Probabilidad - 3er Curso (Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas)
Convocatoria ordinaria (11 de enero de 2023)

Apellidos, nombre:

---

1. **(1.5 puntos)** Justificar las siguientes relaciones:

   a) **(0.25 puntos)** Sean X_1 y X_2 variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas según una ley Binomial, $B(3, \frac{1}{2})$. Justificar que $P[X_1 + X_2 = 8] = 0$.

   b) **(0.25 puntos)** Sean X_1, X_2 y X_3 variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas según una ley de Poisson, $P(3)$. Justificar que $P[X_1 + X_2 + X_3 > 0] = \frac{e^9-1}{e^9}$.

   c) **(1 punto)** Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas según una ley de Bernoulli de parámetro p. Se considera $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, la variable aleatoria que define las sumas parciales de la sucesión. Justificar que $\dfrac{S_n}{n} \to^P p$.

2. **(1.5 puntos)** Sean $X_1, \ldots, X_n$ n variables aleatorias continuas, independientes e identicamente distribuidas con distribución uniforme en el intervalo $[0,1]$. Deducir la expresión analítica de la función de densidad de la variable aleatoria $Z = max\{X_1, \ldots, X_n\}$.

3. **(5 puntos)** Dado el vector aleatorio (X,Y) con distribución uniforme en el recinto acotado limitado por el exterior de la parábola $y = x^2$, la recta de ecuación $2y + x = 1$ y la recta de ecuación $y = 0$:

   a) **(0.25 puntos)** Obtener la función de densidad conjunta.

   b) **(1.50 puntos)** Obtener la función de distribución de probabilidad conjunta.

   c) **(0.75 puntos)** Obtener las funciones de densidad condicionadas.

   d) **(0.50 puntos)** Obtener la probabilidad de que $X \geq \dfrac{1}{2}$.

   e) **(1.25 puntos)** Obtener la mejor aproximación mínimo cuadrática a la variable X conocidos los valores de la variable Y.

   f) **(0.50 puntos)** Obtener la mejor aproximación de la variable aleatoria Y sin observar la variable X y dar una medida del error cuadrático medio cometido en esta aproximación.

   g) **(0.25 puntos)** ¿Son X e Y variables aleatorias independientes? Justificar de forma muy breve la respuesta.

4. **(2 puntos)** Sea (X,Y) un vector aleatorio con distribución normal bidimensional. La moda de Y vale 4 y la $Var[Y/X = x_0] = \dfrac{Var(Y)}{2} \neq 0$. La curva de regresión de Y/X es $y = x + 5$ y el error cuadrático medio asociado a esta aproximación es 3.

   a) **(1.25 puntos)** Determinar los parámetros de la distribución de (X,Y).

   b) **(0.75 puntos)** Especificar la función generatriz de momentos de (X,Y).

Observaciones e indicaciones:

- En el **apartado 1.c** hay que demostrar el/los resultados empleados para justificar la relación pedida, salvo la Desigualdad de Chebychev.
- En el **apartado 3.b** se obtienen **hasta 1.25 puntos** si las integrales se dejan indicadas y **hasta 1.50 puntos** si se obtienen sus valores de forma explícita.

Convocatoria Ordinaria Probabilidad DGIIM

11-01-2023

¡Ante la posible existencia de erratas, se recuerda al alumnado, que se proporcionan estas soluciones como ayuda para entender su nota!

Soluciones propuestas por el profesor

Ejercicio 1

ⓐ $X_1, X_2 \rightsquigarrow B(3, 1/2)$ son v.a. i.i.d

$$¿P[X_1+X_2=8]=0?$$

Como X_1, X_2 son v.a. i.i. con una binomial con el mismo parámetro $p=1/2$, aplicamos su reproductividad en este caso:

$$X_1+X_2 \rightsquigarrow B(3+3, 1/2) = B(6, 1/2) \quad \text{con } x=0,1,\dots,6$$

Por tanto $P[X_1+X_2=8] = 0$ (¡suceso imposible!)

ⓑ X_1, X_2 y $X_3 \rightsquigarrow P(3)$ son v.a. i.i.d

$$¿P[X_1+X_2+X_3>0]= \;?$$

Como X_1, X_2, X_3 son v.a.i.i.d. con una Poisson, aplicamos su reproductividad en este caso:

$$X_1+X_2+X_3 \rightsquigarrow P(3+3+3) = P(9) \quad \text{con } x=0,1,\dots$$

Por tanto $P[X_1+X_2+X_3>0] = 1-P[X_1+X_2+X_3\le 0]$

$$= 1-P[X_1+X_2+X_3=0] \underset{\text{f.m.p. } P(9)}{=} 1-\frac{e^{-9}\cdot 9^0}{0!} = 1-e^{-9} =$$

$$= \frac{e^9-1}{e^9}$$

Ejercicio 2

$X_1, \dots, X_n \sim U([0,1])$ son v.a. i.i.d. y $Z = \max\{X_1, \dots, X_n\}$

Sabemos que, en general, $F_Z(z) = F_{(X_1,\dots,X_n)}(z, \overset{n)}{\dots}, z) \quad \forall z \in \mathbb{R}$

Como las v.a. son i.i.d, se tiene que:

$$F_Z(z) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(z) = \left(F_{X_1}(z)\right)^n \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

Ya tenemos la función de distribución del máximo.

Nos piden la función de densidad, que es la derivada primera de la función de distribución:

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz}\left(F_Z(z)\right) = n\left(F_{X_1}(z)\right)^{n-1} \cdot F'_{X_1}(z) =$$

$$= n \cdot f_{X_1}(z)\left(F_{X_1}(z)\right)^{n-1}$$

Como $X_1 \sim U([0,1]) \Rightarrow f_{X_1}(z) = \begin{cases} 1 & 0 \leq z \leq 1 \\ 0 & \text{---} \end{cases}$ y

por tanto $F_{X_1}(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ \int_0^z 1\,dx = z & 0 \leq z < 1 \\ 1 & z \geq 1 \end{cases}$

Por tanto $\boxed{f_Z(z) = \begin{cases} n\, z^{n-1} & 0 \leq z \leq 1 \\ 0 & \text{---} \end{cases}}$

1c) Este resultado es una consecuencia directa de la Ley Débil de Khintchine, así que, podemos probar esta ley y aplicarla al caso $B(1,p)$, o podemos demostrar el resultado directamente siguiendo los pasos, en el caso general, para este caso particular.

Optamos por el segundo camino.

Como $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ v.a.i.i. $\sim B(1,p)$, si consideramos

- $$S_n=\sum_{i=1}^{n} X_i \Rightarrow E[S_n] \underset{\text{i.d.}}{=} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{E[X_i]}_{p} = n\cdot p$$
- $$Var(S_n)=\left[Var(S_n-E(S_n))\right]=Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \underset{\text{(independientes)}}{=}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) \underset{\text{i.d.}}{=} n\, Var(X_1) = n\cdot p(1-p)$$

$$X_n \xrightarrow{P} p \text{ si } \lim_{n\to+\infty} P[|X_n-p|\geq \varepsilon]=0$$

Veámoslo:

$$P\left[\left|\frac{S_n-E(S_n)}{n}\right|\geq\varepsilon\right]=P\left[|S_n-\underbrace{E(S_n)}_{n\cdot p}|\geq\varepsilon n\right]$$

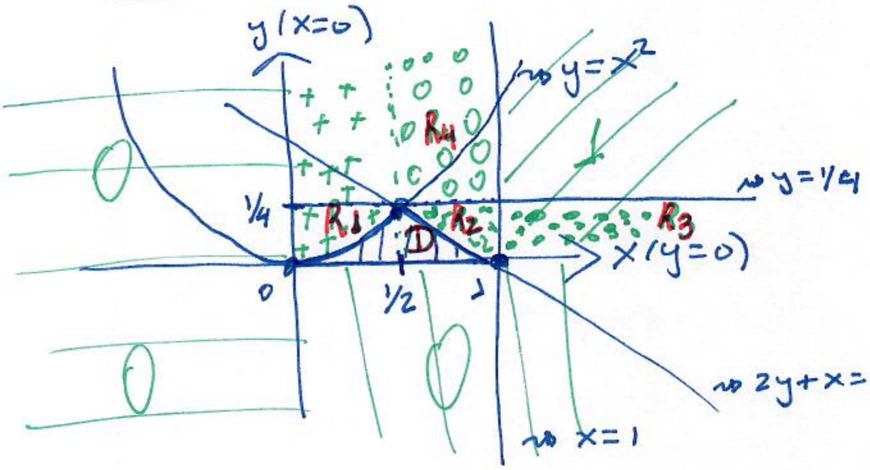
$$\underset{\text{(Desigualdad de Chebychev)}}{\leq} \frac{Var(S_n)}{\varepsilon^2 n^2}=\frac{n\cdot p(1-p)}{\varepsilon^2 n^2}=\frac{p(1-p)}{\varepsilon^2 n}\xrightarrow[(n\to+\infty)]{}0$$

Por tanto $P\left[\left|\frac{S_n-np}{n}\right|\geq\varepsilon\right]\xrightarrow[(n\to+\infty)]{}0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{S_n}{n}\xrightarrow{P} p}$$

Ejercicio 3

3a $(X,Y) \sim U(D)$ con D acotado y limitado por $\begin{cases} y = x^2 \\ 2y+x=1 \\ y=0 \end{cases}$



$2y+x=1 \Rightarrow y = \frac{1}{2} - \frac{x}{2}$

x	y
1	0
1/2	1/4

¡Este punto es tb. donde corta a la parábola!

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\text{área}(D)} & \text{si } (x,y)\in D \\ 0 & \text{si } (x,y)\notin D \end{cases}$$

$$\text{área}(D) = \iint_D 1\, dy\,dx = \int_0^{1/2}\int_0^{x^2} dy\,dx + \int_{1/2}^{1}\int_0^{\frac{1}{2}-\frac{x}{2}} dy\,dx =$$

$$= \int_0^{1/2} x^2\,dx + \int_{1/2}^{1} \frac{1}{2} - \frac{x}{2}\,dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3}\right]_0^{1/2} + \left(\frac{1}{2}x - \frac{x^2}{4}\right]_{1/2}^{1} = \frac{1}{24} + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} - \cancel{\frac{1}{4}} + \frac{1}{16}\right)$$

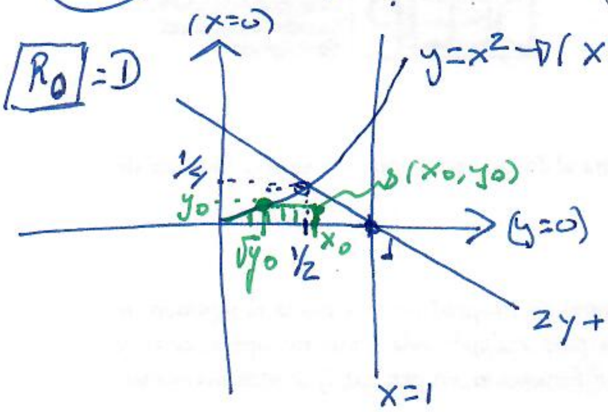
$$= \frac{1}{24} + \frac{1}{16} = \frac{2+3}{48} = \frac{5}{48}$$

Por tanto $\boxed{f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{48}{5} & \text{si } (x,y)\in D \\ 0 & \text{si } (x,y)\notin D \end{cases}}$ es la

función de densidad del vector (X,Y).

(3 b) ¿ $F(x,y)$? Distinguimos recintos

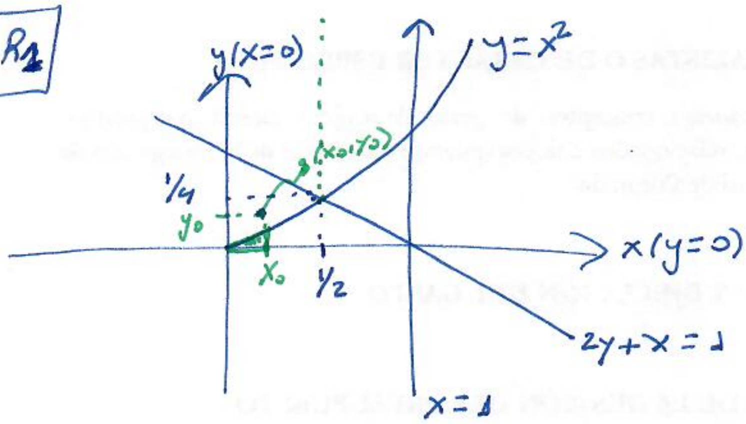
$\boxed{R_0} = D$



$$R_1 = \int_0^{y_0}\int_{\sqrt{y}}^{x_0} \frac{48}{5}\,dx\,dy = \frac{48}{5}\int_0^{y_0} x_0 - \sqrt{y}\,dy =$$

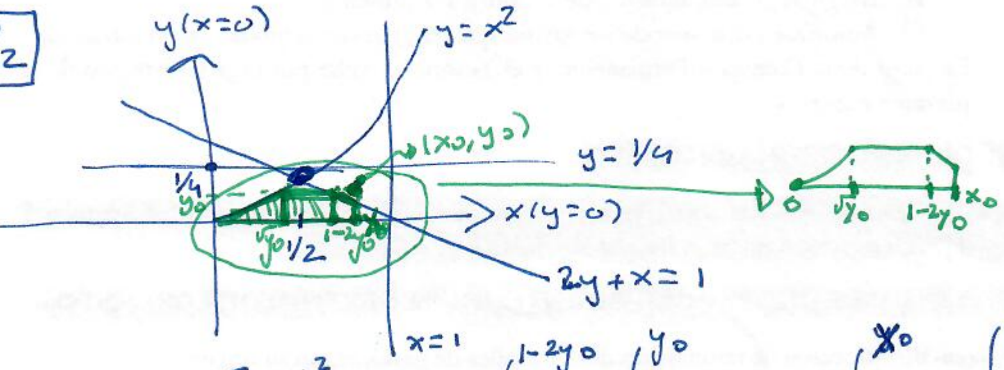
$$= \frac{48}{5}\left(x_0 y - \frac{2y^{3/2}}{3}\right]_0^{y_0} = \frac{48}{5}\left(x_0 y_0 - \frac{2}{3}y_0^{3/2}\right)$$

$\boxed{R_1}$



$$R_1 = \int_0^{x_0}\int_0^{x^2} \frac{48}{5}\,dy\,dx = \int_0^{x_0} \frac{48}{5}x^2\,dx = \left(\frac{48}{5}\frac{x^3}{3}\right]_0^{x_0} = \frac{48}{15}x_0^3$$

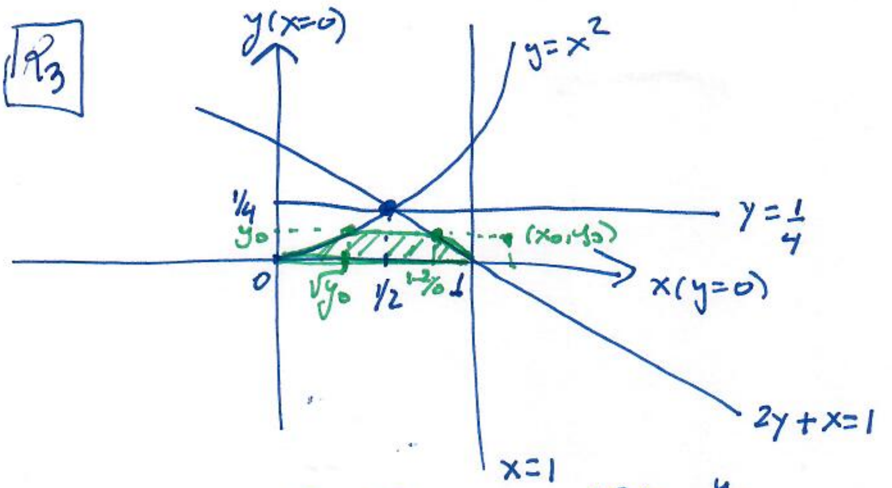
$\boxed{R_2}$



$$R_2 = \int_0^{\sqrt{y_0}}\int_0^{x^2}\frac{48}{5}\,dy\,dx + \int_{\sqrt{y_0}}^{1-2y_0}\int_0^{y_0}\frac{48}{5}\,dy\,dx + \int_{1-2y_0}^{x_0}\int_0^{\frac{1}{2}-\frac{x}{2}}\frac{48}{5}\,dy\,dx$$

$$= \frac{48}{5}\left[\frac{(\sqrt{y_0})^3}{3} + y_0(1-2y_0-\sqrt{y_0}) + \frac{1}{2}x_0 - \frac{x_0^2}{4} - \frac{(1-2y_0)}{2} + \frac{(1-2y_0)^2}{4}\right]$$

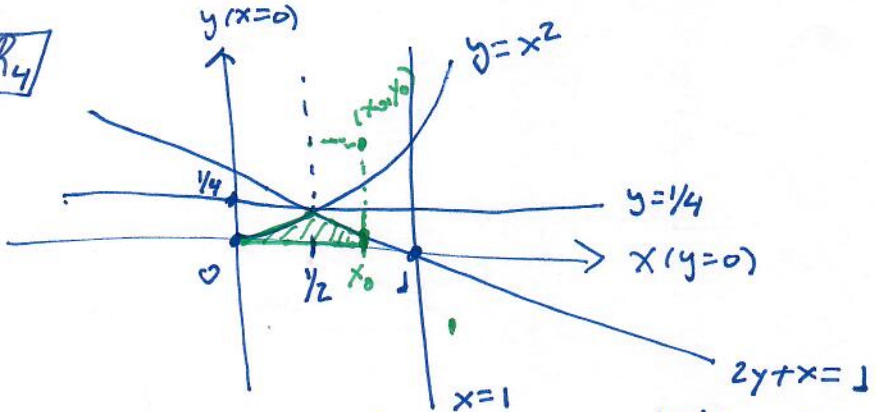
$\boxed{R_3}$



$$R_3 = \int_0^{\sqrt{y_0}} \int_0^{x^2} \frac{48}{5}\,dy\,dx + \int_{\sqrt{y_0}}^{1-2y_0} \int_0^{y_0} \frac{48}{5}\,dy\,dx + \int_{1-2y_0}^{1} \int_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x} \frac{48}{5}\,dy\,dx =$$

$$= \frac{48}{5}\left[\frac{(\sqrt{y_0})^3}{3} + y_0\left(1-2y_0-\sqrt{y_0}\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{(1-2y_0)}{2} + \frac{(1-2y_0)^2}{4}\right]$$

$\boxed{R_4}$



$$R_4 = \int_0^{1/2} \int_0^{x^2} \frac{48}{5}\,dy\,dx + \int_{1/2}^{x_0} \frac{48}{5} \int_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x} dy\,dx = \frac{48}{5}\left[\int_0^{1/2} x^2\,dx + \int_{1/2}^{x_0} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x\,dx\right] =$$

$$= \frac{48}{5}\left[\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{1/2} + \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2\right]_{1/2}^{x_0}\right] = \frac{48}{5}\left(\frac{1}{24} + \frac{1}{2}x_0 - \frac{1}{4}x_0^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16}\right) =$$

$$= \frac{48}{5}\left[\frac{1}{2}x_0 - \frac{1}{4}x_0^2 + \frac{-7}{48}\right]$$

y por tanto la función de distribución conjunta es:

$$
F(x,y)=\begin{cases}
0 & ;\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x\leq 0 \text{ ó } x\geq 0;\, y\leq 0\} \\
\frac{48}{5}\left(xy-\frac{2}{3}y^{2/3}\right) & ;(x,y)\in D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \begin{smallmatrix} y\leq x^2;\, y\geq 0 \\ 2y+x\leq 1\end{smallmatrix}\} \\
\frac{48}{15}x^3 & ;(x,y)\in R_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \begin{smallmatrix} y\geq x^2 \\ 0\leq x\leq 1/2\end{smallmatrix}\} \\
\frac{48}{5}\left[\frac{(\sqrt{y})^3}{3}+y(1-2y-\sqrt{y})+\right. \\ \left.+\frac{1}{2}x-\frac{x^2}{4}-\frac{(1-2y)}{2}+\frac{(1-2y)^2}{4}\right] & ;(x,y)\in R_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \begin{smallmatrix} 2y+x\geq 1 \\ 0\leq y\leq 1/4\end{smallmatrix}\} \\
\frac{48}{5}\left[\frac{(\sqrt{y})^3}{3}+y(1-2y-\sqrt{y})+\right. \\ \left.+\frac{1}{4}-\frac{(1-2y)}{2}+\frac{(1-2y)^2}{4}\right] & ;(x,y)\in R_3=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \begin{smallmatrix} x\geq 1 \\ 0\leq y\leq 1/4\end{smallmatrix}\} \\
\frac{48}{5}\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x^2-\frac{7}{48}\right] & ;(x,y)\in R_4=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \begin{smallmatrix} y\geq 1/4 \\ 1/2\leq x\leq 1\end{smallmatrix}\} \\
1 & ;\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y\geq 1/4;\, x\geq 1\}
\end{cases}
$$

(3c) • $f_{Y/X=x_0}(y) = \dfrac{f(x_0,y)}{f_X(x_0)} = (*)$

$\hookrightarrow f_X(x_0) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{48}{5}\,dy = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{x^2} \frac{48}{5}\,dy & \text{si } 0 \le x \le 1/2 \\ \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x} \frac{48}{5}\,dy & \text{si } 1/2 \le x \le 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow f_X(x_0) = \begin{cases} \frac{48}{5} x_0^2 & 0 \le x_0 \le 1/2 \\ \frac{48}{5}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_0\right) & 1/2 \le x_0 \le 1 \end{cases}$

$(*)\ f_{Y/X=x_0}(y) = \begin{cases} 1/x_0^2 \ ; & y \le x_0^2,\ y \ge 0,\ 2y + x_0 \le 1 \ (0 \le x_0 \le 1/2) \\ \dfrac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_0} \ ; & y \le x_0^2,\ y \ge 0,\ 2y + x_0 \le 1 \ (1/2 \le x_0 \le 1) \end{cases}$

• $f_{X/Y=y_0}(x) = \dfrac{f(x,y_0)}{f_Y(y_0)} = (*)$

$\hookrightarrow f_Y(y_0) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{48}{5}\,dx = \int_{\sqrt{y}}^{1-2y} \frac{48}{5}\,dx \quad \text{si } 0 \le y_0 \le \frac{1}{4}$

$f_Y(y_0) = \frac{48}{5}\left(1 - 2y_0 - \sqrt{y_0}\right) \quad \text{si } 0 \le y_0 \le \frac{1}{4}$

$(*)\ f_{X/Y=y_0}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 - 2y_0 - \sqrt{y_0}} \ ; & y_0 \le x^2,\ 2y_0 + x \le 1 \ (0 \le y_0 \le 1/4) \\ 0 & \end{cases}$

3d ¿$P[X>1/2]$?

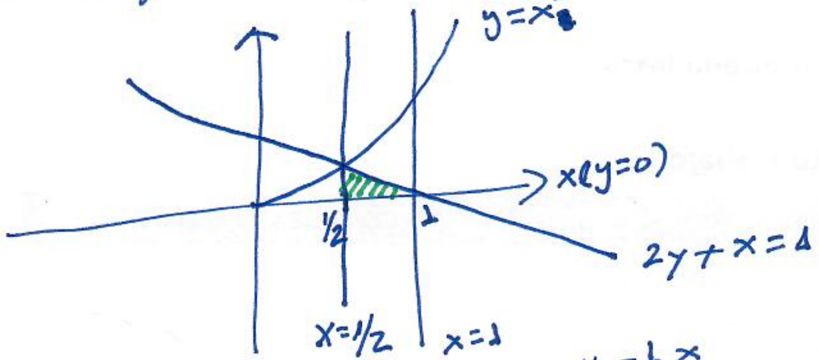
• Del aptdo 3c sabemos que $f_X(x)=\begin{cases} \frac{48}{5}x^2 & 0\le x\le 1/2 \\ \frac{48}{5}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x\right) & 1/2< x\le 1 \end{cases}$

Por tanto $P[X>1/2]=\int_{1/2}^{1} \frac{48}{5}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x\right)dx = \frac{48}{5}\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x^2\right]_{1/2}^{1}=$

$$= \frac{48}{5}\left(\cancelto{0}{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}+\frac{1}{16}\right) = \frac{48}{80}=\frac{24}{40}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$$

$$\boxed{P[X>1/2]=\frac{3}{5}}$$

• otra forma (a partir de la densidad conjunta

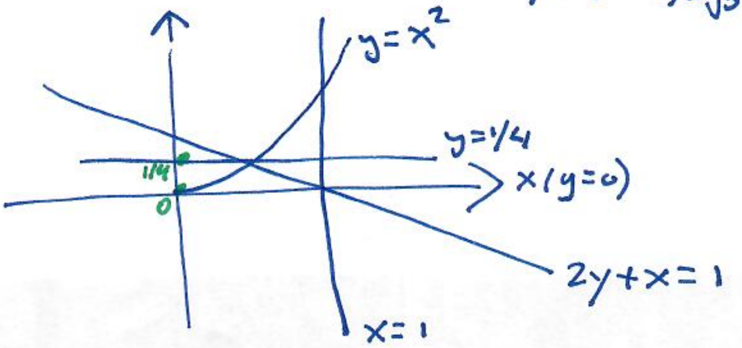


$$P[X>1/2]=\int_{1/2}^{1}\int_{0}^{1/2-\frac{1}{2}x}\frac{48}{5}\,dy\,dx = 3/5$$

(3e) La mejor aproximación en el sentido de mínimos cuadrados de X observada Y es $E[X/Y]$.

Obtengámosla punto a punto:

$$E[X/Y=y_0] = \int_{x \in supp(f_{X/Y=y_0}(x))} x \, f_{X/Y=y_0}(x)\,dx = \text{(ver apto (3c))}$$



$$\to \int_{\sqrt{y}}^{1-2y} \frac{x}{1-2y-\sqrt{y}}\,dx = \left(\frac{x^2}{2(1-2y-\sqrt{y})}\right]_{\sqrt{y}}^{1-2y} =$$

$$= \frac{(1-2y)^2-(\sqrt{y})^2}{2(1-2y-\sqrt{y})} = \frac{(1-2y+\sqrt{y})\cancel{(1-2y-\sqrt{y})}}{2\cancel{(1-2y-\sqrt{y})}} =$$

$$= \frac{1-2y+\sqrt{y}}{2}$$

Por tanto la mejor aproximación X/Y es la variable aleatoria:

$$\boxed{E[X/Y] = \frac{1-2Y+\sqrt{Y}}{2} = \frac{1}{2} - Y + \frac{\sqrt{Y}}{2}}$$

3.f La mejor aproximación de Y sin observar X es $E[Y]$ y su ECM es $Var\,Y$.

$$Var\,Y = E[Y^2] - (E[Y])^2 = 0'01 - (0'08)^2 = 0'0036$$

- $E[Y] = \int_{\mathbb{R}} y f_Y(y)\,dy = \int_0^{1/4} \frac{48}{5} y(1-2y-\sqrt{y})\,dy \Rightarrow$

apdo **3c**

$$\left(f_Y(y) = \begin{cases} \frac{48}{5}(1-2y-\sqrt{y}) & ; 0 \le y \le 1/4 \\ 0 & \end{cases} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{48}{5}\int_0^{1/4} y - 2y^2 - y^{3/2}\,dy = \frac{48}{5}\left(\frac{y^2}{2} - \frac{2}{3}y^3 - \frac{2}{5}y^{5/2}\right]_0^{1/4} =$$

$$= \frac{48}{5}\left(\frac{1}{32} - \frac{2}{192} - \frac{2}{160}\right) = 0'08 \Rightarrow \boxed{E[Y] = 0'08}$$

- $E[Y^2] = \int_{\mathbb{R}} y^2 f_Y(y)\,dy = \int_0^{1/4} \frac{48}{5}(y^2 - 2y^3 - y^{5/2})\,dy =$

$$= \frac{48}{5}\left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{2} - \frac{2}{7}y^{7/2}\right]_0^{1/4} =$$

$$= \frac{48}{5}\left(\frac{1}{192} - \frac{1}{512} - \frac{2}{896}\right) = 0'0098 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{E[Y^2] \simeq 0'01}$$

Por tanto:

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{Mejor aproximación} \rightarrow Y = 0'08 \\ &ECM = 0'0036 \end{aligned}}$$

3.g $\boxed{X \text{ e } Y \text{ no son independientes}}$, porque en el apartado **3c** hemos calculado $f_X(x)$ y $f_Y(y)$ y claramente $f(x,y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y)$

Ejercicio 4

4.a Sea $(X,Y) \sim N_2(\mu, \Sigma)$ ¿μ, Σ?

$\mu = (\mu_1, \mu_2)$ y $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$ con $\begin{cases} \sigma_1^2 = Var\, X \\ \sigma_2^2 = Var\, Y \end{cases}$

• Como la moda de Y es $4 \Rightarrow \boxed{\mu_2 = 4}$, p.q. $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

• $Var(Y/X=x_0) = \dfrac{\sigma_2^2}{2} \neq 0 \Rightarrow \sigma_2^2(1-\rho^2) = \dfrac{\sigma_2^2}{2} \underset{(\sigma_2^2 \neq 0)}{\Rightarrow} 1-\rho^2 = 1/2 \Rightarrow \rho^2 = 1/2 \Rightarrow$

$$\left(Y/X=x_0 \sim N\Big(\underbrace{\mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_0-\mu_1)}_{\text{media}}, \underbrace{\sigma_2^2(1-\rho^2)}_{\text{varianza}}\Big) \right)$$

$\Rightarrow \boxed{\rho = 1/\sqrt{2}}$ ó $\cancel{\rho = -1/\sqrt{2}}$ (p.q. la pendiente de la recta de regresión es positiva)

• Como la recta de regresión es $y = x+5$

$y - \mu_2 = \rho\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1) = \rho\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}x - \rho\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}\mu_1$

$\underset{(y=x+5)}{y-4 = x+1} = \rho\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}x - \rho\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}\mu_1 \Rightarrow$ $\rho\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1} = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1} = 1$ (*)

$\Rightarrow -\rho\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}\mu_1 = 1 \Rightarrow \boxed{\mu_1 = -1}$

De (*) $\sigma_2 = \sqrt{2}\,\sigma_1$

• Finalmente $ECM_{Y/X} = 3 \Rightarrow Var\, Y(1-\rho^2) \Rightarrow 3 = \frac{1}{2}\sigma_2^2 \Rightarrow \boxed{\sigma_2^2 = 6}$

y como $\sigma_2 = \sqrt{2}\sigma_1 \Rightarrow \sigma_1 = \dfrac{\sigma_2}{\sqrt{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \boxed{\sigma_1^2 = 3}$

En conclusión:

$$\boxed{(X,Y) \sim N_2\left(\mu = (-1,4), \Sigma = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\right)}$$

4.b Como $(X,Y) \sim N_2(\mu, \Sigma) \Rightarrow M_{(X,Y)}(t_1,t_2) = e^{\langle \mu, t\rangle + \frac{t\Sigma t^T}{2}} =$

$= e^{t_1\mu_1 + t_2\mu_2 + \frac{t_1^2\sigma_1^2 + t_2^2\sigma_2^2 + 2t_1t_2\sigma_1\sigma_2}{2}}$

$t = (t_1, t_2)$

$$\boxed{\Rightarrow M_{(X,Y)}(t_1,t_2) = e^{-t_1 + 4t_2 + \frac{3t_1^2 + 6t_2^2 + 2\sqrt{18}t_1t_2}{2}} \quad \forall t_1,t_2 \in \mathbb{R}}$$