Geometría II, Grupo A, 1 de julio 2020. Convocatoria ordinaria

1. (3,5 PUNTOS) Para cada $a \in \mathbf{R}$ se considera la métrica g_a de $\mathbf{R}^3$ cuya forma cuadrática asociada está dada por

$$\omega_a(x, y, z) = x^2 + 2a\,xy - (m^2 - 2ma)y^2 + az^2$$

(a) Calcula la nulidad y el índice y clasifica la métrica g_a según el valor de a.

(b) En el caso $a = 1$ calcula una base de Sylvester para g_1.

(c) ¿Son $(\mathbf{R}^3, g_1)$ y $(\mathbf{R}^3, g_{-1})$ isométricos? ¿Son $(\mathbf{R}^3, g_1)$ y $(\mathbf{R}^3, g_{\frac{1}{2}})$ isométricos? En caso afirmativo construye una isometría.

Instrucciones.

Primera pregunta: Comienzo a las 9h. Después hay que escanear los folios con el nombre y las soluciones y enviarlos desde vuestro correo de la ugr a *aros@go.ugr.es* antes de las 10h.

Aquellos alumnos que tengan concedida la Evaluación Única Final deben especificarlo en el primer folio.

En el enunciado, cada alumno tiene que sustituir el parámetro m por
$m = -1$, si la última cifra de su DNI es impar o por
$m = 2$, si la última cifra del DNI es par.
Ejemplo: Si DNI = 23456167H $\Rightarrow m = -1$, si DNI = 23456160H $\Rightarrow m = 2$.

Geometría II, Grupo A, 1 de julio 2020

2. (3,5 PUNTOS) En el espacio vectorial $\mathbf{R}_2[x]$ de los polinomios de grado menor o igual que dos con coeficientes reales se considera la métrica euclídea dada por:

$$g(p(x), q(x)) = \int_0^1 p(x)\, q(x)\, dx.$$

(a) Denotemos por $U = L(\{x - \frac{1}{2}, x + m\})$. Utiliza el proceso de Gram-Schmidt para obtener una base ortonormal de $(U, g_{|U})$ y otra de $(\mathbf{R}_2[x], g)$.

(b) Sea σ la simetría ortogonal respecto de U. Determina la matriz de σ respecto de una base de $\mathbf{R}_2[x]$.

(c) Sea r una rotación de eje $L(\{x - \frac{1}{2}\})$ y ángulo $\pi/4$. Determina la matriz de r respecto de una base de $\mathbf{R}_2[x]$.

(d) Clasifica y describe la isometría $r \circ \sigma$.

Instrucciones.

Segunda pregunta: Comienzo a las 10h. Las soluciones deben enviarse desde vuestro correo de la ugr a *aros@go.ugr.es* antes de las 11h.

En el enunciado, cada alumno tiene que sustituir el parámetro m por
$m = -1$, si la última cifra de su DNI es impar, o por
$m = 2$, si la última cifra del DNI es par.

Geometría II, Grupo A, 1 de julio 2020

3. (3 PUNTOS) Demuestra las siguientes afirmaciones.

(a1) No existe $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ tal que $\{I_3, A, A^2, \ldots, A^8\}$ sea una base de $\mathcal{M}_8(\mathbf{R})$.

(a2) Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ cuyos únicos valores propios (reales o complejos) son ± 1, posiblemente con multiplicidad. Entonces, $(A - I_n)^n (A + I_n)^n = \mathbf{0}_n$.

(b1) Si $A \in O(n)$ una matriz ortogonal y ninguno de sus elementos es nulo, entonces A tiene al menos $n-1$ elementos negativos y $n-1$ elementos positivos.

(b2) Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo $\dim(V) = n$ y $\{u_1, \ldots, u_n\}$ conjunto de vectores unitarios tal que para todo vector $v \in V$ se tiene $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^n g(v, u_i)^2$. Entonces $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es una base ortonormal de (V, g).

(c) Sea A una matriz simétrica real de orden n tal que $A^2 = A$. Entonces,

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{ij}| \leq n\sqrt{\mathrm{tr}(A)}.$$

Instrucciones.

Tercera pregunta: Comienzo a las 11h. Enviar las soluciones desde vuestro correo de la ugr a *aros@go.ugr.es* antes de las 12h.

Cada alumno debe hacer los siguientes apartados:

a1) y b1), si la última cifra de su DNI es impar, o

a2) y b2), si la última cifra del DNI es par.

El apartado c) sólo se tendrá en cuenta para aquellos alumnos que puedan optar a la máxima calificación.

en una base ortonormal = índice.

Examen Final Junio 2020

1. $a \in \mathbb{R}$. Métrica g_a en $\mathbb{R}^3$ con forma cuadrática:

$$\omega_a(x,y,z) = x^2 + 2axy - (1+2a)y^2 + az^2$$

a) Nulidad, índice y clasificación de g_a según el valor de a.

$$M(g_a, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & -1-2a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Primero veamos cuándo es degenerada:

$$\det(g_a) = a \det\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & -1-2a \end{pmatrix} = a(-1-2a-a^2) = -a^3-2a^2-a =$$

$$= -a(a^2+2a+1)$$

$$\hookrightarrow a = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$\det(g_a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ o $a = -1$

Si $a = 0 \Rightarrow M(g, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Nulidad$(g) = 1$
Índice $= 1$
Indef. deg. rango 2, ind. 1

Si $a = -1 \Rightarrow M(g, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xLeftrightarrow{F_1: F_1+F_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xLeftrightarrow{C_1: C_1+C_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Misma clasificación que antes

Para $a \neq 0$ y $a \neq -1$, aplicamos Sylvester:

$\alpha_1 = 1 > 0$ $\quad \alpha_2 = -1-2a-a^2 = -(a+1)^2$ $\quad \alpha_3 = -a(1+2a+a^2) = -a(a+1)^2$

$\alpha_2 < 0 \quad \forall a \neq 0 \neq -1$ $\qquad \alpha_3 > 0$ si $a<0$

$\alpha_3 < 0$ si $a > 0$

Si $a<0$, ind. no deg. rango 3, índice 2, nulidad 0

Si $a>0$, ind. no deg. rango 3, índice 1, nulidad 0

b) Para $a=1$, calcular una base de Sylvester.

$$M(g_1, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xLeftrightarrow{F_2: F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xLeftrightarrow{C_2: C_2 - C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xLeftrightarrow{F_2: \frac{1}{2}F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xLeftrightarrow{C_2: \frac{1}{2}C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xLeftrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xLeftrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xLeftrightarrow{C_2: C_2 - C_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xLeftrightarrow{C_2: \frac{1}{2}C_2} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xLeftrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \{(1,0,0), (0,0,1), \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 0\right)\}$$

c) ¿Son $(\mathbb{R}^3, g_1)$ y $(\mathbb{R}^3, g_{-1})$ isométricos? ¿Y $(\mathbb{R}^3, g_1)$ y $(\mathbb{R}^3, g_{1/2})$? En caso afirmativo, construir una isometría.

Para que dos EVM sean isométricos, sus métricas deben ser del mismo tipo (mismas características). Aprovechando el apartado a):

$(\mathbb{R}^3, g_1) \Rightarrow$ EVM indefinido no degenerado de rango 3, ind. 1

$(\mathbb{R}^3, g_{-1}) \Rightarrow$ EVM " " , ind. 2

$(\mathbb{R}^3, g_{\frac{1}{2}}) \Rightarrow$ EVM " " , ind. 1

Por lo que solo $(\mathbb{R}^3, g_1)$ y $(\mathbb{R}^3, g_{1/2})$ son isométricos. La isometría se construye llevando una base ortonormal de $(\mathbb{R}^3, g_1)$ a una de $(\mathbb{R}^3, g_{1/2})$. Por el apartado b) ya tenemos la de $(\mathbb{R}^3, g_1)$. Hallemos la otra:

$$\mathcal{M}(g_{1/2}, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{F_2 : F_2 - \frac{1}{2}F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & -9/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{C_2 : C_2 - \frac{1}{2}C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -9/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\xleftrightarrow[C_2 \leftrightarrow C_3]{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -9/4 \end{pmatrix} \xleftrightarrow[C_2 : \sqrt{2}C_2]{F_2 : \sqrt{2}F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -9/4 \end{pmatrix} \xleftrightarrow[C_3 : \frac{2}{3}C_3]{F_3 : \frac{2}{3}F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \{(1,0,0), (0,0,\sqrt{2}), (-\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, 0)\}$$

f isometría $\Rightarrow$ $f(1,0,0) = (1,0,0)$ $\quad f(0,0,1) = (0,0,\sqrt{2})$

$f(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)\}$

2. $\mathbb{R}_2[x]$ Métrica euclídea $\Rightarrow g(p(x), q(x)) = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$

a) $U = \mathcal{L}\{x - \frac{1}{2}, x - 1\}$. Usar Gram-Schmidt para tener una base ortonormal de U y otra de $\mathbb{R}_2[x]$.

$\cancel{u_1 = x - \frac{1}{2}} \quad \cancel{(x-\tfrac{1}{2})(x-\tfrac{1}{2}) = x^2 - x + \tfrac{1}{4}}$

$\cancel{\int_0^1 (x-\tfrac{1}{2})^2 dx = \left[\tfrac{x^3}{3} - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x}{4}\right]_0^1 = \tfrac{1}{12}}$

$\int_0^1 1\,dx = [x]_0^1 = 1 \qquad \int_0^1 x^4 dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{5} \qquad \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} \qquad \int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right] = \frac{1}{2} \qquad \int_0^1 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right] = \frac{1}{4}$

$$\mathcal{M}(g, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}$$

$$\omega_g\left(x-\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathcal{M}(g, B_u) \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/12 & 1/12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}$$

$$g((x-1),(x-1/2)) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathcal{M}(g, B_u) \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/6 & -1/12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{12}$$

$$u_1 = x - \frac{1}{2}$$

$$u_2 = x - 1 - \frac{1/12}{1/12}\left(x - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\omega_g\left(-\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathcal{M}(g, B_u) \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/4 & -1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1/4$$

$B = \{ \sqrt{12}(x-1/2), -1 \} \Rightarrow$ Base ortonormal de U

Para la base de $\mathbb{R}_2[x]$, hallamos $U^\perp$, una base ortonormal de $U^\perp$ y la unimos a la anterior:

$$U^\perp = \left\{ p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \;/\; \begin{array}{l} (x\ y\ z)\cdot \mathcal{M}(g, B_u)\cdot \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\ (x\ y\ z)\cdot \mathcal{M}(g, B_u)\cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \;/\; \begin{array}{l} (x\ y\ z)\begin{pmatrix} 0 \\ 1/12 \\ 1/12 \end{pmatrix} = 0 \\ (x\ y\ z)\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/6 \\ -1/12 \end{pmatrix} = 0 \end{array} \right\} = \left\{ p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \;/\; \begin{array}{l} y+z=0 \\ 6x+2y+z=0 \end{array} \right\} =$$

$$y = -z \quad x = z/6$$

$$= \mathcal{L}\{(1,-6,6)\} = \mathcal{L}\{1-6x+6x^2\}$$

$$\omega_g(1-6x+6x^2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \mathcal{M}(g, B_u) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{30} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}$$

$B = \{ \sqrt{12}(x-1/2), -1, \sqrt{5}(1-6x+6x^2) \} \Rightarrow$ Base ortonormal de $\mathbb{R}_2[x]$

b) σ simetría ortogonal respecto de U. Determina la matriz de σ respecto de una base de $\mathbb{R}_2[x]$.

Aprovechamos la base del anterior apartado pero sin ortonormalizar: $B = \{x - 1/2, -1, 1-6x+6x^2\}$

Y claramente $\mathcal{M}(S_U, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

c) r rotación de eje $\mathcal{L}\{x-1/2\}$ y ángulo $\frac{\pi}{4}$. Determina la matriz de r respecto de una base de $\mathbb{R}_2[x]$.

Misma base que en b). Por ser $U = \mathcal{L}\{x-1/2\}$ el eje, Eje $= V_1$. Como B es ortonormal y su primer vector es de U y los otros dos de $U^\perp$, r adoptará su forma canónica:

$$M(r,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

d) Clasificar y describir la isometría $r \circ \sigma$.

$$M(r,B)\cdot M(S_U,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

$$\det(\ ) = -\frac{2}{4} - \frac{2}{4} = -1$$

$$p_f(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}-\lambda & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\det\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}-\lambda & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\left(\lambda^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = (1-\lambda)(\lambda^2-1) = (1-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-1)$$

$$V_1 = \left\{ p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \,/\, (x\ y\ z)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}-2}{2} & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & \frac{-\sqrt{2}-2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(\sqrt{2}-2)y - \sqrt{2}z = 0 \Rightarrow y = \dfrac{\sqrt{2}z}{\sqrt{2}-2} = \dfrac{\sqrt{2}z(\sqrt{2}+2)}{-2} = \dfrac{2z+2\sqrt{2}z}{-2} = (-1-\sqrt{2})z$

$\sqrt{2}y + (\sqrt{2}+2)z = 0$

$\Downarrow$

$y = \dfrac{(-\sqrt{2}-2)z}{\sqrt{2}} = \dfrac{(-2-2\sqrt{2})z}{2} = (-1-\sqrt{2})z$

Tiene dim 2

$$V_{-1} = \left\{ p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \,/\, (x\ y\ z)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}+2}{2} & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & \frac{-\sqrt{2}+2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$x = 0$

$(\sqrt{2}+2)y - \sqrt{2}z = 0$

$\sqrt{2}y + (\sqrt{2}-2)z = 0 \Rightarrow \det\begin{pmatrix} \sqrt{2}+2 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2}-2 \end{pmatrix} = 2 - 2\sqrt{2} - 4 + 2\sqrt{2} + 4 = 0$

$\dim(V_{-1}) = 2$

Se trata de una simetría axial respecto de V_1

3. a) No existe $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tal que $\{I_3, A, \dots, A^8\}$ sea una base de $\mathcal{M}_8(\mathbb{R})$

$$P_f(\lambda) = a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d$$

Por el Tma de Cayley-Hamilton, sabemos que A es raíz de su propio polinomio característico. Entonces:

$$P_f(A) = \underbrace{aA^3 + bA^2 + cA + dI_3}\, = 0$$

$$\cancel{-\frac{1}{d}(aA^3 + b}$$

$$-dI_3 = aA^3 + bA^2 + cA$$

I_3 es comb. lineal de A, A^2 y A^3, por lo que jamás podrían formar base.

b) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ con valores propios ± 1 (posiblemente con multiplicidad. Entonces, $(A - I_n)^n (A + I_n)^n = O_n$