Análisis Matemático II

Tema 11: Cálculo de integrales simples

Regla de Barrow (versión elemental)

Primitivas

En todo lo que sigue, fijamos un intervalo no trivial $J \subset \mathbb{R}$

y escribimos $\alpha = \inf J$ y $\beta = \sup J$, entendiendo que

$\alpha = -\infty$ si J no está minorado y $\beta = +\infty$ si J no está mayorado

Una primitiva de una función $f : J \to \mathbb{R}$ es

una función $G : J \to \mathbb{R}$, derivable en J con $G'(x) = f(x) \quad \forall x \in J$

Versión elemental de la regla de Barrow

Si $f : J \to \mathbb{R}$ es una función continua y G una primitiva de f, se tiene:

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) = \big[G(x)\big]_a^b \qquad \forall a, b \in J$$

Cuestión previa para la versión general

Si $G : J \to \mathbb{R}$ es una función derivable, entonces G' es medible

Regla de Barrow (versión general)

Versión general de la regla de Barrow

Si $f \in \mathcal{L}_1(J)$ y $G : J \to \mathbb{R}$ es una primitiva de f, entonces G tiene límite, tanto en α como en β, y se verifica que

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = \lim_{x \to \beta} G(x) - \lim_{x \to \alpha} G(x) = \big[G(x)\big]_\alpha^\beta$$

Consecuencia obvia, que extiende la versión elemental

Si $f \in \mathcal{L}_1^{\text{loc}}(J)$ y $G : J \to \mathbb{R}$ es una primitiva de f, entonces se tiene:

$$\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a) \qquad \forall\, a, b \in J$$

Criterio de integrabilidad

Dada una función $f : J \to \mathbb{R}_0^+$, sea G una primitiva de f.

Entonces $f \in \mathcal{L}_1(J)$ si, y sólo si, G tiene límite en α y β, en cuyo caso:

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = \big[G(x)\big]_\alpha^\beta$$

Potencias (I)

Integrabilidad de las funciones potencia

$$s \in \mathbb{R} \text{ fijo. } \quad f_s : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \qquad f_s(x) = x^s \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Para $a, b \in \mathbb{R}^+$, si $s \neq -1$ se tiene:

$$\int_a^b x^s dx = \left[\frac{x^{s+1}}{s+1} \right]_a^b = \frac{b^{s+1} - a^{s+1}}{s+1}$$

mientras que: $\displaystyle \int_a^b \frac{dx}{x} = \log\left(\frac{b}{a}\right)$

$$s < -1, \quad c \in \mathbb{R}^+ \quad \Longrightarrow \quad f_s \notin \mathcal{L}_1\big(]0, c[\big) \quad \text{y} \quad f_s \in \mathcal{L}_1\big(]c, +\infty[\big)$$

$$\int_c^{+\infty} x^s dx = \left[\frac{x^{s+1}}{s+1} \right]_c^{+\infty} = -\frac{c^{s+1}}{s+1} \quad \forall c \in \mathbb{R}^+, \ \forall s \in]-\infty, -1[$$

$$s > -1, \quad c \in \mathbb{R}^+ \quad \Longrightarrow \quad f_s \notin \mathcal{L}_1\big(]c, +\infty[\big) \quad \text{y} \quad f \in \mathcal{L}_1\big(]0, c[\big)$$

$$\int_0^c x^s dx = \left[\frac{x^{s+1}}{s+1} \right]_0^c = \frac{c^{s+1}}{s+1} \quad \forall c \in \mathbb{R}^+, \ \forall s \in]-1, +\infty[$$

$$s = -1, \quad c \in \mathbb{R}^+ \quad \Longrightarrow \quad f_s \notin \mathcal{L}_1\big(]c, +\infty[\big) \quad \text{y} \quad f_s \notin \mathcal{L}_1\big(]0, c[\big)$$

Potencias (II)

Resumen que conviene recordar

Dados $s \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}^+$, la función $x \mapsto x^s$ es

- integrable en $]0, c[$ si, y sólo si, $s > -1$
- integrable en $]c, +\infty[$ si, y sólo si, $s < -1$

Ejemplos anunciados anteriormente

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(0) = 0, \quad f(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \quad \forall t \in]0,1]$$

$$F : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \sqrt{x} \quad \forall t \in [0,1]$$

- f es integrable en $[0,1]$, pero no está acotada
- F es absolutamente continua, pero no es lipschitziana
- f es integrable en $[0,1]$, pero f^2 no lo es
- El producto de dos funciones integrables puede no ser integrable

Funciones racionales

Integrabilidad de ciertas funciones racionales

$x_0 \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{N}$ fijos. $\quad f(x) = \dfrac{1}{(x-x_0)^k} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$

Para $a, b \in]-\infty, x_0[$ o bien $a, b \in]x_0, +\infty[$, si $k > 1$ se tiene:

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-x_0)^k} = \frac{1}{1-k}\left(\frac{1}{(b-x_0)^{k-1}} - \frac{1}{(a-x_0)^{k-1}}\right)$$

mientras que: $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{x-x_0} = \log \frac{|b-x_0|}{|a-x_0|}$

I intervalo no trivial, $x_0 \in \overline{I} \implies f \notin \mathcal{L}_1(I)$

$$k > 1, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad b < x_0 < a \implies f \in \mathcal{L}_1\big(]-\infty, b[\big) \cap \mathcal{L}_1\big(]a, +\infty[\big)$$

$$\int_{-\infty}^b \frac{dx}{(x-x_0)^k} = \frac{1}{(1-k)(b-x_0)^{k-1}} \quad \forall b \in]-\infty, x_0[, \ \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$$

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{(x-x_0)^k} = \frac{1}{(k-1)(a-x_0)^{k-1}} \quad \forall a \in]x_0, +\infty[, \ \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$$

$k = 1$, I intervalo no acotado $\implies f \notin \mathcal{L}_1(I)$

Funciones exponenciales

Integrabilidad de las funciones exponenciales

$$s \in \mathbb{R}^* \text{ fijo.} \qquad f_s(x) = e^{s\,x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\int_a^b e^{s\,x}\,dx = \frac{e^{s\,b} - e^{s\,a}}{s} \qquad \forall a,b \in \mathbb{R}, \ \ \forall s \in \mathbb{R}^*$$

Para $c \in \mathbb{R}$ se tiene:

- $f_s \in \mathcal{L}_1\big(\,]-\infty, c[\,\big) \iff s > 0$
- $f_s \in \mathcal{L}_1\big(\,]c, +\infty[\,\big) \iff s < 0$

$$\int_{-\infty}^{c} e^{s\,x}\,dx = \frac{e^{s\,c}}{s} \quad \forall c \in \mathbb{R}, \ \ \forall s \in \mathbb{R}^+$$

$$\int_{c}^{+\infty} e^{s\,x}\,dx = -\frac{e^{s\,c}}{s} \quad \forall c \in \mathbb{R}, \ \ \forall s \in \mathbb{R}^-$$

$$\rho \in \mathbb{R}^+ \text{ fijo.} \qquad f(x) = e^{-\rho\,|x|} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}) \ \text{ con: } \ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\rho\,|x|}\,dx = \frac{2}{\rho}$$

Comparación mediante desigualdades

Ejemplo de comparación mediante una desigualdad

La función $x \mapsto \dfrac{\cos x}{x^2}$ es integrable en $]1, +\infty[$, ya que:

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^2}\,dx \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1$$

Comparación usando dos desigualdades

Sea $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{x - x^2}} \quad \forall x \in]0, 1[$

$0 < x < 1/2 \implies \sqrt{x - x^2} = \sqrt{x}\,\sqrt{1-x} \geqslant \sqrt{x}/\sqrt{2}$, de donde

$$\int_0^{1/2} |f(x)|\,dx \leqslant \int_0^{1/2} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{2}\,\Big[\sqrt{x}\Big]_0^{1/2} = 2$$

$1/2 < x < 1 \implies \sqrt{x - x^2} \geqslant \sqrt{1-x}/\sqrt{2}$, luego

$$\int_{1/2}^{1} |f(x)|\,dx \leqslant \int_{1/2}^{1} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}}\,dx = -2\sqrt{2}\,\Big[\sqrt{1-x}\Big]_{1/2}^{1} = 2$$

Por tanto, f es integrable en $]0, 1[$

Comparación por paso al límite

Criterio de comparación

Sea $I = [a, \beta[$ con $a \in \mathbb{R}$ y $a < \beta \leqslant +\infty$

y $f, g \in \mathcal{L}_1^{\text{loc}}(I)$ con $g(x) \neq 0$ para todo $x \in I$

- Si $\displaystyle\lim_{x \to \beta} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = L \in \mathbb{R}^+$, entonces: $f \in \mathcal{L}_1(I) \iff g \in \mathcal{L}_1(I)$
- Si $\displaystyle\lim_{x \to \beta} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0$, entonces: $g \in \mathcal{L}_1(I) \implies f \in \mathcal{L}_1(I)$
- Si $\displaystyle\frac{|f(x)|}{|g(x)|} \to +\infty \quad (x \to \beta)$, entonces: $g \notin \mathcal{L}_1(I) \implies f \notin \mathcal{L}_1(I)$

En el caso $I =]\alpha, b]$ con $b \in \mathbb{R}$ y $-\infty \leqslant \alpha < b$,

se verifica el resultado análogo, con α en lugar de β

Uso del criterio de comparación

Ciertas funciones racionales

$P \neq 0$ y Q polinomios de grados respectivos $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$Q(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \to -\infty} |x^{q-p}|\,|f(x)| = \lim_{x \to +\infty} |x^{p-q}|\,|f(x)| = L \in \mathbb{R}^+$$

$$g(x) = x^{p-q} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad I_1 =]-\infty, -1], \quad I_2 = [1, +\infty[$$

- $q - p > 1 \implies f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$
- $q - p < 1 \implies f$ no es integrable en ningún intervalo no acotado

La campana de Gauss

$$f(x) = e^{-x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$g(x) = e^{-|x|} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad I_1 = \mathbb{R}_0^-, \quad I_2 = \mathbb{R}_0^+$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x^2}}{e^{-|x|}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x^2}}{e^{-|x|}} = \lim_{x \to +\infty} e^{|x| - x^2} = 0$$

Por tanto, $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$

Integración por partes (versión elemental)

Fórmula de integración por partes (versión elemental)

Si $F, G : J \to \mathbb{R}$ son funciones de clase C^1 en J, se tiene:

$$\int_a^b F(t)\, G'(t)\, dt = \left[F(x)\, G(x) \right]_a^b - \int_a^b F'(t)\, G(t)\, dt \qquad \forall\, a, b \in J$$

Resultado clave para generalizarla

Dado un intervalo compacto $K \subset \mathbb{R}$,

si $F, G : K \to \mathbb{R}$ son funciones absolutamente continuas,

entonces la función producto FG también es absolutamente continua

Integración por partes (versiones generales)

Fórmula de integración por partes (primera versión general)

Dadas $F, G : J \to \mathbb{R}$, supongamos que, para cada intervalo compacto $K \subset J$ las restricciones $F\big|_K$ y $G\big|_K$ son absolutamente continuas.

Entonces, FG' y GF' son localmente integrables en J con:

$$\int_a^b F(t)\,G'(t)\,dt = \big[\,F(x)\,G(x)\,\big]_a^b - \int_a^b F'(t)\,G(t)\,dt \qquad \forall\, a, b \in J$$

Fórmula de integración por partes (segunda versión general)

Sean $F, G : J \to \mathbb{R}$ dos funciones derivables en $J =]\,\alpha\,,\beta\,[$, tales que $F'G$ y FG' son integrables en J.

Entonces FG tiene límite, tanto en α como en β, y se verifica que:

$$\int_\alpha^\beta F(t)\,G'(t)\,dt = \big[\,F(x)\,G(x)\,\big]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta F'(t)\,G(t)\,dt$$

Ejemplos de integración por partes (I)

Integrales indefinidas de ciertas funciones racionales

$$F_n(x) = \int_0^x \frac{dt}{\left(1+t^2\right)^n} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$F_{n+1}(x) = F_n(x) - \int_0^x \frac{t^2\,dt}{\left(1+t^2\right)^{n+1}}$$

$$F(t) = t \qquad \text{y} \qquad G(t) = -\frac{1}{2n(1+t^2)^n} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\int_0^x \frac{t^2\,dt}{\left(1+t^2\right)^{n+1}} = -\frac{x}{2n\left(1+x^2\right)^n} + \frac{1}{2n} F_n(x)$$

$$F_{n+1}(x) = \frac{2n-1}{2n} F_n(x) + \frac{x}{2n\left(1+x^2\right)^n} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$F_1(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arc\,tg} x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$F_2(x) = \int_0^x \frac{dt}{\left(1+t^2\right)^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x + \frac{x}{2\left(1+x^2\right)} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ejemplos de integración por partes (II)

Un caso más sencillo, con las mismas funciones

$$\rho_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\rho_{n+1} = \rho_n - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2\,dt}{\left(1+x2\right)^{n+1}}$$

$$F(t) = t \qquad \text{y} \qquad G(t) = -\frac{1}{2n\,(1+t^2)^n} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2\,dt}{\left(1+x^2\right)^{n+1}} = \frac{1}{2n}\,\rho_n$$

$$\rho_{n+1} = \frac{2n-1}{2n}\,\rho_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\rho_n = \frac{(2n-2)!\;\pi}{\left((n-1)!\right)^2\;4^{n-1}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Un ejemplo anunciado anteriormente

El criterio de integrabilidad no es válido para toda función medible

$$\varphi(t) = \frac{\operatorname{sen} t}{t} \ \ \forall t \in \mathbb{R}^+, \ \ \varphi(0) = 1, \ \ \Phi(x) = \int_0^x \varphi(t)\,dt \ \ \forall x \in \mathbb{R}_0^+$$

$$F(t) = 1/t \qquad \text{y} \qquad G(t) = -\cos t \qquad \forall t \in \mathbb{R}^+$$

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \frac{\cos a}{a} - \frac{\cos b}{b} - \int_a^b \frac{\cos t}{t^2}\,dt \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}^+$$

$$\big|\Phi(a) - \Phi(b)\big| \leqslant \frac{2}{\min\{a,b\}} \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}^+$$

$$x_n \in \mathbb{R}^+ \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \ \{x_n\} \to +\infty \quad \Longrightarrow \quad \big\{\Phi(x_n)\big\} \ \ \text{Cauchy}$$

Por tanto, Φ tiene límite en $+\infty$, y (obviamente) en 0

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\operatorname{sen} t|}{t}\,dt \geqslant \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\operatorname{sen} t|\,dt = \frac{2}{k\pi} \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\int_0^{+\infty} \big|\varphi(t)\big| = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\operatorname{sen} t|}{t} \geqslant \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

Cambio de variable (versión elemental)

Fórmula de cambio de variable (versión elemental)

Dados dos intervalos no triviales $I, J \subset \mathbb{R}$,

sea $\varphi : I \to J$ una función de clase C^1 en I

y $f : J \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces:

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,dt \qquad \forall\, a, b \in I$$

Resultado previo para versiones más generales

Dado un intervalo compacto $H \subset \mathbb{R}$

sea $\varphi : H \to \mathbb{R}$ una función derivable c.p.d. en H.

Si un conjunto $E \subset H$ verifica que $\lambda\big(\varphi(E)\big) = 0$,

entonces $\varphi'(x) = 0$ p.c.t. $x \in E$

La versión más general de la fórmula de cambio de variable

Condición necesaria y suficiente para el cambio de variable

Dados dos intervalos compactos $H, K \subset \mathbb{R}$,

sea $\varphi : H \to K$, una función derivable c.p.d. en H.

Si $f \in \mathcal{L}_1(K)$ y $F : K \to \mathbb{R}$ es una integral indefinida de f,

las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- La función $F \circ \varphi$ es absolutamente continua
- La función $\big(f \circ \varphi\big)\varphi'$ es integrable en H y se verifica que:

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f\,\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,dt \qquad \forall\, a,b \in H$$

Inconveniente para usar el resultado anterior

$$\varphi(t) = \big(t\cos(\pi/t)\big)^2 \quad \forall t \in]0,1], \quad \varphi(0) = 0, \quad F(x) = \sqrt{x} \quad \forall x \in [0,1]$$

φ es lipschitziana y F es absolutamente continua

$$F\big(\varphi(t)\big) = t\,\big|\cos(\pi/t)\big| \quad \forall t \in]0,1], \quad F\big(\varphi(0)\big) = 0$$

$F \circ \varphi$ no es de variación acotada, luego no es absolutamente continua

Condiciones suficientes para el cambio de variable

Dos condiciones suficientes, fáciles de comprobar

Dados dos intervalos compactos $H, K \subset \mathbb{R}$,

sean $\varphi : H \to K$ absolutamente continua,

$f \in \mathcal{L}_1(K)$ y $F : K \to \mathbb{R}$ una integral indefinida f.

Supongamos que se verifica una de las siguientes condiciones:

- Que φ sea monótona
- Que f esté acotada en K

Entonces $F \circ \varphi$ es absolutamente continua, luego $\big(f \circ \varphi \big)\, \varphi' \in \mathcal{L}_1(H)$ con

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\, dx = \int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\, \varphi'(t)\, dt \qquad \forall\, a, b \in H$$

La condición suficiente más general

Fórmula de cambio de variable

Dados dos intervalos no triviales $I, J \subset \mathbb{R}$, sea $\varphi : I \to J$ tal que $\varphi\big|_H$ es absolutamente continua, para todo intervalo compacto $H \subset I$.

Si $f : J \to \mathbb{R}$ es localmente integrable en J y verifica que $\big(f \circ \varphi\big)\,\varphi'$ es localmente integrable en I, entonces:

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f\,\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,dt \qquad \forall\, a, b \in I$$

La versión que permite estudiar la integrabilidad

Teorema de cambio de variable

Dado un intervalo abierto no vacío $I \subset \mathbb{R}$,

sea $\varphi : I \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 en I,

con $\varphi'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$, y sea $J = \varphi(I)$.

Entonces, una función $f : J \to \mathbb{R}$ es integrable en J si, y sólo si,

$\big(f \circ \varphi\big)\,\varphi'$ es integrable en I, en cuyo caso:

$$\int_J f = \int_I \big(f \circ \varphi\big)\,|\varphi'|$$

Forma en que suele usarse

$I =]\alpha, \beta[$ con $-\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant +\infty$ y $J =]\gamma, \delta[$ con $-\infty \leqslant \gamma < \delta \leqslant +\infty$

$\{\gamma, \delta\} = \{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\}$ con $\varphi(t) \to \widetilde{\alpha}$ $(t \to \alpha)$ y $\varphi(t) \to \widetilde{\beta}$ $(t \to \beta)$

Entonces: $$\int_{\widetilde{\alpha}}^{\widetilde{\beta}} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,dt$$

Ejemplos de cambio de variable (I)

Traslaciones

$$I = \left]\alpha, \beta\right[, \text{ con } -\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant +\infty$$

$$\text{fijado } c \in \mathbb{R}, \text{ tomamos } \varphi(t) = t + c \quad \forall t \in I$$

$$J = \varphi(I) = \left]\alpha + c, \beta + c\right[, \quad f : J \to \mathbb{R}$$

$$f \in \mathcal{L}_1(J) \iff t \mapsto f(t+c) \text{ es integrable en } I$$

$$\text{en cuyo caso: } \int_{\alpha+c}^{\beta+c} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(t+c)\,dt$$

Funciones periódicas

$$\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}, \quad f : A \to \mathbb{R}, \quad T \in \mathbb{R}^+$$

f es periódica con periodo T, o abreviadamente, T-periódica, cuando

$$x \in A \implies x \pm T \in A \text{ y } f(x+T) = f(x)$$

Entonces: $x \in A, \ k \in \mathbb{Z} \implies x + kT \in A, \ f(x+kT) = f(x)$

Ejemplos de cambio de variable (II)

Traslaciones con funciones periódicas

Traslación de un número entero de periodos:

$$\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}\,, \quad T \in \mathbb{R}^+\,, \quad f : A \to \mathbb{R} \ \text{ función } T\text{-periódica}, \quad I =]\alpha, \beta[\subset A$$

$$k \in \mathbb{Z} \quad \Longrightarrow \quad]\alpha + kT, \beta + kT[= J \subset A$$

$$f \in \mathcal{L}_1(J) \quad \Longleftrightarrow \quad f \in \mathcal{L}_1(I)\,, \qquad \text{en cuyo caso}$$

$$\int_{\alpha+kT}^{\beta+kT} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$$

Integral en un intervalo de periodo:

Si $a, c \in \mathbb{R}$ verifican que $J_a =]a, a+T[\subset A$ y $J_c =]c, c+T[\subset A$

$$f \in \mathcal{L}_1(J_a) \quad \Longleftrightarrow \quad f \in \mathcal{L}_1(J_c)\,, \qquad \text{en cuyo caso,}$$

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_c^{c+T} f(x)\,dx$$

Ejemplos de cambio de variable (III)

Funciones pares e impares

$$\emptyset \neq A \subset \mathbb{R} \ \text{ tal que } -x \in A \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f : A \to \mathbb{R}$$

$$f \ \text{ es una función par cuando } \ f(-x) = f(x) \quad \forall x \in A$$

$$\text{mientras que } \ f \ \text{ es impar, cuando } \ f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in A$$

Integrales de funciones pares o impares

$$f : A \to \mathbb{R} \ \text{ par o impar, } \quad \left]\alpha, \beta\right[\subset A \ \text{ con } \ -\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant +\infty$$

$$f \in \mathcal{L}_1\big(\left]-\beta, -\alpha\right[\big) \iff f \in \mathcal{L}_1\big(\left]\alpha, \beta\right[\big), \quad \text{en cuyo caso}$$

$$\int_{-\beta}^{-\alpha} f(x)\,dx = \sigma \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \quad (\sigma = 1 \text{ si } f \text{ par, } \sigma = -1 \text{ si } f \text{ impar})$$

Caso interesante: $A = \left]-\beta, \beta\right[$ con $0 < \beta \leqslant +\infty$, $f : A \to \mathbb{R}$ par o impar

$$f \in \mathcal{L}_1\big(\left]-\beta, 0\right[\big) \iff f \in \mathcal{L}_1\big(\left]0, \beta\right[\big) \iff f \in \mathcal{L}_1\big(\left]-\beta, \beta\right[\big)$$

Si f es par: $$\int_{-\beta}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{\beta} f(x)\,dx\,, \quad \int_{-\beta}^{\beta} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{\beta} f(x)\,dx$$

Si f es impar: $$\int_{-\beta}^{0} f(x)\,dx = -\int_{0}^{\beta} f(x)\,dx\,, \quad \int_{-\beta}^{\beta} f(x)\,dx = 0$$

Ejemplos de cambio de variable (IV)

El logaritmo

Para funciones del tipo $x \mapsto \mathcal{R}(e^x)$ donde $\mathcal{R}$ es una función racional

es útil el cambio de variable $\varphi(t) = \log t \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$

Ejemplo: $f(x) = \dfrac{1}{e^x + 1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\int_{\log a}^{\log b} \frac{dx}{e^x + 1} = \int_a^b \frac{dt}{t\,(t+1)} = \log\left(\frac{b\,(a+1)}{a\,(b+1)}\right) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^+$$

$$\int_0^x \frac{dt}{e^t + 1} = \log\left(\frac{2}{1+e^{-x}}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \log\left(\frac{2}{1+e^{-x}}\right) = \log 2\,, \quad \log\left(\frac{2}{1+e^{-x}}\right) \to -\infty \quad (x \to -\infty)$$

f no es integrable en ningún intervalo no minorado

$$\int_c^{+\infty} \frac{dx}{e^x + 1} = \log\left(1 + e^{-c}\right) \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

Ejemplos de cambio de variable (V)

El arco tangente

Para funciones del tipo $x \mapsto \mathcal{R}(\cos x\,, \operatorname{sen} x)$ donde $\mathcal{R}$ es una función racional

es útil el cambio de variable $\varphi(t) = 2 \operatorname{arc\,tg} t \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Para $t \in \mathbb{R}$ se tiene $\varphi'(t) = \dfrac{2}{1+t^2}$ y si $x = \varphi(t)$, entonces

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{y} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Ejemplo: $f(x) = \dfrac{1}{2+\cos x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{2+\cos x} = \int_0^{+\infty} \frac{2\,dt}{3+t^2}$$

$$= \frac{2}{3}\left[\sqrt{3} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

Ejemplos de cambio de variable (VI)

El seno

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall x \in]-1,1[$$

$$\varphi(t) = \operatorname{sen} t \qquad \forall t \in I =]-\pi/2, \pi/2[$$

$$f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t) = \frac{\operatorname{sen}^2 t}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}}\cos t = \operatorname{sen}^2 t \qquad \forall t \in I$$

$$\big(f \circ \varphi\big)\,\varphi' \in \mathcal{L}_1\big(]-\pi/2, \pi/2[\big) \qquad \text{(continua y acotada)}$$

luego $f \in \mathcal{L}_1\big(]-1,1[\big)$ y se tiene:

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 t\; dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1-\cos(2t)}{2}\,dt$$

$$= \left[\frac{t}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2t)}{4}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$$