ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA E INTRODUCCIÓN A LA PROBABILIDAD
DOBLE GRADO EN INFORMÁTICA Y MATEMÁTICAS ~ 13 DE JUNIO DE 2019

1. [3 puntos] La siguiente tabla muestra la distribución conjunta del tiempo de inversión X (en meses) y los beneficios obtenidos Y (en millones de €) de un conjunto de 100 inversores:

X \ Y	0.10	0.15	0.20	0.25
[0,2]	5	10	5	5
[2,5]	8	10	8	4
[5,10]	10	15	10	10

a) Determina el tiempo de inversión más frecuente para obtener 0.2 millones de euros de beneficio.
b) ¿Cuál es el beneficio máximo del 25% con menos beneficios de entre los que han invertido en un periodo de entre 0 y 5 meses?
c) ¿Qué es más representativo, el tiempo medio de inversión o el beneficio medio obtenido?
d) Estudia la interdependencia lineal entre las variables estudiadas.
e) Se han seleccionado a 6 de esos inversores y se han recogido datos sobre su salario bruto mensual (X, en miles de euros) y su retención en concepto de IRPF (Y). La información proporcionada fue la siguiente:

xi	50	65	75	80	90	95
yi	2.5	3.9	5.25	5.6	7.9	8.55

- Estimar mediante un modelo exponencial la retención en función del salario.
- Comparar la bondad de este ajuste con la de la recta de regresión del beneficio en función del tiempo de inversión para la distribución conjunta anterior.

2. [2 puntos] La variable aleatoria X mide el tiempo necesario (medido en días) para la fabricación de un determinado producto. La función de densidad de X viene dada por:

$$f(x) = \begin{cases} a(1+x) & si \quad 0 < x \leq 1 \\ 2/3 & si \quad 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Durante la fabricación hay una alarma que avisa cuando el proceso se está ralentizando. Por errores en la programación de dicha alarma, ésta se activa con una probabilidad del 10% cuando el tiempo de fabricación no llega a medio día y con una probabilidad del 25% cuando se encuentra entre 12 y 30 horas.

a) Obtener el valor de *a* y determinar la función de distribución de X.
b) Calcular la media y la mediana del tiempo de fabricación.
c) ¿Cuál es la probabilidad de que el proceso dure menos de un día y medio si ya excede las 24 horas?
d) Suponiendo que la alarma ha saltado, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo empleado en la fabricación del producto exceda las 30 horas?

3. [2 puntos] Un dado numerado del 1 al 6 cargado de tal manera que, conocida la probabilidad de obtener la cara del uno, cualquier otra cara tiene una probabilidad igual al número de sus puntos por la probabilidad de la cara del número anterior.

a) Si consideramos la variable aleatoria que asigna a cada cara el número de sus puntos, obtener su valor esperado.
b) Calcular la varianza del número de tiradas del dado hasta conseguir 4 veces la cara del seis.
c) Si se lanza el dado 5 veces, ¿cuál es la probabilidad de que en al menos una de ellas se haya obtenido la cara del seis?

2º examen (2019)

1.

X\Y	0.1	0.15	0.20	0.25	c_i	$n_{i\cdot}$	$n_{i\cdot}c_i$	$n_{i\cdot}c_i^2$	$x_i \sum n_{ij} y_j$
[0,2]	5	10	5	5	1	25	25	25	4.25
[2,5]	8	10	8	4	3.5	30	105	367.5	17.15
[5,10]	10	15	10	10	7.5	45	337.5	2531.25	58.125
						100	467.5	2923.75	79.525
$n_{\cdot j}$	23	35	23	19					
$n_{\cdot j} y_j$	2.3	5.25	4.6	4.75	16.9				
$n_{\cdot j} y_j^2$	0.23	0.7875	0.92	1.1875	3.125				

c) La media más representativa será la de la variable con menor coef. variación:

$\bar{x} = \frac{467.5}{100} = 4.675 \quad \bar{y} = \frac{16.9}{100} = 0.169$

$\sigma_x^2 = \frac{2923.75}{100} - 4.675^2 = 7.381875$

$\sigma_y^2 = \frac{3.125}{100} - 0.169^2 = 0.002689$

$C.V.(X) = \frac{\sqrt{\sigma_x^2}}{|\bar{x}|} = 0.58117 \quad C.V.(Y) = \frac{\sqrt{\sigma_y^2}}{|\bar{y}|} = 0.306838$

Es más representativo el beneficio medio

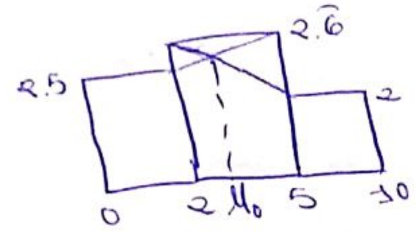
d) Interdependencia lineal

$r^2 = \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2} \qquad \sigma_{xy} = \frac{79.525}{100} - 4.675 \cdot 0.169 = 0.005175$

$r^2 = 0.00134916 \Rightarrow$ Ajuste malísimo

a)

X/y_3	n_i	c_i	a_i	h_i
[0,2]	5	1	2	2.5
[2,5]	8	3.5	3	$2.\hat{6}$
[5,10]	10	7.5	5	2



$\frac{2.\hat{6} - 2.5}{M_0 - 2} = \frac{2.\hat{6} - 2}{5 - M_0} \Leftrightarrow -0.1\hat{6}M_0 + 0.8\hat{3} = 0.\hat{6}M_0 - 1.\hat{3}$

$\Downarrow$

$\boxed{M_0 = 2.6 \text{ meses}}$

b) Beneficio máximo del 25% con menos beneficios de entre los que han invertido entre 0 y 5 meses?

$0.25 \cdot 55 = 13.75$

$C_{0.25} = y_j / N_j \geq \frac{n}{2}$

$= 0.15$

$Y / 0 \leq X \leq 5$	$n_{1j} + n_{2j}$	$N_{1j} + N_{2j}$
0.1	13	13
0.15	20	33
0.20	13	46
0.25	9	55
	55	

e)

x_i	50	65	75	80	90	95
y_i	2.5	3.9	5.25	5.6	7.9	8.55

a) Ajustar con un modelo exponencial.

Modelo exponencial $\Rightarrow y = a \cdot b^x$

$\ln y = \ln a + x \ln b$

$y' = A + Bx$

$A = -\frac{\sigma_{xy'}}{\sigma_x^2}\bar{x} + \bar{y'}$ $B = \frac{\sigma_{xy'}}{\sigma_x^2}\bar{x}$

y_i'	0.9163	1.36097	1.6582	1.7228	2.06686	2.1459
x_i	50	65	75	80	90	95

Aquí todos los $n_{i\cdot}$ y $n_{\cdot j}$ son 1. Calculamos lo necesario:

$$\bar{x} = \frac{50+\dots+95}{6} = 75.8\hat{3} \quad \bar{y'} = \frac{0.9163+\dots+2.1459}{6} = 1.64517$$

$$\sigma_x^2 = \frac{50^2+\dots+95^2}{6} - \bar{x}^2 = 228.47 \quad \sigma_{y'}^2 = \frac{0.9163^2+\dots+2.1459^2}{6} - \bar{y'}^2 = 0.1745$$

$$\sigma_{xy'} = \frac{50\cdot 0.9163+\dots+95\cdot 2.1459}{6} - 75.8\hat{3}\cdot 1.64517 =$$

$$= 6.3798$$

$$A = -0.4724 \quad B = 0.02792$$

$$A = \ln a \Rightarrow a = 0.6235 \quad B = \ln b \Rightarrow b = 1.02832$$

$$\boxed{y = 0.6235 \cdot 1.02832^x}$$

Y ahora hallamos $\eta^2_{y/x}$:

$$\sigma_{ry}^2 = \frac{\sum_i \sum_j n_{ij}(f(x_i)-y_j)^2}{n} = \frac{(2.5-2.51913)^2+\dots+(8.55-8.85163)^2}{6} = \frac{0.221236}{6} = \boxed{0.036873}$$

$f(50) = 2.51913$ $\quad f(80) = 5.82236$

$f(65) = 3.82979$ $\quad f(90) = 7.6981$

$f(75) = 5.0635797$ $\quad f(95) = 8.85163$

$$\bar{y} = \frac{2.5+\dots+8.55}{6} = 5.616 \quad \sigma_y^2 = \frac{2.5^2+\dots+8.55^2}{6} - \bar{y}^2 = 4.4356$$

$$\eta^2_{y/x} = 1 - \frac{\sigma_{ry}^2}{\sigma_y^2} = 0.9917 \Rightarrow \text{Ajuste muy bueno}$$

2. $X \equiv$ tiempo necesario para la fabricación de un producto (en días)

$$f(x) = \begin{cases} a(1+x) & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 2/3 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Alarma se activa con probabilidad 10% cuando el tiempo de fabr. no llega a medio día y con prob. 25% cuando está entre 12 y 30 horas

a) Determinar a y la función de distribución.

$$\int_0^x a(1+t)\,dt = \left[at + \frac{at^2}{2}\right]_0^x = \frac{ax^2}{2} + ax$$

$$\int_0^1 a(1+t)\,dt + \int_1^x \frac{2}{3}\,dt = \left[at + \frac{at^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{2}{3}t\right]_1^x =$$

$$= a + \frac{a}{2} + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} + \frac{3a}{2}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{ax^2}{2} + ax & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ \frac{2x}{3} - \frac{2}{3} + \frac{3a}{2} & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

(Cont. en $x=1$) $\frac{a}{2} + a = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} + \frac{3a}{2} \Rightarrow \frac{3a}{2} = \frac{3a}{2} \Rightarrow$ Siempre se cumple

(Cont. en $x=2$) $\frac{4}{3} - \frac{2}{3} + \frac{3a}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{3a}{2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \boxed{a = \frac{2}{9}}$

b) Media y mediana del tiempo de fabricación.

$$\cancel{E[X] = \int_0^1 \left(\frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{9}\right) dx + \int_1^2 \left(\frac{2x^2}{3} - \frac{x}{3}\right) dx =}$$

$$\cancel{= \left[\frac{x^4}{36} + \frac{x^3}{27}\right]_0^1 + \left[\frac{2}{3}\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{6}\right]_1^2 = \frac{1}{36} + \frac{1}{27} + \frac{10}{9} - \frac{1}{18} = 1.1\widehat{2037}}$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) = \int_0^1 \left(\frac{2x}{9} + \frac{2x^2}{9}\right) dx + \int_1^2 \frac{2x}{3}\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{9} + \frac{2x^3}{27}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{3}\right]_1^2 = \frac{5}{27} + \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1.\widehat{185} \text{ días}$$

~~c) ¿Prob. de que el proceso dure menos de un día~~

Mediana $\Rightarrow F(x)=0.5 \Rightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{x}{9}=0.5$ ó $\frac{2x}{3}-\frac{1}{3}=0.5$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{x=\frac{5}{4}=Me}$$

$$x^2+x-4.5=0$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+18}}{2} \nearrow -2.679 \quad \searrow 1.67945$$

$$\Downarrow$$

Ninguna vale
ya que estamos en $]0,1]$

c) ¿Prob. de que el proceso dure menos de un día y medio si ya excede las 24 horas?

~~$P\left(\frac{<36}{X>24}\right) = \frac{P(24<X\leq 36)}{P(X>24)} = P$~~

24 horas = 1 día

$$P\left(\frac{X\leq 1.5}{X\geq 1}\right)=\frac{P(1\leq X\leq 1.5)}{P(X\geq 1)}=\frac{P(X\leq 1.5)-P(X\leq 1)}{1-P(X\leq 1)}=$$

$$=\frac{\frac{2\cdot 1.5}{3}-\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{9}+\frac{2}{9}\right)}{1-\frac{3}{9}}=\frac{1}{2}=0.5$$

d) La alarma ha saltado, ¿prob. de que el tiempo empleado exceda las 30 horas?

$$P(\text{Sonar})=P(X<0.5)\cdot P\left(\frac{\text{Sonar}}{X<0.5}\right)+P(0.5<X<1.25)\cdot P\left(\frac{\text{Sonar}}{0.5<X<1.25}\right)$$

$$+P(X>1.25)\cdot P\left(\frac{\text{Sonar}}{X>1.25}\right)=\left(\frac{1}{9}\cdot 0.5^2+\frac{2}{9}\cdot 0.5\right)\cdot 0.1+\left(\frac{2}{3}\cdot 1.25-\frac{1}{3}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{9}\cdot 0.5^2-\frac{2}{9}\cdot 0.5\right)\cdot 0.25+\left(1-\frac{2}{3}\cdot 1.25+\frac{1}{3}\right)\cdot 1=$$

$$=\frac{29}{48}=0.6041\hat{6}$$

$$P\left(\frac{X>1.25}{\text{Sonar}}\right)=\frac{P(X>1.25)\cdot P\left(\frac{\text{Sonar}}{X>1.25}\right)}{P(\text{Sonar})}=\frac{1-\frac{2}{3}\cdot 1.25+\frac{1}{3}}{\frac{29}{48}}=\frac{24}{29}=\boxed{0.82759}$$

3. Dado numerado del 1 al 6 cargado de forma que conocida la prob. de la cara del 1, el resto de caras tienen probabilidad igual a sus puntos por la prob. de la cara del número anterior.

a) V.a. que asigna a cada cara el nº de sus puntos, obtener el valor esperado.

$P[X=1]=p$ $\quad\ldots\quad P[X=i]=i!\,p$ con $i\in\{1,\ldots,6\}$

$P[X=2]=2p$ $\quad E[X]=1\cdot p+2\cdot 2p+3\cdot 6p+4\cdot 24p+5\cdot 120p+6\cdot 720p=$

$P[X=3]=6p$ $\quad =5039p$

$$\sum_{i=1}^{6} P[X=i] = 1 \Rightarrow 873p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{873}$$

$$\boxed{E[X] = 5.77205 \text{ puntos}}$$

b) Varianza del nº lanz. hasta conseguir 4 veces la cara del seis.

$$P(\text{Salir } 6) = 720 \cdot p = \frac{720}{873} = \frac{80}{97} = 0.82474$$

$X \equiv$ nº fracasos (no salir 6) hasta el 4º éxito (salir 6)

$$X \rightsquigarrow BN(4, 0.82474)$$

$$E[X] = \frac{r(1-p)}{p} = \frac{4\cdot(1-0.82474)}{0.82474} = 0.85$$

$$\cancel{E[X^2] = \frac{r(1-p)}{p^2} = \frac{4(1-0.82474)}{0.82474^2} = 1.03064}$$

$$\cancel{Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = 1.03064 - 0.85^2 = 0.30844}$$

~~Pero tengamos en cuenta que los lanzamientos son los fracasos más los 4 éxitos:~~

$$\cancel{Var(X+4) = Var(X) + \underbrace{Var(4)}_{0} = 0.30844}$$

$$Var(X) = \frac{r(1-p)}{p^2} = \frac{4(1-0.82474)}{0.82474^2} = 1.03064$$

Pero X es el número de fracasos. El nº lanz. será el número de fracasos más los 4 éxitos. Definimos una nueva variable que cuente el número de lanzamientos: $Y = X + 4$

$$Var(Y) = Var(X+4) = Var(X) + \underbrace{Var(4)}_{0} = \boxed{1.03064}$$

c) 5 lanzamientos. ¿Prob. al menos una vez la cara del 6?

$X \equiv$ nº veces que sale el 6 en los 5 lanzamientos.

$$X \rightsquigarrow B(5, 0.82474)$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X \leq 0) = 1 - \left(\binom{5}{0} 0.82474^0 \cdot 0.17526^5\right) =$$

$$= 0.999834643$$