Teoría de Algoritmos

Relación 2

1.- El tiempo de ejecución de un algoritmo A está descrito por la recurrencia

$$T(n) = 7T(n/2) + n^2$$

Otro algoritmo B tiene un tiempo de ejecución dado por

$$T'(n) = aT'(n/4) + n^2$$

¿Cuál es el mayor valor de la constante a que hace a B asintóticamente mas rápido que A?

Resolvemos primero ambas recurrencias:

$T(n) = 7T(n/2) + n^2$

Realizamos el cambio $n = 2^k$ y nos queda:

$T(2^k) = 7T(2^{k-1}) + 4^k$

$t_k = 7t_{k-1} + 4^k$

$t_k - 7t_{k-1} = 4^k$

Por lo tanto el polinomio característico es:

$(x-7)(x-4)=0$

$t_k = C_1 7^k + C_2 4^k$

$t_n = C_1 7^{\log n} + C_2 n^2 = C_1 n^{\log 7} + C_2 n^2$

Pasamos ahora a la resolución de la segunda recurrencia:

$T'(n) = aT'(n/4) + n^2$

Realizamos el cambio $n = 4^k$ y nos queda:

$T'(4^k) = aT'(4^{k-1}) + 16^k$

$t'_k = at'_{k-1} + 16^k$

$t'_k - at'_{k-1} = 16^k$

Por lo tanto el polinomio característico es:

$(x-a)(x-16)=0$

$t'_k = C_1 a^k + C_2 16^k$

$t'_n = C_1 a^{\log n} + C_2 n^2 = C_1 n^{\log a} + C_2 n^2$

Si comparamos ambas ecuaciones podemos observar que su eficiencia sólo varia en el logaritmo al que está elevado n. Si los igualamos obtendremos el valor de a donde ambas eficiencias son iguales. Este es el valor que buscamos:

$\log_2 7 = \log_4 a$

$$\frac{\log 7}{\log 2} = \frac{\log a}{\log 4} \qquad \log a = \frac{\log 7 \cdot \log 4}{\log 2} = 1.69 \qquad a = 49$$

b) T(n) = T(n-1) + T(n-2) $n \geq 2, \quad T(0) = 0, \quad T(1) = 1$

$t_n = t_{n-1} + t_{n-2}$

$t_n - t_{n-1} - t_{n-2} = 0$

Calculamos el polinomio característico

$x^2 - x - 1 = 0$ $x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$t_n = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

A continuación calculamos las constantes:

$t_0 = C_1 + C_2 = 0$

$t_1 = C_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + C_2 \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1$

Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$$t_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

c) T(n) = 5T(n-1) - 8T(n-2) + 4T(n-3) $n \geq 3, \quad T(0) = 0, \quad T(1) = 1$

$t_n = 5t_{n-1} - 8\, t_{n-2} + 4t_{n-3}$

$t_n - 5t_{n-1} + 8t_{n-2} - 4t_{n-2} = 0$

$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$

Sacamos las raíces y determinamos el polinomio característico:

$x_1 = 1 \qquad x_2 = 2 \qquad x_3 = 2$

$(x - 1)(x - 2)^2$

Por lo tanto:

$t_n = C_1 1^n + C_2 2^n + C_3 n 2^n$

d) T(n) = 2T(n-1) + 1 $n \geq 1, \quad T(0) = 0$

$t_n = 2t_{n-1} + 1$

$t_n - 2t_{n-1} = 1$

Calculamos el polinomio característico

$(x - 2)(x - 1)$

$t_n = C_1 2^n + C_2 1^n$

A continuación calculamos las constantes:

$t_0 = C_1 + C_2 = 0$

Sabemos que:

$T(1) = 2T(0) + 1$, como $T(0) = 0$, $\quad T(1) = 1$

$t_1 = C_1 2^1 + C_2 1^1 = 2C_1 + C_2 = 1$

Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$C_1 = 1 \qquad C_2 = -1$

$t_1 = 2^n - 1^n$

e) T(n) = 2T(n-1) + n $n \geq 1, \quad T(0) = 0$

$t_n = 2t_{n-1} + n$
$t_n - 2t_{n-1} = n$
Calculamos el polinomio característico
$(x - 2)(x - 1)^2$
$t_n = C_1 2^n + C_2 1^n + C_3 n 1^n$
A continuación calculamos las constantes:
$t_0 = C_1 + C_2 = 0$
Sabemos que:
$T(1)=2T(0) + 1$, como $T(0) = 0$, $T(1) = 1$
$T(2)=2T(1) + 2$, como $T(1) = 1$, $T(2) = 4$
$t_1 = C_1 2^1 + C_2 1^1 + C_3 1^1 = 1$
$t_2 = C_1 2^2 + C_2 1^2 + C_3 2 \cdot 1^2 = 4$
Resolvemos el sistema de ecuaciones:
$C_1 = 2$ $C_2 = -2$ $C_3 = -1$
$t_n = 2 \cdot 2^n - 2 \cdot 1^n - n1^n$

f) T(n) = 2T(n-1) + n + 2ⁿ $n \geq 1, \quad T(0) = 0$

$t_n = 2t_{n-1} + n + 2^n$
$t_n - 2t_{n-1} = n + 2^n$
Calculamos el polinomio característico
$(x - 2)(x - 1)^2(x - 2) = (x - 1)^2(x - 2)^2$
$t_n = C_1 2^n + C_2 n 2^n + C_3 1^n + C_4 n 1^n$
A continuación calculamos las constantes:
$t_0 = C_1 + C_3 = 0$
Sabemos que:=
$T(1)=2T(0) + 1 + 2^1$, como $T(0) = 0$, $T(1) = 1$
$T(2)=2T(1) + 2 + 2^2$, como $T(1) = 1$, $T(2) = 12$
$T(3)=2T(2) + 3 + 2^3$, como $T(2) = 12$, $T(3) = 35$
$t_1 = C_1 2 + C_2 2 + C_3 + C_4 = 1$
$t_2 = C_1 2^2 + C_2 2 \cdot 2^2 + C_3 1 + C_4 2 \cdot 1 = 12$
$t_3 = C_1 2^3 + C_2 3 \cdot 2^3 + C_1 1 + C_3 3 \cdot 1$
Resolvemos el sistema de ecuaciones:
$C_1 = 2$ $C_2 = 1$ $C_3 = -2$ $C_4 = -1$
$t_n = 2 \cdot 2^n + n2^n - 2 \cdot 1^n - n1^n$

g) T(n) = 4T(n/2) + n $n > 2, \quad T(1) = 1 \quad T(2) = 6$

Realizamos el cambio $n = 2^k$
$T(2^k) = 4T(2^{k-1}) + 2^k$
$t_k - 4t_{k-1} = 2^k$
El polinomio característico es:
$(x-4)(x-2)=0$
$t_k = C_1 4^k + C_2 2^k$
$t_n = C_1 n^2 + C_2 n$
$t_1 = C_1 + C_2 = 1$
$t_2 = 4C_1 + 2C_2 = 6$
Resolvemos el sistema de ecuaciones
$C_1 = 2$ $C_2 = -1$
Por lo tanto
$t_n = 2n^2 - n$ para n potencia de 2

h) T(n) = 4T(n/2) + n² $n > 1, \quad considerar\ C_i \succ 0\ \forall i$

Realizamos el cambio $n = 2^k$

$T(2^k) = 4T(2^{k-1}) + 4^k$

$t_k - 4t_{k-1} = 4^k$

El polinomio característico es:

$(x-4)(x-4)=0$

$t_k = C_1 4^k + C_2 k 4^k$

$t_n = C_1 n^2 + C_2 n^2 \log(n)$

para n potencia de 2

i) T(n) = 2T(n/2) + nlog(n) $n > 1, \quad considerar\ C_i \succ 0\ \forall i$

Realizamos el cambio $n = 2^k$

$T(2^k) = 2T(2^{k-1}) + 2^k \log(2^k)$

$t_k - 2t_{k-1} = k2^k$

El polinomio característico es:

$(x-2)(x-2)^2=0$

$t_k = C_1 2^k + C_2 k 2^k + C_3 k^2 2^k$

$t_n = C_1 n + C_2 n\log(n) + C_3 n\log^2 n$

para n potencia de 2

j) T(n) = 3T(n/2) + cn $n > 1, \quad considerar\ c\ cons\tan te\ y\ C_i \succ 0\ \forall i$

Realizamos el cambio $n = 2^k$

$T(2^k) = 3T(2^{k-1}) + 2^k c$

$t_k - 3t_{k-1} = c2^k$

El polinomio característico es:

$(x-3)(x-2)=0$

$t_k = C_1 3^k + C_2 2^k$

$t_n = C_1 3^{\log n} + C_2 n = C_1 n^{\log 3} + C_2 n$

para n potencia de 2

k) T(n) = 2T(n/2) + log(n) $n > 2, \quad T(1) = 1$

Realizamos el cambio $n = 2^k$

$T(2^k) = 2T(2^{k-1}) + \log(2^k)$

$t_k - 2t_{k-1} = k$

El polinomio característico es:

$(x-2)(x-1)^2=0$

$t_k = C_1 2^k + C_2 1^k + C_3 k 1^k$

$t_n = C_1 n + C_2 + C_3 \log n$

para n potencia de 2

l) $T(n) = 5T(n/2) + (n\log(n))^2$ $n > 2, \quad T(1) = 1$

Realizamos el cambio $n = 2^k$

$T(2^k) = 5T(2^{k-1}) + (2^k\log(2^k))^2$

$T(2^k) = 5T(2^{k-1}) + k^2 4^k \log^2(2)$

$t_k - 5t_{k-1} = k^2 4^k \log^2(2)$

El polinomio característico es:

$(x-5)(x-4)^3=0$

$t_k = C_1 5^k + C_2 4^k + C_3 k 4^k + C_4 k^2 4^k$

$t_n = C_1 n^{\log 5} + C_2 n^2 + C_3 n^2\log(n) + C_4 n^2\log^2(n)$

para n potencia de 2

m) $T(n) = T(n/2)T^2(n/4)$ $n \geq 4, \quad T(1) = 1 \quad T(2) = 4$

Realizamos el cambio $n = 2^k$

$T(2^k) = 2T(2^{k-1})\, T^2(2^{k-2})$

$t_k = t_{k-1} \cdot t^2_{k-2}$

Realizamos tambien el siguiente cambio:

$u_i = \log(t_k)$

$\log(t_k) = \log(t_{k-1}) + 2\log(t_{k-2})$

$u_i = u_{i-1} + 2u_{i-2}$

$u_i - u_{i-1} - 2u_{i-2} = 0$

El polinomio característico es:

$(x-2)(x +1)=0$

$u_i = C_1 2^i + C_2(-1)^i$

$$t_k = 2^{u_i} = 2^{C_1 2^k + C_2 (-1)^k}$$

$$t_n = 2^{C_1 n + C_2 (-1)^{\log(n)}}$$

para n potencia de 2

n) $T(n) = \sqrt{n}\, T(\sqrt{n}) + n$ $n \geq 4, \quad considerar\ c_i > 0 \forall i$

Dividimos por n

$$\frac{T(n)}{n} = \frac{T\left(\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n}} + 1$$

tomamos $f(x) = T(x)/x$ y nos queda:

$f(n) = f(\sqrt{n}) + 1$

Realizamos el cambio $n = 2^k$

$f(2^k) = f(2^{k/2}) + 1$

$t_k = t_{k/2} + 1$

A continuación realizamos otro cambio:

$k = 2^i$

$t_i = t_{i-1} + 1$

El polinomio característico es:

$(x-1)^2=0$

$t_i = C_1 1^i + C_2 i 1^i$

$t_k = C_1 + C_2\log(k)$

$f_n = C_1 + C_2\log^2(n) = t_n/n$

$t_n = C_1 n + C_2 n\log^2(n)$

q) $T(n) = 2T(n-1) + 3^n$ $n \geq 1, \quad considerar\ c_i > 0\ \forall i$

$t_n = 2t_{n-1} + 3^n$
$t_n - 2t_{n-1} = 3^n$
Calculamos el polinomio característico
$(x - 2)(x - 3)$
$t_n = C_1 2^n + C_2 3^n$