Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada

Prueba intermedia de Variable Compleja I, Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Ejercicio 1. **(4 puntos)** Probar que la serie $\sum_{n\geqslant 0} \frac{\mathrm{sen}(nz)}{2^n}$ converge absolutamente en todo punto del dominio $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \, : \, -\ln(2) < \mathrm{Im}\, z < \ln(2)\}$. Estudiar la convergencia uniforme en subconjuntos de Ω. Probar que la función $g : \Omega \to \mathbb{C}$ dada por

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}(nz)}{2^n}. \qquad (z \in \Omega)$$

es continua en Ω y calcular $\int_{C(0,\underset{2}{1})} \frac{g(z)}{z}\, dz$.

Ejercicio 2. **(2 puntos)** Estudiar la derivabilidad de la función $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = e^{\bar{z}} \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Ejercicio 3. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$ un abierto. Decimos que una función $\phi \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es armónica en Ω si $\phi \in C^2(\Omega)$ y

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}(x,y) = 0 \qquad \forall (x,y) \in \Omega.$$

a) **(1.5 puntos)** Sea $\phi \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ armónica en Ω. Probar que la función $g \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$g(x+iy) = \frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y) - i \frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y)$$

es holomorfa en Ω.

b) **(1.5 puntos)** Suponiendo que Ω es un dominio estrellado probar que existe $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ de modo que $\mathrm{Re}\, f = \phi$ y que f es única salvo una constante.

c) **(1 punto)** Deducir que una función armónica en un dominio estrellado es, de hecho, de clase C^∞.

Granada, 9 de mayo de 2023