# Prueba de clase 21 de Mayo de 2019[1]

**Alumno:**____________________ **D.N.I.:**__________ **Grupo:**______

**Ejercicio 1.** *Sean* $\alpha = \forall x \forall y \exists z P(f(x,y), g(z,a))$ *y* $\beta = \forall x \forall y (Q(x,y) \to P(g(x,y), b))$ *dos fórmulas de un lenguaje de primer orden. Consideramos la estructura siguiente:*

- **Dominio:** $D = \mathbb{Z}_{12}$.
- **Asignación de constantes:** $a = 1$, $b = 0$.
- **Asignación de funciones:** $f(x,y) = x \cdot y$, $g(x,y) = x + y$.
- **Asignación de predicados:** $P(x,y) \equiv x = y$, $Q(x,y) \equiv x^2 = y^2$.

1. *Calcula el valor de verdad de las fórmulas* $\alpha$ *y* $\beta$ *en la estructura dada.*
2. *¿Es alguna de las fórmulas universalmente válida? Razona la respuesta.*
3. *Expresa en este lenguaje el siguiente enunciado:*

*Los únicos elementos de* $\mathbb{Z}_{12}$ *que son iguales a su cuadrado son* 0 *y* 1.

**Solución:**

1. Puesto que $f(x,y) = x \cdot y$ y $g(z,a) = z + 1$, la fórmula $\alpha$ significa en este caso:

$$\forall x \forall y \exists z (x \cdot y = z + 1).$$

Es decir, dados $x, y$ cualesquiera elementos de $\mathbb{Z}_{12}$, existe un elemento $z \in \mathbb{Z}_{12}$ tal que $x \cdot y = z + 1$. Esto es cierto, pues basta tomar como $z$ el elemento $x \cdot y - 1$. Por ejemplo:

Si $x = 2$, $y = 3$ tomamos $z = 5$.
Si $x = 4$, $y = 5$ tomamos $z = 20 - 1 = 19 = 7$.
Si $x = 0$, $y = 3$ tomamos $z = 0 - 1 = -1 = 11$.

Por tanto, $I(\alpha) = 1$.

En cuanto a $\beta$, lo que nos dice es:

$$\forall x \forall y (x^2 = y^2 \to x + y = 0).$$

Esto no es cierto, pues si tomamos $x = 1$ e $y = 5$ entonces, puesto que $5^2 = 25 = 1$, $x^2 = y^2$, pero $x + y = 1 + 5 = 6 \neq 0$. Por tanto, para un valor de $x$ e $y$ se tiene que $I^v(Q(x,y)) = 1$ mientras que $I^v(P(g(x,y), b)) = 0$.

En conclusión, $I(\beta) = 0$.

2. Es claro que $\beta$ no es universalmente válida, pues tenemos una estructura en la que se interpreta como falsa.

[1] Hay que hacer cuatro ejercicios: el quinto, y tres a elegir entre los cuatro restantes.

En cuanto a $\alpha$, tampoco lo es. Basta tomar cualquier estructura en la que $P(x,y)=0$. Por ejemplo:

- **Dominio:** $D=\mathbb{N}$.
- **Asignación de constantes:** $a=1$, $b=0$.
- **Asignación de funciones:** $f(x,y)=x\cdot y$, $g(x,y)=x+y$.
- **Asignación de predicados:** $P(x,y)\equiv x+y<0$, $Q(x,y)\equiv x^2=y^2$.

Es claro que el valor de verdad de $\alpha$ en esta estructura es 0.

3. Lo que tenemos que decir es que si $x=x^2$ entonces $x=0$ ó $x=1$. Puesto que $x^2$ lo podemos poner como $f(x,x)$, lo anterior lo podemos decir como sigue:

$$\forall x(P(x,f(x,x))\to P(x,a)\vee P(x,b)).$$

Sin embargo, con esta fórmula estamos diciendo que de haber algún número que sea igual a su cuadrado, este número debe ser 0 ó 1. Pero no estamos diciendo que el 0 y el 1 cumplan esa condición. Para eso, podemos modificar la anterior fórmula:

$$\forall x(P(x,f(x,x))\leftrightarrow P(x,a)\vee P(x,b)).$$

También podría decirse de la siguiente forma:

$$P(a,f(a,a))\wedge P(b,f(b,b))\wedge\forall x(P(x,f(x,x))\to P(x,a)\vee P(x,b)).$$

Por último, notemos que esta fórmula es falsa, pues en $\mathbb{Z}_{12}$ se tiene que $4^2=4$ y $9^2=9$.

**Ejercicio 2.** *Calcula una forma normal prenexa (con el menor número posible de cuantificadores), una forma de Skolem y una forma clausulada para la fórmula*

$$\alpha = \exists x \forall y (\forall x \forall y R(a,x) \to \neg \forall z (\neg R(z,y) \to \forall x S(g(x),z))).$$

**Solución:**

Notemos en primer lugar que el radio de acción del segundo $\forall y$ es $R(a,x)$, donde la variable $y$ no aparece. Por tanto, podemos suprimir ese cuantificador.

También podemos ver que en el radio de acción del $\exists x$ que hay al principio no hay ninguna aparición libre de $x$ (todas las que hay son ligadas). Por tanto, también puede suprimirse ese cuantificador. La fórmula $\alpha$ es entonces equivalente a:

$$\forall y (\forall x R(a,x) \to \neg \forall z (\neg R(z,y) \to \forall x S(g(x),z)))$$

Ahora vamos transformando esta fórmula hasta llegar a la forma prenexa:

$$\begin{aligned}
\alpha &\equiv \forall y (\forall x R(a,x) \to \neg \forall z (\neg R(z,y) \to \forall x S(g(x),z))) \\
&\equiv \forall y (\neg \forall x R(a,x) \vee \neg \forall z (\neg\neg R(z,y) \vee \forall x S(g(x),z))) \\
&\equiv \forall y (\exists x \neg R(a,x) \vee \neg \forall z (R(z,y) \vee \forall x S(g(x),z))) \\
&\equiv \forall y (\exists x \neg R(a,x) \vee \exists z \neg (R(z,y) \vee \forall x S(g(x),z))) \\
&\equiv \forall y (\exists x \neg R(a,x) \vee \exists z (\neg R(z,y) \wedge \neg \forall x S(g(x),z))) \\
&\equiv \forall y (\exists x \neg R(a,x) \vee \exists z (\neg R(z,y) \wedge \exists x \neg S(g(x),z))) \\
&\equiv \forall y (\exists z \neg R(a,z) \vee \exists z (\neg R(z,y) \wedge \exists x \neg S(g(x),z))) \\
&\equiv \forall y \exists z (\neg R(a,z) \vee (\neg R(z,y) \wedge \exists x \neg S(g(x),z))) \\
&\equiv \forall y \exists z (\neg R(a,z) \vee \exists x (\neg R(z,y) \wedge \neg S(g(x),z))) \\
&\equiv \forall y \exists z \exists x (\neg R(a,z) \vee (\neg R(z,y) \wedge \neg S(g(x),z)))
\end{aligned}$$

Y ya tenemos una forma prenexa.

Para calcular una forma de Skolem tenemos que eliminar los cuantificadores existenciales y sustituir las variables $z$ y $x$ por dos símbolos de función monarios (distintos, y distitnos de $g$) aplicados a la variable $y$. Sustituimos $z$ por $f(y)$ y $x$ por $h(y)$. Una forma de Skolem es entonces:

$$\forall y (\neg R(a, f(y)) \vee (\neg R(f(y), y) \wedge \neg S(g(h(y)), f(y)))).$$

Por último, para calcular una forma clausulada, aplicamos la propiedad distributiva y nos queda:

$$\forall y ((\neg R(a, f(y)) \vee \neg R(f(y), y)) \ \wedge \ (\neg R(a, f(y)) \vee \neg S(g(h(y)), f(y)))).$$

**Ejercicio 3.** *Demuestra que la fórmula*

$$\alpha = \forall x(\neg P(x,x) \wedge \exists y P(x,y)) \wedge \forall x \forall y \forall z(P(x,y) \wedge P(y,z) \to P(x,z))$$

*es satisfacible y refutable.*

**Solución:**

Vemos que $\alpha$ es la conjunción de dos fórmulas: $\forall x(\neg P(x,x) \wedge \exists y P(x,y))$ por una parte y $\forall x \forall y \forall z(P(x,y) \wedge P(y,z) \to P(x,z))$ por otra. Además, la primera subfórmula es equivalente a $\forall x \neg P(x,x) \wedge \forall x \exists y P(x,y)$.

Por tanto, podemos ver a $\alpha$ como la conjunción de tres fórmulas:

$\alpha_1 = \forall x \neg P(x,x)$.

$\alpha_2 = \forall x \exists y P(x,y)$.

$\alpha_3 = \forall x \forall y \forall z(P(x,y) \wedge P(y,z) \to P(x,z))$.

En primer lugar, elegimos una estructura cualquiera, y calculamos su valor de verdad. Por ejemplo, tomamos:

- **Dominio:** $D = \mathbb{N}$.
- **Asignación de predicados:** $P(x,y) \equiv x = y$. .

Y vemos que en esta estructura $I(\alpha_1) = 0$, pues $\alpha_1$ dice en este caso que para cualquier $x \in \mathbb{N}$, $x \neq x$. Lo cual es falso.

Por tanto, $I(\alpha) = 0$ lo que nos dice que $\alpha$ es refutable.

Buscamos ahora una estructura en la que $\alpha$ se interprete como verdadera.

- **Dominio:** $D = \mathbb{N}$.
- **Asignación de predicados:** $P(x,y) \equiv x < y$. .

En esta estructura, $\alpha_1$ significa que para cualquier $x \in \mathbb{N}$, el número $x$ no es menor que $x$. Claramente eso es cierto.

En cuanto a $\alpha_2$, lo que nos dice es que para cualquier $x \in \mathbb{N}$ existe $y \in \mathbb{N}$ tal que $y > x$. Esto también es claramente cierto (basta tomar $y = x + 1$).

Por último, $\alpha_3$ dice que para cualesquiera $x, y, z \in \mathbb{N}$, si $x < y$ e $y < z$ entonces $x < z$. Esto último también es cierto.

Por tanto, en esta estructura, y puesto que $\alpha \equiv \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3$, tenemos que $I(\alpha) = 1$.

Con esto vemos que $\alpha$ es también satisfacible.

**Ejercicio 4.** *Estudia si los siguientes conjuntos de cláusulas son satisfacibles o insatisfacibles:*

1. $\{P(x, f(x)) \vee P(f(z), y),\ \neg P(f(a), f(b))\}$.
2. $\{P(f(x, y), g(z, b)) \vee P(f(g(a, y), a), x),\ \neg P(f(x, b), z)\}$.
3. $\{P(f(y), x) \vee P(x, f(y)),\ \neg P(f(a), x) \vee \neg P(y, f(b))\}$.

**Solución:**

1. $\{P(x, f(x)) \vee P(f(z), y),\ \neg P(f(a), f(b))\}$.

   Este conjunto es satisfacible, pues por resolución nunca podremos llegar a la cláusula vacía, ya que los literales $P(x, f(x))$ y $P(f(a), f(b))$ no son unificables:

$$\begin{array}{rcl} x &=& f(a) \\ f(x) &=& f(b) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} x &=& f(a) \\ x &=& b \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} x &=& f(a) \\ f(a) &=& b \end{array}$$

   También podemos ver que en la estructura

   - **Dominio:** $D = \mathbb{N}$.
   - **Asignación de constantes:** $a = 2$, $b = 1$.
   - **Asignación de funciones:** $f(x) = x + 1$.
   - **Asignación de predicados:** $P(x, y) \equiv x < y$.

   ambas cláusulas se interpretan como verdaderas.

2. $\{P(f(x, y), g(z, b)) \vee P(f(g(a, y), a), x),\ \neg P(f(x, b), z)\}$.

   Este conjunto también es satisfacible, pues los literales $P(f(g(a, y), a), x)$ y $P(f(u, b), z)$ no son unificables (hemos cambiado la variable $x$ del segundo literal por $u$ para que no coincida con ninguna variable del primero):

$$\begin{array}{rcl} f(g(a, y), a) &=& f(u, b) \\ x &=& z \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g(a, y) &=& u \\ a &=& b \\ x &=& z \end{array}$$

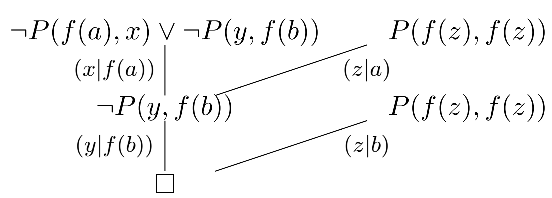
   Y al llegar a la ecuación $a = b$ el sistema no tiene solución.

3. $\{P(f(y), x) \vee P(x, f(y)),\ \neg P(f(a), x) \vee \neg P(y, f(b))\}$

   Este conjunto es insatisfacible. Vamos a verlo obteniendo una deducción de la cláusula vacía.

   En primer lugar, calculamos un factor de la primera cláusula, realizando la sustitución $(x|f(z); y|z)$. Nos queda entonces $P(f(z), f(z))$.

   Y ahora con esta cláusula y $\neg P(f(a), x) \vee \neg P(y, f(b))$ vamos a deducir la cláusula vacía:



**Ejercicio 5.** *Sean:*

1. $\alpha_1 = \forall x(\exists y(R(x,y) \wedge T(x,y)) \to P(x))$.
2. $\alpha_2 = \exists x(\neg Q(x) \wedge \forall y(\neg S(y) \to T(x,y)))$.
3. $\alpha_3 = \forall x(\forall y(S(y) \vee \neg R(x,y)) \to Q(x))$.
4. $\alpha_4 = \exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$.

*Comprueba que $\alpha_4$ es consecuencia lógica de $\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\}$ pero $\alpha_1$ no es consecuencia lógica de $\{\alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4\}$.*

**Solución:**

En primer lugar vamos a ver que el conjunto $\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \neg\alpha_4\}$ es insatisfacible. Para eso, pasamos cada una de esas fórmulas a cláusulas:

- $$\begin{array}{rcl} \alpha_1 & = & \forall x(\exists y(R(x,y) \wedge T(x,y)) \to P(x)) \\ & \equiv & \forall x(\neg\exists y(R(x,y) \wedge T(x,y)) \vee P(x)) \\ & \equiv & \forall x(\forall y\neg(R(x,y) \wedge T(x,y)) \vee P(x)) \\ & \equiv & \forall x(\forall y(\neg R(x,y) \vee \neg T(x,y)) \vee P(x)) \\ & \equiv & \forall x\forall y((\neg R(x,y) \vee \neg T(x,y)) \vee P(x)) \\ & \equiv & \forall x\forall y(\neg R(x,y) \vee \neg T(x,y) \vee P(x)) \end{array}$$

- $$\begin{array}{rcl} \alpha_2 & = & \exists x(\neg Q(x) \wedge \forall y(\neg S(y) \to T(x,y))) \\ & \equiv & \exists x(\neg Q(x) \wedge \forall y(\neg\neg S(y) \vee T(x,y))) \\ & \equiv & \exists x\forall y(\neg Q(x) \wedge (S(y) \vee T(x,y))) \\ & & \forall y(\neg Q(a) \wedge (S(y) \vee T(a,y))) \end{array}$$

- $$\begin{array}{rcl} \alpha_3 & = & \forall x(\forall y(S(y) \vee \neg R(x,y)) \to Q(x)) \\ & \equiv & \forall x(\neg\forall y(S(y) \vee \neg R(x,y)) \vee Q(x)) \\ & \equiv & \forall x(\exists y\neg(S(y) \vee \neg R(x,y)) \vee Q(x)) \\ & \equiv & \forall x(\exists y(\neg S(y) \wedge R(x,y)) \vee Q(x)) \\ & \equiv & \forall x\exists y((\neg S(y) \wedge R(x,y)) \vee Q(x)) \\ & & \forall x((\neg S(f(x)) \wedge R(x,f(x))) \vee Q(x)) \\ & \equiv & \forall x((\neg S(f(x)) \vee Q(x)) \wedge (R(x,f(x)) \vee Q(x))) \end{array}$$

- $$\begin{array}{rcl} \neg\alpha_4 & = & \neg\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x)) \\ & \equiv & \forall x\neg(P(x) \wedge \neg Q(x)) \\ & \equiv & \forall x(\neg P(x) \vee Q(x)). \end{array}$$

Puesto que lo vamos a necesitar después calculamos una forma clausulada de $\neg\alpha_1$ y de $\alpha_4$.

- $$\begin{array}{rcl} \neg\alpha_1 & = & \neg\forall x(\exists y(R(x,y) \wedge T(x,y)) \to P(x)) \\ & \equiv & \exists x\neg(\neg\exists y(R(x,y) \wedge T(x,y)) \vee P(x)) \\ & \equiv & \exists x(\exists y(R(x,y) \wedge T(x,y)) \wedge \neg P(x)) \\ & \equiv & \exists x\exists y(R(x,y) \wedge T(x,y) \wedge \neg P(x)) \\ & & R(b,c) \wedge T(b,c) \wedge \neg P(b) \end{array}$$

- $$\begin{array}{rcl} \alpha_4 & = & \exists x(P(x) \wedge \neg Q(x)) \\ & & P(d) \wedge \neg Q(d) \end{array}$$

Y ahora, comprobamos que el conjunto $\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \neg\alpha_4\}$ es insatisfacible. Para ello, tomamos las cláusulas que hemos obtenido a partir de esas fórmulas:

$$\{\neg R(x,y)\vee\neg T(x,y)\vee P(x),\ \neg Q(a),\ S(y)\vee T(a,y),\ \neg S(f(x))\vee Q(x),\ R(x,f(x))\vee Q(x),\ \neg P(x)\vee Q(x)\}.$$

Y buscamos por resolución la cláusula vacía:

$$\begin{array}{ccc}
\neg R(x,y)\vee\neg T(x,y)\vee P(x) & & S(z)\vee T(a,z)\\
(x|a) & & (z|y)\\
\neg R(a,y)\vee P(a)\vee S(y) & & R(x,f(x))\vee Q(x)\\
(y|f(a)) & & (x|a)\\
P(a)\vee S(f(a))\vee Q(a) & & \neg S(f(x))\vee Q(x)\\
 & & (x|a)\\
P(a)\vee Q(a) & & \neg P(x)\vee Q(x)\\
 & & (x|a)\\
Q(a) & & \neg Q(a)\\
\square & &
\end{array}$$

Al haber llegado a la cláusula vacía concluimos que $\alpha_4$ es consecuencia lógica de $\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\}$.

Ahora tenemos que ver si $\{\alpha_4,\ \alpha_3,\ \alpha_2\}\vDash\alpha_1$. Para eso, tenemos que ver si $\{\alpha_4,\ \alpha_3,\ \alpha_2,\ \neg\alpha_1\}$ es o no insatisfacible, y por lo que hemos hecho antes eso es equivalente a comprobar si el conjunto de cláusulas

$$\{P(d),\ \neg Q(d),\ \neg S(f(x))\vee Q(x),\ R(x,f(x))\vee Q(x),\ \neg Q(a),\ S(y)\vee T(a,y),\ R(b,c),\ T(b,c),\ \neg P(b)\}$$

es o no insatisfacible.

Puesto que el predicado $R$ y el predicado $T$ no aparecen negados en ninguna cláusula, en una deducción de la cláusula vacía no podríamos usar la cláusula $R(x,f(x))\vee Q(x)$ ni la cláusula $R(b,c)$, ni la cláusula $T(b,c)$ ni la cláusula $S(y)\vee T(a,y)$. Esto impide que se use también la cláusula $\neg S(f(x))\vee Q(x)$ (ya que el literal $\neg S(f(x))$ no puede eliminarse con ninguno). Nos queda entonces que si queremos obtener una deducción de la cláusula vacía hemos de hacerlo con las cláusulas del conjunto

$$\{P(d),\ \neg Q(d),\ \neg Q(a),\ \neg P(b)\}$$

Y con ellas no se puede hacer ninguna resolvente. Por tanto, no podemos deducir por resolución la cláusula vacía.

Esto nos dice que el conjunto $\{\alpha_4,\ \alpha_3,\ \alpha_2,\ \neg\alpha_1\}$ es satisfacible luego $\alpha_1$ no es consecuencia lógica de $\{\alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4\}$.