Variable Compleja I

Tema 8: Equivalencia entre analiticidad y holomorfía

1. Analiticidad $\iff$ Holomorfía
2. Fórmula de Cauchy para las derivadas
3. Teorema de extensión de Riemann

Analiticidad $\Longleftrightarrow$ Holomorfía

Desarrollo en serie de Taylor

Si $\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, entonces f es analítica en Ω, y en particular f es indefinidamente derivable en Ω. Además:

- Si $\Omega = \mathbb{C}$, para todo $a \in \Omega$, la serie de Taylor $\sum_{n\geqslant 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$ tiene radio de convergencia infinito y

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

- Si $\Omega \neq \mathbb{C}$, $a \in \Omega$ y $R_a = d(a, \mathbb{C} \setminus \Omega)$, la serie de Taylor $\sum_{n\geqslant 0} \frac{f^{n}(a)}{n!}(z-a)^n$ tiene radio de convergencia mayor o igual que R_a y:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n \qquad \forall z \in D(a, R_a)$$

Comentarios al teorema: caso $\Omega = \mathbb{C}$

Lo que ya sabíamos

$$\Lambda = \left\{ \alpha : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{C} \; : \; \lim_{n\to\infty} |\alpha(n)|^{1/n} = 0 \right\}$$

Para $\alpha \in \Lambda$ se tiene:

- La serie $\sum_{n\geqslant 0} \alpha(n) z^n$ tiene radio de convergencia infinito

  (Fórmula de Cauchy-Hadamard)

- Si $f_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha(n) z^n$ para todo $z \in \mathbb{C}$, entonces $f_\alpha \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$

  (Holomorfía de la suma de una serie de potencias)

- $\beta \in \Lambda, \quad f_\beta = f_\alpha \implies \beta = \alpha$

  (Principio de identidad para series de potencias)

Comentarios al teorema: caso $\Omega = \mathbb{C}$

Lo que ahora sabemos

$$\Lambda = \left\{ \alpha : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{C} \; : \; \lim_{n\to\infty} |\alpha(n)|^{1/n} = 0 \right\}$$

- Toda función entera es analítica en $\mathbb{C}$: f_α analítica en $\mathbb{C}$ $\forall \alpha \in \Lambda$
- Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y $\alpha(n) = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, entonces:

$$\alpha \in \Lambda \qquad \text{y} \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = f_\alpha(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Hemos "parametrizado" el conjunto de todas las funciones enteras:

$$\mathcal{H}(\mathbb{C}) = \{ f_\alpha : \alpha \in \Lambda \}$$

- $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) \implies f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n \quad \forall a, z \in \mathbb{C}$

El desarrollo en serie de Taylor de una función entera, centrado en cualquier punto del plano, es válido en todo el plano

Comentarios al teorema: caso $\Omega = D(a,R)$ con $a \in \mathbb{C}$ y $R \in \mathbb{R}^+$

Lo que ya sabíamos

$$\Lambda_R = \left\{ \alpha : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{C} \ : \ \limsup_{n\to\infty} \left| \alpha(n) \right|^{1/n} \leqslant 1/R \right\}$$

Para $\alpha \in \Lambda_R$ se tiene:

- La serie $\sum_{n \geqslant 0} \alpha(n) z^n$ tiene radio de convergencia mayor o igual que R

  (Fórmula de Cauchy-Hadamard)

- $f_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha(n)(z-a)^n \quad \forall z \in D(a,R) \quad \Longrightarrow \quad f_\alpha \in \mathcal{H}\big(D(a,R)\big)$

  (Holomorfía de la suma de una serie de potencias)

- $\beta \in \Lambda, \quad f_\beta = f_\alpha \quad \Longrightarrow \quad \beta = \alpha$

  (Principio de identidad para series de potencias)

Comentarios al teorema: caso $\Omega = D(a,R)$ con $a \in \mathbb{C}$ y $R \in \mathbb{R}^+$

Lo que ahora sabemos

$$\Lambda_R = \left\{\alpha : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{C} \ : \ \limsup_{n\to\infty} \left|\alpha(n)\right|^{1/n} \leqslant 1/R \right\}$$

- Toda $f \in \mathcal{H}\big(D(a,R)\big)$ es analítica en $D\big(D(a,R)\big)$: f_α analítica en $D(a,R)$ $\forall \alpha \in \Lambda_R$

- Si $f \in \mathcal{H}\big(D(a,R)\big)$ y $\alpha(n) = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$ $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, entonces:

$$\alpha \in \Lambda_R \qquad \text{y} \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n = f_\alpha(z) \quad \forall z \in D(a,R)$$

Hemos “parametrizado” el conjunto de todas las funciones holomorfas en cualquier disco abierto: $\mathcal{H}\big(D(a,R)\big) = \{f_\alpha : \alpha \in \Lambda_R\}$

- Si $f \in \mathcal{H}\big(D(a,R)\big)$, $b \in D(a,R)$ y $R_b = R - |b-a|$ entonces:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(b)}{n!}(z-b)^n \qquad \forall z \in D(b,R_b)$$

Comentarios al teorema: caso general $\Omega \neq \mathbb{C}$ y Ω no es un disco abierto

Lo que por ahora sabemos

No tenemos una descripción “global” de cada función holomorfa en Ω como suma de una serie de potencias (no es posible tenerla).

Por tanto no tenemos una “parametrización” de $\mathcal{H}(\Omega)$, es decir, un método que nos permita construir todas las funciones holomorfas en Ω.

El teorema nos da información “local”:

- $f \in \mathcal{H}(\Omega) \implies f$ analítica en Ω
- Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $a \in \Omega$ y $R_a = d(a, \mathbb{C} \setminus \Omega)$, entonces la serie Taylor de f centrada en a tiene radio de convergencia mayor o igual que R_a y se verifica que:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n \qquad \forall z \in D(a, R_a)$$

El desarrollo en serie de Taylor de f en cada punto $a \in \Omega$ es válido en el disco de centro a y cuyo radio es el máximo posible

Ejemplo: $\frac{1}{1+z^2}$ holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ $= f(z)$ $\quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!}(z-a)^n \quad \forall z \in D(a, R_a) \subset \Omega$

$R_a = d(a, \mathbb{C} \setminus \Omega) =$
$= d(a, \{\pm i\})$

Fórmula de Cauchy para las derivadas: motivación

Repaso de dos fórmulas conocidas

$$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}, \quad f \in \mathcal{H}(\Omega), \quad a \in \Omega, \quad r \in \mathbb{R}^+, \quad \overline{D}(a,r) \subset \Omega$$

- Fórmula de Cauchy:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw \quad \forall z \in D(a,r)$$

- Para $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, ahora sabemos que $f^{(k)} \in \mathcal{H}(\Omega)$, luego

$$f^{(k)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f^{(k)}(w)}{w-z}\, dw \quad \forall z \in D(a,r)$$

  Esto no es nuevo, no es la fórmula que buscamos.

- En la demostración del desarrollo de Taylor vimos que:

$$\frac{f^{(k)}(a)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}}\, dw \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

  Para $k = 0$ obtenemos la fórmula de Cauchy, ¡¡ pero sólo para $z = a$!!

Fórmula de Cauchy para las derivadas

Teorema

$$\Omega = \Omega^{\circ} \subset \mathbb{C}\,, \quad f \in \mathcal{H}(\Omega)\,, \quad a \in \Omega\,, \quad r \in \mathbb{R}^{+}\,, \quad \overline{D}(a,r) \subset \Omega$$

Entonces:

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}}\, dw \qquad \forall z \in D(a,r)\,, \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Teorema de extensión de Riemann: motivación

Funciones derivables en un abierto salvo en un punto

$$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}, \quad z_0 \in \Omega, \quad f \in \mathcal{H}\big(\Omega \setminus \{z_0\}\big)$$

Consideremos las siguientes afirmaciones:

Esto en IR es impensable

(1) $\exists\ g \in \mathcal{H}(\Omega) : g(z) = f(z) \quad \forall z \in \Omega \setminus \{z_0\}$

(2) $\exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w \in \mathbb{C}$

(3) $\exists\ \delta, M \in \mathbb{R}^+ : \quad D(z_0, \delta) \subset \Omega \quad$ y $\quad |f(z)| \leqslant M \quad \forall z \in D(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$

(4) $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0$

Es evidente que (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4)

Para funciones reales de variable real, ninguna implicación es reversible

Teorema de extensión de Riemann

Teorema

$$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}, \quad z_0 \in \Omega, \quad f \in \mathcal{H}\big(\Omega \setminus \{z_0\}\big)$$

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) $\exists\, g \in \mathcal{H}(\Omega) : g(z) = f(z) \quad \forall z \in \Omega \setminus \{z_0\}$

(2) $\exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w \in \mathbb{C}$

(3) $\exists\, \delta, M \in \mathbb{R}^+ : \quad D(z_0, \delta) \subset \Omega \quad$ y $\quad |f(z)| \leqslant M \quad \forall z \in D(z_0, \delta)$ Acotada

(4) $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0$ $\Rightarrow$ Esto es lo más débil

Basta obviamente probar que $(4) \Rightarrow (1)$

Corolario

$$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}, \quad z_0 \in \Omega, \quad f : \Omega \to \mathbb{C}$$

Supongamos que $f \in \mathcal{H}\big(\Omega \setminus \{z_0\}\big)$ y que f es continua en z_0

Entonces $f \in \mathcal{H}(\Omega)$