Soluciones del examen de Geometría III, Grado en Matemáticas (UGR) celebrado el 3 de febrero de 2015

Profesor: Miguel Ortega Titos

1.– Se consideran los subespacios afines S_1, S_2 de $\mathbb{R}^4$ dados por:

$$S_1 : \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + x_3 + x_4 = 2, \end{cases}$$

$$S_2 = (1, 0, \lambda, 0) + L(\{(0, 1, -1, 1), (1, 0, -1, 1)\})$$

Calcular la suma afín $S_1 \vee S_2$ y la intersección $S_1 \cap S_2$ en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$.

Solución: En primer lugar, calculamos las ecuaciones implícitas de S_2. En un primer paso, calculamos las ecuaciones de $\vec{S}_2$. Para ello, consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como (x_1, x_2, x_3, x_4) ha de ser combinación lineal de los otros dos vectores, entoces el rango de A ha de ser igual a dos, así que extraemos los dos siguientes determinantes:

$$0 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad 0 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Desarrollando, obtenemos

$$\vec{S}_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \ x_1 + x_2 - x_4 = 0\}.$$

Imponiendo ahora que $(1, 0, \lambda, 0) \in S_2$, tenemos

$$S_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1 + x_2 + x_3 = 1 + \lambda, \ x_1 + x_2 - x_4 = 1\}.$$

Con esto, calculamos la intersección $S_1 \cap S_2$:

$$S_1 \cap S_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1 + x_2 + x_3 = 1 + \lambda, \ x_1 + x_2 - x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0, \ x_1 + x_3 + x_4 = 2\}.$$

Escribimos el sistema en forma matricial y lo simplificamos por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1+\lambda \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & (3+\lambda)/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(1+\lambda)/2 \end{pmatrix}$$

Caso $\lambda \neq -1$: La última ecuación se habría transformado en $0 = -(1 + \lambda)/2 \neq 0$, por lo que el sistema es incompatible. Esto significa que $S_1 \cap S_2 = \emptyset$.

<u>Caso $\lambda = -1$:</u> La última ecuación es ahora $0 = 0$, así que el sistema es compatible inderminado con un grado de libertad, es decir, $\dim S_1 \cap S_2 = 1$. Esto significa que $S_1 \cap S_2$ es una recta de ecuaciones

$$S_1 \cap S_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ : x_1 - x_2 - x_3 = 0,\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 2,\ x_3 + x_4 = 1\}.$$

Para calcular $S_1 \vee S_2$, ya sabemos por los cálculos anteriores que tenemos que distinguir los casos $\lambda = -1$ y $\lambda \neq -1$. De todas maneras, de los cálculos anteriores (prescindiendo de los términos independientes), sabemos que las ecuaciones homogéneas de $\overrightarrow{S}_1 \cap \overrightarrow{S}_2$ son $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_1 + x_2 - x_4 = 0$, $x_1 - x_2 - x_3 = 0$, $x_1 + x_3 + x_4 = 0$, que ya sabemos que se reducen a $x_1 - x_2 - x_3 = 0$, $x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$, $x_3 + x_4 = 0$. Por tanto, $\dim \overrightarrow{S}_1 \cap \overrightarrow{S}_2 = 1$.

<u>Caso $\lambda \neq -1$:</u> Como sabemos que $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, entonces $\dim S_1 \vee S_2 = \dim S_1 + \dim S_2 + 1 - \dim \overrightarrow{S}_1 \cap \overrightarrow{S}_2 = 2 + 2 + 1 - 1 = 4$. Es decir, $S_1 \vee S_2 = \mathbb{R}^4$.

<u>Caso $\lambda = -1$:</u> Ahora, $\dim S_1 \vee S_2 = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim S_1 \cap S_2 = 2 + 2 - 1 = 3$. Recordemos que $\overrightarrow{S_1 \vee S_2} = \overrightarrow{S}_1 + \overrightarrow{S}_2$. Como sí conocemos una base de $\overrightarrow{S}_2$, vamos a calcular una base de $\overrightarrow{S}_1$. De las ecuaciones de S_1 obtenemos las de $\overrightarrow{S}_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R} : x_1 - x_2 - x_3 = 0, x_1 + x_3 + x_4 = 0\}$. Así, tenemos $x_3 = x_1 - x_2$, $x_4 = -2x_1 + x_2$, por lo que $(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1(1, 0, 1, -2) + x_2(0, 1, -1, 1)$. La base buscada de $\overrightarrow{S}_1$ es $\{(1, 0, 1, -2), (0, 1, -1, 1)\}$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{S}_1 + \overrightarrow{S}_2 &= L(\{(1, 0, 1, -2), (0, 1, -1, 1), (0, 1, -1, 1), (1, 0, -1, 1)\}) \\ &= L(\{(1, 0, 1, -2), (0, 1, -1, 1), (1, 0, -1, 1)\})\end{aligned}$$

Finalmente, tomando un punto de S_2, digamos $p = (1, 0, -1, 0)$, tenemos

$$S_1 \vee S_2 = (1, 0, -1, 0) + L(\{(1, 0, 1, -2), (0, 1, -1, 1), (1, 0, -1, 1)\}).$$

2.– Se considera la aplicación:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

1. Justificar que f es una aplicación afín de $\mathbb{R}^3$.
2. Justificar que es una isometría afín de $\mathbb{R}^3$.
3. En su caso, clasificar dicha isometría.

Solución: En primer lugar, f se puede escribir como $f(p) = b + Mp$, donde M es la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix},$$

y $b^t = (1, 1, 1)$ es el vector de términos independientes. Esto significa que la apliación asociada $\overrightarrow{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{f}(v) = Mv$, es claramente lineal, luego f es una apliación afín.

En segundo lugar, mediante un cálculo directo se comprueba que $MM^t = I_3$ (la matriz identidad de orden 3), por lo que f es un movimiento rígido de $\mathbb{R}^3$.

Para clasificar f, veamos primero si es directo o inverso. Para ello calculamos $\det M = -1$, por lo que es inverso. A simple vista, se ve que la matriz es simétrica, luego diagonalizable. Esto significa que la aplicación lineal asociada es diagonalizable. Con ambos datos, f puede ser una simetría respecto de un plano o la simetría respecto de un punto (también llamada simetría central). Como la matriz M es distinta de menos la identidad, entonces f ha de ser una simetría respecto de un plano. Solamente queda calcular su plano de simetría, que es igual al conjunto de puntos fijos:

$$P_f = \left\{p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : Mp^t + b = p^t\right\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 3/2\}.$$

4.– Clasificar la siguiente cónica de $\mathbb{R}^2$ en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$x^2 + y^2 + 2\lambda xy + 2x + 2y + 1 = 0.$$

Solución: Consideremos las dos matrices asociadas a la cónica:

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

Como $\det M = 1 - \lambda^2$ y $\det \tilde{M} = -(\lambda - 1)^2$, aparecen tres casos, según las raíces de las ecuaciones $\det M = 0$ y $\det \tilde{M} = 0$.
Caso $\lambda = 1$ Es claro que los rangos son $r = \text{rango}(M) = R = \text{rango}(\tilde{M}) = 1$. La ecuación queda $0 = x^2+y^2+2xy+2x+2y+1 = (x+y)^2+2(x+y)+1 = (x+y+1)^2$. Es decir, se reduce a la recta afín de ecuación $x + y + 1 = 0$. Dicho de otro modo, la cónica es la recta doble de ecuación $(x + y + 1)^2 = 0$.

Caso $\lambda = -1$ Ahora, los rangos son $r = \text{rango}(M) = 1$, $R = \text{rango}(\tilde{M}) = 3$. Es inmediato que esta cónica es una parábola.

Caso $\lambda \neq \pm 1$ Ahora, los rangos son $r = \text{rango}(M) = 2$, $R = \text{rango}(\tilde{M}) = 3$, por lo que la cónica es o bien el vacío, o bien una elipse, o bien una hipérbola. Calculamos los valores propios de M:

$$P_M(a) = \begin{vmatrix} 1 - a & \lambda \\ \lambda & 1 - a \end{vmatrix} = a^2 - 2a + (1 - \lambda^2).$$

Si $|\lambda| > 1$, entonces $1 - \lambda^2 < 0$. Usando el Teorema de Descartes, el polinomio $P_M(a)$ tendrá entonces una raíz positiva y una negativa. En este caso, la cónica es una hipérbola.
Si $|\lambda| < 1$, entonces $1 - \lambda^2 > 0$. Usando el Teorema de Descartes, el polinomio $P_M(a)$ tendrá entonces dos raíces positivas. Pero en este caso, $\det \tilde{M} = -(1 - \lambda)^2 < 0$, luego $\tilde{M}$ admite al menos un valor propio negativo (recordemos que $\det \tilde{M}$ es igual al producto de los tres valores propios). Por tanto, no puede ser el vacío, y es una elipse.

Alternativamente, el polinomio característico de $\tilde{M}$ es

$$P_{\tilde{M}}(a) = \begin{vmatrix} 1 - a & 1 & 1 \\ 1 & 1 - a & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 - a \end{vmatrix} = -a^3 + 3a^2 + (\lambda^2 - 1)a - (\lambda - 1)^2.$$

Como $|\lambda| < 1$, por el Teorema de Descartes, el polinomio $P_{\tilde{M}}(a)$ admite dos raíces positivas y una negativa. Por tanto, la cónica es una elipse.

5.– Encontrar **una** proyectividad $f : \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^3$ tal que:

1. $f(H_\infty) = H_\infty$, y
2. $f((0:1:1:1)) = (-1:1:-1:1)$.

H_∞ es el hiperplano del infinito asociado al embebimiento canónico $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{P}^3$.
Solución: Sea $\pi : \mathbb{R}^4 \backslash \{0\} \to \mathbb{P}^3$ la proyección. Recordemos que si denotamos $\mathbf{i} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ a la aplicación $\mathbf{i}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3, 1)$, para todo $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, entonces el plano del infinito es $H_\infty = \mathbb{P}^3 \backslash \pi(\mathbf{i}(\mathbb{R}^3))$. Por otro lado, recordemos que $\widehat{H_\infty} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_4 = 0\}$. Necesitamos, pues, una aplicación lineal inyectiva $\hat{f} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ que cumpla las dos siguientes condiciones:

$$\hat{f}(\widehat{H_\infty}) = \widehat{H_\infty}, \quad \hat{f}(0,1,1,1) = (-1,1,-1,1).$$

Como observación, se podía haber tomado cualquier múltiplo no nulo de $(-1,1,-1,1)$.
Sea $B_o = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base usual de $\mathbb{R}^4$. Para construir una aplicación lineal, necesitamos definir la imagen de una base del espacio. Ampliamos $\{(0,1,1,1)\}$ a una base sencilla de $\mathbb{R}^4$ de manera que los tres nuevos vectores pertenezcan al conjunto $\widehat{H_\infty}$. Por ejemplo, escogemos

$$B = \{e_1 = (1,0,0,0), e_2 = (0,1,0,0), e_3 = (0,0,1,0), v = (0,1,1,1)\}.$$

Con las datos anteriores, construimos $\hat{f}$ por linealidad imponiendo las siguientes condiciones:

$$\hat{f}(e_1) = e_1,\ \hat{f}(e_2) = e_2,\ \hat{f}(e_3) = e_3,\ \hat{f}(0,1,1,1) = (-1,1,-1,1).$$

Usando el cambio de notación $(-1,1,-1,-1) = -e_1 + e_2 - e_3 + e_4$, como $\hat{f}$ va a ser lineal, obtenemos la siguiente ecuación

$$\hat{f}(e_2) + \hat{f}(e_3) + \hat{f}(e_4) = -e_1 + e_2 - e_3 + e_4.$$

Un cálculo sencillo devuelve

$$\hat{f}(e_4) = -e_1 - 2e_3 + e_4.$$

Por tanto, una solución es $\hat{f} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, la única aplicación lineal cuya matriz respecto de la base usual es

$$M_{B_o}(\hat{f}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nótese que $\det M_{B_o}(\hat{f}) = 1$, por lo que $\hat{f}$ es inyectiva. Recordando que $\pi : \mathbb{R}^4 \backslash \{0\} \to \mathbb{P}^3$ es la proyección, entonces la proyectividad buscada es la única aplicación $f : \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^3$ tal que $\pi \circ \hat{f} = f \circ \pi$. Finalmente, si $(x : y : z : 0) \in H_\infty$, entonces $f(x : y : z : 0) = \pi(\hat{f}(x, y, z, 0)) = \pi(x, y, z, 0) \in H_\infty$. Además, $f(0 : 1 : 1 : 1) = \pi(\hat{f}(0,1,1,1)) = \pi(-1,1,-1,1)$.