Ejercicio 1.26: Estudiar el comportamiento de la función $f: A \to \mathbb{R}$ en el punto α, en cada uno de los siguientes casos:

c) $A =]1, +\infty[$, $f(x) = \dfrac{x^x - x}{1 - x - \ln x}$ $(x \in A)$, $\alpha = 1$

Nota: $y = x^x \Rightarrow y' = ?$
$\ln y = \ln(x)^x = x \ln x \Rightarrow \dfrac{y'}{y} = 1 \cdot \ln x + x \cdot \dfrac{1}{x}$
$\Rightarrow \dfrac{y'}{y} = \ln x + 1 \Rightarrow y' = y(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^x - x}{1 - x - \ln x} = \frac{1^1 - 1}{1 - 1 - \ln(1)} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

- Aplicamos la primera regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^x(\ln(x)) + x^x - 1}{-1 - \frac{1}{x}} = \frac{0}{-2} = \boxed{0}$$

La función tiende a 0 por la derecha de 1.

d) $A = \mathbb{R}^*$, $f(x) = \dfrac{1}{x^4} - \dfrac{1}{6x^2} - \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^5}$ $(x \in A)$, $\alpha = 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^4} - \frac{1}{6x^2} - \frac{\operatorname{sen} x}{x^5} = \lim_{x \to 0} \frac{6x - x^3 - 6 \operatorname{sen} x}{6x^5} = \frac{1}{6} \lim_{x \to 0} \frac{6x - x^3 - 6 \operatorname{sen}(x)}{x^5} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

- Aplicamos regla de L'Hôpital

$$\frac{1}{6} \lim_{x \to 0} \frac{6 - 3x^2 - 6 \cos(x)}{5x^4} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

- Aplicamos regla de L'Hôpital

$$\frac{1}{6} \lim_{x \to 0} \frac{-6x + 6 \operatorname{sen}(x)}{20x^3} = \frac{1}{6} \lim_{x \to 0} \frac{6(-x + \operatorname{sen}(x))}{20x^3} = \frac{1}{6} \lim_{x \to 0} \frac{3(-x + \operatorname{sen}(x))}{10x^3} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

- Aplicamos regla de L'Hôpital

$$\frac{1}{6} \lim_{x \to 0} \frac{3(-1 + \cos(x))}{30x^2} = \frac{1}{6} \lim_{x \to 0} \frac{-1 + \cos(x)}{10x^2} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

- Aplicamos regla de L'Hôpital

$$\frac{1}{6} \lim_{x \to 0} \frac{-\operatorname{sen}(x)}{20x} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

- Aplicamos regla de L'Hôpital

$$\frac{1}{6} \lim_{x \to 0} \frac{-\cos(x)}{20} = \frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{1}{20}\right) = \boxed{-\frac{1}{120}}$$

La función tiende a $-\frac{1}{120}$ tanto por la izquierda como por la derecha de 0