ÁLGEBRA 1

CURSO 20-21

RELACIÓN DE EJERCICIOS 1

1.1. Decidir si $A = B$, $A \subset B$ ó $A \in B$ en los siguientes casos:

i) $A = \{\emptyset\}$, $B = \{\{\emptyset\}\}$

ii) $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $B = \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

iii) $A = \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \emptyset\}\}$, $B = \{\{\emptyset\}\}$

1.2. Dar por extensión los siguientes conjuntos:
a) $\mathcal{P}(\emptyset)$; b) $\mathcal{P}(\{\emptyset\})$; c) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$

1.3. Demostrar las siguientes afirmaciones:

i) $\{a\} = \{b, c\}$ sí, y sólo sí $a = b = c$

ii) Si $a \neq b$ y $c \neq d$ entonces $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$ sí, y sólo sí $a = c$ y $b = d$

1.4. Si A y B son subconjuntos de un conjunto E demostrar:

i) $A \cap B = \emptyset \Longleftrightarrow A \subseteq \overline{B} \Longleftrightarrow B \subseteq \overline{A}$

ii) $A \cup B = E \Longleftrightarrow \overline{B} \subseteq A \Longleftrightarrow \overline{A} \subseteq B$

1.5. Sea X un conjunto y A, B, C subconjuntos de X. Demostrar que si $A \cup B \subseteq A \cup C$ y $A \cap B \subseteq A \cap C$ entonces $B \subseteq C$. Como consecuencia demostrar que si $A \cup B = A \cup C$ y $A \cap B = A \cap C$ entonces $B = C$.

1.6. (Leyes de De Morgan) Si A y B son subconjuntos de un conjunto X, demostrar:

$$i)\ \ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}\ ;\ \ ii)\ \ \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

1.7. Verificar las siguientes fórmulas donde A, B y C son subconjuntos de un conjunto X y $A \setminus C = \{x \in X / x \in A \wedge x \notin C\}$:

i) $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$

ii) $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$

iii) $(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$

iv) $(A \setminus B) \setminus (A \setminus C) = A \cap (C \setminus B)$

v) $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$

vi) $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$

1.8. Se define la diferencia simétrica de dos subconjuntos A y B de un conjunto X por

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Demostrar que $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ y que $A \triangle B = \emptyset$ sí, y sólo sí $A = B$.

1.9. Sean $A, B \subseteq X$. Demostrar:

i) $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$ es una representación de A como una unión disjunta.

ii) $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ es una representación de $A \cup B$ como una unión disjunta.

1.10. Sean $A, B \subseteq X$. Si A tiene n elementos y B tiene m elementos ¿Cuántos elementos tiene $A \cup B$?.

1.11. Sean $A, B \subseteq X$. Demostrar que si $A \subseteq B$ entonces $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

1.12. Se consideran los subconjuntos de $\mathbb{R}$, $A = [-1, 1]$ y $B = [-3, 4]$. Describir los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$: $A \times B$, $B \times A$, $(A \times B) \cap (B \times A)$, $(A \times B) \setminus (B \times A)$, $(A \times B) \cup (B \times A)$.