5. $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ $\quad \vec{b} = -\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$

Solo e) Vector unitario misma dirección que $\vec{a} \times \vec{b}$:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k} + \hat{k} + 2\hat{j} - 9\hat{i} = -10\hat{i} - \hat{j} + 7\hat{k}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{-10\hat{i} - \hat{j} + 7\hat{k}}{\sqrt{100+1+49}} = -\frac{\sqrt{6}}{3}\hat{i} + \frac{\sqrt{6}}{30}\hat{j} + \frac{7\sqrt{6}}{30}\hat{k}$$

7. $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ $\qquad \vec{b} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$

$\vec{a} \times \vec{b} = -3\hat{i} - 3\hat{j} + 3\hat{k}$ $\qquad \vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \Rightarrow \boxed{2a - b + c = 3}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$

¿$\vec{b}$?

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = -c\hat{i} + a\hat{j} + 2b\hat{k} + a\hat{k} - 2c\hat{j} - b\hat{i} = (-b-c)\hat{i} + (a-2c)\hat{j} + (2b+a)\hat{k}$$

$$\begin{cases} 2a - b + c = 3 \\ -b - c = -3 \\ a - 2c = -3 \\ 2b + a = 3 \end{cases} \quad \begin{rcases} -b-c=-3 \\ a-2c=-3 \end{rcases} \begin{matrix} -b-c=-3 \\ 3-2b-2c=-3 \end{matrix} \begin{rcases} -b-c=-3 \\ 3-2b-2c=-3 \end{rcases} -2b-2c=-6$$

NO

$c = 3 - b$

$a - 2c = -3 \Rightarrow a - 2(3-b) = -3 \Rightarrow a - 6 + 2b = -3 \Rightarrow a + 2b = 3$ NO

$2a - b + c = 3 \Rightarrow 2a - b + 3 - b = 3 \Rightarrow 2a - 2b = 0 \Rightarrow a - b = 0 \Rightarrow a = b$

$\hookrightarrow 2b + a = 3 \Rightarrow 2b + b = 3 \Rightarrow 3b = 3 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow c = 2$

$$\boxed{\vec{b} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}}$$

8. $\begin{cases} x = 2t^2 \\ y = t^2 - 4t \\ z = 3t - 5 \end{cases}$ $\qquad$ ¿$\vec{v}$ y $\vec{a}$ en $t = 1$?

$\vec{v}: \begin{cases} x = 4t \\ y = 2t - 4 \\ z = 3 \end{cases}$ $\qquad$ Si $t = 1 \Rightarrow \vec{v} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ (m/s)

$\vec{a}: \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$ $\qquad$ $\forall t \Rightarrow \vec{a} = 4\hat{i} + 2\hat{j}$ (m/s²)

9. $\vec{v} = (2x^2y - 4x^4)\hat{\imath} + (e^{xy} - y\,\text{sen}x)\hat{\jmath} + (x^2\cos y)\hat{k}$

a) $\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial x} = (4xy - 16x^3)\hat{\imath} + (ye^{xy} - y\cos x)\hat{\jmath} + (2x\cos y)\hat{k}$

b) $\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial y} = (2x^2)\hat{\imath} + (xe^{xy} - \text{sen}x)\hat{\jmath} + (-\text{sen}y\, x^2)\hat{k}$

c) $\dfrac{\partial^2 \vec{v}}{\partial x^2} = (4y - 48x^2)\hat{\imath} + (y^2e^{xy} + y\,\text{sen}x)\hat{\jmath} + (2\cos y)\hat{k}$

d) $\dfrac{\partial^2 \vec{v}}{\partial x \partial y} = (4x)\hat{\imath} + (e^{xy} + yxe^{xy} - \cos x)\hat{\jmath} + (-2x\,\text{sen}y)\hat{k}$

e) $\dfrac{\partial^2 \vec{v}}{\partial y \partial x}$ = Por el teorema Schwartz, el resultado es el mismo que el de $\dfrac{\partial^2 \vec{v}}{\partial x \partial y}$.

25. Calcular $\vec{E}$ y V creados por una esfera dieléctrica de radio R cargada uniformemente con una carga Q a una distancia r de su centro:

a) Si $r > R$

b) Si $r < R$

Datos

·) Esfera dieléctrica

·) R → radio de la esfera

·) Uniformemente cargada Q

Incógnitas

·) $\vec{E}(r) = ?$

·) $V(r) = ?$

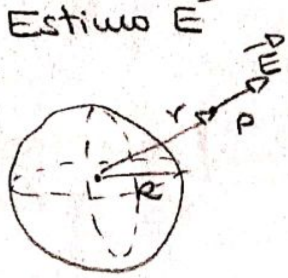
$\rho =$ densidad volumétrica de carga $= \frac{Q}{V}$

a) $r > R$

Uso T^ma Gauss

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\Sigma Q_{dentro}}{\varepsilon_0}$$

① Estimo $\vec{E}$



② Elijo una superficie cerrada que pase por P y que simplifique la integral de flujo. En este caso cogemos una esfera más grande que la cargada y que pase por P.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint |\vec{E}| \cdot |d\vec{S}| = |\vec{E}| \oint |d\vec{S}| = |\vec{E}|\, S_{esfera} = |\vec{E}|\, 4\pi r^2$$

③ El volumen a tener en cuenta es el de la esfera pequeña porque es la que está cargada:

$$\Sigma Q_{dentro} = Q = \rho V$$

④ T^ma Gauss

$$\underbrace{\oint \vec{E} \cdot d\vec{S}}_{} = \frac{\Sigma Q_{dentro}}{\varepsilon_0}$$

$$|\vec{E}|\, 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow |\vec{E}| = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\boxed{\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}}$$

⑤ Para el potencial:

$$V(r_A) - V(r_B) = -\int_{r_B}^{r_A} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_{r_B}^{r_A} |\vec{E}||d\vec{r}| = -\int_{r_B}^{r_A} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr =$$

$$-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_B}^{r_A} \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r}\Big|_{r_B}^{r_A} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

Si $r_B = \infty$ $\quad V(r_A) - V(r_B) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r_A}$

Si colocamos $V = 0V$ en $r_B = \infty$:

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

b) $r < R$

Uso T^{ma} Gauss

① $\vec{E}$ tiene dirección radial

② Escojo una esfera que pase por P

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum Q_{dentro}}{\varepsilon_0} \qquad \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint |\vec{E}| \cdot |d\vec{S}| = |\vec{E}| \oint dS = |\vec{E}| 4\pi r^2$$

③ $\sum Q_{dentro}$

La carga está uniformemente distribuida: $\rho = cte = \underbrace{\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}}_{\text{Esfera grande}} =$

$$= \underbrace{\frac{\sum Q_{dentro}}{\frac{4}{3}\pi r^3}}_{\text{Esfera interna}}$$

$$\sum Q_{dentro} = \frac{Q}{\cancel{\frac{4}{3}\pi} R^3} \cdot \cancel{\frac{4}{3}\pi} r^3 = \frac{Q r^3}{R^3}$$

④ Aplico T^{ma} Gauss:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q r^3}{\varepsilon_0 R^3} \Rightarrow |\vec{E}| = \frac{Q r^{\cancel{3}}}{4\pi \varepsilon_0 R^3 \cancel{r^2}} = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 R^3} r$$

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 R^3} r \,\hat{r}$$

⑤ Potencial

$$V(r_A) - V(r_B) = -\int_{r_B}^{r_A} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int |\vec{E}||d\vec{r}| = -\int_{r_B}^{r_A} \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 R^3} r\,dr =$$

$$-\frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 R^3} \int_{r_B}^{r_A} r\,dr = -\frac{Q}{8\pi \varepsilon_0 R^3} r^2 \Big|_{r_B}^{r_A} = \boxed{-\frac{Q}{8\pi \varepsilon_0 R^3}(r_A^2 - r_B^2) = V(r_A) - V(r_B)}$$

No puedo usar $r_B = \infty \Rightarrow V(r_B) = 0V$ porque $r < R$

Voy a calcular $V(r=R) \leftarrow \boxed{V(r=R) = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 R}}$

Usando la expresión del apartado ⓐ

y sustituyo en la expresión del apartado ⓑ

$$V(r) - V(R) = \frac{-Q}{8\pi \varepsilon_0 R^3}(r^2 - R^2)$$

$$V(r) = -\frac{Q}{8\pi \varepsilon_0 R^3} r^2 + \frac{Q}{8\pi \varepsilon_0 R^3} R^2 + \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 R}$$

Problema 23 Relación

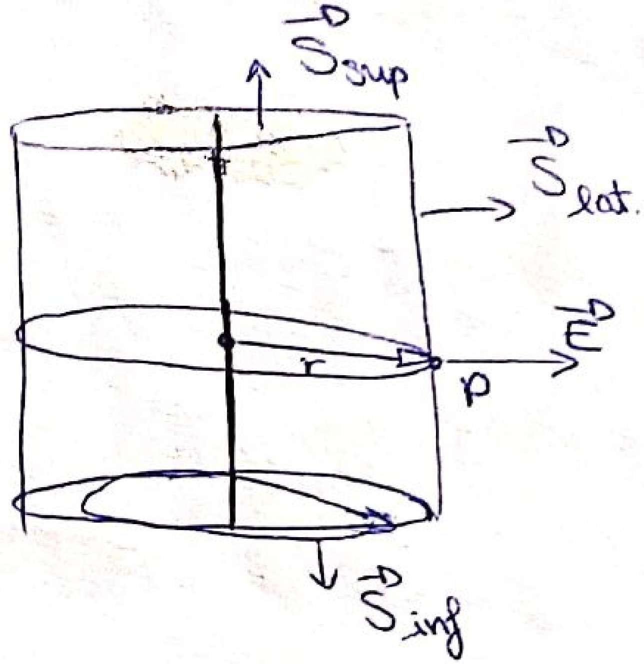
Datos

- Conductor rectilíneo infinito
- $\lambda = cte = \dfrac{carga}{longitud}$

¿$\vec{E}$?

Vamos a usar T^{ma} Gauss:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\Sigma Q_{dentro}}{\varepsilon_0}$$



1) Estimo dirección de $\vec{E}$: radial

$$\oint \vec{E}\, d\vec{S} = \underbrace{\int \vec{E}\, d\vec{S}_{lat}}_{|\vec{E}||d\vec{S}_{lat}|} + \cancelto{0}{\int \vec{E}\, d\vec{S}_{sup}} + \cancelto{0}{\int \vec{E}\, d\vec{S}_{inf}} = |\vec{E}| \int |d\vec{S}_{lat}| =$$

$$|\vec{E}| \cdot S_{lat} = |\vec{E}| \cdot 2\pi r h$$

② $\sum Q_{dentro} = \lambda h$

③ Aplico T^{ma} Gauss

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum Q_{dentro}}{\varepsilon_0}$$

$$|\vec{E}| 2\pi r h = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0} \Rightarrow |\vec{E}| = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \quad \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r}$$

Segunda parte del ejercicio

Incógnita

$\lambda = ?$

Datos

$r_A = 2m \Rightarrow V(r_A) = 20V$

$r_B = 4m \Rightarrow V(r_B) = 10V$

Determinamos la expresión de la ddp usando $\vec{E}$

$$V(r_A) - V(r_B) = -\int_{r_B}^{r_A} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_{r_B}^{r_A} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} dr = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_{r_B}^{r_A} \frac{dr}{r} =$$

$$-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}(\ln r_A - \ln r_B) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r_A}{r_B}\right)$$

$$\boxed{\lambda = \frac{(V(r_B) - V(r_A))}{\ln\left(\frac{r_A}{r_B}\right)} \cdot 2\pi\varepsilon_0}$$