Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada

Variable Compleja I, Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Convocatoria ordinaria

Ejercicio 1. (**2.5 puntos**) Probar que, para $a, t \in \mathbb{R}^+$, se tiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{(x^2+a^2)^2}\, dx = \frac{\pi}{2a^3}(1+at)\, \mathrm{e}^{-at}\,.$$

Ejercicio 2. (**2.5 puntos**) Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$f_n(z) = \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{e}^{\frac{z^3}{1+t}}}{1+t^2}\, dt \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

a) Probar que $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

b) Probar que la serie de funciones $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge en $\mathbb{C}$ y que su suma es una función entera.

Ejercicio 3. (**2.5 puntos**) Probar que no hay más funciones enteras e inyectivas que los polinomios de grado uno.

Ejercicio 4. (**2.5 puntos**) Sea $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ y supongamos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $r \in]0,1[$ se verifica

$$\max\{|f(z)| \colon |z| = r\} = r^n.$$

Probar que existe $\alpha \in \mathbb{T}$ tal que $f(z) = \alpha z^n$ para todo $z \in D(0,1)$.

Granada, 16 de junio de 2021

Ejercicio 2. (**2.5 puntos**) Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$f_n(z) = \int_n^{n+1} \frac{e^{\frac{z^3}{1+t}}}{1+t^2}\, dt \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

a) Probar que $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

b) Probar que la serie de funciones $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge en $\mathbb{C}$ y que su suma es una función entera.

a) Definimos $\sigma : [n, n+1] \longrightarrow \mathbb{C}$ $\quad$ σ es un camino

$\sigma(t) = t \quad \sigma'(t) = 1$

$\phi : [n, n+1] \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \qquad \phi(t,z) = \dfrac{e^{\frac{z^3}{1+t}}}{1+t^2}$

•) ϕ continua en $\sigma^* \times \mathbb{C}$ ya que es cociente de 2 funciones continuas (una exponencial y una polinómica) y el denominador no se anula

Para cada $t \in \sigma^*$ se define $\phi_t = \phi(t,z)$ $\forall z \in \mathbb{C}$ y $\phi_t \in H(\mathbb{C})$. Por el T^ma^ de holomorfía de la integral dependiente de un parámetro, $f_n \in H(\mathbb{C})$.

b) $$|f_n(z)| = \left| \int_n^{n+1} \frac{e^{\frac{z^3}{1+t}}}{1+t^2}\, dt \right| \leq \underbrace{\ell([n,n+1])}_{1} \cdot M_n$$

$$M_n = \max\left\{ \left| \frac{e^{\frac{z^3}{1+t}}}{1+t^2} \right| : t \in [n, n+1] \right\}$$

$$|1+t^2| \geq 1+n^2$$

$$\left| e^{\frac{z^3}{1+t}} \right|$$