Antonio Martínez e Ignacio Sánchez

Final

1. *a*) **(1,5 puntos)** Partiendo de las definiciones de valor y vector propio y de dependencia o independencia lineal (esto es, sin usar proposiciones o teoremas sobre valores, vectores o subespacios propios), probad que:

   Si $\overline{u}$, $\overline{v} \in \mathbf{V}$ son dos vectores propios de $f \in End\ \mathbf{V}$, correspondientes a dos valores propios distintos, entonces $\overline{u}$ y $\overline{v}$ son linealmente independientes.

   b) Responder razonadamente si son ciertas las dos afirmaciones siguientes:

   1) **(1 punto)** Toda métrica indefinida en un plano vectorial euclídeo tiene algún vector no nulo ortogonal a sí mismo.
   2) **(1 punto)** Todo isomorfismo autoadjunto de un plano vectorial euclídeo viene representado en cualquier base por una matriz simétrica invertible.

2. **(2 puntos)** Hallar $\alpha \in \mathbb{R}$ para que el endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$, cuya matriz asociada a la base estándar es
$$A \equiv M(f, \mathcal{B}_0) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & -1 & \alpha \end{pmatrix},$$
tenga al 0 como valor propio. Con ese valor α, encontrad una base de cada subespacio propio de f. Escribid una matriz P, si es que existe, tal que $P^{-1}AP$ sea una matriz diagonal.

3. **(1,5 puntos)** Sea $F(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 4xy + 4xz + 4yz$ la forma cuadrática asociada a una métrica g de $\mathbb{R}^3$. Hallar la signatura de g. Encontrad una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que la matriz $M(g, \mathcal{B})$ sea diagonal, con solo unos, menos unos o ceros en la diagonal principal.

4. *a*) **(1,5 puntos)** Probad que la aplicación $f(x, y) = \frac{1}{2}(-x + y, 3x + y)$ es una isometría del espacio euclídeo $(\mathbb{R}^2, g)$ siendo g la métrica euclídea cuya matriz en la base estándar es
$$M(g, \mathcal{B}_0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
   Justificad porqué f es una simetría ortogonal de $(\mathbb{R}^2, g)$ respecto a una recta vectorial. Hallad dicha recta.

   b) **(1,5 puntos)** En el espacio euclídeo usual $(\mathbb{R}^3, g_0)$, hallad la matriz en la base estándar de la aplicación $f = g \circ s^U$ que se obtiene de componer la simetría ortogonal s^U respecto al plano U dado por la ecuación $z = 0$, con el giro g de ángulo $\frac{\pi}{3}$ alrededor del eje OX (no importa el sentido de giro elegido). Probad que f es una simetría ortogonal respecto a un plano y hallad una base de dicho plano.

11 de julio 2013

2. $\alpha \in \mathbb{R}$ $\quad \mathcal{M}(f, B_u) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$

Hallar α para que $\lambda = 0$ sea valor propio. Para ese valor, hallar las bases de los subespacios propios y encontrar una matriz P (si existe) tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.

Para que $\lambda = 0$ sea valor propio:

$$\det(\mathcal{M}(f, B_u) - 0 \cdot I_n) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\det \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & -1 & \alpha \end{pmatrix}}_{} = 0$$

$$12\alpha - 6 - 6 - 6 - 6\alpha - 12 = 0 \Rightarrow 6\alpha = 30 \Rightarrow \boxed{\alpha = 5}$$

$$P_f(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & -2 & -2 \\ -3 & 3-\lambda & -3 \\ -1 & -1 & 5-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda^2 - 7\lambda + 12)(5-\lambda) - 6 - 6 - 6 + 2\lambda$$

$$-30 + 6\lambda - 12 + 3\lambda = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 47\lambda + 60 - 60 + 15\lambda =$$

$$= -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 36\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 12\lambda + 36) \Rightarrow \lambda = \frac{12 \pm 0}{2} = 6$$

$\lambda_1 = 0 \quad | \quad \lambda_2 = 6 \quad a_{\lambda_2} = 2$

Hallemos bases de los subespacios:

$$V_0 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} = \mathcal{L}\{(2,3,1)\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x+y-5z=0 \\ -3x+3y-3z=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x+y-5z=0 \\ 6y-18z=0 \Rightarrow y=3z \Rightarrow x=2z \end{array}$$

$$V_4 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} = \mathcal{L}\{(2,-1,1)\}$$

$$x+y-z=0$$
$$y+z=0 \Rightarrow y=-z \Rightarrow x=2z$$

$$V_8 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ -3 & -5 & -3 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} = \mathcal{L}\{(6,-3,-1)\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x+y+3z=0 \\ -3x-5y-3z=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x+y+3z=0 \Rightarrow x=-6z \\ -2y+6z=0 \Rightarrow y=3z \end{array}$$

P tendrá por columnas los vectores de las bases calculadas de los subespacios propios:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 3 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{B \to B_u}$$

$$V_6 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -3 & -3 & -3 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} = \mathcal{L}\{(1,-1,0),(1,0,-1)\}$$

$$x+y+z=0 \Rightarrow \text{Sol.}: (-y-z, y, z)$$

P tendrá por columnas los vectores de las bases de los subespacios propios calculadas:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

3. $F(x,y,z) = 2x^2+2y^2+z^2+4xy+4xz+4yz$ forma cuadrática
Signatura de f y hallar base ortonormal.

$$\mathcal{M}(g,B_u) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xLeftrightarrow{F_1:F_1-F_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xLeftrightarrow{C_1:C_1-C_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xLeftrightarrow{F_1\leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xLeftrightarrow{C_1\leftrightarrow C_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xLeftrightarrow{F_1:F_1-F_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xLeftrightarrow{C_1:C_1-C_3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xLeftrightarrow{F_1:F_1+F_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xLeftrightarrow{C_1:C_1+C_3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xLeftrightarrow[C_2\leftrightarrow C_3]{F_2\leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xLeftrightarrow{F_2:F_2-F_1} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{C_2:C_2-C_1}{\Longleftrightarrow}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\underset{C_1:\frac{1}{\sqrt2}C_1}{\overset{F_1:\frac{1}{\sqrt2}F_1}{\Longleftrightarrow}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad \text{Signatura}(1,1)$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\overset{C_1:C_1-C_2}{\Longrightarrow}\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\overset{C_1\leftrightarrow C_2}{\Longrightarrow}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\overset{C_1:C_1-C_3}{\Longrightarrow}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&-1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\overset{C_1:C_1+C_3}{\Longrightarrow}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\overset{C_2\leftrightarrow C_3}{\Longrightarrow}\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\overset{C_2:C_2-C_1}{\Longrightarrow}\begin{pmatrix}0&0&1\\1&-1&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}\overset{C_1:\frac{1}{\sqrt2}C_1}{\Longrightarrow}\begin{pmatrix}0&0&1\\\sqrt2/2&-1&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}$$

$$B=\left\{\left(0,\tfrac{\sqrt2}{2},0\right),(0,-1,1),(1,-1,0)\right\}\Rightarrow \text{Base ortonormal}$$

4. $f(x,y)=\frac{1}{2}(-x+y,\,3x+y)$. Probar que es isometría de $(\mathbb{R}^2,g)$ con $M(g,B_u)=\begin{pmatrix}6&0\\0&2\end{pmatrix}$

$f(1,0)=\left(-\frac12,\frac32\right)$ $f(0,1)=\left(\frac12,\frac12\right)\Rightarrow M(f,B_u)=\begin{pmatrix}-1/2&1/2\\3/2&1/2\end{pmatrix}$

f isometría $\Leftrightarrow M(g,B_u)=\underline{M(f,B_u)^t\cdot M(g,B_u)\cdot M(f,B_u)}$

$$\begin{pmatrix}-1/2&3/2\\1/2&1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1/2&1/2\\3/2&1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&3\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1/2&1/2\\3/2&1/2\end{pmatrix}=\underset{M(g,B_u)}{\begin{pmatrix}6&0\\0&2\end{pmatrix}}\checkmark$$

Justifica por qué f es simetría ortogonal de $(\mathbb{R}^2,g)$ respecto a una recta vectorial. Hallad dicha recta.

Para que sea simetría ortogonal, debe existir una base B tal que $M(f,B)=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$. Por lo tanto, veamos si $\lambda=1$ y $\lambda=-1$ son valores propios de f y, en caso de serlo, será simetría ortogonal si $\dim(V_1)=1=\dim(V_{-1})$. La recta pedida sería V_1. Procedamos:

$$P_f(\lambda)=\det\begin{pmatrix}-1/2-\lambda&1/2\\3/2&1/2-\lambda\end{pmatrix}=\left(\lambda^2-\frac14\right)-\frac34=\lambda^2-1=(\lambda+1)(\lambda-1)$$

$\lambda_1=-1$ $\lambda_2=1$

$a_{\lambda_1}=1$ $a_{\lambda_2}=1$

$$R=V_1=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, \underbrace{\begin{pmatrix}-3/2&1/2\\3/2&-1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}_{3x-y=0\ \Rightarrow\ y=3x}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}=\mathcal{L}\{(1,3)\}$$

6) En $(\mathbb{R}^3, g_u)$, hallar la matriz $f = g \circ s^U$ siendo s^U la simetría ortogonal respecto de $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z = 0\}$ con el giro g de ángulo $\frac{\pi}{3}$ alrededor del eje OX. Probar que f es simetría ortogonal respecto a un plano y hallar una base de dicho plano.

$\mathcal{M}(g_u, B_u) = I_3 \qquad U = \mathcal{L}\{(1,0,0),(0,1,0)\}$

Empecemos hallando $\mathcal{M}(s^U, B_U)$. Para ello, hemos de hallar $U^\perp$ (por ser simetría ortogonal respecto de U, $U = V_1$ y $U^\perp = V_{-1}$):

$$U^\perp = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} (1,0,0)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 0 \\ (0,1,0)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 0 \end{matrix}\right\} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}\right\} =$$

$= \mathcal{L}\{(0,0,1)\}$

$B_u = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} \Rightarrow \mathcal{M}(s^U, B_u) = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

Ya que $\forall \vec{u} \in U,\ s_U(\vec{u}) = \vec{u}$
$\forall \vec{v} \in U^\perp,\ s_U(\vec{v}) = -\vec{v}$

$\mathcal{M}(g, B)$, con B ortonormal va a ser de la forma: $\mathcal{M}(g,B) = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\text{sen}\theta\\0&\text{sen}\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$ con $\theta = \frac{\pi}{3}$

El primer vector de B va a ser del eje OX, ya que el giro es respecto a dicho eje: Eje OX $= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{matrix} y=0 \\ z=0 \end{matrix}\right\} =$
$= \mathcal{L}\{(1,0,0)\} \quad \omega_g(1,0,0) = 1 \Rightarrow$ Es unitario

$(\mathcal{L}\{(1,0,0)\})^\perp = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle/ (1\ 0\ 0)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 0\right\} =$
$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = 0\} = \mathcal{L}\{(0,1,0),(0,0,1)\}$
$\omega_g(0,1,0) = \omega_g(0,0,1) = 1$

La propia base usual es ortonormal: También son unitarios

$$\mathcal{M}(g, B_u) = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/2&-\sqrt{3}/2\\0&\sqrt{3}/2&1/2\end{pmatrix}$$

$\mathcal{M}(f, B_u) = \mathcal{M}(g, B_u) \cdot \mathcal{M}(s^U, B_u) = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/2&-\sqrt{3}/2\\0&\sqrt{3}/2&1/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/2&-\sqrt{3}/2\\0&-\sqrt{3}/2&-1/2\end{pmatrix}$

$\det \mathcal{M}(f, B_u) = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -1$

$p_f(\lambda) = \det\begin{pmatrix}1-\lambda&0&0\\0&1/2-\lambda&-\sqrt{3}/2\\0&\sqrt{3}/2&-1/2-\lambda\end{pmatrix} = (1-\lambda)\det\begin{pmatrix}1/2-\lambda&-\sqrt{3}/2\\-\sqrt{3}/2&-1/2-\lambda\end{pmatrix} =$

$(1-\lambda)(\lambda^2-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}) = (1-\lambda)(\lambda^2-1) = (1-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-1)$

$\lambda_1 = 1 \quad a_{\lambda_1} = 2$

$\lambda_2 = -1 \quad a_{\lambda_2} = 1$

$$V_1 = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -3/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \mathcal{L}\{(1,0,0),(0,3,-\sqrt{3})\}$$

$y + \sqrt{3}z = 0 \Rightarrow y = -\sqrt{3}z \qquad$ Sol.: $(x, -\sqrt{3}z, z)$

$\sqrt{3}y + 3z = 0 \Rightarrow y = -\frac{3}{\sqrt{3}}z = -\sqrt{3}z$

Se trata de una simetría especular respecto de $W = V_1 = \mathcal{L}\{(1,0,0),(0,3,-\sqrt{3})\}$

1. Teniendo en cuenta las definiciones de valor y vector propio y dependencia o independencia lineal, probar que si $u, v \in V$ son dos vectores propios de $f \in End(V)$, correspondientes a dos valores propios distintos, entonces u y v son linealmente independientes.

Sean $u, v \in V$ no nulos vectores propios tales que $f(u) = \lambda u$, $f(v) = \mu v$ con $\lambda, \mu \in K$ $\lambda \neq \mu$. Para que u y v sean L.I. debe cumplirse que $au + bv = 0$ con $a = b = 0$.

Veamos si esto se da:

$0 = f(au+bv) = f(au) + f(bv) = af(u) + bf(v) = a\lambda u + b\mu v$

$a\lambda u + b\mu v = 0 \qquad$ Como $au + bv = 0 \Rightarrow au = -bv \Rightarrow bv = -au$

$\lambda au - \mu au = 0 \Rightarrow au(\lambda - \mu) = 0 \Rightarrow$ Como $\lambda \neq \mu$ y u es no nulo, solo puede ser $a = 0$

$-\lambda bv + \mu bv = 0 \Rightarrow bv(\mu - \lambda) = 0 \Rightarrow$ Como $\mu \neq \lambda$ y v es no nulo, solo puede ser $b = 0$

$\Rightarrow \boxed{u \text{ y } v \text{ son L.I.}}$

b) 1) Toda métrica indefinida en un plano vectorial euclídeo tiene algún vector no nulo ortogonal a sí mismo. Verdadero

Por ser indefinida, $\exists u, v \in V$ tales que $\omega_g(u)=1$ y $\omega_g(v)=-1$ (supongamos que estamos en una base ortonormal). Si consideramos $w=u+v$, $w\in V$:

$$\omega_g(w) = g(w,w) = g(u+v,u+v) = g(u,u)+g(u,v)+g(v,u)+g(v,v) =$$

$$\overset{\text{Es métrica}}{=} g(u,u)+g(u,v)+g(u,v)+g(v,v) = g(u,u)+\underbrace{2g(u,v)}_{\substack{0 \text{ pues } u \text{ y } v \\ \text{pertenecen a una} \\ \text{base ortonormal}}}+g(v,v) =$$

$$= g(u,u)+g(v,v) = \omega_g(u)+\omega_g(v) = 1-1 = 0$$

$\Downarrow$

w es ortogonal a sí mismo.

2) Todo isomorfismo autoadjunto de EVME viene representado en cualquier base por una matriz simétrica invertible. Falso. f autoadjunto $\Leftrightarrow$ $M(g,B).M(f,B)$ es simétrica

Si consideramos g la métrica euclídea usual en $\mathbb{R}^n$ y f el endomorfismo nulo, claramente $M(g,B)\cdot \underbrace{M(f,B)}_{0_{n\times n}} = 0_{n\times n}$ es simétrica y, sin embargo, en cualquier base B vamos a tener que $M(f,B)=0_{n\times n}$, la cual no es invertible.