8. Estudiar el comportamiento en 0 y en $\pm\infty$ de la función $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{x - \operatorname{sen}(x)}{x^6} \left(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} \right)$$

- <u>Comportamiento en $-\infty$</u>

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \frac{x - \operatorname{sen}(x)}{x^6} \left(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} \right) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^6} \left(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} \right) \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^5} \\
&= 0
\end{aligned}$$

- <u>Comportamiento en $+\infty$</u>

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{x - \operatorname{sen}(x)}{x^6} \left(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} \right) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^6} \left(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} \right) \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^5} \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

- <u>Comportamiento en 0</u>

  Desarrollemos por Taylor las funciones $\operatorname{sen}(x)$ y e^x:
  $\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \alpha(x)$, donde $\alpha(x)$ es tal que $\lim_{x\to 0} \frac{\alpha(x)}{x^3} = 0$
  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \beta(x)$, donde $\beta(x)$ es tal que $\lim_{x\to 0} \frac{\beta(x)}{x^3} = 0$
  Entonces,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\left(\frac{x^3}{6} - \alpha(x)\right)\left(\frac{x^3}{6} + \beta(x)\right)}{x^6} \\
&= \frac{\frac{x^6}{36} + \frac{x^3}{6}\beta(x) - \frac{x^3}{6}\alpha(x) - \alpha(x)\beta(x)}{x^6} \\
&= \frac{1}{36} + \frac{1}{6}\frac{\beta(x)}{x^3} - \frac{1}{6}\frac{\alpha(x)}{x^3} - \frac{\alpha(x)}{x^3}\frac{\beta(x)}{x^3}
\end{aligned}$$

  Por tanto,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{36} + \frac{1}{6}\frac{\beta(x)}{x^3} - \frac{1}{6}\frac{\alpha(x)}{x^3} - \frac{\alpha(x)}{x^3}\frac{\beta(x)}{x^3} = \frac{1}{36}$$