Resumen MNI

•) Definición espacio normado

•) <u>Normas importantes</u>

$\mathbb{R}^N \quad \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p\right)^{1/p} \Rightarrow p=2$ (Euclídea)

$\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,N} |x_i| \Rightarrow$ Norma del máximo

$C([a,b]) \Rightarrow \|f\|_\infty = \max_{a\leq x\leq b} |f(x)| \Rightarrow$ Norma del máximo

Error absoluto $\Rightarrow \|x^* - x\|$

" " relativo $\Rightarrow \dfrac{\|x^* - x\|}{\|x\|}$

Distancia entre $x, y \in E \Rightarrow \text{dist}(x,y) := \|x-y\|$

$\{x_n\}_{n\geq 1}$ converge a $x_0 \in E$ si en E

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}$ con $n \geq n_0$. $\|x_n - x_0\| < \varepsilon$

se deduce $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0$

<u>Continuidad</u>

X, Y subconjuntos de E espacio normado

$f: X \to Y$ continua en $x_0 \in E$ si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \left.\begin{matrix} x \in E \\ \|x - x_0\| < \delta \end{matrix}\right\} \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

1)* $x \in \mathbb{R}^N \Rightarrow \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq N\|x\|_\infty$ "He supuesto que $\max_{i=1,\dots,N} |x_i| = |x_n|$"

<u>Dem.</u>

$$\max_{i=1,\dots,N} |x_i| \leq |x_1| + \dots + |x_n| \leq \underbrace{|x_n| + \dots + |x_n|}_{N \text{ veces}}$$

Es claro

Claro porque $|x_i| < |x_n| \ \forall i \neq n$

<u>Normas equivalentes</u> $\Rightarrow \|\cdot\|, \|\cdot\|_*$ equivalentes si $\exists c_1, c_2 > 0$ fijos tq

$$c_1\|x\| \leq \|x\|_* \leq c_2\|x\|$$

$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Leftrightarrow j = 1, \dots, N \Rightarrow \lim_{n\geq 1} (x_n)_j = (x_0)_j$

Norma en $\mathbb{R}^{M\times N}$

$$\|A\| := \sup_{x\in\mathbb{R}^N,\ \|x\|=1} \|Ax\| \quad (A\in\mathbb{R}^{M\times N})$$

Es claro, dividir por 1 no afecta en nada

$$\Rightarrow \|A\| = \sup_{x\in\mathbb{R}^N,\ x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \Rightarrow \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\| \Rightarrow \|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$$

2)* $\|\cdot\|_\infty$ en $\mathbb{R}^{M\times N}$

$$A\in\mathbb{R}^{M\times N} \Rightarrow \|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,M} \sum_{j=1}^{N} |a_{ij}|$$

$$\mathrm{sign}(a) := \begin{cases} 1 & a\geq 0 \\ -1 & a<0 \end{cases} \quad (a\in\mathbb{R})$$

$$\|[\mathrm{sign}(a_{11}),\dots,\mathrm{sign}(a_{1N})]^T\|_\infty = 1$$

Aplicamos que $\|A\|\geq\|Ax\|$ tomando x el vector anterior

$$\|A\|_\infty \geq \left\| A\cdot \begin{bmatrix} \mathrm{sign}(a_{11}) \\ \vdots \\ \mathrm{sign}(a_{1N}) \end{bmatrix} \right\|_\infty \geq \sum_{j=1}^{N} |a_{1j}|$$

La primera coordenada del vector resultante de $\mathbb{R}^M$ será $\sum_{j=1}^{N}|a_{1j}|$ por lo que su norma máximo será como mínimo ese valor

Si repetimos este razonamiento con $x=[\mathrm{sign}(a_{21}),\dots,\mathrm{sign}(a_{2N})]$, $x=[\mathrm{sign}(a_{31}),\dots,\mathrm{sign}(a_{3N})]$, $\dots$, $x=[\mathrm{sign}(a_{M1}),\dots,\mathrm{sign}(a_{MN})]$ llegamos a que $\|A\|_\infty \geq \max_{i=1,\dots,M}\sum_{j=1}^{N}|a_{ij}|$. Ahora a probar la otra desigualdad:

$x\in\mathbb{R}^N$, $\|x\|_\infty = 1$

$$\|Ax\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M1} & \cdots & a_{MN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} \right\|_\infty = \left\| \left[\sum_{j=1}^{N} a_{1j}x_j, \dots, \sum_{j=1}^{N} a_{Mj}x_j \right]^T \right\|_\infty =$$

$$= \max_{i=1,\dots,M} \left| \sum_{j=1}^{N} a_{ij}x_j \right| \leq \max_{i=1,\dots,M} \sum_{j=1}^{N} |a_{ij}||x_j| \leq \max_{i=1,\dots,M} \sum_{j=1}^{N} |a_{ij}|$$

Des. triangular

Acotamos superiormente ya que $\|x\|_\infty = 1$ y sus coordenadas son como mucho 1

Como $\|Ax\|_\infty \leq \max_{i=1,\dots,M}\sum_{j=1}^{N}|a_{ij}|$ y $\sup \|Ax\|_\infty = \|A\|_\infty$, por la definición de supremo se tiene que $\|A\|_\infty \leq \max_{i=1,\dots,M}\sum_{j=1}^{N}|a_{ij}|$ y se deduce la igualdad.

*Observación: $A \in \mathbb{R}^{N\times N} \Rightarrow \|A\|_1 = \|A^t\|_\infty$

Radio espectral de A: $\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \mathbb{C} \wedge \det(A-\lambda I)=0\}$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^t A)}$$

Definición (Norma matricial): $A, B \in \mathbb{R}^{N\times N} \Rightarrow \|AB\| \leq \|A\|\|B\|$

Si A es diagonalizable, con valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}$

$$A = PDP^{-1}$$

$P \in \mathbb{R}^{N\times N}$ regular y $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N \end{bmatrix}$

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

Tomamos:

$X \in \mathbb{R}^{N\times N} \mapsto CX \in \mathbb{R}^{N\times N}$ $\quad X \in \mathbb{R}^{N\times N} \mapsto XC \in \mathbb{R}^{N\times N}$ continuas

3)* <u>Dem.</u>

$$\lim_{n\to\infty} A^n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} PD^nP^{-1} = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} D^n = 0 \Leftrightarrow \rho(A) < 1$$

Diag.

Usamos las funciones continuas que hemos definido para multiplicar por P^{-1} y P

Para cada valor propio se aplica que $\lim_{n\to\infty} a^n = 0 \Leftrightarrow |a| < 1$

Teorema. $\forall A \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $\lim_{n\to\infty} A^n = 0 \Leftrightarrow \rho(A) < 1$

Ejercicio. $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ triangular, $\lim_{n\to\infty} A^n = 0 \Leftrightarrow \max_{i=1,\dots,N} |a_{ii}| < 1$

Es claro porque $\det(A-\lambda I) = (a_{11}-\lambda)\dots(a_{NN}-\lambda)$, por lo que $a_{11}, \dots, a_{NN}$ son los valores propios de A y aplicamos lo de antes

Corolario. $\|\cdot\|$ norma matricial en $\mathbb{R}^{N\times N}$, de forma que $\|A\| < 1$, entonces $\rho(A) < 1$

<u>Dem.</u>

Aplicamos que es matricial: $\|A^n\| \leq \|A\|^n$

$$\rho(A) < 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} A^n = 0$$

$$\|A^n\| \leq \|A\|^n \xrightarrow{(n\to\infty)} 0 \text{ pues } \|A\| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \|A^n\| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} A^n = 0 \Leftrightarrow \boxed{\rho(A) < 1}$$

Por el teorema visto

<u>Problemas bien planteados</u>

Unisolvente. Existe un único punto $x_0 \in X$ tq $f(x_0) = y_0$

Estable: x_0 depende continuamente de los datos y_0

La inversa de f es la resolvente g

$\Rightarrow$ A pequeñas perturbaciones de y_0, pequeñas perturbaciones de x_0

Definición. X e Y subconjuntos no vacíos de sendos espacios normados, $g: Y \to X$ una aplicación e $y_0 \in Y$. g estable en y_0 cuando

$$\exists \delta, M > 0 : \sup_{y \in Y,\, 0 < \|y - y_0\| < \delta} \frac{\|g(y) - g(y_0)\|}{\|y - y_0\|} < M$$

g estable $\Leftrightarrow$ Se cumple en todos los elementos de Y

---

g estable en $y_0 \Rightarrow g$ continua en y_0

$\not\Leftarrow$

<u>Contraejemplo</u>

$f(x) = \sqrt{x}$ es continua. Aplicamos la definición de estabilidad:

$$\sup_{0<|x|<\delta} \frac{|f(x) - f(0)|}{|x - 0|} = \sup_{0<|x|<\delta} \frac{\sqrt{x}}{x} = \sup_{0<|x|<\delta} \frac{1}{\sqrt{x}} < M$$

Sin embargo, $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ ¡No existe M!

---

4)* $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ clase $C^1 \Rightarrow g$ estable

<u>**Dem.**</u>

Partimos de la definición de estable. Para que g sea estable debe serlo en cada $x_0 \in Dom(g)$, es decir, $\exists M, \delta > 0$ tales que $\frac{|g(x) - g(x_0)|}{|x - x_0|} < M$ con $|x - x_0| < \delta$, lo que se traduce en $|g(x) - g(x_0)| < M|x - x_0|$. Como g es de clase C^1, es derivable y su derivada es continua en $Dom(g)$, por lo que podemos aplicar TVM:

$g: [a,b] \to \mathbb{R}$, g continua y derivable en (a,b),

$\exists c \in (a,b) ; f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Leftrightarrow f'(c)(b-a) = f(b) - f(a)$

Y lo aplicamos sobre x y x_0:

$f'(c)(x - x_0) = f(x) - f(x_0)$ con $c \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

Tomamos valores absolutos: $|f'(c)||x - x_0| = |f(x) - f(x_0)|$ con $c \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

Acotamos superiormente $|f'(c)|$ usando Weierstrass pues f' es continua y está definida en un intervalo:

$$|f'(c)| \leq \max_{x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]} |f'(x)|$$

Y entonces

$$M|x - x_0| > |f(x) - f(x_0)| \text{ con } M = 1 + \max_{x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]} |f'(x)|$$ y

hemos conseguido lo que queríamos. (Donde he puesto f quería decir g, me he confundido).

Definición. $g \in C^1(\mathbb{R})$ $y_0 \in \mathbb{R}$ Cond. relat.: $c(g, y_0) := \left| \frac{g'(y_0) y_0}{g(y_0)} \right|$ Cond. abs.: $C(g, y_0) := |g'(y_0)|$

$A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ regular, $y \in \mathbb{R}^N$

encontrar $x \in \mathbb{R}^N : f(x) = y \Leftrightarrow Ax = y$

Unisolvente, resolvente $g : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$

$$g(y) = A^{-1} y, \ (y \in \mathbb{R}^N)$$

5)* Si es unisolvente, la estabilidad es gratis

Aplicando la definición de estabilidad:

$$\underbrace{\sup_{0 < \|y - y_0\| < \delta} \frac{\|g(y) - g(y_0)\|}{\|y - y_0\|}} < M$$

$$\frac{\|A^{-1}y - A^{-1}y_0\|}{\|y - y_0\|} = \frac{\|A^{-1}(y - y_0)\|}{\|y - y_0\|}$$

Y como $\|A^{-1}\| = \sup_{y \in \mathbb{R}^N, y - y_0 \neq 0} \frac{\|A^{-1}(y - y_0)\|}{\|y - y_0\|}$ $\Bigg\}$ $\frac{\|A^{-1}(y - y_0)\|}{\|y - y_0\|} \leq \|A^{-1}\|$

$$M = \|A^{-1}\| + 1$$

Cond. matriz: $c(g, y_0) = \frac{\|\frac{\partial g}{\partial y}(y_0)\| \|y_0\|}{\|g(y_0)\|} = \frac{\|A^{-1}\| \|y_0\|}{\|A^{-1}y_0\|} = \frac{\|A^{-1}\| \|y_0\|}{\|x_0\|}$

Definición.

$\| \cdot \|$ norma matricial en $\mathbb{R}^{N \times N}$ inducida por una norma en $\mathbb{R}^N$.

Definimos el condicionamiento $c(A)$ de $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ regular como:

$$c(A) = \|A^{-1}\| \|A\|$$

6)* Dem.

$$\sup_{y_0 \neq 0} c(g, y_0) = \sup_{y_0 \neq 0} \frac{\|A^{-1}\| \|y_0\|}{\|A^{-1}y_0\|} = \sup_{x_0 \neq 0} \frac{\|A^{-1}\| \|Ax_0\|}{\|x_0\|} = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|$$

$\|A^{-1}\|$ no depende de x_0 y se saca, y ya sabemos que $\sup_{x_0 \neq 0} \frac{\|Ax_0\|}{\|x_0\|} = \|A\|$

$c(A) \geq 1 \Rightarrow$ Es matricial: $\underbrace{\|AB\| \leq \|A\| \|B\|}$

$$\|A \cdot A^{-1}\| = \|I\| = 1 \leq \|A^{-1}\| \cdot \|A\| = c(A)$$

Razón áurea: 

$$\underbrace{\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y}} \quad \phi = \frac{x}{y}$$

$$1 + \frac{1}{\phi} = \phi \Leftrightarrow \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Algoritmo PageRank de Google

Mide la relevancia de páginas web con enlaces en común

.) Nº de enlaces de otras páginas

.) Importancia de las páginas que establecen enlace con (P)

.) $x_i \geq 0$ y página i más importante que j si $x_i > x_j$

Posibilidad 1: $x_i \equiv$ nº enlaces que recibe página i Desv.: No se tiene en cuenta la relevancia de la página que establece un enlace con una dada.

Posibilidad 2: Contemplar la importancia de las páginas de las que llegan enlaces. $x_i \equiv$ suma rel. páginas con enlaces hacia i. Desv.: No se tienen en cuenta los enlaces salientes.

Posibilidad 3: $x_i \equiv$ suma relevancia páginas con enlaces hacia i dividida por el nº enlaces salientes de i

Sucesión Fibonacci

$$x_{n+2} = x_n + x_{n+1} \quad x_1 := 1 =: x_2$$

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 \dots$$

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n - \psi^n) \text{ con } \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ y } \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)} = \frac{\phi^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\phi^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n} \underset{\uparrow}{=} \frac{\phi - \phi\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2\phi}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2\phi}\right)^n}$$

Dividimos por ϕ^n

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \phi \iff \left|\frac{1-\sqrt{5}}{2\phi}\right| < 1 \text{ (Y sabemos que se cumple)}$$

"Expresión genérica demostrada en la relación

Sistemas posicionales y números máquina

$$x = (-1)^s \sum_{n=-M}^{N} x_n b^n$$

$\hookrightarrow x_b := (-1)^s \cdot (x_N \dots x_1 x_0 . x_{-1} x_{-2} \dots x_{-M})_b$

$s \in \{0, 1\} \Rightarrow$ Signo

$N, M \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ $\qquad 0 \leq x_k < b$

b base (suele ser 2 o 10) $\qquad k \in \{-M, \dots, N\}$

* Observaciones serie geométrica

$\alpha \neq 1$, $n > k \geq 0$, entonces $\displaystyle\sum_{j=k}^{n} \alpha^j = \frac{\alpha^k - \alpha^{n+1}}{1-\alpha}$

Dem.

$$\underbrace{(1-\alpha)\sum_{j=k}^{n} \alpha^j}_{} = \alpha^k - \alpha^{n+1}$$

$$(1-\alpha)(\alpha^k + \dots + \alpha^n) = \alpha^k + \dots + \alpha^n - \alpha^{k+1} - \dots - \alpha^{n+1} = \alpha^k - \alpha^{n+1}$$

$\alpha \in \mathbb{R}$, $k \geq 0$, $\displaystyle\sum_{j=k}^{\infty} \alpha^j$ converge $\iff |\alpha| < 1$

Dem.

$\boxed{\Rightarrow}$ Como la serie converge, $\{\alpha^j\}_{j\geq k}$ es convergente a 0 lo cual solo ocurre cuando $|\alpha| < 1$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $|\alpha| < 1$, $\{\alpha^j\}_{j\geq k}$ converge a 0 y:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=k}^{n} \alpha^k = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^k - \alpha^{n+1}}{-\alpha + 1} = \boxed{\frac{\alpha^k}{1-\alpha}}$$

Representación con punto flotante

$$(-1)^s b^e \sum_{n=1}^{t} a_n b^{-n} \iff (-1)^s \cdot (0.a_1 \dots a_t) \cdot b^e$$

$t \in \mathbb{N}$ es nº cifras significativas a_n, $0 \leq a_n \leq b-1$

$e \in \mathbb{Z}$ exponente, $L \leq e \leq U$, $L, U \in \mathbb{Z}$, $L \leq U$

Notación sistema (normalizado) de punto flotante

$$\mathbb{F}(b,t,L,U) := \{0\} \cup \left\{(-1)^s b^e \sum_{n=1}^{t} a_n b^{-n} : s \in \{0,1\},\ a_1 \neq 0,\ 0 \le a_1,\dots,a_t \le b-1,\ L \le e \le U\right\}$$

Proposición. $t\in\mathbb{N}$, $L,U\in\mathbb{Z}$, $L\le U$, $x\in\mathbb{F}(b,t,L,U)$:

i) $-x\in\mathbb{F}(b,t,L,U)$ Es tan fácil como cambiar "s".

ii) $b^{L-1}\le|x|\le b^U(1-b^{-t})$

7)* *Dem.*

$b^{L-1}\le |x| \Rightarrow$ El número más pequeño del sistema es:

$$x=(0.\underbrace{1\,0\dots0}_{t})\cdot b^L = \frac{1}{b}\cdot b^L = b^{L-1}$$

$|x|\le b^U(1-b^{-t}) \Rightarrow$ El número más grande del sistema es:

$$x=(0.b-1\dots b-1)\cdot b^U = b^U\cdot\sum_{j=1}^{t} \frac{b-1}{b^j} = b^U(b-1)\sum_{j=1}^{t}\frac{1}{b^j}=$$

$$=b^U(b-1)\sum_{j=1}^{t}\left(\frac{1}{b}\right)^j = b^U(b-1)\cdot\frac{\frac{1}{b}-\frac{1}{b^{t+1}}}{1-1/b} = b^U\cancel{(b-1)}\cdot\frac{\frac{b^t-1}{b^{t+1}}}{\cancel{\frac{b-1}{b}}}=$$

$$=b^U\cdot\frac{b^{t+1}-b}{b^{t+1}} = b^U\left(1-\frac{1}{b^t}\right) = b^U(1-b^{-t})$$

iii) $\operatorname{card}\mathbb{F}(b,t,L,U) = \underset{\text{Pos. y neg.}}{2}\underbrace{(b-1)}_{\substack{b-1\\ \text{cifras}\\ \text{posibles}}}\underbrace{b^{t-1}}_{\substack{\text{Posibles}\\ \text{comb.}}}\underbrace{(U-L+1)}_{\substack{\text{Todas las comb. posibles}\\ \text{son para } L\le e\le U}}+1 \rightarrow$ El 0

* $\mathbb{F}(b,t,L,U)$ no se distribuye uniformemente

Definición. Épsilon máquina $\rightarrow$ $\varepsilon_M := b^{1-t}$

Definición. Si $x=(-1)^s b^e\sum_{n=1}^{\infty} a_n b^{-n}$, $tr(x):=(-1)^s\cdot(0.a_1\dots a_t)\cdot b^e$

Definición. Si $x=(-1)^s b^e\sum_{n=1}^{\infty} a_n b^{-n}$, $rd(x)=(-1)^s\cdot b^e\cdot(0.a_1\dots a_{t-1}r_t)$

$$r_t := \begin{cases} a_t & \text{si } a_{t+1}<b/2\\ a_t+1 & \text{si } a_{t+1}\ge b/2\end{cases}$$

Proposición.
Sea $\mathbb{F}(b,t,L,U)$, $L\le e\le U$ y $x=(-1)^s b^e\sum_{n=1}^{\infty} a_n b^{-n}\in\mathbb{R}$. Entonces:

i) $|x-tr(x)|\le b^{e-t}$ iii) $|x-rd(x)|\le \frac{1}{2}b^{e-t}$

ii) $\frac{|x-tr(x)|}{|x|}\le\varepsilon_M$ iv) $\frac{|x-rd(x)|}{|x|}\le\frac{1}{2}\varepsilon_M$

8)* *Dem.*

i) $$|x-tr(x)| = b^e\sum_{n=t+1}^{\infty} a_n b^{-n} \underset{\substack{\text{Acotamos}\\ \text{superiormente}}}{\le} b^e(b-1)\sum_{n=t+1}^{\infty} b^{-n} \underset{\substack{\text{La serie}\\ \text{es convergente}}}{=} b^e(b-1)\cdot\frac{\frac{1}{b^{t+1}}}{1-\frac{1}{b}} = \frac{b^e\cdot b}{b^{t+1}} = b^{e-t}$$

ii) $$\frac{|x-tr(x)|}{|x|} \overset{\substack{\text{Por lo}\\ \text{demostrado}\\ i)}}{\le} \frac{b^{e-t}}{b^e\sum_{n=1}^{\infty} a_n b^{-n}} \underset{\substack{\text{Acotamos sup.}\\ \text{reduciendo el denom.}}}{\le} \frac{b^{e-t}}{b^e\cdot\frac{1}{b}} = \frac{b^{e-t}}{b^{e-1}} = \frac{b^{-t}}{b^{-1}} = b^{1-t}=\varepsilon_M$$

iii) $|x-rd(x)| = |b^e\cdot(0.a_1\ldots a_t a_{t+1}\ldots) - b^e(0.a_1\ldots r_t)| =$

$= \underbrace{b^e|(0.a_1\ldots a_t a_{t+1}\ldots) - (0.a_1\ldots r_t)| \leq \frac{1}{2}b^{e-t}}$

$¿|0.a_1\ldots a_t a_{t+1}\ldots| \leq \frac{b^{-t}}{2}$?

Demostrado en la relación

Si $a_{t+1} < b/2$, $r_t = a_t$:

$|(0.a_1\ldots a_t a_{t+1}\ldots) - (0.a_1\ldots r_t)| = |(0.0\ldots 0a_{t+1}\ldots)| \leq \frac{b}{2}\cdot\frac{1}{b^{t+1}} = \frac{b^{-t}}{2}$

Si $a_{t+1} \geq b/2$, $r_t = a_t + 1$:

$|(0.a_1\ldots a_t a_{t+1}\ldots) - (0.a_1\ldots r_t)| = (0.a_1\ldots r_t) - (0.a_1\ldots a_t a_{t+1}\ldots) =$

$= \frac{1}{b^t} - \left(\frac{a_{t+1}}{b^{t+1}} + \frac{a_{t+2}}{b^{t+2}} + \ldots\right) \leq \frac{1}{b^t} - \frac{b}{2}\cdot\frac{1}{b^{t+1}} = \frac{1}{2}b^{-t}$

Como $b/2 \leq a_{t+1}$,

iv) $\frac{|x-rd(x)|}{|x|} \leq \frac{\frac{b^{e-t}}{2}}{b^e\sum_{n=1}^{\infty} x_n b^{-n}} \leq \frac{\frac{b^{e-t}}{2}}{b^e\cdot\frac{1}{b}} = \frac{b^{1-t+e}}{2b^e} = \frac{1}{2}b^{1-t} = \frac{1}{2}\varepsilon_M$

Acotamos sup. reduciendo el denom.

Definición. Precisión máquina: $u := \frac{1}{2}\cdot b^{1-t} = \frac{1}{2}\varepsilon_M$

Corolario. Sea $\mathbb{F}(b,t,L,U)$, $x\in\mathbb{R}$, $b^{L-1} \leq |x| \leq b^U(1-b^{-t})$, se tiene que:

$$rd(x) = (1+\mu)x \quad |\mu| \leq u$$

9)* <u>Dem.</u>

$\frac{|x-rd(x)|}{|x|} \leq u \Leftrightarrow |x-rd(x)| \leq u|x| \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x-rd(x) \leq u|x| \\ \text{y} \\ rd(x)-x \leq u|x| \end{array}\right\}$

$\} \Rightarrow x-u|x| \leq rd(x) \leq x+u|x| \Rightarrow rd(x) = x + k|x|u$ con $k\in[-1,1]$,

lo cual es equivalente a que $rd(x) = (1+\mu)x$, con $|\mu| \leq u$

Operación máquina: $\cdot_M : \mathbb{F}(b,t,L,U)\times\mathbb{F}(b,t,L,U) \to F(b,t,L,U)$

$\cdot_M(x,y) := rd(x\cdot y) = \underbrace{(1+\mu)}x\cdot y$, $|\mu| \leq u$

Varias llamadas van sumando poco a poco generando propagación del error

---

10)* $x_n := \int_0^1 x^n e^x\,dx \quad udv = uv - \int vdu \quad u = x^n \; dv = e^x \; v = e^x, du = nx^{n-1}$

$\int x^n e^x dx = x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x dx$

$\int_0^1 x^n e^x = \left[x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x dx\right]_0^1 = e - n\int_0^1 x^{n-1}e^x dx = \boxed{e - nx_{n-1}}$

Relación de recurrencia

$\boxed{x_0 = e-1} \Rightarrow$ Está claro

Como $x\in[0,1]$, es claro que $e^x x^n \leq e^x x^{n-1}$, y como la integral conserva el orden, concluimos que $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es decreciente.
Como $f(x)=x^n e^x$ con $x\in[0,1]$ es positiva, $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es decreciente de términos positivos y está minorada por el 0, nos permite concluir que es convergente:

$$x_n = e - n x_{n-1} \Leftrightarrow x_{n-1} = \frac{e-x_n}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

Veamos su condicionamiento:

$$x_n = f_n(x_0) \quad f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

$$x_1 = e - x_0$$
$$x_2 = e - 2(e-x_0) = -e+2x_0$$
$$x_3 = e - 3(-e+2x_0) = 4e - 6x_0$$

$$f_n(x_0) := (-1)^n (n!x_0 - e\alpha_n) = x_n$$

Es de términos positivos

$$c(f_n, x_0) = \left|\frac{n!x_0}{x_n}\right| \overset{\swarrow}{=} \frac{n!x_0}{x_n} \underset{\uparrow}{\geq} \frac{n!x_0}{x_0} = n! \Rightarrow$$ Condicionamiento muy grande, de ahí tanto error

$\{x_n\}_{n\geq 1}$ es decreciente, entonces $x_n \leq x_0$

---

11)* $|\mu_{x+y}| \leq |\mu_x| + |\mu_y|$

Dem.

$x, y \in \mathbb{R}$

$$(1+\mu_x)x + (1+\mu_y)y = x+y+\mu_x x + \mu_y y = (x+y)\left(1 + \frac{\mu_x x + \mu_y y}{x+y}\right) =$$
$$= (x+y)\left(1 + \frac{x}{x+y}\mu_x + \frac{y}{x+y}\mu_y\right) = (x+y)(1 + \underbrace{\mu_{x+y}})$$

Y como $\frac{x}{x+y} \leq 1$ y $\frac{y}{x+y} \leq 1$, se deduce de ahí.

Error de cancelación (Diapositiva 104)

* Observaciones: $\mu_{x/y} \approx \mu_x - \mu_y \quad \mu_{x\cdot y} \approx \mu_x + \mu_y$