

CÁLCULO II

Grado en Matemáticas (Grupo A) y
Doble Grado en Física y Matemáticas

1. (1 punto).

(i) Sea $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. ¿Es uniformemente continua? ¿Es lipschitziana? Justifíquese la respuesta.

(ii) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable tal que $|f'(x)| \leq \frac{x^2}{1+x^2}$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Pruébese que f es uniformemente continua.

2. (1 punto). Sea $\alpha > 0$. Calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^{2\alpha} + 2^{2\alpha} + \dots + n^{2\alpha}}{n^{2\alpha+1}}$.

3. (2 puntos). Calcular:

(i) $\int_0^6 \frac{x}{\sqrt{|2-x|}} dx.$

(ii) $\int_0^{+\infty} e^{-bx} \cos(ax) dx$ (siendo $a, b > 0$).

4. (2 puntos). Sea $F :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $F(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} dt$. Estudiar sus extremos absolutos y relativos, su concavidad, puntos de inflexión y determinar su imagen. Calcular

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_x^{2x} e^{-t^2} dt}{\int_{x^2}^{2x^2} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt}.$$