Probabilidad - 2º Curso (Grado en Matemáticas y Doble Grado en Física y Matemáticas)
Convocatoria ordinaria (14 de julio de 2021)

Apellidos, nombre:

TEORÍA

1. Sea (X,Y) un vector aleatorio. Se pretenden predecir, por mínimos cuadrados, los valores de la variable Y a partir de una función lineal de la variable X, y viceversa.

   a) Obtener de forma razonada los coeficientes del modelo lineal de Y sobre X.

   b) Si $5y - x + 1 = 0$ y $2x - 5y + 2 = 0$ son las rectas de regresión del vector (X,Y): identificar la recta de regresión de Y sobre X; obtener una medida de la proporción de varianza de cada variable que queda explicada por el modelo de regresión lineal y calcular la esperanza del vector (X,Y).

2. Sean $X_1, \dots, X_n$ v.a. continuas e independientes, tales que $\exists\, E[X_i]\ \forall i = 1, \dots, n$, con momento no centrado de orden dos finito y $g_1, \dots, g_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones medibles. Justificar de forma razonada las siguientes afirmaciones:

   a) $\exists\, E[X_1 \cdots X_n] = E[X_1] \cdots E[X_n]$.

   b) $\exists\, E[g_1(X_1) \cdots g_n(X_n)] = E[g_1(X_1)] \cdots E[g_n(X_n)]$.

   c) $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \mathrm{Var}(X_i), \quad \forall\, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

   d) $(X_1, \dots, X_n)$ es un vector aleatorio continuo.

1. (X, Y) vector aleatorio.

ⓐ obtener los coeficientes del modelo lineal de Y sobre X.

Pretendemos ajustar $Y = aX + b$ de modo que minimice la distancia al cuadrado entre los verdaderos valores de la variable Y y los ajustados por el modelo, esto es:

obtener a y b que minimice $L = E[(Y-(aX+b))^2]$

Se observa que $L = E[Y^2] + a^2 E[X^2] + b^2 + 2ab E[X] -$

$- 2a E[XY] - 2b E[Y]$.

obtengamos $\nabla L(a,b) = 0$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial a} &= 2a E[X^2] + 2b E[X] - 2E[XY] = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial b} &= 2b + 2a E[X] - 2E[Y] = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} a E[X^2] - b E[X] &= E[XY] \\ b + a E[X] &= E[Y] \end{aligned}\right\} \longrightarrow b = -a E[X] + E[Y]$$

Sustituimos en la 1ª ec.:

$a E[X^2] - a(E[X])^2 + E[X]E[Y] - E[XY] = 0$

$$a \, Var[X] - Cov(X,Y) = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} a &= \frac{Cov(X,Y)}{Var X} \\ b &= E[Y] - a E[X] \end{aligned}}$$

cqd

obtener la recta de regresión de Y sobre X

Las rectas de regresión son $5y - x + 1 = 0$

$2x - 5y + 2 = 0$

Supongamos que la primera es la recta de regresión de Y sobre X, de modo que la segunda será la de X sobre Y.

Entonces:

$R_{Y/X} \rightarrow 5y - x + 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{5}x - \frac{1}{5}$

$R_{X/Y} \rightarrow 2x - 5y + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2}y - 1$

Sabemos que el producto de las pendientes es el coeficiente de determinación, en este caso $\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{2} = 1/2 < 1$, lo que es un resultado compatible, ya que si las hubiéramos elegido al revés habría salido $2 > 1$ y es una incongruencia.

Por tanto $\boxed{\text{la recta de regresión de Y sobre X es } 5y - x + 1 = 0}$

Proporción de varianza explicada por el modelo de regresión lineal. Esta viene dada por el coeficiente de determinación lineal, que como dijimos antes es el producto de las pendientes de las rectas de regresión

$$\boxed{\rho^2_{X,Y} = \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{2} = 1/2}$$

de modo que el modelo de regresión lineal explica el 50% de la varianza de cada variable.

$$\boxed{E[(X,Y)] = (E[X], E[Y]) = (-3, -4/5)}$$

Las esperanzas de cada v.a. se obtienen como el punto de corte de las rectas de regresión

$5y - x + 1 = 0 \rightarrow y = \frac{x}{5} - \frac{1}{5} \rightarrow y = -\frac{3}{5} - \frac{1}{5} \Rightarrow \boxed{y = -4/5}$

$2x - 5y + 2 = 0 \rightarrow 2x - x + 1 + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -3}$

TEORÍA

2. $X_1, \dots, X_n$ v.a. (continuas) (independientes), $\exists E[X_i]$ $\forall i=1,\dots,n$, $\exists$ momento de orden 2 no centrado y $g_1,\dots,g_n$ son funciones medibles

(a) $\exists\ E[X_1 \cdots X_n] = E[X_1] \cdot \dots \cdot E[X_n]$

$$E[X_1 \cdots X_n] = \int_{\mathbb{R}^n} x_1 \cdots x_n \, f_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n)\, dx_1 \cdots dx_n =$$

$$\underset{\text{independientes}}{=} \prod_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} x_i f_{X_i}(x_i)\, dx_i = \prod_{i=1}^{n} \underset{\infty}{\overset{\wedge}{E[X_i]}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists\ E[X_1 \cdot \dots \cdot X_n] = E[X_1] \cdots E[X_n].$$

cqd

(b) $\exists\ E[g_1(X_1) \cdot \dots \cdot g_n(X_n)] = E[g_1(X_1)] \cdot \dots \cdot E[g(X_n)]$

Este resultado es inmediato sii $g_1(X_1),\dots,g(X_n)$ son v.a. independientes. Veamos para esto que la distribución de probabilidad conjunta descompone como el producto de las marginales.

$$P_{g_1(X_1)\dots g_n(X_n)}(B_1 \times \dots \times B_n) = P(g_1(X_1) \in B_1, \dots, g_n(X_n) \in B_n) =$$

$$= P[X_1 \in g_1^{-1}(B_1), \dots, X_n \in g_n^{-1}(B_n)] = P_{X_1,\dots,X_n}(g_1^{-1}(B_1) \times \dots \times g_n^{-1}(B_n)) =$$

$$\underset{\text{independientes}}{=} P_{X_1}(g_1^{-1}(B_1)) \cdots P_{X_n}(g_n^{-1}(B_n)) = P(g_1(X_1) \in B_1) \cdots P(g_n(X_n) \in B_n)$$

$$= P_{g_1(X_1)}(B_1) \cdot \dots \cdot P_{g_n(X_n)}(B_n) \Rightarrow$$ Son independientes y, por tanto $E[g_1(X_1) \cdots g_n(X_n)] = E[g_1(X_1)] \cdots E[g_n(X_n)]$

cqd

c) $Var\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var[X_i] \quad \forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = E\left(\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right]^2\right) - \left[E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right)\right]^2 =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j E[X_i X_j] - \sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j E[X_i] E[X_j] =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j \left(E[X_i X_j] - E[X_i] E[X_j]\right) =$$

$$\underset{\text{(independencia)}}{=} \sum_{i,j=1}^{n} a_i^2 \delta_{ij} \left[E[X_i^2] - E[X_i]^2\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \underbrace{\left[E[X_i^2] - (E[X_i])^2\right]}_{< +\infty} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var[X_i] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists\, Var\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var(X_i) \quad \text{cqd}$$

d) $X = (X_1, \dots, X_n)$ es un vector aleatorio continuo.

Necesitamos encontrar una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que sea función de densidad, de modo que

$$F_X(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n$$

Consideramos $f_X(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdots f_{X_n}(x_n)$, es función de densidad porque:

- $f_X(x_1, \dots, x_n) = \underset{\geq 0}{f_{X_1}(x_1)} \cdots \underset{\geq 0}{f_{X_n}(x_n)} \geq 0$
- $\int_{\mathbb{R}^n} f_X(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n = \prod_{i=1}^{n} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f_{X_i}(x_i)\, dx_i}_{1} = 1$

ahora,

$$F_{\mathbb{X}}(x) = P[\mathbb{X} \in (-\infty, x]] = P[\mathbb{X}_1 \leq x_1 \dots \mathbb{X}_n \leq x_n] =$$

$$\underset{\text{independientes}}{=} P[\mathbb{X}_1 \leq x_1] \cdots P[\mathbb{X}_n \leq x_n] = \prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{x_i} f_{\mathbb{X}_i}(x_i)\, dx_i =$$

$$= \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_{\mathbb{X}_1}(x_1) \cdots f_{\mathbb{X}_n}(x_n)\, dx_1 \dots dx_n =$$

$$= \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_{\mathbb{X}}(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n \text{ y}$$

por tanto $\mathbb{X} = (\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n)$ es una v.a. continua.

cqd

2. Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a. continuas e independientes, tales que $\exists\, E[X_i]\ \forall i = 1, \ldots, n$, con momento no centrado de orden dos finito y $g_1, \ldots, g_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones medibles. Justificar de forma razonada las siguientes afirmaciones:

a) $\exists\, E[X_1 \cdots X_n] = E[X_1] \cdots E[X_n]$.

b) $\exists\, E[g_1(X_1) \cdots g_n(X_n)] = E[g_1(X_1)] \cdots E[g_n(X_n)]$.

c) $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \mathrm{Var}(X_i), \quad \forall\, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

d) $(X_1, \ldots, X_n)$ es un vector aleatorio continuo.

a) $E[X_1 \cdot \ldots \cdot X_n] = \int_{\mathbb{R}^n} x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot f_{(X_1,\ldots,X_n)}(x_1,\ldots,x_n)\, dx_1 \cdots dx_n =$

$= \int x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot f_{X_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot f_{X_n}(x_n)\, dx_1 \cdot \ldots \cdot dx_n = \underbrace{\int_{\mathbb{R}} x_1 \cdot f_{X_1}(x_1)\, dx_1}_{E[X_1]} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\int_{\mathbb{R}} x_n \cdot f_{X_n}(x_n)\, dx_n}_{E[X_n]}$

b) $X_1, \ldots, X_n$ indep. $\Longrightarrow g(X_1), \ldots, g(X_n)$ indep.

$(g(X_1), \ldots, g(X_n)) = G$

$F_G(x) = P[\,g(X) \in \underbrace{]-\infty, x[}_{B}\,] = P[\,X \in g^{-1}(B)] = P[X_1 \in g^{-1}(B_1), \ldots, X_n \in g^{-1}(B_n)] =$

$= P[X_1 \in g^{-1}(B_1)] \cdot \ldots \cdot P[X_n \in g^{-1}(B_n)] = P[\,g(X_1) \in]-\infty, x_1[\,] \cdot \ldots \cdot P[g(X_n) \in]-\infty, x_n[\,]$