Geometría I: Tema 3
Aplicaciones lineales

Juan de Dios Pérez

Índice

1. Introducción.

Sean V y V' dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K y $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación. Diremos que f es una aplicación lineal (u homomorfismo de espacios vectoriales) si f verifica las siguientes condiciones

1. $\forall\, u, v \in V,\ f(u+v) = f(u) + f(v)$.

2. $\forall\, a \in K\ \forall\, v \in V,\ f(av) = af(v)$.

Hemos de hacer notar que, de nuevo, abusamos de la notación, pues las sumas en V y en V' no tienen por qué coincidir, aunque para simplificar las representemos por el mismo símbolo. Lo mismo ocurre con el producto por escalares en ambos espacios.

Ejemplo 1. 1. Dado $V(K)$, la aplicación $1_V : V \longrightarrow V$ es claramente lineal, pues $\forall\, u, v \in V$ y $\forall\, a \in K$, $1_V(u+v) = u + v = 1_V(u) + 1_V(v)$ y $1_V(au) = au = a1_V(u)$.
Análogamente, si U es un subespacio vectorial de V e $i_U : U \longrightarrow V$ es la aplicación de inclusión, i_U es lineal: $\forall\, u_1, u_2 \in U$, $\forall\, a \in K$, $i_U(u_1+u_2) = u_1+u_2 = i_U(u_1)+i_U(u_2)$ e $i_U(au_1) = au_1 = ai_U(u_1)$.

2. Sean V y V' espacios vectoriales arbitrarios y la aplicación constante 0; $0 : V \longrightarrow V'$ tal que $0(v) = 0$, $\forall\, v \in V$. Es inmediato comprobar que 0 es lineal. Pero si $v' \in V'$ es $v' \neq 0$, la aplicación constante $c_{v'} : V \longrightarrow V'$ dada por $c_{v'}(u) = v'$, $\forall\, u \in V$ no es lineal. Si lo fuese, $\forall\, u, v \in V$ tendríamos $c_{v'}(u+v) = v' = c_{v'}(u)+c_{v'}(v) = v'+v' = 2v'$, lo que nos llevaría a que $v' = 0$ en contra de nuestra hipótesis.

3. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la aplicación dada por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3)$. Veamos que esta aplicación es lineal: sean $a \in K, (x_1, x_2, x_3), (x'_1, x'_2, x'_3) \in \mathbb{R}^3$. Entonces $f((x_1, x_2, x_3)+(x'_1, x'_2, x'_3)) = f(x_1+x'_1, x_2+x'_2, x_3+x'_3) \overset{(*)}{=} (x_1+x'_1+x_2+x'_2, x_2+x'_2+x_3+x'_3) = (x_1+x_2, x_2+x_3)+(x'_1+x'_2, x'_2+x'_3) = f(x_1, x_2, x_3) + f(x'_1, x'_2, x'_3)$.
Además, $f(a(x_1, x_2, x_3)) = f(ax_1, ax_2, ax_3) \overset{(*)}{=} (ax_1 + ax_2, ax_2 + ax_3) = a(x_1 + x_2, x_2 + x_3) = af(x_1, x_2, x_3)$, donde en $*$ hemos aplicado la definición de f.

4. La aplicación $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x_1, x_2) = (x_1^2, x_2)$ no es lineal. Si lo fuese, $f(2, 2) = (4, 2) = 2f(1, 1) = 2(1, 1) = (2, 2)$, lo que es imposible ya que $4 \neq 2$.

5. La aplicación $t : \mathcal{M}_{m\times n}(K) \longrightarrow \mathcal{M}_{n\times m}(K)$ tal que $t(A) = A^t$ es lineal por las propiedades que ya conocemos.

Como en el caso de los subespacios vectoriales, las dos condiciones de la definición de aplicación lineal se pueden resumir en una única condición:

Proposición 1.
Una aplicación $f : V \longrightarrow V'$ donde V y V' son espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K es lineal si y solo si $\forall\, a, b \in K$ y $\forall\, u, v \in V$ se tiene $f(au + bv) = af(u) + bf(v)$.

Demostración. Para demostrar la primera implicación, supongamos que f es lineal. En las condiciones que tenemos $f(au+bv) \overset{(*)}{=} f(au)+f(bv) \overset{(**)}{=} af(u)+bf(v)$, donde en $*$ aplicamos la primera condición para que f sea lineal y en $**$ la segunda.
Para demostrar el recíproco, partimos de que se cumple la nueva condición $f(au+bv) = af(u)+bf(v)$ y hemos de ver que se dan las dos condiciones que aparecen en la definición de aplicación lineal: así, si tomamos $u, v \in V$ y $a = b = 1 \in K$, tendríamos que $f(u+v) = f(1\cdot u+1\cdot v) = 1f(u)+1f(v) = f(u)+f(v)$ y se da la primera condición y tomando $v = u, b = 0$, se tiene que $f(au) = f(au+0\cdot u) = af(u)+0f(u) = af(u)$, obteniendo la segunda condición. □

De la definición de aplicación lineal y la caracterización que acabamos de ver, tenemos las siguientes propiedades genéricas para una aplicación lineal $f : V \longrightarrow V'$ (a partir de ahora no mencionaremos el cuerpo K, salvo que tengamos que hacer elecciones de escalares):

1. $f(0) = 0$, que se sigue de que $f(0) = f(0+0) = f(0)+f(0)$, con lo que, restando $f(0)$ en los dos miembros, obtenemos el resultado.

2. $f(-u) = -f(u)$, pues $f(-u) = f((-1)\cdot u) = (-1)f(u) = -f(u)$.

3. $\forall\, a_1, \ldots, a_n \in K$, $\forall\, u_1, \ldots, u_n \in V$, $f(a_1u_1+a_2u_2+\cdots+a_nu_n) = a_1f(u_1)+a_2f(u_2)+\cdots+a_nf(u_n)$.

   Demostración. Para demostrar esta propiedad, haremos una inducción sobre n: si $n = 2$, tenemos la caracterización que hemos visto antes. Supongamos que para $n-1 \geq 2$, se da que

   $$f(a_1u_1+a_2u_2+\cdots+a_{n-1}u_{n-1}) = a_1f(u_1)+a_2f(u_2)+\cdots+a_{n-1}f(u_{n-1}).$$

   Entonces

   $$f(a_1u_1+\cdots+a_{n-1}u_{n-1}+a_nu_n) = f((a_1u_1+\cdots+a_{n-1}u_{n-1})+(a_nu_n)) \overset{(*)}{=}$$

   $$\overset{(*)}{=} f(a_1u_1+\cdots+a_{n-1}u_{n-1})+f(a_nu_n) \overset{(**)}{=} a_1f(u_1)+\cdots+a_{n-1}f(u_{n-1})+a_nf(u_n),$$

   donde en $*$ hemos aplicado la primera propiedad de la definición de aplicación lineal y en $**$ la hipótesis de inducción y la segunda propiedad. □

Fijaos en que la primera propiedad de las anteriores da una condición necesaria para que una aplicación entre espacios vectoriales sea lineal: la imagen del 0 de V ha de ser el 0 de V'. Esta condición, sin embargo, no es suficiente: en el ejemplo número 4 anterior $f(0) = 0$, pero f no es lineal.

2. Núcleo e imagen de una aplicación lineal.

Definición 1.
Dada la aplicación lineal $f : V \longrightarrow V'$, definimos su núcleo mediante $Ker(f) = \{v \in V \,/\, f(v) = 0\}$ y su imagen como $Im(f) = \{f(v) \,/\, v \in V\}$.

Tenemos, entonces, que $\mathrm{Ker}(f)$ es un subconjunto de V, mientras que $\mathrm{Im}(f)$ lo es de V'. Lo importante es que ambos van a ser subespacios vectoriales de V y de V', respectivamente.
Para ver que $\mathrm{Ker}(f)$ es un subespacio vectorial de V, sean $a, b \in K$ y $u, v \in \mathrm{Ker}(f)$. Entonces $f(u) = f(v) = 0$ y $f(au + bv) = af(u) + bf(v) = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0$, y así, $au + bv \in \mathrm{Ker}(f)$.
Sean ahora $a, b \in K$, $u', v' \in \mathrm{Im}(f)$. Entonces $\exists\, u \in V$ tal que $f(u) = u'$ y $\exists\, v \in V$ tal que $f(v) = v'$. El vector $au + bv \in V$ verifica que $f(au + bv) = af(u) + bf(v) = au' + bv'$, y, por tanto, $au' + bv' \in \mathrm{Im}(f)$.

Tenemos, además, que si $\{v_1, \ldots, v_m\}$ es un sistema de generadores de V, $\{f(v_1), \ldots, f(v_m)\}$ es un sistema de generadores de $\mathrm{Im}(f)$. Para demostrar esto, sea $u' \in \mathrm{Im}(f)$. Entonces $\exists\, u \in V$ tal que $f(u) = u'$. Pero como $\{u_1, \ldots, u_m\}$ es un sistema de generadores de V, podremos encontrar escalares $a_1, \ldots, a_m \in K$ tales que $u = a_1u_1 + \cdots + a_mu_m$. Así, $u' = f(u) = f(a_1u_1 + \cdots + a_mu_m) = a_1f(u_1) + \cdots + a_mf(u_m)$. Luego cualquier vector de $\mathrm{Im}(f)$ lo podemos escribir como combinación lineal del conjunto $\{f(u_1), \ldots, f(u_m)\}$ que es, por tanto, un sistema de generadores de $\mathrm{Im}(f)$.
Consideremos el ejemplo 3 anterior. Como sistema de generadores de $\mathbb{R}^3$ podemos considerar la base usual $\mathcal{B}_U = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. Un sistema de generadores de $\mathrm{Im}(f)$ vendrá dado por $\{f(1, 0, 0) = (1, 0), f(0, 1, 0) = (1, 1), f(0, 0, 1) = (0, 1)\}$. Como $(1, 1) = (1, 0) + (0, 1)$ y estos dos últimos vectores nos dan la base usual de $\mathbb{R}^2$, podemos concluir que, en este caso, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$.
Si queremos calcular $\mathrm{Ker}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3) = (0, 0)\}$. Este núcleo, vendrá dado entonces por las condiciones $x_1 + x_2 = 0, x_2 + x_3 = 0$, que serán unas ecuaciones cartesianas suyas. Como son dos, la dimensión de $\mathrm{Ker}(f)$ será 1 y el vector $(1, -1, 1) \in \mathrm{Ker}(f)$ pues verifica las dos ecuaciones. Todo esto nos dice que $\mathrm{Ker}(f) = \mathcal{L}(\{(1, -1, 1)\})$.

3. Monomorfismos, epimorfismos e isomorfismos.

Sea $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal. Tenemos las siguientes definiciones:

- Si f es, además, inyectiva, diremos que f es un monomorfismo de espacios vectoriales.
- Si f es sobreyectiva, diremos que f es un epimorfismo de espacios vectoriales.
- Por último, si f es biyectiva (a la vez monomorfismo y epimorfismo), diremos que f es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Veamos cómo $\mathrm{Ker}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ nos permiten caracterizar estos tipos de aplicaciones lineales:

Proposición 2.
Dada una aplicación lineal $f : V \longrightarrow V'$, se verifica que

1. *f es un monomorfismo si y solo si $Ker(f) = \{0\}$.*
2. *f es un epimorfismo si y solo si $Im(f) = V'$.*

Demostración. Para demostrar la primera condición, supongamos, en primer lugar, que f es inyectiva y que $v \in \mathrm{Ker}(f)$ es un vector suyo arbitrario. Entonces $f(v) = 0$, pero sabemos que $f(0) = 0$ y, por tanto,

$f(v) = f(0)$. Como f es inyectiva esto implica que $v = 0$ y, así, $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.
Recíprocamente, supongamos que $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ y que $u, v \in V$ son tales que $f(u) = f(v)$. Entonces $f(u - v) = f(u) - f(v) = 0$, con lo cual $u - v \in \mathrm{Ker}(f)$. Como se reduce a $\{0\}$, tendremos que $u = v$ y, por tanto, f es inyectiva.

La segunda condición es la definición de que f es sobreyectiva. □

Tenemos a continuación sendas caracterizaciones para las definiciones de monomorfismo y epimorfismo:

Proposición 3.
Dada una aplicación lineal $f : V \longrightarrow V'$, tenemos que:

1. *f es un monomorfismo si y solo si para cada conjunto linealmente independiente en V, $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, el conjunto $\{f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)\}$ es linealmente independiente en V'.*

   Demostración. Para verlo, supongamos, en primer lugar, que f es inyectiva. Sea $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ linealmente independiente en V y suponemos que $\{f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)\}$ admite una combinación lineal
   $$a_1 f(v_1) + \cdots + a_n f(v_n) = 0.$$
   Como f es lineal lo anterior nos da que $f(a_1v_1+\cdots+a_nv_n) = 0 = f(0)$. Entonces $a_1v_1+\cdots+a_nv_n = 0$ (f es inyectiva) y, como $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es linealmente independiente, $a_1 = \cdots = a_n = 0$, con lo que $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ es también linealmente independiente.
   Recíprocamente, supongamos que se verifica el recíproco. Queremos ver que f es inyectiva para lo que será suficiente con ver que $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$. Sea entonces $v \in \mathrm{Ker}(f)$. Entonces $\{f(v)\} = \{0\}$ es linealmente dependiente. Pero por lo que hemos supuesto, $\{v\}$ ha de ser también linealmente dependiente y eso solo se puede dar si $v = 0$. □

2. *f es un epimorfismo si y solo si para cada sistema de generadores de V, $\{u_1, \ldots, u_m\}$, el conjunto $\{f(u_1), \ldots, f(u_m)\}$ es un sistema de generadores de V'.*

   Demostración. Como f es sobreyectiva si y solo si $\mathrm{Im}(f) = V'$, el resultado es inmediato. □

4. Operaciones con aplicaciones lineales.

Dados los espacios vectoriales V y V' sobre el cuerpo K, notaremos $\mathrm{Hom}_K(V, V') = \{f : V \longrightarrow V' \,/\, f \text{ es una aplicación lineal}\}$. En este conjunto definimos las siguientes operaciones:

- Suma de aplicaciones lineales: dadas $f, g \in \mathrm{Hom}_K(V, V')$ definimos $f + g : V \longrightarrow V'$ mediante $(f+g)(v) = f(v)+g(v), \forall\, v \in V$. Veamos que $f+g \in \mathrm{Hom}_K(V, V')$. Para ello, sean $a, b \in K,\ v, w \in V$. Entonces $(f + g)(av + bw) = f(av + bw) + g(av + bw) = af(v) + bf(w) + ag(v) + bg(w) \overset{(*)}{=} af(v) + ag(v) + bf(w) + bg(w) \overset{(**)}{=} a(f(v) + g(v)) + b(f(w) + g(w)) = a(f + g)(v) + b(f + g)(w)$, donde en $*$ aplicamos la conmutatividad de la suma en V' y en $**$ la distributividad del producto por escalares con respecto a la suma.

- Producto por escalares: dados $a \in K$ y $f \in \mathrm{Hom}_K(V, V')$, definimos $af : V \longrightarrow V'$ mediante $(af)(v) = af(v), \forall\, v \in V$. Podemos ver, de nuevo, que $af \in \mathrm{Hom}_K(V, V')$: sean $b, c \in K$ y $v, w \in V$, entonces $(af)(bv + cw) = af(bv + cw) = a(bf(v) + cf(w)) = abf(v) + acf(w) = baf(v) + caf(w) = b(af)(v) + c(af)(w)$.

Con estas operaciones podemos afirmar que $\mathrm{Hom}_K(V, V')$ es otro espacio vectorial sobre K. La demostración es inmediata a partir de las propiedades de V y V' y se deja como **ejercicio**.

Por otro lado, si ahora tenemos tres espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K y $f : V \longrightarrow V'$, $g : V' \longrightarrow V''$ son aplicaciones lineales, veamos que $g \circ f : V \longrightarrow V''$ sigue siendo lineal: $\forall\, a, b \in K$, $\forall\, v, w \in V$, tenemos $(g \circ f)(av + bw) = g(f(av + bw)) \overset{(*)}{=} g(af(v) + bf(w)) \overset{(**)}{=} ag(f(v)) + bg(f(w)) = a(g \circ f)(v) + b(g \circ f)(w)$, donde en $*$ aplicamos que f es lineal y en $**$ que lo es g.

Si una aplicación lineal tiene iguales el dominio y el codominio, es decir, $f : V \longrightarrow V$, diremos que f es un endomorfismo de V. Al conjunto de los endomorfismos de un espacio vectorial $V(K)$ lo notaremos $\mathrm{End}_K(V)$. Sabemos entonces que $\mathrm{End}_K(V) = \mathrm{Hom}_K(V, V)$ es un espacio vectorial sobre K. Pero además, la composición nos da una ley de composición interna que se ve fácilmente que verifica:

1. Es asociativa: $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ (pues esto se da en general).

2. Admite como elemento neutro a 1_V: se tiene $1_V \circ f = f \circ 1_V = f$.

3. Se verifican las siguientes propiedades distributivas con respecto a la suma:

   - $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$.
   - $(f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h$.

4. Compatibilidad: $\forall\, a \in K$ se tiene $a(g \circ f) = (ag) \circ f = g \circ (af)$.

Si $f : V \longrightarrow V'$ es un isomorfismo, al ser f biyectiva admite una aplicación inversa $f^{-1} : V' \longrightarrow V$ que también es biyectiva. Veamos que f^{-1} también es lineal y, por tanto, es otro isomorfismo de espacios vectoriales.

Demostración. Sean $a, b \in K$ y $v', w' \in V'$. Llamemos $v = f^{-1}(v'), w = f^{-1}(w')$ (esto equivale a que $f(v) = v'$ y $f(w) = w'$). Entonces $f(av + bw) = af(v) + bf(w) = av' + bw'$, con lo que tenemos que $f^{-1}(av' + bw') = av + bw = af^{-1}(v') + bf^{-1}(w')$, que es lo que necesitamos. $\square$

Dado un espacio vectorial V, un automorfismo de V es un endomorfismo biyectivo de V. Si $\mathrm{Aut}_K(V)$ designa el conjunto de todos los automorfismos de V, todas las propiedades anteriores se resumen en que $(\mathrm{Aut}_K(V), \circ)$ es un grupo (en general, no abeliano) que llamaremos el grupo general de V.

5. Aplicaciones lineales y matrices.

5.1. Matriz asociada a una aplicación lineal.

Sea $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal. Si elegimos una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de V, f está totalmente determinada por los vectores $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)$, ya que $\forall\, x \in V$ con coordenadas $x = (x_1, \ldots, x_n)_{\mathcal{B}}$, será $x = x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n$. Por lo tanto $f(x) = f(x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n) = x_1f(v_1) + x_2f(v_2) + \cdots + x_nf(v_n)$.

Ejemplo 2.
Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ y $f(1,0,0) = (2,-1,1,3), f(0,1,0) = (1,0,1,0), f(0,0,1) = (-2,1,0,-1)$, entonces $f(1,2,3) = f((1,0,0) + 2(0,1,0) + 3(0,0,1)) = f(1,0,0) + 2f(0,1,0) + 3f(0,0,1) = (2,-1,1,3) + 2(1,0,1,0) + 3(-2,1,0,-1) = (-2,2,3,0)$.
En general $\forall\,(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$, $f(x_1,x_2,x_3) = x_1(2,-1,1,3) + x_2(1,0,1,0) + x_3(-2,1,0,1) = (2x_1 + x_2 - 2x_3, -x_1 + x_3, x_1 + x_2, 3x_1 + x_3)$

Tomemos ahora otra base $\mathcal{B}' = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ de V' y consideremos las coordenadas de $f(v_1)$, $f(v_2)$, $\ldots$, $f(v_n)$ en $\mathcal{B}'$:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= (a_{11}, \ldots, a_{m1})_{\mathcal{B}'} \\ f(v_2) &= (a_{12}, \ldots, a_{m2})_{\mathcal{B}'} \\ &\ \vdots \\ f(v_n) &= (a_{1n}, \ldots, a_{mn})_{\mathcal{B}'} \end{aligned}$$

Dado un vector arbitrario $x \in V$ con coordenadas $x = (x_1, \ldots, x_n)_{\mathcal{B}'}$ como hemos visto será $f(x) = x_1f(v_1) + x_2f(v_2) + \cdots + x_nf(v_n)$. Así, las coordenadas de $f(x)$ en $\mathcal{B}'$ serán:

$$f(x) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \ldots, a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n)_{\mathcal{B}'}.$$

Pero si notamos las coordenadas de $f(x)$ en $\mathcal{B}'$ como $f(x) = (y_1, y_2, \ldots, y_m)_{\mathcal{B}'}$, la unicidad de tales coordenadas nos da

$$\begin{cases} y_1 &= a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 &= a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ y_m &= a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases}$$

que podemos escribir matricialmente como

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Esta expresión se llama la ecuación matricial de la aplicación lineal f respecto de las bases $\mathcal{B}$ de V y $\mathcal{B}'$ de V'. La matriz que aparece

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

se llama matriz asociada a f respecto de las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ y la notaremos como $\mathcal{M}(f;\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B})$. Hay que fijarse en que su número de filas es la dimensión de V' mientras que su número de columnas es la dimensión de V. Si ahora llamamos

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

la ecuación matricial se reduce a $Y = AX$.

En esta expresión matricial, cada vez que conocemos las coordenadas X de un vector $x \in V$ en la base $\mathcal{B}$, obtenemos las coordenadas Y del vector $f(x)$ en la base $\mathcal{B}'$.

Nótese que cada columna de A nos da las coordenadas de las imágenes de los vectores $f(v_i)$ en la base $\mathcal{B}'$, donde $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.

Un caso particularmente interesante es cuando consideramos un $f \in \mathrm{End}_K(V)$, pues, en este caso, podemos considerar una única base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ en V. Llamaremos entonces simplemente $\mathcal{M}(f;\mathcal{B}) = \mathcal{M}(f;\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B})$.

Ejemplo 3.

Siguiendo con el ejemplo anterior y considerando en $\mathbb{R}^3$ su base usual $\mathcal{B}_U^3$ y en $\mathbb{R}^4$ la correspondiente base usual $\mathcal{B}_U^4$, tendremos que

$$\mathcal{M}(f;\mathcal{B}_U^4 \leftarrow \mathcal{B}_U^3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Con lo cual, la expresión matricial de f en esas bases será

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 4.

Sea ahora $D : \mathcal{P}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}^2(\mathbb{R})$ la aplicación lineal derivada. Consideremos en $\mathcal{P}^2(\mathbb{R})$ la base estándar $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$. Tenemos entonces que $D(1) = 0 = (0,0,0)_{\mathcal{B}}$, $D(x) = 1 = (1,0,0)_{\mathcal{B}}$ y $D(x^2) = 2x =$

$(0,2,0)_{\mathcal{B}}$. Por tanto,

$$\mathcal{M}(D;\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Toda matriz es la matriz asociada a una aplicación lineal respecto de ciertas bases: dados dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K, $V(K)$ y $V'(K)$ con $\dim_K(V) = n$ y $\dim_K(V') = m$ y elegidas bases $\mathcal{B}$ de V y $\mathcal{B}'$ de V', $\forall\, A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$, $\exists_1\, f : V \longrightarrow V'$, aplicación lineal, tal que $\mathcal{M}(f;\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}) = A$. Basta definir f como la aplicación que lleva cada vector x de V con coordenadas X respecto de V en el vector $y = f(x)$ de V' cuyas coordenadas en $\mathcal{B}'$, Y verifican $Y = AX$.

5.2. Matriz asociada, núcleo e imagen.

La matriz asociada a una aplicación lineal respecto de bases de V y V', respectivamente, nos va a permitir calcular el núcleo y la imagen de dicha aplicación lineal. En concreto, sea $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal con $\dim_K(V) = n$ y $\dim_K(V') = m$, sean $\mathcal{B}$ una base de V, $\mathcal{B}'$ una base de V' y $A = \mathcal{M}(f;\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B})$. Supongamos que $r = \mathrm{rg}(A)$.

Como las columnas de A son las coordenadas respecto de $\mathcal{B}'$ de las imágenes de los vectores de una base $\mathcal{B}$ de V, estas columnas forman un sistema de generadores de $\mathrm{Im}(f)$, y, por tanto, como el rango de A es r, $\dim_K(\mathrm{Im}(f)) = r$.

Basta, por tanto, con quedarnos con r columnas linealmente independientes para tener una base de $\mathrm{Im}(f)$.

Por otra parte, si $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)_{\mathcal{B}}$ es un vector de V, será $x \in \mathrm{Ker}(f)$ si y solo si $f(x) = 0$. Matricialmente hablando si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tendremos que $AX = 0$ y, por tanto, unas ecuaciones cartesianas de $\mathrm{Ker}(f)$ respecto de la base $\mathcal{B}$ serán

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Como el $\mathrm{rg}(A) = r$, ese sistema será equivalente al que obtenemos con las r filas de A que nos dan el rango y, en consecuencia, $\dim_K(\mathrm{Ker}(f)) = n - r$. Tenemos, pues, el siguiente resultado:

Teorema 1 (Fórmula de las dimensiones para aplicaciones lineales.)**.**
Sea $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal. Entonces

$$\dim_K(\mathit{Ker}(f)) + \dim_K(\mathit{Im}(f)) = \dim_K(V).$$

Para una tal aplicación lineal f, llamaremos rango de f (notado $\mathrm{rg}(f)$) a la dimensión de $\mathrm{Im}(f)$ y nulidad de f (notado $\mathrm{nul}(f)$) a la dimensión de $\mathrm{Ker}(f)$.
Para la aplicación lineal del ejemplo que venimos considerando, cuya matriz es

$$\mathcal{M}(f;\mathcal{B}_U^4 \leftarrow \mathcal{B}_U^3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

puesto que $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1-3 = -2 \neq 0$, entonces $\mathrm{rg}(A) = 3$, y los vectores $\{(2,-1,1,3), (1,0,1,0), (-2,1,0,-1)\}$ nos proporcionan una base de $\mathrm{Im}(f)$. Por la fórmula de las dimensiones, $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Ker}(f)) = 3-3 = 0$ y así, $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.
A partir de lo que conocemos, el siguiente resultado es inmediato.

Proposición 4.
Sea $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal con $\dim_K(V) = n$ y $\dim_K(V') = m$ y sea A la matriz $A = \mathcal{M}(f;\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B})$, para una base $\mathcal{B}$ de V y una base $\mathcal{B}'$ de V'. Entonces:

1. *f es un monomorfismo si y solo si $rg(A) = n$.*
2. *f es un epimorfismo si y solo si $rg(A) = m$.*
3. *f es un isomorfismo si y solo si A es cuadrada y regular.*

Dos espacios vectoriales V y V' sobre el mismo cuerpo K se dirán isomorfos si podemos encontrar un isomorfismo $f : V \longrightarrow V'$ y lo notaremos $V \cong V'$. Tenemos entonces que $V \cong V'$ si y solo si $\dim_K(V) = \dim_K(V')$.

Demostración. Supongamos que $V \cong V'$, que $\dim_K(V) = n$ y que $\dim_K(V') = m$. Sea $f : V \longrightarrow V'$ un isomorfismo y $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$, $A = \mathcal{M}(f;\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B})$ para ciertas bases $\mathcal{B}$ de V y $\mathcal{B}'$ de V'. Por lo que acabamos de ver, A es una matriz cuadrada y regular y, por tanto, $m = n$; es decir, $\dim_K(V) = \dim_K(V')$.
Recíprocamente, supongamos que $\dim_K(V) = \dim_K(V') = n$. Elegimos $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de V y $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ una base de $\mathcal{B}'$. Sea $f : V \longrightarrow V'$ la aplicación lineal tal que $\mathcal{M}(f;\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}) = I_n$ (así, $f(v_i) = w_i$, $\forall\, i \in \{1,\ldots,n\}$). Como claramente I_n es cuadrada y regular, f es un isomorfismo. $\square$

En particular esto nos dice que si V es un espacio vectorial real de dimensión n, $V \cong \mathbb{R}^n$. En general, si $V(K)$ es un espacio vectorial de dimensión n, $V \cong K^n$.

5.3. Matriz asociada y cambio de base.

Nos proponemos ver qué relación hay entre las matrices asociadas a una aplicación lineal respecto de dos bases distintas en el primer espacio y otras dos en el segundo espacio. Si A y C son las matrices

asociadas a f respecto de dos pares de bases, tendremos que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(C)$ y, por tanto, A y C serán equivalentes. Veamos qué matrices nos dan esa equivalencia:
Sean $\mathcal{B}$ y $\overline{\mathcal{B}}$ dos bases de V tales que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}\leftarrow\overline{\mathcal{B}}} = P$. Es decir, suponemos que $X = P\overline{X}$, donde X es la matriz columna de las coordenadas de un vector $x \in V$ en $\mathcal{B}$ y $\overline{X}$ la matriz columna de las coordenadas de x en $\overline{\mathcal{B}}$.
Asimismo, sean $\mathcal{B}'$ y $\overline{\mathcal{B}'}$ dos bases de V' tales que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}} = Q$. Por tanto, tendremos $Y = Q\overline{Y}$, donde ahora Y será matriz columna de las coordenadas de un vector $y \in V'$ en $\mathcal{B}'$ e $\overline{Y}$ la matriz columna de las coordenadas de y en $\overline{\mathcal{B}'}$. Así, si $A = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B})$, en estas bases la ecuación matricial de f será

$$Y = AX.$$

Sea, por otra parte, $C = \mathcal{M}(f; \overline{\mathcal{B}'} \leftarrow \overline{\mathcal{B}})$ con lo que

$$\overline{Y} = C\overline{X}.$$

Entonces $\overline{Y} = Q^{-1}Y = Q^{-1}AX = Q^{-1}AP\overline{X}$ y de estas dos expresiones concluimos que

$$C = Q^{-1}AP,$$

que, traduciendo, nos da

$$\mathcal{M}(f; \overline{\mathcal{B}'} \leftarrow \overline{\mathcal{B}}) = \mathcal{M}_{\overline{\mathcal{B}}\leftarrow\mathcal{B}'}\mathcal{M}(f; \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B})\mathcal{M}_{\mathcal{B}\leftarrow\overline{\mathcal{B}'}}.$$

En el caso particular de que f sea un endomorfismo de V, tomando $A = \mathcal{M}(f; \mathcal{B})$, $C = \mathcal{M}(f; \overline{\mathcal{B}'})$ tendríamos

$$\mathcal{M}(f; \overline{\mathcal{B}}) = \mathcal{M}_{\overline{\mathcal{B}}\leftarrow\mathcal{B}}\mathcal{M}(f; \mathcal{B})\mathcal{M}_{\mathcal{B}\leftarrow\overline{\mathcal{B}}}.$$

Luego $C = P^{-1}AP$.
Recordemos que P es una matriz regular. Entonces las matrices $A, C \in \mathcal{M}_n(K)$ diremos que son <u>semejantes</u> si $\exists\, P \in \mathcal{M}_n(K)$ regular tal que $C = P^{-1}AP$. Tenemos entonces:

1. Dos matrices son equivalentes si y solo si son matrices asociadas a la misma aplicación lineal respecto de distintas bases.

2. Dos matrices cuadradas son semejantes si y solo si son matrices asociadas al mismo endomorfismo respecto de distintas bases.

Solo veremos la primera propiedad, pues la segunda es completamente similar.

Demostración. Hemos visto que si tenemos dos matrices asociadas a la misma aplicación lineal respecto de distintas bases son equivalentes.
Veamos el recíproco: si $A, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ son equivalentes, $\exists\, P \in \mathcal{M}_n(K)$ regular y $\exists\, Q \in \mathcal{M}_m(K)$ también regular tales que $C = Q^{-1}AP$. Sea $f : K^n \longrightarrow K^m$ cuya matriz asociada respecto de $\mathcal{B}_U^n$ de K^n y la de $\mathcal{B}_U^m$ de K^m sea A ($A = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}_U^m \leftarrow \mathcal{B}_U^n)$). Sea $\overline{\mathcal{B}}$ la base de K^n tal que $P = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_U^n\leftarrow\overline{\mathcal{B}}}$ y $\overline{\mathcal{B}'}$ la base de K^m tal que $Q = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_U^m\leftarrow\overline{\mathcal{B}'}}$. Por lo que hemos visto antes tenemos que $C = \mathcal{M}(f; \overline{\mathcal{B}'} \leftarrow \overline{\mathcal{B}})$. $\square$

5.4. Matriz asociada y operaciones con aplicaciones lineales.

Sean $f, g : V \longrightarrow V'$ dos aplicaciones lineales. Sea $\mathcal{B}$ una base de V, $\mathcal{B}'$ una base de V' y supongamos que $A = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B})$ y que $C = \mathcal{M}(g; \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B})$. Tenemos entonces que $Y = AX$ e $\overline{Y} = CX$, siendo X la matriz columna de las coordenadas de un vector $x \in V$ en la base $\mathcal{B}$, Y la matriz columna de las coordenadas de $f(x)$ en $\mathcal{B}'$ e $\overline{Y}$ la matriz columna de las coordenadas de $g(x)$ en $\mathcal{B}'$.
Como $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, las coordenadas de $(f+g)(x)$ en $\mathcal{B}'$ serán $Y + \overline{Y}$ y, por tanto,

$$Y + \overline{Y} = AX + CX = (A + C)X,$$

lo que prueba que $\mathcal{M}(f+g; \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}) = A + C = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}) + \mathcal{M}(g; \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B})$.
Análogamente, sabemos que $\forall\, k \in K$, $(kf)(x) = kf(x)$ y las coordenadas de este vector en $\mathcal{B}'$ son kY, luego

$$kY = k(AX) = (kA)X$$

y por tanto, $\mathcal{M}(kf; \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}) = k\mathcal{M}(f; \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B})$.
Veamos ahora qué ocurre con la composición: sea f como antes y $h : V' \longrightarrow V''$ otra aplicación lineal. Sea $\mathcal{B}''$ una base de V'' tal que $\mathcal{M}(h; \mathcal{B}'' \leftarrow \mathcal{B}') = D$. La ecuación matricial de h respecto de $\mathcal{B}'$ y $\mathcal{B}''$ será $Z = DY$.
Si X es la matriz columna de las coordenadas de $x \in V$ en $\mathcal{B}$, $Y = AX$ es la matriz columna de las coordenadas de $f(x)$ en $\mathcal{B}'$ y $Z = DY$ será la matriz columna de las coordenadas de $h(f(x))$ en $\mathcal{B}''$. Por tanto, $Z = DY = D(AX) = (DA)X$ nos dice que

$$\mathcal{M}(h \circ f; \mathcal{B}'' \leftarrow \mathcal{B}) = DA = \mathcal{M}(h; \mathcal{B}'' \leftarrow \mathcal{B}')\mathcal{M}(f; \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}).$$

Estas propiedades nos dan también lo siguiente:

Teorema 2.
Sean V y V' espacios vectoriales sobre el cuerpo K con $\dim_K(V) = n$ y $\dim_K(V') = m$. Dadas una base $\mathcal{B}$ de V y una base $\mathcal{B}'$ de V' la aplicación

$$T : Hom_K(V, V') \longrightarrow \mathcal{M}_{m \times n}(K)$$

tal que $T(f) = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B})$ es un isomorfismo de espacios vectoriales. En particular,

$$\dim_K(Hom_K(V, V')) = m \cdot n.$$

Demostración. Las dos primeras propiedades anteriores nos dan que T es lineal. Es inyectiva puesto que, fijadas las bases, para cada f hay una única matriz que la representa en esas bases. Pero antes vimos que esta aplicación también es sobreyectiva. Por lo tanto es biyectiva. $\square$