Variable Compleja I
Tema 5: Funciones elementales

La función exponencial compleja

Definición de la exponencial

Función exponencial real: $\exp x = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n\,!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

La serie $\sum_{n \geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ tiene radio de convergencia ∞

Función exponencial compleja: $\exp z = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n\,!} \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Primeras propiedades de la exponencial

E.1 La exponencial es una función entera que coincide con su derivada.

E.2 Fórmula de adición: $e^{z+w} = e^z e^w \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$

E.3 $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, $f'(z) = f(z) \ \ \forall z \in \mathbb{C} \implies \exists \lambda \in \mathbb{C} : f(z) = \lambda e^z \quad \forall z \in \mathbb{C}$

E.4 Es una función analítica en $\mathbb{C}$: $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^a}{n!}(z-a)^n \ \ \forall a, z \in \mathbb{C}$

$$(e^z)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n z^{n-1}}{n(n-1)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

E2 Fórmula adición

Fijamos $a\in\mathbb{C}$ y definimos $h:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ dada por $h(z)=e^z e^{a-z}$. h es holomorfa por ser producto y composición de funciones holomorfas. $h'(z)=e^z e^{a-z}-e^z e^{a-z}=0\ \ \forall z\in\mathbb{C} \Rightarrow h$ es cte. en $\mathbb{C}$

$+$

$\mathbb{C}$ conexo

$$\left.\begin{array}{l} h \text{ es cte. en } \mathbb{C} \\ + \\ h(0)=e^0\cdot e^a=e^a \end{array}\right\} e^a=h(z)=e^z e^{a-z}\quad \forall z\in\mathbb{C}$$

Fijados $z,w\in\mathbb{C}$ usamos lo anterior para $a=w+z$ y z:

$$e^{z+w}=e^z\cdot e^w$$

E3

Consideramos $h:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ dada por $h(z)=f(z)e^{-z}$

$h\in H(\mathbb{C})$ y $h(z)=f'(z)e^{-z}-f(z)e^{-z}\overset{\text{hip}}{=}0\quad\forall z\in\mathbb{C}$

$+$

$\mathbb{C}$ conexo

$\Rightarrow \exists\lambda\in\mathbb{C}$ tal que

$\lambda=h(z)=f(z)e^{-z}\quad\forall z\in\mathbb{C}$

$\lambda e^z=f(z)\quad\forall z\in\mathbb{C}$

Si suponemos además que $f(0)=1\Rightarrow 1=f(0)=\lambda e^0=\lambda\Rightarrow f(z)=e^z\quad\forall z\in\mathbb{C}$

E4

Fijando $a\in\mathbb{C}$ tenemos $e^z=e^{z-a}\cdot e^a=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{n!}e^a$

E7

Fijado $w\in\mathbb{C}^*$

$$e^z=w \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}|w|=|e^z|=e^{\operatorname{Re}z}\\ \wedge \\ \operatorname{Arg}(e^z)=\operatorname{Arg}w\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\operatorname{Re}z=\ln|w|\\ \wedge \\ \operatorname{Im}z\in\operatorname{Arg}w\end{array}\right.$$

Fijado $w\in\mathbb{C}^*$ tomamos $n\in\mathbb{N}$ tal que $2\pi n+\arg(w)>R$ y tomamos $z=\ln|w|+i(\arg(w)+2\pi n)$

$$e^z=e^{\ln|w|+i\arg(w)}\cdot \overset{=1}{e^{2\pi i n}}=w \quad \text{y} \quad |z|\geq|\operatorname{Im}z|>R$$

Más propiedades de la exponencial compleja

Fórmula de Euler y consecuencias

E.5 Fórmula de Euler: $e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t \quad \forall t \in \mathbb{R}$

E.6 Para todo $z \in \mathbb{C}$ se tiene: usar que $e^z = e^{\operatorname{Re} z}(\cos(\operatorname{Im} z) + i \operatorname{sen}(\operatorname{Im} z))$

$$\operatorname{Re} e^z = e^{\operatorname{Re} z} \cos(\operatorname{Im} z)$$
$$\operatorname{Im} e^z = e^{\operatorname{Re} z} \operatorname{sen}(\operatorname{Im} z)$$
$$|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$$
$$\operatorname{Arg}(e^z) = \{\operatorname{Im} z + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

E.7 La imagen de la exponencial es $\mathbb{C}^*$. De hecho, para todo $w \in \mathbb{C}^*$ se tiene:

$$\{z \in \mathbb{C} : e^z = w\} = \{\ln|w| + i\theta : \theta \in \operatorname{Arg} w\}$$

En particular, para todo $R \in \mathbb{R}^+$ se tiene: $\{e^z : z \in \mathbb{C}, |z| > R\} = \mathbb{C}^*$

Periodicidad de la exponencial

Funciones periódicas

$$\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}\ ,\ f \in \mathcal{F}(A)\ ,\ w \in \mathbb{C}$$

w es un periodo de f cuando:

$$\{z+w : z \in A\} = A \qquad \text{y} \qquad f(z+w) = f(z)\ \ \forall z \in A$$

f es una función función periódica cuando tiene un periodo $w \in \mathbb{C}^*$

El conjunto de todos los periodos de f es un subgrupo aditivo de $\mathbb{C}$

Cuando dicho subgrupo está engendrado por un sólo elemento $w \in \mathbb{C}^*$, es decir, tiene la forma $\{kw : k \in \mathbb{Z}\}$, se dice que f es simplemente periódica y que w es un periodo fundamental de f.

Periodicidad de la exponencial

E.8 La exponencial es una función simplemente periódica con periodo fundamental $2\pi i$.

$e^{\operatorname{Re} z}(\cos \cdots)$

$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z \quad \forall z \in \mathbb{C} \Longrightarrow w = \ln|1| + i\theta$ con $\theta \in \operatorname{Arg}(1) = 2\pi\mathbb{Z}$

Logaritmos de un número complejo

Conjunto de los logaritmos y logaritmo principal

El conjunto de los logaritmos de $z \in \mathbb{C}^*$:

$$\operatorname{Log} z = \{ w \in \mathbb{C} \ : \ e^w = z \} = \{ \ln |z| + i\theta \ : \ \theta \in \operatorname{Arg} z \}$$

Relación entre logaritmos y argumentos:

$$\operatorname{Arg} z = \operatorname{Im} \left(\operatorname{Log} z \right) \qquad \text{y} \qquad \operatorname{Log} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z$$

El logaritmo principal de $z \in \mathbb{C}^*$:

$$\log z = \ln |z| + i \arg z$$

La función $\log : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ también es el logaritmo principal

Extiende al logaritmo real: $\log x = \ln x \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

Propiedad algebraica de los logaritmos

$$2\pi i\mathbb{Z} \text{ es un subgrupo aditivo de } \mathbb{C}$$

$$\operatorname{Log} z \in \mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z} \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

La propiedad clave de los logaritmos

$\operatorname{Log} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z}$ es un isomorfismo de grupos

El logaritmo principal no tiene la propiedad anterior:

$$0 = \log 1 = \log\big((-1)(-1)\big) \neq \log(-1) + \log(-1) = 2\pi i$$

No podemos elegir un logaritmo para tener dicha propiedad:

No existe una función $g : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ verificando:

$$g(z) \in \operatorname{Log} z \quad \forall z \in \mathbb{C}^* \qquad \text{y} \qquad g(zw) = g(z) + g(w) \quad \forall z, w \in \mathbb{C}^*$$

Supongamos lo contrario: $g : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ verifica

Tomando $\varphi = \operatorname{Im} g$ $\quad \varphi(z) = \operatorname{Im}(g(z)) \in \operatorname{Arg} z$

$\varphi(zw) = \operatorname{Im}(g(zw)) = \operatorname{Im}(g(z) + g(w)) = \operatorname{Im}(g(z)) + \operatorname{Im}(g(w)) = \varphi(z) + \varphi(w)$!!

Planteamiento del problema del logaritmo holomorfo

Logaritmos holomorfos en un abierto

$\emptyset \neq \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}^*$. Un logaritmo en Ω es una función $g : \Omega \to \mathbb{C}$ verificando:

$$g(z) \in \operatorname{Log} z \quad \forall z \in \Omega \qquad \text{es decir,} \quad e^{g(z)} = z \quad \forall z \in \Omega$$

¿Existe un logaritmo holomorfo en Ω?

Debemos caracterizar abiertos en los que esto se cumple

Logaritmos y argumentos de una función

$$\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}\ ,\ f : A \to \mathbb{C}^*$$

- Un logaritmo de f es una función $g : A \to \mathbb{C}$ que verifique:

  $g(z) \in \operatorname{Log} f(z) \quad \forall z \in A$, es decir, $e^{g(z)} = f(z) \quad \forall z \in A$
- Un argumento de f es una función $\varphi : A \to \mathbb{R}$ que verifique:

  $$\varphi(z) \in \operatorname{Arg} f(z) \quad \forall z \in A$$

g logaritmo de $f \implies \varphi = \operatorname{Im} g$ argumento de f

φ argumento de $f \implies g = \ln|f| + i\varphi$ logaritmo de f

$$\emptyset \neq \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}\ ,\ f \in \mathcal{H}(\Omega)\ ,\ f(\Omega) \subset \mathbb{C}^*$$

Problema: ¿Tiene f un logaritmo holomorfo?

Observaciones sobre el problema del logaritmo holomorfo

Lema 1: Derivabilidad de un logaritmo continuo

$$\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}\ ,\ f : A \to \mathbb{C}^*\ ,\ g \ \text{ un logaritmo de } f$$

$$\left.\begin{array}{r} f \ \text{ derivable en } \ a \in A \cap A' \\ g \ \text{ continua en } \ a \end{array}\right\} \implies g \ \text{ derivable en } \ a \ \text{ con } \ g'(a) = \frac{f'(a)}{f(a)}$$

Lema 2: Logaritmos holomorfos y primitivas

$$\emptyset \neq \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}\ ,\ f \in \mathcal{H}(\Omega)\ ,\ f(\Omega) \subset \mathbb{C}^*$$

No necesariamente conexo

Si $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ verifica que $g'(z) = \dfrac{f'(z)}{f(z)}$ para todo $z \in \Omega$,

entonces existe $\lambda \in \mathcal{H}(\Omega)$, tal que $\lambda + g$ es un logaritmo de f y

λ es constante en cada componente conexa de Ω.

Dem.: Consideramos $\phi : \mathbb{C}\setminus\{g(a)\} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\phi(w) = \frac{e^w - e^{g(a)}}{w - g(a)}$$

Lema 1

$$\phi(g(a)) = \lim_{w\to g(a)} \frac{e^w - e^{g(a)}}{w - g(a)} = (e^w)'|_{g(a)} = \underset{\neq 0}{e^{g(a)}} = f(a)$$

$$\left.\begin{array}{l}\phi \text{ continua en } g(a) \\ \quad + \\ \phi(g(a)) \neq 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \exists r>0 \text{ tal que } \forall w\in D(g(a),r) \quad \phi(w)\neq 0$$

$\forall w \in D(g(a),r)$ se tiene $\quad w - g(a) = \frac{1}{\phi(w)}(e^w - e^{g(a)})$

Como f es continua en a $\exists \delta>0$ tq si $z\in A$ y $|z-a|<\delta$ entonces $|g(z)-g(a)|<r \Rightarrow g(z)\in D(g(a),r)$

$\forall z\in A\cap D(a,r)$ $z\neq a$ usamos $(*)$ para escribir:

$$\frac{g(z)-g(a)}{z-a} = \frac{1}{\phi(g(z))}\cdot\frac{(e^{g(z)}-e^{g(a)})}{z-a} = \underbrace{\frac{1}{\phi(g(z))}}_{\downarrow\ \phi\circ g \text{ cont.}\ \frac{1}{\phi(g(a))}}\cdot\underbrace{\frac{f(z)-f(a)}{z-a}}_{\searrow f'(a)}$$

Lema 2

Sea $h : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $h(z) = f(z)e^{-g(z)}$

h es holomorfa $\Rightarrow h'(z) = f'(z)e^{-g(z)} - f(z)e^{-g(z)}\underset{\overset{\text{hip.}}{=}\ \frac{f'(z)}{f(z)}}{g'(z)} = 0 \quad \forall z\in\Omega \Rightarrow h$ cte. en cada componente conexa de Ω.

Definimos $\lambda : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ por $\lambda(z) = \log(h(z))$ $\quad \lambda$ es cte. en cada comp. conexa de $\Omega \Longrightarrow \lambda \in H(\Omega)$

$$e^{\lambda(z)+g(z)} = e^{\lambda(z)} e^{g(z)} = h(z) e^{g(z)} = f(z) e^{-g(z)} e^{g(z)} = f(z) \quad \forall z \in \Omega$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda(z) + g(z) \in \log(f(z)) \quad \forall z \in \Omega)$$

* Fijamos $a \in \mathbb{C}^*$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+z-a} = \frac{\frac{1}{a}}{1-\left(\frac{z-a}{a}\right)} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1-\frac{-(z-a)}{a}} = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-(z-a))^n}{a^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^{n+1}} (z-a)^n \quad \forall z \in D(a,|a|)$$

$$w = \frac{z-a}{a}$$

$$|w| < 1 \Longleftrightarrow z \in D(a,|a|)$$

La función $g_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^{n+1}} \cdot \frac{(z-a)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot a^n} (z-a)^n \quad \forall z \in D(a,|a|)$ cumple $g_1 \in H(D(a,|a|))$

$$\left. \begin{array}{l} g_1'(z) = \frac{1}{z} \quad \forall z \in D(a,|a|) \\ + D(a,|a|) \text{ conexo} \end{array} \right\} \underset{\text{Lema 2}}{\Longrightarrow} \exists \lambda \in \mathbb{C} \text{ tq } g(z) = \lambda + g_1(z) \text{ es un logaritmo de la identidad}$$

$e^{\lambda + g_1(z)} = z \quad \forall z \in D(a,|a|)$ evaluamos en a y obtenemos

$e^{\lambda} = a \Longleftrightarrow \lambda \in \log(a)$ $\quad$ podemos elegir $\lambda = \log(a)$

$$[z^w] = \{e^{w\lambda} ; \lambda \in \mathcal{L}og(z)\} \rightarrow \log(z) + 2\pi i \mathbb{Z} = \{\log(z) + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$e^{w\lambda} = e^{w(\log(z) + 2k\pi i)} \underset{\text{adición}}{=} e^{w \log z} e^{2\pi k i w}$$

Consecuencia de los lemas anteriores

Primitivas

$$\emptyset \neq \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C} \ , \ h \in \mathcal{F}(\Omega)$$

Una primitiva de h es una función $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $g' = h$

Consecuencia de los resultados anteriores

Para $\emptyset \neq \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $f(\Omega) \subset \mathbb{C}^*$, son equivalentes:

- f tiene un argumento continuo
- f tiene un logaritmo continuo
- f tiene un logaritmo holomorfo
- f'/f tiene una primitiva

Multiplicas por i y sumas ln Parte imaginaria

Lema 1 Obvia

Lema 2

Ejemplos de logaritmos holomorfos

Holomorfía del logaritmo principal

$$\log \in \mathcal{H}\left(\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-\right) \qquad \text{con} \qquad \log'(z) = \frac{1}{z} \quad \forall z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$$

$\log$ no tiene límite en ningún punto de $\mathbb{R}^-$

Logaritmos análogos al principal

Fijado $\theta \in \mathbb{R}$, definimos un logaritmo en $\mathbb{C}^*$:

$$f_\theta(z) = \log\left(e^{i(\pi-\theta)}z\right) - i(\pi-\theta) \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

Entonces $\quad f \in \mathcal{H}(\Omega_\theta) \quad$ donde $\quad \Omega_\theta = \mathbb{C}^* \setminus \{\rho\, e^{i\theta} : \rho \in \mathbb{R}^+\}$

Otra forma de construir logaritmos holomorfos

Un ejemplo de función analítica

Fijado $a \in \mathbb{C}^*$ arbitrario, se tiene:

$$\ast \qquad \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^{n+1}} (z-a)^n \qquad \forall z \in D\big(a, |a|\big)$$

Logaritmo holomorfo en un disco que no contenga al origen

Fijado $a \in \mathbb{C}^*$, definiendo:

$$g(z) = \log a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\,a^n} (z-a)^n \qquad \forall z \in D\big(a, |a|\big)$$

se tiene que $g \in \mathcal{H}\big(D(a,|a|)\big)$ y $e^{g(z)} = z$ para todo $z \in D\big(a,|a|\big)$.

Analiticidad del logaritmo principal

Desarrollos en serie del logaritmo principal

Para $a \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$, sea $\rho_a = \begin{cases} |a| & \text{si } \operatorname{Re} a \geqslant 0 \\ |\operatorname{Im} a| & \text{si } \operatorname{Re} a < 0 \end{cases}$

Entonces:

$$\log z = \log a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\,a^n}(z-a)^n \qquad \forall z \in D(a, \rho_a)$$

En particular, el logaritmo principal es una función analítica en $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$.

Potencia de base y exponente complejos

Definición de la potencia

Motivación: $x^y = e^{y \ln x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \,,\ \forall y \in \mathbb{R}$

Potencia de base $z \in \mathbb{C}^*$ y exponente $w \in \mathbb{C}$:

$$\left[z^w\right] = \exp\left(w \operatorname{Log} z\right) = \left\{\exp(w\lambda) \,:\, \lambda \in \operatorname{Log} z\right\}$$

Potencia principal

Calculemos $\exp(w \log z)$ en casos conocidos:

- $z \in \mathbb{C}^* \,,\ w = p \in \mathbb{Z} \implies \exp(p \log z) = z^p$
- $z = x \in \mathbb{R}^+ \,,\ w = y \in \mathbb{R} \implies \exp(y \log x) = x^y$
- $z = e \,,\ w \in \mathbb{C} \implies \exp(w \log e) = e^w$

Potencia principal de base $z \in \mathbb{C}^*$ y exponente $w \in \mathbb{C}$:

$$z^w = \exp(w \log z)$$

$$\left[z^w\right] = \left\{\underbrace{z^w}_{e^{w \ln z}}\, \underbrace{e^{2k\pi i w}}_{e^{2k\pi i w}} \,:\, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$e^{w \ln z} e^{2k\pi i w} = e^{w \ln z + 2k\pi i w} = e^{w(\ln z + k 2\pi i)}$$

Número de elementos de la potencia

Exponente no racional

Para $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ y $z \in \mathbb{C}^*$

la aplicación $k \mapsto z^w e^{2k\pi i w}$, de $\mathbb{Z}$ en $[z^w]$, es biyectiva

Que es sobreyectiva está claro por la propia definición

luego el conjunto $[z^w]$ es infinito numerable

Inyectividad: $r, s \in \mathbb{Z} \,/\, \varphi(r) = \varphi(s) \Longrightarrow z^w \cdot e^{2r\pi i w} = z^w \cdot e^{2s\pi i w} \Longrightarrow rw - sw \in \mathbb{Z} \Rightarrow (r-s)w \Rightarrow r - s = 0 \Rightarrow \varphi$ iny.

Raíces n-ésimas

Para cada $n \in \mathbb{N}$, todo $z \in \mathbb{C}^*$ tiene n raíces n-ésimas distintas, que son los elementos de la potencia $[z^{1/n}]$:

Tiene n elementos

$$[z^{1/n}] = \{ v \in \mathbb{C} \,:\, v^n = z \} = \{ z^{1/n} e^{2r\pi i/n} \,:\, r \in \mathbb{Z},\ 0 \leqslant r < n \}$$

Raíz n-ésima principal: $z^{1/n} = \exp\big((1/n)\log z\big) \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$

En $\mathbb{R}^+$ es la raíz n-ésima positiva: $x^{1/n} = \sqrt[n]{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

Raíces n-ésimas de la unidad:

$$[1^{1/n}] = \{ 1, u_n, u_n^2, \ldots, u_n^{n-1} \} \quad \text{donde} \quad u_n = e^{2\pi i/n}$$

$$[z^{1/n}] = \{ z^{1/n} u_n^r \,:\, r \in \mathbb{Z},\ 0 \leqslant r < n \} \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

$$[z^{1/n}] = \{ \sqrt[n]{|z|}\, e^{i(\arg z + 2r\pi)/n} \,:\, r \in \mathbb{Z},\ 0 \leqslant r < n \}$$

Número de elementos de la potencia

Exponente racional

Si $w \in \mathbb{Q}$ y $n = \min\{m \in \mathbb{N} : mw \in \mathbb{Z}\}$, entonces $[z^w]$ tiene exactamente n elementos, para todo $z \in \mathbb{C}^*$. Concretamente, si $p = nw \in \mathbb{Z}$ se tiene:

$$[z^w] = [z^{p/n}] = \{ v^p : v \in [z^{1/n}] \}$$

$$z^{p/n} e^{2\pi i p/n} = (z^{1/n})^p (e^{2\pi i k/n})^p = (\underbrace{z^{1/n} e^{2\pi k i/n}}_{[z^{1/n}]})^p$$

Funciones exponenciales y funciones potencia

Funciones exponenciales

Fijado $a \in \mathbb{C}^*$, función exponencial de base a:

$$\exp_a : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad \exp_a(z) = a^z = e^{z \log a} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Es una función entera y verifica: $a^{z+w} = a^z a^w \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$

En general, $\left[a^{z+w}\right]$ no coincide con $\left[a^z\right]\left[a^w\right]$ $\longrightarrow$ $a = 1 \quad z = \frac{1}{2} = w$

$\left[a^{z+w}\right] = \left[1^1\right] = \{1\}$

$\left[a^z\right] = \left[1^{1/2}\right] = \{1, -1\} = \left[a^w\right]$

Acerca de las funciones potencia

Fijado $\alpha \in \mathbb{C}$, para $z, w \in \mathbb{C}^*$ se tiene:

$$\left[(zw)^\alpha\right] = \left[z^\alpha\right]\left[w^\alpha\right]$$

En general, $(zw)^\alpha$ no coincide con $z^\alpha w^\alpha$

Raíces n-ésimas holomorfas

Raíz n-ésima en un conjunto

$$\emptyset \neq A \subset \mathbb{C} \ , \ n \in \mathbb{N}$$

Una raíz n-ésima en A es una función $\varphi : A \to \mathbb{C}$ tal que:

$$\varphi(z)^n = z \qquad \forall z \in A$$

Problema: si $\emptyset \neq \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}$,

¿Existe una raíz n-ésima holomorfa en Ω?

Relación con el problema del logaritmo

$$\emptyset \neq \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}^*$$

Si existe un logaritmo holomorfo en Ω, entonces,

existe una raíz n-ésima holomorfa en Ω, para todo $n \in \mathbb{N}$

Dem.: Si $g \in H(\Omega)$ tal que $e^{g(z)} = z \ \forall z \in \Omega$ (g es un log. holomorfo)

entonces $\varphi(z) = e^{1/n\, g(z)}$ $\varphi \in H(\Omega)$ y además $(\varphi(z))^n = (e^{1/n\, g(z)})^n \underset{\text{fla. adición}}{=} e^{g(z)} = z \ \forall z \in \Omega$

Algunas respuestas negativas

Al problema de la raíz cuadrada

$$\text{Si} \quad r \in \mathbb{R}^+ \quad \text{y} \quad S = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\},$$

¡¡ No existe una raíz cuadrada continua en S !!

Si $0 \in \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}$, no existe una raíz cuadrada continua en Ω

Al problema del logaritmo o de la primitiva

- No existe una raíz cuadrada holomorfa en $\mathbb{C}^*$
- No existe un logaritmo holomorfo en $\mathbb{C}^*$
- La función $z \mapsto 1/z$, definida en $\mathbb{C}^*$, no tiene primitiva

El seno y el coseno

$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$

$e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x$

$e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x \Longrightarrow \cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$

Definiciones

Las funciones coseno y seno se definen, para todo $z \in \mathbb{C}$ por:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Primeras propiedades

- Son funciones enteras: Porque la exponencial es entera

$$\operatorname{sen}' z = \cos z \quad \text{y} \quad \cos'(z) = -\operatorname{sen} z \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

- Son sumas de series de potencias convergentes en todo el plano: Sale de usar el desarrollo en serie de la exponencial

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \quad \xrightarrow[\text{Derivando}]{\text{y}} \quad \operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

- El coseno es par y el seno es impar:

$$\cos(-z) = \cos z \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

El seno y el coseno

$\cos(z+w) + i\,\mathrm{sen}(z+w) = e^{i(z+w)} = e^{iz}e^{iw} = (\cos z + i\,\mathrm{sen}\, z)(\cos w + i\,\mathrm{sen}\, w) =$

$= \cos z \cos w - \mathrm{sen}\, z\, \mathrm{sen}\, w + i(\cos z\, \mathrm{sen}\, w + \mathrm{sen}\, z \cos w)$

$\cos(z+w) - i\,\mathrm{sen}(z+w) = e^{-i(z+w)} = e^{-iz}e^{-iw} = (\cos z - i\,\mathrm{sen}\, z)(\cos w - i\,\mathrm{sen}\, w) =$

$\cos z \cos w - \mathrm{sen}\, z\, \mathrm{sen}\, w - i(\cos z\, \mathrm{sen}\, w + \mathrm{sen}\, z \cos w)$

Sumando las 2 expresiones:

$2\cos(z+w) = 2(\cos z \cos w - \mathrm{sen}\, z\, \mathrm{sen}\, w)$ y $2i\,\mathrm{sen}(z+w) = 2i(\mathrm{sen}\, z \cos w + \cos z\, \mathrm{sen}\, w)$

Fórmulas de adición y consecuencias

- Para cualesquiera $z, w \in \mathbb{C}$ se tiene:

$$\cos(z+w) = \cos z \cos w - \mathrm{sen}\, z\, \mathrm{sen}\, w \qquad \text{y}$$
$$\mathrm{sen}(z+w) = \mathrm{sen}\, z \cos w + \cos z\, \mathrm{sen}\, w$$

- Consecuencias: para cualesquiera $z \in \mathbb{C}$ y $k \in \mathbb{Z}$ se tiene:
  - $\cos\big(z + (\pi/2)\big) = -\,\mathrm{sen}\, z \qquad$ y $\qquad \mathrm{sen}\big(z + (\pi/2)\big) = \cos z$
  - $\cos\big(z + k\pi\big) = (-1)^k \cos z \qquad$ y $\qquad \mathrm{sen}\big(z + k\pi\big) = (-1)^k\, \mathrm{sen}\, z$
  - En particular, 2π es un periodo del seno y del coseno
  - $\mathrm{sen}^2 z + \cos^2 z = 1 \qquad \forall z \in \mathbb{C}$

Funciones hiperbólicas

Seno y coseno hiperbólicos

Para $z \in \mathbb{C}$ se define:

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sh} z = \underbrace{\frac{e^z - e^{-z}}{2}}_{\text{estr. creciente}}$$

Algunas propiedades inmediatas

Para todo $z \in \mathbb{C}$ se tiene:

- $\operatorname{ch}'(z) = \operatorname{sh} z$, y $\operatorname{sh}'(z) = \operatorname{ch} z$
- $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$
- $\cos z = \operatorname{ch}(iz)$ y $\operatorname{sen} z = -i \operatorname{sh}(iz)$

En particular, para todo $y \in \mathbb{R}$ será:

- $\cos(iy) = \operatorname{ch} y$ y $\operatorname{sen}(iy) = i \operatorname{sh} y$

Otras propiedades del seno y el coseno

Partes real e imaginaria y módulo

Para $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$\cos z = \cos x \;\operatorname{ch} y - i \operatorname{sen} x \;\operatorname{sh} y$$
$$\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \;\operatorname{ch} y + i \cos x \;\operatorname{sh} y$$

de donde:

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y$$
$$|\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sh}^2 y$$

Imagen del seno y el coseno

Para $z, w \in \mathbb{C}$ se tiene $e^{iz} + e^{-iz} = 2w \to (e^{iz})^2 + 1 = 2we^{iz} \to \underbrace{(e^{iz})^2 - 2we^{iz} + w^2}_{(e^{iz}-w)^2} = w^2 - 1$

$$\cos z = w \iff z \in -i \operatorname{Log}\left(w \pm (w^2 - 1)^{1/2}\right)$$

$e^{iz} - w = \pm\sqrt{w^2-1}$

$e^{iz} = w \pm \sqrt{w^2-1}$

$\Updownarrow$

$iz \in \log(w \pm \sqrt{w^2-1})$

$z \in -i \log(w \pm \sqrt{w^2-1})$

Por tanto, la imagen del coseno y del seno es $\mathbb{C}$

En particular: $\cos z = 0 \iff z = (2k+1)\pi/2$ con $k \in \mathbb{Z}$

La tangente

Definición

En el dominio $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{(2k+1)\pi/2 : k \in \mathbb{Z}\}$ se define la función tangente:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z} \qquad \forall z \in \Omega$$

Algunas propiedades

- $\operatorname{tg} \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $\operatorname{tg}'(z) = 1 + \operatorname{tg}^2 z \;\; \forall z \in \Omega$.
- $\{z+\pi : z \in \Omega\} = \Omega$ y $\operatorname{tg}(z+\pi) = \operatorname{tg} z \;\; \forall z \in \Omega$
  luego π es un periodo de la tangente

$\operatorname{tg} z = w \iff \operatorname{sen} z = \cos z \cdot w \iff \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{\cancel{2}} = \frac{iw(e^{iz}+e^{-iz})}{\cancel{2}}$

$\iff e^{iz}(1-iw) = e^{-iz}(1+iw) \iff$

•) No tiene sol. si $w = \pm i$

•) Si $w \neq \pm i$, $e^{2iz} = \frac{1+iw}{1-iw} \iff 2iz \in \log\left(\frac{1+iw}{1-iw}\right)$

$\iff z \in \frac{1}{2i} \log\left(\frac{1+iw}{1-iw}\right)$

- $\operatorname{tg} z \neq \pm i \quad \forall z \in \Omega$
- Para $w \in \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ y $z \in \Omega$ se tiene:

$$\operatorname{tg} z = w \quad \Leftrightarrow \quad z \in \frac{1}{2i} \operatorname{Log}\left(\frac{1+iw}{1-iw}\right)$$

- Por tanto, la imagen de la tangente es $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$

El arco-tangente

El conjunto arco-tangente

Para $z \in \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ definimos el conjunto arco-tangente de z por

$$\operatorname{Arc\,tg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Log}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$$

El arco-tangente principal

La función arco-tangente principal se define en $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ por:

$$\operatorname{arc\,tg} z = \frac{1}{2i} \log\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$$

Extiende a la función arco-tangente real, lo que justifica la notación

Si probamos que $\varphi: \mathbb{C}\setminus\{i\} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $\varphi(z) = \dfrac{1+iz}{1-iz}$ verifica $\varphi(U) \subseteq \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$ tendremos que $\operatorname{arctg} \in H(U)$ como composición de funciones holomorfas. Veamos que si $\varphi(z) \in \mathbb{R}^-$ entonces $z \notin U$:

Para $z \in \mathbb{C}\setminus\{\pm i\}$

$$\varphi(z) \in \mathbb{R}^- \Rightarrow \exists r>0 \text{ tal que } \frac{1+iz}{1-iz} = -r \Rightarrow 1+iz = -r+izr \Rightarrow 1+r = iz(r-1) \overset{r\neq 1}{\Longrightarrow} z = \frac{1+r}{i(r-1)} = i\frac{1+r}{1-r}$$

$f:]0,1[\cup]1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ $f(r) = \dfrac{1+r}{1-r}$ es estr. creciente $f'(r) = \dfrac{1-r+(1+r)}{(1-r)^2} = \dfrac{2}{(1-r)^2}$

$$f(]0,1[) =]1,+\infty[\quad f(]1,+\infty[) =]-\infty,-1[$$

Luego $\operatorname{arctg}(z) = \dfrac{1}{2i} \log\left(\dfrac{1+iz}{1-iz}\right)$

$$\operatorname{arctg}(z)' = \frac{1}{2i} \cdot \frac{\dfrac{i(1-iz)+i(1+iz)}{(1-iz)^2}}{\dfrac{1+iz}{1-iz}} = \frac{1}{(1-iz)(1+iz)} = \frac{1}{1-i^2z^2} = \frac{1}{1+z^2}$$

Veamos que arctg extiende a la arctg real:

Consideramos $\operatorname{arctg}_{|\mathbb{R}}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$

Definimos $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad g = \operatorname{Re} \circ \operatorname{arctg}_{|\mathbb{R}}$

g es dif. porque Re y arctg son dif., luego g es derivable en $\mathbb{R}$

Si llamamos $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a la arcotangente real tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} g'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} = f'(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ y \quad g(0) = \operatorname{Re}(0) = 0 = f(0) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1-\underbrace{(-z^2)}_{w}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \quad \forall z \in D(0,1)$$

$|-z^2| < 1 \Leftrightarrow |z| < 1$

$$\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n \quad |w|<1$$

La función $g: D(0,1) \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $g(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1}$ es holomorfa en

$$\left.\begin{array}{l} D(0,1) \text{ y } g'(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} = \frac{1}{1+z^2} = \operatorname{arctg}'(z) \quad \forall z \in D(0,1) \\ + \\ g(0) = 0 = \operatorname{arctg}(0) \end{array}\right\} \Rightarrow g(z) = \operatorname{arctg} z \quad \forall z \in D(0,1)$$

Propiedades del arco-tangente principal

Algunas propiedades

- La función arco-tangente principal es holomorfa en el dominio:

$$U = \mathbb{C} \setminus \{ iy \ : \ y \in \mathbb{R} \, , \ |y| \geqslant 1 \}$$

  verificando que:

$$\operatorname{arc\,tg}'(z) = \frac{1}{1+z^2} \qquad \forall z \in U$$

- En $D(0,1)$ se expresa como suma de una serie de potencias:

$$\operatorname{arc\,tg} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1} \qquad \forall z \in D(0,1)$$