha_1 f(x_1)+\alpha_2 f(1)$ que tiene el máximo grado de exactitud posible. ¿Cuál es ese grado de exactitud máximo? ¿Se trata de una fórmula de cuadratura gaussiana? ¿Por qué?

Solución.

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx = \alpha_0 f(-1)+\alpha_1 f(x_1)+\alpha_2 f(1)+R(f)$$

Para ver el nodo sea $\Pi(x) = (x^2-1)(x-x_1)$. Entonces

$$\int_{-1}^1 \Pi(x)\,dx = 0 = -\frac{2}{3}x_1 + 2x_1 \Rightarrow x_1 = 0;$$

luego se trata de la fórmula de Simpson. Los coeficientes han de ser $\alpha_0 = \alpha_2 = \frac{1}{3}$, $\alpha_1 = \frac{4}{3}$. Su grado de exactitud es 3, inferior al máximo 5 y no es gaussiana.

28. Las fórmulas gaussianas de Laguerre corresponden a una integral del tipo

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x)\, dx$$

a) Obtenga la fórmula de Laguerre con dos nodos.

b) Aplique la fórmula obtenida para aproximar $\int_0^\infty e^{-x} x^4\, dx$.

Solución. *a*) Definimos $\Pi(x) = (x - x_0)(x - x_1) = x^2 + ax + b$ y obligamos a dos grados de exactitud adicionales.

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^\infty e^{-x}(x^2 + ax + b)\, dx = 0 \\ \displaystyle\int_0^\infty e^{-x} x(x^2 + ax + b)\, dx = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = -4 \\ b = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_0 = 2 - \sqrt{2} \\ x_1 = 2 + \sqrt{2} \end{array}\right\}$$

Ahora, obligando exactitud en $\mathbb{P}_1$ para la fórmula

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x)\, dx \approx \alpha_0 f(2 - \sqrt{2}) + \alpha_1 f(2 + \sqrt{2})$$

resulta $\alpha_0 = \frac{1}{4}(2 + \sqrt{2})$, $\alpha_1 = \frac{1}{4}(2 - \sqrt{2})$.

b) $\int_0^\infty e^{-x} x^4\, dx \approx \frac{1}{4}(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})^4 + \frac{1}{4}(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})^4 = 20$. El valor exacto es 24.

29. Se denominan fórmulas de integración de Lobatto a aquellas que usan como nodos los dos extremos del intervalo de integración, y eligen los restantes para alcanzar la máxima exactitud posible. Trapecio y Simpson son ejemplos de fórmulas de Lobatto, siendo la del trapecio la más sencilla.

   a) Obtenga la fórmula de Lobatto del tipo

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \alpha_0 f(-1) + \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \alpha_3 f(1).$$

   b) Obtenga la expresión del error de dicha fórmula.

Solución. *a*) Definimos $\Pi(x) = (x+1)(x-1)(x-x_1)(x-x_2) = (x^2-1)(x^2+ax+b)$ y obligamos a dos grados de exactitud adicionales.

$$\left.\begin{array}{ll} \displaystyle\int_{-1}^{1} \Pi(x)\,dx = 0 & \Rightarrow b = -\frac{1}{5} \\ \displaystyle\int_{-1}^{1} x\Pi(x)\,dx = 0 & \Rightarrow a = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{array}\right\}$$

Ahora, obligando exactitud en $\mathbb{P}_3$ resulta $\alpha_0 = \frac{1}{6}$, $\alpha_1 = \frac{5}{6}$, $\alpha_2 = \frac{5}{6}$, $\alpha_3 = \frac{1}{6}$.

b) Dado que $\int_{-1}^{1} \Pi(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x\Pi(x)\,dx = 0$ en virtud del apartado anterior, se producen varias simplificaciones en el desarrollo, con lo que queda

$$\begin{aligned} R(f) &= \int_{-1}^{1} f[-1, x_1, x_2, 1, x]\Pi(x)\,dx \\ \cdots &= \int_{-1}^{1} f[-1, x_1, x_1, x_2, x_2, 1, x](x-x_1)(x-x_2)\Pi(x)\,dx \\ &= \frac{f^{(vi)}(\xi)}{6!}\left(\frac{-32}{525}\right) = -\frac{2f^{(vi)}(\xi)}{23625} \end{aligned}$$

30. Se necesita calcular $\int_0^1 xf(x)\,dx \approx \alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(x_1)$. Obtenga $x_0, x_1, \alpha_0, \alpha_1$ para que la fórmula anterior tenga exactitud máxima.

Solución. $\Pi(x) = (x - x_0)(x - x_1) = x^2 + ax + b$

$$\left.\begin{array}{lll} \displaystyle\int_0^1 x\Pi(x)\,dx = 0 & \Rightarrow \cdots & \dfrac{a}{3} + \dfrac{b}{2} = -\dfrac{1}{4} \\ \displaystyle\int_0^1 xx\Pi(x)\,dx = 0 & \Rightarrow \cdots & \dfrac{a}{4} + \dfrac{b}{3} = -\dfrac{1}{5} \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = -\dfrac{12}{10} \\ b = \dfrac{3}{10} \end{array}$$

y resolviendo $x^2 - \frac{12}{10}x + \frac{3}{10} = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{6-\sqrt{6}}{10}, x_1 = \frac{6+\sqrt{6}}{10}$ de donde $\alpha_0 = \frac{9-\sqrt{6}}{36}, \alpha_1 = \frac{9+\sqrt{6}}{36}$.