Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada

Variable Compleja I. Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Convcatoria ordinaria

Ejercicio 1. (**2.5 puntos**) Integrando una conveniente función sobre la poligonal $[-R, R, R+i\pi, -R+i\pi, -R]$, con $R \in \mathbb{R}^+$, calcular la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{e^x + e^{-x}}\, dx.$$

Ejercicio 2. (**2.5 + 1.5 puntos**) Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$ y supongamos que f diverge en 0 y en ∞. Probar que f se anula en algún punto de $\mathbb{C}^*$. (**Extra. 1.5 puntos**) Demostrar que, de hecho, f se anula al menos dos veces (contando multiplicidad) y que tiene un número finito de ceros.

Ejercicio 3. (**2.5 puntos**) Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sea $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$f_n(z) = \int_n^{n+1} \frac{\cos(t+z^2) + \operatorname{sen}(t^2 - z)}{1+t^4}\, dt \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

a) Probar que $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

b) Probar que la serie de funciones $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge en $\mathbb{C}$ y que su suma es una función entera.

Ejercicio 4. (**2.5 puntos**) Sean $f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ de modo que

$$f(g(1/n)) = \frac{1}{n^3}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar que una de las funciones es un polinomio de grado uno y que la otra es un polinomio de grado tres.

Granada, 22 de junio de 2023