1 En un modelo matricial se obtuvo la siguiente matriz

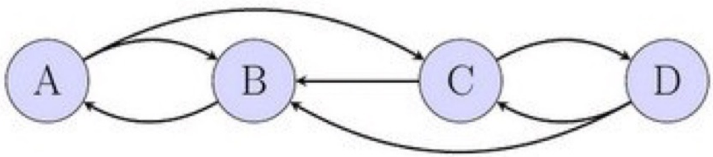
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0.8 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.32 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.45 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.82 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Estudia si esta matriz proviene de un modelo de Leslie.

(b) Estudia si es transitiva.

(c) Estudia si tiene valor propio dominante.

2 Dado el siguiente esquema de páginas web,



calcula la importancia (pagerank) al nivel 0.6 de cada una de las páginas.

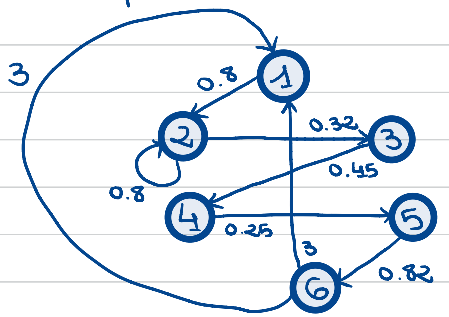
EJERCICIO 1

a) No proviene de un modelo de Leslie pues si lo hiciese, la matriz sería de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_{k-1} & f_k \\ s_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & s_{k-1} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Sin embargo, en la matriz del enunciado, $A_{22} \neq 0$, luego no puede ser una matriz de Leslie.

b) Empezamos obteniendo el grafo:

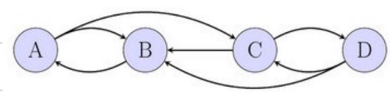


$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0.8 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.32 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.45 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.82 & 0 \end{pmatrix}$$

Podemos realizar el recorrido $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 1$, luego es transitiva.

c) Como la matriz es transitiva y $A_{22} \neq 0$, concluimos que es ergódica y por un resultado de teoría, toda matriz ergódica A tiene como VPD a su radio espectral $\rho(A)$. Luego sí, tiene valor propio dominante.

EJERCICIO 2



$\Longrightarrow$ Matriz de enlaces: $\mathcal{U} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Normalizamos

$$\tilde{\mathcal{U}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Y la expresión de la matriz de Google es: $G_\alpha = \underset{0.6}{\alpha} \cdot \tilde{\mathcal{U}} + \underbrace{\frac{1-\alpha}{N}}_{0.1} \overset{\text{Matriz de unos}}{\mathbb{1}}$

$$G_\alpha = \begin{pmatrix} 1/10 & 7/10 & 1/10 & 1/10 \\ 4/10 & 1/10 & 4/10 & 4/10 \\ 4/10 & 1/10 & 1/10 & 4/10 \\ 1/10 & 1/10 & 4/10 & 1/10 \end{pmatrix}$$

Finalmente hallamos la importancia de las páginas resolviendo un sistema: $G_\alpha \cdot \vec{r} = \vec{r}$ (Imponiendo que $\|\vec{r}\| = 1$, es decir, $x+y+z+t=1$):

$$G_\alpha \cdot \vec{r} = \vec{r} \Longrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1/10 & 7/10 & 1/10 & 1/10 \\ 4/10 & 1/10 & 4/10 & 4/10 \\ 4/10 & 1/10 & 1/10 & 4/10 \\ 1/10 & 1/10 & 4/10 & 1/10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}}$$

$$\begin{cases} \frac{9}{10}x - \frac{7}{10}y - \frac{1}{10}z - \frac{1}{10}t = 0 \\ -\frac{4}{10}x + \frac{9}{10}y - \frac{4}{10}z - \frac{4}{10}t = 0 \\ -\frac{4}{10}x - \frac{1}{10}y + \frac{9}{10}z - \frac{4}{10}t = 0 \\ -\frac{1}{10}x - \frac{1}{10}y - \frac{4}{10}z + \frac{9}{10}t = 0 \\ x+y+z+t=1 \end{cases} \Longrightarrow$$

Como hay 4 incógnitas y 5 ecuaciones, podemos eliminar una ecuación (yo elimino la primera y resuelvo con la calculadora)

$$\underbrace{x = \frac{37}{130} \quad y = \frac{4}{13} \quad z = \frac{40}{169} \quad t = \frac{289}{1690}}$$

Ránking de las páginas A, B, C y D respectivamente

José Alberto Hoces Castro 2º DGIIM