Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Modelos matemáticos I (curso 2020/21)

Segundo parcial. 1 de junio de 2021

$\boxed{\mathbf{1}}$ Una determinada población está estructurada en cuatro grupos diferentes de edad siguiendo un modelo de Leslie con matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1.3 & 3.1 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para cada $\alpha, \beta \in [0,1]$ estudia el comportamiento asintótico de la población si la distribución inicial es:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Puntuación: 1.5 puntos

$\boxed{\mathbf{2}}$ Sea A una matriz con valor propio dominante $\lambda_p > 0$. Estudia bajo qué condiciones la matriz por cajas

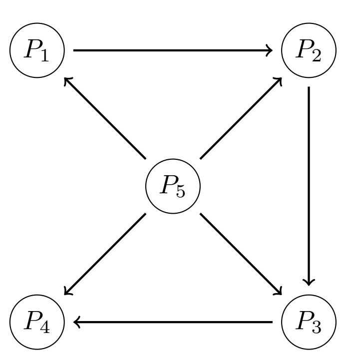
$$\begin{pmatrix} & & 0 \\ & \text{A} & \vdots \\ & & 0 \\ 0 \cdots 0 & & 1 \end{pmatrix},$$

tiene valor propio dominante y cuánto vale. Utiliza el resultado para estudiar si la siguiente matriz tiene valor propio dominante

$$\begin{pmatrix} 0 & 1.3 & 1.3 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puntuación: 1.5 puntos

$\boxed{\mathbf{3}}$ Dado el siguiente esquema de paginas web



determina la matriz de Google para $\alpha = 0.8$.

Puntuación: 3 puntos

$\boxed{\mathbf{4}}$ Estudia la transitividad y ergodicidad de las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0.2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Puntuación: 4 puntos

1 Una determinada población está estructurada en cuatro grupos diferentes de edad siguiendo un modelo de Leslie con matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1.3 & 3.1 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para cada $\alpha, \beta \in [0,1]$ estudia el comportamiento asintótico de la población si la distribución inicial es:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Puntuación: 1.5 puntos

-) Si $\alpha = 0$ y $\beta \neq 0$, $\vec{x}_0$ sería un dato inicial no reproductivo, luego la población se extinguiría.
-) Si $\alpha = \beta = 0$, no hay población.
-) Si $\alpha \neq 0$, $\vec{x}_0$ sería un dato inicial reproductivo, luego debemos ver el comportamiento asintótico:

$R_0 = 1 \cdot 0 + 0.8 \cdot 1.3 + 0.8 \cdot 0.5 \cdot 3.1 = 2.28 > 1 \Longrightarrow$ Superpoblación

2 Sea A una matriz con valor propio dominante $\lambda_p > 0$. Estudia bajo qué condiciones la matriz por cajas

$$B = \begin{pmatrix} A & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ 0 \cdots 0 & 1 \end{pmatrix},$$

tiene valor propio dominante y cuánto vale. Utiliza el resultado para estudiar si la siguiente matriz tiene valor propio dominante

$$\begin{pmatrix} 0 & 1.3 & 1.3 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puntuación: 1.5 puntos

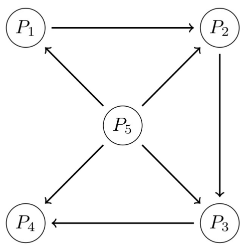
$$\det(B - \lambda I) = (1-\lambda)\underbrace{\det(A - \lambda I)}_{\text{A tiene VPD. Hay varias casuísticas}}$$

-) Si $\lambda_p = 1$, entonces B no tiene VPD porque su multiplicidad sería 2.
-) Si $\lambda_p < 1$, $\lambda = 1$ es el VPD de B.
-) Si $\lambda_p > 1$, λ_p también es VPD de B.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1.3 & 1.3 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow R_0 = 0.4 \cdot 1.3 + 0.4 \cdot 0.5 \cdot 1.3 = 0.78 < 1$$

Luego $\lambda = 1$ es el VPD de esta matriz.

3 Dado el siguiente esquema de paginas web



$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M$$

(matriz de enlaces)

determina la matriz de Google para $\alpha = 0.8$.

Puntuación: 3 puntos

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/5 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 & 1/5 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha \tilde{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4/25 & 1/5 \\ 0.8 & 0 & 0 & 4/25 & 1/5 \\ 0 & 0.8 & 0 & 4/25 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0.8 & 4/25 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 4/25 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G_\alpha = \alpha \tilde{M} + \underbrace{\frac{1-\alpha}{N}}_{0.04} \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 0.04 & 0.04 & 0.04 & 0.2 & 0.24 \\ 0.84 & 0.04 & 0.04 & 0.2 & 0.24 \\ 0.04 & 0.84 & 0.04 & 0.2 & 0.24 \\ 0.04 & 0.04 & 0.84 & 0.2 & 0.24 \\ 0.04 & 0.04 & 0.04 & 0.2 & 0.24 \end{pmatrix}$$

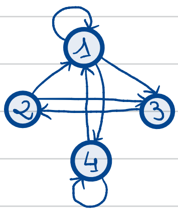
4 Estudia la transitividad y ergodicidad de las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0.2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Puntuación: 4 puntos

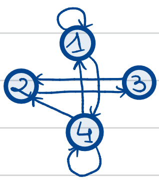
a)



$2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \Rightarrow$ Es transitiva

Como $A_{44} \neq 0$, concluimos que es ergódica.

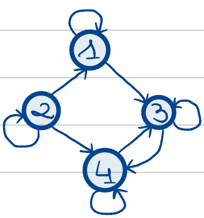
b)



$1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ (No hay manera de volver al 1)

No es transitiva $\Rightarrow$ No es ergódica

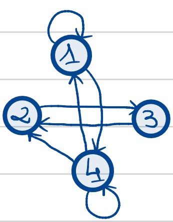
c)



No es transitiva $\Rightarrow$ No es ergódica

Porque a 2 solo le llegan conexiones de él mismo.

d)



Mismo diagrama que en b), misma respuesta.