# ÁLGEBRA 1 CURSO 20-21

**DOBLE GRADO MATEMÁTICAS INFORMÁTICA** **RELACIÓN DE EJERCICIOS 4**

**4.1.** Si $A$ y $B$ son anillos conmutativos, probar que el conjunto producto cartesiano $A \times B$, con las operaciones

$$(a, a') + (b, b') = (a + b, a' + b'), \quad (a, a')(b, b') = (ab, a'b').$$

es efectivamente un anillo conmutativo. Se llama el "*anillo producto cartesiano*" de $A$ y $B$. Escribir las tablas de sumar y multiplicar del anillo producto $\mathbb{Z}_2 \times Z_2$.

**4.2.** En el conjunto $\mathbb{Z}$ definimos las operaciones de suma $\oplus$ y producto $\otimes$ por

$$a \oplus b = a + b - 1,$$

$$a \otimes b = a + b - ab.$$

Así, por ejemplo, $2 \oplus 3 = 4$ y $2 \otimes 3 = -1$. ¿Es $\mathbb{Z}$ un anillo conmutativo con estas operaciones?

**4.3.** En $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definimos las operaciones

$$(a, a') + (b, b') = (a + b, a' + b'),$$

$$(a, a') \cdot (b, b') = (ab, ab' + a'b).$$

¿Es $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ un anillo conmutativo con estas operaciones?

**4.4.** Escribir las tablas de sumar y multiplicar de los anillos $\mathbb{Z}_5$ y $\mathbb{Z}_6$.

**4.5.** Efectuar los siguientes cálculos en el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$:

$$(3 + 2\sqrt{3}) + (4 - 5\sqrt{3}), \quad (3 + 2\sqrt{3})(4 - 5\sqrt{3}), (2 - \sqrt{3})^3.$$

**4.6.** ¿Cuáles de los siguientes son subanillos de los anillos indicados?
($i$) $\{a \in \mathbb{Q} \mid 3a \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Q}$,
($ii$) $\{m + 2n\sqrt{3} \mid m, n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{R}$.

**4.7.** Determinar las unidades del anillo definido por el conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, con las operaciones $(a, a') + (b, b') = (a + b, a' + b')$ y $(a, a') \cdot (b, b') = (ab, ab' + a'b)$ (ver el Ejercicio 3).

**4.8.** Encontrar todas las unidades de los anillos $\mathbb{Z}_6$, $\mathbb{Z}_7$ y $\mathbb{Z}_8$.

**4.9.** Efectuar las siguientes operaciones en el anillo $\mathbb{Z}_5[X]$

$$\begin{array}{l}(3+4X+X^2+2X^3)+(3+4X+4X^4+3X^3),\\(3+4X+X^2+2X^3)(3+4X+4X^4+3X^3),\\(2-4X+X^2-2X^3)+(3-4X+4X^2-3X^3),\\(2-4X+X^2-2X^3)(3-4X+4X^2-3X^3).\end{array}$$

**4.10.** Si $p(X)\in\mathbb{Z}_5[X]$ es cualquiera de los cuatro polinomios obtenidos al realizar el ejercicio anterior, calcular $p(1)$ y $p(-1)$ en cada caso.

**4.11.** Sea $R$ un anillo y sea $a\in R$ un elemento invertible. Demostrar que la aplicación $f_a : R\to R$ dada por $f_a(x)=axa^{-1}$ es un automorfismo de $R$.

**4.12.** Dado un anillo $R$, demostrar que existe un único homomorfismo de anillos de $\mathbb{Z}$ en $R$.

**4.13.** Demostrar que si $A$ es un anillo de característica $n$, entonces existe un único homomorfismo de anillos de $\mathbb{Z}_n$ en $A$ que es inyectivo.

**4.14.** Dados dos números naturales $n$ y $m$, dar condiciones para que exista un homomorfismo de anillos de $\mathbb{Z}_n$ en $\mathbb{Z}_m$.

**4.15.** Dado un morfismo de anillos $f : A\longrightarrow B$, ¿la imagen directa de un subanillo de $A$ es subanillo de $B$? ¿la imagen inversa de un subanillo de $B$ es subanillo de $A$?

**4.16.** Razonar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

i) Existe un único homomorfismo de anillos de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_7$ que es sobreyectivo.

ii)$\mathbb{Z}_{1457}$ es un cuerpo.

iii) De $\mathbb{Z}_7$ en $\mathbb{Z}_{14}$ hay exactamente 7 homomorfismos de anillos.