Cálculo I - Evaluación 6

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Alumno: José Alberto Hoces Castro

1\. a) Sea $f:[c,d]\to\mathbb{R}$ continua y definamos $Z=\{x\in[c,d]: f(x)=0\}$. Supuesto $Z\neq\emptyset$, prueba que Z tiene máximo y mínimo.

b) Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a)<0$, $f(b)<0$ y $f(c)>0$ para algún $c\in]a,b[$. Prueba que hay dos números u,v verificando que $a<u<v<b$, $f(u)=f(v)=0$ y $f(x)>0$ para todo $x\in]u,v[$.

a) Por cómo se ha definido Z, está claro que $Z\subset[c,d]$, por lo que Z es un conjunto acotado y, por hipótesis, no vacío, por lo que tiene sentido considerar su ínfimo, el cual identificaremos con $\alpha=\inf(Z)$, y su supremo, el cual identificaremos con $\beta=\sup(Z)$. Como $Z\subset[c,d]$, está claro que $c\leq\alpha\leq\beta\leq d$. Para probar que Z tiene mínimo es necesario probar que $\alpha\in Z$, es decir, que $f(\alpha)=0$. Como el $\inf(Z)$ es un minorante que es límite de una sucesión de puntos de Z, es decir, que $\alpha=\lim\{z_n\}$ con $z_n\in Z$, y f es continua, se tiene que $\lim\{f(z_n)\}=f(\alpha)$. Así, como $\forall n\in\mathbb{N}$ se tiene que $f(z_n)=0$, en particular $f(\alpha)=0$ y concluimos que $\alpha\in Z$ y es su mínimo. Para probar que Z tiene máximo podemos proceder de forma análoga.

Ahora necesitamos probar que $\beta = \max(Z)$. Para ello podemos emplear que $\sup(Z)$ es un mayorante que es límite de una sucesión de puntos de Z, es decir, que $\beta = \lim\{b_n\}$ con $b_n \in Z$. Como f es continua, tenemos que $\lim\{f(b_n)\} = f(\beta)$ y, como $\forall n \in \mathbb{N}$ se tiene que $f(b_n) = 0$, en particular se tiene que $f(\beta) = 0$. Así, concluimos que $\beta \in Z$ y es su máximo.

b) Para probarlo hemos de hacer uso del Teorema de Bolzano. Hemos de tener en cuenta que f está definida en un intervalo y que es continua. Por el enunciado, tenemos que $a < c < b$. Dividiremos dicho intervalo $[a,b]$ en dos: $[a,c]$ y $[c,b]$. Analizaremos cada uno individualmente.

Como $f(a) < 0$ y $f(c) > 0$, por el Teorema de Bolzano la función debe anularse al menos una vez. Por ello, vamos a tomar el punto "u" más cercano a c que satisfaga que $f(u) = 0$, es decir, $u = \max\{x \in [a,c] ; f(x) = 0\}$ (puede que dicho conjunto tenga más puntos aparte de u, pues el Teorema de Bolzano afirma la existencia de "al menos" uno). Así, ya tenemos que $f(u) = 0$ con $a < u < c$.

En cuanto al intervalo $[c,b]$, haremos nuevamente uso del Teorema de Bolzano. Como $f(c)>0$ y $f(b)<0$, la función debe anularse al menos una vez en un punto $v\in[c,b]$. Sea v el punto más próximo a c tal que $f(v)=0$, es decir, $v=\min\{x\in[c,b]: f(x)=0\}$ (dicho conjunto, al igual que el anterior mencionado, puede tener más elementos aparte de v). Así, tenemos que $f(v)=0$ con $c<v<b$. Finalmente, por cómo hemos tomado u y v, tenemos lo que se pedía: $a<u<v<b$, con $f(u)=f(v)=0$.

* Nota: El máximo y el mínimo u y v existen por lo probado en a).

Para probar que $f(x)>0$ $\forall x\in]u,v[$, supongamos que existe algún $t\in]u,v[$ que no verifique dicha condición, es decir, un t tal que $f(t)<0$. Por el Teorema de Bolzano que hemos aplicado sabemos que:

- Si $t\in]u,c[$, como $f(t)<0$ y $f(c)>0$, $\exists s\in]t,c[$ tal que $f(s)=0$. Sin embargo, eso implicaría que $u\neq \max\{x\in[a,c]: f(x)=0\}$. Por lo tanto, necesariamente $f(t)>0$.
- Si $t\in]c,v[$, como $f(c)>0$ y $f(t)<0$, $\exists s\in]c,t[$ tal que $f(s)=0$. Sin embargo, eso implicaría que $v\neq \min\{x\in[c,b]: f(x)=0\}$. Por lo tanto, necesariamente $f(t)>0$.

José Alberto Hoces Castro

2. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua y creciente. Prueba que para todo conjunto $A\subset\mathbb{R}$ no vacío y mayorado se verifica que $\sup(f(A))=f(\sup(A))$.

Como A es un conjunto no vacío y mayorado, tiene sentido considerar su supremo al cual identificaremos con $\sup(A)=\alpha$. Por ser su supremo, se tiene que $a\leq\alpha \ \forall a\in A$.

Como f es creciente, se tiene que $f(a)\leq f(\alpha)$, de donde se sigue que $f(\alpha)\in \text{Mayor}(f(A))$ y por lo tanto, $\sup(f(A))\leq f(\alpha)$. Ahora se pueden distinguir dos casos:

1º) Si $\alpha\in A$, entonces $f(\alpha)\in f(A)$ y $\sup(f(A))=\text{máx}(f(A))=f(\alpha)$.

2º) Si $\alpha\notin A$. En este caso hemos de probar que $f(\alpha)=\sup(f(A))$. Dado un $\varepsilon>0$, por la continuidad de f en α (estamos usando la hipótesis), existe $\delta>0$ tal que $\forall x\in]\alpha-\delta,\alpha+\delta[$ se verifica que $f(\alpha)-\varepsilon<f(x)<f(\alpha)+\varepsilon$. Por ser $\alpha=\sup(A)$ y $\alpha\notin A$, se tiene que $]\alpha-\delta,\alpha[\cap A\neq\emptyset$ (es decir, tiene elementos dicho conjunto). Por ello, para $a\in]\alpha-\delta,\alpha[\cap A$ se verifica que $f(\alpha)-\varepsilon<f(a)$, lo que implica que $f(\alpha)-\varepsilon\notin \text{Mayor}(f(A))$. Por la propia definición de supremo, llegamos a partir de lo anterior que necesariamente a que $f(\alpha)=\sup(f(A))$.

José Alberto Hoces Castro

Ahora procederé a hacerlo mediante sucesiones:

Sabemos que el supremo de un conjunto es límite de una sucesión de puntos de dicho conjunto. En otras palabras, $\alpha = \lim\{a_n\}$ con $a_n \in A$ y siendo $\alpha = \sup(A)$. Si usamos la hipótesis de que f es continua, tenemos que $f(\alpha) = \lim\{f(a_n)\}$, lo que prueba que $f(\alpha)$ es límite de una sucesión de puntos de $f(A)$ y, por ser $f(\alpha) \in \text{Mayor}(f(A))$, podemos concluir que $f(\alpha) = \sup(f(A))$.

3. Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Prueba que la función $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ dada para todo $x \in [a,b]$ por $g(x) = \max f([a,x])$, es continua.

De acuerdo con el teorema 4.29, el cual afirma que cualquier función monótona en un intervalo cuya imagen es un intervalo es continua, necesitamos probar g es monótona (en particular creciente) y que su imagen es un intervalo.

Para probar que es creciente, sean t y s dos elementos del intervalo $[a,b]$ tales que $t < s$. Como $[a,t] \subseteq [a,s]$, entonces $f([a,t]) \subseteq f([a,s])$, de donde se deduce que $\max f([a,t]) \leq \max f([a,s])$, lo que equivale a decir que $g(t) \leq g(s)$, quedando probado así que g es creciente.

Ahora probaremos que la imagen de g es un intervalo. Por cómo está definida g, se sabe que $g(a) = \max f([a,a]) = f(a)$. Si definimos $M = \max f([a,b])$, tenemos que $g(b) = \max f([a,b]) = M$.

José Alberto Hoces Castro

Estos resultados se obtienen cuando g toma valores en los extremos de $[a,b]$, pero falta por probar que si g toma valores en $]a,b[$, entonces la imagen es $]f(a),M[$. Para ello, hemos de demostrar que $\forall u \in]f(a),M[, \exists v \in]a,b[: g(v)=u$.

En este caso nos es muy útil definir v como $v = \sup\{x \in]a,b[: \forall r \in]a,x], f(r) \leq u\}$, pues así queda claro que $f(v)=u$ y que $g(v)=u$.

Así, hemos probado que $g([a,b]) = [f(a),M]$, y como g es monótona (creciente, se ha probado antes), por el teorema 4.29 ya podemos afirmar que g es continua.