Ejercicio 1. $\sigma = (1\,2\,3\,4)(1\,5\,2\,3)(5\,3\,6\,1)$

Ciclos disjuntos: $\sigma = (1\,3\,6\,5\,2\,4)$

Su orden es 6

$sig(\sigma) = (-1)^5 = -1 \Rightarrow$ Impar

Su tipo es 6

Ahora la descomponemos en transposiciones:

$$\sigma = (1\,3)(3\,6)(6\,5)(5\,2)(2\,4)$$

¿Existe γ tal que $\gamma\sigma\gamma^{-1} = (1\,2\,3\,4\,5\,6)$?

$$\gamma\sigma\gamma^{-1} = (\gamma(1)\ \gamma(3)\ \cdots\ \gamma(4))$$

$\gamma(1) = 1$ $\quad \gamma(3) = 2$ $\quad \gamma(6) = 3$ $\quad \gamma(5) = 4$ $\quad \gamma(2) = 5$

$\gamma(4) = 6$

Ejercicio 2. $D_n = \langle \rho, \delta;\ \rho^n = 1, \delta^2 = 1, \delta\rho = \rho^{-1}\delta \rangle$

Orden de $\rho^i\delta$

$$\rho^i\delta\rho^i\delta = \rho^i\rho^{-i}\delta\delta = 2$$

¿Cuántos elementos hay de orden 2?

Al menos n, por el apartado anterior. Y ahora, dependiendo de n:

n es impar $\Rightarrow$ Solo hay n

n es par $\Rightarrow n + \varphi(2) = n+1$

Siendo m divisor de n $(m \neq 2)$, ¿cuántos elementos hay de orden m?

x es un elemento de orden $m \neq 0$, $x \in \langle \rho \rangle$

Algo de un teorema, la respuesta es $\varphi(m)$

Ejercicio 3

$Q_3 = \langle x, y ; x^6 = 1, y^2 = x^3, yx = x^{-1}y \rangle$

$|Q_3| = 6$

Probar que $o(y) = 4$

$y^4 = (y^2)^2 = (x^3)^2 = x^6 = 1$

Si $o(y) = 1$, $y = 1$, no puede ser

Si $o(y) = 2$, $x^3 = 1$, $o(x) = 3$ Contradicción $\Big\}$ $o(y) = 4$

Probar que $o(x^i y) = 4$

$x^i y x^i y x^i y x^i y \underset{\uparrow}{=} x^i x^{-i} y y x^i x^{-i} y y = y^4 = 1$

usamos $yx = x^{-1}y$

¿$x^i y = 1$? $\Rightarrow y = x^{-i}$ $\Rightarrow y^2 = \underbrace{x^{-2i} = x^3}_{x^{3+2i} = 1}$ $\rightarrow$ ¿Es $3+2i$ múltiplo de 6? No

¿$(x^i y)^2 = 1$?

$x^i y x^i y = y^2 \neq 1$ $\rightarrow$ Ya se ha visto antes

Probar que $\left.\begin{array}{l} \rho \rightarrow x \\ \delta \rightarrow y^2 \end{array}\right\}$ Morfismo $D_3 \rightarrow Q_3$

Hay que usar Dick.

$\rho^3 \rightarrow 1$

$\delta^2 \rightarrow 1$

$\delta\rho = \rho^{-1}\delta$

$x^3 \neq 1 \Rightarrow$ No es morfismo

¿Son normales $\langle x\rangle$ $\langle y\rangle$?

Solo hay que comprobar los conjugados de y por los generadores de Q_3:

$$\left.\begin{array}{l} xyx^{-1} = xxy \notin \langle y\rangle \\ yyy^{-1} = y \in \langle y\rangle \end{array}\right\} \langle y\rangle \ntrianglelefteq Q_3$$

$$\left.\begin{array}{l} yxy^{-1} = x^{-1}yy^{-1} = x^{-1} \in \langle x\rangle \\ xxx^{-1} = x \in \langle x\rangle \end{array}\right\} \langle x\rangle \trianglelefteq Q_3$$

Ejercicio 4

$S_n \subseteq S_m \quad n < m$

¿$S_n \trianglelefteq S_m$?

$m = 2,\ 1 = S_1 \trianglelefteq S_2 = C_2$

$m > 2$

$(1\ m)(1\ 2)(1\ m)^{-1} = (m\ 2) \notin S_n$

Solo para $n = 1$ $m = 2$

¿$N_{S_4}(S_3)$?

$$S_3 \trianglelefteq \underbrace{N_{S_4}(S_3)}_{\text{Aquí, } \sigma(4) = 1} \leq S_4$$

$\underset{(\sigma(1),\sigma(2))}{\underset{\shortparallel}{\sigma(1\,2)\sigma^{-1}}} \in S_3 \Longrightarrow$ Entonces $\begin{array}{l}\sigma(1) = 2 \\ \sigma(2) = 3 \\ \sigma(3) = 4\end{array}$ ó $\begin{array}{l}\sigma(1) = 3 \\ \sigma(2) = 2\end{array}$

Repitamos con $(2\ 3)$: $\sigma(2\,3)\sigma^{-1} = \underbrace{(\sigma(2),\sigma(3)) \in S_3}_{\begin{array}{l}\sigma(2) = 2,3 \\ \sigma(3) = 3,2\end{array}}$

Luego σ no puede meter a $(1\,2)$ y $(2\,3)$ en S_3 simult., sin mantener fijo a 4. Por lo tanto, mantiene fijo a 4, por lo que $S_3 = N_{S_4}(S_3)$