Actividad obligatoria 2

José Alberto Hoces Castro

2022/2023

1. Demostración de la función generatriz de momentos de cada v.a. continua

1.1. Distribución Uniforme Continua

Sea una variable aleatoria X que sigue una distribución uniforme continua sobre un intervalo (a, b), $X \sim \mathcal{U}(a, b)$. Por lo visto en la diapositiva 7 de teoría, calcularemos su función generatriz de momentos como $E[e^{tX}] = \int_a^b e^{tx} \cdot f_X(x)dx$, siendo f_X la función de densidad de la distribución, cuya expresión es constante: $f_X(x) = \frac{1}{b-a}$

$$\int_a^b e^{tx} \cdot \frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b e^{tx}dx = \frac{1}{b-a} \cdot \left[\frac{e^{tx}}{t}\right]_a^b = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)} \quad \forall t \neq 0 \tag{1}$$

Para $t = 0$, deberemos repetir el cálculo de la integral:

$$\int_a^b e^{0 \cdot x} \cdot \frac{1}{b-a}dx = \int_a^b \frac{1}{b-a}dx = \left[\frac{x}{b-a}\right]_a^b = \frac{b-a}{b-a} = 1 \tag{2}$$

1.2. Distribución Exponencial

Sea una variable aleatoria X que sigue una distribución exponencial de parámetro $\lambda > 0$, $X \sim exp(\lambda)$. Al igual que antes, calcularemos la función generatriz de momentos como $E[e^{tX}] = \int_0^\infty e^{tx} \cdot f_X(x)dx$, siendo f_X la función de densidad de la distribución, cuya expresión es: $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \forall x \geq 0$ (el dominio de esta función es el que determina el intervalo de integración).

$$\int_0^\infty e^{tx} \cdot \lambda e^{-\lambda x}dx = \int_0^\infty \lambda e^{x(t-\lambda)}dx = \left[\frac{\lambda e^{x(t-\lambda)}}{t-\lambda}\right]_0^\infty = -\frac{\lambda}{t-\lambda} = \left(\frac{\lambda - t}{\lambda}\right)^{-1} = \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-1} \quad t < \lambda \tag{3}$$

Hemos de tener en cuenta que si $t > \lambda$, la función generatriz de momentos no existe pues $\nexists E[e^{tX}]$, pues la integral diverge. En caso de ser $t = \lambda$, también se da que $\nexists E[e^{tX}]$, pues el resultado de la anterior integral es $\int_0^\infty \lambda e^{x \cdot 0}dx = \int_0^\infty \lambda dx = [\lambda x]_0^\infty = +\infty$

1.3. Distribución Normal

Para hallar la función generatriz de momentos de una variable aleatoria X que sigue una distribución normal de media μ y varianza σ^2 ($X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$) empezaremos hallando la de la variable que resulta tras su tipificación y a partir de esta obtendremos la de X. La variable tipificada es $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$. Hallaremos la función generatriz de momentos calculando $E[e^{tZ}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tz} \cdot f_Z(z)dz$, siendo f_Z la función de densidad de la distribución normal de parámetros $\mu = 0$ y $\sigma = 1$, cuya expresión es $f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z)^2}{2}}$. Esta expresión viene de la de la función de densidad para cualquier variable aleatoria continua X que siga una distribución normal de parámetros μ y σ cualesquiera ($f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tz} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{2tz-z^2}{2}} dz \tag{4}$$

Ahora vamos a reescribir $2tz - z^2$ de una forma que nos interesa:

$$2tz - z^2 = t^2 + 2tz - z^2 - t^2 = t^2 - (-2tz + z^2 + t^2) = t^2 - (z-t)^2 \tag{5}$$

Luego la integral nos queda:

$$\frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(z-t)^2} dz = e^{\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z-t)^2} dz \tag{6}$$

Si nos fijamos bien, lo que hemos dejado dentro de la integral coincide con la expresión de la función de densidad de una variable aleatoria que sigue una distribución normal de parámetros $\sigma = 1$ y $\mu = t$. De acuerdo con la teoría de la diapositiva 4, la integral sobre $\mathbb{R}$ de toda función de densidad de una variable aleatoria vale 1 ($\int_{\mathbb{R}} f_X(x)dx = 1$). Por lo tanto, ya tenemos la función generatriz de momentos:

$$M_Z(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$$

Como habíamos dicho, a partir de la función generatriz de momentos de Z vamos a hallar la de la variable aleatoria X aprovechando las propiedades de la esperanza. Como $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$, tenemos que $X = \sigma Z + \mu$. Hallemos $E[e^{tX}]$:

$$E[e^{tX}] = E[e^{t(\sigma Z + \mu)}] = E[e^{t\mu} \cdot e^{t\sigma Z}] = e^{t\mu} \cdot E[e^{t\sigma Z}] = e^{t\mu} \cdot e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}} = e^{t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2}} \tag{7}$$

En esta cadena de igualdades hemos aplicado la linealidad de la esperanza matemática y la expresión de $E[e^{tZ}]$ deducida anteriormente. Luego concluimos que $M_X(t) = e^{t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2}}$

1.4. Distribución de Erlang

La distribución de Erlang tiene como función generatriz de momentos la función:

$$M_E(t) = \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-n}$$

Para demostrarlo, como sabemos que dicha función coincide con $E[e^{tX}]$, debemos calcular el valor de la siguiente integral $\int_0^\infty e^{tx} \cdot f_E(x)dx$, donde f_E es la función de densidad de la distribución, y tiene como expresión $f_E(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \cdot x^{n-1} \cdot e^{-\lambda x}dx$. Procedemos a la resolución de la integral:

$$\int_0^\infty \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \cdot x^{n-1} \cdot e^{(t-\lambda)x}dx \tag{8}$$

Extraemos la parte que no depende de x e integramos por partes tomando $u = x^{n-1}$ y $dv = e^{(t-\lambda)x}$. Por lo tanto, $du = (n-1) \cdot x^{n-2}$ y $v = \frac{e^{(t-\lambda)x}}{t-\lambda}$. Continuamos:

$$\frac{\lambda^n}{(n-1)!} \cdot \left(\left[\frac{x^{n-1} \cdot e^{(t-\lambda)x}}{t-\lambda} \right]_0^\infty - \frac{n-1}{t-\lambda} \int_0^\infty x^{n-2} \cdot e^{x(t-\lambda)}dx \right) \tag{9}$$

Como $\left[\frac{x^{n-1} \cdot e^{(t-\lambda)x}}{t-\lambda}\right]_0^\infty = 0$, nos queda:

$$-\frac{\lambda^n \cdot (n-1)}{(n-1)!(t-\lambda)} \int_0^\infty x^{n-2} \cdot e^{x(t-\lambda)}dx = -\frac{\lambda}{t-\lambda} \int_0^\infty \frac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!} \cdot x^{n-2} \cdot e^{x(t-\lambda)}dx \tag{10}$$

Llamando $I_n = \int_0^\infty \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \cdot x^{n-1} \cdot e^{(t-\lambda)x}dx$, de la cadena de igualdades desarrollada se deduce que:

$$I_n = -\frac{\lambda}{t-\lambda} I_{n-1}$$

Y estamos ante una recurrencia lineal homogénea con polinomio característico es $x + \frac{\lambda}{t-\lambda} = 0$, cuya solución es $x = -\frac{\lambda}{t-\lambda}$ y por lo tanto la solución de la recurrencia es:

$$I_n = \left(-\frac{\lambda}{t-\lambda}\right)^n = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^n = \left(\frac{\lambda-t}{\lambda}\right)^{-n} = \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-n} \tag{11}$$

Cuando $t \geq \lambda$, la integral $\int_0^\infty \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \cdot x^{n-1} \cdot e^{(t-\lambda)x}dx$ no converge, luego $\nexists E[e^{tX}]$, luego tampoco existe la función generatriz de momentos.

1.5. Distribución Gamma

Dada una variable aleatoria continua X que sigue una distribución gamma de parámetros u y λ, su función generatriz de momentos viene dada por la expresión:

$$M_X(t) = \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-u} \quad t < \lambda$$

Para demostrarlo, debemos tener en cuenta que la función de densidad f_X de la distribución gamma tiene como expresión $f_X(x) = \frac{\lambda^u}{\Gamma(u)} x^{u-1} e^{-\lambda x} \quad x > 0$, y que la función generatriz de momentos coincide con $E[e^{tX}] = \int_0^\infty e^{tx} \cdot f_X(x) dx$. Desarrollemos esta integral:

$$E[e^{tX}] = \int_0^\infty e^{tx} \frac{\lambda^u}{\Gamma(u)} x^{u-1} e^{-\lambda x} dx = \int_0^\infty \frac{\lambda^u}{\Gamma(u)} x^{u-1} e^{-(\lambda - t)x} dx \tag{12}$$

A continuación vamos a emplear un cambio de variable, tomando $w = (\lambda - t)x$, luego $x = \frac{w}{\lambda - t}$ y $dx = \frac{dw}{\lambda - t}$. Sustituyendo en la integral obtenemos:

$$\int_0^\infty \frac{\lambda^u}{\Gamma(u)} \left(\frac{w}{\lambda - t}\right)^{u-1} e^{-w} \frac{dw}{\lambda - t} = \int_0^\infty \frac{\lambda^u}{\Gamma(u)(\lambda - t)^u} w^{u-1} e^{-w} dw = \frac{\lambda^u}{\Gamma(u)(\lambda - t)^u} \int_0^\infty w^{u-1} e^{-w} dw \tag{13}$$

Si nos fijamos en la expresión que queda dentro de la integral, es justo la función Gamma ($\Gamma(u) = \int_0^\infty w^{u-1} e^{-w} dw$, luego la expresión anterior queda de la siguiente forma:

$$\frac{\lambda^u \Gamma(u)}{\Gamma(u)(\lambda - t)^u} = \frac{\lambda^u}{(\lambda - t)^u} = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^u = \left(\frac{\lambda - t}{\lambda}\right)^{-u} = \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-u} \tag{14}$$

Para $t \geq \lambda$, la integral $\int_0^\infty \frac{\lambda^u}{\Gamma(u)} x^{u-1} e^{-(\lambda - t)x} dx$ no converge, luego en este caso no existe la función generatriz de momentos.

1.6. Distribución Beta

Dada una variable aleatoria continua X que sigue una distribución beta de parámetros $p, q > 0$, hallaremos su función generatriz de momentos calculando $E[e^{tX}] = \int_0^1 e^{tx} \cdot f_X(x)dx$, siendo f_X la función de densidad de la distribución, cuya expresión es $f_X(x) = \frac{1}{\beta(p,q)} x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ definida en el intervalo $]0,1[$ (de ahí los límites de integración). La función beta tiene como expresión $\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$, pero en el proceso nos será más útil utilizar la propiedad que afirma que podemos expresarla como $\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$. Por la definición de la exponencial, de la función de densidad y los límites de integración, en este caso no tendremos que distinguir casos para distintos valores de t como hemos venido haciendo en distribuciones anteriores. Comenzamos a desarrollar la integral:

$$E[e^{tX}] = \frac{1}{\beta(p,q)} \int_0^1 e^{tx} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

La función exponencial tiene como desarrollo en serie $e^{tx} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} x^k \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Sustituyendo por esta expresión en la anterior integral, podemos sacar fuera de la integral $\sum_0^{+\infty} \frac{t^k}{k!}$ pues no depende de x y por lo aprendido en Análisis Matemático II, podemos permutar sin problemas las sumas de series con integrales cuando estamos trabajando con funciones medibles positivas:

$$\frac{1}{\beta(p,q)} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \int_0^1 x^{p+k-1}(1-x)^{q-1}dx$$

La expresión que queda dentro de la integral es justo la función beta de parámetros $p+k$ y q, es decir, $\beta(p+k,q)$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\beta(p+k,q)}{\beta(p,q)} \frac{t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\frac{\Gamma(p+k)\Gamma(q)}{\Gamma(p+k+q)}}{\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}} \frac{t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(p+k)\Gamma(p+q)}{\Gamma(p+k+q)\Gamma(p)} \frac{t^k}{k!} \quad t \in \mathbb{R} \tag{15}$$

Luego concluimos que:

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(p+k)\Gamma(p+q)}{\Gamma(p+k+q)\Gamma(p)} \frac{t^k}{k!} \quad t \in \mathbb{R}$$