Variable Compleja I

Tema 11: Comportamiento local de una función holomorfa

Propiedad de la media

Motivación

Fórmula de Cauchy: $\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}, \quad f \in \mathcal{H}(\Omega), \quad \overline{D}(a,r) \subset \Omega$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw \qquad \forall z \in D(a,r)$$

Conociendo f en $C(a,r)^*$ la conocemos en $D(a,r)$

Usaremos el caso más sencillo: $z = a$

Propiedad de la media

$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}, \quad f \in \mathcal{H}(\Omega), \quad \overline{D}(a,r) \subset \Omega$

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(a+re^{it})\, dt$$

$z = a + re^{it}$

$dz = ire^{it}\, dt$

$\dfrac{f(a+re^{it})}{re^{it}} \cdot ire^{it}$

Por tanto,

$$\big|f(a)\big| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \big|f(a+re^{it})\big|\, dt$$

Principio del módulo máximo

Teorema

$$\Omega \text{ dominio} \quad \text{y} \quad f \in \mathcal{H}(\Omega)$$

Supongamos que $|f|$ tiene un máximo relativo en un punto $a \in \Omega$, es decir:

$$\exists \delta > 0 \ : \ D(a,\delta) \subset \Omega \quad \text{y} \quad |f(z)| \leqslant |f(a)| \ \ \forall z \in D(a,\delta)$$

Entonces f es constante

Corolario 1

Ω dominio acotado, $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ continua en $\overline{\Omega}$ y holomorfa en Ω, es decir $f \in C\left(\overline{\Omega}\right) \cap \mathcal{H}(\Omega)$. Entonces:

$$\max\left\{|f(z)| \ : \ z \in \overline{\Omega}\right\} = \max\left\{|f(z)| \ : \ z \in \operatorname{Fr}(\Omega)\right\}$$

En particular:

$$f(z) = 0 \ \ \forall z \in \operatorname{Fr}(\Omega) \quad \Longrightarrow \quad f(z) = 0 \ \ \forall z \in \overline{\Omega}$$

Principio del módulo mínimo

Corolario 2

Ω dominio acotado, $f_n \in C(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{H}(\Omega) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Supongamos que $\{f_n\}$ converge uniformemente en $\operatorname{Fr}(\Omega)$

Entonces $\{f_n\}$ converge uniformemente en $\overline{\Omega}$

a una función $f \in C(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{H}(\Omega)$

Principio del módulo mínimo

Ω dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$

Supongamos que $|f|$ tiene un mínimo relativo en un punto $a \in \Omega$:

$$\exists \delta > 0 \ : \ D(a,\delta) \subset \Omega \quad \text{y} \quad |f(z)| \geqslant |f(a)| \quad \forall z \in D(a,\delta)$$

Entonces, o bien $f(a) = 0$, o bien f es constante

Corolario

Ω dominio acotado, $f \in C(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{H}(\Omega)$, no constante

Si $|f|$ es constante en $\operatorname{Fr}(\Omega)$, entonces existe $a \in \Omega$ tal que $f(a) = 0$.

Teorema de la aplicación abierta

Teorema

Ω dominio, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ no constante

conexo y abierto

Entonces f es una aplicación abierta, es decir:

$$U = U^\circ \subset \Omega \implies f(U) = f(U)^\circ$$

Lleva abiertos en abiertos

Teorema de la función inversa local

Lema

$$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}, \quad f \in \mathcal{H}(\Omega)$$

La función $\Phi : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ definida por

$$\Phi(w,z) = \begin{cases} \dfrac{f(w)-f(z)}{w-z} & \text{si } \ w \neq z \\ f'(w) = f'(z) & \text{si } \ w = z \end{cases}$$

es continua

Teorema de la función inversa local

$$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}, \quad f \in \mathcal{H}(\Omega), \quad a \in \Omega \text{ con } \ f'(a) \neq 0$$

Entonces existe un abierto U, con $a \in U \subset \Omega$ tal que:

- f es inyectiva en U y $f'(z) \neq 0 \ \ \forall z \in U$
- El conjunto $V = f(U)$ es abierto
- Si $\varphi = f\big|_U$, entonces $\varphi^{-1} \in \mathcal{H}(V)$ con $\left(\varphi^{-1}\right)'\left(f(z)\right) = \dfrac{1}{f'(z)} \ \ \forall z \in U$

En $\mathbb{R}^n$, había que exigir que φ^{-1} fuese abierta, pero aquí ya lo tenemos gratis por el T$^{\text{ma}}$ de la aplicación abierta.

Logaritmos holomorfos

Dado un punto en el que se anula la derivada, no existe un entorno de dicho punto donde f sea inyectiva. Existe un entorno de ese cero en el que f se comporta como una función potencia

Ejemplo

$$m \in \mathbb{N}, \quad m \geqslant 2, \qquad f(z) = z^m \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad f'(0) = 0$$

Fijado $\delta \in \mathbb{R}^+$, para cada $w \in D(0, \delta^m) \setminus \{0\}$

la ecuación $f(z) = w$ tiene exactamente m soluciones en $D(0, \delta)$

Logaritmos holomorfos

Ω dominio estrellado, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $f(z) \neq 0 \ \forall z \in \Omega$. Entonces:

- f admite un logaritmo holomorfo en Ω, es decir,

$$\exists g \in \mathcal{H}(\Omega) \ : \ f(z) = e^{g(z)} \quad \forall z \in \Omega$$

- Para cada $m \in \mathbb{N}$, f admite una raíz m-ésima holomorfa en Ω, es decir,

$$\exists h \in \mathcal{H}(\Omega) \ : \ f(z) = \big(h(z)\big)^m \quad \forall z \in \Omega$$

Comportamiento local en un cero de la derivada

Teorema

Ω dominio, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ no constante, $a \in \Omega$ tal que $f'(a) = 0$ y $b = f(a)$

Sea $m \in \mathbb{N}$ el orden del cero de la función $z \mapsto f(z) - b$ en el punto a

Entonces existen un abierto U con $a \in U \subset \Omega$ y un $\varepsilon > 0$ tales que:

- $f(U) = D(b, \varepsilon)$
- $z \in U\,, \quad f(z) = b \quad \Longrightarrow \quad z = a$
- Para cada $w \in \mathbb{C}$ con $0 < |w - b| < \varepsilon$ la ecuación $f(z) = w$ tiene exactamente m soluciones distintas en U, es decir, el conjunto $\{z \in U : f(z) = w\}$ tiene exactamente m elementos.

Caracterización de la inyectividad local

$$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}, \quad f \in \mathcal{H}(\Omega), \quad a \in \Omega$$

$$f \text{ inyectiva en un entorno de } a \iff f'(a) \neq 0$$

Teorema de la función inversa global

Teorema

U dominio, $f \in \mathcal{H}(U)$ inyectiva. Entonces:

- $V = f(U)$ es un dominio 1) Por el T. de la aplicación abierta
- $f'(z) \neq 0 \quad \forall z \in U$ 2) Por el T. anterior
- $f^{-1} \in \mathcal{H}(V)$ con: $\left(f^{-1}\right)'\left(f(z)\right) = \dfrac{1}{f'(z)} \qquad \forall z \in U$

Reglas de derivación de la función inversa

f una función inyectiva definida en $A \neq \emptyset \quad a \in A\,, \quad b = f(a)$

Funciones reales de variable real

$A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ derivable en $a \in A'$. Entonces $b \in f(A)'$ y:

$$f^{-1} \text{ derivable en } b \iff f^{-1} \text{ continua en } b \text{ y } f'(a) \neq 0$$

en cuyo caso $\left(f^{-1}\right)'(b) = 1 \,/\, f'(a)$

Funciones de $\mathbb{R}^N$ en $\mathbb{R}^N$

$A \subset \mathbb{R}^N$, $f : A \to \mathbb{R}^N$ diferenciable en $a \in A^\circ$, con $b \in f(A)^\circ$. Entonces:

$$f^{-1} \text{ diferenciable en } b \iff f^{-1} \text{ continua en } b \text{ y } |Jf(a)| \neq 0$$

en cuyo caso $Df^{-1}(b) = Df(a)^{-1}$

Funciones complejas de variable compleja

$A \subset \mathbb{C}$, $f : A \to \mathbb{C}$ derivable en $a \in A'$. Entonces $b \in f(A)'$ y:

$$f^{-1} \text{ derivable en } b \iff f^{-1} \text{ continua en } b \text{ y } f'(a) \neq 0$$

en cuyo caso $\left(f^{-1}\right)'(b) = 1 \,/\, f'(a)$

Teoremas locales de la función inversa

Funciones reales de variable real

$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{R}$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ derivable en Ω, con f' continua en $a \in \Omega$.

$$f'(a) \neq 0 \implies \exists U \text{ con } a \in U = U^\circ \subset \Omega \text{ tal que } f \text{ es inyectiva en } U$$

Funciones de $\mathbb{R}^N$ en $\mathbb{R}^N$

$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{R}^N$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ diferenciable en Ω, con Df continua en $a \in \Omega$.

$$|Jf(a)| \neq 0 \implies \exists U \text{ con } a \in U = U^\circ \subset \Omega \text{ tal que } f \text{ es inyectiva en } U$$

Funciones complejas de variable compleja

$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $a \in \Omega$.

$$f'(a) \neq 0 \iff \exists U \text{ con } a \in U = U^\circ \subset \Omega \text{ tal que } f \text{ es inyectiva en } U$$

Teoremas globales de la función inversa

Funciones reales de variable real

$\Omega \subset \mathbb{R}$, Ω intervalo abierto, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ derivable en Ω.

Suponemos que $f'(x) \neq 0 \ \ \forall x \in \Omega$. Entonces:

f es inyectiva, $f(\Omega)$ es un intervalo abierto y f^{-1} es derivable en $f(\Omega)$

Funciones de $\mathbb{R}^N$ en $\mathbb{R}^N$

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$, Ω dominio, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$.

Suponemos que $|Jf(x)| \neq 0 \ \ \forall x \in \Omega$ y que f es inyectiva. Entonces:

$f(\Omega)$ es un dominio y f^{-1} es diferenciable en $f(\Omega)$

Funciones complejas de variable compleja

$\Omega \subset \mathbb{C}$, Ω dominio, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Suponemos que f es inyectiva. Entonces:

Entonces $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$, $f(\Omega)$ es un dominio y $f^{-1} \in \mathcal{H}(\Omega)$