

Variable Compleja I

Tema 3: Funciones holomorfas

Derivada	Ecuaciones de C-R	Reglas de derivación	Funciones holomorfas	Primeras propiedades
oo	ooo	ooo	oo	oooo

- 1 Derivada
- 2 Ecuaciones de C-R
- 3 Reglas de derivación
- 4 Funciones holomorfas
- 5 Primeras propiedades

Derivada

Definición de derivada

$$\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}, f \in \mathcal{F}(A), a \in A \cap A'$$

$$\text{Definimos } f_a : A \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C} \text{ por: } f_a(z) = \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \quad \forall z \in A \setminus \{a\}$$

Decimos que f es **derivable** en el punto a cuando f_a tiene límite en a

En tal caso, la **derivada** de f en a viene dada por:

$$f'(a) = \lim_{z \rightarrow a} f_a(z) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

Si $\emptyset \neq B \subset A \cap A'$, f es derivable en B cuando lo es en todo punto de B .

Sea ahora $A_1 = \{z \in A \cap A' : f \text{ es derivable en } z\}$.

La función $z \rightarrow f'(z)$ es la **función derivada** de f :

$$f' : A_1 \rightarrow \mathbb{C}, \quad f'(z) = \lim_{w \rightarrow z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} \quad \forall z \in A_1$$

Primeras observaciones

Relación con la continuidad

$$f \text{ derivable en } a \implies f \text{ continua en } a$$

Carácter local

$$\begin{aligned}
 & B \subset A, \quad b \in B \cap B' \\
 & f \text{ derivable en } b \implies \left. \begin{aligned} & f|_B \text{ derivable en } b \text{ con } (f|_B)'(b) = f'(b) \\ & \exists \delta > 0 : D(b, \delta) \cap A \subset B \end{aligned} \right\} \implies f \text{ derivable en } b
 \end{aligned}$$

Funciones de variable real

- Para funciones reales de variable real, la definición de derivada recién introducida coincide con la que ya conocíamos
- Supongamos $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ y $a \in A \cap A'$. Entonces f es derivable en a si, y sólo si, $\operatorname{Re} f$ y $\operatorname{Im} f$ son derivables en a , en cuyo caso:

$$f'(a) = (\operatorname{Re} f)'(a) + i(\operatorname{Im} f)'(a)$$

Ecuaciones de Cauchy-Riemann

Teorema

$$\emptyset \neq A \subset \mathbb{C} (\equiv \mathbb{R}^2) , \quad f \in \mathcal{F}(A)$$

Sean $u, v : A \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas, para todo $(x, y) \in A$, por

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy) \quad \text{y} \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$$

Para $z_0 = (x_0, y_0) \in A^\circ$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i) f es derivable en el punto z_0
- (ii) u y v son diferenciables en el punto (x_0, y_0) , verificando que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Caso de que se cumplan (i) y (ii), se tiene:

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Observaciones

Observaciones

Las igualdades que aparecen en la afirmación (ii) del teorema anterior se conocen como **ecuaciones de Cauchy-Riemann**. Cuando A es abierto y f es derivable en A , las funciones u y v son soluciones de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Usando dichas ecuaciones, la derivada $f'(z_0)$ puede expresarse de cuatro formas, en términos de las derivadas parciales de u y v . Concretamente:

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

entendiendo que todas las derivadas parciales se evalúan en el punto (x_0, y_0) .

Ejemplos

Un ejemplo negativo

$$f(z) = \operatorname{Re} z \quad \forall z \in \mathbb{C}; \quad u(x,y) = x \quad y \quad v(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 1 \neq 0 = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

∴ f no es derivable en ningún punto del plano !!

Un ejemplo positivo

La función **exponencial**: $f(z) = e^{\operatorname{Re} z} (\cos(\operatorname{Im} z) + i \operatorname{sen}(\operatorname{Im} z)) \quad \forall z \in \mathbb{C}$

$$u(x,y) = e^x \cos y \quad y \quad v(x,y) = e^x \operatorname{sen} y \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$u, v \text{ son diferenciables en } \mathbb{R}^2 \text{ con } \frac{\partial u}{\partial x} = u = \frac{\partial v}{\partial y} \quad y \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -v = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\text{luego } f \text{ es derivable en } \mathbb{C} \text{ con } f' = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = u + iv = f$$

Operaciones algebraicas

Ejemplos obvios

- $\lambda \in \mathbb{C}, f(z) = \lambda \quad \forall z \in \mathbb{C} \implies f'(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $f(z) = z \quad \forall z \in \mathbb{C} \implies f'(z) = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Sumas, productos y cocientes

$\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$, $f, g \in \mathcal{F}(A)$, derivables en un punto $a \in A \cap A'$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces:

- $f + g$ es derivable en a con $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
- fg es derivable en a con $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$
- λf es derivable en a con $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$
- Suponiendo que $g(A) \subset \mathbb{C}^*$, entonces f/g es derivable en a con

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$$

Polinomios

Potencias de exponente natural

Fijado $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n \in \mathcal{F}(\mathbb{C})$ dada por: $f_n(z) = z^n \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

Entonces f_n es derivable en \mathbb{C} con: $f'_n(z) = n z^{n-1} \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Polinomios

$\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$. Decimos que $P \in \mathcal{F}(A)$ es una **función polinómica** cuando existen $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ tales que

$$P(z) = \sum_{k=0}^n \alpha_k z^k \quad \forall z \in A$$

Entonces P es derivable en $A \cap A'$ y su derivada es la función polinómica dada por

$$P'(z) = \sum_{k=1}^n k \alpha_k z^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \alpha_{k+1} z^k \quad \forall z \in A \cap A'$$

Funciones racionales y regla de la cadena

Funciones racionales

$f \in \mathcal{F}(A)$ es una **función racional** cuando existen funciones polinómicas $P, Q \in \mathcal{F}(A)$ tales que:

$$Q(z) \neq 0 \quad \text{y} \quad f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \quad \forall z \in A$$

Entonces f es derivable en $A \cap A'$ y su derivada $f' : A \cap A' \rightarrow \mathbb{C}$ es otra función racional.

Regla de la cadena

Sea $A \subset \mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{F}(A)$ una función derivable en un punto $a \in A \cap A'$.

Supongamos que $f(A) \subset B \subset \mathbb{C}$, que $f(a) \in B'$ y que $g \in \mathcal{F}(B)$ es derivable en el punto $f(a)$.

Entonces $g \circ f$ es derivable en a con

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) f'(a)$$

Funciones holomorfas

Definición

$$\emptyset \neq \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}, \quad f \in \mathcal{F}(\Omega)$$

f es **holomorfa** en Ω cuando es derivable en todo punto de Ω

El conjunto de todas las funciones holomorfas en Ω se denota por $\mathcal{H}(\Omega)$

Observaciones

- Las funciones holomorfas son continuas, pero el recíproco es falso:

$$\mathcal{H}(\Omega) \subsetneq \mathcal{C}(\Omega) \subsetneq \mathcal{F}(\Omega)$$

- La holomorfía es una propiedad local: Supongamos que $\Omega = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ donde Λ es un conjunto no vacío arbitrario y U_λ es un abierto no vacío de \mathbb{C} para todo $\lambda \in \Lambda$. Para cada $\lambda \in \Lambda$ sea f_λ la restricción de f a U_λ . Entonces:

$$f \in \mathcal{H}(\Omega) \iff f_\lambda \in \mathcal{H}(U_\lambda) \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

Operaciones con funciones holomorfas

Operaciones algebraicas y regla de la cadena

$$\emptyset \neq \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}$$

$\mathcal{H}(\Omega)$ es un subanillo y un subespacio vectorial de $\mathcal{C}(\Omega)$

$$f, g \in \mathcal{H}(\Omega), g(\Omega) \subset \mathbb{C}^* \implies f/g \in \mathcal{H}(\Omega)$$

$\mathcal{P}(\Omega)$ funciones polinómicas en Ω ; $\mathcal{R}(\Omega)$ funciones racionales en Ω

$$\mathcal{P}(\Omega) \subset \mathcal{R}(\Omega) \subset \mathcal{H}(\Omega) \subset \mathcal{C}(\Omega) \subset \mathcal{F}(\Omega)$$

La restricción a Ω de la exponencial nunca es una función racional, luego

$$\mathcal{R}(\Omega) \subsetneq \mathcal{H}(\Omega)$$

$$f \in \mathcal{H}(\Omega), f(\Omega) \subset U = U^\circ \subset \mathbb{C}, g \in \mathcal{H}(U) \implies g \circ f \in \mathcal{H}(\Omega)$$

Funciones enteras

Una **función entera** es una función holomorfa en todo el plano. Por tanto $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ es el conjunto de todas las funciones enteras.

La exponencial es una función entera no polinómica, luego

$$\mathcal{R}(\mathbb{C}) \stackrel{!!}{=} \mathcal{P}(\mathbb{C}) \subsetneq \mathcal{H}(\mathbb{C})$$

¿ Teorema del Valor Medio ?

Ejemplos

Para funciones complejas no hay un teorema de Rolle o del valor medio:

Una función de variable real: $g(y) = \cos y + i \sen y \quad \forall y \in \mathbb{R}$

- Es derivable en \mathbb{R}
- $g(0) = g(2k\pi) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$
- $g'(y) = ig(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}$ luego $|g'(y)| = |g(y)| = 1 \quad \forall y \in \mathbb{R}$

La exponencial: $f(z) = e^{\operatorname{Re} z} (\cos(\operatorname{Im} z) + i \sen(\operatorname{Im} z)) \quad \forall z \in \mathbb{C}$

- $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$
- $f(0) = f(2k\pi i) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$
- $|f'(z)| = |f(z)| = e^{\operatorname{Re} z} > 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Funciones con derivada nula

Dominios

Un **dominio** es un subconjunto no vacío, abierto y conexo del plano

Funciones con derivada nula

Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f'(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$.
Entonces f es constante.

Consecuencias

Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

- Si $\operatorname{Re} f$ es constante, entonces f es constante
- Si $\operatorname{Im} f$ es constante, entonces f es constante
- Si $|f|$ es constante, entonces f es constante

Caso de un abierto no conexo

Ejemplo

Supongamos que $\Omega = U \cup V$ donde U, V son abiertos, no vacíos, disjuntos

$$f(z) = 1 + i \quad \forall z \in U \quad \text{y} \quad f(z) = 1 - i \quad \forall z \in V$$

- $f \in \mathcal{H}(\Omega)$
- $f'(z) = 0 \quad \forall z \in \Omega$
- $\operatorname{Re} f$ y $|f|$ son constantes
- Pero f no es constante

Componentes conexas de un abierto

$$\emptyset \neq \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}$$

- Las componentes conexas de Ω son dominios
- El conjunto de las componentes conexas de Ω es numerable

Generalización de los resultados anteriores

Caso de un abierto no conexo

$$\emptyset \neq \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C} \quad \text{y} \quad f \in \mathcal{H}(\Omega)$$

$$\text{Si } f'(z) = 0 \text{ para todo } z \in \Omega$$

o bien cualquiera de las funciones $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ o $|f|$ es constante,

entonces f es constante en cada componente conexa de Ω

y por tanto $f(\Omega)$ es numerable