Geometría I: Tema 2
Espacios vectoriales

Juan de Dios Pérez

Índice

1. Introducción.

Sea K un cuerpo conmutativo y V un conjunto no vacío. Diremos que V es un espacio vectorial sobre el cuerpo K y lo notaremos $V(K)$ si se verifican las siguientes condiciones:

1. En V hay definida una operación que llamaremos suma y notaremos $+$ tal que $(V,+)$ es un grupo abeliano. Por tanto, se han de verificar las propiedades siguientes:

   a) Asociativa: $\forall\, u, v, w \in V$ se cumple $(u+v)+w = u+(v+w)$.

   b) Conmutativa: $\forall\, u, v \in V$ se verifica $u+v = v+u$.

   c) Existencia de elemento neutro: $\exists\, 0 \in V$ tal que $0+v = v+0 = v$, $\forall\, v \in V$.

   d) Existencia de opuestos: $\forall\, v \in V$, $\exists -v$ tal que $v+(-v) = (-v)+v = 0$.

   Nota 1. De nuevo tenemos abusos de notación: la suma que tenemos definida en V no tiene nada que ver con la suma de escalares en K. Asimismo el 0 de V (neutro para la suma en V) es completamente distinto del neutro para la suma en K aunque estén representados por el mismo símbolo "0". En cada situación hemos de estar seguros de qué operaciones o qué elemento neutro estamos manejando.

2. En V hay definida una ley de composición externa a partir de K que llamaremos producto por escalares; es decir $\cdot : K \times V \longrightarrow V$ tal que $\cdot(\alpha, v) = \alpha v$, que tiene que verificar:

   a) Distributividad: $\forall\, a \in K$, $\forall\, u, v \in V$ se tiene $a(u+v) = au+av$.

   b) Distributividad: $\forall\, a, b \in K$, $\forall\, u \in V$ se tiene $(a+b)u = au+bu$.

   c) Pseudoasociatividad: $\forall\, a, b \in K$, $\forall\, u \in V$ se tiene $(ab)v = a(bv)$. (Considerad que, de nuevo, aparece un abuso de notación).

   d) Propiedad modular: $\forall\, u \in V$, $1u = u$, siendo 1 el elemento neutro para el producto de K.

A los elementos de $V(K)$ los llamaremos vectores. Cuando se conoce el cuerpo K con el que estamos trabajando, es habitual omitirlo de la notación y notar simplemente por V al espacio vectorial.

Ejemplo 1.

1. Por lo que vimos en el tema anterior, $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ es un espacio vectorial sobre K para la suma de matrices y el producto por escalares allí definidos.

2. Un cuerpo K siempre es un espacio vectorial sobre sí mismo considerando el producto por escalares simplemente como el producto de elementos de K.

3. En general, dado un cuerpo K, si consideramos $K^n = K \times \overset{n}{\cdots} \times K = \{(x_1, \ldots, x_n) \,/\, x_i \in K\ \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}\}$, siendo n un número natural, K^n va a ser un espacio vectorial sobre K para las siguientes operaciones:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) := (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n),$$

$$k(x_1, x_2, \ldots, x_n) := (kx_1, kx_2, \ldots, kx_n),$$

   $\forall\, k \in K$. Por ejemplo, $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ son espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ (resp.) para $n \in \mathbb{N}$.

4. Sea $\mathcal{P}(K)$ el conjunto de polinomios en una indeterminada con coeficientes en K. Si definimos la suma usual de polinomios (sumando los monomios de igual grado) y el producto de un polinomio por una constante, $\mathcal{P}(K)$ es un espacio vectorial sobre K.

5. Sea $\mathcal{F}(I, \mathbb{R}) = \{f : I \longrightarrow \mathbb{R} \,/\, \text{I es un intervalo de } \mathbb{R} \text{ y f una aplicación}\}$. Si dadas $f, g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ definimos $f + g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante $(f + g)(x) = f(x) + g(x)\ \forall\, x \in I$ y $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ definimos $\alpha f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$, tenemos que $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ o espacio vectorial real.

6. Existe un espacio vectorial con un único vector. Este vector necesariamente será el elemento neutro para la suma 0. Así, tendremos que $0 + 0 = 0$ y $\forall\, \alpha \in K$ (K es un cuerpo conmutativo arbitrario) se tiene $\alpha 0 = 0$. Este espacio vectorial (que lo es para cualquier cuerpo conmutativo) se llama espacio vectorial cero o espacio trivial y lo notaremos $\{0\}$.

7. Como hemos visto en el ejemplo anterior, algunos conjuntos pueden admitir estructura de espacio vectorial sobre diferentes cuerpos. Así, si consideramos el conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$, por lo visto en el ejemplo 2 es un espacio vectorial sobre sí mismo (diremos que es un espacio vectorial complejo), pero es también un espacio vectorial real, pues el producto de un número real y uno complejo nos da un número complejo y, como cada número real es un número complejo, ese producto verificará todas las propiedades requeridas. Más adelante veremos que estos dos espacios vectoriales ($\mathbb{C}(\mathbb{C})$ y $\mathbb{C}(\mathbb{R})$) son completamente distintos (verificarán propiedades distintas), con lo cual, cuando trabajemos con un conjunto que puede ser un espacio vectorial sobre varios cuerpos, hemos de tener en mente, en cada caso, cuál es el cuerpo que estamos considerando.

De la definición de espacio vectorial V sobre un cuerpo K se deducen las siguientes propiedades:

1. $0u = 0$, $\forall\, u \in V$.

   Demostración. Puesto que $0u = (0+0)u = 0u+0u$. Si ahora le sumamos a cada miembro el opuesto de $0u$, nos quedará $0 = 0u$. □

2. $a0 = 0$, $\forall\, a \in K$.

   Demostración. La prueba es análoga a la anterior. □

3. Sean $a \in K$, $u \in V$. Si $au = 0$, entonces o bien $a = 0$ o bien $u = 0$.

   Demostración. Si $a = 0$ no hay nada que demostrar, pues ya se ha visto. Si, por el contrario, $a \neq 0$, como K es un cuerpo, $\exists\, a^{-1} \in K$. Entonces $a^{-1}(au) = a^{-1}0 = 0 = (a^{-1}a)u = 1u = u$, lo cual, si $a \neq 0$, necesariamente $u = 0$. □

4. $-(au) = (-a)u = a(-u)$.

Demostración. Como $au + (-a)u = (a + (-a))u = 0u = 0$, tenemos que $(-a)u = -(au)$. Análogamente $au + a(-u) = a(u + (-u)) = a0 = 0$, con lo que $a(-u) = -(au)$. □

A partir de ahora a cualquier de esos términos lo notaremos simplemente $-au$.

5. $\forall\, a \in K, \forall\, u, v \in V$ se tiene $a(u - v) = au + av$, aplicando directamente la propiedad anterior.

6. Análogamente, $\forall\, a, b \in K, \forall\, u \in U$ se tiene $(a - b)u = au - bu$.

7. Si $a, b \in K$, $u \in U$, siendo $u \neq 0$, y $au = bu$, entonces $a = b$.

   Demostración. Como $au = bu$ entonces $au - bu = 0 = (a - b)u$ y, como suponemos que $u \neq 0$, entonces $a - b = 0$ de donde $a = b$. □

8. $\forall\, a \in K \setminus \{0\}, \forall\, u, v \in V$ si $au = av$, entonces $u = v$, similarmente a lo anterior.

2. Dependencia e independencia lineal.

Dado un conjunto finito de vectores $v_1, \ldots, v_n$ en un espacio vectorial V sobre el cuerpo K, llamaremos una combinación lineal de estos vectores a cualquier vector de la forma $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$, donde $a_1, \ldots, a_n \in K$.
Por ejemplo, si en $\mathbb{R}^3$ consideramos los vectores $(1, 1, 0)$ y $(0, 2, 1)$, el vector $(3, -1, -2)$ es combinación de dichos vectores, pues $3(1, 1, 0) - 2(0, 2, 1) = (3, -1, -2)$. Sin embargo el vector $(0, 0, 1)$ no es combinación lineal de tales vectores, pues necesitaríamos que existieran $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a(1, 1, 0) + b(0, 2, 1) = (0, 0, 1)$ lo que nos llevaría a que $a = 0, a + 2b = 0, b = 1$, pero siendo $a = 0$, la segunda ecuación nos daría $b = 0$ y, por tanto, una contradicción con el hecho de que $b = 1$.
Diremos que el conjunto $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es linealmente dependiente o que los vectores $v_1, \ldots, v_n$ son linealmente dependientes si podemos escribir el vector 0 como combinación lineal de ellos con no todos los escalares nulos; es decir, si $\exists\, a_1, \ldots, a_n \in K$ no todos nulos tales que

$$0 = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n.$$

Diremos que el conjunto anterior es linealmente independiente o que los vectores $v_1, \ldots, v_n$ son linealmente independientes si no son linealmente dependientes, esto es, si cada combinación lineal

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = 0$$

nos lleva a que $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.
Notad que demostrar la dependencia o independencia lineal de un cierto conjunto de vectores será equivalente a decidir si un cierto sistema de ecuaciones lineales homogéneo es indeterminado o determinado.
Por ejemplo, consideremos en $\mathbb{R}^3$ el siguiente conjunto de vectores: $\{(1, 2, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1), (3, 0, 0)\}$.
Para ello, si consideramos la combinación lineal

$$a(1, 2, 0) + b(1, 1, 0) + c(1, 1, 1) + d(3, 0, 0) = (0, 0, 0),$$

obtenemos el siguiente sistema homogéneo con incógnitas a, b, c y d:

$$\begin{cases} a & +b & +c & +3d & = 0 \\ 2a & +b & +c & & = 0 \\ & & +c & & = 0 \end{cases}$$

cuya matriz de coeficientes es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(Fijaos en que las columnas de esta matriz son los vectores del conjunto). Como tenemos un sistema homogéneo, para que fuera determinado (y entonces su única solución sería la trivial $a = b = c = d = 0$, lo que nos diría que los vectores son linealmente independientes) el rango de dicha matriz habría de coincidir con el número de incógnitas (4). Pero esa matriz es de orden 3×4 y su rango máximo sería 3. Como consecuencia, nuestro conjunto de vectores es linealmente dependiente.

Si nos fijamos en la submatriz que obtenemos al eliminar la 4ª columna

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

podemos ver que su determinante es -1, con lo cual la matriz es regular, así el sistema

$$\begin{cases} a & +b & +c & = 0 \\ 2a & +b & +c & = 0 \\ & & +c & = 0 \end{cases}$$

es de Cramer y, por tanto $a = b = c = 0$ es su única solución. Hemos demostrado entonces que el subconjunto $\{(1, 2, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ del conjunto anterior sí es linealmente independiente.

Sea ahora el espacio vectorial $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ y en él consideramos los polinomio $p(x) = x^2 + x$, $q(x) = 3x - 2$, $r(x) = x^2 + 1$. Tomamos una combinación lineal de ellos igualada al polinomio 0

$$ap(x) + bq(x) + cr(x) = 0.$$

Tendremos entonces $0 = a(x^2 + x) + b(3x - 2) + c(x^2 + 1) = (a + c)x^2 + (a + 3b)x - 2b + c$. Para que este polinomio sea el polinomio 0, hemos de tener

$$\begin{cases} a & & +c & = 0 \\ a & +3b & & = 0 \\ & -2b & +c & = 0 \end{cases}$$

Como la matriz de coeficientes de este sistema es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

para calcular su determinante le restamos a la 2ª fila la 1ª: $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3-2 = 1$, luego el sistema es de Cramer y tendremos $a = b = c$ por lo que nuestro conjunto de vectores es linealmente independiente.

Proposición 1 (Propiedades relacionadas con la dependencia e independencia lineal).
Sea $V(K)$ un espacio vectorial. Se tiene entonces:

1. *Si $0 \in \{v_1, \ldots, v_n\}$, entonces $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es linealmente dependiente.*
2. *$\{v\}$ es linealmente independiente si y solo si $v \neq 0$.*
3. *Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es linealmente dependiente, cualquier conjunto que lo contenta $\{v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}, \ldots, v_{n+r}\}$ también es linealmente dependiente.*
4. *Si $\{v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}, \ldots, v_{n+r}\}$ es linealmente independiente, cualquier subconjunto suyo no vacío $\{v_1, \ldots, v_n\}$ sigue siendo linealmente independiente.*

Demostración. 1. Para demostrar esta propiedad, basta tomar una combinación lineal tal que el escalar que multiplica al vector 0 sea 1 y el resto de escalares sean nulos. Esta combinación lineal nos dará el vector 0 pero uno de los escalares que intervienen en $\neq 0$.

2. Para esta propiedad, sabemos, por lo anterior, que $\{0\}$ es linealmente dependiente. Así solo hemos de ver que si $v \neq 0$, $\{v\}$ es linealmente independiente. Si para algún escalar a, $av = 0$, como suponemos $v \neq 0$, tendremos que $a = 0$ y tenemos lo que queríamos.

3. Sea $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = 0$ una combinación lineal tal que no todos los escalares que intervienen sean nulos. Supongamos entonces que $\exists\, i \in \{1, \ldots, n\} \,/\, a_i \neq 0$. Tenemos entonces que $a_1v_1 + \cdots + a_iv_i + \cdots + a_nv_n + 0v_{n+1} + \cdots + 0v_{n+r} = 0$ y como $a_i \neq 0$, el conjunto $\{v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}, \ldots, v_{n+r}\}$ es linealmente dependiente.

4. Por último, para la cuarta propiedad, supongamos que tenemos una combinación lineal $a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = 0$. Como queremos ver que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es linealmente independiente, tendremos que llegar a que $a_1 = \cdots = a_n = 0$. Ahora bien, de lo anterior tenemos que $a_1v_1 + \cdots + a_nv_n + 0v_{n+1} + \cdots + 0v_{n+r} = 0$ y, como estos vectores sí sabemos que son linealmente independientes, efectivamente $a_1 = \cdots = a_n = 0$.

□

Tenemos, además, el siguiente importante resultado:

Teorema 1.
Un conjunto de vectores $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es linealmente dependiente si y solo si alguno de dichos vectores es combinación lineal de los restantes.

Demostración. $\Longrightarrow$) Para ver esta implicación, supongamos que $\{v_1, \dots, v_n\}$ es linealmente dependiente. Entonces podremos encontrar escalares $a_1, \dots, a_n$ no todos nulos (vamos a suponer, por comodidad que $a_1 \neq 0$, esto no nos quita generalidad a la demostración) tales que $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = 0$. Como $a_1 \in K \setminus \{0\}$, $\exists\, a^{-1} \in K$ y entonces podemos escribir

$$v_1 = -(a_1^{-1}a_2)v_2 - (a_1^{-1}a_3)v_3 - \cdots - (a_1^{-1}a_n)v_n$$

con lo que, efectivamente, v_1 será combinación lineal de los demás. (Fijaos que esto ocurrirá para cualquier vector del conjunto cuyo coeficiente en la anterior combinación lineal sea $\neq 0$ y no para un vector arbitrario: en $\mathbb{R}^2$ los vectores $\{(1,-1),(2,0),(3,-3)\}$ son linealmente dependientes pues $-3(1,-1)+0(2,0)+1(3,-3)=0$; sin embargo, si $(2,0)=a(1,-1)+b(3,-3)$ lo que nos da un sistema

$$\begin{cases} 2 = a + 3b \\ 0 = -a - 3b \end{cases}$$

que es incompatible, al ser $2 \neq 0$).
$\Longleftarrow$) Recíprocamente, si suponemos, por ejemplo, que $v_1 = b_2v_2 + \cdots + b_nv_n$ con $b_2, \dots, b_n \in K$, tendremos que $(-1)v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_nv_n = 0$ y, como $-1 \neq 0$, los vectores son linealmente dependientes. $\square$

Antes hablamos de que un mismo conjunto que sea espacio vectorial, a la vez, sobre dos cuerpos distintos, tendrá propiedades distintas. Vamos a ver ahora una de ellas: sea $\mathbb{C}$ que sabemos que es un espacio vectorial real $\mathbb{C}(\mathbb{R})$ y también un espacio vectorial complejo $\mathbb{C}(\mathbb{C})$. Consideremos el subconjunto de $\mathbb{C}$, $\{1, i\}$. Veamos que este conjunto es linealmente dependiente en $\mathbb{C}(\mathbb{C})$: $1, i \in \mathbb{C}$ son escalares no nulos y tenemos que $1 \cdot 1 + i \cdot i = 1 - 1 = 0$. Sin embargo, en $\mathbb{C}(\mathbb{R})$ es linealmente independiente: si $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a \cdot 1 + bi = 0$, tenemos el número complejo $a + bi$ y, para que se anule su parte real, a, y su parte imaginaria, b, han de ser $a = b = 0$.
Hemos definido la dependencia e independencia lineales para subconjuntos finitos de V. Si S es un conjunto arbitrario de vectores (puede, por tanto, ser infinito), diremos que es linealmente dependiente si podemos encontrar un subconjunto finito suyo que sea linealmente dependiente. Si cualquier subconjunto finito de S es linealmente independiente, diremos que S también lo es.

3. Sistemas de generadores de un espacio vectorial.

Un conjunto de vectores S de $V(K)$ es un sistema de generadores de dicho espacio vectorial si cualquier vector de V se puede expresar como combinación lineal de los vectores de S (en el caso de que S sea infinito, consideraremos combinaciones lineales de un número finito de vectores de S).
Por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$, el conjunto $\{(1,-1),(1,0),(2,1)\}$ es un sistema de generadores: sea $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ un vector cualquiera. Tendremos que ver que $\exists\, a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $a(1,-1)+b(1,0)+c(2,1)=(x,y)$. Luego $(a+b+2c, -a+c) = (x,y)$. Tenemos entonces el sistema de ecuaciones lineales en las incógnitas a, b y c:

$$\begin{cases} a \quad +b \quad +2c \quad = x \\ -a \qquad\quad\; +c \quad = y \end{cases}$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, a y b son las incógnitas principales del sistema y $a = c - y$, $b = x - 2c - a = x - 2c - c + y = x + y - 3c$, nos da la solución general del sistema. Si, por ejemplo, tomamos $c = 0$, $a = -y$, $b = x + y$ sería una solución y hemos visto lo que queríamos.

Si $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ es un sistema de generadores de $V(K)$ y uno de ellos, por ejemplo u_i, es combinación lineal de los restantes, el conjunto de vectores que se obtiene al eliminar u_i, $\{u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_n\}$ sigue siendo un sistema de generadores de $V(K)$.

Para ello, supongamos que $u_i = b_1u_1 + \cdots + b_{i-1}u_{i-1} + b_{i+1}u_{i+1} + \cdots + b_nu_n$. Sea $v \in V$ un vector arbitrario. Luego encontramos $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n \in K$ tales que

$$x = a_1u_1 + \cdots + a_{i-1}u_{i-1} + a_iu_i + a_{i+1}u_{i+1} + \cdots + a_nu_n =$$

$$= a_1u_1 + \cdots + a_{i-1}u_{i-1} + a_i(b_1u_1 + \cdots + b_{i-1}u_{i-1} + b_{i+1}u_{i+1} + \cdots + b_nu_n) + a_{i+1}u_{i+1} + \cdots + a_nu_n =$$

$$= (a_1 + a_ib_1)u_1 + \cdots + (a_{i-1} + a_ib_{i-1})u_{i-1} + (a_{i+1} + a_ib_{i+1})u_{i+1} + \cdots + (a_n + a_ib_n)u_n.$$

Como cada $a_j + a_ib_j \in K$, $\forall j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}$, tenemos que el subconjunto es un sistema de generadores de V.

En el primer ejemplo que dimos, $\{(1, -1), (1, 0), (2, 1)\}$ es un sistema de generadores de $\mathbb{R}^2$.

Como $(1, -1) = 3(1, 0) + (-1)(2, 1)$, $(-1, 1)$ es combinación lineal de los otros dos vectores. Entonces $\{(1, 0), (2, 1)\}$ sigue siendo un sistema de generadores de $\mathbb{R}^2$.

Para lo que sigue, el siguiente resultado es fundamental:

Proposición 2.

Sea $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ un conjunto linealmente independiente en $V(K)$ y $\{u_1, u_2, \ldots, u_s\}$ un sistema de generadores del mismo espacio. Entonces $m \leq s$.

Demostración. Como $\{u_1, u_2, \ldots, u_s\}$ es un sistema de generadores de V, también lo será $\{v_1, u_1, u_2, \ldots, u_s\}$. Por otra parte, podremos escribir v_1 como combinación lineal de los vectores $\{u_1, \ldots, u_s\}$, $v_1 = a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_su_s$ y como $v_1 \neq 0$ ya que forma parte de un conjunto linealmente independiente, algunos de los escalares anteriores habrá de ser no nulo. Por simplicidad supongamos que $a_1 \neq 0$. Así, $u_1 = a_1^{-1}v_1 - a_1^{-1}a_2u_2 - \cdots - a_1^{-1}a_su_s$, es combinación lineal de los demás y en $\{v_1, u_1, u_2, \ldots, u_s\}$ lo podemos eliminar, de manera que $\{v_1, u_2, \ldots, u_s\}$ es otro sistema de generadores de V.

Ahora repetimos el proceso con v_2, $\{v_1, v_2, u_2, \ldots, u_s\}$ será un sistema de generadores y escribiremos $v_2 = b_1v_1 + b_2u_2 + \cdots + b_su_s$ y, además, alguno de los escalares $b_2, \ldots, b_s$ ha de ser no nulo. En caso contrario $v_2 = b_1v_1$ nos diría que $\{v_1, v_2\}$ sería linealmente dependiente, en contra de la hipótesis. Supongamos pues que $b_2 \neq 0$, con lo que, como antes, u_2 sería una combinación lineal de $\{v_1, v_2, u_3, \ldots, u_s\}$. Por tanto lo eliminamos, obteniendo que $\{v_1, v_2, u_3, \ldots, u_s\}$ es un sistema de generadores. Podemos repetir este proceso hasta agotar alguno de los conjuntos, pero si en el conjunto linealmente independiente tuviéramos más de s vectores, v_{s+1} sería una combinación lineal de $v_1, v_2, \ldots, v_s$, en contra de que el conjunto que los contiene a todos es linealmente independiente. $\square$

4. Bases de un espacio vectorial.

Definición 1 (Base de un espacio vectorial)**.**
Sea $V(K)$ un espacio vectorial y $B \subseteq V$. Diremos que $\mathcal{B}$ es una base de V si:

1. *$\mathcal{B}$ es linealmente independiente, y*
2. *$\mathcal{B}$ es un sistema de generadores de V.*

Teorema 2 (de la Base)**.**
Si un espacio vectorial V tiene una base formada por un número finito de vectores, entonces todas las bases de V son finitas y tienen el mismo número de vectores.

Demostración. Sea $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de V y $\mathcal{B}'$ otra base de V. Como $\mathcal{B}'$ es linealmente independiente y $\mathcal{B}$ es un sistema de generadores de V, el número de elementos de $\mathcal{B}'$ es $\leq n$, y por tanto, finito. Como además $\mathcal{B}'$ es un sistema de generadores de V y $\mathcal{B}$ es linealmente independiente, si m, finito, es el número de elementos de $\mathcal{B}'$, $n \leq m$. Luego $n = m$, demostrando el enunciado. $\square$

Si un espacio vectorial $V(K)$ admite una base finita diremos que es un espacio vectorial de dimensión finita, siendo la dimensión de V el número de vectores de una de sus bases, y lo denotaremos $\dim_K(V)$ (vemos por el ejemplo anterior que $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$, pero $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$. En el primer caso $\{1\}$ es una base de $\mathbb{C}(\mathbb{C})$, mientras que en el caso de $\mathbb{C}(\mathbb{R})$, $\{1, i\}$ sería una base) ó, si no hay posibilidad de equivocación sobre el cuerpo sobre el que V es espacio vectorial, $\dim(V)$.

Ejemplo 2. 1. En el espacio vectorial K^n, para un cuerpo conmutativo K,

$$\mathcal{B}_U = \{(1, 0, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, 0, \ldots, 1)\}$$

es una base que llamaremos la base canónica o usual[1] de K^n. Veamos, primero, que es un sistema de generadores: cuando consideremos cualquier columna de términos independientes, el sistema cuya matriz de coeficientes es I_n (sus columnas son los vectores de $\mathcal{B}_U$) es un sistema de Cramer con solución única.
Pero, además, son linealmente independientes: si tenemos

$$a_1(1, 0, 0, \ldots, 0) + a_2(0, 1, 0, \ldots, 0) + \cdots + a_n(0, 0, 0, \ldots, 1) = (0, 0, 0, \ldots, 0)$$

obtenemos el siguiente sistema

$$\begin{cases} a_1 & & & & = 0 \\ & a_2 & & & = 0 \\ & & \ddots & & = 0 \\ & & & a_n & = 0 \end{cases}$$

que, por tanto, solo tiene la solución trivial. Así, $\dim_K(K^n) = n$.

[1] De ahí el subíndice U.

2. $\mathcal{P}(K)$ no tiene dimensión finita: para ello supongamos que $\dim_K \mathcal{P}(K) = m$ y sea $\{p_1(x), \ldots, p_m(x)\}$ una base de $\mathcal{P}(K)$. Llamemos $g_i = \text{grado}(p_i(x))$, $i \in \{1, \ldots, m\}$ y $r = \max\limits_{1\leq i\leq m} \{g_i\}$. Luego los grados de todos los polinomios son, como máximo r. Si ahora consideramos el polinomio x^{r+1} habría de ser una combinación lineal de $p_1(x), \ldots, p_m(x)$. Pero el grado del polinomio que obtenemos mediante dicha combinación lineal es menor o igual que r, llegando a una contradicción.

3. Sea $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$. $\forall\, i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\}$, llamemos A_{ij} a la matriz que tiene un 1 en la posición ij y 0 en el resto de posiciones. Entonces $\mathcal{B} = \{A_{ij} \,/\, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ es una base, que llamaremos la base estándar de $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$. Así, $\dim_K(\mathcal{M}_{m\times n}(K)) = mn$.

4. El espacio vectorial trivial $\{0\}$ tiene dimensión 0, puesto que, aunque tiene un sistema de generadores formado por un número finito de vectores, $\{0\}$, este conjunto no es linealmente independiente.

Aunque ya hemos visto que existen espacios vectoriales con dimensión no finita, a partir de ahora solo consideraremos espacios vectoriales con dimensión finita.

Si consideramos un espacio vectorial no nulo, de cada sistema de generadores finito S podremos extraer una base: si el sistema de generadores es linealmente independiente ya es una base y no tendremos que hacer nada. Si no, uno de los vectores de S se podrá expresar como combinación lineal de los restantes, y el conjunto S' que obtenemos al eliminarlo de S seguirá siendo un sistema de generadores. Si S' es linealmente independiente, ya tenemos la base. Si no, repetimos el proceso. Eventualmente, llegaríamos a un sistema de generadores con un solo elemento $\{v\}$ de forma que $v \neq 0$, pues hemos supuesto que $V \neq \{0\}$. Así, $\{v\}$ sería linealmente independiente y, por tanto, una base.

El siguiente resultado nos da otro método para encontrar bases de un espacio vectorial:

Teorema 3 (de ampliación de la Base).
Sea $V(K)$ un espacio vectorial de dimensión n y $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ un conjunto linealmente independiente. Entonces podemos encontrar vectores $v_{r+1}, \ldots, v_n$ tales que $\{v_1, v_2, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ sea una base de V.

Demostración. Si $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ es un sistema de generadores ya sería una base y $r = n$. Si no, $\exists\, v_{r+1} \in V$, $v_{r+1} \neq 0$ que no es combinación lineal de $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$. Veamos que, entonces, $\{v_1, v_2, \ldots, v_r, v_{r+1}\}$ es también linealmente independiente. Si encontramos escalares $a_1, \ldots, a_{r+1}$ tales que $0 = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_rv_r + a_{r+1}v_{r+1}$, hemos de tener que $a_{r+1} = 0$, pues, en caso contrario, podríamos expresar v_{r+1} como una combinación lineal de los demás vectores, pero hemos supuesto que eso no ocurre. El hecho de ser $a_{r+1} = 0$ nos lleva a que la anterior combinación lineal se reduce a $0 = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_rv_r$, y, como $\{v_1, \ldots, v_r\}$ es linealmente independiente, $a_1 = a_2 = \cdots = a_r = 0$. Así, $\{v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}\}$ es linealmente independiente. Si fuese, además, un sistema de generadores, habríamos terminado. Si no, repetiríamos el proceso para un vector v_{r+2} que no fuese combinación lineal del anterior conjunto de vectores. Finalmente, llegaríamos a un conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_s, v_{s+1}, \ldots, v_n\}$ que sería linealmente independiente y sistema de generadores, siendo la base buscada. $\square$

Si sabemos, entonces, que $\dim_K(V) = n$ y en V tomamos un conjunto de n vectores $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, las siguiente afirmaciones son equivalentes:

1. S es linealmente independiente,
2. S es un sistema de generadores de V,
3. S es una base de V.

5. Coordenadas de un vector respecto de una base.

El hecho que presentamos a continuación nos va a permitir trabajar en cada espacio vectorial de dimensión n como en el espacio K^n:

Proposición 3.
Sea $V(K)$ un espacio vectorial. Si $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base de V, entonces todo vector $x \in V$ admite una <u>única</u> expresión como combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$.

Demostración. Ya sabemos que, al ser $\mathcal{B}$ un sistema de generadores de V, dado $x \in V$, podremos encontrar escalares $a_1, \ldots, a_n \in K$ tales que $x = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$. Lo que tenemos que ver es que $a_1, \ldots, a_n$ son únicos. Supongamos, por contra, que encontramos $b_1, \ldots, b_n \in K$ tales que $x = b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_nv_n$. Restando ambas expresiones llegamos a que $0 = (a_1 - b_1)v_1 + (a_2 - b_2)v_2 + \cdots + (a_n - b_n)v_n$ y, como $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es linealmente independiente, $a_1 - b_1 = a_2 - b_2 = \cdots = a_n - b_n = 0$. Esto nos dice que $\forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$, $a_i = b_i$, como queríamos. □

Así, si dado $x \in V$, $x = x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n$ es la expresión única del vector x como combinación lineal de los vectores de la base $\mathcal{B}$, diremos que $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ son las <u>coordenadas de x respecto de la base $\mathcal{B}$</u> y lo escribiremos $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)_{\mathcal{B}}$. Así, si otro vector $y \in V$ tiene por coordenadas respecto de $\mathcal{B}$ $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)_{\mathcal{B}}$, tendremos $x = x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n$, $y = y_1v_1 + y_2v_2 + \cdots + y_nv_n$. Así, $x + y = (x_1 + y_1)v_1 + (x_2 + y_2)v_2 + \cdots + (x_n + y_n)v_n$. Es decir, $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)_{\mathcal{B}}$. Además, $kx = kx_1v_1 + kx_2v_2 + \cdots + kx_nv_n$. Por tanto, $kx = (kx_1, kx_2, \ldots, kx_n)_{\mathcal{B}}$.
Representando así cada vector de V mediante sus coordenadas respecto de la base $\mathcal{B}$ (que no son más que un elemento de K^n), las coordenadas de la suma de dos vectores vienen dadas por la suma de los correspondientes elementos de K^n, mientras que las del producto de un vector por un escalar, vienen dadas del producto por ese escalar del correspondiente elemento de K^n.

6. Coordenadas y dependencia lineal.

Sea $V(K)$ un espacio vectorial y $\mathcal{B}$ una base de V. Entonces un conjunto de n vectores $\{v_1, \ldots, v_n\}$ en V es linealmente independiente si y solo si la matriz cuyas columnas (o filas) son las coordenadas de dichos vectores respecto de $\mathcal{B}$ tiene rango n.
Como una combinación lineal de los vectores $v_1, \ldots, v_n$ igualada a 0 es de la forma $x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n = 0$ con $x_1, \ldots, x_n \in K$, si usamos las coordenadas respecto de la base $\mathcal{B}$ de $v_1, v_2, \ldots, v_n$, obtendremos un

sistema de ecuaciones lineales homogéneo con incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y cuya matriz de coeficientes A es precisamente la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores $v_1, \ldots, v_n$ respecto de $\mathcal{B}$. Los vectores serán, pues, linealmente dependientes si y solo si dicho sistema admite alguna solución distinta de la trivial lo que equivale por el Teorema de Rouché-Frobenius a que $\mathrm{rg}(A) < n$. Como el $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^t)$, el resultado sigue siendo el mismo si consideramos las filas de A en lugar de las columnas.

Ejemplo 3.

Supongamos en $\mathbb{R}^4$ los vectores $v_1 = (1, -1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, 1, 1)$ y $v_3 = (3, 0, 3, 6)$. En la base usual de $\mathbb{R}^4$, las coordenadas de cada uno de esos vectores son precisamente sus componentes. Así, obtenemos la matriz A cuyas columnas son esas coordenadas,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Como en A la submatriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ tiene determinante $1 \neq 0$, el rango de A es, al menos, 2 y por tanto, los vectores v_1 y v_2 son linealmente independientes. Si ahora calculamos

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 3 = 0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 3 - 3 = 0$$

por lo que concluimos que $\mathrm{rg}(A) = 2$ y $\{v_1, v_2, v_3\}$ es linealmente dependiente.

7. Cambio de base

Supongamos que tenemos un espacio vectorial $V(K)$ de dimensión n y que consideramos en V dos bases distintas

$$\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}, \quad \mathcal{B}' = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}.$$

Así, un vector dado de V tendrá unas coordenadas respecto de $\mathcal{B}$ y otras (distintas) respecto de $\mathcal{B}'$. Sea $v \in V$ y supongamos que $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ son las coordenadas de x en $\mathcal{B}$ mediante que $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ son sus coordenadas respecto de $\mathcal{B}'$. Como $\mathcal{B}$ es una base de V y los vectores de $\mathcal{B}'$ son de V, supongamos que conocemos las coordenadas de cada vector de $\mathcal{B}'$ respecto de $\mathcal{B}$; esto es, supongamos que

$$\begin{aligned} v_1 &= a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \cdots + a_{n1}u_n \\ v_2 &= a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \cdots + a_{n2}u_n \\ &\vdots \\ v_n &= a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \cdots + a_{nn}u_n \end{aligned}$$

Entonces,

$$x = y_1v_1 + y_2v_2 + \cdots + y_nv_n =$$

$$= y_1(a_{11}u_1+a_{21}u_2+\cdots+a_{n1}u_n)+y_2(a_{12}u_1+a_{22}u_2+\cdots+a_{n2}u_n)+\cdots+y_n(a_{1n}u_1+a_{2n}u_2+\cdots+a_{nn}u_n) =$$

$$= (a_{11}y_1+a_{12}y_2+\cdots+a_{1n}y_n)u_1+(a_{21}y_1+a_{22}y_2+\cdots+a_{2n}y_n)u_2+\cdots+(a_{n1}y_1+a_{n2}y_2+\cdots+a_{nn}y_n)u_n =$$

$$= x_1u_1 + x_2u_2 + \cdots + x_nu_n.$$

Tenemos, pues, dos expresiones del vector x respecto de la base $\mathcal{B}$ y, siendo dicha expresión única, obtenemos que

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\ x_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n \\ &\vdots \\ x_n &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n. \end{aligned}$$

O bien, en forma matricial, $X = PY$, donde X e Y son las matrices columna que nos dan las coordenadas de un vector arbitrario de V en las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$, respectivamente, y P es la matriz cuyas columnas son las coordenadas de cada vector de $\mathcal{B}'$ respecto de la base $\mathcal{B}$. Esta matriz P se llama la matriz del cambio de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ y es una matriz regular pues sus columnas son las coordenadas en $\mathcal{B}$ de los vectores de $\mathcal{B}'$ que son linealmente independientes, por lo que su rango es n. Así P tiene matriz inversa, y la anterior ecuación matricial nos da $Y = P^{-1}X$ que nos da las coordenadas de un vector de V en la base $\mathcal{B}'$, conocidas sus coordenadas en $\mathcal{B}$. Así, P^{-1} es la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$.

Así, cada matriz de cambio de base es regular. El recíproco también es cierto: toda matriz regular es una matriz de cambio de base, ya que si $Q \in \mathcal{M}_n(K)$ y es regular, podemos considerar sus columnas como n vectores de K^n que, siendo Q regular, han de ser linealmente indpendientes. Como $\dim_K(K^n) = n$, estos n vectores de K^n forman una base de K^n, que llamamos $\mathcal{B}'$. Si consideramos las coordenadas de cada vector de $\mathcal{B}'$ en $\mathcal{B}_U$ de K y las escribimos como una matriz columna, todas juntas nos dan Q, que, por tanto, es la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}_U$.

Ejemplo 4.

En $\mathbb{R}^2$ consideramos $\mathcal{B} = \{(1,0),(1,1)\}$ y $\mathcal{B}' = \{(1,2),(1,3)\}$. Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1$, ambas nos proporcionan bases de $\mathbb{R}^2$.

Además, $(1,2) = a(1,0) + b(1,1) = (a+b,b)$ implica $a+b = 1, b = 2$. Así, $a = -1$. Luego las coordenadas de $(1,2)$ en $\mathcal{B}$ son $(-1,2)$.

Por otro lado, $(1,3) = a(1,0) + b(1,1) = (a+b,b)$ implica $b = 3, a+b = 1$, luego $a = -2$. Por tanto las coordenadas de $(1,3)$ en $\mathcal{B}$ son $(-2,3)$.

Así, la matriz del cambio de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ es

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

A partir de ahora esta matriz la escribiremos $\mathcal{M}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}$. Como $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, esta será la matriz del cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}}$.

8. Subespacios vectoriales.

Definición 2.

Sea $V(K)$ un espacio vectorial y U un subconjunto no vacío de V. Diremos que U es un subespacio vectorial de V si se verifican las siguientes condiciones:

1. *U es cerrado para la suma: $\forall\, u, v \in U,\ u + v \in U$.*

2. *U es cerrado para el producto por escalares: $\forall\, a \in K, \forall\, u \in U,\ au \in U$.*

Como en el caso de los subgrupos de un grupo, es fácil ver que si U es un subespacio vectorial de V, entonces U, con las operaciones que hacen que V sea un espacio vectorial sobre K, es también un espacio vectorial sobre K.
Así, todo espacio vectorial distinto del espacio vectorial trivial tiene, al menos, dos subespacios vectoriales: él mismo y el formado solo por el vector nulo, $\{0\}$. Estos subespacios vectoriales se llaman subespacios impropios.
Consideramos el espacio vectorial $\mathcal{M}_n(K)$. Los siguientes subconjunto de $\mathcal{M}_n(K)$ son subespacios vectoriales:

- Las matrices triangulares superiores, pues si sumamos dos matrices triangulares superiores obtenemos otra matriz triangular superior y si hacemos el producto por un escalar de una matriz triangular superior, igualmente obtenemos una matriz triangular superior.

- Análogamente, las matrices triangulares inferiores nos dan un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_n(K)$.

- Las matrices diagonales (que son a la vez triangulares superiores e inferiores) forman un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_n(K)$.

- Las matrices simétricas también constituyen un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_n(K)$: si $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ y ambas son simetricas, $A = A^t$, $B = B^t$, entonces $(A + B)^t = A^t + B^t = A + B$, que demuestra que $A + B$ es también simétrica. Además, $\forall\, k \in K$, $(kA)^t = kA^t = kA$ y kA sigue siendo simétrica.

- Tenemos un caso análogo para las matrices antisimétricas.

- Supongamos ahora el subconjunto $\mathcal{P}_n(K)$ de $\mathcal{P}(K)$ dado por los polinomios que tienen grado n. En este caso, $\mathcal{P}_n(K)$ no es cerrado para la suma: si consideramos $p(x) = x^n - 3x$ y $q(x) = -x^n + 5$ (con $n > 1$), entonces $p(x) + q(x) = -3x + 5$, que no tiene grado n. Luego $\mathcal{P}_n(K)$ no es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}(K)$. Sin embargo, si notamos por $\mathcal{P}^n(K)$ el subconjunto de $\mathcal{P}(K)$ formado por los polinomios de grado $\leq n$ con coeficientes en K, este sí que es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}(K)$

y, además, cada elemento de $\mathcal{P}^n(K)$ es una combinación lineal de los polinomios $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$. Además, es inmediato que si $a_0 \cdot 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0$, necesariamente $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$, lo que nos demuestra que $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ es una base de $\mathcal{P}^n(K)$. Así, $\dim_K(\mathcal{P}^n(K)) = n + 1$.

Las dos condiciones que hemos exigido para que un subconjunto de V sea un subespacio vectorial pueden agruparse en una sola, como vemos en el siguiente resultado:

Proposición 4.

Sea $\emptyset \neq U \subseteq V$. Entonces los siguientes hechos son equivalentes:

1. *U es un subespacio vectorial de V.*
2. *$\forall\, u, v \in U, \forall\, a, b \in K, \; au + bv \in U$.*

Demostración. Para ver que 1) $\Longrightarrow$ 2), dado que U es un subespacio vectorial de V, si $u, v \in U$ y $a, b \in K$, por la 2ª condición en la definición de subespacio vectorial, $au \in U$ y $bv \in U$. Ahora la primera condición implica que $au + bv \in U$, como queríamos.
Si para el recíproco suponemos que se verifica la condición 2), si queremos ver que U es, efectivamente, un subespacio vectorial de V hemos de probar que se verifican las condiciones de la definición. Para la 1ª, dados $u, v \in U$, tomando $a = b = 1$, de 2) tenemos que $1 \cdot u + 1 \cdot v = u + v \in U$. Y para la 2ª condición, $\forall\, u \in U$, $\forall\, a \in K$, tomamos $v = u$, $b = 0$ y tendremos que $au + 0u = au + 0 = au \in U$. $\square$

Nota 2. Cada subespacio vectorial de un espacio vectorial ha de contener al vector 0, ya que si $u \in U$, $-u = (-1)u \in U$ y, entonces, $u + (-u) = u - u = 0 \in U$. Así, si nos dan un subconjunto de un espacio vectorial que no contenga al vector 0, podemos afirmar directamente que no es un subespacio vectorial.

Sea de nuevo $V(K)$ un espacio vectorial sobre el cuerpo K y S un subconjunto arbitrario de V. Consideremos un nuevo subconjunto de V dado por

$$\mathcal{L}(S) = \{a_1 s_1 + \cdots + a_m s_m \,/\, m \in \mathbb{N},\; a_i \in K,\; s_i \in U,\; i \in \{1, \ldots, m\}\}$$

que, por tanto, consiste en tomar todas las posibles combinaciones lineales de elementos de S. Por ejemplo, si en $\mathbb{R}^3$ consideramos los vectores $s_1 = (1, -1, 0)$, $s_2 = (0, 2, 2)$, sea $S = \{s_1, s_2\}$. Entonces $\mathcal{L}(S) = \{a(1, -1, 0) + b(0, 2, 2) \,/\, a, b \in \mathbb{R}\} = \{(a, -a + 2b, 2b) \,/\, a, b \in \mathbb{R}\}$.
Veamos que $\mathcal{L}(S)$ es el menor subespacio vectorial de V que contiene a S, con lo que queremos expresar que si W es otro subespacio vectorial de V tal que $S \subset W$, entonces $\mathcal{L}(S) \subset W$.
Para ello, hemos de probar, en primer lugar, que $\mathcal{L}(S)$ es un subespacio vectorial de V. Dados $a, b \in K$ y $a_1 s_1 + \cdots + a_m s_m$, $b_1 t_1 + \cdots + b_m t_m$ con $a_i, b_j \in K$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, $s_1, \ldots, s_m, t_1, \ldots, t_n \in S$, entonces

$$a(a_1 s_1 + \cdots + a_m s_m) + b(b_1 t_1 + \cdots + b_n t_n) = a a_1 s_1 + \cdots + a a_m s_m + b b_1 t_1 + \cdots + b b_n t_n \in \mathcal{L}(S),$$

pues es una combinación lineal de elementos de S.
Además, $\forall\, s \in S$, $s \in \mathcal{L}(S)$ pues es la combinación lineal $1 \cdot s$; así, $S \subset \mathcal{L}(S)$.

Si ahora $S \subset W$, siendo W un subespacio vectorial de V, dado un elemento $a_1 s_1 + \cdots + a_r s_r \in \mathcal{L}(S)$, tendremos que $s_1, \ldots, s_r \in S$ y, por tanto, $s_1, \ldots, s_r \in W$ y dados $a_1, \ldots, a_r \in K$, como W es un subespacio vectorial de V, $a_1 s_1 + \cdots + a_r s_r \in W$, con lo que, efectivamente, $\mathcal{L}(S) \subset W$.

A $\mathcal{L}(S)$ lo llamaremos el subespacio generado por S, ya que S es, de hecho, un sistema de generadores de $\mathcal{L}(S)$. Como vimos en un ejemplo anterior, para un subespacio U de un espacio vectorial V, al ser él mismo un espacio vectorial, podremos hablar de bases de U y, por tanto, de dimensión de U. En general, tendremos que $\dim_K U \leq \dim_K V$ y se dará la igualdad si y solo si $U = V$.

9. Ecuaciones cartesianas y paramétricas de un subespacio.

Supongamos que tenemos un sistema homogéneo de m ecuaciones lineales con n incógnitas sobre el cuerpo K, $AX = 0$. Cada solución del sistema será un elemento de K^n. El conjunto formado por todas las soluciones de dicho sistema es un subespacio vectorial de K^n: en efecto, si $(s_1, \ldots, s_n)$ y $(t_1, \ldots, t_n)$ son dos soluciones de dicho sistema, llamemos S a la matriz columna $(s_1, \ldots, s_n)^t$ y T a la matriz columna $(t_1, \ldots, t_n)^t$. Por tanto $AS = 0$ y $AT = 0$. Así, $A(S+T) = AS + AT = 0$ y $\forall\, k \in K$, $A(kS) = k(AS) = k0 = 0$, como queríamos probar.

Veremos a continuación que cada subespacio vectorial de un espacio vectorial V de dimensión finita se puede considerar como el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones. Para ello, elijamos una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ respecto de la cual vamos a tomar las coordenadas de cada vector. Si U es un subespacio vectorial de V con dimensión $r \leq n$, podemos hallar una base $\mathcal{B}_U = \{u_1, u_2, \ldots, u_r\}$ de U.
Si conocemos las coordenadas de los u_i en función de $\mathcal{B}$,

$$u_i = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni})_{\mathcal{B}}, \quad \forall\, 1 \leq i \leq r,$$

como cada vector de U será una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}_U$, sea $x \in U$. Por un lado, conoceremos sus coordenadas en $\mathcal{B}$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)_{\mathcal{B}}$. Además, si $x \in U$, $\exists\, \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$ tales que $x = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_r u_r$. Entonces,

$$x = (x_1, \ldots, x_n)_{\mathcal{B}} = \lambda_1 (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1})_{\mathcal{B}} + \lambda_2 (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2})_{\mathcal{B}} + \cdots + \lambda_r (a_{1r}, a_{2r}, \ldots, a_{nr})_{\mathcal{B}}.$$

Así, por la unicidad de las coordenadas de x respecto de $\mathcal{B}$, obtenemos unas ecuaciones paramétricas de U respecto de la base $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned}
x_1 &= a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \cdots + a_{1r}\lambda_r \\
x_2 &= a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \cdots + a_{2r}\lambda_r \\
&\vdots \\
x_n &= a_{n1}\lambda_1 + a_{n2}\lambda_2 + \cdots + a_{nr}\lambda_r
\end{aligned}$$

en los parámetros $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, pues cada vez que cada uno de estos parámetros tiene un valor en K, obtendremos un vector de U. Las columnas que acompañan a cada parámetro son las coordenadas en

$\mathcal{B}$ de los vectores de la base $\mathcal{B}_U$ de U. Además, podemos contemplar estas igualdades como el conjunto de soluciones de un cierto sistema de ecuaciones lineales con n incógnitas sobre el cuerpo K. De hecho, como $0 \in U$, la solución trivial será una de las soluciones de dicho sistema que, por tanto, tendrá que ser homogéneo. Entonces, a cualquier sistema homogéneo cuya solución general sea la anterior, lo llamaremos unas ecuaciones implícitas (ó cartesianas) de U respecto de la base $\mathcal{B}$.

Ejemplo 5.
Supongamos el sistema homogéneo $x_1 + x_2 - x_3 = 0$. Sus soluciones nos van a proporcionar un subespacio vectorial U de $\mathbb{R}^3$, pues podemos escribir $x_1 = -x_2 + x_3$ y, entonces tomando $x_2 = \lambda$ como un parámetro y $x_3 = \mu$ como otro parámetro, tendremos que

$$\begin{aligned} x_1 &= -1 \cdot \lambda + 1 \cdot \mu \\ x_2 &= 1 \cdot \lambda + 0 \cdot \mu \\ x_3 &= 0 \cdot \lambda + 1 \cdot \mu \end{aligned}$$

Así, cada vector de dicho subespacio U será una combinación lineal de los vectores que, en la base usual, tienen como coordenadas los coeficientes de cada parámetro. Así, $\{(-1,1,0),(1,0,1)\}$ nos daría un sistema de generadores de dicho subespacio y, como claramente son linealmente independientes, forman de hecho una base de U. Esto es, $U = \mathcal{L}(\{(-1,1,0),(1,0,1)\})$.

Existen distintos métodos para calcular unas ecuaciones cartesianas de un subespacio, entre ellos el de eliminación de parámetros. Destacamos el siguiente:
Si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)_{\mathcal{B}}$ es un vector de U, entonces x es combinación lineal de $\{u_1, \ldots, u_r\}$ y al considerar la matriz

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} & x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nr} & x_n \end{array}\right)$$

como el último vector (columna) ha de ser combinación lineal de los r anteriores, el rango de esta matriz coincidirá con el de la submatriz obtenida al quitarle la última columna. Pero dicha submatriz tiene rango r. por tanto, todos los menores de orden $r+1$ de la matriz B se han de anular.

Ejemplo 6.
Supongamos que en $\mathbb{R}^4$ consideramos el subespacio dado por $U = \mathcal{L}(\{(1,1,0,-1),(2,0,1,0),(0,-2,1,2)\})$. Considerando $\mathcal{B}_U$ en $\mathbb{R}^4$ vamos a calcular unas ecuaciones implícitas para U. Como los 3 vectores que usamos para determinar U forman un sistema de generadores de U, vamos a obtener una base de U. Consideremos entonces la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La submatriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ tiene determinante no nulo, así que los dos primeros vectores son linealmente independientes. Por otro lado, como

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

el tercer vector depende linealmente de los dos primeros, con lo que $\mathcal{B}_U = \{(1,1,0,-1),(2,0,1,0)\}$. Así unas ecuaciones paramétricas de U serán

$$\begin{cases} x_1 = \lambda + \ 2\mu \\ x_2 = \lambda \\ x_3 = \qquad \mu \\ x_4 = -\lambda \end{cases}$$

Y considerando la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \\ -1 & 0 & x_4 \end{pmatrix}$$

para que la 3ª columna sea linealmente dependiente de las dos primeras habrá de darse que

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \end{vmatrix} = x_1 - x_2 - 2x_3,$$

y

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ -1 & 0 & x_4 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & x_2 \\ -1 & x_4 \end{vmatrix} = -2(x_4 + x_2).$$

Así,

$$\begin{cases} x_1 \ -x_2 \ -2x_3 \qquad = 0 \\ \qquad x_2 \qquad\quad +x_4 = 0 \end{cases}$$

son unas ecuaciones implícitas, respecto de $\mathcal{B}_U$, de U.

10. Ecuaciones cartesianas y dimensión de un subespacio.

Sea $V(K)$ un espacio vectorial con $\dim_K(V) = n$ y U un subespacio vectorial suyo con $\dim_K(U) = r$. Sabemos entonces que en unas ecuaciones paramétricas de U aparecerán r parámetros. Dado un sistema homogéneo con n incógnitas, para que la solución dependa de r parámetros, es necesario que la matriz de coeficientes tenga rango $n - r$, por lo que habrá, al menos, $n - r$ ecuaciones. Pero si hay más de $n - r$, las que exceden se podrán hacer 0 mediante transformaciones elementales en el sistema. Así tenemos que el número de ecuaciones cartesianas es igual a $\dim_K(V) - \dim_K(U)$.

Esta relación será útil cuando queramos calcular las ecuaciones cartesianas de un subespacio. Por ejemplo, si en $\mathbb{R}^3$ consideramos el subespacio $U = \mathcal{L}(\{(1,1,0),(1,2,0)\})$, como ambos vectores son linealmente independientes ya que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, sabemos que U tiene dimensión 2, con lo cual para unas ecuaciones cartesianas de U solo habremos de buscar una ecuación. Como las ecuaciones paramétricas de U (en la base usual de $\mathbb{R}^3$) vienen dadas por

$$\begin{cases} x_1 = \lambda + & \mu \\ x_2 = \lambda + & 2\mu \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Esta última ecuación ya nos proporciona unas ecuaciones cartesianas de U.

Si en $\mathbb{R}^4$ consideramos ahora $U = \mathcal{L}(\{(1,2,1,0),(0,1,-1,1)\})$, tenemos de nuevo que $\dim_{\mathbb{R}}(U) = 2$, luego unas ecuaciones cartesianas comprenderán 2 ecuaciones. Las ecuaciones paramétricas de U serán (en $\mathcal{B}_U$ de $\mathbb{R}^4$)

$$\begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = 2\lambda + & \mu \\ x_3 = \lambda - & \mu \\ x_4 = & \mu \end{cases}$$

Si sustituimos los valores de x_1 y x_4 en la 2ª y 3ª ecuaciones tendremos $x_2 = 2x_1 + x_4, x_3 = x_1 - x_4$. Luego en $\mathcal{B}_U$ unas ecuaciones cartesianas de U serán

$$\begin{cases} 2x_1 & -x_2 & & +x_4 & = 0 \\ x_1 & & -x_3 & -x_4 & = 0 \end{cases}$$

11. Intersección de subespacios.

Sean U y W subespacios vectoriales del espacio vectorial $V(K)$. Como subconjuntos de V que son, podemos considerar su intersección $U \cap W$. La pregunta es si $U \cap W$ (que nunca será $\emptyset$, pues $0 \in U \cap W$) es otro subespacio vectorial de V. La respuesta es afirmativa, dado que $\forall\, a,b \in K$, $\forall\, x,y \in U \cap W$, tenemos que $x,y \in U$ y, como U es subespacio vectorial entonces $ax + by \in U$. Pero también $x,y \in W$ y, por la misma razón, $ax + by \in U$. Pero también $x,y \in W$ y, por la misma razón, $ax + by \in W$. Luego, efectivamente, $ax + by \in U \cap W$, que es un subespacio vectorial de V.

En general, dada una familia cualquiera $\{U_i \,/\, i \in I\}$ de subespacios vectoriales de V, su intersección $\bigcap_{i \in I} U_i$ es otro subespacio vectorial de V.

Si tenemos dos subespacios vectoriales U, W de V y queremos calcular su intersección, lo más fácil es considerar unas ecuaciones cartesianas de cada uno de ellos. Estas ecuaciones nos dan las condiciones que ha de verificar un vector de V para estar en U ó en W. Si queremos que dicho vector esté a la vez en

U y en W tendrá que verificar los dos conjuntos de ecuaciones cartesianas. Pero puede que al unirlas, algunas de ellas las obtengamos de las demás por transformaciones elementales, pudiéndolas eliminar del conjunto. Así tendríamos una ecuaciones cartesianas de $U \cap W$.

Ejemplo 7.

Consideremos en $\mathbb{R}^3$ los subespacios vectoriales

$$U = \{(x_1, x_2, x_3) \,/\, x_1 - x_2 - x_3 = 0\}, \quad W = \mathcal{L}(\{(1,-1,-1),(1,1,0),(2,0,-1)\}).$$

Veamos cómo calcular $U \cap W$:

$x_1 - x_2 - x_3 = 0$ nos da la única ecuación cartesiana que tiene U. Calculemos ahora las de W. En primer lugar vemos si los vectores que generan W son una base de W:

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 2 - 1 = 0$, pero $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, sabemos que una base de W viene dada por los vectores $\{(1,1,0),(2,0,-1)\}$. Como tiene dimensión 2, buscaremos una única ecuación cartesiana que será

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 0 & -1 & x_3 \end{vmatrix} = 0,$$

es decir, $-x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$. Luego, como esta ecuación no podemos obtenerla de la ecuación que define a U, concluimos que unas ecuaciones cartesianas de $U \cap W$ serían

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Nota 3. En este caso $\mathbb{R}^3$ tiene la base usual, que es la más fácil a la hora de considerar los vectores de $\mathbb{R}^3$ por sus coordenadas. Cuando calculemos unas ecuaciones cartesianas de un subespacio de $\mathbb{R}^3$ respecto de dicha base no haremos mención de la misma. Lo mismo ocurrirá cuando tratemos con espacios vectoriales para los que dispongamos de bases "canónicas" o "naturales" como $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ o $\mathcal{P}^n(K)$.

12. Suma de subespacios.

Tras estudiar la intersección de subespacios, veamos que la unión de dos subespacios vectoriales U y W de un espacio vectorial $V(K)$ no es, en general, un subespacio vectorial. Para ello, consideramos en $\mathbb{R}^2$ los subespacios $U = \{(x,0) \,/\, x \in \mathbb{R}\}$ y $W = \{(0,y) \,/\, y \in \mathbb{R}\}$. Tenemos que $(1,0) \in U \subset U \cup W$ y que $(0,1) \in W \subset U \cup W$. Luego ambos vectores estarían en $U \cup W$ y, si este fuera un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$, entonces $(1,0) + (0,1) = (1,1)$ tendría que pertenecer a $U \cup W$. Pero $(1,1) \notin U$ y $(1,1) \notin W$ con lo que $(1,1) \notin U \cup W$, y así tendríamos una contradicción.

Entonces, como $U \cup W$ sigue siendo un subconjunto de V, llamaremos suma de U y W y lo notaremos $U + W$ al menor subespacio vectorial de V que contenga a $U \cup W$. Es decir, $U + W = \mathcal{L}(U \cup W)$. El por qué del nombre de suma viene del siguiente hecho:

$$U+W=\{u+w\,/\,u\in U, w\in W\}.$$

Que se da esta igualdad es fácil de comprobar: en efecto, $\{u+w\,/\,u\in U, w\in W\}$ está contenido en $\mathcal{L}(U\cup W)$, puesto que $u,w\in U\cup W\subset \mathcal{L}(U\cup W)$ y por tanto $u+w\in\mathcal{L}(U\cup W)$. Por otro lado si u_1+w_1, u_2+w_2 son elementos del subconjunto y $a,b\in K$ entonces $a(u_1+w_1)+b(u_2+w_2)=(au_1+bu_2)+(aw_1+bw_2)$. Como U es un subespacio vectorial el primer sumando pertenece a U. Por la misma razón el segundo sumando pertenece a W y por tanto $\{u+w\,/\,u\in U, w\in W\}$ es un subespacio vectorial de V que, trivialmente, contiene a U y a W, por lo tanto a $U\cup W$ por lo cual contiene al subespacio que genera $U\cup W$, es decir, a $U+W$.

La forma más sencilla de conocer la suma de dos subespacios vectoriales es reunir bases de ambos, lo que nos da un sistema de generadores de la tal suma. Quedándonos con los vectores que sean linealmente independientes en ese sistema de generadores obtendremos una base de la suma:

Si $\{u_1,u_2,\ldots,u_r\}$ es un sistema de generadores de U y $\{w_1,w_2,\ldots,w_s\}$ es un sistema de generadores de W, sea $v=u+w\in U+W$. Entonces $u=a_1u_1+\cdots+a_ru_r$ para ciertos escalares $a_1,\ldots,a_r$ y $w=b_1w_1+\cdots+b_sw_s$ para ciertos escalares $b_1,\ldots,b_s$. Entonces $u+w=a_1u_1+\cdots+a_ru_r+b_1w_1+\cdots+b_sw_s$. Como esto ocurre $\forall\, v\in U+W$, $\{u_1,\ldots,u_r,w_1,\ldots,w_s\}$ es un sistema de generadores de $U+W$.

La definición que hemos dado de suma de dos subespacios vectoriales se puede generalizar a una familia arbitraria de subespacios vectoriales $\{U_i\,/\,i\in I\}$ mediante

$$\boxed{\sum_{i\in I}U_i=\mathcal{L}\left(\bigcup_{i\in I}U_i\right)}.$$

Ejemplo 8.

Consideremos los mismos subespacios del ejemplo 7, por un lado U dado por la ecuación cartesiana $x_1-x_2-x_3=0$ y por el otro $W=\mathcal{L}(\{(1,-1,-1),(1,1,0),(2,0,-1)\})$ y calculamos $U+W$. En tal ejemplo calculamos una base de W, $\{(1,1,0),(2,0,-1)\}$. Calculemos ahora una de U: como solo tenemos una ecuación cartesiana, sabemos que la dimensión de U es 2 (ya que es un subespacio de $\mathbb{R}^3$) y tendremos, por tanto, que encontrar dos vectores de U que sean linealmente independientes. Es fácil comprobar que $(1,1,0)$ y $(1,0,1)$ verifican esas condiciones y nos dan, por tanto, una base de U. Así, $\{(1,1,0),(2,0,-1),(1,1,0),(1,0,1)\}$ formarían un sistema de generadores de $U+W$. Para encontrar una base de $U+W$, observamos que el vector $(1,1,0)$ se repite. Entonces eliminamos uno de ellos y tenemos que $\{(1,1,0),(2,0,-1),(1,0,1)\}$ seguiría siendo un sistema de generadores de $U+W$. Para ver si forman una base calculamos

$$\begin{vmatrix}1&2&1\\1&0&0\\0&-1&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2&1\\-1&1\end{vmatrix}=-3\neq 0,$$

con lo que afirmamos que, efectivamente, forman una base de $U+W$. Eso nos dice que $\dim_{\mathbb{R}}(U+W)=3$, pero un subespacio de dimensión 3 en $\mathbb{R}^3$ ha de ser todo $\mathbb{R}^3$. Por consiguiente, $U+W=\mathbb{R}^3$.

13. Suma directa de subespacios.

Hemos visto que cualquier vector de una suma de subespacios es una suma de un vector de cada uno de dichos subespacios. Pero podría ocurrir que los vectores de cada subespacio no fueran únicos a la hora de obtener mediante su suma un determinado vector del subespacio suma.
Cuando para cada vector del espacio suma, la forma de expresarlo como suma de los vectores del subespacio es única, diremos que tenemos una suma directa de subespacios.
Dada una familia finita de subespacios $U_1, U_2, \ldots, U_m$ del espacio vectorial $V(K)$, diremos que es independiente si

$$\forall\, i \in \{1, \ldots, m\} \quad U_i \cap \left(\sum_{j=1, j\neq i}^{m} U_j \right) = \{0\}.$$

En el caso particular en que $m = 2$, la condición se reduce a tener $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.
Veamos que la suma de subespacios $U_1 + U_2 + \cdots + U_m$ es directa si y solo si la familia $U_1, U_2, \ldots, U_m$ es independiente.

Demostración. $\Longrightarrow$) En primer lugar, suponemos que la suma es directa. Por tanto, cada vector de esa suma tendrá una expresión única como suma de vectores de cada uno de los U_i. Supongamos entonces, por reducción al absurdo, que

$$U_i \cap \left(\sum_{j\neq i} U_j \right) \neq \{0\}.$$

Así, $\exists\, v \neq 0$ tal que $v \in U_i \cup \left(\sum_{j\neq i} U_j \right)$. Como $v \in U_i$, $v = 0 + \cdots + \overset{i)}{v} + \cdots + 0$. Pero también $v \in \sum_{j\neq i} U_j$, y, por tanto, $v = u_1 + \cdots + u_{i-1} + 0 + u_{i+1} + \cdots + u_m$, con $u_j \in U_j$, $j \neq i$. Esto nos llevaría a que los dos elementos en la misma posición en la suma han de ser iguales y, en particular, $v = 0$, lo que nos lleva a una contradicción.
$\Longleftarrow$) Recíprocamente, supongamos que la familia es independiente. Para ver que la suma es directa, supongamos que un vector v de esa suma verifica $v = u_1 + u_2 + \cdots + u_m = v_1 + v_2 + \cdots + v_m$, donde $u_i, v_i \in U_i$, $i \in \{1, \ldots, m\}$. Entonces tendríamos

$$0 = (u_1 - v_1) + (u_2 - v_2) + \cdots + (u_m - v_m).$$

Esto es, $v_1 - u_1 = (u_2 - v_2) + \cdots + (u_m - v_m)$. Pero entonces $v_1 - u_1 \in U_1 \cap \left(\sum_{j=2}^{m} U_m \right)$. Entonces por hipótesis, $u_1 = v_1$. Este razonamiento lo podemos hacer con cada subíndice y, por tanto, la suma es directa. $\square$

A partir de ahora denotaremos una suma directa de subespacios como $U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_m$.

Definición 3 (Subespacio complementario).
Sea U un subespacio vectorial de $V(K)$, llamaremos subespacio complementario (o suplementario) de U a cualquier subespacio W de V que verifique que $V = U \oplus W$.

Si el espacio vectorial es de dimensión finita, para calcular un complementario del subespacio U, tomamos una base suya, $\{u_1, \ldots, u_r\}$ y la ampliamos hasta tener una base de V, $\{u_1, \ldots, u_r, w_{r+1}, \ldots, w_n\}$. Entonces $W = \mathcal{L}(\{w_{r+1}, \ldots, w_n\})$ es un complementario de U en V: como al unir las bases de U y W obtenemos una base de V, $U + W = V$. Pero es inmediato ver que $U \cap W = \{0\}$.

Ejemplo 9.
Consideremos en $\mathcal{P}^3(\mathbb{R})$ el subespacio vectorial $U = \{p(x) \in \mathcal{P}^3(\mathbb{R}) \,/\, p(x) = p(-x)\}$.
En primer lugar vamos a calcular una base de U. Sabemos que $\{1, x, x^2, x^3\}$ es una base de $\mathcal{P}^3(\mathbb{R})$. Así un polinomio arbitrario de $\mathcal{P}^3(\mathbb{R})$ será de la forma $a + bx + cx^2 + dx^3$ (en la base elegida (a, b, c, d) serán las coordenadas de dicho polinomio). Para que dicho polinomio esté en U tendremos que tener que $a + bx + cx^2 + dx^3 = a - bx + cx^2 - dx^3$. Luego $2bx + 2dx^3 = 0$. Esto nos lleva a que $b = 0,\ d = 0$. Estas son, por tanto, unas ecuaciones paramétricas de U y hemos visto que un polinomio arbitrario de U será de la forma $a + cx^2$. Así, una base de U es $\{1, x^2\}$. Para calcular un complementario de U en $\mathcal{P}^3(\mathbb{R})$ bastaría añadir dos vectores a la base de U hasta tener una base de $\mathcal{P}^3(\mathbb{R})$. Si tomamos, por ejemplo, $\{x, x^3\}$, entonces $\mathcal{L}(\{x, x^3\})$ es un complementario de U.

Nota 4. Por otra parte, si en lugar de tomar x y x^3, tomamos otros dos polinomios arbitrarios que sean linealmente independientes con $\{1, x^2\}$, obtendremos un subespacio complementario de U distinto del anterior. No podemos hablar entonces <u>del</u> complementario de un subespacio vectorial, sino de <u>un</u> complementario.

14. Fórmula de las dimensiones.

En esta sección nos centramos en demostrar el siguiente resultado:

Proposición 5 (Fórmula de las dimensiones).
Si U y W son subespacios vectoriales de un espacio vectorial $V(K)$ de dimensión finita, se verifica la siguiente igualdad:

$$\dim_K(U) + \dim_K(W) = \dim_K(U + W) + \dim_K(U \cap W).$$

Demostración. Supongamos que $\dim_K(U) = r$, $\dim_K(W) = S$ y $\dim_K(U \cap W) = m$. Tendremos que ver que $\dim_K(U + W) = r + s - m$.
Sea entonces $\{v_1, \ldots, v_m\}$ una base de $U \cap W$. Como $U \cap W$ es un subespacio vectorial de U, podremos añadir $r - m$ vectores $u_{m+1}, \ldots, u_r$ de manera que $\{v_1, \ldots, v_m, u_{m+1}, \ldots, u_r\}$ nos dé una base de U. Pero $U \cap W$ también es un subespacio vectorial de W. Podremos encontrar entonces $s - m$ vectores $w_{m+1}, \ldots, w_s$ tales que $\{v_1, \ldots, v_m, w_{m+1}, \ldots, w_s\}$ forman una base de W. Si vemos ahora que

$$\{v_1, \ldots, v_m, u_{m+1}, \ldots, u_r, w_{m+1}, \ldots, w_s\}$$

es una base de $U + W$, tendremos el resultado. Claramente ese conjunto es un sistema de generadores de $U + W$, pues lo obtenemos a partir de sendos sistemas de generadores de U y W.

Veamos que, además, son linealmente independientes. Para ello, si la siguiente combinación lineal se anula

$$0 = a_1v_1 + \cdots + a_mv_m + b_{m+1}u_{m+1} + \cdots + b_ru_r + c_{m+1}w_{m+1} + \cdots + c_sw_s \tag{14.1}$$

Entonces el vector

$$v = a_1v_1 + \cdots + a_mv_m + b_{m+1}u_{m+1} + \cdots + b_ru_r = -c_{m+1}w_{m+1} - \cdots - c_sw_s$$

La primera igualdad nos dice que $v \in U$ y la segunda que $v \in W$. Es decir, $v \in U \cap W$ y, como $\{v_1, \ldots, v_m\}$ es una base del subespacio

$$v = d_1v_1 + \cdots + d_mv_m = a_1v_1 + \cdots + a_mv_m + b_{m+1}u_{m+1} + \cdots + b_ru_r.$$

Ahora bien, la igualdad anterior nos da

$$(a_1 - d_1)v_1 + \cdots + (a_m - d_m)v_m + b_{m+1}u_{m+1} + \cdots + b_ru_r = 0.$$

Como los vectores que intervienen en dicha combinación lineal son linealmente independientes tendremos que $a_1 = d_1, \ldots, a_m = d_m, b_{m+1} = \cdots = b_r = 0$. Introduciendo esto en (14.1) tenemos que

$$0 = a_1v_1 + \cdots + a_mv_m + c_{m+1}w_{m+1} + \cdots + c_sw_s.$$

Pero los vectores que aparecen en esta combinación lineal forman una base de W. Por tanto, $a_1 = \cdots = a_m = c_m = \cdots = c_s = 0$ y tenemos lo que queríamos. □

15. Espacio vectorial cociente.

Sea $V(K)$ un espacio vectorial y U un subespacio vectorial de V. Definimos en V la siguiente relación $\sim_U$: dados $v, w \in V$, diremos que $v \sim_U w$ si y solo si $v - w \in U$. Esta relación es de equivalencia ya que es reflexiva, pues $\forall v \in V$, $v - v = 0 \in U$ y así, $v \sim_U v$. También es simétrica, pues si $v, w \in V$ y $v \sim_U w$, tendremos que $v - w \in U$, pero como U es un subespacio vectorial, $-(v - w) = w - v \in U$ y, entonces, $w \sim_U v$. Finalmente, es transitiva, ya que si $v, w, z \in V$ y $v \sim_U w$, $w \sim_U z$, tendremos que $v - w \in U$ y que $w - z \in U$, pero al ser U un subespacio vectorial $(v - w) + (w - z) = v - z \in U$, luego $v \sim_U z$.

Sea $v \in V$. Vamos a notar su clase de equivalencia respecto de la relación de equivalencia anterior como $v + U$, pues todos los elementos relacionados con v se diferencian de él en un elemento de U. Como subconjunto de V, $v + U = \{v + u \,/\, u \in U\}$. Tendremos en particular que la clase del vector $0 \in V$ es U. Al conjunto cociente de V mediante esta clase de equivalencia lo notaremos $V/U = \{x + U \,/\, x \in V\}$. Lo importante es que podremos definir una suma de clases y un producto por escalares de forma que V/U va a ser también un espacio vectorial sobre K (el espacio vectorial cociente):
Dadas $v + U$, $w + U \in V/U$ definimos su suma de la siguiente forma: $(v + U) + (w + U) = (v + w) + U$. Como vimos en el Tema 0, para que esta suma esté bien definida hemos de ver que no depende de los representantes que elijamos en cada clase; es decir, si $v + U = v_1 + U$ y $w + U = w_1 + U$, tendremos que ver

que $(v+w)+U=(v_1+w_1)+U$. Pero si $v+U=v_1+U$, tendremos que $v-v_1\in U$, y como $w+U=w_1+U$, $w-w_1\in U$. Siendo U un subespacio vectorial, entonces $(v-v_1)+(w-w_1)=(v+w)-(v_1+w_1)\in U$. Luego, efectivamente, $(v+w)+U=(v_1+w_1)+U$.
Es muy fácil demostrar que $(V/U,+)$ es un grupo abeliano y lo dejamos como **ejercicio**.
Si ahora tenemos $a\in K$ y $v+U\in V/U$, definimos el producto $a(v+U)=(av)+U$. Como antes, hemos de ver que esta definición no depende del representante de la clase que elijamos: si $v+U=v_1+U$, entonces $v-v_1\in U$, pero al ser U un subespacio vectorial $a(v-v_1)=av-av_1\in U$, $\forall\, a\in K$ y así, $(av)+U=(av_1)+U$.
Como antes, la comprobación de las cuatro propiedades que faltan para ver que V/U es un espacio vectorial es inmediata.

Veamos ahora que si $V(K)$ es un espacio vectorial con dimensión finita n y U es un subespacio vectorial suyo con dimensión r, entonces $\dim_K(V/U)=n-r$, ya que si $\{u_1,\ldots,u_r\}$ nos da una base de U, y podemos ampliarla a una base $\{u_1,\ldots,u_r,v_{r+1},\ldots,v_n\}$ de V, entonces las clases $\{v_{r+1}+U,\ldots,v_n+U\}$ forman una base de V/U.
Para ello, si tomamos un vector arbitrario $x\in V$, lo podremos escribir como $x=a_1u_1+\cdots+a_ru_r+b_{r+1}v_{r+1}+\cdots+b_nv_n$, para los escalares $a_1,\ldots,a_r,b_{r+1},\ldots,b_n$. Si ahora tomamos clases de equivalencia, tenemos $x+U=a_1(u_1+U)+\cdots+a_r(u_r+U)+b_{r+1}(v_{r+1}+U)+\cdots+b_n(v_n+U)$, donde hemos aplicado las definiciones de suma de clases de equivalencia y producto por escalares. Ahora bien, $\forall\, i\in\{1,\ldots,r\}$, $u_i\in U$, luego $u_i+U=0+U$. Por tanto, la expresión anterior se reduce a que

$$x+U=b_{r+1}(v_{r+1}+U)+\cdots+b_n(v_n+U),$$

que nos demuestra que $\{v_{r+1}+U,\ldots,v_n+U\}$ es un sistema de generadores de V/U.
Veamos que, además, es linealmente independiente: si tenemos escalares $c_{r+1},\ldots,c_n$ tales que $c_{r+1}(v_{r+1}+U)+\cdots+c_n(v_n+U)=0+U$, entonces, $(c_{r+1}v_{r+1}+\cdots+c_nv_n)+U=0+U$. Esto nos indica que $c_{r+1}v_{r+1}+\cdots+c_nv_n\in U$. Como $\{u_1,\ldots,u_r\}$ es una base de U, tendremos que $c_{r+1}v_{r+1}+\cdots+c_nv_n=d_1u_1+\cdots+d_ru_r$ para ciertos escalares $d_1,\ldots,d_r$. Pero lo anterior equivale a tener

$$d_1u_1+\cdots+d_ru_r-c_{r+1}v_{r+1}-\cdots-c_nv_n=0.$$

Como los vectores que intervienen en la combinación lineal nos dan una base de V, han de ser linealmente independientes, luego todos los escalares que aparecen se han de anular. En particular, $c_{r+1}=\cdots=c_n$, lo que nos demuestra que, efectivamente, $\{v_{r+1}+U,\ldots,v_n+U\}$ son linealmente independientes. Por tanto tenemos que es una base de V/U y por tanto su dimensión es $n-r$.

Ejemplo 10.
Consideremos el subespacio vectorial U de $\mathbb{R}^3$ que, respecto de la base usual, tiene como ecuaciones cartesianas

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +2x_3 & =0\\ x_1 & & -x_3 & =0\end{cases}$$

Sabemos, pues, que $\dim_{\mathbb{R}}(U) = 1$. Busquemos una base de U. La segunda ecuación nos dice que $x_1 = x_3$. Si introducimos esto en la primera ecuación obtenemos que $x_2 = -3x_3$. Tomando x_3 como parámetro y dándole el valor 1, por ejemplo, obtenemos que $\{(1,-3,1)\}$ es una base de U. Busquemos entonces un complementario de U en $\mathbb{R}^3$. Para ello basta con elegir dos vectores linealmente independientes con él. Así, si $v_2 = (1,0,0)$ y $v_3 = (0,0,1)$, como

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0,$$

entonces $W = \mathcal{L}(\{(1,0,0),(0,0,1)\})$ es un complementario de U en $\mathbb{R}^3$ y, por tanto, una base de $\mathbb{R}^3/U$ será la dada por $\{(1,0,0)+U,(0,0,1)+U\}$.