Tema 3.- Independencia de variables aleatorias

Asignatura: PROBABILIDAD

Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

(3er Curso - 1er semestre)

©Prof. Dr. José Luis Romero Béjar

Departamento de Estadística e Investigación Operativa
Facultad de Ciencias (Despacho 10)

Periodo de docencia: 12/09/2022 a 20/12/2022

Outline

1. Definición y caracterización
2. Propiedades de la independencia
3. Reproductividad de distribuciones
4. Independencia de vectores aleatorios

Outline

1. Definición y caracterización
2. Propiedades de la independencia
3. Reproductividad de distribuciones
4. Independencia de vectores aleatorios

Independencia de las componentes de un vector aleatorio

Sea $\mathrm{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ un vector aleatorio. Se dice que las variables

$$X_i : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_{X_i}), \; i = 1, \ldots, n$$

son **independientes** si la **función de distribución conjunta** F_{X} **factoriza en producto de las marginales**, i.e.,

$$F_{\mathrm{X}}(x_1, \ldots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdots F_{X_n}(x_n).$$

Caracterizaciones de independencia para el caso DISCRETO

1. Sea $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ un **vector aleatorio discreto**. Entonces,

$$X_i : (\Omega, \mathcal{A}, P) :\longrightarrow (E_{X_i}, \mathcal{B}, P_{X_i}),\ i = 1, \ldots, n$$

son independientes si y sólo si, para cualquier $(x_1, \ldots, x_n) \in E_{X_1} \times \cdots \times E_{X_n}$,

$$P_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n) = p_{X_1}(x_1) \cdots p_{X_n}(x_n) = P[X_1 = x_1] \cdots P[X_n = x_n].$$

2. Sea $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ un **vector aleatorio discreto**. Entonces,

$$X_i : (\Omega, \mathcal{A}, P) :\longrightarrow (E_{X_i}, \mathcal{B}, P_{X_i}),\ i = 1, \ldots, n$$

son independientes si y sólo si, para cualquier $(x_1, \ldots, x_n) \in E_{X_1} \times \cdots \times E_{X_n}$,

$$P_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n) = h_1(x_1) \cdots h_n(x_n),$$

donde $h_i : E_{X_i} \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, son funciones arbitrarias.

Se puede decir que las componentes de un vector aleatorio **discreto** son **variables aleatorias independientes** si su **función masa de probabilidad es producto de las funciones masa de probabilidad marginales** o, **producto de funciones que solo dependen de las variables aleatorias marginales**, cada una de ellas.

Ejemplo

Sea (X,Y) vector aleatorio discreto con $P_{(X,Y)}(x,y) = p^2(1-p)^{x+y}$; $x,y = 0,1,2,\dots$

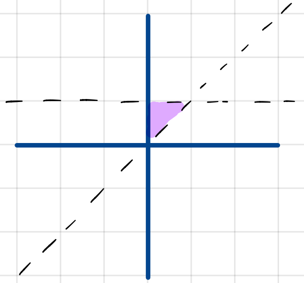
¿Son X e Y v.a. indep.?

$$P_{(X,Y)}(x,y) = p^2(1-p)^{x+y} = \underbrace{p^2\cdot(1-p)^x}_{h_1(x)} \cdot \underbrace{(1-p)^y}_{h_2(y)} \Rightarrow X,Y \text{ indep.}$$

Ejemplo

Sea (X,Y) v.a. continuo con $f(x,y) = \begin{cases} 1/2 & 0<x<y<1 \\ 0 & \end{cases}$

¿Son X e Y indep.? ¿$f(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)$?



$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy = \int_x^1 2\,dy = 2-2x \quad \text{si } 0<x<1$$

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx = \int_0^y 2\,dx = 2y \quad \text{si } 0<y<1$$

X e Y no son independientes pues $f_X(x)\cdot f_Y(y) \neq 1/2$

Ejemplo

$$f(x,y) = \begin{cases} 1/2 & 0<x<1 \,;\, 0<y<2 \\ 0 & \end{cases}$$

Aquí sí son independientes pues $f(x,y) = \underset{\substack{h_1(x) \\ x\in(0,1)}}{\frac{1}{2}} \cdot \underset{\substack{h_2(y) \\ y\in(0,2)}}{1}$

Caracterizaciones de independencia para el caso CONTINUO

1. Sea $\mathrm{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ un vector aleatorio **continuo**. Se tiene que

$$X_i : (\Omega, \mathcal{A}, P) :\longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_{X_i}),\ i = 1, \ldots, n$$

continuas, son **independientes si y sólo si**

$$f_{\mathrm{X}}(x_1, \ldots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdots f_{X_n}(x_n), \quad \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

2. Sea $\mathrm{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ un vector aleatorio **continuo**. Se tiene que

$$X_i : (\Omega, \mathcal{A}, P) :\longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_{X_i}),\ i = 1, \ldots, n$$

continuas, son **independientes si y sólo si**, para cualquier $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$f_{\mathrm{X}}(x_1, \ldots, x_n) = h_1(x_1) \cdots h_n(x_n),$$

donde $h_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, son funciones arbitrarias.

Se puede decir que las componentes de un vector aleatorio **continuo** son **variables aleatorias independientes** si su **función de densidad es producto de las funciones de densidad marginales** o, **producto de funciones que solo dependen de las variables aleatorias marginales**, cada una de ellas.

Caracterización de independencia en términos de la Distribución de Probabilidad

Sea $\mathrm{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ un **vector aleatorio con distribución de probabilidad conjunta** $P_{\mathrm{X}} : \mathcal{B}^n \longrightarrow [0,1]$. Sean $X_1, \ldots, X_n$, variables aleatorias con distribuciones de probabilidad, $P_{X_1}, \ldots, P_{X_n}$, respectivamente, entonces, son **independientes si y sólo si, para cualesquiera subconjuntos de Borel** $B_1, \ldots, B_n$ de la recta real, se da **la siguiente identidad**:

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{X}}(B_1 \times \cdots \times B_n) &= P(X_1 \in B_1, \ldots, X_n \in B_n) \\ &= P_{X_1}(B_1) \cdots P_{X_n}(B_n) = P(X_1 \in B_1) \cdots P(X_n \in B_n). \end{aligned}$$

Outline

1 Definición y caracterización

2 Propiedades de la independencia

3 Reproductividad de distribuciones

4 Independencia de vectores aleatorios

Propiedad 1

Si X sobre $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ es una **variable aleatoria degenerada**, i.e. $P(X = c) = 1$, entonces X es **independiente de cualquier otra variable aleatoria** definida sobre el mismo espacio de probabilidad.

Demostración:

- Nótese que si Y se define sobre $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ **discreta**

$$\begin{aligned} P(Y = y, X = c) &= P(Y = y) = p_Y(y) \times 1 \\ &= P(Y = y)P(X = c) = p_Y(y)p_X(c). \end{aligned}$$

- Si Y es **continua**, para cualquier $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$,

$$P(Y \in B_1, X \in B_2) = \begin{cases} \int_{B_1} f_Y(y)dy & \text{si} \quad c \in B_2 \\ 0 & \text{si} \quad c \in \mathbb{R} \backslash B_2 \end{cases}$$

En ambos casos, se tiene la factorización de la probabilidad conjunta, teniendo en cuenta, que $P(X \in B_2) = 1$, si $c \in B_2$, y $P(X \in B_2) = 0$, si $c \in \mathbb{R} \backslash B_2$.

Propiedad 2

Si $X_1, \ldots, X_n$ son independientes, **cualquier subconjunto de ellas también lo son**.

Demostración:

- Esta propiedad se obtiene de forma inmediata, considerando la definición de la función masa de probabilidad marginal del subconjunto considerado, a partir de la función masa de probabilidad conjunta, en el caso discreto.
- Igualmente, se deduce, en el caso continuo, considerando la definición de la densidad de probabilidad marginal del subconjunto considerado, a partir de la densidad de probabilidad conjunta.

$X = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ X_i indep. $\forall i = 1, \ldots, 4$

$F_X(x_1, x_2, x_3, x_4) = F_{X_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot F_{X_4}(x_4)$

Entonces (X_1, X_3) es indep. (X_2, X_4) porque $F_X(x_1, x_2, x_3, x_4) =$

$= F_{(X_1, X_3)}(x_1, x_3) \cdot F_{(X_2, X_4)}(x_2, x_4)$

Propiedad 3

Si $X_1, \ldots, X_n$ son independientes, **todas las distribuciones condicionadas coinciden con las marginales** correspondientes.

Demostración:

- Esta propiedad se obtiene también de forma directa, a partir de la definición de función masa de probabilidad y función de densidad condicionadas.
- Por ejemplo, en el caso bidimensional, si X e Y son v.a. continuas independientes, entonces

$$f_{X/Y}(x) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{f_X(x) f_Y(y)}{f_Y(y)} = f_X(x),$$

$$\forall y \in \mathrm{Supp}(f_Y), \quad \forall x \text{ tal que } \quad (x,y) \in \mathrm{Supp}(f_{(X,Y)}).$$

Supp(.) se refiere al **soporte de la función de densidad**, es decir, donde toma valores no nulos.

Propiedad 4. Caracterización de la independencia por medio de la FGM

Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a. tal que existen $M_{X_i}(t)$, para $t \in (-a_i, b_i)$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}^+$, $i = 1, \ldots, n$. Entonces, $X_1, \ldots, X_n$ **son independientes** si y solo sí para cualquier $(t_1, \ldots, t_n) \in (-a_1, b_1) \times \cdots \times (-a_n, b_n)$:

$$M_{X_1,\ldots,X_n}(t_1, \ldots, t_n) = M_{X_1}(t_1) \cdots M_{X_n}(t_n).$$

Demostración:

Veamos la demostración en el caso continuo (el caso discreto se demuestra de forma análoga).

$$M_{X_1,\ldots,X_n}(t_1, \ldots, t_n) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\sum_{i=1}^{n} t_i X_i\right) f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(t_1 X_1) f_{X_1}(x_1) dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp(t_n X_n) f_{X_n}(x_n) dx_n = M_{X_1}(t_1) \cdots M_{X_n}(t_n),$$

$\forall (t_1, \ldots, t_n) \in (-a_1, b_1) \times \cdots \times (-a_n, b_n)$.

Teorema de multiplicación de esperanzas

(i) Si $X_1, \ldots, X_n$ son independientes, y existe $E[X_i]$ para $i = 1, \ldots, n$, se tiene que

$$\exists E[X_1 \cdots X_n] = E[X_1] \cdots E[X_n].$$

(ii) Si $X_1, \ldots, X_n$ son independientes y $g_1, \ldots, g_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones medibles, las variables aleatorias $g_1(X_1), \ldots, g_n(X_n)$ son independientes. Se tiene entonces

$$E[g_1(X_1) \cdots g_n(X_n)] = E[g_1(X_1)] \cdots E[g_n(X_n)].$$

(iii) Si X e Y son independientes entonces $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$. Cuidado que el recíproco no es cierto

(iv) Si $X_1, \ldots, X_n$ son independientes con momento no centrado de orden dos finito

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \mathrm{Var}(X_i), \quad a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}.$$

Teorema de multiplicación de esperanzas (demostración caso continuo)

En particular, (i) se deriva de forma directa de la siguiente expresión:

Por ser indep., $f_X(x_1,\dots,x_n)=f_{X_1}(x_1)\cdots f_{X_n}(x_n)$

$$\begin{aligned}
E[X_1\cdots X_n] &= \int_{\mathbb{R}^n} x_1\cdots x_n f_{X_1\dots X_n}(x_1,\dots,x_n)dx_1\cdots dx_n \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_{X_1}(x_1)dx_1\cdots\int_{-\infty}^{\infty} x_n f_{X_n}(x_1)dx_n = E[X_1]\cdots E[X_n]
\end{aligned}$$

¿n?

(ii) se obtiene considerando que para cualesquiera B_i, $i=1,\dots,n$, subconjuntos de la σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$,

$$P_{g_1(X_1),\dots,g_n(X_n)}(B_1,\dots,B_n) = P(g_1(X_1)\in B_1,\dots,g_n(X_n)\in B_n) = P(X_1\in g_1^{-1}(B_1),\dots,X_n\in g_n^{-1}(B_n))$$

$$= P_{X_1,\dots,X_n}(g_1^{-1}(B_1),\dots,g_n^{-1}(B_n)) = \prod_{i=1}^n P_{X_i}(g_i^{-1}(B_i)) = \prod_{i=1}^n P(g_i(X_i)\in B_i) = \prod_{i=1}^n P_{g_i(X_i)}(B_i).$$

(iii) Si X e Y son independientes, entonces $\mathrm{Cov}(X,Y)=E[XY]-E[X]E[Y]=E[X]E[Y]-E[X]E[Y]=0$.
(iv) Si $X_1,\dots,X_n$ son independientes con momento no centrado de orden dos finito

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^n a_iX_i\right) = E\left(\left[\sum_{i=1}^n a_iX_i\right]^2\right) - \left[\sum_{i=1}^n a_iE[X_i]\right]^2$$

$$= \sum_{i,j} a_ia_jE[X_iX_j] - \sum_{i,j} a_ia_jE[X_i]E[X_j] = \sum_{i,j} a_ia_j\left[E[X_iX_j]-E[X_i]E[X_j]\right]$$

$$= \sum_{i,j}\delta_{i,j}a_i^2\left[E[X_i^2]-[E[X_i]]^2\right] = \sum_{i=1}^n a_i^2\left[E[X_i^2]-[E[X_i]]^2\right] = \sum_{i=1}^n a_i^2\mathrm{Var}(X_i)$$

donde $\delta_{i,j}$ representa la delta de Kronecker que vale 1 cuando $i=j$ y vale cero cuando $i\neq j$.

Matriz de covarianzas (apéndice)

Dado $X = (X_1 \cdots X_n)$ un vector aleatorio n-dimensional. Se define su **matriz de covarianzas** como la matriz formada por todas las covarianzas de sus componentes. Se denota por Σ_X y tiene la expresión:

$$\Sigma_X = (cov(X_i, X_j))_{i,j=1}^n = \begin{pmatrix} \sigma_{X_1}^2 & \dots & cov(X_1, X_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ cov(X_n, X_1) & \dots & \sigma_{X_n}^2 \end{pmatrix}.$$

Propiedades de la matriz de covarianzas

- Es una matriz simétrica y por tanto diagonalizable.
- Si hay independencia dos a dos de las componentes del vector aleatorio se tiene que Σ_X es una matriz diagonal.
- La matriz de covarianzas es el punto de partida para las distintas **técnicas de aprendizaje supervisado y no supervisado en machine learning** (Análisis de componentes principales, análisis factorial, análisis discriminante, etc).

Outline

1 Definición y caracterización

2 Propiedades de la independencia

3 Reproductividad de distribuciones

4 Independencia de vectores aleatorios

Reproductividad de la Binomial

Dadas $X_i \sim B(k_i, p)$, $i = 1, \ldots, n$, v.a. independientes, entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim B\left(\sum_{i=1}^{n} k_i, p\right). \tag{1}$$

La **demostración** de esta afirmación se obtiene de forma inmediata a partir de la propiedad 4 de independencia, considerando la expresión de la función generatriz de momentos M_{X_i} de X_i, que viene dada por

$$M_{X_i}(t) = (pe^t + (1-p))^{k_i}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Específicamente,

$$\begin{aligned} M_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) &= E\left[\exp\left(t\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right] = E\left[\prod_{i=1}^{n} \exp(tX_i)\right] = \prod_{i=1}^{n} E\left[\exp(tX_i)\right] \qquad (2) \\ &= \prod_{i=1}^{n} (pe^t + (1-p))^{k_i} = (pe^t + (1-p))^{\sum_{i=1}^{n} k_i}. \end{aligned}$$

La expresión (1) se deduce de forma directa de (2), dado que $(pe^t + (1-p))^{\sum_{i=1}^{n} k_i}$ es la función generatriz de momentos de una Binomial con parámetros $\sum_{i=1}^{n} k_i$ y p.

Reproductividad de la Poisson

Dadas $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda_i)$, $i = 1, \ldots, n$, independientes, entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) \tag{3}$$

Para la **demostración** se aplica la independencia y se utiliza que

$$M_{X_i}(t) = \exp\left(\lambda_i(e^t - 1)\right), \quad t \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Reproductividad de la Binomial Negativa

Dadas $X_i \sim BN(k_i, p)$, $i = 1, \ldots, n$, independientes, entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim BN\left(\sum_{i=1}^{n} k_i, p\right) \tag{4}$$

Para la **demostración** se aplica la independencia y se utiliza que

$$M_{X_i}(t) = \left[\frac{p}{1-(1-p)e^t}\right]^{k_i}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Poisson

$$\mathcal{M}_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) = E\left[\exp\left(t\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right] = E\left[\prod_{i=1}^{n}\exp(tX_i)\right] =$$

Como $X_1,\dots,X_n$ son indep. y la exponencial es una función medible, luego $\exp(tX_i)$ son indep. y por el Tma multiplicación de las esperanzas

$$= \prod_{i=1}^{n} \underbrace{E[\exp(tX_i)]}_{\mathcal{M}_{X_i}(t)} = \prod_{i=1}^{n}\exp(\lambda_i(e^t-1)) =$$

$$= \exp\left((e^t-1)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)$$

Binomial negativa

Análogo hasta $\prod_{i=1}^{n}\mathcal{M}_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{p}{1-(1-p)e^t}\right]^{k_i} \overset{}{=} \left[\frac{p}{1-(1-p)e^t}\right]^{\sum_{i=1}^{n} k_i}$

Producto de potencias con la misma base, se suman los exponentes

Geométrica

$X_i \sim G(p) = BN(1,p)$ luego $k_i = 1 \ \forall i \in \{1,\dots,n\}$

y por la fórmula del anterior apartado: $\left[\frac{p}{1-(1-p)e^t}\right]^{\sum_{i=1}^{n} 1} = \left[\frac{p}{1-(1-p)e^t}\right]^{n}$

Normal

Análogo hasta $\prod_{i=1}^{n}\mathcal{M}_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n}\exp\left(t\mu_i + \frac{t^2\sigma_i^2}{2}\right) = \exp\left(\sum_{i=1}^{n}\left(t\mu_i + \frac{t^2\sigma_i^2}{2}\right)\right) = \exp\left(t\sum_{i=1}^{n}\mu_i + \frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2\right) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_i, \sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2\right)$

Gamma

Análogo hasta $\prod_{i=1}^{n}\mathcal{M}_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{t}{a}\right)^{-p_i} = \left(1-\frac{t}{a}\right)^{-\sum_{i=1}^{n} p_i}$

Producto de potencias con la misma base, se suman los exponentes

Erlang

Es exactamente igual que la gamma pues $X_i \sim \mathcal{E}(n,\lambda) \Leftrightarrow X_i \sim \Gamma(n,\lambda)$ con $n \in \mathbb{N}-\{0\}$, $\lambda > 0$

Exponencial

$X_i \sim \exp(\lambda) \Leftrightarrow X_i \sim \Gamma(1,\lambda)$ $\lambda > 0$

Luego aplicamos la fórmula para Gamma, donde $p_i = 1 \ \forall i \in \{1,\dots,n\}$ y $a = \lambda$: $\mathcal{M}_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) = \underbrace{\left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^{-n}}_{\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n,\lambda)}$

Reproductividad de la Geométrica

Dadas $X_i \sim G(p)$, $i = 1, \ldots, n$, independientes, entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim BN(n, p) \tag{5}$$

La **demostración** es inmediata a partir de la propiedad anterior, dado que $X_i \sim G(p)$, coincide con $X_i \sim BN(1, p)$, i.e., $k_i = 1$, $i = 1, \ldots, n$.

Reproductividad de la Normal

Dadas $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, \ldots, n$, independientes, entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right) \tag{6}$$

La **demostración** es inmediata a partir de la independencia y de la siguiente expresión:

$$M_{X_i}(t) = \exp\left(t\mu_i + \frac{t^2\sigma_i^2}{2}\right), \quad t \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Reproductividad de la Gamma

Dadas $X_i \sim \Gamma(p_i, a)$, $i = 1, \ldots, n$, independientes, entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma\left(\sum_{i=1}^{n} p_i, a\right) \tag{7}$$

La **demostración** es inmediata a partir de la independencia y de la siguiente expresión:

$$M_{X_i}(t) = \left[1 - \frac{t}{a}\right]^{-p_i}, \quad t < a, \quad i = 1, \ldots, n.$$

En **consecuencia**, si $X_i \sim \mathcal{E}(k_i, a)$, $i = 1, \ldots, n$, independientes, entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma\left(\sum_{i=1}^{n} k_i, a\right) \equiv \mathcal{E}\left(\sum_{i=1}^{n} k_i, a\right). \tag{8}$$

Reproductividad de la Exponencial

Dadas $X_i \sim \exp(\lambda)$, $i = 1, \ldots, n$, independientes, entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma\left(n, \lambda\right) \equiv \mathcal{E}(n, \lambda) \tag{9}$$

La **demostración** se obtiene de la independencia y de la siguiente expresión:

$$M_{X_i}(t) = \left[1 - \frac{t}{\lambda}\right]^{-1}, \quad t < \lambda, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Outline

1. Definición y caracterización
2. Propiedades de la independencia
3. Reproductividad de distribuciones
4. Independencia de vectores aleatorios

Independencia de familias de variables aleatorias

Se considera un conjunto T arbitrario de índices, normalmente, un conjunto infinito numerable. Se introduce entonces una familia de variables aleatorias $\{X_t,\ t \in T\}$, asociada a los índices del conjunto T, todas ellas definidas sobre el mismo espacio probabilístico base $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Se dice entonces que:

- Las variables aleatorias $\{X_t,\ t \in T\}$ son **mutuamente independientes**, si para cualquier $k \in \mathbb{N}$, las variables aleatorias $X_{t_1}, \ldots, X_{t_k}$ son independientes, $t_1, \ldots, t_k \in T$.

- Las variables aleatorias $\{X_t,\ t \in T\}$ son **independientes dos a dos**, si para cualesquiera índices t_i, t_j, del conjunto T, con $t_i \neq t_j$, $i \neq j$, las variables aleatorias X_{t_i} y X_{t_j}, son independientes.

Como caso particular, cuando $T = \mathbb{N}$, se obtienen las caracterizaciones de **independencia mutua e independencia dos a dos para sucesiones de variables aleatorias** $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

Independencia de vectores aleatorios

La definición y caracterizaciones de independencia para vectores aleatorios se pueden formular de forma sencilla, como extensión directa de las estudiadas para variables aleatorias unidimensionales.

Más concretamente, para m **vectores** $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_m$, definidos sobre el mismo espacio probabilístico base $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, con dimensiones posiblemente diferentes, denotadas por $n_1, \ldots, n_m$, se dice que $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_m$ **son independientes** si su **función de distribución de probabilidad conjunta**, $n_1 + \cdots + n_m$-dimensional, **factoriza en producto de las funciones de distribución de probabilidad marginales** n_i **dimensionales**, $i = 1, \ldots, m$.

$$F_{\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_m}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_m) = F_{\mathrm{X}_1}(\mathrm{x}_1) \times \cdots \times F_{\mathrm{X}_m}(\mathrm{x}_m), \quad \forall(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_m),$$

donde

$$\mathrm{x}_i = (x_{1,i}, \ldots, x_{n_i,i}) \in \mathbb{R}^{n_i}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Caracterización de independencia de vectores aleatorios

De forma similar se **caracteriza la independencia**, en el caso **discreto y continuo**, en términos de la factorización de la función masa de probabilidad y función de densidad de probabilidad conjuntas $n_1 + \cdots + n_m$-dimensionales, en términos de las marginales n_i-dimensionales, $i = 1, \ldots, m$.

Es decir, en el caso **discreto y continuo**, $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_m$ **son independientes si y sólo si**,

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_m}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_m) &= \prod_{i=1}^{m} P_{\mathrm{X}_i}(\mathrm{x}_i), \quad \forall (\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_m) \in E_{\mathrm{X}_1} \times \cdots \times E_{\mathrm{X}_m} \\ f_{\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_m}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_m) &= \prod_{i=1}^{m} f_{\mathrm{X}_i}(\mathrm{x}_i), \quad \forall (\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_m) \in \mathbb{R}^{n_1+\cdots+n_m}, \end{aligned}$$

respectivamente.
Adicionalmente, en **términos de la distribución de probabilidad**, $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_m$ son **independientes si y sólo si**, para cualesquiera $B_i \in \mathcal{B}^{n_i}$, $i = 1, \ldots, m$, se tienen las siguientes identidades:

$$P_{\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_m}(B_1 \times \cdots \times B_m) = P(\mathrm{X}_1 \in B_1, \ldots, \mathrm{X}_m \in B_m) = \prod_{i=1}^{m} P(\mathrm{X}_i \in B_i) = \prod_{i=1}^{m} P_{\mathrm{X}_i}(B_i).$$

Caracterización en términos de la función generatriz de momentos

Supongamos que **existen las funciones generatrices de momentos** de $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_m$, definidas, respectivamente, en los intervalos $\mathrm{I}_i = \prod_{j=1}^{n_i}(-a_{j,i}, b_{j,i})$, $a_{j,i}, b_{j,i} > 0$, $\mathrm{I}_i \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$, $i = 1, \ldots, m$.

Entonces, $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_m$ son **independientes si y sólo si**, $\forall(\mathrm{t}_1, \ldots, \mathrm{t}_m) \in \mathrm{I}_1 \times \cdots \times \mathrm{I}_m$,

$$\begin{aligned} M_{\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_m}(\mathrm{t}_1, \ldots, \mathrm{t}_m) &= E\left[\exp\left(\sum_{i=1}^{m} \langle \mathrm{t}_i, \mathrm{X}_i \rangle\right)\right] \\ \prod_{i=1}^{m} E\left[\exp\left(\langle \mathrm{t}_i, \mathrm{X}_i \rangle\right)\right] &= \prod_{i=1}^{m} M_{\mathrm{X}_i}(\mathrm{t}_i). \end{aligned}$$

Propiedades de independencia entre vectores aleatorios

Se **pueden reformular** de forma inmediata las **propiedades de independencia** estudiadas para variables aleatorias unidimensionales.

En particular, se tiene

- Si $X_1, \ldots, X_m$ son **independientes**, cualquier **subconjunto** $X_{i_1}, \ldots, X_{i_k}$, $0 < k < n$, de $X_1, \ldots, X_m$ está **constituido por vectores aleatorios independientes**.
- Si $X_1, \ldots, X_m$, son vectores aleatorios **independientes**, para cualesquiera g_i, $i = 1, \ldots, m$, aplicaciones medibles, los vectores aleatorios $g_1(X_1), \ldots, g_m(X_m)$, son **también independientes**.