

Topología de un espacio métrico

Nuestro próximo objetivo es estudiar ciertas *propiedades topológicas* de un espacio métrico, así llamadas porque sólo dependen de una familia de subconjuntos del espacio que recibe el nombre de *topología*. Empezamos definiendo los elementos de dicha topología, que son los *conjuntos abiertos*, y mencionamos la noción de *espacio topológico*.

Ocurre frecuentemente que dos distancias diferentes en un conjunto dan lugar a la misma topología, en cuyo caso diremos que dichas distancias son *equivalentes*. Prestaremos especial atención a la posible equivalencia entre las distancias asociadas a dos normas en un mismo espacio vectorial, lo que nos llevará a la definición de la *topología usual* de \mathbb{R}^N .

Estudiamos, en un espacio métrico arbitrario, varios conceptos topológicos elementales, que describen la posición relativa de un punto con respecto a un subconjunto del espacio. El *interior* de un conjunto y los *entornos* de un punto, son nociones directamente relacionadas con los conjuntos abiertos. Después definimos los conjuntos *cerrados* y, ligadas a ellos, las nociones de *cierre*, *punto adherente*, *punto de acumulación*, y *frontera* de un conjunto.

Por otra parte, estudiamos la *convergencia de sucesiones*, generalizando la que conocemos en \mathbb{R} . Veremos que la topología de un espacio métrico queda caracterizada por las sucesiones convergentes. En \mathbb{R}^N con la topología usual, ocurre que la convergencia de una sucesión de vectores equivale a la de sus sucesiones de componentes, lo que servirá de motivación para un breve estudio del *producto* de espacios normados, o de espacios métricos.

2.1. Bolas abiertas

En todo lo que sigue trabajaremos en un espacio métrico arbitrario E , cuya distancia se denotará por d , teniendo presente el caso particular que más nos interesa: un espacio normado.

Dados $x \in E$ y $r \in \mathbb{R}^+$, la **bola abierta** de centro x y radio r , que se denota por $B(x, r)$, es el conjunto de puntos de E cuya distancia al centro es estrictamente menor que el radio:

$$B(x, r) = \{y \in E : d(x, y) < r\}$$

Es obvio que $B(x, r) \neq \emptyset$, pues al menos $x \in B(x, r)$, así como que la bola crece cuando, manteniendo su centro, aumentamos el radio: si $0 < r < s$, entonces $B(x, r) \subset B(x, s)$.

Las bolas abiertas en \mathbb{R} son intervalos abiertos acotados:

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R} : |x - y| < r\} =]x - r, x + r[\quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall r \in \mathbb{R}^+$$

Recíprocamente, para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha < \beta$, tomando $x = (\alpha + \beta)/2$ y $r = (\beta - \alpha)/2$, se tendrá $] \alpha, \beta [= B(x, r)$. Así pues, al definir las bolas abiertas en espacios métricos, estamos generalizando la noción de intervalo abierto acotado, que tan útil resulta para trabajar en \mathbb{R} .

Cuando $E = X$ es un espacio normado, la bola abierta de centro $x \in X$ y radio $r \in \mathbb{R}^+$ viene dada por $B(x, r) = \{y \in X : \|y - x\| < r\}$. Tiene especial interés la *bola abierta unidad*, que es la centrada en el origen, con radio 1: $B(0, 1) = \{u \in X : \|u\| < 1\}$. A partir de ella, mediante homotecias y traslaciones, obtenemos las demás, pues dados $x \in X$ y $r \in \mathbb{R}^+$, vemos fácilmente que $B(x, r) = \{x + ru : u \in B(0, 1)\}$, así que $B(x, r)$ se obtiene a partir de $B(0, 1)$ usando dos aplicaciones de X en sí mismo, primero $u \mapsto ru$, que es la homotecia de razón r , y luego, $y \mapsto x + y$ que es la *traslación* mediante x . Intuitivamente hablando, la forma geométrica de un conjunto no cambia cuando le aplicamos una homotecia o una traslación, luego todas las bolas abiertas de un espacio normado tienen el mismo aspecto.

En \mathbb{R}^2 con la norma euclídea, tenemos que $B(0, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ es el conjunto de los puntos rodeados por una circunferencia. En \mathbb{R}^3 tendríamos una esfera, y esto explica que usemos el término “bola” en cualquier espacio métrico. Conviene observar que el aspecto de las bolas en \mathbb{R}^N cambia totalmente cuando usamos una norma distinta de la euclídea. Por ejemplo, con la norma del máximo, para $x \in \mathbb{R}^N$ y $r \in \mathbb{R}^+$, tenemos que

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^N : |y(k) - x(k)| < r \quad \forall k \in \Delta_N\} = \prod_{k=1}^N]x(k) - r, x(k) + r[$$

producto cartesiano de N bolas abiertas en \mathbb{R} , todas con el mismo radio. En \mathbb{R}^2 tenemos el conjunto de puntos situados dentro de un cuadrado de lados paralelos a los ejes, y en \mathbb{R}^3 los situados dentro de un cubo de aristas paralelas a los ejes. Pero más allá de la forma geométrica de las bolas, vemos aquí una ventaja de la norma del máximo frente a la euclídea o cualquier otra: del mismo modo que \mathbb{R}^N es producto cartesiano de rectas, las bolas abiertas de \mathbb{R}^N con la norma del máximo son productos cartesianos de intervalos.

Como un ejemplo más, pensemos en un conjunto no vacío E con la distancia discreta. Para cualesquiera $x \in E$ y $r \in \mathbb{R}^+$ se tiene $B(x, r) = \{x\}$ si $r \leq 1$, y $B(x, r) = E$ si $r > 1$.

Comprobamos finalmente una sencilla propiedad de las bolas abiertas en cualquier espacio métrico. Es geoméricamente muy intuitiva y su utilidad se verá enseguida.

- Sea E un espacio métrico, $a \in E$ y $r \in \mathbb{R}^+$. Entonces, para cada $x \in B(a, r)$ puede encontrarse un $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset B(a, r)$.

Como $d(x, a) < r$, podemos tomar $\varepsilon = r - d(x, a) > 0$, y la desigualdad triangular nos dice que, para todo $y \in B(x, \varepsilon)$, se tiene: $d(y, a) \leq d(y, x) + d(x, a) < \varepsilon + d(x, a) = r$. ■

2.2. Conjuntos abiertos

Sea E un espacio métrico y $U \subset E$. Decimos que U es un **subconjunto abierto** de E , o simplemente un abierto de E , cuando U contiene una bola abierta centrada en cada uno de sus puntos, es decir,

$$\forall x \in U \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : B(x, \varepsilon) \subset U$$

Si no es necesario enfatizar el espacio métrico E , podemos decir que U es un conjunto abierto, o simplemente *un abierto*. Es obvio, por ejemplo, que el conjunto vacío y el propio E son abiertos, y la propiedad de las bolas abiertas comprobada anteriormente nos dice que, como su nombre indica, *las bolas abiertas son conjuntos abiertos*.

Recordemos el interior de un conjunto $A \subset \mathbb{R}$. Para $x \in \mathbb{R}$ sabemos que $x \in A^\circ$ cuando existe un $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset A$. Es obvio que $A^\circ \subset A$, inclusión que puede ser estricta o ser una igualdad. Vemos ahora que, en el espacio métrico \mathbb{R} , con la distancia usual, un subconjunto U es abierto si, y sólo si, todos sus puntos son interiores, es decir, $U = U^\circ$.

Es claro que existen subconjuntos de \mathbb{R} que no son abiertos. Lo mismo ocurre en la mayoría de los espacios métricos, pero no en todos. Si E es un conjunto no vacío con la distancia discreta, todos los subconjuntos de E son abiertos. En efecto, dado $U \subset E$, para todo $x \in U$ se tiene obviamente $B(x, 1) = \{x\} \subset U$. Queda muy claro que, si cambiamos la distancia de E , algunos abiertos pueden dejar de serlo, y también pueden aparecer nuevos abiertos. Esto no nos debe extrañar, pues si cambiamos la distancia de E , estaremos en un espacio métrico diferente.

Se define la **topología del espacio métrico** E como la familia \mathcal{T} formada por todos los subconjuntos abiertos de E . Si conviene enfatizar la distancia d que estamos usando en E , decimos que \mathcal{T} es la **topología generada por la distancia** d . Tenemos $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(E)$, donde $\mathcal{P}(E)$ es el conjunto de todos los subconjuntos de E . La familia \mathcal{T} tiene tres propiedades básicas:

(A.1) *El conjunto vacío y el conjunto E son abiertos: $\emptyset, E \in \mathcal{T}$*

(A.2) *La unión de cualquier familia de abiertos es un abierto: $\mathcal{S} \subset \mathcal{T} \implies \bigcup \mathcal{S} \in \mathcal{T}$*

(A.3) *La intersección de dos abiertos es siempre un abierto: $U, V \in \mathcal{T} \implies U \cap V \in \mathcal{T}$*

Se ha comentado ya que (A.1) es evidente. Para (A.2) basta pensar que, dado $x \in \bigcup \mathcal{S}$, existirá $S \in \mathcal{S}$ tal que $x \in S$, pero por ser S abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset S \subset \bigcup \mathcal{S}$. Finalmente comprobamos (A.3): si $x \in U \cap V$, existen $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}^+$ tales que $B(x, \varepsilon_1) \subset U$ y $B(x, \varepsilon_2) \subset V$, con lo que tomando $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, tenemos $B(x, \varepsilon) \subset U \cap V$. ■

De (A.2) se deduce una descripción alternativa de los abiertos. Como las bolas abiertas son conjuntos abiertos, (A.2) nos dice que la unión de cualquier familia de bolas abiertas es un abierto. Pero recíprocamente, si $U \neq \emptyset$ es abierto, para cada $x \in U$ tenemos un $\varepsilon_x \in \mathbb{R}^+$ tal que $B(x, \varepsilon_x) \subset U$, y es evidente que $U = \bigcup_{x \in U} B(x, \varepsilon_x)$, una unión de bolas abiertas. Para que no sea una excepción, podemos ver el conjunto vacío como unión de una familia vacía. Así pues, *los abiertos de un espacio métrico son las uniones de bolas abiertas*.

A partir de (A.3), una obvia inducción permite deducir que *la intersección de cualquier familia finita de abiertos es un abierto*:

$$n \in \mathbb{N}, U_1, U_2, \dots, U_n \in \mathcal{T} \implies U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n \in \mathcal{T}$$

pero, a diferencia de la unión, en general no podemos asegurar que la intersección de cualquier familia de abiertos sea un conjunto abierto.

Abstrayendo las tres propiedades anteriores, llegamos a la noción de espacio topológico. Una **topología** en un conjunto no vacío Ω es un conjunto $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, es decir, una familia de subconjuntos de Ω , que verifica las tres condiciones siguientes:

$$(T.1) \quad \emptyset, \Omega \in \mathcal{T}$$

$$(T.2) \quad \mathcal{S} \subset \mathcal{T} \implies \cup \mathcal{S} \in \mathcal{T}$$

$$(T.3) \quad U, V \in \mathcal{T} \implies U \cap V \in \mathcal{T}$$

Resaltamos que en (T.2), la familia \mathcal{S} es arbitraria, así que una topología es estable por uniones arbitrarias, mientras que de (T.3) sólo se deduce que la intersección de una familia finita de elementos de \mathcal{T} pertenece a \mathcal{T} . Pues bien, un **espacio topológico** es un conjunto no vacío Ω en el que hemos fijado una topología \mathcal{T} .

Ejemplo claro de espacio topológico, de hecho el único que vamos a manejar, es el usado como motivación: un espacio métrico E , con la topología generada por su distancia d . Nos interesa especialmente la distancia d asociada a una norma $\|\cdot\|$ en un espacio vectorial X . Decimos entonces que la topología generada por d es la **topología de la norma** $\|\cdot\|$.

En \mathbb{R} tenemos la topología del valor absoluto, o **topología usual** de \mathbb{R} , por ser la topología generada por la distancia usual de \mathbb{R} . Los elementos de esta topología se llaman simplemente *abiertos* de \mathbb{R} , y sabemos que son las uniones de intervalos abiertos acotados.

En cualquier conjunto no vacío Ω , siempre disponemos de la **topología discreta**, $\mathcal{P}(\Omega)$, la más grande posible, que es la generada por la distancia discreta.

Como hemos dicho, no vamos a trabajar con espacios topológicos cualesquiera, ese es el terreno de la Topología General, en el que no vamos a entrar. Pero de un espacio métrico, nos interesan sus muy abundantes *propiedades topológicas*, las que sólo involucran su topología, y no la distancia que la genera. Son las propiedades que podemos definir, o caracterizar, usando sólo los conjuntos abiertos y olvidado la distancia que dio lugar a ellos, por lo que podríamos estudiarlas en cualquier espacio topológico, aunque no lo hagamos.

2.3. Normas equivalentes

Se dice que dos distancias en un conjunto E son **equivalentes**, cuando generan la misma topología, es decir, los conjuntos abiertos para ambas distancias son los mismos. Tenemos así, valga la redundancia, una relación de equivalencia en el conjunto de todas las distancias en E . Decimos que dos normas en un mismo espacio vectorial X son *equivalentes* cuando lo son las distancias asociadas, esto es, cuando las topologías de ambas normas coinciden. La equivalencia entre dos normas se caracteriza de forma muy sencilla, como vamos a ver.

- Para dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ definidas en un mismo espacio vectorial X , las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i) Existe una constante $\rho \in \mathbb{R}^+$ tal que $\|x\|_2 \leq \rho \|x\|_1$ para todo $x \in X$.
- (ii) La topología de la norma $\|\cdot\|_2$ está incluida en la de $\|\cdot\|_1$.

Para la demostración, dados $x \in X$ y $r \in \mathbb{R}^+$, denotamos por $B_1(x, r)$ y $B_2(x, r)$ a las bolas abiertas de centro x y radio r para las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$, respectivamente.

(i) \Rightarrow (ii). Si U es un conjunto abierto para la norma $\|\cdot\|_2$, para cada $x \in U$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_2(x, \varepsilon) \subset U$. De (i) deducimos entonces claramente que $B_1(x, \varepsilon/\rho) \subset B_2(x, \varepsilon) \subset U$, luego U es abierto para la norma $\|\cdot\|_1$, como queríamos.

(ii) \Rightarrow (i). Como $B_2(0, 1)$ es abierto para $\|\cdot\|_2$, también lo es para $\|\cdot\|_1$, luego existe $\delta > 0$ tal que $B_1(0, \delta) \subset B_2(0, 1)$. Tomando $\rho = 1/\delta > 0$ conseguimos la desigualdad buscada. En efecto, si $x \in X$ verificase que $\|x\|_2 > \rho \|x\|_1$, tomando $y = x/\|x\|_2$ tendríamos

$$\|y\|_1 = \frac{\|x\|_1}{\|x\|_2} < \frac{1}{\rho} = \delta$$

de donde $\|y\|_2 < 1$, lo cual es una contradicción, puesto que claramente $\|y\|_2 = 1$. Así pues, tenemos $\|x\|_2 \leq \rho \|x\|_1$ para todo $x \in X$, como queríamos. ■

Está claro que dos normas serán equivalentes cuando verifiquen la desigualdad que aparece en la condición (i) anterior, junto con la que se obtendría intercambiando los papeles de ambas normas. Esta otra desigualdad se puede escribir para que enlace con la que ya teníamos, sin más que dividir ambos miembros por la constante que en ella aparezca. Obtenemos así:

- Dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ en un espacio vectorial X son equivalentes si, y sólo si, existen constantes $\lambda, \rho \in \mathbb{R}^+$ tales que

$$\lambda \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \rho \|x\|_1 \quad \forall x \in X$$

Nótese que dos normas proporcionales verifican las desigualdades anteriores con $\lambda = \rho$, luego son equivalentes, como cabía esperar.

2.4. La topología usual de \mathbb{R}^N

Aplicando el criterio antes obtenido, vemos fácilmente que las tres normas que hasta ahora hemos considerado en \mathbb{R}^N son equivalentes:

- En \mathbb{R}^N , la norma euclídea, la de la suma y la del máximo, son equivalentes.

La relación entre la norma del máximo $\|\cdot\|_\infty$ y la de la suma $\|\cdot\|_1$ es evidente:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq N \|x\|_\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

Para la norma euclídea $\|\cdot\|$, el razonamiento es también evidente, incluso mejorando la segunda desigualdad:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq N^{1/2} \|x\|_\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

Por supuesto, la norma euclídea y la de la suma son equivalentes, pues hemos visto que ambas son equivalentes a la del máximo. ■

La topología común a las tres normas cuya equivalencia acabamos de comprobar, se conoce como **topología usual** de \mathbb{R}^N , por ser la que siempre se usa en \mathbb{R}^N . A sus elementos se les llama simplemente **abiertos** de \mathbb{R}^N . Usando la norma del máximo obtenemos ahora una útil descripción de los mismos.

- Si U_1, U_2, \dots, U_N son abiertos de \mathbb{R} , entonces el producto cartesiano $U = \prod_{k=1}^N U_k$ es un abierto de \mathbb{R}^N . De hecho, todo abierto de \mathbb{R}^N se puede expresar como unión de una familia de productos cartesianos de abiertos de \mathbb{R} .

Para ver que U es abierto fijamos $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in U$. Para cada $k \in \Delta_N$ tenemos $x_k \in U_k$, luego por ser U_k un abierto de \mathbb{R} , existe $r_k \in \mathbb{R}^+$ tal que $]x_k - r_k, x_k + r_k[\subset U_k$. Tomando entonces $r = \min\{r_k : k \in \Delta_N\}$ y usando en \mathbb{R}^N la norma del máximo, es claro que $B(x, r) \subset U$, y esto prueba que U es abierto. Además, todo abierto de \mathbb{R}^N es unión de bolas abiertas para la norma del máximo que, como sabemos, son productos cartesianos de abiertos de \mathbb{R} . ■

Para definir y manejar cómodamente la que llamaremos topología usual de un subconjunto de \mathbb{R}^N , conviene discutir en general la relación entre la topología de un espacio métrico y la de un subespacio suyo. Volvamos pues a nuestro espacio métrico E cuya distancia d genera una topología \mathcal{T} . Si A es un subespacio métrico de E , tenemos en A la distancia inducida d_A , que genera una topología \mathcal{T}_A , y nos preguntamos por la relación entre \mathcal{T} y \mathcal{T}_A . Nótese que $A \in \mathcal{T}_A$ pero puede ocurrir que $A \notin \mathcal{T}$. Para buscar la relación entre los abiertos de E y los de A , es natural empezar por la relación entre las bolas abiertas en uno y otro espacio.

Dados $a \in A$ y $r \in \mathbb{R}^+$, denotando por $B(a, r)$ y $B_A(a, r)$ a las bolas abiertas de centro a y radio r en los espacios métricos E y A respectivamente, es claro que $B_A(a, r) = B(a, r) \cap A$. A partir de aquí, la relación entre las topologías \mathcal{T} y \mathcal{T}_A se adivina fácilmente:

- Si \mathcal{T} es la topología de un espacio métrico E y \mathcal{T}_A la de un subespacio métrico $A \subset E$, se tiene:

$$\mathcal{T}_A = \{U \cap A : U \in \mathcal{T}\}$$

En particular, cuando $A \in \mathcal{T}$, para $V \subset A$ se tiene que $V \in \mathcal{T}_A$ si, y sólo si, $V \in \mathcal{T}$.

Si $U \in \mathcal{T}$, para cada $a \in U \cap A$ existe $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $B(a, r) \subset U$, luego $B_A(a, r) \subset U \cap A$ y esto prueba que $U \cap A \in \mathcal{T}_A$. Recíprocamente, si $V \in \mathcal{T}_A$, para cada $a \in V$ existe $r_a \in \mathbb{R}^+$ tal que $B_A(a, r_a) \subset V$. Tomando entonces $U = \bigcup \{B(a, r_a) : a \in V\}$, tenemos que $U \in \mathcal{T}$, por ser una unión de bolas abiertas, pero es claro que $U \cap A = V$.

Supongamos finalmente que $A \in \mathcal{T}$ y sea $V \subset A$. De $V \in \mathcal{T}$ deducimos $V = V \cap A \in \mathcal{T}_A$. Pero recíprocamente, si $V \in \mathcal{T}_A$, hemos visto que $V = U \cap A$ con $U \in \mathcal{T}$, luego $V \in \mathcal{T}$, por ser la intersección de dos elementos de \mathcal{T} . ■

Obtenemos pues directamente la topología \mathcal{T}_A a partir de \mathcal{T} , olvidando la distancia de E y la inducida en A . Por ello decimos que \mathcal{T}_A es la **topología inducida** por \mathcal{T} en A , lo cual es coherente, pues la distancia inducida genera la topología inducida. Si dos distancias en E son equivalentes, las inducidas en cualquier subespacio también lo son, pues ambas generan la topología inducida.

Destaquemos el caso particular que nos interesa. Si A es un subconjunto no vacío de \mathbb{R}^N , llamaremos **topología usual** de A a la inducida en A por la usual de \mathbb{R}^N . Como hemos visto, los abiertos de A son las intersecciones con A de los abiertos de \mathbb{R}^N , que no tienen por qué ser abiertos de \mathbb{R}^N . Para enfatizar esto, se suele decir que los abiertos de A son **abiertos relativos**. Hemos visto también que, cuando A es un abierto de \mathbb{R}^N , los abiertos relativos no son ni más ni menos que los abiertos de \mathbb{R}^N que estén contenidos en A .

2.5. Interior y entornos

En todo lo que sigue, E es un espacio métrico con distancia d , y \mathcal{T} es la topología generada por d . Las nociones que vamos a estudiar son topológicas, sólo dependen de la topología \mathcal{T} y no se alteran al sustituir la distancia d por otra equivalente.

Todo conjunto $A \subset E$ contiene un abierto, pues al menos $\emptyset \subset A$. Se define el **interior** de A , que se denota por A° , como la unión de todos los abiertos incluidos en A :

$$A^\circ = \bigcup \{U \in \mathcal{T} : U \subset A\}$$

Claramente, A° es abierto y $A^\circ \subset A$. De hecho A° es el *máximo abierto incluido* en A , pues si $U \in \mathcal{T}$ y $U \subset A$, se tiene obviamente $U \subset A^\circ$. Por tanto, A es abierto si, y sólo si, $A = A^\circ$. Cuando $x \in A^\circ$, decimos que x es un **punto interior** de A , o que A es un **entorno** de x , y denotamos por $\mathcal{U}(x)$ al conjunto de todos los entornos de x .

Como A° es abierto, para $x \in A^\circ$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset A^\circ \subset A$. Recíprocamente, si existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset A$, tenemos $x \in A^\circ$, pues $B(x, \varepsilon) \in \mathcal{T}$ y $B(x, \varepsilon) \subset A$. Quedan así caracterizados el interior de un conjunto y los entornos de un punto, en términos de bolas abiertas: $x \in A^\circ \iff A \in \mathcal{U}(x) \iff \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subset A$.

Cuando $E = \mathbb{R}$, tenemos $x \in A^\circ$ si, y sólo si, existe $\varepsilon > 0$ tal que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset A$, luego el concepto de interior en espacios métricos generaliza el que ya conocíamos en \mathbb{R} .

Volviendo al caso general, destacamos dos propiedades de la familia $\mathcal{U}(x)$ de todos los entornos de un punto $x \in E$. Por una parte es obvio que, si $A \in \mathcal{U}(x)$ y $A \subset C \subset E$, entonces se tiene $C \in \mathcal{U}(x)$: contener un entorno de x es lo mismo que ser entorno de x . Por otra, dados dos entornos $A_1, A_2 \in \mathcal{U}(x)$, existen $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ tales que $x \in U_1 \subset A_1$ y $x \in U_2 \subset A_2$, pero entonces tenemos $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$ y $x \in U_1 \cap U_2 \subset A_1 \cap A_2$, luego $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{U}(x)$. Por inducción, la intersección de cualquier familia finita de entornos de x es un entorno de x . Finalmente, conocer los entornos de todos los puntos de E , equivale a conocer la topología, pues un conjunto es abierto si, y sólo si, es entorno de todos sus puntos.

2.6. Conjuntos cerrados

Dado $C \subset E$, decimos que C es un **subconjunto cerrado** de E , o simplemente un cerrado de E , cuando su complemento $E \setminus C$ es abierto. Si no es preciso enfatizar el espacio métrico E , podemos decir que C es un conjunto cerrado, o simplemente, un cerrado. Las propiedades de la topología se traducen equivalentemente en términos de conjuntos cerrados. Denotando por \mathcal{C} a la familia de todos los subconjuntos cerrados de E , tenemos

$$(1) \emptyset, E \in \mathcal{C}; \quad (2) \mathcal{D} \subset \mathcal{C} \implies \bigcap \mathcal{D} \in \mathcal{C}; \quad (3) C, D \in \mathcal{C} \implies C \cup D \in \mathcal{C}$$

Resaltamos que (2) asegura la estabilidad de \mathcal{C} por intersecciones arbitrarias, mientras de (3) sólo podemos deducir que la unión de cualquier familia *finita* de cerrados es un cerrado.

Todo $A \in \mathcal{P}(E)$ está incluido en un cerrado, al menos $A \subset E$. Se define el **cierre** de A , que se denota por \overline{A} , como la intersección de todos los cerrados en los que A está incluido:

$$\overline{A} = \bigcap \{C \in \mathcal{C} : A \subset C\}$$

Vemos claramente que \overline{A} es cerrado y $A \subset \overline{A}$. De hecho \overline{A} es el *mínimo cerrado que contiene* al conjunto A , pues si C es cerrado y $A \subset C$, se tiene obviamente $\overline{A} \subset C$. Por tanto, A es cerrado si, y sólo si, $A = \overline{A}$. Las operaciones de cierre e interior están claramente relacionadas:

- Para todo subconjunto A de un espacio métrico E , se tiene:

$$E \setminus \overline{A} = (E \setminus A)^\circ \quad y \quad E \setminus A^\circ = \overline{E \setminus A}$$

La comprobación de la primera igualdad es inmediata:

$$\begin{aligned} E \setminus \overline{A} &= E \setminus \left(\bigcap \{C \in \mathcal{C} : A \subset C\} \right) = \bigcup \{E \setminus C : C \in \mathcal{C}, A \subset C\} \\ &= \bigcup \{U \in \mathcal{T} : U \subset E \setminus A\} = (E \setminus A)^\circ \end{aligned}$$

Para la segunda igualdad, basta aplicar la primera al conjunto $E \setminus A$ en lugar de A :

$$E \setminus \overline{E \setminus A} = (E \setminus (E \setminus A))^\circ = A^\circ, \quad \text{luego} \quad \overline{E \setminus A} = E \setminus A^\circ \quad \blacksquare$$

Usando el resultado anterior podemos caracterizar los puntos del cierre de un conjunto A . Para $x \in E$ tenemos $x \in \overline{A}$ si, y sólo si, $E \setminus A$ no es entorno de x . Esto equivale a que $E \setminus A$ no contenga ningún entorno de x , es decir, a que todo entorno de x contenga puntos de A . A su vez, esto equivale a que toda bola abierta de centro x contenga puntos de A . En resumen:

$$x \in \overline{A} \iff U \cap A \neq \emptyset \quad \forall U \in \mathcal{U}(x) \iff B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$$

Cuando esto ocurre decimos que x es un **punto adherente** al conjunto A , así que \overline{A} es el conjunto de todos los puntos adherentes al conjunto A . Esta denominación tiene un significado intuitivo muy claro: x es un punto adherente al conjunto A cuando existen puntos de A tan cerca de x como se quiera.

Veamos algunos ejemplos sencillos de conjuntos cerrados. Es claro que si A tiene un sólo punto, $A = \{x\}$ con $x \in E$, entonces A es cerrado: para $y \in E \setminus \{x\}$, tomando $\varepsilon = d(x, y) > 0$ se tiene $B(y, \varepsilon) \cap A = \emptyset$, luego $y \notin \overline{A}$. En vista de las propiedades de los conjuntos cerrados, deducimos lo siguiente.

- En cualquier espacio métrico E , todo subconjunto finito de E es cerrado.

Como otro ejemplo típico, para $x \in E$ y $r \in \mathbb{R}^+$, la **bola cerrada** de centro x y radio r viene dada por

$$\overline{B}(x, r) = \{y \in E : d(y, x) \leq r\}$$

que ciertamente es un conjunto cerrado, como vamos a comprobar. Si z pertenece a su cierre, para todo $\varepsilon > 0$ existe $y \in B(z, \varepsilon) \cap \overline{B}(x, r)$, con lo que $d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < \varepsilon + r$. Deducimos claramente que $d(z, x) \leq r$, como se quería.

Como consecuencia, el conjunto

$$S(x, r) = \{y \in E : d(y, x) = r\} = \overline{B}(x, r) \setminus B(x, r)$$

es cerrado, por ser la intersección de dos cerrados. Se dice que $S(x, r)$ es la **esfera** de centro x y radio r , nomenclatura inspirada en el caso particular de \mathbb{R}^3 con la distancia euclídea.

Veamos otra noción muy intuitiva, relacionada con el cierre. Definimos la **frontera** de un conjunto $A \subset E$, que se denota por $\text{Fr}(A)$, como el conjunto de todos los puntos adherentes al conjunto A que no sean interiores. Tenemos por tanto

$$\text{Fr}(A) = \overline{A} \setminus A^\circ = \overline{A} \cap (E \setminus A^\circ) = \overline{A} \cap \overline{E \setminus A}$$

donde, para la última igualdad, hemos usado la relación entre interior y cierre, ya conocida. Como consecuencia, $\text{Fr}(A)$ es un conjunto cerrado y $\text{Fr}(A) = \text{Fr}(E \setminus A)$. Observamos también que $\overline{A} = A \cup \text{Fr}(A)$ y $A^\circ = A \setminus \text{Fr}(A)$. Por tanto, la topología de E queda determinada cuando conocemos la frontera de cada subconjunto, ya que A es abierto si, y sólo si, $A \cap \text{Fr}(A) = \emptyset$, mientras que A es cerrado si, y sólo si, $\text{Fr}(A) \subset A$. Así pues, A es abierto y cerrado si, y sólo si, $\text{Fr}(A) = \emptyset$, como ocurre cuando $A = \emptyset$ o $A = E$. En general, cada conjunto $A \subset E$ da lugar a una partición del espacio E , más concretamente:

$$E = A^\circ \cup \text{Fr}(A) \cup (E \setminus A)^\circ \quad \text{con} \quad A^\circ \cap \text{Fr}(A) = A^\circ \cap (E \setminus A)^\circ = \text{Fr}(A) \cap (E \setminus A)^\circ = \emptyset$$

2.7. Puntos de acumulación y puntos aislados

Los puntos adherentes a un conjunto A pueden ser de dos tipos excluyentes, que ahora vamos a distinguir. En primer lugar, decimos que $x \in E$ es un **punto de acumulación** de A , cuando x es adherente al conjunto $A \setminus \{x\}$, esto es, $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$. Esto significa que todo entorno de x , o toda bola abierta de centro x , contiene puntos de A distintos de x . Denotamos por A' al conjunto de todos los puntos de acumulación de A :

$$x \in A' \iff U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset \quad \forall U \in \mathcal{U}(x) \iff B(x, \varepsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$$

Pensemos ahora en los puntos adherentes a un conjunto que no sean puntos de acumulación. Tenemos $x \in \overline{A} \setminus A'$ si, y sólo si, existe $U \in \mathcal{U}(x)$ tal que $U \cap A = \{x\}$, o lo que es lo mismo, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \cap A = \{x\}$, en cuyo caso decimos que x es un **punto aislado** de A .

Resaltamos que los puntos aislados de un conjunto han de pertenecer a dicho conjunto. Por tanto, el conjunto de los puntos aislados de un conjunto A es $\overline{A} \setminus A' = A \setminus A'$. Observamos también que $\overline{A} = A' \cup A$, luego A es cerrado si, y sólo si, $A' \subset A$.

En el caso del espacio métrico $E = \mathbb{R}$, para $A \subset \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}$, tenemos $x \in A'$ si, y sólo si, $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, mientras que x es punto aislado de A cuando existe $\varepsilon > 0$ tal que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap A = \{x\}$. Vemos así que en \mathbb{R} con la topología usual, los puntos de acumulación y los puntos aislados de un subconjunto de \mathbb{R} son los que ya conocíamos, como ocurrió con los puntos interiores. Son las tres nociones topológicas que ya habíamos usado en \mathbb{R} y que ahora hemos generalizado para cualquier espacio métrico.

2.8. Sucesiones convergentes

Sabemos que una **sucesión** de elementos de un conjunto $E \neq \emptyset$ es una aplicación $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow E$, que se denota por $\{x_n\}$, donde $x_n = \varphi(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Las **sucesiones parciales** de $\{x_n\}$ son las de la forma $\{x_{\sigma(n)}\}$ donde $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ es estrictamente creciente. Volviendo a nuestro espacio métrico E , definimos ahora la convergencia de una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de E .

Decimos que la sucesión $\{x_n\}$ **converge** a un punto $x \in E$, y escribimos $\{x_n\} \rightarrow x$, cuando cada entorno de x contiene a todos los términos de la sucesión, a partir de uno en adelante:

$$\{x_n\} \rightarrow x \iff [\forall U \in \mathcal{U}(x) \exists m \in \mathbb{N} : n \geq m \Rightarrow x_n \in U] \quad (1)$$

Tenemos claramente una noción topológica, sólo involucra los entornos de x . Por tanto, al hablar de convergencia de sucesiones en un espacio métrico E , no es necesario especificar la distancia concreta d que estemos usando en E , sino solamente la topología que genera. En particular, como en \mathbb{R}^N usamos siempre la topología usual, para una sucesión de vectores de \mathbb{R}^N , podemos hablar de su convergencia, sin ninguna ambigüedad.

Por otra parte, es claro que en (1), en vez de entornos, podemos usar sólo bolas abiertas,

$$\{x_n\} \rightarrow x \iff [\forall \varepsilon > 0 \exists m \in \mathbb{N} : n \geq m \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon] \quad (2)$$

y si $E = X$ es un espacio normado tendremos

$$\{x_n\} \rightarrow x \iff [\forall \varepsilon > 0 \exists m \in \mathbb{N} : n \geq m \Rightarrow \|x_n - x\| < \varepsilon]$$

Esto se aplicará a \mathbb{R}^N con cualquier norma cuya topología sea la usual. Para $N = 1$ será

$$\{x_n\} \rightarrow x \iff [\forall \varepsilon > 0 \exists m \in \mathbb{N} : n \geq m \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon]$$

luego la única noción de convergencia que vamos a usar en \mathbb{R} es la que ya conocíamos.

Volviendo al caso general, la afirmación que aparece a la derecha de (2) significa, lisa y llanamente, que la sucesión $\{d(x_n, x)\}$ converge a cero. Por tanto, la convergencia de una sucesión de puntos de un espacio métrico, equivale siempre a la convergencia a cero de una concreta sucesión de números reales no negativos:

$$\{x_n\} \rightarrow x \iff \{d(x_n, x)\} \rightarrow 0 \quad (3)$$

Esta equivalencia permite trasladar a cualquier espacio métrico propiedades conocidas de la convergencia en \mathbb{R} , como haremos ahora. Decimos que la sucesión $\{x_n\}$ es **convergente**, cuando existe $x \in E$ tal que $\{x_n\} \rightarrow x$, en cuyo caso x es único. En efecto, si también se tiene que $\{x_n\} \rightarrow y$, puesto que $d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de (3) deducimos que $d(x, y) = 0$, luego $x = y$. Decimos entonces que x es el **límite** de la sucesión $\{x_n\}$ y escribimos $x = \lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\}$.

Usando también (3), relacionamos la convergencia de una sucesión con la de sus sucesiones parciales. De $\{x_n\} \rightarrow x$ se deduce que toda sucesión parcial de $\{x_n\}$ también converge a x . Vemos igualmente que, fijado $k \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\{x_{k+n}\} \rightarrow x \iff \{x_n\} \rightarrow x \iff \{x_{2n-1}\} \rightarrow x \text{ y } \{x_{2n}\} \rightarrow x$$

Por ejemplo, si existen $x \in E$ y $k \in \mathbb{N}$ tales que para $n > k$ se tiene $x_n = x$, entonces $\{x_n\} \rightarrow x$.

2.9. Caracterización secuencial de la topología

Es muy importante observar que la convergencia de sucesiones determina la topología de cualquier espacio métrico:

- *En todo espacio métrico E , un punto $x \in E$ es adherente a un conjunto $A \subset E$ si, y sólo si, existe una sucesión de puntos de A que converge a x .*

Si $x \in \overline{A}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos tomar $x_n \in B(x, 1/n) \cap A$, obteniendo una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A tal que $\{d(x_n, x)\} \rightarrow 0$, luego $\{x_n\} \rightarrow x$. Pero recíprocamente, si $\{x_n\} \rightarrow x$ con $x_n \in A$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es obvio que $U \cap A \neq \emptyset$ para todo $U \in \mathcal{U}(x)$, luego $x \in \overline{A}$. ■

Deducimos que un conjunto $A \subset E$ es cerrado si, y sólo si, A contiene a los límites de todas las sucesiones de puntos de A que sean convergentes. Así pues, la topología de un espacio métrico queda caracterizada por la convergencia de sucesiones: si conocemos la convergencia de sucesiones, conocemos los conjuntos cerrados, luego conocemos la topología.

Aprovechamos esta idea para conseguir una cómoda caracterización de la equivalencia entre dos distancias:

- *Si d_1 y d_2 son dos distancias en un conjunto E , equivalen las afirmaciones siguientes:*
 - (i) *La topología generada por d_1 está incluida en la generada por d_2 .*
 - (ii) *Toda sucesión convergente para la distancia d_2 es convergente para d_1 .*

Por tanto, d_1 y d_2 son equivalentes si, y sólo si, dan lugar a las mismas sucesiones convergentes.

(i) \Rightarrow (ii). Sea $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de E y supongamos que $\{x_n\} \rightarrow x \in E$ para la distancia d_2 . Si U es un entorno de x para la distancia d_1 , aplicando (i) tenemos que U también es entorno de x para d_2 . Por tanto, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ para $n \geq m$, y esto nos dice que $\{x_n\} \rightarrow x$ para la distancia d_1 .

(ii) \Rightarrow (i). Si $A \subset E$ es cerrado para d_1 , bastará ver que también lo es para d_2 . Sea pues x un punto adherente al conjunto A para d_2 y veamos que $x \in A$. Por el resultado anterior, existe una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A tal que $\{d_2(x_n, x)\} \rightarrow 0$. Tomamos $y_{2n-1} = x_n$ e $y_{2n} = x$ para todo $n \in \mathbb{N}$, con lo que también tenemos $\{d_2(y_n, x)\} \rightarrow 0$. Aplicando (ii) sabemos que la sucesión $\{y_n\}$ es convergente para la distancia d_1 , pero su límite no puede ser otro que x , puesto que $y_{2n} = x$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así pues, tenemos $\{d_1(y_n, x)\} \rightarrow 0$, de donde deducimos que $\{d_1(x_n, x)\} = \{d_1(y_{2n-1}, x)\} \rightarrow 0$. Por ser A cerrado para d_1 , concluimos que $x \in A$, como se quería. ■

2.10. Convergencia en \mathbb{R}^N

Ha quedado claro que, para conocer la topología usual de \mathbb{R}^N , basta conocer la convergencia de sucesiones de vectores de \mathbb{R}^N , cuyo estudio se puede reducir al de la convergencia en \mathbb{R} . Para ello, ni siquiera necesitamos usar una norma o distancia concreta en \mathbb{R}^N , basta mirar a las componentes de los términos de la sucesión:

- Para toda sucesión $\{x_n\}$ de vectores de \mathbb{R}^N y todo $x \in \mathbb{R}^N$, se tiene:

$$\{x_n\} \rightarrow x \quad \Longleftrightarrow \quad \{x_n(k)\} \rightarrow x(k) \quad \forall k \in \Delta_N$$

Por tanto, $\{x_n\}$ es convergente si, y sólo si, $\{x_n(k)\}$ es convergente para todo $k \in \Delta_N$.

En efecto, basta pensar, por ejemplo, que para $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \Delta_N$ se tiene

$$|x_n(k) - x(k)| \leq \|x_n - x\|_\infty \leq \sum_{j=1}^N |x_n(j) - x(j)|$$

Si $\{x_n\} \rightarrow x$, tenemos $\{\|x_n - x\|_\infty\} \rightarrow 0$ y la primera desigualdad nos da $\{x_n(k)\} \rightarrow x(k)$ para todo $k \in \Delta_N$. Recíprocamente, si $\{x_n(k)\} \rightarrow x(k)$ para todo $k \in \Delta_N$, de la segunda igualdad deducimos que $\{\|x_n - x\|_\infty\} \rightarrow 0$, es decir, $\{x_n\} \rightarrow x$. ■

Usaremos a menudo este resultado para trasladar de \mathbb{R} a \mathbb{R}^N diversos resultados acerca de la convergencia de sucesiones. Pero de hecho, podemos usar la misma idea en un contexto más general, como enseguida veremos.

2.11. Producto de espacios normados o métricos

Los mismos procedimientos que, a partir del valor absoluto, nos permitieron definir tres normas equivalentes en \mathbb{R}^N , sirven para definir otras tantas normas en cualquier producto de espacios normados. Por su relación más directa con el producto cartesiano, casi siempre es preferible usar la norma del máximo. Cuando se trabaja con varios espacios normados, es una sana costumbre denotar por $\|\cdot\|$ a las normas de todos ellos. No hay peligro de confusión, pues según cual sea el vector cuya norma usemos en cada momento, estará claro en qué espacio calculamos dicha norma.

Supongamos pues que, para cada $k \in \Delta_N$ tenemos un espacio normado X_k , y consideremos el espacio vectorial producto $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_N$. Igual que en \mathbb{R}^N , para $x \in X$ y $k \in \Delta_N$ denotamos por $x(k) \in X_k$ a la k -ésima componente de x . Las operaciones de X tienen entonces el mismo aspecto que las de \mathbb{R}^N : para $x, y \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $k \in \Delta_N$, se tiene

$$(x + y)(k) = x(k) + y(k) \quad y \quad (\lambda x)(k) = \lambda x(k)$$

Para convertir X en un espacio normado, definimos

$$\|x\|_\infty = \max \{ \|x(k)\| : k \in \Delta_N \} \quad \forall x \in X$$

Se comprueba sin ninguna dificultad que $\|\cdot\|_\infty$ es una norma en X . Decimos que X con la norma $\|\cdot\|_\infty$ es el **espacio normado producto** de X_1, X_2, \dots, X_N . También decimos que la topología de la norma $\|\cdot\|_\infty$ es la **topología producto** de las topologías de la norma en los espacios X_1, X_2, \dots, X_N .

Obviamente, la topología usual de \mathbb{R}^N es un ejemplo de topología producto, en el que todos los factores coinciden con \mathbb{R} . Si $M \in \mathbb{N}$ y pensamos que $\mathbb{R}^{N+M} = \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$, es claro que la topología usual de \mathbb{R}^{N+M} es el producto de la usual de \mathbb{R}^N por la usual de \mathbb{R}^M . En efecto, si tanto en \mathbb{R}^N como en \mathbb{R}^M consideramos la norma del máximo, la norma del producto $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ no es otra que la norma del máximo en \mathbb{R}^{N+M} .

Para trabajar con la topología producto, es muy cómodo usar la convergencia de sucesiones, que sabemos caracteriza a dicha topología. El mismo razonamiento que hemos usado en \mathbb{R}^N nos dice que, conocer la convergencia en el producto, equivale a conocerla en los factores:

- Si $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_N$ es un producto de espacios normados, $\{x_n\}$ una sucesión de vectores de X y $x \in X$, se tiene:

$$\{x_n\} \rightarrow x \quad \Longleftrightarrow \quad \{x_n(k)\} \rightarrow x(k) \quad \forall k \in \Delta_N$$

En efecto, basta tener en cuenta que, para cualesquiera $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \Delta_N$, se tiene

$$\|x_n(k) - x(k)\| \leq \|x_n - x\|_\infty \leq \sum_{j=1}^N \|x_n(j) - x(j)\| \quad \blacksquare$$

Todo lo hecho con un producto de espacios normados puede hacerse, de forma análoga, con un producto de espacios métricos, lo repasamos brevemente. Sean E_1, E_2, \dots, E_N espacios métricos cuyas distancias denotamos todas por d . El producto $E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_N$ se convierte en un espacio métrico sin más que definir

$$d_\infty(x, y) = \max \{ d(x(k), y(k)) : k \in I_N \} \quad \forall x, y \in E$$

pues se comprueba sin ninguna dificultad que d_∞ es una distancia en E . Decimos que E es el **espacio métrico producto** de E_1, E_2, \dots, E_N , y que la topología generada por d_∞ es la **topología producto** de las generadas por las distancias de E_1, E_2, \dots, E_N . Si $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos de E , y $x \in E$, vemos que $\{x_n\} \rightarrow x$ si, y sólo si, $\{x_n(k)\} \rightarrow x(k)$ para todo $k \in \Delta_N$.

2.12. Ejercicios

1. Probar que, en todo espacio métrico, la distancia queda determinada cuando se conocen las bolas abiertas. En el caso particular de un espacio normado, probar que la norma queda determinada cuando se conoce la bola abierta unidad.
2. Sea X un espacio normado, $x, y \in X$ y $r, \rho \in \mathbb{R}^+$. Probar que:

$$(a) \quad B(x, r) \cap B(y, \rho) \neq \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad \|y - x\| < r + \rho$$

$$(b) \quad B(y, \rho) \subset B(x, r) \quad \Longleftrightarrow \quad \|y - x\| \leq r - \rho$$

¿Son ciertos los resultados análogos en un espacio métrico cualquiera?

3. Dar un ejemplo de una familia numerable de abiertos de \mathbb{R} cuya intersección no sea un conjunto abierto.
4. Si A es un subconjunto no vacío de un espacio métrico E con distancia d , se define la *distancia* de un punto $x \in E$ al conjunto A por

$$d(x, A) = \inf \{ d(x, a) : a \in A \}$$

Probar que $\overline{A} = \{x \in E : d(x, A) = 0\}$.

5. Si X un espacio normado, $x \in X$ y $r \in \mathbb{R}^+$, probar que

$$\overline{B(x, r)} = \overline{B}(x, r) \quad \text{y} \quad B(x, r) = [\overline{B}(x, r)]^\circ$$

Deducir que $\text{Fr}(B(x, r)) = \text{Fr}(\overline{B}(x, r)) = S(x, r)$. ¿Son ciertos estos resultados en un espacio métrico cualquiera?

6. Para un intervalo $J \subset \mathbb{R}$, calcular los conjuntos $J^\circ, \overline{J}, J'$ y $\text{Fr } J$.
7. En el espacio métrico \mathbb{R} y para cada uno de los conjuntos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ y $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, calcular su interior y su cierre, sus puntos de acumulación, sus puntos aislados y su frontera.
8. Si un subconjunto A de un espacio métrico E verifica que $A' = \emptyset$, probar que la topología inducida por E en A es la discreta. ¿Es cierto el recíproco?
9. Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sucesiones convergentes en un espacio métrico E con distancia d . Probar que la sucesión $\{d(x_n, y_n)\}$ es convergente y calcular su límite.
10. Sea $E = \prod_{k=1}^N E_k$ un producto de espacios métricos y $A = \prod_{k=1}^N A_k \subset E$, donde $A_k \subset E_k$ para todo $k \in I_N$. Probar que $A^\circ = \prod_{k=1}^N A_k^\circ$ y que $\overline{A} = \prod_{k=1}^N \overline{A_k}$. Deducir que A es un abierto de E si, y sólo si, A_k es un abierto de E_k para todo $k \in \Delta_N$, mientras que A es un cerrado de E si, y sólo si, A_k es un cerrado de E_k para todo $k \in \Delta_N$.

2. Sea X un espacio normado, $x, y \in X$ y $r, \rho \in \mathbb{R}^+$. Probar que:

$$(a) \quad B(x, r) \cap B(y, \rho) \neq \emptyset \iff \|y - x\| < r + \rho$$

$$(b) \quad B(y, \rho) \subset B(x, r) \iff \|y - x\| \leq r - \rho$$

¿Son ciertos los resultados análogos en un espacio métrico cualquiera?

$$a) \quad z \in B(x, r) \cap B(y, \rho) \quad \boxed{\Rightarrow}$$

$$\text{Concretamente, } z \in B(x, r) \iff \|z - x\| < r$$

$$z \in B(y, \rho) \iff \|z - y\| < \rho$$

Si sumamos las 2 desigualdades:

$$\|z - x\| + \|z - y\| < r + \rho$$

y por la desigualdad triangular y la propiedad para homotécias:

$$\|z - x\| + \|(-1) \cdot (y - z)\| < r + \rho$$

$$\|z - x\| + \|y - z\| < r + \rho$$

$$\|y - x\| = \|z - x + y - z\| \leq \|z - x\| + \|y - z\| < r + \rho \quad \checkmark$$

$$\boxed{\Leftarrow}$$

b) $\boxed{\Leftarrow}$ Sea $z \in B(y, \rho)$. Queremos ver que $z \in B(x, r)$. Como $z \in B(y, \rho)$, $\|z - y\| < \rho$. Tenemos que $\|y - x\| \leq r - \rho$. Sumamos las desigualdades:

$$\|y - x\| + \|z - y\| < r$$

y aplicamos la desigualdad triangular:

$$\|y - x + z - y\| = \|z - x\| \leq \|y - x\| + \|z - y\| < r$$

$$\|z - x\| < r \Rightarrow z \in B(x, r)$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Sea $z \in B(y, \rho)$ ($\|z - y\| < \rho$) y como $B(y, \rho) \subset B(x, r)$, también $z \in B(x, r)$ ($\|z - x\| < r$).

9. Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sucesiones convergentes en un espacio métrico E con distancia d .

Probar que la sucesión $\{d(x_n, y_n)\}$ es convergente y calcular su límite.

$$\{x_n\} \text{ convergente} \Leftrightarrow \forall \frac{\varepsilon}{2} > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, d(x_n, x) < \varepsilon/2$$

(siendo $x = \lim \{x_n\}$)

$$\{y_n\} \text{ convergente} \Leftrightarrow \forall \frac{\varepsilon}{2} > 0 \exists m_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq m_0, d(y_n, y) < \varepsilon/2$$

(siendo $y = \lim \{y_n\}$)

Dado un ε , sea $u = \max\{n_0, m_0\}$, de forma que $\forall n \geq u, d(x_n, x) < \varepsilon/2$
y $d(y_n, y) < \varepsilon/2$:

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n)$$

\uparrow Desigualdad triangular \uparrow Desigualdad triangular

Tomamos los extremos de la desigualdad:

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(y_n, y) + d(x, y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + d(x, y) = \varepsilon + d(x, y)$$

$$\Downarrow$$

$$d(x_n, y_n) < \varepsilon + d(x, y)$$

$$\Downarrow$$

$$d(x_n, y_n) - d(x, y) < \varepsilon$$

\swarrow

$$\forall \varepsilon > 0 \exists m \in \mathbb{N} : \forall n \geq u, d(x_n, y_n) - d(x, y) < \varepsilon \Rightarrow \{d(x_n, y_n) - d(x, y)\} \rightarrow 0$$

$$\Downarrow$$

$\{d(x_n, y_n)\} \rightarrow d(x, y)$

4. Si A es un subconjunto no vacío de un espacio métrico E con distancia d , se define la distancia de un punto $x \in E$ al conjunto A por

$$d(x, A) = \inf \{ d(x, a) : a \in A \}$$

Probar que $\bar{A} = \{ x \in E : d(x, A) = 0 \}$.

Recordemos que por la definición de cierre, $\bar{A} = \{ \cap C : C \text{ es cerrada}, A \subset C \}$.
 Todo punto de \bar{A} se llama punto adherente y cumple que $\forall U \in \mathcal{U}(x)$,
 $U \cap A \neq \emptyset$, concretamente $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$.

$$B(x, \varepsilon) = \{ y \in E : d(x, y) < \varepsilon \} \quad \begin{array}{l} \text{Si } x \in A \\ \downarrow \end{array}$$

Si $x \in \bar{A}$, $x \in B(x, \varepsilon) \cap A$, y puede ser $x \in A$ o $x \notin A$. Usando la definición de $d(x, A)$, como $x \in A$, claramente $d(x, A) = 0$ ya que $d(x, A)$ es el ínfimo de todas las distancias de x a los distintos puntos de A , pero como $\forall x, y, d(x, y) \geq 0$ y $x \in A$, $d(x, x) = 0$. Por lo tanto, $\bar{A} = \{ x \in E : d(x, A) = 0 \}$.

Para los puntos de \bar{A} que no pertenecen a A , dicho ínfimo no se alcanza. Sin embargo, $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ y como $\varepsilon > 0$ lo podemos tomar tan pequeño como queramos, en $B(x, \varepsilon) \cap A$ habrá puntos $y \in A$ tales que $d(x, y) < \varepsilon$ con $d(x, y) \approx 0$, siendo $d(x, A) = \inf \{ d(x, a) : a \in A \} = 0$.

3. Dar un ejemplo de una familia numerable de abiertos de \mathbb{R} cuya intersección no sea un conjunto abierto.

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (-1, \frac{1}{n}) = (-1, 0]$$

1. Probar que, en todo espacio métrico, la distancia queda determinada cuando se conocen las bolas abiertas. En el caso particular de un espacio normado, probar que la norma queda determinada cuando se conoce la bola abierta unidad.

Sea $y \in B(x, r) \Rightarrow d(x, y) < r$

Si consideramos todas las bolas abiertas a las que pertenece y , es lógico pensar en la bola de centro x y radio r más pequeña a la que pertenece $y \Rightarrow d(x, y) = \inf \{ r \in \mathbb{R}^+ : y \in B(x, r) \}$