Análisis Matemático I

Tema 12: Función implícita

Teorema de la función inversa y ecuaciones

Soluciones locales para ciertos sistemas de ecuaciones

Dada una función $f : A \to \mathbb{R}^N$, con $A \subset \mathbb{R}^N$, consideramos la ecuación:

$$f(x) - y = 0$$

cuyas soluciones son los pares $(x,y) \in A \times \mathbb{R}^N$ que la verifican

La solución (global) con x como dato e y como incógnita es evidente:

$$\left\{ (x,y) \in A \times \mathbb{R}^N : f(x) - y = 0 \right\} = \left\{ \big(x, f(x) \big) : x \in A \right\}$$

Problema: resolverla con y como dato y x como incógnita, es decir, expresar las soluciones en la forma $\big(g(y), y \big)$ para g conveniente

Solución (global) cuando f es inyectiva, con $g = f^{-1}$:

$$\left\{ (x,y) \in A \times \mathbb{R}^N : f(x) - y = 0 \right\} = \left\{ \big(g(y), y \big) : y \in f(A) \right\}$$

Solución (local) que nos da el teorema de la función inversa:

$$a \in U = U^\circ \subset A, \quad b = f(a) \in f(U) = V = V^\circ \subset \mathbb{R}^N, \quad f \text{ inyectiva en } U$$

Tomando $W = U \times V$ y $g = \big(f|_U \big)^{-1}$, tenemos:

$$\left\{ (x,y) \in W : f(x) - y = 0 \right\} = \left\{ \big(g(y), y \big) : y \in V \right\}$$

Planteamiento del problema

Ecuaciones o sistemas más generales

En vez de $f(x) - y = 0$ planteamos ahora una ecuación del tipo:

$$F(x,y) = 0$$

y queremos saber si permite considerar (por ejemplo) y como función de x

- Tendremos $x \in \mathbb{R}^N$ e $y \in \mathbb{R}^M$ (ahora puede ser $M \neq N$)
- Por tanto F estará definida en un subconjunto de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$
- y deberá tomar valores en $\mathbb{R}^M$

$x = (x_1, \ldots, x_N)$, $y = (y_1, \ldots, y_M)$, $F = (F_1, \ldots, F_M)$. Tenemos el sistema:

$$\begin{aligned} F_1(x_1, \ldots, x_N, y_1, \ldots, y_M) &= 0 \\ F_2(x_1, \ldots, x_N, y_1, \ldots, y_M) &= 0 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad & \ldots \\ F_M(x_1, \ldots, x_N, y_1, \ldots, y_M) &= 0 \end{aligned}$$

¿ Permite considerar a $y_1, \ldots, y_M$ como funciones de $x_1, \ldots, x_N$?

La solución que cabe esperar

Solución local del sistema planteado

- Queremos una equivalencia del tipo $F(x,y)=0 \quad \Leftrightarrow \quad y=\psi(x)$
- No podemos esperar nada mejor que en el caso de la función inversa, luego aspiramos a resolver "localmente" el problema
- Necesitamos una solución de partida (a,b) tal que $F(a,b)=0$

Tendremos un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$, una función $F:\Omega \to \mathbb{R}^M$ y un punto $(a,b) \in \Omega$ tal que $F(a,b) = 0$.

Con hipótesis adecuadas, pretendemos encontrar:

- Un abierto W de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ con $(a,b) \in W \subset \Omega$
- Otro abierto $U \subset \mathbb{R}^N$ y una función $\psi : U \to \mathbb{R}^M$ tales que:
$$\{(x,y) \in W : F(x,y)=0\} = \{\left(x,\psi(x)\right) : x \in U\}$$

La función ψ estará definida implícitamente por la ecuación $F(x,y)=0$

El teorema principal

Teorema de la función implícita

Sean $\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$, $F \in D(\Omega, \mathbb{R}^M)$ y $(a,b) \in \Omega$ con $F(a,b) = 0$.

Consideremos el abierto $\Omega_a \subset \mathbb{R}^M$ y la función $F_a \in D(\Omega_a, \mathbb{R}^M)$ dados por

$$\Omega_a = \{ y \in \mathbb{R}^M : (a,y) \in \Omega \} \qquad \text{y} \qquad F_a(y) = F(a,y) \quad \forall y \in \Omega_a$$

Supongamos que DF es continua en (a,b) y que $DF_a(b)$ es biyectiva:

Entonces existen: un abierto W de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$, con $(a,b) \in W \subset \Omega$, otro abierto $U \subset \mathbb{R}^N$, y una función $\psi \in D(U, \mathbb{R}^M)$, tales que:

$$\big\{ (x,y) \in W \ : \ F(x,y) = 0 \big\} = \Big\{ \big(x \, , \, \psi(x) \big) \ : \ x \in U \Big\}$$

Resumen de la demostración

Usaremos las proyecciones coordenadas $\pi_1 : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^N$ y $\pi_2 : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^M$

$$\pi_1(x,y) = x\,, \quad \pi_2(x,y) = y \qquad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$$

y las inyecciones naturales $J_1 : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ y $J_2 : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$

$$J_1(x) = (x,0) \quad \forall\, x \in\in \mathbb{R}^N\,, \qquad J_2(y) = (0,y) \qquad \forall\, y \in \mathbb{R}^M$$

Se usa el teorema de la función inversa para $H : \Omega \to \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ dada por

$$H(x,y) = \big(x\,,\,F(x,y)\big) \qquad \forall\,(x,y) \in \Omega$$

Se tiene $H(a,b) = (a,0)$ y $H = J_1 \circ \pi_1\big|_{\Omega} + J_2 \circ F$

También se tiene $\Omega_a = J_2^{-1}(\Omega)$ y $F_a(y) = F\big(J_1(a) + J_2(y)\big) \;\; \forall\, y \in \Omega_a$

Las hipótesis sobre F se trasladan a H:

- H es diferenciable en Ω y DH es continua en (a,b)
- $DH(a,b)$ es biyectiva

El teorema nos da dos abiertos W y G de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ tales que:

- $(a,b) \in W \subset \Omega$ y $H(W) = G$
- H es inyectiva en W y $K = \big(H\big|_W\big)^{-1} : G \to W$ es diferenciable

Concluimos tomando $U = J_1^{-1}(G)$ y $\psi = \pi_2 \circ K \circ J_1$

Uso del teorema anterior (I)

Nomenclatura que suele usarse (con la notación del teorema)

Fijados los abiertos W y U, la función ψ es única y $\psi(a) = b$

Se dice que la ecuación $F(x,y) = 0$ define a y como función implícita de x en un entorno de a, con $y = b$ para $x = a$

Escribiendo $x = (x_1, \ldots, x_N)$, $y = (y_1, \ldots, y_M)$, $F = (F_1, \ldots, F_M)$, $a = (a_1, \ldots, a_N)$ y $b = (b_1, \ldots, b_M)$, se dice que el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} F_1(x_1, \ldots, x_N, y_1, \ldots, y_M) &= 0 \\ F_2(x_1, \ldots, x_N, y_1, \ldots, y_M) &= 0 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad & \ldots \quad \ldots \\ F_M(x_1, \ldots, x_N, y_1, \ldots, y_M) &= 0 \end{aligned}$$

define a las variables reales $y_1, y_2, \ldots, y_M$ como funciones implícitas de $x_1, x_2, \ldots, x_N$ en un entorno del punto $(a_1, \ldots, a_N)$, con $(y_1, \ldots, y_M) = (b_1, \ldots, b_M)$ para $(x_1, \ldots, x_N) = (a_1, \ldots, a_N)$

También se suele escribir $y_j = y_j(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ para $j \in \Delta_M$

Uso del teorema anterior (II)

Indicaciones para probar la existencia de una función implícita

Problema: probar que un sistema de M ecuaciones con $N+M$ variables, define a M de ellas como funciones implícitas de las otras N, en un entorno de un punto $a \in \mathbb{R}^N$, en el que tales funciones toman un valor $b \in \mathbb{R}^M$.

(1) Tomamos $(a,b) \in \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ y $F : \Omega \to \mathbb{R}^M$ con $F(a,b) = 0$

(2) Comprobamos que $F \in D(\Omega, \mathbb{R}^M)$ y que DF es continua en (a,b)

A menudo $\Omega = \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ y es evidente que $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^M)$

Con la notación del teorema de la función implícita se tiene:

$$\frac{\partial F_a}{\partial y_j}(b) = \frac{\partial F}{\partial y_j}(a,b) \quad \forall j \in \Delta_M$$

luego la matriz $JF_a(b)$ está formada por M columnas de $JF(a,b)$

Por lo que la matriz $JF_a(b)$, se denota: $\dfrac{\partial(F_1, F_2, \ldots, F_M)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_M)}(a,b)$

(3) Calculada la matriz $JF(a,b)$ se identifica la submatriz recién indicada

(4) Se comprueba finalmente que: $\det\left(\dfrac{\partial(F_1, F_2, \ldots, F_M)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_M)}(a,b)\right) \neq 0$

Un caso particular

Caso $N = M = 1$

Sean $\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{R}^2$, $F \in D(\Omega)$ y $(a,b) \in \Omega$ con $F(a,b) = 0$.

Supongamos que las dos derivadas parciales de F son continuas en (a,b) y que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$$

Entonces existen: un abierto W de $\mathbb{R}^2$, con $(a,b) \in W \subset \Omega$,

otro abierto $U \subset \mathbb{R}$, y una función $\psi \in D(U)$, tales que:

$$\Big\{ (x,y) \in W \ : \ F(x,y) = 0 \Big\} = \Big\{ \big(x, \psi(x) \big) \ : \ x \in U \Big\}$$