Francisco J. López

Final

1. En $\mathbb{R}$ se define la siguiente familia de subconjuntos:

$$\mathcal{B} = \{\{q\} : q \in \mathbb{Q}\} \cup \{]x-\epsilon, x+\epsilon[: x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\}$$

   - Demuestra que $\mathcal{B}$ es una base de una topología τ sobre $\mathbb{R}$.
   - Compara τ con la topología usual.
   - Calcula el interior, adherencia y frontera de los subconjuntos $A = [0, \sqrt{2}]$ y $B = \{\sqrt{n} : n \in \mathbb{N}\}$ en $(\mathbb{R}, \tau)$.

2. Determina la menor topología τ sobre $\mathbb{N}$ tal que $O_n = \{1, \dots, n\} \in \tau$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y la aplicación $f : (\mathbb{N}, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau)$, dada por:

$$f(2n) = 2n - 1 \qquad f(2n-1) = 2n$$

   es cerrada. Caracteriza los homeomorfismos de $(\mathbb{N}, \tau)$ en $(\mathbb{N}, \tau)$ y encontrar un homeomorfismo del producto $(\mathbb{N}^2, \tau(\tau \times \tau))$ que no sea producto de ellos.

3. Sea (X, τ) un espacio topológico de Hausdorff. Prueba:

   - Si $f : ([0,1], \tau_u) \to (X, \tau)$ es una aplicación continua con $f(0) \in A \subset X$ y $f(1) \in X\backslash A$, entonces existe $t \in [0,1]$ tal que $f(t) \in \partial A$.
   - No existe una topología $\tau' = \tau$ sobre X con (X, τ') compacto y $\tau \subset \tau'$.

4. En $X = \mathbb{R} \times \{-1, 1\}$ se considera la relación de equivalencia:

$$(x_1, x_2)R(y_1, y_2) \iff \begin{cases} (x_1, x_2) = (y_1, y_2) \\ x_1, y_1 \leq -2 \\ x_1, y_1 \geq 2 \end{cases}$$

   - Estudia si la proyección $\pi : (X, \tau_u) \to (X/R, \tau_u/R)$ es abierta o cerrada.
   - Probar que $(X/R, \tau_u/R)$ es homeomorfo a $(\mathbb{S}^1, \tau_u)$.

1. Sea $([0,2],\tau)$ donde $\tau = \{O \subset [0,2] :]0,1[\subset O\} \cup \{\emptyset\}$. Halla el interior y la adherencia de $A = [0,1]$. Prueba que A es compacto, pero no $\overline{A}$.

2. Prueba que cada par de conjuntos no son homeomorfos:
   - $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Q}$.
   - $A =]-1,0[\cup]0,1[$ y $B =]-1,0[\cup]0,1]$.
   - $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$ y $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \geq 1\}$.

3. Establece de forma explícita un homeomorfismo entre:

$$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \qquad X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = z^2 \quad z > 0\}$$

4. Estudia la continuidad de la aplicación $f : (\mathbb{R}, \tau_S) \to (\mathbb{R}, \tau_S)$ dada por $f(x) = sen(x)$. Estudia cuándo un subconjunto A de $(\mathbb{R}, \tau_S)$ es conexo.

1. En $X = \mathbb{R} \times \{1, 5\}$ se considera la relación de equivalencia:

$$(x, y)R(x', y') \iff \begin{cases} (x, y) = (x', y') \\ x, x' \leq 0 \\ x, x' \geq 2 \end{cases}$$

- Estudia si la proyección $\pi : (X, \tau_u) \to (X/R, \tau_u)$ es abierta o cerrada.
- Calcula el interior de $\pi([1, 2] \times 1, 5)$ en $(X/R, \tau_u)$.
- Halla las componentes conexas de $\pi(]0, 1[\times\{1, 5\})$.
- Estudia si $(X/R, \tau_u)$ es homeomorfo a $(\mathbb{S}^1, \tau_u)$.

2. Sea $Y' = Y \cup \{p\}$, con (Y, τ) espacio topológico compacto, $p \notin Y$ y la familia

$$\tau' = \tau \cup \{O' \subset Y' : Y' \backslash O' \text{ es cerrado en } (Y, \tau)\}$$

- Prueba que τ' es una topología sobre Y'.
- Estudia si la identidad $1_Y : (Y, \tau) \to (Y, \tau')$ es un homeomorfismo.
- Prueba que $(Y'\tau')$ es compacto.
- Calcula la adherencia de Y en $(Y'\tau')$.

3. Razona si los siguientes subespacios de $(\mathbb{R}^2, \tau_u)$ son homeomorfos:

- $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = sen\left(\frac{1}{x}\right) \quad x \in]0, 1]\right.$
- $A \cup \{(0, 0)\}$
- $B =]0, 2] \times \{0\}$
- $\overline{A}$
- $\overline{B}$
- $C = \{0\} \times [-1, 1]$
- $B \cup C$

Antonio Alarcón y Sebastián Montiel

Recuperación

1. Sea $\mathbb{R}$ con la topología $\tau_p = \{U \subset \mathbb{R} : p \in U\} \cup \{\emptyset\}$ para $p \in \mathbb{R}$.
   - Caracteriza los entornos de $x \in \mathbb{R}$.
   - Prueba que $f : (\mathbb{R}, \tau_p) \to (\mathbb{R}, \tau_q)$ es continua si, y sólo si, f es constante ó $f(p) = q$.
   - Deduce que $(\mathbb{R}, \tau_p)$ y $(\mathbb{R}, \tau_q)$ son homeomorfos.

2. En $\mathbb{R} \times \{0, 1\}$ se considera la familia de subconjuntos:

$$\mathcal{B} = \{]a, b[\times\{0, 1\} : a < b\}$$

   - Demuestra que $\mathcal{B}$ es base de una topología τ sobre $\mathbb{R} \times \{0, 1\}$.
   - Estudia si los siguientes conjuntos son compactos en $(\mathbb{R} \times \{0, 1\})$:

$$A = [2, 3] \times \{0\}\cup]2, 3[\times\{1\} \qquad B =]2, 3[\times\{0\} \times [2, 3] \times \{1\} \qquad A \cap B$$

   - Calcula si las componentes conexas de $(\mathbb{R} \times \{0, 1\})$.

3. En $X = [-2, 2]$ con la topología usual inducida se define la relación de equivalencia:

$$xRy \iff \begin{cases} x = y \\ y \in [-2, 1] \cup [1, 2] \end{cases}$$

   - estudia si la proyección natural es abierta o cerrada.
   - Prueba que $(X/R, \tau_u)$ es homeomorfo a $(\mathbb{S}^1, \tau_u)$.

4. Razona si los siguientes subespacios de $(\mathbb{R}^2, \tau_u)$ son homeomorfos:
   - $\mathbb{S}^1$
   - $X = [-1, 1] \times \{-1, 1\} \cup \{-1, 1\} \times [-1, 1]$
   - $\mathbb{S}^1 \cup \mathbb{R} \times \{1\}$
   - $\mathbb{S}^1 \cup X \times \{1\}$
   - $\mathbb{S}^1 \cup \mathbb{R} \times \{0\}$

Antonio Alarcón y Sebastián Montiel

Final

1. Sea $X =]0,1[\cup]1,2]\cup\{29\}$ un subconjunto de $\mathbb{R}$ y τ la topología usual inducida en X.
   - ¿Es $A =]1,2]\cup\{29\}$ un abierto en (X,τ)?
   - Calcula la adherencia de A.
   - Calcula la frontera de A.
   - ¿Es (A,τ_A) compacto?

2. La afirmaciones siguientes son falsas. Da en cada caso un contraejemplo adecuado para demostrarlo:
   - La unión arbitraria de abiertos de un espacio topológico es un abierto.
   - El interior de la intersección de dos subconjuntos es igual a la intersección del interior de cada subconjunto.
   - Un subconjunto de un espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ que esté contenido en una bola abierta es siempre un compacto.

3. ¿Son $C = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2=1\}$ y $C^+ = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2-z^2=0,\ z>0\}$ homeomorfos? Da un homeomorfismo entre ellos.

4. En el conjunto $\mathbb{N}$ se define el subconjunto $\beta = \{D_n\subset\mathbb{N} : n\in\mathbb{N}\}$, donde D_n es el conjunto de los divisores de n.
   - Demuestra que β es base de una topología en $\mathbb{N}$.
   - Estudia si $(\mathbb{N},\tau_\beta)$ es un espacio T_2, si es compacto y si es conexo.

5. Demuestra que si X es un espacio topológico tal que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, donde los A_n son subconjuntos de X conexos y tales que $A_n\cap A_{n+1}\neq\emptyset \quad \forall n\in\mathbb{N}$, entonces X es conexo.

1. Sea X un conjunto y $A \subset X$ un subconjunto no vacío. Se define la familia τ de subconjuntos de X definida por:

$$\tau = \{O \subset X : A \subset O\} \cup \{\emptyset\}$$

   Pruébese que τ es una topología. Calcúlese el interior y la adherencia de A. Descríbase una base de entornos de cada punto de X formada por unn único entorno.

2. Demuéstrese que las siguientes afirmaciones son falsas poniendo un contraejemplo adecuado:
   - Si en un espacio topológico la familia de los conjuntos abiertos coincide con la familia de los conjuntos cerrados, entonces el espacio o es discreto o trivial.
   - La adherencia de la intersección de dos subconjuntos de un espacio topológico cualquiera coincide con la intersección de sus adherencias.
   - La unión de dos topologías definidas sobre un mismo conjunto es otra topología.

3. Sea $f : (X, \tau) \longrightarrow (X', \tau')$ una biyección continua entre un espacio (X, τ) compacto y otro (X', τ') de Hausdorff. Demuéstrese que f es un homeomorfismo.

4. Sea (X, τ) un espacio topológico en el que existe un punto $x_0 \in X$ que tiene un único entorno. Pruébese que tal espacio es siempre compacto y conexo. ¿En qué condiciones sería T_2?

5. Decídase razonadamente si el espacio producto $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$ (donde el primer factor está dotado de la correspondiente topología inducida de la euclídea del plano y el segundo de la euclídea de la recta) y el hiperboloide $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$ son o no son homeomorfos

1. **(3-4 puntos)** Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y τ la siguiente familia de subconjuntos de X:

$$\tau = \{X, \emptyset, \{1\}, \{4, 5\}, \{1, 4, 5\}\}$$

   a) Probar que τ es una topología en X y encontrar una base de τ.
   b) Encontrar el sistema de entornos y una base de entornos de los puntos 1, 2 y 4.
   c) Calcular el interior, la adherencia y la frontera de los subconjuntos A y B, siendo

$$A = \{2, 3\} \quad B = \{1, 4\}$$

   d) Sea $f : ([0, 1], \tau_u) \to (X, \tau)$ la aplicación

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}) \\ 3 & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

   ¿Es f una aplicación continua?
   e) Encontrar el grupo de homeomorfismos de (X, τ).
   f) Sea R la relación de equivalencia en X dada por xRx, $\forall x \in X$, $2R4$, $4R2$, $3R5$ y $5R3$. Describir el espacio cociente $(X/R, \tau/R)$.
   g) Calcular los subconjuntos conexos de (X, τ) y estudiar si (X, τ) es un espacio conexo por arcos.

2. **(3 puntos)** Sean $D^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}$ dotado de la topología usual (la inducida de la Euclídea). Se define la relación de equivalencia R en D^n dada por:

$$xRy \quad \text{si} \quad x = y \quad \text{o} \quad ||x|| = ||y|| = 1$$

   a) Estudiar si la proyección $\pi : (D^n, \tau_u) \to (D^n/R, \tau_u/R)$ es abierta o cerrada.
   b) Probar que $(D^n/R, \tau_u/R)$ es Hausdorff, compacto y conexo.
   c) Identificar topológicamente el espacio $(D^n/R, \tau_u/R)$.

   Indicación: Considerar la aplicación $f : D^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ dada por $f(x) = (\frac{\sin(\pi||x||)}{||x||} x, \cos(\pi||x||))$

3. **(4 puntos)** Sea (X,τ) un espacio topológico no compacto y ∞ un punto no perteneciente a X. En $\widehat{X} = X \cup \{\infty\}$ definimos la familia $\widehat{\tau} = \tau \cup \tau(\infty)$, donde:

$$\tau(\infty) = \{O \subset \widehat{X} | \widehat{X} - O \text{ es un subconjunto cerrado y compacto de } (X,\tau)\}$$

   a) Probar que τ y $\tau(\infty)$ son disjuntas y que $\widehat{\tau}$ es una topología en $\widehat{X}$.

   b) Probar que $\widehat{\tau}_X = \tau$, esto es, que la topología inducida por $\widehat{\tau}$ en X es τ.

   c) Probar que $\overline{X} = \widehat{X}$ y que ∞ no es un punto aislado en $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$.

   d) Probar que $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$ es compacto.

   e) Si $(X,\tau) = (\mathbb{R}, \tau_u)$, ¿sabrías identificar al espacio $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$?

4. **(3 puntos)** Sea $X = (\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \cup B$, donde A_n es el segmento de recta en $\mathbb{R}^2$ uniendo los puntos $(0,0)$ y $(1, \frac{1}{n})$ y $B = \{(t,0) \in \mathbb{R}^2 | \frac{1}{2} < t \leq 1\}$. Dotamos a X de la topología usual (inducida de la Euclídea).

   a) Probar que (X,τ_u) es un espacio conexo. ¿Es (X,τ_u) conexo por arcos?

   b) Calcular las componentes conexas de $(X - \{(0,0)\}, \tau_u)$

The End.

Francisco Milán y Francisco Martín

Tipología de examen: Final

Todos los ejercicios tienen la misma puntuación.

1. Sea $\mathbb{R}$ con la topología $\tau_p = \{O \subset \mathbb{R} \,/\, p \in O\} \cup \{\emptyset\}$, para $p \in \mathbb{R}$.

   a) Caracterizar los entornos de $x \in \mathbb{R}$.

   b) Probar que $f : (\mathbb{R}, \tau_p) \to (\mathbb{R}, \tau_q)$ es continua si y solo si f es constante o $f(p) = q \in \mathbb{R}$.

   c) Deducir que $(\mathbb{R}, \tau_p)$ y $(\mathbb{R}, \tau_q)$ son homeomorfos.

2. Sea $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ una aplicación biyectiva. Probar que son equivalentes:

   a) f es continua y abierta.

   b) $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}, \quad \forall\, A \subset X$.

3. *a*) Razonar si puede existir una biyección abierta del plano $(\mathbb{R}^2, \tau_u)$ en algún cociente de la esfera $(\mathbb{S}^2, (\tau_u)_{\mathbb{S}^2})$.

   b) Probar que si $\mathcal{B} = \{B_i \,/\, i \in I\}$ es una base de $(\mathbb{R}^2, \tau_u)$, entonces las componentes conexas de B_i, $i \in I$, forman otra base de $(\mathbb{R}^2, \tau_u)$.