0.i) Demostrar:

$$f \in \Theta(g) \Leftrightarrow \exists c, d \in \Re^+, n_0 \in \aleph / n \geq n_0, d \cdot g(n) \leq f(n) \leq c \cdot g(n)$$

$\Rightarrow$

Supongamos que $f \in \theta(g) \Rightarrow \begin{cases} f \in O(g) \Rightarrow \exists n_1 \in \aleph, c > 0 / n \geq n_1, f(n) \leq c \cdot g(n) \\ f \in \Omega(g) \Rightarrow \exists n_2 \in \aleph, d > 0 / n \geq n_2, f(n) \geq d \cdot g(n) \end{cases}$

Sea n_0 = máximo $\{n_1, n_2\}$ => se da simultáneamente 1 y 2.

Por tanto: $n \geq n_0, \quad d \cdot g(n) \leq f(n) \leq c \cdot g(n)$

$\Leftarrow \qquad \exists n_0 \in \aleph, c \in \Re^+ / n \geq n_0, f(n) \leq c \cdot g(n) \Rightarrow f \in O(g)$

$\qquad \exists n_0 \in \aleph, d \in \Re^+ / n \geq n_0, f(n) \geq d \cdot g(n) \Rightarrow f \in \Omega(g)$

Luego $f \in \Theta(g)$

1.i) Demostrar:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} \in \Re^+ \Rightarrow f(n) \in \Theta(g(n))$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = L \in \Re^+ \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \aleph / n \geq n_0, \left| \frac{f(n)}{g(n)} - L \right| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < \frac{f(n)}{g(n)} - L < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L - \varepsilon < \frac{f(n)}{g(n)} < L + \varepsilon \Rightarrow (L - \varepsilon) \cdot g(n) < f(n) < (L + \varepsilon) \cdot g(n)$$

$(g(n) \in \Re^+) \quad Sea\ \varepsilon < L,\ d = (L - \varepsilon) > 0,\ c = (L + \varepsilon) > 0$

$Entonces\ d \cdot g(n) < f(n) < c \cdot g(n) \Rightarrow (demostración\ ejercicio\ 0.i) \Rightarrow f(n) \in \Theta(g(n))$

0.i $f \in \Theta(g) \Leftrightarrow \exists c, d \in \Re^+, n_0 \in \aleph / n \geq n_0, d \cdot g(n) \leq f(n) \leq c \cdot g(n)$

1.ii) Demostrar:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \Rightarrow f(n) \in O(g(n))\ \ pero\ \ f(n) \notin \Theta(g(n))$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \aleph / n \geq n_0, \left| \frac{f(n)}{g(n)} \right| < \varepsilon \underset{(f(n), g(n) \in \Re^+)}{\Rightarrow} \frac{f(n)}{g(n)} < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(n) < \varepsilon \cdot g(n) \Rightarrow f(n) \in O(g(n))$$

$Supongamos\ f(n) \in \Theta(g(n)) \Rightarrow f(n) \in \Omega(g(n)) \Rightarrow \exists c > 0, n_0 \in \aleph / n \geq n_0, f(n) \geq c \cdot g(n) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{f(n)}{g(n)} \geq c$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} \geq \lim_{n \to \infty} c \Rightarrow 0 \geq c \quad (absurdo!)$$

$Luego\ f(n) \notin \Theta(g(n))$

1.iii) Demostrar:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = +\infty \Rightarrow f(n) \in \Omega(g(n)) \ \ pero \ \ f(n) \notin \Theta(g(n))$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0 \Rightarrow \begin{cases} g(n) \in O(f(n)) \Rightarrow \underset{(ejercicio\,0.ii)}{\Rightarrow} f(n) \in \Omega(g(n)) \\ g(n) \notin \Omega(f(n)) \Rightarrow f(n) \notin O(g(n)) \underset{(ejercicio\,0.i)}{\Rightarrow} f(n) \notin \Theta(g(n)) \end{cases}$$

2.c) Demostrar: $f \in O(g), g \in O(h) \Rightarrow f \in O(h)$

$f \in O(g) \Rightarrow \exists n_1 \in \aleph, c_1 > 0 \,/\, \forall n \geq n_1,\, f(n) \leq c_1 \cdot g(n)$

$g \in O(h) \Rightarrow \exists n_2 \in \aleph, c_2 > 0 \,/\, \forall n \geq n_2,\, g(n) \leq c_2 \cdot h(n)$

$Sea\ n_0 = \max\{n_1, n_2\}$

$\forall n \geq n_0,\, f(n) \leq c_1 \cdot g(n) \leq (c_1 \cdot c_2) \cdot g(n) \underset{d=(c_1 \cdot c_2)>0}{=} d \cdot h(n)$

$Luego\ f \in O(h)$

2.g) Demostrar: $Max(n^3, 10n^2) \in O(n^3)$

$Sea\ n_0 = 11,\ c = 1 \qquad n \geq n_0 = 11,\ \max(n^3, 10n^2) = n^3 \leq 1 \cdot n^3 \Rightarrow \max(n^3, 10n^2) \in O(n^3)$

3.i) Demostrar: $f(n) \in O(n^a),\ g(n) \in O(n^b) \Rightarrow f(n) \cdot g(n) \in O(n^{a+b})$

$$f(n) \cdot g(n) \underset{\substack{regla\ del \\ producto}}{\in} O(n^a \cdot n^b) = O(n^{a+b})$$

3.ii) Demostrar: $f(n) \in O(n^a),\ g(n) \in O(n^b) \Rightarrow f(n) + g(n) \in O(n^{\max\{a,b\}})$

$$f(n) + g(n) \underset{\substack{regla\ de \\ la\ suma}}{\in} O(\max(n^a, n^b) = O(n^{\max\{a,b\}})$$

4. Encontrar el menor entero *k* tal que $f(n) \in O(n^k)$

i) $f(n) = 13n^2 + 4n - 73$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{13n^2 + 4n - 73}{n^k} = \begin{cases} +\infty & k < 2 \Rightarrow f(n) \notin O(n^k) \\ 13 & k = 2 \Rightarrow f(n) \in O(n^k) \\ 0 & k > 2 \Rightarrow f(n) \in O(n^k) \end{cases}$$

$Luego\ k = 2$

vi)

$f(n)=\sqrt{n^2-1}$

$n^2-1\leq n^2+n^2=2\cdot n^2,\forall n \quad\Rightarrow\quad \sqrt{n^2-1}\leq\sqrt{2}\cdot n,\forall n \quad\Rightarrow\quad \sqrt{n^2-1}\in O(n)=O(n^1)$

$Supongamos\,\sqrt{n^2-1}\in O(n^0)=O(1)\Rightarrow\exists n_0\in\aleph,c>0\,/\,\forall n\geq n_0,\sqrt{n^2-1}\leq c\cdot 1=c$

$Sea\ n_1=c+n_0>n_0\Rightarrow\sqrt{n_1^2-1}\leq c\Rightarrow\sqrt{c^2+n_0^2+2cn_0-1}\leq c\Rightarrow c^2+n_0^2+2cn_0-1\leq c\Rightarrow$
$\Rightarrow n_0^2+2cn_0-1\leq 0\Rightarrow n_0^2+2cn_0-1\leq 1$

$Pero\ el\ m\acute{\imath}nimo\ valor\ para\ n_0=1\Rightarrow 1+2c\leq 1\Rightarrow 2c\leq 0\Rightarrow c\leq 0\quad(absurdo!)$

$Luego\,\sqrt{n^2+1}\notin O(n^0)=O(1)$

$$\left.\begin{array}{l} Supongamos\,\exists k<0\ tal\ que\,\sqrt{n^2-1}\in O(n^k) \\ \quad \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{n^0}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^{-k}}=0\Rightarrow n^k\in O(n^0)\end{array}\right\}\sqrt{n^2-1}\in O(n^0)\quad(absurdo!)$$

$Esto\ implica\ que\ \neg\exists k<0\,/\,\sqrt{n^2-1}\in O(n^k)$

$Luego\ k=1$

6. Sean f(n) y g(n) asintóticamente no negativas. Demostrar la veracidad o falsedad de:

6.a) $Max(f(n),g(n))\in O(f(n)+g(n))$

$Max(f(n),g(n))\leq f(n)+g(n),\ \forall n \underset{\substack{n_0=1\\c=1}}{\Rightarrow} Max(f(n),g(n))\in O(f(n)+g(n))$

6.b) $Max(f(n),g(n))\in\Omega(f(n)+g(n))$

$Max(f(n),g(n))\geq\frac{1}{2}(f(n)+g(n)),\forall n \underset{\substack{n_0=1\\c=1/2}}{\Rightarrow} Max(f(n),g(n))\in\Omega(f(n)+g(n))$

7. Expresar en notación ***O*** el orden de un algoritmo cuyo T(n) fuese f(n) si:

7.b) $T(n)=n!$

$n!\in O(n!)$ (como cota menor)
También:
$n!=n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot 1\leq n\cdot n\cdot n\cdot\cdots\cdot n=n^n\Rightarrow n!\in O(n^n)$
O también (por 7.a) $n!=2^{\log_2(n!)}\leq 2^{n\cdot\log_2 n}$
En general: $n!\in O(a^{n\cdot\log_a n})\quad\forall a>1$
Que es lo mismo que la expresión anterior, ya que $a^{n\cdot\log_a n}=a^{\log_a n^n}=n^n$

9. Decir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y demostrarlo:

9.a) $2^{n+1} \in O(2^n)$ *Cierto*

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n, \quad \forall n \underset{\substack{n_0=1 \\ c=2}}{\Rightarrow} 2^{n+1} \in O(2^n)$$

9.b) $(n+1)! \in O(n!)$ *Falso*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)\cdot n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)} = 0 \Rightarrow \quad n! \notin \Omega((n+1)!) \quad \Rightarrow \quad (n+1)! \notin O(n!)$$

9.c) $\forall f : \aleph \to \Re^+, f(n) \in O(n) \Rightarrow f^2(n) \in O(n^2)$ *Cierto*

$$f(n) \in O(n) \Rightarrow \exists n_0 \in \aleph, c > 0 \,/\, \forall n \geq n_0, f(n) \leq c \cdot n \Rightarrow f^2(n) \leq c^2 \cdot n^2 \Rightarrow f^2(n) \in O(n^2)$$

9.d) $\forall f : \aleph \to \Re^+, f(n) \in O(n) \Rightarrow 2^{f(n)} \in O(2^n)$ Falso

Sea $f(n) = 2n$

$2^{f(n)} = 2^{2n} = 4^n$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{4^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{4}\right)^n = 0$$

Luego $2^n \notin \Omega(4^n) \Rightarrow 4^n \notin O(2^n) \Rightarrow 2^{f(n)} \notin O(2^n)$ ($f(n)$ *es un contraejemplo*)

10. Sea x un número real, 0<x<1. Ordenar las tasas de crecimiento de las siguientes funciones:

$$n \cdot \log(n), \quad n^8, \quad (1+x)^n, \quad (n^2 + 8n + \log^3(n))^4, \quad \frac{n^2}{\log(n)}$$

$n^2 + 8n + \log^3(n) \in O(n^2)$, *ya que*

$$\underset{n\to\infty}{Lim}\frac{n^2}{\log^3(n)} = \underset{n\to\infty}{Lim}\frac{2n}{3\cdot\frac{1}{n}\cdot\log^2(n)} = \underset{n\to\infty}{Lim}\frac{2n^2}{3\cdot\log^2(n)} = \underset{n\to\infty}{Lim}\frac{2n^2}{3\cdot\log^2(n)} = \underset{n\to\infty}{Lim}\frac{4n^2}{6\cdot\log^2(n)} =$$

$$= \underset{n\to\infty}{Lim}\frac{8n^2}{6} = +\infty \Rightarrow \log^3(n) \in O(n^2)$$

$$Si\ f(n) \in O(n^2) \Rightarrow \exists n_0 \in \aleph, c > 0 \ /\ \forall n \ge n_0,\ f(n) \le c\cdot n^2 \Rightarrow f(n)^4 \le c^4 \cdot n^8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(n)^4 \in O(n^8) \Rightarrow (n^2 + 8n + \log^3(n))^4 \in O(n^8)$$

$$Además\quad (n^2 + 8n + \log^3(n))^4 \ge n^8 \underset{\substack{n_0=1\\ c=1}}{\Rightarrow} n^8 \in O((n^2 + 8n + \log^3(n))^4)$$

$$Luego\quad O(n^8) = O((n^2 + 8n + \log^3(n))^4)$$

$$\underset{n\to\infty}{Lim}\frac{(1+x)^n}{n^8} = \underset{n\to\infty}{Lim}\frac{(1+x)^n\cdot\log_{1+x} e}{8n^7} = \cdots = \underset{n\to\infty}{Lim}\frac{(1+x)^n\cdot\log^8_{1+x} e}{8!} = +\infty \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n^8 \in O((1+x)^n) \\ n^8 \notin \Omega((1+x)^n) \Rightarrow (1+x)^n \notin O(n^8) \end{cases}$$

$$Luego\quad O(n^8) \lhd O((1+x)^n)$$

$$O((n^2 + 8n + \log^3(n))^4) \lhd ((1+x)^n)$$

$$\underset{n\to\infty}{Lim}\frac{n^8}{\frac{n^2}{\log(n)}} = \underset{n\to\infty}{Lim}\, n^6\cdot\log(n) = \infty \Rightarrow \begin{cases} \frac{n^2}{\log(n)} \in O(n^8) \\ n^8 \notin O\left(\frac{n^2}{\log(n)}\right) \end{cases}$$

$$Luego\ O\left(\frac{n^2}{\log(n)}\right) \lhd O(n^8)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{\log(n)}}{n^{1+x}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^{1+x}\cdot\log(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{(1+x)\cdot n^x\cdot\log(n)+n^x} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n^x\cdot[(1+x)\cdot\log(n)+1]} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^{1-x}}{(1+x)\cdot\log(n)+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot(1-x)\cdot n^x}{(1+x)\cdot\frac{1}{n}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} 2\cdot\frac{(1-x)}{(1+x)}\cdot n^{1+x} = +\infty \Rightarrow \begin{cases} n^{1+x}\in O\left(\frac{n^2}{\log(n)}\right) \\ \frac{n^2}{\log(n)}\notin O(n^{1+x}) \end{cases}$$

$$Luego\ O(n^{1+x}) \triangleleft O\left(\frac{n^2}{\log(n)}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot\log(n)}{n^{1+x}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\log(n)}{(1+x)\cdot n^x} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{-1}}{x\cdot(1+x)\cdot n^{x-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{x\cdot(1+x)\cdot n^x} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n\cdot\log(n)\in O(n^{1+x}) \\ n^{1+x}\notin O(n\cdot\log(n)) \end{cases}$$

$$Luego\ O(n\cdot\log(n)) \triangleleft O(n^{1+x})$$