Resumen UNI

TEMA 3

## 1. Interpolación polinómica

En este tema, nuestro principal objetivo será que dados los datos: $(x_0,y_0),(x_1,y_1),\dots,(x_N,y_N)\in\mathbb{R}^2 : i,j=0,1,\dots,N \Rightarrow x_i\neq x_j$ encontraremos una función polinómica de grado menor o igual que $N$ $p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $\forall i\in\{1,\dots,N\}, p(x_i)=y_i$.
La primera resolución que se nos ocurre es un SEL homogéneo: $p(x)=a_Nx^N+\dots+a_1x+a_0$
$(x_0,y_0),\dots,(x_N,y_N) \Rightarrow$ Datos

$$\text{Como } p(x_i)=y_i \Longrightarrow \begin{cases} a_Nx_0^N+\dots+a_1x_0+a_0=y_0\\ \vdots \\ a_Nx_N^N+\dots+a_1x_N+a_0=y_N\end{cases}$$

Hay mejores resoluciones que esta.

<u>Polinomio de interpolación de Lagrange</u>

Consideraremos una base de $\mathbb{P}_N$ muy característica:
$$\{l_0(x),l_1(x),\dots,l_N(x)\}$$
Y cada $l_i(x)$ cumple que: $\forall j=0,1,\dots,i-1,i+1,\dots,N \Rightarrow l_i(x_j)=0$
$l_i(x_i)=1$

Está claro que esos $x_j$ son raíces de $l_i$, por lo que $l_i\in\mathbb{P}_N$ será divisible por $(x-x_j)$, $(j=0,1,\dots,N,\ j\neq i)$. Además, cada $l_i$ irá multiplicado por $\alpha_i\in\mathbb{R}$, y $l_i$ tendrá la forma:
$$l_i(x)=\alpha_i\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{N}(x-x_j)$$
Y como hemos dicho que $l_i(x_i)=1$, podemos hallar $\alpha_i$:
$$l_i(x_i)=1=\underbrace{\alpha_i\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{N}(x_i-x_j)}\Rightarrow \alpha_i=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{N}\frac{1}{x_i-x_j}$$
Y concluimos que $l_i$ es de la forma:
$$\boxed{l_i(x)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{N}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}}$$
Y el polinomio de interpolación de Lagrange será de la forma:
$$\boxed{p(x)=\sum_{i=0}^{N}y_il_i(x)}$$
Es de esta forma ya que por la propiedad interpolatoria de los $l_i$, está claro que $\forall x_i$ con $i\in\{0,\dots,N\}, p(x_i)=y_i$

* La fórmula baricéntrica no entra.

Dada una función $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0, \dots, x_N \in A$, $i=0,\dots,N \Rightarrow y_i = f(x_i)$

Los datos son: $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_N, f(x_N))$

A lo largo del tema tomaremos la siguiente notación del polinomio de interpolación:

$$\ell_N f(x) := \sum_{i=0}^{N} f(x_i) \ell_i(x)$$

Polinomio de interpolación de Newton

Consideramos ahora $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0, \dots, x_n \in A$ y los datos $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_N, f(x_N))$. También consideramos la siguiente base característica de polinomios: $\to$ Propiedad recursiva

$$\{\omega_0(x), \dots, \omega_N(x)\} \leadsto \omega_i \in \mathbb{P}_i$$

$$p_N(x) := \ell_N f(x) - \ell_{N-1} f(x)$$

Como $\ell_N f(x)$ y $\ell_{N-1} f(x)$ interpolan simultáneamente los datos $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_{N-1}, f(x_{N-1}))$, por lo que está claro que $\forall i \in \{0, \dots, N-1\}$, $\ell_N f(x_i) = \ell_{N-1} f(x_i)$, por lo que:

$\forall i \in \{0, \dots, N-1\} \Rightarrow p_N(x_i) = \ell_N f(x_i) - \ell_{N-1} f(x_i) = 0$

Entonces $p_N$ es divisible por $(x - x_i)$ con $i \in \{0, \dots, N-1\}$. Existe $\alpha_N \in \mathbb{R}$ tal que:

$$p_N(x) = \alpha_N \prod_{i=0}^{N-1} (x - x_i) = \ell_N f(x) - \ell_{N-1} f(x)$$

Aprovechando esto, definimos los $\omega_i$ de la base:

$$\omega_i(x) := \begin{cases} \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) & \text{si } i > 0 \\ 1, & \text{si } i = 0 \text{ (Por convenio)} \end{cases}$$

Y como $\ell_N f(x_N) = f(x_N)$, aprovechamos la última expresión en verde y la definición de los $\omega_i$:

$$\alpha_N \prod_{i=0}^{N-1} (x - x_i) = \ell_N f(x) - \ell_{N-1} f(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha_N \cdot \omega_N(x) = \ell_N f(x) - \ell_{N-1} f(x)$$

$$\Downarrow \text{ y sustituyendo por } x_N$$

$$\alpha_N \cdot \omega_N(x_N) = f(x_N) - \ell_{N-1} f(x_N)$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha_N = \frac{f(x_N) - \ell_{N-1} f(x_N)}{\omega_N(x_N)} \Rightarrow$$ Hemos deducido la expresión de $\alpha_N$

A partir de ahora notaremos $\alpha_N$ como $f[x_0, x_1, \dots, x_N]$.
Gracias a esto ya podemos deducir la expresión del polinomio de interpolación:

$$\boxed{\ell_N f(x) = \ell_{N-1} f(x) + \omega_N(x) f[x_0, x_1, \dots, x_N]}$$

¿Por qué?
Porque $\forall x_i$ con $i \in \{0, \dots, N-1\}$, $\ell_N f(x_i) = f(x_i) = y_i$ ya que $\ell_{N-1} f(x)$ interpola los datos $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_{N-1}, f(x_{N-1}))$ y $\omega_N(x)$ vale 0 para todos esos $x_i$ por cómo se ha definido.
Para $x_N$ ocurre lo siguiente:

$$\ell_N f(x_N) = \ell_{N-1} f(x_N) + \cancel{\omega_N(x_N)} \cdot \frac{f(x_N) - \ell_{N-1} f(x_N)}{\cancel{\omega_N(x_N)}} = f(x_N)$$

Y por lo tanto, $\ell_N f$ cumple que $\ell_N f(x_i) = f(x_i)$ $\forall i \in \{0, \dots, N\}$

---

Por convenio, $f[x_0] = f(x_0)$ y $\ell_0 f(x) = f(x_0)$, ya que por la fórmula recuadrada en azul, $\ell_0 f(x)$ interpola al dato $(x_0, f(x_0))$, entonces $\ell_{-1} f(x)$ no existe y como $\omega_0(x) = 1$, es necesario exigir que $f[x_0] = f(x_0)$ para que $\ell_0 f(x_0) = f(x_0)$.

---

Fórmula recursivo-aditiva

$$\boxed{\ell_N f(x) = \sum_{i=0}^{N} \omega_i(x) \cdot f[x_0, x_1, \dots, x_i]} \quad \text{Con } f[x_0] := f(x_0) \text{ y } \omega_0(x) = 1$$

Proposición.

$$\boxed{i \geq 1 \Rightarrow f[x_0, x_1, \dots, x_i] = \frac{f[x_1, \dots, x_i] - f[x_0, \dots, x_{i-1}]}{x_i - x_0}}$$

La demostración no se vio en clase y no entra

Error de interpolación. Convergencia y estabilidad.
Polinomios de Chebyshev
Como ya se ha visto, dada una función continua en $[a,b]$ y una serie de nodos $x_0, \dots, x_N \in [a,b]$, existe un único polinomio $\ell_N f(x)$ de grado menor o igual que $N$ que interpola esos datos. Por ello, definimos la aplicación:

$$\ell_N : C([a,b]) \longrightarrow \mathbb{P}_N$$

Está bien definida por la unicidad del polinomio de interpolación.

Además, $\ell_N^2 = \ell_N$ ya que una función polinómica le corresponde como polinomio de interpolación ella misma.

Error de interpolación $\Rightarrow E_N f(x) := f(x) - \ell_N f(x)$

$\ell_N : C([a,b]) \longrightarrow \mathbb{P}_N$ operador lineal

Dadas $f, g \in C([a,b])$, $\lambda \in \mathbb{R}$, se cumple que:

1°) $\ell_N(f+g) = \ell_N f + \ell_N g$ 2°) $\ell_N(\lambda f) = \lambda \ell_N f$

Comprobémoslo:

1°) Tenemos $x_0, \dots, x_N$ nodos. Tomamos uno arbitrario:

$\ell_N(f+g)(x_i) = (f+g)(x_i) = f(x_i) + g(x_i)$
$\ell_N f(x_i) + \ell_N g(x_i) = f(x_i) + g(x_i)$

Como coinciden en todos los nodos y el pol. interpolación es único, se da la igualdad

2°) $\ell_N(\lambda f)(x_i) = (\lambda f)(x_i) = \lambda \cdot f(x_i)$
$\lambda \ell_N f(x_i) = \lambda \cdot f(x_i)$

Ahora definimos la norma infinito sobre dicho operador usando $\|\cdot\|_\infty$ en $C([a,b])$ y generalizando el concepto de norma matricial inducida a operadores lineales (y continuos):

$$\|\ell_N\|_\infty := \sup_{f \in C([a,b]),\, \|f\|_\infty = 1} \|\ell_N f\|_\infty$$

Y también $\Rightarrow$ $$\underbrace{\|\ell_N\|_\infty = \sup_{f \in C([a,b]),\, f \neq 0} \frac{\|\ell_N f\|_\infty}{\|f\|_\infty}}_{\text{De donde se deduciría que } \|\ell_N f\|_\infty \leq \|\ell_N\|_\infty \|f\|_\infty}$$

Proposición.

Denotaremos $\|\ell_N\|_\infty = \Lambda_N$, siendo $\Lambda_N := \|\lambda_N\|_\infty$ la constante de Lebesgue y $\lambda_N(x) = \sum_{i=0}^{N} |\ell_i(x)|$ la función de Lebesgue, siendo $\ell_i$ cada uno de los polinomios de la base de Lagrange.

1)* Demostración

$f \in C([a,b])$, $\|f\|_\infty = 1$. Usamos la forma de Lagrange del polinomio de interpolación y la definición de $\|\cdot\|_\infty$ en $C([a,b])$:

$$\|\ell_N f\|_\infty \overset{\|\cdot\|_\infty \text{ en } C([a,b])}{=} \max_{x \in [a,b]} \left| \sum_{i=0}^{N} f(x_i)\ell_i(x) \right| \overset{\text{forma de Lagrange}\ \ \|f\|_\infty = 1}{\leq} \max_{x \in [a,b]} \sum_{i=0}^{N} |\ell_i(x)| =$$

$$= \|\lambda_N\|_\infty = \Lambda_N$$

Y como $\|\ell_N\|_\infty = \sup\limits_{f\in C([a,b]),\, \|f\|_\infty = 1} \|\ell_N f\|_\infty$ y $\|\ell_N f\|_\infty \leq \Lambda_N$, por la definición de supremo, $\|\ell_N\|_\infty \leq \Lambda_N$. Nos falta demostrar la otra desigualdad. Como estamos en $[a,b]$ y trabajando con funciones continuas, $\exists\, \varepsilon \in\, ]a,b[ : \|\lambda_N\|_\infty = \lambda_N(\varepsilon)$, (esto se debe al T$^{\text{ma}}$ Weierstrass). Definimos $f \in C([a,b])$ lineal a trozos tq $\forall i \in \{0,\dots,N\}$, $f(x_i) := \text{sign}(\ell_i(\varepsilon))$. Claramente $\|f\|_\infty = 1$. Usémosla para demostrar que $\|\ell_N\|_\infty \geq \Lambda_N$:

$$\|\ell_N(f)\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} \left| \sum_{i=0}^{N} f(x_i)\ell_i(x) \right| \geq \left| \sum_{i=0}^{N} f(x_i)\ell_i(\varepsilon) \right| =$$

$\|\cdot\|_\infty$ en $C([a,b])$

El máximo será mayor o igual que la expresión evaluada en un punto concreto de $[a,b]$

Por la definición de $f$, $f(x_i)\cdot \ell_i(\varepsilon) = |\ell_i(\varepsilon)|$

$$= \sum_{i=0}^{N} |\ell_i(\varepsilon)| = \lambda_N(\varepsilon) = \|\lambda_N\|_\infty = \Lambda_N$$

Como existe $f$ con $\|f\|_\infty = 1$ tq $\|\ell_N f\|_\infty \geq \Lambda_N$ y sabemos que $\|\ell_N\|_\infty = \sup\limits_{f\in C([a,b]),\, \|f\|_\infty=1} \|\ell_N f\|_\infty$, por la definición de supremo, $\|\ell_N\|_\infty \geq \Lambda_N$. Como de antes teníamos que $\|\ell_N\|_\infty \leq \Lambda_N$, concluimos que $\|\ell_N\|_\infty = \Lambda_N$.

Corolario.

$$\boxed{f \in C([a,b]) \Longrightarrow \|E_N f\|_\infty \leq (1+\Lambda_N) \inf_{p\in\mathbb{P}_N} \|f-p\|_\infty}$$

2)* <u>Demostración</u>

Def. error interpolación

Sumamos y restamos $p \in \mathbb{P}_N$

3ª propiedad de las normas

$$\|E_N f\|_\infty = \|f - \ell_N f\|_\infty = \|f - p + p - \ell_N f\|_\infty \leq$$

$$\leq \|f-p\|_\infty + \|p - \ell_N f\|_\infty = \|f-p\|_\infty + \|\ell_N(p-f)\|_\infty \leq$$

Aplicamos la linealidad de $\ell_N$ y que $\ell_N p = p$ por ser $p$ polinomio

$$\leq \|f-p\|_\infty + \|\ell_N\|_\infty \|f-p\|_\infty = \|f-p\|_\infty + \Lambda_N \|f-p\|_\infty =$$

$$= (1+\Lambda_N)\|f-p\|_\infty$$

$\Downarrow$ Se deduce

$$\|E_N f\|_\infty \leq (1+\Lambda_N) \inf_{p\in\mathbb{P}_N} \|f-p\|_\infty$$

Por el T^ma de aproximación uniforme de Weierstrass, sabemos que: $\lim_{N\to\infty} \inf_{p\in \mathbb{P}_N} \|f-p\|_\infty = 0$ $\lim_{N\to\infty} \Lambda_N = \infty$

Y por lo tanto, de lo anterior, sabemos que
$\|E_N f\|_\infty \leq \underbrace{(1+\Lambda_N) \inf_{p\in\mathbb{P}_N} \|f-p\|_\infty}_{\text{Con } N\to\infty,\ 0\cdot\infty \text{ (¡Indeterminación!)}}$

No podemos asegurar convergencia uniforme $\lim_{N\to\infty} \|E_N f\|_\infty = 0$.
A continuación, 2 ejemplos:
Ejemplo de Berstein: $f(x):=|x|$ en $[-1,1]$ y nodos equiespaciados $i=0,\dots,N \Rightarrow x_i = -1+\frac{2i}{N}$. Aquí, $\lim_{N\to\infty} \|E_N f\|_\infty = \infty$, hay mal condicionamiento.
Ejemplo de Runge: $f(x) := \frac{1}{1+25x^2}$ en $[-1,1]$ y nodos equiespaciados $i=0,\dots,N \Rightarrow x_i = -1+\frac{2i}{N}$. Aquí, $\lim_{N\to\infty} \|E_N f\|_\infty = \infty$ también y mal condicionamiento.

---

Analicemos un nuevo problema que nos permite estimar $\Lambda_N$. Sean $(x_0, f(x_0)),\dots,(x_N, f(x_N))$ datos y $(x_0,\bar{f}(x_0)),\dots,(x_N,\bar{f}(x_N))$ datos ligeramente perturbados y hallamos los polinomios que interpolan a estos 2 grupos de datos:

3)* *Demostración*

Forma de Lagrange

$$\|\mathcal{L}_N f - \mathcal{L}_N \bar{f}\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} \left| \sum_{i=0}^{N} (f(x_i)-\bar{f}(x_i)) \ell_i(x)\right| \leq$$

$$\leq \Lambda_N \cdot \max_{i=0,1,\dots,N} |f(x_i)-\bar{f}(x_i)| \,*$$

Donde se ha sacado factor común $(f(x_i)-\bar{f}(x_i))$ considerando el máximo de dicha diferencia y se ha usado que $\max_{i=0,\dots,N} \sum_{i=0}^{N} |\ell_i(x)| = \|\lambda_N\|_\infty = \Lambda_N$

* Evidentemente $\max_{i=0,\dots,N} |f(x_i)-\bar{f}(x_i)|$ será muy pequeño, por lo que si $\|\mathcal{L}_N f - \mathcal{L}_N \bar{f}\|_\infty$ es de un orden mayor significa que $\Lambda_N$ es grande. Esto pasa con $f(x) := e^x$ en $[-1,1]$ si tomamos nodos equiespaciados $i=0,\dots,20 \Rightarrow x_i := -1+\frac{2i}{20}$

Ahora nos centraremos en estudiar el error en zonas puntuales:

**Proposición.**

Sean $x_0, \dots, x_N$ reales distintos, sea $x \in \mathbb{R}$ y sean

$$a := \min\{x, x_0, \dots, x_N\} \quad b := \max\{x, x_0, \dots, x_N\}$$

$$f \in C^{N+1}([a,b])$$

Entonces existe $\varepsilon \in ]a,b[$ tq $\boxed{E_N f(x) = \dfrac{f^{N+1}(\varepsilon)}{(N+1)!}\omega_{N+1}(x)}$

4)* *Demostración*

Suponemos $\forall i \in \{0, \dots, N\}$ que $x \neq x_i$, lo cual no es restrictivo ya que si $x = x_i$, $E_N f(x_i) = f(x_i) - \ell_N f(x_i) = 0 = \omega_{N+1}(x_i)$.

A continuación definimos una función auxiliar $G : [a,b] \to \mathbb{R}$:

$$G(t) = E_N f(t) - \frac{E_N f(x)}{\omega_{N+1}(x)}\omega_{N+1}(t)$$

Y $G \in C^{N+1}([a,b])$ ya que $\omega_{N+1}(t)$ lo es y admite $N+2$ ceros:

•) $i = 0, \dots, N \Rightarrow G(x_i) = \underbrace{E_N f(x_i)}_{0} - \dfrac{E_N f(x)}{\omega_{N+1}(x)}\underbrace{\omega_{N+1}(x_i)}_{0} = 0$

•) $G(x) = E_N f(x) - \dfrac{E_N f(x)}{\cancel{\omega_{N+1}(x)}}\cancel{\omega_{N+1}(x)} = 0$

Y aplicando el Tma Rolle $N+1$ veces:

$G^{N+1}$ se anula al menos en un $\varepsilon \in [a,b]$

Calculamos $G^{N+1}(t)$:

$$E_N f(t) = f(t) - \underbrace{\ell_N f(t)}_{\in \mathbb{P}_N} \Rightarrow (E_N f(t))' = f^{N+1}(t)$$

$$\omega_{N+1}(t) = t^{N+1} + a_N t^N + \dots + a_0 \Rightarrow \omega_{N+1}^{N+1}(t) = (N+1)!$$

$$G^{N+1}(t) = f^{N+1}(t) - \frac{E_N f(x)}{\omega_{N+1}(x)}(N+1)!$$

$$\Rightarrow \underline{0 = G^{N+1}(\varepsilon) = f^{N+1}(\varepsilon) - \frac{E_N f(x)}{\omega_{N+1}(x)}(N+1)!}$$

$$E_N f(x) = \frac{f^{N+1}(\varepsilon)}{(N+1)!}\omega_{N+1}(x) \checkmark$$

**Corolario.**

$$\boxed{\|E_N f\|_\infty \leq \frac{\|f^{N+1}\|_\infty}{(N+1)!}(b-a)^{N+1}}$$

5)* *Demostración*

$$\|E_N f\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |E_N f(x)| = \max_{x\in[a,b]} \left| \frac{f^{N+1}(\varepsilon)}{(N+1)!}\omega_{N+1}(x)\right| \leq$$

Anterior proposición

$$\leq \frac{\|f^{N+1}\|_\infty}{(N+1)!}(b-a)^{N+1}$$

Acotamos superiormente por la norma infinito de $f$ y como $\omega_{N+1}(x)$ es igual a $\prod_{j=0}^{N}(x-x_j)$, se acota también ese producto superiormente por $\prod_{i=0}^{N}(b-a) = (b-a)^{N+1}$

---

Este corolario no se puede aplicar al ejemplo de Berstein ya que $f(x):=|x|$ no es derivable. Al aplicarlo en Runge, $\|E_{10}f\|_\infty$ es de un orden muy grande.

---

La elección de los nodos influye en el error de interpolación $E_N f(x) = \frac{f^{N+1}(\varepsilon)}{(N+1)!}\omega_{N+1}(x)$. Veamos qué ocurre con los nodos uniformemente distribuidos, concretamente 2 nodos en $[a,b]$:

Ejemplo

Sean 2 nodos equidistantes $x_0, x_1$:

$f\in C^2([a,b])$, $x\in[x_0,x_1] \Rightarrow \exists\, \varepsilon \in ]x_0,x_1[$ tq:

$$E_1 f(x) = \frac{f''(\varepsilon)}{2}(x-x_0)(x-x_1) \Rightarrow$$ Por la última proposición

Y está claro que $E_1 f(x) \leq \frac{\|f''\|_\infty}{2}h^2$ ya que $f''(\varepsilon)\leq \|f''\|_\infty$ y "$x-x_0$", "$x-x_1$" serán $\leq h$, que es la máxima distancia que puede haber entre 2 puntos del intervalo $[x_0,x_1]$. Sin embargo, hay mejores cotas:

$x\in[x_0,x_1] \Rightarrow \exists\, t\in[0,1] : x = x_0 + th$ Sustituimos

$|(x-x_0)(x-x_1)| = (x-x_0)\cdot|(x-x_1)| = (x-x_0)(x_1-x) = th(x_1-x_0-th) =$

$= th(h-th) = -h^2t^2 + h^2 t \Rightarrow f(t) = -h^2t^2 + h^2 t$ (Buscamos su máximo)

$f'(t) = -2h^2t + h^2 \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{t = \frac{1}{2} \quad f''(t)<0}_{\text{Es máximo}}$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{h^2}{4}$

$\Rightarrow |(x-x_0)(x-x_1)| \leq \frac{h^2}{4} \Rightarrow \|E_1 f\|_\infty \leq \frac{\|f''\|_\infty}{8}h^2$

El ejemplo de 3 nodos es el ejercicio 3 de la relación.

En conclusión, aunque la siguiente cota sea mejorable, para nodos equidistantes tenemos que:

$$\boxed{\|E_N f\|_\infty \leq \frac{\|f^{N+1}\|_\infty}{(N+1)!} h^{N+1}}$$

Pero queremos hallar la cota óptima, y como la expresión del error es $E_N f(x) = \frac{f^{N+1}(\xi)}{(N+1)!} \omega_{N+1}(x)$, nos interesa minimizar $\|\omega_{N+1}\|_\infty$. Esto lo vamos a lograr con los nodos de Chebyshev.

---

Polinomios de Chebyshev

Trabajaremos en el intervalo $[-1,1]$, y en caso de estar en $[a,b]$, usaremos un isomorfismo afín tq $[a,b] \longleftrightarrow [-1,1]$

Sea $\theta \in \mathbb{R}$, $N \geq 1$:

6)* Demostración

$$\cos(N+1)\theta + \cos(N-1)\theta = 2 \cdot \cos\left(\frac{N\theta+\theta+N\theta-\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{N\theta+\theta-N\theta+\theta}{2}\right) =$$

$$= 2\cos N\theta \cos\theta$$

Y ahora despejamos $\cos(N+1)\theta$:

$$\cos(N+1)\theta = 2\cos\theta\cos N\theta - \cos(N-1)\theta$$

Y aplicando esta recurrencia a $\cos N\theta$ y $\cos(N-1)\theta$, y a todo lo que vaya saliendo después, obtendremos una expresión con $\cos\theta$ elevados a números en concreto, y lo podemos interpretar como un polinomio $T_N \in \mathbb{P}_N : T_N(\cos\theta) = \cos N\theta$

$\cos : [0,\pi] \longleftrightarrow [-1,1]$ biyección

$x = \cos\theta$

Entonces, $T_0(x) = \cos 0 \cdot \theta = 1$, $T_1(x) = \cos\theta = x$

$\Rightarrow T_{i+2}(x) = 2x\,T_{i+1}(x) - T_i(x) \Rightarrow T_i$ polinomio de Chebyshev de grado $i$

Demostremos 2 propiedades importantes de estos polinomios

- $T_N \in \mathbb{P}_N$ con $N$ ceros reales, todos en $[-1,1]$ y coeficiente líder $2^{N-1}$

Lo del coeficiente sale de aplicar una simple recurrencia. Para ver los ceros:

$$\underbrace{T_N(\cos\theta) = 0 = \cos N\theta}_{} \Rightarrow N\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow \theta = \frac{2k+1}{2N}\pi \quad \underbrace{(k=0,\dots,N-1)}_{}$$

$$x_i^{(N)} = \cos\frac{2k+1}{2N}\pi \;(k=0,\dots,N-1) \text{ son los } N \text{ ceros de } T_N$$

• $T_N \in C([-1,1])$, $\|T_N\|_\infty = 1$

$x \in [-1,1] \Rightarrow x = \cos\theta$

$T_N(x) = T_N(\cos\theta) = \cos N\theta \Rightarrow |\cos N\theta| \leq 1$ (Siempre es cierto)

$\Downarrow$

$|T_N(x)| \leq 1$

$\Downarrow$

$\|T_N\|_\infty = 1$

Ya están demostradas estas 2 propiedades. Hemos de notar también que alcanza $\|T_N\|_\infty$ en $N+1$ puntos:

$|T_N(x)| = 1 \Leftrightarrow \cos N\theta = \pm 1 \Leftrightarrow N\theta = 0 + k\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{k}{N}\pi$, $k \in \{0, \dots, N\}$

Si dividimos $T_N$ por $2^{N-1}$, $T_N$ será un polinomio mónico ya que el coeficiente líder de $T_N$ ya dijimos que era $2^{N-1}$. Además, como $\|T_N\|_\infty = 1$,

$$\left\|\frac{T_N}{2^{N-1}}\right\|_\infty = \frac{1}{2^{N-1}}$$

## Teorema de Chebyshev

Sea $N \geq 1$ y $p$ un polinomio real de grado $N$ con coeficiente líder 1. Entonces,

$$\boxed{\max_{x \in [-1,1]} |p(x)| \geq \frac{1}{2^{N-1}}}$$

7)* *Demostración*

Por reducción al absurdo, suponemos que $\max_{x \in [-1,1]} p(x) < \frac{1}{2^{N-1}}$

Definimos el polinomio:

$$q(x) := \frac{1}{2^{N-1}} T_N - p(x) \in \mathbb{P}^{N-1}$$ $\Rightarrow$ Esto se debe a que ambos polinomios son mónicos y se anulan sus respectivos $x^N$.

Por el apartado de antes de este teorema sabemos que $T_N$ alcanza $\|T_N\|_\infty$ $N$ veces, por lo que vamos a evaluar $q$ en esos $N$ puntos:

$q(y_0) > 0$, $q(y_1) < 0$, $\dots$, $(-1)^N q(y_N) > 0$

$\hookrightarrow$ Los cambios de signo se deben a que en los nodos impares $T_N$ alcanza $-1$ y al restarle $p$ en ese nodo, sigue siendo negativo. En los pares es positivo ya que $T_N$ alcanza 1 y como $\|p\|_\infty < \frac{1}{2^{N-1}}$, al restarle a $\frac{1}{2^{N-1}}$ una cantidad menor seguirá siendo positivo. Aplicamos Bolzano entre cada par de nodos consecutivos de los $N+1$ y llegamos a que $q$ tiene $N$ ceros, lo cual es contradictorio ya que $q \in \mathbb{P}_{N-1}$. Podríamos intentar suponer que $q$ es el polinomio nulo, pero esto implicaría que

$p = \frac{1}{2^{N-1}} T_N$, lo cual tampoco puede ser ya que $\|p\|_\infty < \frac{1}{2^{N-1}}$ y $\left\| \frac{1}{2^{N-1}} T_N \right\|_\infty = \frac{1}{2^{N-1}}$, por lo que estamos en una encerrona porque nuestra hipótesis era falsa y $\max\limits_{x \in [-1,1]} p(x) \geq \frac{1}{2^{N-1}}$

Corolario.

Sean $N \geq 1$, $x_0, \dots, x_N \in [-1,1]$ y $x_0^{(N+1)}, \dots, x_N^{(N+1)}$ los nodos de Chebyshev. Entonces, en el espacio normado $C([-1,1])$:

$$\boxed{\left\| \prod_{i=0}^{N} (x - x_i) \right\|_\infty \geq \left\| \prod_{i=0}^{N} (x - x_i^{(N+1)}) \right\|_\infty = \frac{1}{2^N}}$$

Lo cual se traduce en que los nodos de Chebyshev minimizan la $\|\cdot\|_\infty$ del polinomio nodal $\omega_{N+1}(x)$.

Y gracias a esto ya tenemos la cota mínima de $\|E_N f\|_\infty$ que buscábamos:

$$\boxed{\|E_N f\|_\infty \leq \frac{\|f^{N+1}\|_\infty}{(N+1)!} \frac{1}{2^N}}$$

* Observación. Si $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ es lipschitziana, entonces para los nodos de Chebyshev, $\lim\limits_{N \to \infty} \|E_N f\|_\infty = 0$.

¡Hermite y el caso general no entran!

## 2. Interpolación mediante funciones splines

Definición.

Dado un intervalo $[a,b]$ y una partición $P$ del mismo $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b\}$, el espacio de funciones splines de clase $k$ y grado $m$ viene dado por

$$\boxed{S_m^k(P) := \{ s \in C^k([a,b]) : i = 0, \dots, N-1 \Rightarrow s_{|[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_m \}}$$

Funciones splines lineales

$S_1^0(P) = \{ s \in C^0([a,b]) : i = 0, \dots, N-1, s_{|[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_1 \}$

Es decir, son funciones continuas cuya restricción a cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ es un polinomio de grado menor o igual que 1, es decir, una recta. Una característica importante de $S_1^0(P)$ es:

$$\dim S_1^0(P) = 2N - (N-1) = N+1$$

$2N \Rightarrow$ Se debe a que $s \in S_1^0(P)$ viene determinada por polinomios de $\mathbb{P}_1$ ($s_{|[x_i, x_{i+1}]}$) definidos en $N$ subintervalos, y como $\dim \mathbb{P}_1 = 2$, $s_{|[x_i, x_{i+1}]} = a_i x + b_i \Rightarrow 2N$ datos

Se resta $N-1$ porque $S_1^0(P)$ es continua y hay $N-1$ nodos intermedios.

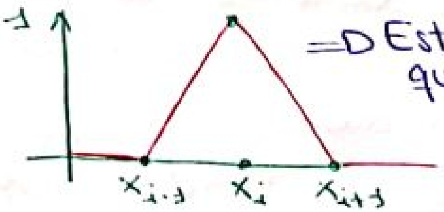
En $S_1^0(P)$ tomaremos la base usual $\{B_0(x), \dots, B_n(x)\}$

**Definición.**

Sean $a<b$ y $P=\{a=x_0<x_1<\dots<x_N=b\}$ una partición del intervalo $[a,b]$. La base usual de $S_1^0(P)$ viene dada por

$$i=0,\dots,N \Rightarrow B_i(x) := \begin{cases} \dfrac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}, & \text{si } x\in[x_{i-1},x_i] \\ \dfrac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}, & \text{si } x\in[x_i,x_{i+1}] \\ 0, & \text{fuera} \end{cases}$$

Interpretación geométrica $\Rightarrow$




$\Rightarrow$ Está claro que $B_i(x)\in S_1^0(P)$ y que $B_i(x_j)=\delta_{ij}$ $\forall i,j\in\{0,\dots,N\}$

**Problema de interpolación en $S_1^0(P)$**

Sea un intervalo $[a,b]$, una partición $P=\{a=x_0<x_1<\dots<x_N=b\}$ y $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, encontrar $s\in S_1^0(P)$ tq $\forall i\in\{0,\dots,N\}$, $s(x_i)=f(x_i)$.

Solución del problema: $s=S_N^1 f$

$$S_N^1 f(x) = \sum_{i=0}^{N} f(x_i)B_i(x)$$

Claramente $S_N^1 f\in S_1^0(P)$ ya que es combinación lineal de los $B_i$. También cumple que $S_N^1 f(x_i)=f(x_i)$ $\forall i\in\{0,\dots,N\}$ ya que $B_i(x_j)=\delta_{ij}$

**Error de interpolación**

$$E_N f(x) = f(x) - S_N^1 f(x)$$

Si $f\in C^2([a,b])$, como en cada intervalo $[x_i,x_{i+1}]$ con $i\in\{0,\dots,N\}$, $S_N^1 f$ es un polinomio de grado $\leq 1$ que pasa por $x_i$ e $x_{i+1}$, usando lo ya visto para polinomios que interpolan 2 datos equiespaciados se tiene que $x\in[x_i,x_{i+1}]$:

$$|f(x)-S_N^1 f(x)| \leq \frac{\|f''\|_\infty}{8}(x_{i+1}-x_i)^2$$

$$\Downarrow$$

$$\|f-S_N^1 f\| \leq \frac{\|f''\|_\infty}{8}\cdot\left(\max_{i=0,\dots,N-1}(x_{i+1}-x_i)\right)^2$$

Proposición. $f$ continua

$$\lim_{N\to\infty} \max_{i=0,\dots,N-1} (x_{i+1}-x_i) = 0 \Rightarrow \lim_{N\to\infty} \|f - S_N^1 f\|_\infty = 0$$

El ejercicio de la diapositiva 101 no se hace.

## Funciones splines cúbicas

$S_3^2(P) \Rightarrow$ Va a ser una función de clase 2 cuya restricción a cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ va a ser un polinomio de grado menor o igual que 3.

$$\dim S_3^2(P) = \underbrace{4N - 3(N-1)}_{} = N+3$$

$[x_i, x_{i+1}] \rightsquigarrow$ pol. de $\mathbb{P}_3$, 4 coef., $N$ subintervalos

$C^2$, $N-1$ puntos intermedios, 3 condiciones: Continuidad de $f, f''$ y $f'''$

Como $\dim S_3^2(P) = N+3$ y tenemos las $N+1$ condiciones de que $\forall i \in \{0,\dots,N\}, s(x_i) = f(x_i)$, necesitamos dos condiciones adicionales: $s''(a) = 0 = s''(b)$

---

Vamos a construir dichas splines cúbicas naturales. Sea $[a,b]$ un intervalo y $N+1$ puntos distribuidos uniformemente en $[a,b]$:

$$h = (b-a)/N, \ \forall i \in \{0,\dots,N\} \Rightarrow x_i = a + ih$$

Y tomamos la notación:

$$\left.\begin{array}{l} s := S_N^2 f, \ \forall i \in \{0,\dots,N-1\} \Rightarrow s_i := S_N^2 f_{|[x_i,x_{i+1}]} \\ \forall i \in \{0,\dots,N\} \Rightarrow y_i := s(x_i),\ d_i := s'(x_i),\ c_i := s''(x_i) \end{array}\right\} \text{Notación}$$

$\forall i \in \{1,\dots,N\}, s_{i-1} \in \mathbb{P}_3 \Rightarrow s_{i-1}'' \in \mathbb{P}_1$

$$x \in [x_{i-1}, x_i] \Rightarrow s_{i-1}''(x) = c_{i-1}\frac{x_i - x}{h} + c_i \frac{x - x_{i-1}}{h}$$

Lo hemos definido de esta forma para que $\forall i \in \{1,\dots,N\}$ se dé que $s_{i-1}''(x_i) = s_i''(x_i)$:

$$\left.\begin{array}{l} s_{i-1}''(x_i) = c_i \dfrac{x_i - x_{i-1}}{h} \\ s_i''(x) = c_i \dfrac{x_{i+1}-x}{h} + c_{i+1}\dfrac{x - x_i}{h} \Rightarrow s_i''(x_i) = c_i \dfrac{x_{i+1}-x_i}{h} \end{array}\right\} \text{Coincide ya que } x_i - x_{i-1} = x_{i+1} - x_i \text{ por ser nodos unif. distribuidos}$$

Integrando 2 veces $S''_{i-1}(x)$:

$$S_{i-1}(x) = c_{i-1}\frac{(x_i-x)^3}{6h} + c_i\frac{(x-x_{i-1})^3}{6h} + \alpha_{i-1}(x-x_{i-1}) + \beta_{i-1}$$

Y se imponen las condiciones de interpolación:

$$\forall i \in \{1,\dots,N-1\} \Rightarrow S_{i-1}(x_{i-1}) = y_{i-1},\ S_{i-1}(x_i) = y_i$$

$$\overset{*}{\Downarrow}$$

$$\left| \begin{array}{l} \alpha_{i-1} = \dfrac{y_i - y_{i-1}}{h} - \dfrac{h}{6}(c_i - c_{i-1}) \\ \beta_{i-1} = y_{i-1} - c_{i-1}\dfrac{h^2}{6} \end{array} \right.$$

*

$$S_{i-1}(x_{i-1}) \Rightarrow \underbrace{y_{i-1} = c_{i-1}\frac{(x_i-x_{i-1})^3}{6h} + 0 + 0 + \beta_{i-1}}$$

$$\underbrace{y_{i-1} = c_{i-1}\cdot\frac{h^2}{6} + \beta_{i-1}}$$

$$\beta_{i-1} = y_{i-1} - c_{i-1}\cdot\frac{h^2}{6}$$

$$S_{i-1}(x_i) \Rightarrow \underbrace{y_i = 0 + c_i\cdot\frac{(x_i-x_{i-1})^3}{6h} + \alpha_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + y_{i-1} - c_{i-1}\frac{h^2}{6}}$$

$$\underbrace{y_i = c_i\cdot\frac{h^2}{6} + \alpha_{i-1}\cdot h + y_{i-1} - c_{i-1}\cdot\frac{h^2}{6}}$$

$$\alpha_{i-1} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h} - \frac{h}{6}(c_i - c_{i-1})$$

Para tener $\alpha_{i-1}$ y $\beta_{i-1}$ entonces nos harán falta los $c_i$'s que se calcularán como la solución al siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ 1/2 & 2 & 1/2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & 1/2 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1/2 & 2 & 1/2 \\ 0 & \cdots & & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_{N-1} \\ c_N \end{bmatrix} = \frac{3}{h^2}\begin{bmatrix} 0 \\ y_2 - 2y_1 + y_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_N - 2y_{N-1} + y_{N-2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

**Proposición.**

$f \in C^4([a,b])$

$$\boxed{\begin{array}{l} j = 0,1,2,3 \Rightarrow \|f^{j)} - S_N^2 f^{j)}\|_\infty \le K_j h^{4-j} \|f^{4)}\|_\infty \\ K_0 = 5/384 \quad K_1 = 1/24 \quad K_2 = 3/8 \quad K_3 = 1 \end{array}}$$

Esto viene a decir que la spline cúbica de una función 4 veces derivable se aproxima a $f$ y a cada una de sus respectivas derivadas. No se ha visto la demostración.

Proposición.

$P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b\}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g \in C^2([a,b])$ :

$$\forall i \in \{0, \ldots, N\} \Rightarrow f(x_i) = g(x_i)$$

Si $s$ es el spline cúbico natural que satisface la misma condición de interpolación, entonces

$$\boxed{\int_a^b s''(x)^2\,dx \leq \int_a^b g''(x)^2\,dx}$$

Tampoco se demostró en clase.