1.4 Estudiar la derivabilidad de la función: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y el comportamiento en el $\pm\infty$ de la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{x} & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \sqrt[5]{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

→ Para estudiar la derivabilidad de la función $f(x)$, debemos en primer lugar estudiar su continuidad.

- La continuidad de $f(x)$:

* Para $x < 0$: $\frac{e^x}{x}$ es una función definida en $\mathbb{R}-\{0\}$, luego para $x<0$, $\frac{e^x}{x}$ es continua
* Para $0 \leq x < 1$: x es una función polinómica continua en todo $\mathbb{R}$.
* Para $x \geq 1$: $\sqrt[5]{x}$ también es una función continua en todo su dominio de definición.

Luego $f(x)$ es continua en cada trozo, veamos ahora si la función $f(x)$ es continua en $x=0$ y $x=1$.

* Estudiamos para $x=0$:

$f(0) = 0$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{e^x}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{e^{0^-}}{0^-} = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x = \boxed{0}$$

Como los límites laterales son distintos, entonces: $\nexists \lim_{x \to 0} f(x)$

Por tanto la función $f(x)$, no es continua en $x=0$, ya que presenta una discontinuidad no evitable de salto finito en $x=0$.

* Estudiamos para $x=1$:

$f(1) = \sqrt[5]{1} = 1$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} x = 1$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \sqrt[5]{x} = 1$$

⇒ Como los límites laterales coinciden, entonces: $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$

Y como $f(1) = 1 = \lim_{x\to 1} f(x)$, entonces la función $f(x)$ es continua en $x=1$.

→ La función f(x) es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$

- Estudiamos la derivabilidad de f(x):
  - Como f(x) es discontinua en x = 0, entonces la función no será derivable en x = 0.
  - En x = 1, dado que las funciones que componen f son derivables, podemos hacer:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x x - e^x}{x^2} & \text{si } x<0\\ 1 & \text{si } 0<x<1\\ \dfrac{1}{5}\cdot\sqrt[5]{\dfrac{1}{x^4}} & \text{si } x>1\end{cases}$$

$f'(1)$ existiría, si y solo si, $f'_-(1)=f'_+(1)$.

- Estudiamos la derivabilidad en x = 1

$$\left.\begin{array}{l} f'_-(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (1) = 1 \\ f'_+(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{1}{5}\sqrt[5]{\dfrac{1}{x^4}}=\dfrac{1}{5}\end{array}\right\}\to$$

Como las derivadas laterales son finitas y distintas, entonces $\nexists\, f'(1)$.

Por tanto, $Dom(f')=\mathbb{R}-\{0,1\}$

→ Estudiar el comportamiento en ± ∞:

→ Para ello, vamos a calcular los límites cuando x tiende a + ∞ y - ∞:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-\infty\cdot e^{\infty}}=\boxed{0}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=\boxed{+\infty}$$