Actividad obligatoria 3

José Alberto Hoces Castro

2022/2023

1. Para cualesquiera $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$, calcular detalladamente, indicando las fórmulas aplicadas, la expresión de la varianza:

$$\exists E[X_i^2], i = 1, ..., n \Rightarrow \exists Var\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right]$$

$$Var\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var(X_i) + \sum_{i \neq j}^{n} a_i a_j Cov(X_i, X_j).$$

1. Resolución

Comenzamos desarrollando la expresión de la varianza. Para ello recordamos del tema 1 que $Var(X) = E[X^2] - E[X]^2$:

$$Var\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right] = E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right)^2\right] - E\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right]^2 \tag{1}$$

Aplicamos en el segundo sumando de la expresión anterior la linealidad de la esperanza:

$$Var\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right] = E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right)^2\right] - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i E[X_i]\right)^2 \tag{2}$$

A continuación desarrollamos el cuadrado que tenemos dentro de la esperanza del primer sumando:

$$Var\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right] = E\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j X_i X_j\right] - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i E[X_i]\right)^2 \tag{3}$$

Volvemos a aplicar la linealidad de la esperanza en el primer sumando:

$$Var\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j E[X_i X_j] - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i E[X_i]\right)^2 \tag{4}$$

Desarrollamos el cuadrado del segundo sumando:

$$Var\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j E[X_i X_j] - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j E[X_i]E[X_j] \tag{5}$$

Como los índices de las sumatorias son los mismos, reescribimos la última igualdad así:

$$Var\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_i a_j E[X_i X_j] - a_i a_j E[X_i]E[X_j]) \tag{6}$$

Si nos fijamos bien en la expresión dentro de la sumatoria, nos damos cuenta de que sacando factor común $a_i a_j$ nos queda $E[X_i X_j] - E[X_i]E[X_j]$, que es la expresión de la covarianza $Cov(X_i, X_j) = E[X_i X_j] - E[X_i]E[X_j]$:

$$Var\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j Cov(X_i, X_j) \tag{7}$$

Para llegar a la expresión del enunciado, debemos tener en cuenta que cuando $i = j$, tenemos que $a_i a_j Cov(X_i, X_j) = a_i^2 Cov(X_i, X_i) = a_i^2 Var(X_i)$. Por ello, separamos la sumatoria de la anterior igualdad en dos sumatorias distinguiendo cuándo $i = j$:

$$Var\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var(X_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{i\neq j}^{n} a_i a_j Cov(X_i, X_j) \tag{8}$$

Tras haber hallado la expresión de la varianza, entendemos por qué es necesario que $\exists E[X_i^2],\ \ i = 1, ..., n$. Esto se debe a que en la expresión hallada se ven implicadas todas las varianzas de las variables aleatorias $X_i\ \ i = 1, ..., n$, cuya expresión es $Var(X_i) = E[X_i^2] - E[X_i]^2$, de donde deducimos que es necesaria la existencia de $E[X_i^2]\ \ i = 1, ..., n$. Además de esto, la existencia de $E[X_i^2]\ \ i = 1, ..., n$ es necesaria a partir de (4), ya que por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, $E[X_i X_j]^2 \leq E[X_i^2]E[X_j^2] \Rightarrow E[X_i X_j] \leq \sqrt{E[X_i^2]E[X_j^2]}$, podemos afirmar la existencia de $E[X_i X_j]$ para todo $i, j = 1, ..., n$ (esto se debe a que como $E[X_i^2]$ y $E[X_j^2]$ están acotadas para todo $i, j = 1, ..., n$, $E[X_i X_j]$ también y por lo tanto existe). Como último apunte, destacar que si las variables aleatorias son independientes, su covarianza es 0 y la expresión anterior sería la misma suprimiendo la segunda sumatoria.