Ejercicio puntuable Tema 1-Geometría II

13 de abril 2021

1. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el endomorfismo que en la base usual de $\mathbb{R}^3$ tiene como matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 1+a & 1 \\ -a & -a & -1 \\ a & a-1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se pide lo siguiente:

(a) (2 PUNTOS) Estudia para qué valores de a el endomorfismo f es diagonalizable.

(b) (1,5 PUNTOS) Para los valores de a para los que f es diagonalizable encuentra una base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de f.

(c) (1 PUNTO) Estudia si alguna de las matrices

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \; E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

puede ser la matriz del endomorfismo f respecto de alguna base (para los valores de a para los que f es diagonalizable). Justifica tu respuesta.

(d) (1 PUNTO) Para los valores de a para los que f es diagonalizable calcula f^2. ¿Qué puedes decir de f en este caso?

(e) (1,5 PUNTOS) Calcula $f^{100}(\pi, \pi, 0)$ para cualquier valor de a.

2. Responde de forma razonada a las siguientes cuestiones.

(a) (1 PUNTO) Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz cuyos únicos valores propios son $1, 2, 3, 4, 5$, posiblemente con multiplicidad. ¿Cúal es el rango de $A + I_n$?

(b) (2 PUNTOS) Sean $A, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Prueba que si $A = A \cdot C - C \cdot A$ entonces $A^2 = \mathbf{0}_2$.

PRUEBA TEMA 1 CURSO 2020/21

1.- a) Calculemos el polinomio característico de f.

$$P_f(\lambda) = P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det\begin{pmatrix} 1+a-\lambda & 1+a & 1 \\ -a & -a-\lambda & -1 \\ a & a-1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1+a-\lambda & 1+a & 1 \\ -a & -a-\lambda & -1 \\ 0 & -\lambda-1 & -\lambda-1 \end{pmatrix} = -(\lambda+1)\det\begin{pmatrix} 1+a-\lambda & 1+a & 1 \\ -a & -a-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sustituimos la F_3 por F_3+F_2

sacamos $-(\lambda+1)$ de la F_3

$$= -(\lambda+1)\det\begin{pmatrix} 1+a-\lambda & a & 1 \\ -a & 1-a-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -(\lambda+1)\det\begin{pmatrix} 1+a-\lambda & a \\ -a & 1-a-\lambda \end{pmatrix}$$

Sustituimos C_2 por C_2-C_3

$$= -(\lambda+1)\left[(1+a-\lambda)(1-a-\lambda)+a^2\right] = -(\lambda+1)\left[(1-\lambda)^2 - a^2 + a^2\right] =$$

$$= -(\lambda+1)(\lambda-1)^2$$

Luego claramente los valores propios son:

$$\lambda_1 = -1 \quad a_{\lambda_1} = 1 \quad y \quad \lambda_2 = 1 \quad a_{\lambda_2} = 2$$

Tenemos entonces que $1 \leq g_{\lambda_1} \leq a_{\lambda_1} = 1$ de donde $g_{\lambda_1} = 1$. Calculemos ahora g_{λ_2}.

$$g_{\lambda_2} = 3 - \text{rango}\begin{pmatrix} a & 1+a & 1 \\ -a & -1-a & -1 \\ a & a-1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= 3 - \text{rango}\begin{pmatrix} a & 1+a & 1 \\ a & a-1 & -1 \end{pmatrix}$$

Observemos que para que f sea diagonalizable $g_{\lambda_2} = 2$, es decir $\text{rango}\begin{pmatrix} a & 1+a & 1 \\ a & a-1 & -1 \end{pmatrix} = 1$. Observemos que para que esto ocurra $\det\begin{pmatrix} a & 1 \\ a & -1 \end{pmatrix} = -2a = 0$

Es decir $\boxed{a=0}$. En este caso

$$g_{\lambda_2} = 3 - \text{rango}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

Como para $a=0$ tenemos $a_{\lambda_1} + a_{\lambda_2} = 3$, $g_{\lambda_1} = a_{\lambda_1}$ y $g_{\lambda_2} = a_{\lambda_2}$, el T^a fundamental de la diagonalización nos dice que f es diagonalizable.

1. b) Para $a=0$ calculemos los subespacios propios de f.

$$V_{\lambda_1} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (A + I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} 2x + y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{matrix} \right\} =$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} x = -y \\ z = y \end{matrix} \right\} = \{ (-y,y,y) \mid y \in \mathbb{R} \} =$$

$$= L(\{(-1,1,1)\})$$

$$V_{\lambda_2} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (A - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{-1} \\ \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y + z = 0 \}$$

$$= \{ (x,y,-y) \mid x,y \in \mathbb{R} \} = L(\{(1,0,0),(0,1,-1)\})$$

Por tanto una base en la que diagonalize f viene dada por $B = \{(-1,1,1), (1,0,0), (0,1,-1)\}$

1.c) Tenemos que D es diagonalizable y tiene los mismos valores propios que A pero no con la misma multiplicidad luego D no es semejante a A y por tanto no puede ser la matriz de f en ninguna base.

Veamos si C es diagonalizable. Claramente los valores propios son $\lambda_1 = -1$ $a_{\lambda_1} = 1$ y $\lambda_2 = 1$ $a_{\lambda_2} = 2$.

Calculemos g_{λ_2}.

$$g_{\lambda_2} = 3 - \text{rango} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1$$

Por tanto C no es diagonalizable y por tanto no puede ser semejante a A con lo cual tampoco puede ser la matriz de f en ninguna base.

En cuanto a la matriz E sus valores propios son también $\lambda_1 = -1$ $a_{\lambda_1} = 1$ y $\lambda_2 = 1$ $a_{\lambda_2} = 2$. En este caso $g_{\lambda_2} = 3 - \text{rango} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2$

Como $g_{\lambda_1} = a_{\lambda_1}$ tenemos que en este caso E es diagonalizable y tiene los mismos valores propios que A con las mismas multiplicidades. Por tanto E es semejante a A lo que implica que hay una base tal que E es la matriz de f en esa base.

1. d) Si $a = 0$ tenemos que $M(f, B) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

De aquí $M(f^2, B) = I_3$, es decir $f^2 = Id_{\mathbb{R}^3}$.

De lo anterior deducimos que f es una simetría.

1. e) Sabemos que

$$\lambda^{100} = q(\lambda)\cdot \overbrace{\left(-(\lambda+1)(\lambda-1)^2\right)}^{p_f(\lambda)} + \alpha\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma$$

$\lambda = -1$ $\quad 1 = \alpha - \beta + \gamma \quad (I)$

$\lambda = 1$ $\quad 1 = \alpha + \beta + \gamma \quad (II)$

Derivamos $\quad 100\lambda^{99} = q'(\lambda)\left(-(\lambda+1)(\lambda-1)^2\right) - q(\lambda)\left((\lambda-1)^2 + 2(\lambda+1)(\lambda-1)\right)$
$+ 2\alpha\lambda + \beta$

Sustituyendo en $\lambda = 1$

$$100 = 2\alpha + \beta \quad (III)$$

De $(II) - (I)$ $\quad 2\beta = 0 \Rightarrow \boxed{\beta = 0}$

De (III) $\quad 2\alpha = 100 \Rightarrow \boxed{\alpha = 50}$

De (I) $\quad \gamma = 1 - 50 \Rightarrow \boxed{\gamma = -49}$

Por tanto $\quad \lambda^{100} = q(\lambda)\, p_f(\lambda) + 50\lambda^2 - 49$

Si evaluamos el polinomio en f tenemos utilizando el T^a de Cayley-Hamilton:

$$f^{100} = 50 f^2 - 49\, Id_{\mathbb{R}^3}$$

Por tanto

$$f^{100}(\pi,\pi,0) = \pi f^{100}(1,1,0) = \pi\left(50 f^2(1,1,0) - 49(1,1,0)\right) = \pi\left(50(4a+1,-4a+1,4a) - 49(1,1,0)\right) = \pi(200a+1,-200a+1,200a)$$

2. a) Como -1 no es un valor propio de A tenemos que el subespacio propio asociado a -1 se reduce a $\{0\}$ y por tanto $\text{rango}(A+I_n) = n$.

2. b) Lo primero que observamos es que

$$\text{traza}(A) = \text{traza}(A\cdot C - C\cdot A) = \text{traza}(A\cdot C) - \text{traza}(C\cdot A) \underset{\uparrow}{=} 0$$

traza $(A\cdot C) =$ traza $(C\cdot A)$.

De aquí

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - \text{traza}(A)\,\lambda + \det(A) =$$
$$= \lambda^2 + \det(A)$$

Por el T^a de Cayley-Hamilton tenemos:

$$A^2 + \det(A) I_2 = O_2 \Rightarrow \boxed{A^2 = -\det(A) I_2} \ast$$

Por otra parte tenemos:

$$(I) \quad A^2 = A\cdot(A\cdot C - C\cdot A) = A^2C - ACA$$

$$(II) \quad A^2 = (A\cdot C - C\cdot A)\cdot A = A\cdot C\cdot A - C\cdot A^2$$

Si sumamos (I) y (II) obtenemos:

$$2A^2 = A^2\cdot C - C\cdot A^2 \overset{\ast}{=}$$

$$= -\det(A) I_2\cdot C + \det(A)\, C\cdot I_2 = O_2$$

Concluimos entonces $\boxed{A^2 = O_2}$