Tema 1_Parte I.- Preliminares (distribuciones discretas)

Asignatura: PROBABILIDAD
Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
(3er Curso - 1er semestre)

©Prof. Dr. José Luis Romero Béjar

Departamento de Estadística e Investigación Operativa
Facultad de Ciencias (Despacho 10)

Periodo de docencia: 12/09/2022 a 20/12/2022

Esquema de contenidos

Espacio de probabilidad

Un **espacio de probabilidad** es una terna $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ donde:

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

Lanzar un dado $\Rightarrow$ $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \dots\}$ σ-algebra

P = función de probabilidad

$P : \mathcal{A} \longrightarrow [0,1]$

(i) Ω es un conjunto arbitrario.

(ii) $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ tiene estructura de σ-**álgebra** si verifica:

- $\mathcal{A} \neq \emptyset$.
- Cerrada para las uniones numerables.
- Cerrada para la formación del complementario.

(ii) $P : \mathcal{A} \longrightarrow [0,1]$, es una **función de probabilidad** si satisface los tres axiomas siguientes:

A1 $P(A) \geq 0, \quad \forall A \in \mathcal{A}$

A2 $P(\Omega) = 1$

A3 Para cualquier sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ de sucesos disjuntos

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n).$$

Propiedades elementales de una función de probabilidad

- $P(\emptyset) = 0$.
- **Probabilidad del suceso complementario**: $P(A^c) = 1 - P(A)$.
- **Aditividad finita** para procesos disjuntos: $P\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} P(A_n)$.
- Probabilidad de la **diferencia**: $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.
  - Si además, $B \subseteq A \in \mathcal{A}$, entonces $P(A - B) = P(A) - P(B)$.
- **Monotonía**: Si $B \subseteq A \in \mathcal{A}$, entonces $P(B) \leq P(A)$.
- **Regla de adición**: sean $A, B \in \mathcal{A}$, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- **Principio de inclusión-exclusión** para la unión finita de sucesos no disjuntos.
- **Subaditividad**: $P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$.
- **Desigualdad de Boole**: $P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \geq 1 - \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n^c)$.

Probabilidad Condicionada. Definición.

Dado $A \in \mathcal{A}$, con $P(A) > 0$, la aplicación $P(\cdot/A) : \mathcal{A} \longrightarrow [0,1]$, definida como $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ es una función de probabilidad sobre $(\Omega, \mathcal{A})$.

Al espacio $(\Omega, \mathcal{A}, P(\cdot/A))$ se le denomina **espacio de probabilidad condicionado** y, a la función $P(\cdot/A)$ **función de probabilidad condicionada**.

Probabilidad Condicionada (Teoremas).

- **Teorema de la probabilidad compuesta**.
  Sean $A_1, \ldots, A_{n-1}$ tales que $P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) > 0$, para todo $A_n \in \mathcal{A}$, entonces se verifica la siguiente identidad:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 \cap A_2)\ldots P(A_n/A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

- **Teorema de la probabilidad total**.
  Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ una secuencia de sucesos que define una partición de Ω, siendo $P(A_i) > 0$, para $i \in \mathbb{N}$, entonces

  Disjuntos 2 a 2

$$P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B/A_i)P(A_i).$$

- **Teorema de Bayes**.
  Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ una secuencia de sucesos que define una partición de Ω, siendo $P(A_i) > 0$, para $i \in \mathbb{N}$,

$$P(A_i/B) = \frac{P(B/A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(B/A_i)P(A_i)}, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Independencia de sucesos

- Dos sucesos $A, B \in \mathcal{A}$, se dice que son **independientes** si y sólo si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B). \longrightarrow$$

Esto sale de que $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \rightarrow$ Si A no depende de B

- Se dice que una clase $\mathcal{C}$, de sucesos, satisface la propiedad de **independencia dos a dos de sucesos** si

$$\forall A, B \in \mathcal{C}, \; P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

- La propiedad de **independencia mutua de los sucesos de una clase** $\mathcal{C}$ se define como:

Lo mismo pero con muchos sucesos

$$\forall k \geq 2, \; \forall A_{i_1}, \ldots, A_{i_k} \in \mathcal{C}, \quad P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \prod_{l=1}^{k} P(A_{i_l}).$$

Esquema de contenidos

Variable aleatoria

Una **variable aleatoria** sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ es una función medible $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, i.e.,

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{A}, \quad B \in \mathcal{B}.$$

O equivalentemente,

$$X^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{A}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Observaciones:

- $\mathcal{B}$ es la **σ-álgebra de Borel**, es decir, la **mínima** σ-álgebra sobre $\mathbb{R}$ que contiene a todos los intervalos.
- $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : \ X(\omega) \in B\}$. En este caso **denotamos** $\underbrace{\{X \in B\}}_{\text{abuso del lenguaje}}$.
- $X^{-1}((-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega : \ X(\omega) \leq x\}$. Los intervalos de esta forma forman base de la σ-álgebra de Borel

• EJEMPLO

Lanzar 3 monedas y anotamos el resultado de la terna final (en su orden)

$$\Omega = \{\underset{A_1}{CCC}, CC+, C+C, +CC, C++, +C+, ++C, \underset{A_8}{+++}\} \qquad P(A_i) = 1/8 \quad \forall i \in \Delta_8$$

Defino $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$

$X(\omega) = N^o$ de caras $\{0, 1, 2$ ó $3\}$

$$\left.\begin{array}{l} P_x(0) = 1/8 \\ P_x(1) = 3/8 \\ P_x(2) = 3/8 \\ P_x(3) = 1/8 \end{array}\right\}$$ Si sumamos, da 1, estamos ante una nueva función de prob.

* Ej. opcional: Probar que es var. aleatoria, ¿$X^{-1}(]-\infty, x]) \in \mathcal{A}$?

$$X^{-1}]-\infty, x] = \begin{cases} \emptyset & \text{si } x < 0 \\ \{+++\} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \{+++, +C+, C++, ++C\} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \{+++, C++, +C+, ++C, CC+, C+C, +CC\} & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ \Omega & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Operaciones con variables aleatorias

- La **suma y diferencia** de dos variables aleatorias **es una variable aleatoria sobre el mismo espacio de probabilidad**. Se define puntualmente mediante la suma y diferencia de los respectivos valores puntuales de las variables aleatorias involucradas.
- El **producto y cociente** (si están bien definidos) de variables aleatorias **es una variable aleatoria sobre el mismo espacio de probabilidad**. Se define puntualmente mediante el producto y cociente de las respectivos valores puntuales de las variables aleatorias involucradas.
- El **máximo**, el **mínimo** y el **módulo** de una variable aleatoria también son **variables aleatorias sobre el mismo espacio de probabilidad**. También se definen, **puntualmente**, como el máximo, mínimo o módulo de los respectivos valores puntuales de las variables aleatorias involucradas.

Distribución de probabilidad de una variable aleatoria

Sea X una variable aleatoria sobre $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, se define su **distribución de probabilidad** como una función

$$P_X : \mathcal{B} \longrightarrow [0,1]$$

$$P_X(B) = P(\{\omega \in \Omega;\ X(\omega) \in B\}) = P(X \in B), \quad \forall B \in \mathcal{B}.$$

Es trivial comprobar que P_X es una función de probabilidad sobre $\mathbb{R}$ con la sigma álgebra de Borel y por tanto $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$ **es un espacio de probabilidad**.

Sea $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$ v.a.
entonces, tengo completamente determinada su distribución de prob. si conocemos:
i) $P_X : \mathcal{B} \longrightarrow [0,1]$
ó ii) $F : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ función de distribución
ó iii) Si conocemos su f.m.p. (discreta) o f.d. (continua)

Función de distribución de una variable aleatoria

Una función $F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$, definida por

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P_X((-\infty, x]) = P(X \in (-\infty, x]), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

se dice que es **función de distribución** de la variable aleatoria X.

Satisface las siguientes propiedades:

- Monótona no decreciente.
- Continua a la derecha.
- $\exists \lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$, y $\exists \lim\limits_{x \to \infty} F_X(x) = 1$.

Cálculo de probabilidades en intervalos

La distribución de probabilidad de un intervalo se puede calcular a partir de la función de distribución asociada a la variable aleatoria.

- $P_X([a,b]) = F_X(b) - F_X(a^-)$
- $P_X((a,b]) = F_X(b) - F_X(a)$
- $P_X([a,b)) = F_X(b^-) - F_X(a^-)$
- $P_X((a,b)) = F_X(b^-) - F_X(a)$.

Tipos de variables aleatorias

Se distinguen, según su naturaleza, dos tipos de variables aleatorias:

- Variables aleatorias **discretas**.
- Variables aleatorias **continuas**.

Variables aleatorias discretas

Una variable aleatoria (v.a.) $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$, se dice **discreta** si existe un conjunto numerable $E_X \subset \mathbb{R}$, tal que $P_X(X \in E_X) = 1$.

- **Función masa de probabilidad de una v.a. discreta**

$$p_X : E_X \longrightarrow [0,1], \quad p_X(x) = P(X = x), \quad \forall x \in E_X.$$

  Se tiene entonces $\sum_{x \in E_X} p_X(x) = 1$.

- Toda función definida sobre un subconjunto numerable de $\mathbb{R}$, no negativa y tal que la suma de sus valores es uno, **es la función masa de probabilidad de alguna variable discreta con valores en dicho conjunto**.

- **Una variable aleatoria es discreta si y sólo si su función de distribución crece únicamente a saltos.** Los saltos de dicha función se localizan en los valores de la variable. La longitud de cada salto es la probabilidad con que la variable toma cada uno de dichos valores.

Variables aleatorias continuas

Una variable aleatoria (v.a.) $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$, se dice **continua** si existe una función $f_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

La función f_X recibe el nombre de **función de densidad** de X y satisface:

(i) Es no negativa.

(ii) Es integrable con $\int_{\mathbb{R}} f_X(x)dx = 1$.

Cualquier función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaciendo (i)–(ii) es la función de densidad de una v.a. continua. Además se tiene:

a) $\lim_{x \to -\infty} f_X(x) = \lim_{x \to \infty} f_X(x) = 0.$

b) f_X es **continua** salvo a lo sumo en un conjunto de medida nula.

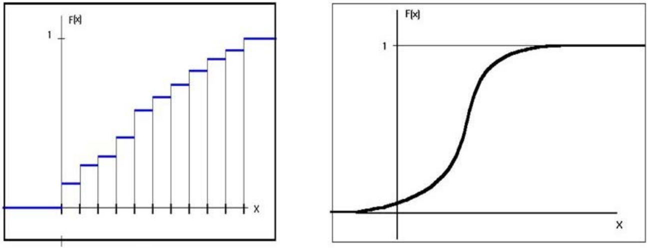
c) En los puntos de continuidad de f_X, se tiene que F_X es **derivable** y satisface

$$\frac{dF_X(x)}{dx} = f_X(x).$$

d) f_X se puede modificar en un conjunto numerable de puntos sin afectar a F_X.

Gráficas de funciones de distribución discretas y continuas

$P(X \leq x) = F(x)$



Caso discreto

Continua por la derecha

Caso continuo

Continua por ambos sentidos

Esperanza matemática

- **Para v.a. discretas**. Si $\exists \sum_{x\in E_X} |x| p_X(x) < \infty$, entonces se define la **esperanza matemática** de X como:

$$E[X] = \sum_{x\in E_X} x p_X(x) = \sum_{x\in E_X} x P(X = x).$$

- **Para v.a. continuas**. Si $\exists \int_{\mathbb{R}} |x| f_X(x) dx < \infty$, entonces se define la **esperanza matemática** de X como:

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx.$$

Algunas propiedades de la esperanza matemática. Dadas X e Y v.a.:

- $E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y] \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$ (linealidad).
- Si $X \leq Y \Rightarrow E[X] \leq E[Y]$ (conservación del orden).
- $\exists E[X] \Leftrightarrow \exists E[|X|]$, en cuyo caso $|E[X]| \leq E[|X|]$.
- Si $\exists M > 0 \quad / |X| \leq M \Rightarrow \exists E[X]$.
- Si $a \leq X \leq b \quad (a, b \in \bar{\mathbb{R}}) \quad y \quad \exists E[X] \Rightarrow a \leq E[X] \leq b$.
- Si $X \geq 0 \quad y \quad \exists E[X]$, entonces $E[X] = 0 \Leftrightarrow P(X = 0) = 1$.

Esperanza matemática de una función de una v.a.

Sea $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$ una v.a y sea $g : E_X \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible. Entonces:

- **Para v.a. discretas**. Si $\exists \sum_{x \in E_X} |g(x)| p_X(x) < \infty$, entonces

$$\exists E[g(X)] = \sum_{x \in E_X} g(x) p_X(x) = \sum_{x \in E_X} g(x) P(X = x).$$

- **Para v.a. continuas**. Si $\exists \int_{\mathbb{R}} |g(x)| f_X(x) dx < \infty$, entonces

$$\exists E[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x) f_X(x) dx.$$

Momentos

Sea $k \geq 1$,

Los momentos no siempre existen. Las series deben ser convergentes

* $Var\, X = E[(X-E[X])^2] = E[X^2]-E[X]^2$

- **Para v.a. discretas**.
  - Si $\exists \sum_{x \in E_X} |x|^k p_X(x) < \infty$, entonces $m_k = E[X^k] = \sum_{x \in E_X} x^k p_X(x)$.
  - Si $\exists \sum_{x \in E_X} |x - E[X]|^k p_X(x) < \infty$, entonces

$$\mu_k = E[(X - E[X])^k] = \sum_{x \in E_X} (x - E[X])^k p_X(x).$$

- **Para v.a. continuas**.
  - Si $\exists \int_{\mathbb{R}} |x|^k f_X(x)dx < \infty$, entonces $m_k = E[X^k] = \int_{\mathbb{R}} x^k f_X(x)dx$.
  - Si $\exists \int_{\mathbb{R}} |x - E[X]|^k f_X(x)dx < \infty$, entonces

$$\mu_k = E[(X - E[X])^k] = \int_{\mathbb{R}} (x - E[X])^k f_X(x)dx.$$

Observación:

- m_k representa el momento de orden k **no centrado** (o centrado en el origen).
- μ_k representa el momento de orden k **centrado** (o centrado en la esperanza matemática).

Función generatriz de momentos

Si $\exists\ E[e^{tX}], \quad \forall t \in (-t_0, t_1), \quad t_0, t_1 \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, se define la **función generatriz de momentos** (f.g.m) de X como:

$$M_X : (-t_0, t_1) \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$M_X(t) = E[e^{tX}], \quad \forall t \in (-t_0, t_1).$$

Relación con los momentos.
Si existe la función generatriz de momentos de una variable aleatoria, se tiene:

- $\exists E[X^k], \quad \forall k \in \mathbb{N}.$ ⟶ Esto significa que existen todos los momentos
- $M_X(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} E[X^j], \quad \forall t \in (-t_0, t_1).$ ⟶ Desarrollo de Mclaurin de todos los momentos no centrados
- $E[X^k] = \left.\frac{d^k M_X(t)}{dt^k}\right|_{t=0}.$

Algunos teoremas

- **Teorema de unicidad**. Si existe la función generatriz de momentos de una variable aleatoria, determina unívocamente su distribución de probabilidad.
- **Teorema de Markov**.

$$X \geq 0,\ \exists E[X] \Rightarrow P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{E[X]}{\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0.$$

- **Desigualdad de Chebychev**.

$$\exists E[X^2] \Rightarrow P(|X - E[X]| \geq k) \leq \frac{\text{Var}[X]}{k^2}, \quad k > 0.$$

Ejercicio 1 de síntesis de conocimientos ⟶ Opcional (Lo hago en la siguiente diapositiva)

Una urna contiene diez bolas de las que ocho son blancas. Se extraen al azar sucesivamente y sin reemplazamiento dos bolas. Sea X la variable aleatoria que cuenta el número de bolas blancas obtenidas. Determina:

- La distribución de probabilidad de X.
- La función de distribución de X.
- Las siguientes probabilidades: obtener como máximo una bola blanca, obtener como mínimo una bola blanca.
- El número esperado de bolas blancas y su probabilidad.

Indicación: Obtener la función masa de probabilidad asociada al experimento aleatorio.

a) $\Omega = \{BB, BX, XB, XX\}$ Representamos por X una bola que no es blanca

$$P_x(2 \text{ blancas}) = P(BB) = \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{56}{90} = \frac{28}{45}$$

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$XX \longrightarrow 0$$

$$BX \longrightarrow 1$$

$$XB \longrightarrow 1$$

$$BB \longrightarrow 2$$

$$P_x(1 \text{ blanca}) = P(BX) + P(XB) = \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{8}{9} = \frac{16}{45}$$

$$P_x(0 \text{ blancas}) = P(XX) = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{90} = \frac{1}{45}$$

b) $F_x(x) = P_x(X \leq x)$, luego $F_x(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1/45 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 17/45 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$

c) $F_x(1) = \dfrac{17}{45}$ $\qquad P_x([1,2]) = F_x(2) - F_x(1^-) = 1 - 1/45 = \dfrac{44}{45}$

d) Por ser v.a. discreta, $E[X] = \sum_{x \in E_x} x \cdot p_x(x) = 0 \cdot 1/45 + 1 \cdot \frac{16}{45} + 2 \cdot \frac{28}{45} = \frac{8}{5} = 1.6$

$p_x(1.6) = 0$

Ejercicio 2 de síntesis de conocimientos $\longrightarrow$ Opcional (Lo hago en la siguiente diapositiva)

El tiempo (en horas) transcurrido entre dos paradas por averías en las máquinas es una variable aleatoria, X, continua con función de densidad dada por:

$$f(x) = ax^2 \quad si \quad 0 \leq x \leq 2 \quad ; \; f(x) = 0 \quad \text{en cualquier otro caso, con} \quad a \in \mathbb{R}.$$

Determina:

- El valor de la constante a.
- La función de distribución de X.
- El tiempo máximo que con probabilidad 0.95 puede transcurrir entre dos paradas.
- El tiempo medio esperado que puede trascurrir entre dos paradas y la dispersión de la distribución respecto a éste.

a) Para determinar la constante a usaremos que por ser f función de densidad, f es no negativa e integrable con $\int_0^2 f(x)\,dx = 1$:

$$\int_0^2 a\cdot x^2\,dx = \left[\frac{ax^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8a}{3} - 0 = \frac{8a}{3} \Rightarrow \frac{8a}{3} = 1 \Rightarrow a = \frac{3}{8}$$

b) $$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} f(y)\,dy}_{=0} + \int_0^x \frac{3y^2}{8}\,dy = \begin{cases} \frac{x^3}{8} & \forall x \in]0,2[\\ 0 & \forall x \leq 0 \\ 1 & \forall x \geq 2 \end{cases}$$

c) $F_X(x) = 0.95 \Rightarrow \frac{x^3}{8} = 0.95 \Rightarrow x = 1.9661$ horas

d) $$E[X] = \int_0^2 x\cdot f(x)\,dx = \int_0^2 \frac{3}{8}\cdot x^3\,dx = \left[\frac{3}{32}\cdot x^4\right]_0^2 = 1.5 \text{ horas}$$

$$E[X^2] = \int_0^2 x^2\cdot f(x)\,dx = \int_0^2 \frac{3}{8}\cdot x^4\,dx = \left[\frac{3}{8}\cdot\frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \frac{12}{5} = 2.4 \text{ horas}^2$$

$$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{3}{20} = 0.15$$

Esquema de contenidos

Distribución Degenerada

Una v.a. $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $P(X = c) = 1$, para un cierto $c \in \mathbb{R}$, se dice que sigue una **Distribución Degenerada** en un punto. **Denotamos**

$$X \sim D(c)$$

.

- **Función de distribución**: F_X tal que $F_X(c^-) = 0$, y $F_X(c) = F_X(x) = 1$, para cualquier $x > c$.
- **Función generatriz de momentos**: $M_X(t) = e^{tc}$, $t \in \mathbb{R}$.
- **Momentos**: $m_k = c^k$ y $\mu_k = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
- **Caracterización**: Una variable X es degenerada si y sólo si $\text{Var}(X) = 0$.

$X \rightsquigarrow D(c)$

$M_x(t) = E[e^{tx}] = e^{tc} \cdot p_x(c) = e^{tc}, t \in \mathbb{R}$

$E[X^2] = \dfrac{d^2 e^{tc}}{dt}\Big|_{t=0} = c^2 \cdot e^{tc}\big|_{t=0} = c^2 \Rightarrow Var(X) = 0$

Distribución Uniforme Discreta

Una v.a. $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $P(X = x_i) = \frac{1}{n}$, $i = 1, \ldots, n$, se dice que sigue una **Distribución Uniforme** en n puntos. **Denotamos**

$$X \sim \mathcal{U}(x_1, \ldots, x_n),\ x_i \in \mathbb{R}$$

n puntos con la misma probabilidad

- **Función de distribución**:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < x_1 \\ \frac{i-1}{n} & x_{i-1} \leq x < x_i,\ i = 2, \ldots, n \\ 1 & x \geq x_n \end{cases}$$

- **Función generatriz de momentos**: $M_X(t) = \frac{\sum_{i=1}^{n} e^{tx_i}}{n}$, $t \in \mathbb{R}$.
- **Momentos**: $m_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^k}{n}$ y $\mu_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - m_1)^k}{n}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
- **Esperanza matemática de una función medible**: $E[g(X)] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} g(x_i)$.
- **Casos especiales** $E[X] = \overline{X}$, y $\mathrm{Var}(X) = S^2$, denotando, como es usual, por S^2 la varianza muestral.

Distribución de Benoulli

Una v.a. $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, se dice que sigue una **Distribución Bernoulli** de parámetro p si y solo toma los valores 0 y 1 con probabilidades $1-p$ y p respectivamente. **Denotamos**

$$X \sim B(1, p), 0 < p < 1$$

- **Función Masa de Probabilidad**: $P(X = x) = p^x(1-p)^{1-x}, \quad x = 0, 1.$
- **Función de Distribución**: $F_X(x) = 0$, para $x < 0$, $F_X(x) = 1 - p$, para $0 \leq x < 1$, y $F_X(x) = 1$, para $x \geq 1$.
- **Función Generatriz de Momentos**: $M_X(t) = pe^t + (1-p)$, $t \in \mathbb{R}$.
- **Momentos**: $m_k = p$, y $\mu_k = (1-p)^k p + (-p)^k(1-p)$, para $k \in \mathbb{N}$.
- **Media**: $E[X] = p$.
- **Varianza**: $\text{Var}(X) = p(1-p)$.

Distribución Binomial

Una variable aleatoria, $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, asociada al **número de éxitos de un experimento aleatorio que se repite un número finito de veces con probabilidad de éxito,** p**, constante** se dice que sigue una **Distribución Binomial** de parámetros n y p, $0 < p < 1$. **Denotamos**

$$X \sim B(n, p), n \in \mathbb{N}$$

.

- **Función Masa de Probabilidad**:

$$P(X = x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}; x = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

- **Función Generatriz de Momentos**: $M_X(t) = (pe^t + (1-p))^n$, $t \in \mathbb{R}$.
- $E[X] = np$.
- $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$.
- Si consideramos que X está asociada **al número de fracasos**, entonces la distribución de probabilidad es, $X \sim B(n, 1-p) \quad n \in \mathbb{N}$.

Distribución de Poisson

Una variable aleatoria, asociada a la **ocurrencia de un número determinado de eventos durante cierto periodo de tiempo** (con probabilidad de ocurrencia pequeña) se dice que sigue una **Distribución de Poisson** de parámetro λ. **Denotamos**

$$X \sim \mathcal{P}(\lambda), (\lambda > 0)$$

También es conocida como **Ley de los sucesos raros**.

- λ expresa la frecuencia media de ocurrencia de un evento, esto es, el número de veces que se espera que ocurra el evento durante un intervalo de tiempo dado.
- **Función Masa de Probabilidad**: $P(X = x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$, $x = 0, 1, 2, \ldots$
- **Aproximación mediante el modelo Binomial**: Cuando el número n de pruebas de Bernoulli tiende a ser infinito para un suceso con escasa probabilidad de ocurrencia, la distribución Binomial aproxima a una distribución de Poisson (ley de los sucesos raros).
- **Función Generatriz de Momentos**: $M_X(t) = \exp(\lambda(e^t - 1))$, $t \in \mathbb{R}$.
- **Media y Varianza**: $E[X] = \mathrm{Var}(X) = \lambda$.

$$M_x(t) = E[e^{tx}] = \sum_{x \in E_x} e^{tx} \cdot p(x) = \sum_{x \in E_x} e^{tx} \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \left(\sum_{x \in E} e^{tx} \cdot \frac{\lambda^x}{x!} \right) = e^{-\lambda} \cdot \sum_{x \in E_x} \frac{(e^t \lambda)^x}{x!} = e^{-\lambda} \cdot e^{e^t \lambda} = e^{e^t \lambda - \lambda} = e^{\lambda(e^t - 1)} \quad t \in \mathbb{R}$$

Distribución Geométrica

Una variable aleatoria, asociada al **número de fracasos, en sucesivas repeticiones independientes de una prueba de Bernoulli con probabilidad de éxito p, antes de que ocurra el primer éxito** se dice que sigue una **Distribución Geométrica** de parámetro p, $(0 < p < 1)$. **Denotamos**

$$X \sim \mathcal{G}(p), (0 < p < 1)$$

- **Función de Distribución**: $F_X(x) = 0$, para $x < 0$, y, $F_X(x) = 1 - (1-p)^{x+1}$ para $x \geq 0$.
- **Función Generatriz de Momentos**: $M_X(t) = \frac{p}{1-(1-p)e^t}$, $\quad t < -\ln(1-p)$.
- $E[X] = \frac{1-p}{p}$.

$P(x) = (1-p)^x p$

- $\text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$.
- **Propiedad de falta de memoria**:

$$P(X \leq h + k / X \leq h) = P(X \leq k) \quad \forall h, k \in \mathbb{N} \cup 0.$$

- **Caracterización**: Es la única distribución con valores enteros positivos que verifica la propiedad de falta de memoria.

Distribución Binomial Negativa

Una variable aleatoria, asociada al **número de fracasos, en sucesivas repeticiones independientes de una prueba de Bernoulli con probabilidad de éxito p, antes de que ocurra el k-éximo éxito** se dice que sigue una **Distribución Binomial Negativa** de parámetros n y p, $(0 < p < 1)$. **Denotamos**

$$X \sim \mathcal{BN}(k, p), \ k \in \mathbb{N}, \ (0 < p < 1)$$

.

- La v.a $X + k$ sigue una **Distribución de Pascal o Tiempo de Espera**. Indica el número de pruebas hasta el k-ésimo éxito.
- **Función Masa de Probabilidad**:

$$P(X = x) = \overbrace{\frac{(x+k-1)!}{x!(k-1)!}}^{\binom{x+k-1}{x}}(1-p)^x p^k, \quad x \in \mathbb{N}$$

- **Función Generatriz de Momentos**: $M_X(t) = \left[\frac{p}{1-(1-p)e^t}\right]^k, \quad t < -\ln(1-p)$.
- $E[X] = \frac{k(1-p)}{p}$.
- $\mathrm{Var}(X) = \frac{k(1-p)}{p^2}$.

Distribución Hipergeométrica

Si se considera una población de tamaño N y una subpoblación de tamaño N_1, y se extrae una muestra aleatoria de tamaño n, sin reemplazamiento o simultáneamente, una v.a. X que describe **el número de individuos de la muestra que pertenecen a la subpoblación** se dice que sigue una **Distribución Hipergeométrica** de parámetros N, N_1 y n. **Denotamos**

$$X \sim H(N, N_1, n); \;\; N, N_1, n \in \mathbb{N}, \;\; N_1, n \leq N$$

.

- **Función Masa de Probabilidad**:

$$P(X = x) \quad = \quad \frac{(N_1!/x!(N_1 - x)!)\,((N - N_1)!/(n - x)!(N - N_1 - n + x)!)}{N!/n!(N - n)!}$$
$$x = 0, \ldots, n, \quad x \leq N_1, \;\; n - x \leq N - N_1.$$

$$P(X=x) = \frac{\binom{N_1}{x}\binom{N-N_1}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

- $E[X] = n\frac{N_1}{N}$.
- $\text{Var}(X) = n\frac{N_1}{N}\left(1 - \frac{N_1}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}$.
- Aproxima a una distribución Binomial $\mathcal{B}(n, p)$ cuando $N, N_1 \to \infty$, con $N_1/N \to p$, y siendo n el parámetro de la Hipergeométrica, que define el número de pruebas de Bernoulli en el modelo Binomial que aproxima.