Variable Compleja I

Ordinaria 2017

③ Sea $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ no constante, continua en $\overline{D}(0,1)$ y verificando que $|f(z)| = 1 \ \forall z \in \mathbb{T}$.

a) Probar que f tiene un número finito (no nulo) de ceros en $D(0,1)$.

Como $\overline{D}(0,1)$ es compacto y $|f|$ es continua, $\left\{\begin{array}{l}\exists \min \{|f(z)| \,/\, z \in \overline{D}(0,1)\} \\ \exists \max \{|f(z)| \,/\, z \in \overline{D}(0,1)\}\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\exists z_0 \in \overline{D}(0,1) \text{ tal que } |f(z_0)| = \min\{|f(z)| \,/\, z \in \overline{D}(0,1)\} \\ \exists z_1 \in \overline{D}(0,1) \text{ tal que } |f(z_1)| = \max\{|f(z)| \,/\, z \in \overline{D}(0,1)\}\end{array}\right\}$

Si $|f(z_0)| = |f(z_1)| \Rightarrow |f|$ es cte. en $\overline{D}(0,1) \underset{\substack{\text{Teorema} \\ \text{de Cauchy-Riemann}}}{\Rightarrow} f$ es cte. en $D(0,1) \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ es cte. en $\overline{D}(0,1)$!! Contradicción

Luego $\left.\begin{array}{l}|f(z_0)| < |f(z_1)| \\ \quad + \\ |f(z)| = 1 \ \forall z \in \mathbb{T}\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} z_0 \in D(0,1) \underset{\substack{\text{Principio del} \\ \text{Módulo Mínimo}}}{\Rightarrow} \boxed{f(z_0) = 0} \\ \quad \text{ó} \\ z_1 \in D(0,1) \underset{\substack{\text{Principio del} \\ \text{Módulo Máximo}}}{\Rightarrow} f \text{ es cte. !! Contradicción}\end{array}\right.$

Supongamos que existe $\{a_n\} \subset D(0,1)$ distintos tal que $f(a_n) = 0$. Pasando a una parcial, podemos suponer que $\{a_n\} \longrightarrow a_0 \in \overline{D}(0,1)$.

•) Si $a_0 \in D(0,1)$, entonces $A = \{a_n\} \cup \{a_0\}$ tiene un punto de acumulación en $D(0,1)$ + $f_{|A} \equiv 0 \underset{\substack{\text{Principio} \\ \text{de Identidad}}}{\Rightarrow} f \equiv 0$ en $D(0,1) \Rightarrow f$ es cte. en $\overline{D}(0,1)$!! Contradicción

•) Si $a_0 \in \mathbb{T}$, $|f(a_0)| = 1$ por hipótesis pero $|f(a_0)| \underset{f \text{ continua}}{=} \lim_{n\to\infty} |f(a_n)| = 0$!! Contradicción

Por tanto, el conjunto de los ceros es finito.

b) Probar que $f(\overline{D}(0,1)) = \overline{D}(0,1)$.

$\boxed{\subseteq}$ Como consecuencia del principio del módulo máximo, sabemos que $\text{máx}\{|f(z)| \,/\, z \in \overline{D}(0,1)\} = \text{máx}\{|f(z)| \,/\, z \in \mathbb{T}\} = 1$, luego, $f(\overline{D}(0,1)) \subseteq \overline{D}(0,1)$.

$\boxed{\supseteq}$ Como $\overline{D}(0,1)$ es compacto y f es continua, $f(\overline{D}(0,1))$ es compacto. Si probamos que $D(0,1) \subset f(\overline{D}(0,1))$, necesariamente tendremos que $\overline{D}(0,1) \subset f(\overline{D}(0,1))$.

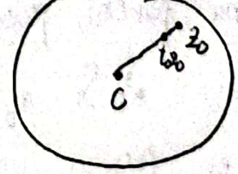
Suponemos que $\exists z_0 \in D(0,1) \not\subset f(\overline{D}(0,1))$.

$\underbrace{¿\text{Existe } w \in Fr(f(\overline{D}(0,1))) \text{ con } |w| < 1?}_{(*)}$ En tal caso, $\exists z \in \overline{D}(0,1)$ con $f(z) = w$ $+$ $|w| < 1$ $\Big\} \Rightarrow$

$\underset{f_{|\mathbb{T}} = 1 \text{ por hipótesis}}{\Longrightarrow}$ $z \in D(0,1)$!! Contradicción ya que el Teorema de la aplicación abierta nos dice que f lleva puntos interiores en puntos interiores (y hemos visto que $z \in D(0,1)$ pero $f(z) = w \in Fr(f(\overline{D}(0,1)))$).

$(*)$ Probamos que $\exists w \in Fr(f(\overline{D}(0,1)))$ con $|w| < 1$. Por el apartado a), $0 \in f(D(0,1))$. $z_0 \notin f(\overline{D}(0,1))$, luego, consideramos $A = \{ \underset{0<t\le 1}{t} \,/\, tz_0 \in f(\overline{D}(0,1)) \}$

Sea $t_0 = \sup(A)$, $t_0 < 1$. $t_0 z_0 \in \underbrace{f(\overline{D}(0,1))}_{\text{Conjunto cerrado}}$



$|t_0 z_0| < 1$. $t_0 z_0$ es el w que estamos buscando.

Si $t_0 z_0 \in \overset{\circ}{\overline{f(\overline{D}(0,1))}}$, $\exists \delta > 0$ tal que $D(t_0 z_0, \delta) \subset f(\overline{D}(0,1)) \Rightarrow$
$\Rightarrow (t_0 + \frac{\delta}{2}) z_0 \in f(\overline{D}(0,1))$!! Contradicción con que $t_0 = \sup(A)$. Luego, $t_0 z_0 \in Fr(f(\overline{D}(0,1)))$.

VARIABLE COMPLEJA I

~~EXTRAORDINARIA 2017~~

ORDINARIA 2018

(2) Integral 7 de la Relación 14

(3) Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$ y supongamos que f diverge en 0 y en ∞. Probar que f se anula en algún punto de $\mathbb{C}$.

Supongamos que $f(z) \neq 0$ $\forall z \in \mathbb{C}$. Podemos definir entonces $g: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ si $z \neq 0$ y $g(0) = 0 = \lim_{z \to 0} \frac{1}{f(z)} = \lim_{z \to 0} g(z)$. Tenemos que:

$$\left.\begin{array}{c} g \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \\ + \\ g \text{ continua en } 0 \end{array}\right\} \underset{\substack{\text{Teorema de} \\ \text{Extensión de} \\ \text{Riemann}}}{\Longrightarrow} \left.\begin{array}{c} g \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) \\ + \\ \lim_{z \to \infty} g(z) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow g \text{ acotada} \underset{\substack{\text{Teorema} \\ \text{de Liouville}}}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow g \text{ cte.} \Rightarrow f \text{ cte. !! Contradicción } \left(\begin{array}{c} f \text{ diverge en} \\ 0 \text{ y en } \infty \end{array}\right)$$

Luego, $\exists z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $f(z_0) = 0$.

(1) Sean $f, g \in \mathcal{H}(D(0,1))$ y supongamos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, se tiene:

$$f'\left(\tfrac{1}{n}\right) g\left(\tfrac{1}{n}\right) - f\left(\tfrac{1}{n}\right) g'\left(\tfrac{1}{n}\right) = 0.$$

¿Qué se puede afirmar sobre f y g?

Supongamos que $g \not\equiv 0$. Entonces:

$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)} = h(z) \quad \forall z \in D(0,1) \setminus Z(g) = \Omega$$

$$\left(\frac{f(\frac{1}{n})}{g(\frac{1}{n})}\right)' = \frac{f'(\frac{1}{n})\,g(\frac{1}{n}) - f(\frac{1}{n})\,g'(\frac{1}{n})}{g^2(\frac{1}{n})} = 0 = h\left(\frac{1}{n}\right) \quad \forall n \geq 2,\ n \in \Omega$$

$A = \{\frac{1}{n} \in \Omega \,/\, n \geq 2, n \in \mathbb{N}\}$ son todos los naturales salvo un número finito. Si existiese un número infinito de $\frac{1}{n} \in Z(g) \Rightarrow \exists \{\sigma_n\} \in \mathbb{N}$ con $\frac{1}{\sigma_n} \in Z(g) \Rightarrow$
$\Rightarrow 0 \in Z(g)' \neq \emptyset$!! Absurdo (por el principio de los ceros aislados $Z(g)' = \emptyset$).

Por tanto, $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} \in \Omega\ \forall n \geq m$ y $h(\frac{1}{n}) = 0$. Sea
$B = \{z \in \Omega$ tal que $h(z) = 0\}$. $\frac{1}{n} \in B\ \forall n \geq m \Rightarrow$ ~~...~~

$\Rightarrow$ Si $0 \in \Omega$, $\Omega \cap B' \neq \emptyset \underset{\text{Principio de Identidad}}{\Rightarrow} h \equiv 0 \Rightarrow \frac{f}{g}$ constante en $\Omega \Rightarrow f = k \cdot g,\ k \in \mathbb{C}$

Si $0 \notin \Omega$

- Si $g(0) = 0$ y $f(0) \neq 0$, definir $h_2(z) = \left(\frac{g(z)}{f(z)}\right)'$.
- Si $g(0) = f(0) = 0$.

4) Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sea $f_n: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ la función dada por:

$$f_n(z) = \int_n^{n+1} \frac{\operatorname{sen}(t+z)}{1+t^2}\, dt \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

a) Probar que $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

Definimos $\Phi : [n, n+1] \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ por $\Phi(t,z) = \frac{\operatorname{sen}(t+z)}{1+t^2}$.

Tenemos que:

Φ es continua (Composición de funciones continuas y su denominador no se anula nunca ya que $t \in [n, n+1]$)

$\Phi_t(z) = \frac{\operatorname{sen}(t+z)}{1+t^2} \in \mathcal{H}(\mathbb{C})\ \forall t \in [n, n+1]$

$\Rightarrow$ Teorema de Holomorfía de Integrales dependientes de un Parámetro

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{f_n(z) = \int_n^{n+1} \Phi(t,z)\, dt = \int_n^{n+1} \frac{\operatorname{sen}(t+z)}{1+t^2}\, dt \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) \ \left(\begin{smallmatrix}\text{Es}\\ \text{entera}\end{smallmatrix}\right)} \\ f_n^{(k)}(z) = \int_n^{n+1} \frac{\partial^k}{\partial z^k} \Phi(t,z)\, dt \end{cases}$$

b) Probar que la serie de funciones $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge en $\mathbb{C}$ y que su suma es una función entera.

Fijamos $K \subset \mathbb{C}$ compacto y $\forall n \in \mathbb{N}$ tenemos que:

$$|f_n(z)| = \left| \int_n^{n+1} \frac{\operatorname{sen}(t+z)}{1+t^2}\, dt \right| \leq \int_n^{n+1} \frac{|\operatorname{sen}(t+z)|}{|1+t^2|}\, dt \quad \forall z \in K$$

Por un lado, $t \in [n, n+1] \Rightarrow t \geq n \Rightarrow t^2 \geq n^2 \Rightarrow 1+t^2 \geq 1+n^2 \Rightarrow \frac{1}{1+n^2} \leq \frac{1}{1+t^2}$

Por otro lado, $\operatorname{sen}(t+z)$ es una función continua y estamos en un compacto K, luego, $\exists M = \max\{ |\operatorname{sen}(t+z)| \ / \ z \in K \}$.

De esta forma:

$$|f_n(z)| \leq \int_n^{n+1} \frac{|\operatorname{sen}(t+z)|}{|1+t^2|}\, dt \leq \underbrace{\ell([n,n+1])}_{=1} \cdot \frac{M}{1+n^2} = \frac{M}{1+n^2} \quad \forall z \in K$$

Veamos que la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{M}{1+n^2}$ es convergente:

- Criterio del cociente:

$$\frac{\frac{\cancel{M}}{1+(n+1)^2}}{\frac{\cancel{M}}{1+n^2}} = \frac{1+n^2}{1+n^2+2n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \quad \text{Falla}$$

- Criterio de Raabe:

$$n\left(1 - \frac{\frac{\cancel{M}}{1+(n+1)^2}}{\frac{\cancel{M}}{1+n^2}}\right) = \frac{2n^2+1}{2+n^2+2n} \xrightarrow{n\to\infty} 2 > 1 \Rightarrow \text{La serie } \sum_{n\geq 1} \frac{M}{1+n^2} \text{ converge}$$

Por el Test de Weierstrass, $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge absoluta y uniformemente sobre compactos de $\mathbb{C}$. En particular, como un punto es un compacto, $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge en $\mathbb{C}$.

Como $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformemente sobre compactos de $\mathbb{C}$, el Teorema de Convergencia de Weierstrass nos dice que $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

VARIABLE COMPLEJA I

ORDINARIA 2019

① Sean f, g funciones enteras verificando:

$$(f \circ g)\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar que existen $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ con $\alpha \neq 0$ de modo que $g(z) = \alpha z + \beta$ y $f(z) = \frac{z-\beta}{\alpha}$ para cada $z \in \mathbb{C}$.

Sea $A = \{ z \in \mathbb{C} \,/\, f(g(z)) = z \}$ ($0 \in A$ por continuidad). Tenemos que $\left\{\frac{1}{n}\right\} \cup \{0\} \subset A$, luego $A' \neq \emptyset \underset{\text{Principio de Identidad}}{\Longrightarrow} A = \mathbb{C}$, es decir, $f(g(z)) = z \;\; \forall z \in \mathbb{C}$.

(Terminar el ejercicio haciendo un proceso análogo al del ejercicio 3 de la ordinaria de 2021)

② Integral 10 de la Relación 14

③ Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función dada por:

$$f_n(z) = \int_n^{n+1} \frac{e^{\frac{z^2}{1+t^2}}}{(1+t)^2}\, dt$$

a) Probar que $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

Definimos $\Phi : [n, n+1] \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ por $\Phi(t,z) = \dfrac{e^{\frac{z^2}{1+t^2}}}{(1+t)^2}$. Tenemos que:

Φ es continua (Composición de funciones continuas y su denominador no se anula nunca ya que $t \in [n, n+1]$)

$\Phi_t(z) = \dfrac{e^{\frac{z^2}{1+t^2}}}{(1+t)^2} \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) \;\; \forall t \in [n, n+1]$

$\Longrightarrow$ Teorema de Holomorfía de Integrales dependientes de un Parámetro

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{f_n(z) = \int_n^{n+1} \Phi(t,z)\,dt = \int_n^{n+1} \frac{e^{\frac{z^2}{1+t^2}}}{(1+t)^2}\,dt \in H(\mathbb{C}) \quad \left(\text{Es entera}\right)} \\ f_n^{(k)}(z) = \int_n^{n+1} \frac{\partial}{\partial z^k} \Phi(t,z)\,dt \end{cases}$$

b) Probar que la serie de funciones $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge en $\mathbb{C}$ y que su suma es una función entera.

Fijemos $K \subset \mathbb{C}$ compacto y $\forall n \in \mathbb{N}$ tenemos que:

$$|f_n(z)| = \left| \int_n^{n+1} \frac{e^{\frac{z^2}{1+t^2}}}{(1+t)^2}\,dt \right| \leq \int_n^{n+1} \frac{\left|e^{\frac{z^2}{1+t^2}}\right|}{|1+t|^2}\,dt$$

Por un lado, $t \in [n, n+1] \Rightarrow t \geq n \Rightarrow 1+t \geq 1+n \Rightarrow (1+t)^2 \geq (1+n)^2 \Rightarrow \frac{1}{(1+t)^2} \leq \frac{1}{(1+n)^2}$

Por otro lado:

$$\left| e^{\frac{z^2}{1+t^2}} \right| = e^{\mathrm{Re}\left(\frac{z^2}{1+t^2}\right)} = e^{\frac{\mathrm{Re}(z^2)}{1+t^2}} \leq e^{\frac{M}{1+t^2}} \leq e^M$$

donde $M = \max\{\mathrm{Re}(z^2) / z \in K\}$ que sabemos que existe porque K es compacto y $\mathrm{Re}(z^2)$ es una función continua.

De esta forma:

$$|f_n(z)| \leq \int_n^{n+1} \frac{\left|e^{\frac{z^2}{1+t^2}}\right|}{|1+t|^2}\,dt \leq \underbrace{\ell([n,n+1])}_{=1} \cdot \frac{e^M}{(1+n)^2} \quad \forall z \in K$$

Veamos que la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(1+n)^2}$ es convergente:

- Criterio del cociente:

$$\frac{\frac{1}{(2+n)^2}}{\frac{1}{(1+n)^2}} = \frac{1+n^2+2n}{4+n^2+4n} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \quad \text{Falla}$$

• Criterio de Raabe:

$$n\left(1-\frac{1+n^2+2n}{4+n^2+4n}\right)=n\left(\frac{4+\cancel{n^2}+4n-1-\cancel{n^2}-2n}{4+n^2+4n}\right)=\frac{2n^2-3n}{n^2+4n+4}\xrightarrow{n\to\infty}2>1$$

$\Downarrow$

La serie $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(1+n)^2}$ converge

Por el Test de Weierstrass, $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge absoluta y uniformemente sobre compactos de $\mathbb{C}$. En particular, como un punto es compacto, $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge en $\mathbb{C}$.

Como $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformemente sobre compactos de $\mathbb{C}$, el Teorema de Convergencia de Weierstrass nos dice que $f=\sum_{n=0}^{\infty} f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

4) Probar el Lema de Schwarz: Sea $f\in\mathcal{H}(D(0,1))$ verificando $f(0)=0$ y $|f(z)|\leq 1$ $\forall z\in D(0,1)$. Entonces, $|f'(0)|\leq 1$ y $|f(z)|\leq |z|$ $\forall z\in D(0,1)$. Además, si ocurre $|f'(0)|=1$ ó $|f(z_0)|=|z_0|$ para algún $z_0\in D(0,1)\setminus\{0\}$, entonces existe $\alpha\in\mathbb{T}$ de modo que $f(z)=\alpha z$ para cada $z\in D(0,1)$.

Pista: Para cada $0<r<1$, estimar convenientemente el valor $\max\{|g(z)|/z\in\overline{D}(0,r)\}$ donde la función $g: D(0,1)\to\mathbb{C}$ viene dada por $g(0)=f'(0)$ y $g(z)=\frac{f(z)}{z}$ para cada $z\in D(0,1)$.

$g\in\mathcal{H}(D(0,1))$

$g\in\mathcal{H}(D(0,r))\cap C(\overline{D}(0,r))$ $\Rightarrow$ Principio del Módulo Máximo

$$\Rightarrow \max\{|g(z)|/z\in\overline{D}(0,r)\}=\max\{|g(z)|/\underset{|z|=r}{z\in C(0,r)^*}\}=$$

$$=\max\left\{\frac{|f(z)|}{r}/z\in C(0,r)^*\right\}\leq\frac{1}{r}$$

$\sup\{|g(z)| / z \in D(0,1)\} \leq 1 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} |f(z)| \leq |z| \\ |f'(0)| = |g(0)| \leq 1 \end{array}}$ $\Rightarrow$ g cte. $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} f(z) = \alpha z \\ \text{para cada} \\ z \in D(0,1) \end{array}}$

si $|f'(0)| = 1$
ó $|f(z_0)| = |z_0|$,
por el Principio del Módulo Máximo

Suponemos que $\sup\{|g(z)| / z \in D(0,1)\} > 1+\delta$ con $\delta > 0$. Entonces, $\exists z_0 \in D(0,1)$ tal que $|g(z_0)| > 1+\delta$.

Sea $0 < r < 1$ tal que $\frac{1}{r} < 1+\delta$ y $z_0 \in \overline{D}(0,r)$!! Contradicción

Escaneado con CamScanner

Variable Compleja I

Ordinaria 2020

(1) Sea Ω un dominio de $\mathbb{C}$ y sean $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Supongamos que existe $k \in \mathbb{N}$ de modo que $f^k(z) = g^k(z)$ $\forall z \in \Omega$. Probar que existe $\lambda \in \mathbb{C}$, con $\lambda^k = 1$, tal que $f(z) = \lambda g(z)$ $\forall z \in \Omega$.

Suponemos que $g \neq 0$ (en tal caso, el resultado sería trivial pues f también lo sería y bastaría tomar $\lambda = 1$).

Sea $z_0 \in \Omega$ tal que $g(z_0) \neq 0$. Como $g \in \mathcal{H}(\Omega) \Rightarrow g$ es continua en z_0 y sea D el disco abierto de centro z_0 tal que $D \subset \Omega$ y $g(z) \neq 0$ $\forall z \in D$. Tenemos entonces $\hat{g} \in \mathcal{H}(D)$ tal que $\hat{g}(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ $\forall z \in D$.

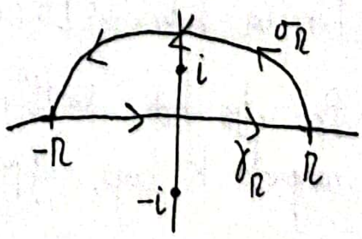
Por hipótesis, $\hat{g}(z)^k = \left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)^k = 1$ $\forall z \in D$, es decir, $\hat{g}(D)$ está contenido en el conjunto de las raíces n-ésimas de la unidad, que es finito. Además, D es conexo, $\hat{g}$ es continua (por ser cociente de funciones continuas) y $\hat{g}(D)$ es conexo $\Rightarrow \hat{g}(D)$ se reduce a un punto, es decir, $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ con $\lambda^k = 1$ tal que $\hat{g}(z) = \lambda$ $\forall z \in D$.

Despejando tenemos entonces que $f(z) = \lambda g(z)$ $\forall z \in D$. Como Ω es un dominio, f y $\lambda g \in \mathcal{H}(\Omega)$ y coinciden en el conjunto D, con $D' \cap \Omega = \emptyset$, el principio de identidad nos dice que $f(z) = \lambda g(z)$ $\forall z \in \Omega$.

~~(2) Integral de la Relación 4~~

(2) Tiene que salir $\frac{\pi}{2e}$ como resultado. Elegir el ciclo $\Gamma_R = \gamma_R + \sigma_R$ donde:

$$\gamma_R : [-R, R] \longrightarrow \mathbb{C} \qquad \sigma_R : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\gamma_R(x) = x \qquad \sigma_R(t) = Re^{it}$$



(4) Para cada $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, sea $f_n:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ la función dada por:

$$f_n(z)=\int_n^{n+1}\frac{\operatorname{sen}(t^n+z)\cos(t^n+z)}{1+t^2}\,dt \quad \forall z\in\mathbb{C}.$$

a) Probar que ~~la serie de funciones~~ $f_n\in\mathcal{H}(\mathbb{C})$.

Definimos $\Phi:[n,n+1]\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ por $\Phi(t,z)=\dfrac{\operatorname{sen}(t^n+z)\cos(t^n+z)}{1+t^2}$.

Tenemos que:

Φ es continua (Composición de funciones continuas y su denominador no se anula nunca ya que $t\in[n,n+1]$)

$\Phi_t(z)=\dfrac{\operatorname{sen}(t^n+z)\cos(t^n+z)}{1+t^2}\in\mathcal{H}(\mathbb{C})\ \forall t\in[n,n+1]$

$\Rightarrow$ Teorema de Holomorfía de Integrales dependientes de un Parámetro

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{f_n(z)=\displaystyle\int_n^{n+1}\Phi(t,z)\,dt=\int_n^{n+1}\frac{\operatorname{sen}(t^n+z)\cos(t^n+z)}{1+t^2}\,dt\in\mathcal{H}(\mathbb{C})\ \text{(Es entera)}} \\ f_n^{(k)}(z)=\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{\partial^k}{\partial z^k}\Phi(t,z)\,dt \end{cases}$$

b) Probar que la serie de funciones $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge en $\mathbb{C}$ y que su suma es una función entera.

Fijamos $K\subset\mathbb{C}$ compacto y $\forall n\in\mathbb{N}$ tenemos que:

$$|f_n(z)|=\left|\int_n^{n+1}\frac{\operatorname{sen}(t^n+z)\cos(t^n+z)}{1+t^2}\,dt\right|\leq\int_n^{n+1}\frac{|\operatorname{sen}(t^n+z)\cos(t^n+z)|}{|1+t^2|}\,dt \quad \forall z\in K$$

Por un lado, $t\in[n,n+1]\Rightarrow t\geq n\Rightarrow t^2\geq n^2\Rightarrow 1+t^2\geq 1+n^2\Rightarrow \dfrac{1}{1+t^2}\leq\dfrac{1}{1+n^2}$

Por otro lado, $\operatorname{sen}(t^n+z)\cos(t^n+z)$ es una función continua y estamos en un compacto K, luego, $\exists M=\max\{|\operatorname{sen}(t^n+z)\cos(t^n+z)|\ /\ z\in K\}$.

De esta forma:

$$|f_n(z)| \leq \int_n^{n+1} \frac{|\operatorname{sen}(t^n+z)\cos(t^n+z)|}{|1+t^2|}dt \leq \underbrace{\ell([n,n+1])}_{=1} \cdot \frac{M}{1+n^2} = \underbrace{\frac{M}{1+n^2}}_{=M_n} \quad \forall z \in K$$

Veamos que la serie $\sum_{n\geq 1} M_n$ es convergente:

- Criterio de Raabe:

$$n\left(1-\frac{\frac{\cancel{M}}{1+(n+1)^2}}{\frac{\cancel{M}}{1+n^2}}\right) = n\left(1-\frac{1+n^2}{1+n^2+1+2n}\right) = n\left(\frac{\cancel{1}+\cancel{n^2}+1+2n-\cancel{1}-\cancel{n^2}}{n^2+2n+2}\right) =$$

$$= \frac{2n^2+n}{n^2+2n+2} \xrightarrow{n\to\infty} 2>1$$

$$\Downarrow$$

La serie $\sum_{n\geq 1} M_n$ es convergente

Por el Test de Weierstrass, $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge absoluta y uniformemente sobre compactos de $\mathbb{C}$. En particular, como $K\subset\mathbb{C}$ compacto arbitrario y todo punto es un compacto, $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge en $\mathbb{C}$.

Como $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformemente sobre compactos el $\mathbb{C}$, el Teorema de Convergencia de Weierstrass nos dice que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.