

Variable Compleja I

Tema 12: El teorema general de Cauchy

1 Índice

2 Cadenas y ciclos

3 Teorema general de Cauchy

Índice de un punto con respecto a un camino cerrado

Motivación

$$a \in \mathbb{C}, \quad r \in \mathbb{R}^+, \quad z \in \mathbb{C} \setminus C(a, r)^*$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, r)} \frac{dw}{w - z} = \begin{cases} 1 & \text{si } |z - a| < r \\ 0 & \text{si } |z - a| > r \end{cases}$$

Definición de índice

$$\gamma \text{ camino cerrado}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$$

Índice del punto z con respecto al camino γ :

$$\text{Ind}_{\gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dw}{w - z}$$

Es el n° de vueltas que da γ alrededor del punto z (da un número entero)

Ejemplos aclaratorios

Ejemplos sencillos

- $\gamma = C(a, r) + C(a, r)$:

$$\text{Ind}_{\gamma}(z) = \begin{cases} 2 & \text{si } |z - a| < r \\ 0 & \text{si } |z - a| > r \end{cases}$$

El punto está dentro } de $O(a, r)$
El punto está fuera

- $\gamma = -C(a, r)$:

$$\text{Ind}_{\gamma}(z) = \begin{cases} -1 & \text{si } |z - a| < r \\ 0 & \text{si } |z - a| > r \end{cases}$$

- $\gamma = C(a, r) - C(a, r)$:

$$\text{Ind}_{\gamma}(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$$

Logaritmo derivable de un arco

Lema

$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un arco, $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma^*$

$$\tau : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}^*, \quad \tau(t) = \sigma(t) - z \quad \forall t \in [a, b]$$

Entonces τ admite un logaritmo derivable, es decir,

$$\exists \varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}, \text{ derivable, tal que } e^{\varphi(t)} = \tau(t) \quad \forall t \in [a, b]$$

Como consecuencia, se tiene:

$$\int_{\sigma} \frac{dw}{w - z} = \varphi(b) - \varphi(a) \in \text{Log} \left(\frac{\sigma(b) - z}{\sigma(a) - z} \right)$$

Propiedades del índice

Propiedades del índice

γ camino cerrado

- $\text{Ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$
- La función $\text{Ind}_\gamma : \mathbb{C} \setminus \gamma^* \rightarrow \mathbb{Z}$ es continua. *Por el lema 1 del tema 10*
Equivalentemente, es constante en cada componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$
- Si U es la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, entonces:

$$\text{Ind}_\gamma(z) = 0 \quad \forall z \in U$$

Definiciones

- Una **cadena** es una suma formal de caminos:

$$\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n = \sum_{k=1}^n \gamma_k$$

donde $n \in \mathbb{N}$ y γ_k es un camino, para todo $k = 1, 2, \dots, n$.

- Imagen** de una cadena: $\Gamma^* = \bigcup_{k=1}^n \gamma_k^*$
- Suma** de cadenas: $\Sigma = \sum_{k=1}^m \sigma_k$ otra cadena.

$$\Gamma + \Sigma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n + \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_m$$

- Cadena **opuesta**: $-\Gamma = (-\gamma_1) + (-\gamma_2) + \dots + (-\gamma_n) = \sum_{k=1}^n (-\gamma_k)$
- $(\Gamma + \Sigma)^* = \Gamma^* \cup \Sigma^*$ y $(-\Gamma)^* = \Gamma^*$.

Integral sobre una cadena

Definición

$$\Gamma = \sum_{k=1}^n \gamma_k \quad \text{una cadena}$$

$C(\Gamma^*)$ funciones continuas del compacto Γ^* en \mathbb{C}

Espacio de Banach complejo con:

$$\|f\|_{\infty} = \max \{ |f(z)| : z \in \Gamma^* \} \quad \forall f \in C(\Gamma^*)$$

Integral sobre una cadena:
$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(z) dz \quad \forall f \in C(\Gamma^*)$$

Longitud de una cadena:
$$l(\Gamma) = \sum_{k=1}^n l(\gamma_k).$$

Propiedades de la integral

Propiedades de la integral sobre una cadena Γ

- Linealidad: $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad f, g \in C(\Gamma^*)$

$$\int_{\Gamma} (\alpha f(z) + \beta g(z)) dz = \alpha \int_{\Gamma} f(z) dz + \beta \int_{\Gamma} g(z) dz$$

- Continuidad: $f \in C(\Gamma^*)$

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq l(\Gamma) \|f\|_{\infty}$$

- Aditividad: Σ otra cadena, $f \in C(\Gamma^* \cup \Sigma^*)$

$$\int_{\Gamma + \Sigma} f(z) dz = \int_{\Gamma} f(z) dz + \int_{\Sigma} f(z) dz$$

Cadena opuesta: $\int_{-\Gamma} f(z) dz = - \int_{\Gamma} f(z) dz \quad \forall f \in C(\Gamma^*)$

Ciclos e índice

Ciclos

Un **ciclo** es una suma formal de caminos cerrados: $\Gamma = \sum_{k=1}^n \gamma_k$, donde $n \in \mathbb{N}$ y γ_k es un camino **cerrado**, para todo $k = 1, 2, \dots, n$.

- Todo lo dicho sobre cadenas se aplica en particular a los ciclos
- La suma de dos ciclos es un ciclo
- La cadena opuesta de un ciclo también es un ciclo

Índice con respecto a un ciclo

$$\Gamma = \sum_{k=1}^n \gamma_k \text{ ciclo, } z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^*$$

$$\text{Ind}_{\Gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dw}{w-z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sum_{k=1}^n \gamma_k} \frac{dw}{w-z} = \sum_{k=1}^n \text{Ind}_{\gamma_k}(z)$$

Propiedades del índice con respecto a un ciclo

Propiedades

Γ un ciclo

- $\text{Ind}_{\Gamma}(z) \in \mathbb{Z} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^*$
- La función $\text{Ind}_{\gamma} : \mathbb{C} \setminus \gamma^* \rightarrow \mathbb{Z}$ es constante en cada componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$
- Si U es la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$, entonces:

$$\text{Ind}_{\Gamma}(z) = 0 \quad \forall z \in U$$

Motivación

Esquema común de los teoremas de Cauchy

$$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}, \quad \Gamma \text{ ciclo en } \Omega, \quad f \in \mathcal{H}(\Omega)$$

Hipótesis adicional

 \Downarrow

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$$

- ¿Cuál es la hipótesis más general posible sobre f ?
- ¿Cuál es la hipótesis más general posible sobre Γ ?
- ¿Cuál es la hipótesis más general posible sobre Ω ?

Respuesta a la primera pregunta

Problema 1

Dado un abierto Ω del plano, caracterizar las funciones $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tales que

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0 \quad \text{para todo ciclo } \Gamma \text{ en } \Omega$$

Caracterización de la existencia de primitiva

$\Omega = \Omega^{\circ} \subset \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Son equivalentes:

- $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$ para todo ciclo Γ en Ω
- f tiene una primitiva en Ω : $\exists F \in \mathcal{H}(\Omega) : F'(z) = f(z) \quad \forall z \in \Omega$

Respuesta a la segunda pregunta

Problema 2

Dado un abierto Ω del plano, caracterizar los ciclos Γ en Ω tales que

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0 \quad \forall f \in \mathcal{H}(\Omega)$$

Condición obviamente necesaria

$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}$, Γ ciclo en Ω

En concreto para $g(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon - w}$ $\epsilon \in \Omega$

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0 \quad \forall f \in \mathcal{H}(\Omega) \quad \implies \quad \int_{\Gamma} \frac{dz}{z - w} = 0 \quad \forall w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$$

Un ciclo Γ en Ω es **nul-homólogo con respecto a Ω** cuando

$$\text{Ind}_{\Gamma}(w) = 0 \quad \forall w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$$

Esta condición, obviamente necesaria, **¡¡también es suficiente!!**

Respuesta a la tercera pregunta

Problema 3

Caracterizar los abiertos Ω del plano, tales que

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0 \quad \forall f \in \mathcal{H}(\Omega), \quad \forall \Gamma \text{ ciclo en } \Omega$$


Respuestas

Para un abierto Ω del plano, son equivalentes:

- $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$ para toda $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y para todo ciclo Γ en Ω
- Toda función holomorfa en Ω tiene primitiva
- Todo ciclo en Ω es nul-homólogo con respecto a Ω

Se dice que un abierto Ω del plano es **homológicamente conexo** cuando todo ciclo en Ω es nul-homólogo con respecto a Ω .

↙ No tiene nada que ver
con conexos

↙  \Rightarrow Es h.c. pero no conexo

El teorema general de Cauchy

Forma general del Teorema de Cauchy y de la fórmula de Cauchy

Sea Ω un abierto del plano, Γ un ciclo en Ω nul-homólogo con respecto a Ω y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Entonces:

- $\text{Ind}_{\Gamma}(z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw \quad \forall z \in \Omega \setminus \Gamma^*$

- $\int_{\Gamma} f(w) dw = 0$

Cuando $\Gamma = C(a,r)$ si $\bar{D}(a,r) \subset \Omega$ generaliza los resultados:
F. Cauchy, circunferencia
T^{ma} local de Cauchy

Abiertos homológicamente conexos

Caracterizaciones de los abiertos homológicamente conexos del plano

Para un abierto Ω del plano, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- Ω es homológicamente conexo, es decir, para todo ciclo Γ en Ω se tiene:

$$\text{Ind}_{\Gamma}(w) = 0 \quad \forall w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$$

- Para todo ciclo Γ en Ω y toda $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ se tiene

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$$

- Toda función holomorfa en Ω tiene primitiva, es decir:

$$\forall f \in \mathcal{H}(\Omega) \quad \exists F \in \mathcal{H}(\Omega) : F'(z) = f(z) \quad \forall z \in \Omega$$

- Toda función holomorfa en Ω , que no se anule, tiene un logaritmo holomorfo, es decir:

$$f \in \mathcal{H}(\Omega), \quad f(\Omega) \subset \mathbb{C}^* \quad \implies \quad \exists g \in \mathcal{H}(\Omega) : e^{g(z)} = f(z) \quad \forall z \in \Omega$$

Abiertos sin “agujeros”

Si Ω es un abierto del plano tal que ninguna componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \Omega$ está acotada, entonces Ω es homológicamente conexo.