Relación de ejercicios 3 EDIP

Carlos García, Bora Goker, Javier Gómez,
Ana Graciani, J.Alberto Hoces

2020/2021

Ejercicio 1. Durante un año, las personas de una ciudad utilizan 3 tipos de transportes: metro (M), autobús (A), y coche particular (C). Las probabilidades de que durante el año hayan usado unos u otros transportes son:

M: 0.3; A: 0.2; C: 0.15; M y A: 0.1; M y C: 0.05; A y C: 0.06; M, A y C: 0.01

Calcular las probabilidades siguientes:

a) que una persona viaje en metro y no en autobús.

$$P(M \cap \bar{A}) = P(M) - P(M \cap A) = 0{,}3 - 0{,}1 = \underline{0{,}2}$$

b) que una persona tome al menos dos medios de transporte.

$$P((M\cap A)\cup(M\cap C)\cup(A\cap C)\cup(M\cap A\cap C)) = P((M\cap A)\cup(M\cap C))+P((A\cap C)\cup(M\cap A\cap C))$$

$$-P(((M \cap A) \cup (M \cap C)) \cap ((A \cap C) \cup (M \cap A \cap C))) =$$

$$P(M\cap A)+P(M\cap C)-P(M\cap A\cap C)+P(A\cap C)+P(M\cap A\cap C)-P(M\cap A\cap C)-P(M\cap A\cap C) =$$

$$0{,}1 + 0{,}05 - 0{,}01 + 0{,}06 + 0{,}01 - 0{,}01 - 0{,}01 = \underline{0{,}19}$$

c) que una persona viaje en metro o en coche, pero no en autobús.

$$P((M\cup C)\cap\bar{A}) = P(M\cup C)-P((M\cup C)\cap A) = P(M)+P(C)-P(M\cap C)-[P((M\cap A)\cup(A\cap C))] =$$

$$P(M) + P(C) - P(M \cap C) - P(M \cap A) - P(A \cap A) + P(M \cap A \cap C) =$$

$$0{,}3 + 0{,}15 - 0{,}05 - 0{,}1 - 0{,}06 + 0{,}01 = \underline{0{,}25}$$

d) que viaje en metro, o bien en autobús y en coche.

$$P(M \cup (A \cap C)) = P(M) + P(A \cap C) - P(M \cap A \cap C) = 0{,}3 + 0{,}06 - 0{,}01 = \underline{0{,}35}$$

e) que una persona vaya a pie. Aquí se nos plantean dos posibilidades: que o el ir a pie sea la única alternativa a los medios de transportes propuestos en el enunciado, o que no sea así. En el segundo caso el problema sería imposible de resolver puesto que faltarían datos. Resolvamoslo para el primer caso:

$$P(\overline{M \cup A \cup C}) = 1 - P(M \cup A \cup C) = 1 - [P(M \cup A) + P(C) - P((M \cup A) \cap C)] =$$

$$1 - [P(M) + P(A) - P(M \cap A) + P(C) - P((M \cap C) \cup (A \cap C))] =$$

$$1 - [0{,}3 + 0{,}2 - 0{,}1 + 0{,}15 - 0{,}05 - 0{,}06 + 0{,}01] = \underline{0{,}55}$$

Ejercicio 2. Sean A, B y C tres sucesos de un espacio probabilístico $\Omega, \mathcal{A}, P)$, tales que $P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}2$, $P(C) = 0{,}3$, $P(A \cap B) = 0{,}1$ y $(A \cup B) \cap C = \emptyset$. Calcular las probabilidades de los siguientes sucesos:

a) sólo ocurre A.

$$P(A\cap\bar{B}\cap\bar{C}) = P(A\cap(\overline{B \cup C})) = P(A)-P(A\cap(B\cup C)) = P(A)-P((A\cap B)\cup(A\cap C)) =$$

$$P(A) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C) = 0{,}4 - 0{,}1 - 0 - 0 = \underline{0{,}3}$$

b) ocurren los tres sucesos

$$P((A \cup B) \cap C) = P((A \cap C) \cup (B \cap C)) = 0 \Rightarrow P(A \cap C) = 0 \text{ y } P(B \cap C) = 0$$

$$P(A \cap B \cap C) = \underline{0}$$

c) ocurren A y B) pero no C.

$$P(A \cap B \cap \bar{C}) = P(A \cap B) - P(A \cap B \cap C) = P(A \cap B) = \underline{0{,}1}$$

d) por los menos dos ocurren.

$$P((A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(A\cap C)) = P((A\cap B)\cup((A\cup B)\cap C)) = P((A\cap B)\cup\emptyset) = P(A\cap B) = \underline{0{,}1}$$

e) ocurren dos y no más.

$$P((A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)) = P(A \cap B) = \underline{0{,}1}$$

f) no ocurren más de dos.

$$P(\overline{A \cap B \cap C}) = 1 - P(A \cap B \cap C) = \underline{1}$$

g) ocurre por lo menos uno

$$P(A\cup B\cup C) = P(A\cup B)+P(C)-P((A\cup B)\cap C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B) =$$

$$0{,}4 + 0{,}2 + 0{,}4 - 0{,}1 = \underline{0{,}8}$$

h) ocurre sólo uno.

$$P((A\cap\bar{B}\cap\bar{C})\cup(\bar{A}\cap B\cap\bar{C})\cup(\bar{A}\cap\bar{B}\cap C)) = P((A\cap\bar{B}\cap\bar{C})\cup(\bar{A}\cap B\cap\bar{C}))+P(\bar{A}\cap\bar{B}\cap C)-0 =$$

$$P(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) + P(\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) + P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) - 0 - 0 =$$

$$P(A \cap \bar{B}) - P(A \cap \bar{B} \cap C) + P(\bar{A} \cap B) - P(\bar{A} \cap B \cap C) + P(\bar{A} \cap C) - P(\bar{A} \cap B \cap C) =$$

$$P(A) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C) + P(B) - P(A \cap B) - P(B \cap C)+$$

$$+P(A \cap B \cap C) + P(C) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) =$$

$$P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) = 0{,}4 - 0{,}1 + 0{,}2 - 0{,}1 + 0{,}3 = \underline{0{,}7}$$

i) no ocurre ninguno.

$$P(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - P(A \cup B \cup C) = 1 - 0{,}8 = \underline{0{,}2}$$

Ejercicio 3. Se sacan dos bolas sucesivamente sin devolución de una urna que contiene 3 bolas rojas distinguibles y 2 blancas distinguibles.

a) Describir el espacio de probabilidad asociado a este experimento.
$\Omega = \{b_i b_j; i,j = 1,2; i \neq j\} \cup \{b_i r_j; i = 1,2; j = 1,2,3\} \cup \{r_i b_j; i = 1,2; j = 1,2,3\} \cup$
$\cup \{r_i r_j; i,j = 1,2,3; i \neq j\}$

$$\#(\Omega) = 20$$

b) Descomponer en sucesos elementales los sucesos:la primera bola es roja,la segunda bola esblanca y calcular la probabilidad de cada uno de ellos.
$P(1^a\ roja) = P(1^a\ roja\ 2^a\ roja) + P(1^a\ roja\ 2^a\ blanca) = P(r_i r_j; i,j = 1,2,3; i \neq j) +$
$+ P(r_i b_j; i = 1,2,3; j = 1,2) = \dfrac{2*3}{20} + \dfrac{2*3}{20} = \dfrac{3}{5}$
$P(2^a\ blanca) = P(1^a\ roja\ 2^a\ blanca) + P(1^a\ blanca\ 2^a\ blanca) = P(r_i b_j; i = 1,2,3; j = 1,2)+$
$+ P(b_i b_j; i,j = 1,2; i \neq j) = \dfrac{2*1}{20} + \dfrac{3*2}{20} = \dfrac{2}{5}$

c) ¿Cúal es la probabilidad de que ocurra alguno de los sucesos considerados en el apartado anterior?
Usando el principio de inclusión-exclusión:
$P(1^a\ roja \cup 2^a\ blanca) = P(1^a\ roja) + P(2^a\ blanca) - P(1^a\ roja 2^a\ blanca) =$
$= 1 - \dfrac{3*2}{20} = \underline{0{,}7}$

Ejercicio 4. Una urna contiene a bolas blancas y b bolas negras. ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer dos bolas simultáneamente sean de distinto color?

Aunque en el enunciado del problema se nos especifique que ambas bolas se extraen de la urna simultáneamente, podemos considerar la extracción de una bola y luego de otra sin reemplazamiento con el fin de facilitar el cálculo de la probabilidad que se nos pide. Nombraremos B y N a los sucesos "sacar bola blanca" y "sacar bola negra" respectivamente. Que sean de distinto color significa que primero se saca una bola negra y luego una blanca o bien una blanca y después una negra. Por lo tanto, el cálculo de la probabilidad del suceso pedido será igual a la suma de estas dos probabilidades:

$$P(B/N) \cdot P(N) \Rightarrow \text{Que salga blanca después de sacar una negra}$$

$$P(N/B) \cdot P(B) \Rightarrow \text{Que salga negra después de sacar una blanca}$$

$$P(\text{2 bolas de distinto color}) = P(B/N) \cdot P(N) + P(N/B) \cdot P(B) =$$

$$= \frac{b}{n+b-1} \cdot \frac{n}{n+b} + \frac{n}{n+b-1} \cdot \frac{b}{n+b} = \frac{2nb}{n^2+b^2+2nb-n-b}$$

Ejercicio 5. Una urna contiene 5 bolas blancas y 3 rojas. Se extraen 2 bolas simultáneamente. Calcular la probabilidad de obtener:

a) dos bolas rojas

b) dos bolas blancas

c) una blanca y otra roja.

No influye el orden en el que sacamos las bolas, los pares se sacan simultáneamente, y no se pueden repetir elementos porque no podemos sacar la misma bola 2 veces, luego para calcular las situaciones posibles calculamos las combinaciones sin repetición.
Tenemos 8 bolas en total y sacamos 2; $\quad n = 8, \quad p = 2$

$$C_n^p = C_8^2 = \binom{8}{2} = 28$$

a) No influye el orden y no se pueden repetir elementos $\longrightarrow$ combinaciones sin repetición
Hay 3 bolas rojas $\Longrightarrow$ situaciones favorables: $C_3^2 = \binom{3}{2} = 3$

$$P(\text{dos bolas rojas}) = \frac{C_3^2}{C_8^2} = \frac{3}{28} = \underline{0{,}107}$$

b)

$$P(\text{dos bolas blancas}) = \frac{C_5^2}{C_8^2} = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{10}{28} = \frac{5}{14} = \underline{0{,}357}$$

c) 5 bolas blancas $\Longrightarrow$ situaciones favorables 1 bola blanca: $C_5^1 = \binom{5}{1} = 5$
3 bolas rojas $\Longrightarrow$ situaciones favorables 1 bola roja: $C_3^1 = \binom{3}{1} = 3$

$$P(\text{una bola blanca y otra roja}) = \frac{C_5^2 \cdot C_3^2}{C_8^2} = \frac{5 \cdot 3}{28} = \frac{15}{28} = \underline{0{,}536}$$

Ejercicio 6. En una lotería de 100 billetes hay 2 que tienen premio.

a) ¿Cuál es la probabilidad de ganar al menos un premio si se compran 12 billetes?
Sea A la probabilidad de ganar al menos uno. Podemos afirmar que:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

Por tanto, hay $\binom{100}{12}$ combinaciones de billetes y hay $\binom{98}{12}$ combinaciones de billetes no ganadores. Por tanto:

$$P(A) = 1 - \frac{\binom{98}{12}}{\binom{100}{12}} = 1 - \frac{98! \cdot 88!}{86! \cdot 100!} = 1 - 0{,}773 = \underline{0{,}2267}$$

b) ¿Cuantos billetes habrá que comprar para que la probabilidad de ganar al menos un premio sea mayor que 4/5?
Supongamos que cogemos x billetes. La probabilidad de no ganar nada con ellos sería:

$$\frac{\binom{98}{x}}{\binom{100}{x}}$$

Para obtener una probabilidad mayor que 4/5 de ganar, tenemos que obtener una menor de 0.2 de perder. Así:

$$\frac{\binom{98}{x}}{\binom{100}{x}} \leq 0{,}2 \Rightarrow \frac{(100-x)(99-x)}{9900} \leq 0{,}2 \Rightarrow x^2 - 199x + 7920 \leq 0$$

$$x = 144 \text{ ó } x = 55$$

Puesto que hay 100 billetes la solución correcta es 55 billetes.

Ejercicio 7. Se consideran los 100 primeros números naturales. Se sacan 3 al azar.

a) Calcular la probabilidad de que en los 3 primeros números obtenidos no exista ningún cuadrado perfecto.
Si se hacen sin repetición:
$P(\text{No cuadrado perfecto}) = \dfrac{\binom{90}{3}}{\binom{100}{3}} = \frac{\frac{90\cdot 89\cdot 88}{3\cdot 2}}{} = \dfrac{117480}{161700} = \underline{0{,}727}$
Si se hacen con repetición:
$P(\text{No cuadrado perfecto}) = \dfrac{90^3}{100^3} = \dfrac{72900}{1000000} = \underline{0{,}729}$

b) Calcular la probabilidad de que exista al menos un cuadrado perfecto. Si se hacen sin repetición:
$P(\text{Cuadrado perfecto}) = 1 - P(\text{No cuadrado perfecto}) = 1 - 0{,}727 = \underline{0{,}273}$
Si se hacen con repetición:
$P(\text{Cuadrado perfecto}) = 1 - P(\text{No cuadrado perfecto}) = 1 - 0{,}729 = \underline{0{,}271}$

c) Calcular la probabilidad de que exista un solo cuadrado perfecto, de que existan dos y de que tres lo sean.
Si se hacen sin repetición:
$P(\text{Un solo cuadrado perfecto}) = \dfrac{\binom{90}{2}\cdot\binom{10}{1}}{\binom{100}{3}} = \dfrac{40050}{161700} = \underline{0{,}248}$
$P(\text{Dos cuadrados perfectos}) = \dfrac{\binom{90}{1}\cdot\binom{10}{2}}{\binom{100}{3}} = \dfrac{4050}{161700} = \underline{0{,}025}$
$P(\text{Tres cuadrados perfectos}) = \dfrac{\binom{10}{3}}{\binom{100}{3}} = \dfrac{120}{161700} = \underline{0{,}001}$
Si se hacen con repetición:
$P(\text{Un solo cuadrado perfecto}) = \dfrac{90^2\cdot 10}{100^3} = \dfrac{81000}{1000000} = \underline{0{,}081}$
$P(\text{Dos cuadrados perfectos}) = \dfrac{90\cdot 10^2}{100^3} = \dfrac{9000}{1000000} = \underline{0{,}009}$
$P(\text{Tres cuadrados perfectos}) = \dfrac{10^3}{100^3} = \dfrac{1000}{1000000} = \underline{0{,}001}$

Ejercicio 8. En una carrera de relevos cada equipo se compone de 4 atletas. La sociedad deportiva de un colegio cuenta con 10 corredores y su entrenador debe formar un equipo de relevos que disputará el campeonato, y el orden en que participarán los seleccionados.

a) ¿Entre cuántos equipos distintos habrá de elegir el entrenador si los 10 corredores son de igual valía? (Dos equipos con los mismos atletas en orden distinto se consideran diferentes)

Influye el orden de los atletas en el equipo, no intervienen los 10 corredores del colegio en el equipo y un mismo corredor no puede ocupar dos puestos en un equipo, por lo que no se pueden repetir $\longrightarrow$ variaciones sin repetición
Calculamos el número de variaciones sin repetición, que será el número de equipos distintos posibles; $n = 10, \qquad p = 4$

$$V_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)!} = 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10 = 5040 \text{ equipos}$$

b) Calcular la probabilidad de que un alumno cualquiera sea seleccionado.

A: ser seleccionado un alumno cualquiera
situaciones favorables: $V_4^1 \cdot V_9^3$; situaciones posibles: V_{10}^4

$$P(A) = \frac{V_4^1 \cdot V_9^3}{V_{10}^4} = \frac{\frac{4!}{(4-1)!}\frac{9!}{(9-3)!}}{\frac{10!}{(10-4)!}} = \frac{\frac{4!}{3!}\frac{9!}{6!}}{\frac{10!}{6!}} = \frac{4 \cdot 9!}{10!} = \frac{4}{10} = \underline{0{,}4}$$

Ejercicio 9. Una tienda compra bombillas en lotes de 300 unidades. Cuando un lote llega, se comprueban 60 unidades elegidas al azar, rechazándose el envío si se supera la cifra de 5 defectuosas. ¿Cuál es la probabilidad de aceptar un lote en el que haya 10 defectuosas?

Estamos ante un problema de combinatoria. Haremos uso del esquema dado en clase:

¿Intervienen todos los elementos? $\longrightarrow$ No, pues de cada 300 uds. se toman 60.
¿Influye el orden? $\longrightarrow$ No, ya que lo único que nos importa es si las unidades son o no defectuosas, las mismas 60 unidades dispuestas en distinto orden no va a alterar la decisión de descartar el lote.
¿Se pueden repetir los elementos? $\longrightarrow$ No, ya que no se puede escoger la misma bombilla dos veces.
Por lo tanto, estamos ante combinaciones sin repetición. El número total de combinaciones posibles será $C_{300}^{60} = \frac{300!}{60!240!}$. Ahora necesitamos hallar las probabilidades de los sucesos favorables a que el lote sea aceptado, es decir, que de las 60 uds. escogidas haya 0, 1, 2, 3, 4 o 5 bombillas defectuosas. Llamemos A, B, C, D, E y F a los sucesos de sacar 0, 1, 2, 3, 4 y 5 piezas defectuosas entre las 60 escogidas respectivamente. Si tenemos 10 bombillas defectuosas entre las 300, habrá 290 bombillas perfectas. Para calcular la probabilidad de que en las 60 escogidas haya 0 defectuosas (suceso A) tendremos que hallar el cociente entre C_{290}^{60} (combinaciones de 290 elementos tomados de 60 en 60) y C_{300}^{60} (esto se debe a la regla de Laplace):

$$P(A) = \frac{C_{10}^0 \cdot C_{290}^{60}}{C_{300}^{60}} = \frac{\binom{10}{0}\binom{290}{60}}{\binom{300}{60}} = \underline{0{,}10333}$$

Para la probabilidad de que en las 60 haya una defectuosa (suceso B) hemos de tener en cuenta que habrá 1 bombilla defectuosa y 59 buenas, por lo que por cada combinación de bombillas defectuosas que se han fijado en las 60 habrá C_{290}^{59} combinaciones posibles de bombillas buenas, y concluimos que la probabilidad del suceso B es:

$$P(B) = \frac{C_{10}^1 \cdot C_{290}^{59}}{C_{300}^{60}} = \frac{\binom{10}{1}\binom{290}{59}}{\binom{300}{60}} = \underline{0{,}26838}$$

Repetimos los mismos razonamientos con los sucesos C, D, E y F:

$$P(C) = \frac{C_{10}^2 \cdot C_{290}^{58}}{C_{300}^{60}} = \frac{\binom{10}{2}\binom{290}{58}}{\binom{300}{60}} = \underline{0{,}307137} \quad P(D) = \frac{C_{10}^3 \cdot C_{290}^{57}}{C_{300}^{60}} = \frac{\binom{10}{3}\binom{290}{57}}{\binom{300}{60}} = \underline{0{,}20388}$$

$$P(E) = \frac{C_{10}^4 \cdot C_{290}^{56}}{C_{300}^{60}} = \frac{\binom{10}{4}\binom{290}{56}}{\binom{300}{60}} = \underline{0{,}08691} \quad P(F) = \frac{C_{10}^5 \cdot C_{290}^{55}}{C_{300}^{60}} = \frac{\binom{10}{5}\binom{290}{55}}{\binom{300}{60}} = \underline{0{,}024853}$$

Y calculamos la probabilidad de aceptar el lote como la suma de todas las probabilidades calculadas:

$$P(\text{Aceptar lote con 10 piezas defectuosas}) = \underline{0{,}99449}$$

Ejercicio 10. Una secretaria debe echar al correo 3 cartas; para ello, introduce cada carta en un sobre y escribe las direcciones al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una carta llegue a su destino?
Sean:

- A_1: La primera carta llega a su destino.
- A_2: La segunda carta llega a su destino.
- A_3: La tercera carta llega a su desitno.

Por tanto, podemos afirmar que:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1 \cap A_2)-P(A_1 \cap A_3)-P(A_2 \cap A_3)+P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

$$P(A_i) = \frac{2!}{3!} = \frac{1}{3}; \quad i = 1,2,3$$

$$P(A_i \cap A_j) = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6} \quad i,j = 1,2,3$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{6}$$

Así:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 3 \cdot \frac{1}{3} - 3 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$