Análisis Matemático I

Tema 7: Vector Derivada

Diferencial de funciones de una variable real

El espacio normado $L(\mathbb{R}, Y)$

$$Y \text{ espacio normado}, \quad \Phi : L(\mathbb{R}, Y) \to Y\,, \quad \Phi(T) = T(1) \quad \forall T \in L(\mathbb{R}, Y)$$

$$\Phi \text{ es lineal, biyectiva y preserva la norma:} \quad \|\Phi(T)\| = \|T\| \quad \forall T \in L(\mathbb{R}, Y)$$

luego el espacio normado $L(\mathbb{R}, Y)$ se identifica totalmente con Y

Notación

$$\emptyset \neq \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{R}, \quad Y \text{ espacio normado}, \quad f : \Omega \to Y$$

La diferencial vista como vector de Y

$$f \text{ diferenciable en } a \in \Omega \quad \Longrightarrow \quad Df(a)(1) = \lim_{t \to a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$$

Vector derivada (I)

Derivabilidad

f es derivable en un punto $a \in \Omega$ cuando

la función $t \mapsto \dfrac{f(t) - f(a)}{t - a}$, de $\Omega \setminus \{a\}$ en Y,

tiene límite en el punto a, en cuyo caso,

$$f'(a) \overset{\text{def}}{=} \lim_{t \to a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$$ es el vector derivada de f en a

f es derivable cuando lo es en todo punto de Ω, y entonces,

$f' : \Omega \to Y$, $x \mapsto f'(x)$, es la función derivada de f

Equivalencia entre diferenciabilidad y derivabilidad

- f diferenciable en $a \in \Omega \iff f$ derivable en a, en cuyo caso

  $f'(a) = Df(a)(1)$, o bien, $Df(a)(t) = f'(a)t \quad \forall t \in \mathbb{R}$
- Por tanto f es diferenciable si, y sólo si, es derivable
- $f \in C^1(\Omega, Y)$ si, y sólo si, f es derivable y $f' : \Omega \to Y$ es continua
- La distinción entre diferenciabilidad y derivabilidad es cuestión de matiz

Vector derivada (II)

Una propiedad del vector derivada

Si f es derivable en $a \in \Omega$, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\left.\begin{array}{c} t_1, t_2 \in \Omega, \quad t_1 \neq t_2 \\ a - \delta < t_1 \leqslant a \leqslant t_2 < a + \delta \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\| \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} - f\,'(a) \right\| \leqslant \varepsilon$$

Caso particular $Y = \mathbb{R}^M$

$Y = \mathbb{R}^M$ con cualquier norma, $\{e_1, e_2, \ldots, e_M\}$ base usual de $\mathbb{R}^M$

$$\emptyset \neq \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{R}, \quad f = (f_1, f_2, \ldots, f_M) : \Omega \to \mathbb{R}^M$$

f derivable en $a \in \Omega \iff f_j$ derivable en a $\forall j \in \Delta_M$, en cuyo caso:

$$f\,'(a) = \big(f_1'(a), f_2'(a), \ldots, f_M'(a)\big), \quad \text{es decir,} \quad f\,'(a) = \sum_{j=1}^{M} f_j'(a)\, e_j$$

Interpretación geométrica del vector derivada (I)

Notación en todo lo que sigue

$\emptyset \neq J \subset \mathbb{R}$, J intervalo abierto, $\gamma : J \to \mathbb{R}^M$ continua

Curvas paramétricas, recta tangente

Imagen de γ: $C = \gamma(J) = \{\gamma(t) : t \in J\} \subset \mathbb{R}^M$

Se dice que C es una curva paramétrica en $\mathbb{R}^M$

y que γ es una parametrización de la curva C

Cuando γ es derivable en $a \in J$, con $\gamma'(a) \neq 0$,

se dice que $x = \gamma(a)$ es un punto regular de la curva $C = \gamma(J)$

Entonces, la recta tangente a C en el punto $x = \gamma(a)$ es:

$$R = \{\gamma(a) + t\gamma'(a) : t \in \mathbb{R}\}$$

Si γ no es derivable en a, o es derivable en a con $\gamma'(a) = 0$,

se dice que $x = \gamma(a)$ es un punto singular de la curva $C = \gamma(J)$

$C = \gamma(J)$ es una curva regular cuando γ es derivable y $\gamma'(t) \neq 0 \quad \forall t \in J$

Interpretación geométrica del vector derivada (II)

Ecuaciones paramétricas de una curva y sus tangentes

$C = \gamma(J)$ curva paramétrica en $\mathbb{R}^M$, $\{\pi_j : j \in \Delta_M\}$ proyecciones coordenadas

$$x_j = \pi_j \circ \gamma \quad \forall j \in \Delta_M \,, \qquad \text{es decir,} \qquad \gamma = (x_1, x_2, \ldots, x_M)$$

Ecuaciones paramétricas de $C = \gamma(J)$: $\quad x_j = x_j(t) \quad \forall t \in J \,, \quad (j \in \Delta_M)$

γ derivable en $a \in J \quad \Longleftrightarrow \quad x_j$ derivable en $a \ \ \forall j \in \Delta_M$, en cuyo caso

$$\gamma'(a) = \big(x_1'(a), x_2'(a), \ldots, x_M'(a)\big) \,, \quad \text{es decir,} \quad \gamma'(a) = \sum_{j=1}^{M} x_j'(a) e_j$$

Si $x = \gamma(a)$ es un punto regular de $C = \gamma(J)$,

tenemos ecuaciones paramétricas de la recta tangente:

$$x_j = x_j(a) + t x_j'(a) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (j \in \Delta_M)$$

Interpretación física del vector derivada

Vector velocidad

$\gamma : J \to \mathbb{R}^M$ derivable

γ describe un movimiento en el espacio euclídeo M-dimensional,

J es un intervalo de tiempo y, para cada $t \in J$,

$\gamma(t)$ es vector de posición del móvil en el instante t,

La curva paramétrica $C = \gamma(J)$ es la trayectoria

y sus ecuaciones paramétricas son las ecuaciones del movimiento

Para cada $t \in J$, $\gamma'(t)$ es el vector velocidad en el instante t,

y $\|\gamma'(t)\|$ es la celeridad del móvil en el instante t

Curvas paramétricas en $\mathbb{R}^2$

Curva plana

$$C = \gamma(J) \subset \mathbb{R}^2 \quad \text{con} \quad \gamma : J \to \mathbb{R}^2 \ \text{continua}$$

$$x = \pi_1 \circ \gamma \ \text{ e } \ y = \pi_2 \circ \gamma, \qquad \text{es decir} \qquad \gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big) \ \ \forall t \in J$$

Ecuaciones paramétricas: $x = x(t)$ e $y = y(t)$ $\forall t \in J$

γ derivable en $a \in J$ $\iff$ x e y derivables en a en cuyo caso

$$\gamma'(a) = \big(x'(a), y'(a)\big), \ \text{ es decir, } \ \gamma'(a) = x'(a)e_1 + y'(a)e_2$$

Si $\big(x(a), y(a)\big) = \gamma(a)$ es un punto regular de $C = \gamma(J)$,

tenemos ecuaciones paramétricas de la recta tangente:

$$x = x(a) + t x'(a) \quad \text{e} \quad y = y(a) + t y'(a) \ \ \forall t \in \mathbb{R}$$

Ejemplos de curvas planas

Elipses

Elipse de centro $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ con semiejes $a,b\in\mathbb{R}^+$:

$$C=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1\right\}$$

Parametrización: $C=\gamma(\mathbb{R})$ donde $\gamma(t)=\big(\alpha+a\cos t\,,\,\beta+b\,\mathrm{sen}\,t\big)\quad\forall t\in\mathbb{R}$

Ecuaciones paramétricas: $x=\alpha+a\cos t$ e $y=\beta+b\,\mathrm{sen}\,t\quad\forall t\in\mathbb{R}$

$x'(t)=-a\,\mathrm{sen}\,t$ e $y'(t)=b\cos t\quad\forall t\in\mathbb{R}$ curva regular

Recta tangente a la elipse en un punto $(x_0,y_0)\in C$:

$$bx=bx_0-ta(y_0-\beta)\quad \text{y}\quad ay=ay_0+tb(x_0-\alpha)\quad\forall t\in\mathbb{R}$$

Curvas en forma explícita

Curvas explícitas

$$\operatorname{Gr}\varphi = \Big\{\big(x,\varphi(x)\big) : x \in J\Big\} \subset \mathbb{R}^2 \quad \text{con} \quad \varphi : J \to \mathbb{R} \ \text{ continua}$$

Se dice que $\operatorname{Gr}\varphi$ es una curva explícita

con ecuación (explícita) $\quad y = \varphi(x) \ \ \forall x \in J$

$$\Big\{(\psi(y),y) : y \in J\Big\} \quad \text{con} \quad \psi : J \to \mathbb{R} \ \text{ continua}$$

es también una curva explícita, con ecuación $\quad x = \psi(y) \quad \forall y \in J$

Toda curva explícita se puede parametrizar:

$$\operatorname{Gr}\varphi = \gamma(J) \ \text{ donde } \ \gamma(t) = \big(t,\varphi(t)\big) \quad \forall t \in J$$

ecuaciones paramétricas: $\quad x = t \quad$ e $\quad y = \varphi(t) \quad \forall t \in J$

Cuando φ es derivable, $\operatorname{Gr}\varphi$ es una curva regular:

$$\gamma'(a) = \big(1,\varphi'(a)\big) \neq (0,0) \quad \forall a \in J$$

Recta tangente en el punto $\big(a,\varphi(a)\big) \in \operatorname{Gr}\varphi$:

$$x = a + t \quad \text{e} \quad y = \varphi(a) + t\varphi'(a) \ \ \forall t \in \mathbb{R}, \quad \text{o bien} \quad y - \varphi(a) = \varphi'(a)(x-a)$$

Ejemplos sobre puntos singulares y regulares

Punto singular que se mantiene, pero de otra forma

$\varphi(x) = |x| \ \ \forall x \in \mathbb{R}$, Gr φ curva explícita de ecuación $y = |x| \ \ \forall x \in \mathbb{R}$

Parametrizamos: Gr $\varphi = \gamma(\mathbb{R})$ donde $\gamma(t) = \big(t, |t|\big) \ \ \forall t \in \mathbb{R}$

El origen es punto singular, porque γ no es derivable en 0

Reparametrizamos: Gr $\varphi = \chi(\mathbb{R})$ donde $\chi(t) = \big(t\,|t|\,, t^2\big) \ \ \forall t \in \mathbb{R}$

χ es derivable, pero el origen sigue siendo punto singular, porque $\chi'(0) = 0$

Puntos regulares que se vuelven singulares y viceversa

$\varphi : J \to \mathbb{R}$ derivable, $\gamma(x) = \big(x, \varphi(x)\big) \ \ \forall x \in \mathbb{R}$

Gr $\varphi = \gamma(\mathbb{R})$ es una curva regular

Gr $\varphi = \chi(\mathbb{R})$ donde $\chi(t) = \big(t^3, \varphi(t^3)\big) \ \ \forall t \in \mathbb{R}$

$(0,0) = \chi(0)$ es punto singular de Gr $\varphi = \chi(\mathbb{R})$, porque $\chi'(0) = 0$

Curvas paramétricas en $\mathbb{R}^3$

Curva alabeada

$$C = \gamma(J) \subset \mathbb{R}^3 \quad \text{con} \quad \gamma : J \to \mathbb{R}^3 \ \text{continua}$$

$$x = \pi_1 \circ \gamma\,,\ y = \pi_2 \circ \gamma\,,\ z = \pi_3 \circ \gamma\,, \quad \text{es decir,}\ \ \gamma(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big) \quad \forall t \in J$$

Ecuaciones paramétricas: $\quad x = x(t)\,, \quad y = y(t)\,, \quad z = z(t)\,, \quad \forall t \in J$

γ derivable en $a \in J \iff x, y, z$ derivables en a, en cuyo caso

$$\gamma'(a) = \big(x'(a), y'(a), z'(a)\big)\,, \quad \text{es decir,}\ \ \gamma'(a) = x'(a)e_1 + y'(a)e_2 + z'(a)e_3$$

Si $\gamma'(a) \neq 0$, ecuaciones paramétricas de la recta tangente:

$$x = x(a) + t x'(a)\,, \quad y = y(a) + t y'(a)\,, \quad z = z(a) + t z'(a)\,, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Un ejemplo

La hélice circular C de ecuaciones paramétricas:

$$x = \cos t\,, \quad y = \operatorname{sen} t\,, \quad z = t \qquad \text{es una curva regular}$$

La recta tangente a C en $(x_0, y_0, z_0) \in C$ tiene ecuaciones paramétricas:

$$x = x_0 - t y_0\,, \quad y = y_0 + t x_0\,, \quad z = z_0 + t\,, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$