

Álgebra I

Curso 2020/21

Índice

1	El lenguaje de los conjuntos	5
1.1	Sobre la teoría axiomática de conjuntos	6
1.1.1	Proposiciones y Demostraciones.	11
1.2	El conjunto producto cartesiano. Aplicaciones	15
1.2.1	Imágenes directas e inversas	19
1.3	Relaciones de equivalencia. Conjuntos cocientes.	21
2	Anillos conmutativos	25
2.1	Los anillos \mathbb{Z}_n	26
2.2	Generalidades	28
2.3	Los anillos de enteros cuadráticos $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$	30
2.4	Múltiplos y potencias naturales	32
2.5	Unidades. Cuerpos	33
2.6	Múltiplos negativos y potencias de exponente negativo	35
2.7	Los anillos de polinomios $A[x]$	37
2.8	Homomorfismos	40
3	Congruencias. Ideales y Cocientes	45
3.1	El primer teorema de Isomorfía	48
3.2	Operaciones con ideales	49

Tema 3

Congruencias. Ideales y Cocientes

La construcción de cocientes aparece en la mayoría de los contextos algebraicos (conjuntos, anillos, grupos, monoides, etc.). Para hacer un cociente en estos contextos, necesitamos una congruencia, esto es, una relación de equivalencia que sea compatible con la estructura algebraica que estemos considerando. Esta compatibilidad permitirá trasladar la estructura al conjunto de clases de equivalencias, haciendo que la proyección canónica sea morfismo.

Definición 3.0.1. *Dado un anillo A , una congruencia (de anillos) en A es una relación de equivalencia \equiv en A compatible con la estructura de anillo, lo que significa:*

- Compatible con la suma:

$$\left. \begin{array}{l} x \equiv y \\ z \equiv t \end{array} \right\} \Rightarrow x + z \equiv y + t.$$

- Compatible con el producto:

$$\left. \begin{array}{l} x \equiv y \\ z \equiv t \end{array} \right\} \Rightarrow xz \equiv yt.$$

- Compatible con los opuestos:

$$x \equiv y \Rightarrow -x \equiv -y.$$

Claramente la compatibilidad de los opuestos se deduce de la compatibilidad con el producto ya que

$$\left. \begin{array}{l} -1 \equiv -1 \\ x \equiv y \end{array} \right\} \Rightarrow -x \equiv -y.$$

Si \equiv es una congruencia en A , podemos trasladar la estructura de anillo de A al conjunto de clases de equivalencia A/\equiv de manera que la proyección canónica $pr : A \rightarrow A/\equiv$ sea un morfismo de anillos, definiendo suma, producto y opuestos en el cociente como sigue:

- $\bar{a} + \bar{b} := \overline{a + b},$

- $\bar{a} \cdot \bar{b} := \overline{a \cdot b}$,
- $-\bar{a} := \overline{-a}$.

Para todo $\bar{a}, \bar{b} \in A/\equiv$.

Dejamos como ejercicio comprobar que esta suma, producto y opuestos están bien definidos y que cumplen la axiomática de anillo.

El anillo A/\equiv es el *anillo cociente de A por la congruencia \equiv* .

Definición 3.0.2. *El núcleo de una congruencia \equiv en un anillo A se define como:*

$$\text{Ker}(\equiv) := \{a \in A; , a \equiv 0\}.$$

Destacamos las siguientes propiedades del núcleo de una congruencia:

- $0 \in \text{Ker}(\equiv)$
- Es cerrado para sumas: $a, b \in \text{Ker}(\equiv) \Rightarrow a + b \in \text{Ker}(\equiv)$.
- Es cerrado para opuestos $a \in \text{Ker}(\equiv) \Rightarrow -a \in \text{Ker}(\equiv)$.
- Es cerrado para múltiplos $a \in \text{Ker}(\equiv), \forall x \in A \Rightarrow x \cdot a \in \text{Ker}(\equiv)$.

Estas propiedades dan lugar a la siguiente

Definición 3.0.3. *Un ideal de un anillo A es un subconjunto $I \subseteq A$ que tiene las siguientes propiedades:*

- $0 \in I$
- Es cerrado para sumas: $a, b \in I \Rightarrow a + b \in I$.
- Es cerrado para opuestos $a \in I \Rightarrow -a \in I$.
- Es cerrado para múltiplos $a \in I, \forall b \in A \Rightarrow a \cdot b \in I$.

Es fácil de comprobar la siguiente

Proposición 3.0.4. *Un subconjunto no vacío $I \subseteq A$ es un ideal si, y sólo si, es cerrado para combinaciones lineales, esto es:*

$$\forall a, b \in I, \forall x, y \in A, xa + yb \in I.$$

Si I es un ideal de un anillo A escribiremos $I \leq A$.

Está claro que el núcleo de una congruencia es un ideal, veamos ahora que todo ideal determina una congruencia que lo tiene a el por núcleo.

Proposición 3.0.5. *Si $I \leq A$ es un ideal, entonces la relación definida por*

$$a \equiv_I b \Leftrightarrow a - b \in I,$$

es una congruencia con núcleo $\text{ker}(\equiv_I) = I$.

Demostración. Para ver que es congruencia tenemos que probar primero que es relación de equivalencia y después que es compatible con la estructura. Probamos solamente que es compatible con el producto, el resto de las propiedades las dejamos como ejercicio.

$$\left. \begin{array}{l} a \equiv b \Leftrightarrow a - b \in I \Rightarrow (a - b)c \in I \\ c \equiv d \Leftrightarrow c - d \in I \Rightarrow (c - d)b \in I \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{sumando}} (a - b)c + (c - d)b = ac - bd \in I \Rightarrow ac \equiv_I bd.$$

Si calculamos el núcleo

$$\text{Ker}(\equiv_I) = \{a \in A; a \equiv_I 0\} = \{a \in A; a - 0 = a \in I\} = I.$$

■

Notemos ahora que dada una congruencia \equiv en A , la relación $\equiv_{\text{Ker}(\equiv)}$ es la propia \equiv . De manera que tenemos:

Teorema 3.0.6. *Dar una congruencia en un anillo A es equivalente a dar un ideal de A .*

Observación 3.0.1. Dado un ideal $I \leq A$ si $a \equiv_I b$ diremos que a es congruente con b módulo I y a veces también lo denotaremos $a \equiv b \pmod I$.

Observación 3.0.2. Después del Teorema 3.0.6 tenemos que toda congruencia en A es de la forma \equiv_I para $I \leq A$ un ideal. Al conjunto cociente A/\equiv_I lo denotaremos simplemente por A/I y sus elementos serán clases de equivalencia módulo I . Veamos ahora como es la clase de equivalencia de un elemento $a \in A$ módulo I .

$$\bar{a} = \{x \in A; x \equiv_I a\} = \{x \in A; x - a \in I\} = a + I.$$

Donde $a + I$ es el conjunto de los elementos de A que se escriben de la forma $a + y$ con $y \in I$. Así,

$$A/I = \{a + I; a \in A\}$$

y la suma, el producto y los opuestos están definidos como:

- $(a + I) + (b + I) := (a + b) + I,$
- $(a + I) \cdot (b + I) := (a \cdot b) + I,$
- $-(a + I) := (-a) + I.$

Además la proyección canónica $pr : A \rightarrow A/I$ lleva un elemento $a \in A$ en $pr(a) = a + I \in A/I$.

Ejemplo 3.0.1. Todo anillo A tiene dos ideales *impropios*, el ideal cero $0 = \{0\} \leq A$ y el ideal *total* $A \leq A$.

Ejemplo 3.0.2. Si A es un anillo y $a \in A$ es un elemento, los múltiplos de a , que denotamos aA es un ideal de A . Está claro que los ideales improprios son los múltiplos de cero y de uno respectivamente. $0 = 0A$ y $A = 1A$.

Definición 3.0.7. Un ideal $I \leq A$ se dirá *principal* si existe un elemento $a \in A$ tal que $I = aA$.

El Teorema 2.1.1 de Euclides nos permite demostrar:

Teorema 3.0.8. *En el anillo \mathbb{Z} todo ideal es principal.*

Demostración. El ideal trivial es claramente principal, supongamos entonces un ideal no trivial $I \leq \mathbb{Z}$, denotemos $I^+ = \{a \in I; 0 < a\} \subseteq \mathbb{N}$.

Puesto que si $a \in I$ entonces $-1 \cdot a = -a \in I$ e I es no trivial, tenemos que $I^+ \neq \emptyset$ y por tanto podemos tomar $a = \min(I^+)$. Puesto que $a \in I^+ \subseteq I$ tenemos que $aA \subseteq I$. Recíprocamente, sea $b \in I$ un elemento cualquiera, ya que $a \neq 0$, podemos dividir b por a y tenemos que existen $q, r \in \mathbb{Z}$ tales que $b = aq + r$ y $0 \leq r < |a| = a$. Veamos que $r = 0$. Si no fuese cero, tendríamos que $r = b - aq \in I^+$ y $r < a$, que contradice que $a = \min(I^+)$. Por tanto $r = 0$ y $b = aq \in aA$. Así $I \subseteq aA$ y tenemos la igualdad. ■

Observación 3.0.3. Por el Teorema 3.0.8 todo ideal de \mathbb{Z} será de la forma $n\mathbb{Z}$ y sus elementos serán los múltiplos de $n \in \mathbb{Z}$. Notemos que $n\mathbb{Z} = -n\mathbb{Z}$ y por tanto todo ideal de \mathbb{Z} es de la forma $n\mathbb{Z}$ con $n \geq 0$. Además en lugar de escribir $a \equiv_{n\mathbb{Z}} b$ o $a \equiv b \pmod{n\mathbb{Z}}$ escribiremos $a \equiv_n b$ o $a \equiv b \pmod{n}$ y diremos que a es congruente con b módulo n , para $a, b, n \in \mathbb{Z}$ y $n \geq 0$.

3.1 El primer teorema de Isomorfía

Dado un morfismo de anillos $f : A \rightarrow B$ su núcleo está definido como

$$\ker f = \{a \in A; f(a) = 0\}.$$

Está claro que $0 \in \ker f$ y que $\ker f$ es cerrado para combinaciones lineales y por tanto $\ker f$ es un ideal de A , $\ker f \leq A$.

Observación 3.1.1. Si \equiv es una congruencia en A , entonces

$$\ker \equiv = \ker pr$$

con $pr :: A \twoheadrightarrow A/\equiv$ la proyección canónica.

En particular, si $I \leq A$ es un ideal, $\ker \equiv_I = I$.

La proyección canónica $pr : A \twoheadrightarrow A/I$ tienen la siguiente propiedad universal:

Proposición 3.1.1 (Propiedad universal de la proyección canónica).

Dado un ideal $I \leq A$ dar un morfismo $\bar{f} : A/I \rightarrow B$ es equivalente a dar un morfismo $f : A \rightarrow B$ tal que $f^(I) = 0$. Sintetizamos esta propiedad mediante el siguiente diagrama:*

$$\begin{array}{ccc} I & \xhookrightarrow{i} & A \xrightarrow{pr} A/I \\ & \searrow f \circ i = 0 & \downarrow \forall f \\ & & B \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{---} \nearrow \exists! \bar{f} \text{---} \\ \bar{f}(a + I) = f(a) \end{array}$$

Demostración. La demostración de esta proposición consiste en ver que dado un morfismo $f : A \rightarrow B$ podemos definir $\bar{f} : A/I \rightarrow B$ por $\bar{f}(a + I) := f(a)$, $\forall a \in A$, si, y sólo si, $f(y) = 0, \forall y \in I$. Pero, utilizando la proposición 1.3.2 podemos definir la aplicación \bar{f} si, y sólo si, $\forall a, b \in A$ se tiene que $a \equiv_I b$ implique $f(a) = f(b)$. Basta entonces considerar:

$$a \equiv_I b \Leftrightarrow a - b \in I \Rightarrow f(a - b) = 0 \Rightarrow f(a) = f(b).$$

Así si todos los elementos de I van a 0 por f podemos definir \bar{f} que claramente es un morfismo. El recíproco es claro. ■

Teorema 3.1.2 (Primer teorema de Isomorfía).

Dado un morfismo de anillos $f : A \rightarrow B$ existe un isomorfismo de anillos $b : A/\ker f \xrightarrow{\cong} \text{Im}(f)$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{pr} & A/\ker f \\ \downarrow f & & \downarrow b \cong \\ B & \xleftarrow{\quad} & \text{Im}(f) \end{array} \quad (3.1)$$

Demostración. El morfismo b está definido como $b(a + \ker f) := f(a)$. Utilizando la propiedad universal de la proyección claramente b está bien definido. Es rutinario probar que es morfismo, que es una biyección y que hace conmutar el diagrama 3.1. ■

Ejemplo 3.1.1. Tomemos $n \geq 2$ un entero y consideremos la aplicación $R : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$ que a cada entero $a \in \mathbb{Z}$ le hace corresponder el resto de dividir a entre n . Esta aplicación es un morfismo de anillos y claramente es sobreyectivo ya que si $0 < a$ entonces $R(a) = a$. Además el resto de dividir a por n es cero si, y sólo si, a es un múltiplo de n , por tanto $\ker R = n\mathbb{Z}$. El primer teorema de isomorfía nos asegura que se tiene un isomorfismo

$$b : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}_n; a + n\mathbb{Z} \mapsto R(a).$$

3.2 Operaciones con ideales

Sea A un anillo y sean $I, J \leq A$ dos ideales. Entonces:

- La intersección $I \cap J$ es un ideal.
- En general la unión $I \cup J$ no lo es.
- La suma $I + J = \{a + b; a \in I, b \in J\}$ es un ideal. Además este es el menor ideal que contiene a I y a J .
- El producto, definido como

$$IJ = \left\{ \sum_{i=1}^r a_i b_i; a_i \in I, b_i \in J \right\},$$

es un ideal, que además está contenido en la intersección $IJ \subseteq I \cap J$.

Dejamos como ejercicio probar las afirmaciones anteriores.

Observación 3.2.1. El producto de dos elementos ab con $a \in I$ y $b \in J$ es un elemento de IJ , pero la suma de dos de estos productos $a_1 b_1 + a_2 b_2$, $a_i \in I, b_j \in J, i = 1, 2$, no tiene porqué ser un producto de este tipo, es decir no tiene porqué existir $a_3 \in I$ y $b_3 \in J$ tal que $a_1 b_1 + a_2 b_2 = a_3 b_3$. A esto se debe que el producto de dos ideales se defina del modo que se ha hecho.

Sin embargo si hay un caso en el que el producto de dos ideales tiene una forma sencilla, este es cuando los ideales son principales, en cuyo caso es fácil comprobar:

$$aAbA = (ab)A.$$