Variable Compleja I
Tema 14: Residuos

Residuo de una función en un punto

Definición de residuo

$$a \in \mathbb{C}, \quad R \in \mathbb{R}^+, \quad f \in \mathcal{H}\big(D(a,R) \setminus \{a\}\big)$$

Desarrollo de Laurent: $\displaystyle f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n \qquad \forall z \in D(a,R) \setminus \{a\}$

Residuo de f en el punto a:

$$\operatorname{Res}\big(f(z)\,,\,a\big) \stackrel{\text{def}}{=} c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,\rho)} f(w)\,dw \qquad \forall \rho \in]0,R[$$

Observaciones y ejemplos

(1) a punto regular de $f \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{Res}\big(f(z)\,,\,a\big) = 0$

(2) $k \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{Res}\left(\dfrac{1}{z^k}\,,\,a\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ k = 1 \\ 0 & \text{si } \ k > 1 \end{cases}$

(3) El recíproco de (1) es falso

(4) $\operatorname{Res}\big(e^{1/z}\,,\,a\big) = 1$

Teorema de los residuos

Teorema

- $\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}$
- $A \subset \Omega, \quad A' \cap \Omega = \emptyset$
- $f \in \mathcal{H}\big(\Omega \setminus A\big)$
- Γ ciclo en $\Omega \setminus A \quad (\Gamma^* \subset \Omega \setminus A)$, nul-homólogo con respecto a Ω

Entonces, el conjunto $\{a \in A : \operatorname{Ind}_\Gamma(a) \neq 0\}$ es finito y

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{a \in A} \operatorname{Ind}_\Gamma(a) \operatorname{Res}\big(f(z), a\big)$$

Cálculo de residuos

Residuo en un polo

$$a \in \mathbb{C}, \quad R \in \mathbb{R}^+, \quad f \in \mathcal{H}\big(D(a,R) \setminus \{a\}\big)$$

- Si f tiene un polo de orden $k \in \mathbb{N}$ en el punto a, entonces:

$$\operatorname{Res}\big(f(z), a\big) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \Big((z-a)^k f(z)\Big)$$

- $\lim\limits_{z \to a}(z-a) f(z) = \alpha \in \mathbb{C} \implies \operatorname{Res}\big(f(z), a\big) = \alpha$

Última observación

Regla de L'Hôpital para funciones holomorfas

$$a \in \mathbb{C}, \quad r \in \mathbb{R}^+ \quad f, g \in \mathcal{H}(D(a,r)), \quad g \neq 0 \quad f(a) = g(a) = 0$$

$$(\text{Nótese que:} \quad \exists \delta > 0 : 0 < |z-a| < \delta \implies g(z) \neq 0 \quad \text{y} \quad g'(z) \neq 0)$$

Se verifica una de las dos afirmaciones siguientes:

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to a} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \alpha \in \mathbb{C} \qquad \text{o bien,}$$

$$\frac{f(z)}{g(z)} \to \infty \quad (z \to a) \qquad \text{y} \qquad \frac{f'(z)}{g'(z)} \to \infty \quad (z \to a)$$

Se suele decir que ambos límites existen y coinciden, pudiendo valer ∞