TOPOLOGÍA. Examen del Tema 2
- Licenciatura de Matemáticas. GRUPO 2^0 B -
Curso 2007/08
Profesor: Rafael López Camino

Nombre:

1. Se considera un conjunto X, $p \in X$, y τ la topología del punto incluído (para p). Probad que una aplicación $f : (X, \tau) \to (X, \tau)$ que satisface $f(p) = p$ es continua.

2. Se considera en $\mathbb{R}$ la topología τ que tiene como base $\beta = \{[a, \infty); a \in \mathbb{R}\}$. Probad que una aplicación creciente $f : (\mathbb{R}, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau)$ es continua.

3. Hallad un homeomorfismo entre el elipsoide $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$ y la esfera $Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

4. Probad que el conjunto
$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2 < x^2 + y^2 < 3,\ -1 < z < 1\}$$
es abierto en $\mathbb{R}^3$

TOPOLOGÍA. Examen del Tema 2

- Licenciatura de Matemáticas. GRUPO 2^0 B -

Curso 2007/08

Profesor: Rafael López Camino

1. Se considera un conjunto X, $p \in X$, y τ la topología del punto incluído (para p). Probad que una aplicación $f : (X, \tau) \to (X, \tau)$ que satisface $f(p) = p$ es continua.

   Solución: La topología es $\tau = \{O \subset X; p \in O\} \cup \{\emptyset\}$.

   (a) (primera forma). Probamos que si $O' \in \tau$, $f^{-1}(O') \in \tau$. Para ello se prueba que $p \in f^{-1}(O')$. Esto será cierto si $f(p) \in O'$. Pero $f(p) = p$ y $O' \in \tau$.

   (b) (segunda forma) Se probó que una base de entornos es $\beta_x = \{\{x, p\}\}$. Probamos que f es continua en cada punto. Sea $x \neq p$. Dado $V' = \{f(x), p\} \in \beta_{f(x)}$, tomamos $U = \{x, p\} \in \beta_x$. Es evidente que $f(U) = \{f(x), f(p) = p\} = V'$. Si $x = p$, se toma $V' = \{p\} \in \beta_{f(p)}$ y $U = \{p\} \in \beta_p$ y es evidente que $f(U) = V'$.

2. Se considera en $\mathbb{R}$ la topología τ que tiene como base $\beta = \{[a, \infty); a \in \mathbb{R}\}$. Probad que una aplicación creciente $f : (\mathbb{R}, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau)$ es continua.

   Solución: Se demostró para esta topología que una base de entornos es $\beta_a = \{[a, \infty)\}$. Probamos que es continua en todo punto. Sea $a \in \mathbb{R}$ y $[f(a), \infty) \in \beta_{f(a)}$. Demostramos que $f([a, \infty)) \subset [f(a), \infty)$. Sea $x \in [a, \infty)$, es decir, $a \leq x$. Como f es una aplicación creciente, $f(a) \leq f(x)$. En particular, $f(x) \in [f(a), \infty)$.

3. Hallad un homeomorfismo entre el elipsoide $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$ y la esfera $Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

   Solución: Se define la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mediante $f(x, y, z) = (ax, by, cz)$. Esta aplicación es una afinidad ya que $a, b, c \neq 0$. Por tanto, f es un homeomorfismo. Es evidente que $f(Y) = X$. Luego $f_{|Y} : Y \to f(Y) = X$ es un homeomorfismo.

4. Probad que el conjunto

   $$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2 < x^2 + y^2 < 3,\ -1 < z < 1\}$$

   es abierto en $\mathbb{R}^3$

   Solución:

   (a) (primera forma) Las aplicaciones $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ y $g(x, y, z) = z$ son continuas. En particular, los conjuntos $f^{-1}((2, 3))$ y $g^{-1}((-1, 1))$ son abiertos en $\mathbb{R}^3$. Finalmente, $X = f^{-1}((2, 3)) \cap g^{-1}((-1, 1))$ y por tanto, es un conjunto abierto al ser intersección de dos conjuntos abiertos.

   (b) (segunda forma) Se define la aplicación $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mediante $h(x, y, z) = (x^2 + y^2, z)$. Esta aplicación es continua ya que $p_1 \circ h = f$ y $p_2 \circ h = g$. Es evidente que $X = h^{-1}((2, 3) \times (-1, 1))$ y este conjunto es abierto porque (ya se probó en clase) el rectángulo $(2, 3) \times (-1, 1)$ es abierto en $\mathbb{R}^2$.

TOPOLOGÍA. Examen del Tema 2
- Licenciatura de Matemáticas. GRUPO 2^0 B -
Curso 2008/09
Profesor: Rafael López Camino

Nombre:

1. Sea $(\mathbb{R}, \tau_{in})$ para $p = 0$, $(\mathbb{R}, \tau_{ex})$ para $q = 1$ y la aplicación $f : (\mathbb{R}, \tau_{in}) \to (\mathbb{R}, \tau_{ex})$, $f(x) = x^2$. Probad que f es continua en $x = 1$ pero no en $x = 2$.

2. Construir explícitamente un homeomorfismo entre $\mathbb{S}^1$ y la elipse
$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1\}.$$

3. Construir explícitamente un homeomorfismo entre el conjunto $X = \{(0, y); y \in \mathbb{R}\}$ y el dado por $Y = \{(x, x^2); -1 < x < 1\}$.

Soluciones.

1. En $(\mathbb{R}, \tau_{in})$, una base de entornos de $x = 1$ es $\beta_1 = \{U = \{0, 1\}\}$, de $x = 2$, $\beta_2 = \{V = \{0, 2\}\}$. En $(\mathbb{R}, \tau_{ex})$, $\beta'_1 = \{W = \mathbb{R}\}$ y $\beta'_4 = \{O = \{4\}\}$.

   Es continua en $x = 1$ pues $f(U) = U \subset W$. No es continua en $x = 2$ pues $f(V) = \{0, 4\} \not\subset O$.

2. Se define la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (x, 2y)$. Esta aplicación es una afinidad y por tanto, un homeomorfismo. Por otro lado, es evidente que $f(\mathbb{S}^1) = E$. Luego $f_{|\mathbb{S}^1} : \mathbb{S}^1 \to f(\mathbb{S}^1) = E$ es un homeomorfismo.

3. X es homeomorfo a $\mathbb{R}$ mediante $f : X \to \mathbb{R}$, $f((0, y)) = y$ ($X \cong \{(y, 0) \in \mathbb{R}^2; y \in \mathbb{R}\}$ mediante un giro de 90 grados, y el último conjunto era homeomorfo a $\mathbb{R}$).

   La recta real $\mathbb{R}$ es homeomorfa al intervalo $(-1, 1)$, por ejemplo, con $g(x) = \frac{x}{1-|x|}$.

   El conjunto Y es homeomorfo al intervalo $(-1, 1)$ por ser el grafo de la función x^2; concretamente, $h : (-1, 1) \to Y$, $h(x) = (x, x^2)$.

   El homeomorfismo buscado es $h \circ g \circ f$, es decir,

$$(0, y) \longmapsto \left(\frac{y}{1-|y|}, \left(\frac{y}{1-|y|}\right)^2\right).$$

TOPOLOGÍA. Examen del Tema 2
- Licenciatura de Matemáticas. GRUPO 2^0 A -
Curso 2010/11
Profesor: Rafael López Camino

Nombre:

Razonar las respuestas

1. Se considera en $\mathbb{R}$ la topología τ que tiene por base $\beta = \{[a,b); a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$. Estudiar la continuidad de la aplicación $f : (\mathbb{R}, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau)$ dada por $f(x) = 0$ si $x < 0$ y $f(x) = 1$ si $x \geq 0$.

2. Establecer un homeomorfismo entre los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$:
$$A = (0,1) \cup [2,3], \qquad B = (-1,0) \cup [3,4].$$

3. Estudiar en qué puntos es continua la aplicación $f : (\mathbb{R}, \tau_i) \to (\mathbb{R}, \tau_u)$, $f(x) = x^2$, donde τ_i es la topología del punto incluido para $p = 0$.

1. Se considera en $\mathbb{R}$ la topología τ que tiene por base $\beta = \{[a,b); a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$. Estudiar la continuidad de la aplicación $f : (\mathbb{R}, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau)$ dada por $f(x) = 0$ si $x < 0$ y $f(x) = 1$ si $x \geq 0$.

   Solución. Una base de entornos de x es $\beta_x = \{[x, y); x < y\}$. Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que $x < 0$. Entonces $f(x) = 0$. Dado $V' = [0, y)$, se toma $U = [x, x/2)$ como entorno de x. Entonces $f(U) = \{0\} \subset V'$.

   Sea ahora $x \geq 0$. Entonces $f(x) = 1$. Sea $V' = [1, y)$. Sea $U = [x, x+1)$ entorno de x que satisface $f(U) = \{1\} \subset V'$. Esto prueba que f es continua en $\mathbb{R}$.

2. Establecer un homeomorfismo entre los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = (0,1) \cup [2,3], \qquad B = (-1,0) \cup [3,4].$$

   Solución. Se sabe que dos intervalos del mismo "tipo" son homeomorfos entre sí. Sean por tanto, f un homeomorfismo entre $(0,1)$ y $(-1,0)$ y g otro entre $[2,3]$ y $[3,4]$. Se define $\phi : A \to B$ como $\phi_{|(0,1)} = f$ y $\phi_{|[2,3]} = g$. Es evidente que ϕ es biyectiva al serlos f y g. Además la restricción de ϕ a $(0,1)$ y $[2,3]$ son continuas: veámoslo por ejemplo, en $(0,1)$. Sea $i : (-1,0) \to B$ la aplicación inclusión, que es continua. Entonces $\phi_{|(0,1)} = i \circ f$.

   Para finalizar, ϕ es continua globalmente ya que $(0,1)$ y $[2,3]$ constituyen una partición por abiertos de A: que sea una partición es trivial, y lo mismo con que $(0,1)$ sea un abierto de A; por último, $[2,3]$ es abierto ya que $[2,3] = (1'5, 3'5) \cap A$.

3. Estudiar en qué puntos es continua la aplicación $f : (\mathbb{R}, \tau_i) \to (\mathbb{R}, \tau_u)$, $f(x) = x^2$, donde τ_i es la topología del punto incluido para $p = 0$.

   Solución. Una base de entornos de x en $(\mathbb{R}, \tau_i)$ es $\beta_x = \{U_x := \{\{x, 0\}\}$.

   (a) f es continua en $x = 0$. Como $f(0) = 0$, dado $(-\epsilon, \epsilon)$ entorno de $f(0)$, se tiene $f(U_0) = \{0\} \subset (-\epsilon, \epsilon)$.

   (b) f no es continua si $x \neq 0$. Supongamos que $x > 0$. Sea $\epsilon = x/2$ y $V' = (x - \epsilon, x + \epsilon)$. Entonces $f(U_x) = \{0, x^2\} \not\subset V'$. De la misma forma se hace si $x < 0$.

TOPOLOGÍA I. Examen del Tema 2
– Grado en Matemáticas –
Curso 2011/12

<u>**Nombre**</u>**:**

Razonar todas las respuestas

1. Sea $(\mathbb{R}, \tau_{in})$ para $p = 0$, $(\mathbb{R}, \tau_{ex})$ para $q = 1$ y la aplicación $f : (\mathbb{R}, \tau_{in}) \to (\mathbb{R}, \tau_{ex})$, $f(x) = x^2$. Estudiar si f es o no continua y probad que f es continua en $x = 1$.

2. Construir explícitamente un homeomorfismo entre el conjunto $X = \{(0, y); y \in \mathbb{R}\}$ y el dado por $Y = \{(x, x^2); -1 < x < 1\}$.

3. Sea un espacio topológico (X, τ) y $A = \{(x, x) \in X \times X; x \in X\}$. Establecer un homeomorfismo entre (X, τ) y $(A, (\tau \times \tau)_{|A})$. Estudiar cuándo A es abierto en $(X \times X, \tau \times \tau)$.

4. Sea $X = [-1, 2]$ y $A = [-1, 0] \cup [1, 2]$. En X se define la relación de equivalencia:
$$x \; R \; y \text{ si } \begin{cases} \text{son iguales, ó} \\ x, y \in A \end{cases}$$
Probar que X/R es homeomorfo a $\mathbb{S}^1$.

Soluciones

1. La aplicación no es continua. Por ejemplo, el conjunto $O = \{4\}$ es abierto en $(\mathbb{R}, \tau_{ex})$, pero $f^{-1}(O) = \{-2, 2\}$ no pertenece a τ_{in}.

   Como $f(1) = 1^2 = 1$, tomamos bases de entornos de 1 en $(\mathbb{R}, \tau_{in})$, a saber, $\beta_1 = \{V = \{0, 1\}\}$ y base de entornos de 1 en $(\mathbb{R}, \tau_{ex})$, esto es, $\beta'_1 = \{V' = \mathbb{R}\}$. Es evidente que $f(V) = \{0, 1\}$ está incluido en V' y por tanto, f es continua en $x = 1$.

2. El giro $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $\phi(x, y) = (-y, x)$ es un homeomorfismo y por tanto, $f_{|X} : X \to f(X) = \mathbb{R} \times \{0\}$ es un homeomorfismo.

   El conjunto $\mathbb{R} \times \{0\}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}$ mediante $\psi(x, 0) = x$.

   La recta real $\mathbb{R}$ es homeomorfa a $(-1, 1)$ mediante $\eta(x) = x/(1 + |x|)$.

   El conjunto Y es el grafo de la función x^2 y por tanto, es homeomorfo a su dominio, es decir, a $(-1, 1)$. El homeomorfismo es $\alpha(x, y) = x$.

   El homeomorfismo pedido es por tanto, $f = \alpha^{-1} \circ \eta \circ \psi \circ \phi$, es decir,

$$f(0, y) = (-\frac{y}{1 + |y|}, \frac{y^2}{(1 + |y|)^2}.$$

3. Se define la aplicación $f : A \to X$ mediante $f(x, x) = x$. Esta aplicación es biyectiva y su inversa es $g(x) = (x, x)$. La aplicación f es continua, ya que $f = p_{|A}$, donde $p : (X \times X, \tau \times \tau) \to (X, \tau)$ es la primera proyección, $p(x, y) = x$. La aplicación g es continua. Para ello, se considera $h : X \to X \times X$ mediante $h(x) = (x, x)$. Esta aplicación es continua ya que al componer con las proyecciones queda $p \circ h = 1_X$. Como $Im(h) = A$, entonces $h : (X, \tau) \to (A, (\tau \times \tau)_{|A})$ es continua. Pero esta aplicación es justamente g.

   Si el conjunto A es abierto, entonces todo punto suyo es interior a A. Sea $x \in X$. Entonces existen $O, O' \in \tau$ tales que $(x, x) \in O \times O' \subset A$. Tomamos $G = O \cap O'$. Entonces $(x, x) \in G \times G \subset A$. Si G tiene más de un elemento, a saber, $y \in G$, $x \neq y$, entonces $(x, y) \in G \times G \subset A$: contradicción. Por tanto, $G = \{x\}$. Esto prueba que $\{x\}$ es un conjunto abierto. Ya que esto se hace para todo $x \in X$, se concluye que si A es abierto, entonces la topología τ es la discreta. El recíproco es inmediato, es decir, si τ es la topología discreta, entonces $\tau \times \tau$ es la topología discreta en $X \times X$, luego todo subconjunto suyo es abierto, en particular, el conjunto A.

Se concluye entonces con que A es abierto en $(X \times X; \tau \times \tau)$ si y sólo si τ es la topología discreta.

4. Las clases de equivalencia son $[0] = A$ y $[x] = \{x\}$ si $x \notin A$.

   Se define $f : X \to \mathbb{S}^1$ mediante

$$f(x) = \begin{cases} (1,0) & \text{si } x \in [-1,0] \\ (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)) & \text{si } x \in [0,1] \\ (1,0) & \text{si } x \in [1,2] \end{cases}$$

   Ya que $f(x) = (1,0) = f(0) = f(1)$ para $x \in A$, entonces $xR_f y$ si y sólo si xRy.

   La aplicación f es continua pues la restricción a los cerrados de X dados por A y $[0,1]$ es continua: en el primer caso, la aplicación es constante; en el segundo es la aplicación $x \longmapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$, que ya es continua vista de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{S}^1$.

   La aplicación es sobreyectiva, pues $f(X) = f([0,1]) = \mathbb{S}^1$.

   El conjunto X es un intervalo cerrado, luego es un conjunto cerrado y acotado en $\mathbb{R}$; la imagen, $\mathbb{S}^1$, está incluido en $\mathbb{R}^2$. Por tanto, f es cerrada.

   Como conclusión, f es una identificación, probamos que $X/R \cong \mathbb{S}^1$.

TOPOLOGÍA I. Examen del Tema 2
– Grado en Matemáticas –
Curso 2012/13

<u>**Nombre**</u>:

Razonar todas las respuestas

1. Sean $p, q \in X$ y τ_p, τ_q las topologías del punto incluido para p y q, respectivamente. Probar que $f : (X, \tau_p) \to (X, \tau_q)$ es continua si y sólo si f es constante o $f(p) = q$. Deducir que $(X, \tau_p) \cong (X, \tau_q)$.

2. Hallar un homeomorfismo entre $B_1(0,0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ y $\mathbb{R}^2$.

3. Se considera $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \tau_u \times \tau_D)$. Hallar la adherencia de $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$. Probar que la diagonal, con su topología relativa, es homeomorfa a $(\mathbb{R}, \tau_D)$.

4. En $X = [-1, 2]$ se define la relación de equivalencia

$$x\ R\ y \text{ si } \begin{cases} \text{son iguales, ó} \\ x, y \in [-1, 0] \text{ ó} \\ x, y \in [1, 2] \end{cases}$$

   Probar que X/R es homeomorfo a [0,1]

Soluciones

1. Recordemos que la base de entornos de $x \in X$ en (X, τ_p) es $\beta_x = \{\{p, x\}\}$. Supongamos que f es continua. Ya que es continua en X, dado $V' = \{f(x), q\}$, debe existir $V = \{p, x\} \in \beta_x$ tal que $f(\{p, x\}) \subset \{f(x), q\}$. Esto quiere decir que $f(p) \in \{f(x), q\}$, para todo $x \in X$. Si $f(p) = q$, entonces se tiene probado el resultado. Si $f(p) \neq q$, entonces $f(p) = f(x)$, $\forall x \in X$, es decir, f es constante.

   Recíprocamente, se sabe que todas las aplicaciones constantes son continuas. Supongamos ahora que $f(p) = q$. Entonces por el mismo razonamiento anterior, decir que f es continua es equivalente a tener $f(\{p, x\}) \subset \{f(x), q\}$, $\forall x \in X$. Pero como $f(p) = q$, entonces $f(\{p, x\}) = \{q, f(x)\}$.

   Para la segunda parte, sea $f : X \to X$ cualquier aplicación biyectiva que lleve p en q, por ejemplo:
$$f(x) = \begin{cases} q & \text{si } x = p \\ p & \text{si } x = q \\ x & \text{si } x \neq p, q \end{cases}$$
   Como $f(p) = q$, f es continua. La inversa lleva q en p, luego es continua.

2. La aplicación $f : B_1(0,0) \to \mathbb{R}^2$ que se busca es una de la forma $f(x, y) = \lambda(x, y)$, $\lambda \geq 0$ de forma que conforme $|(x, y)|$ varíe de 0 a 1, $|f(x, y)|$ varíe de 0 a ∞. Sea $h : [0, \infty) \to [0, \infty)$ cualquier homeomorfismo tal que $h(0) = 0$ y $h(1) = \infty$, que sabemos que existe. Entonces el valor de λ viene dado por la condición
$$|f(x, y)| = h(|(x, y)|) \Rightarrow \lambda\sqrt{x^2 + y^2} = h(\sqrt{x^2 + y^2}).$$
   Por tanto se define
$$f(x, y) = \begin{cases} h(\sqrt{x^2 + y^2})(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}) & (x, y) \neq (0, 0) \\ (0, 0) & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$
   De la forma que se ha construido f, se tiene que la inversa de f es
$$f^{-1}(x, y) = \begin{cases} h^{-1}(\sqrt{x^2 + y^2})(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}) & (x, y) \neq (0, 0) \\ (0, 0) & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

La continuidad de f en $B_1(0,0) - \{(0,0)\}$ (que es un abierto) se hace componiendo con las proyecciones, obteniendo inmediatamente

$$p_i \circ f = h \circ (\sqrt{p_1^2 + p_2^2}) \frac{p_i}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}}.$$

Para el $(0,0)$, se tiene que si $(x_n, y_n) \to (0,0)$, entonces $|f(x_n, y_n)| = h(\sqrt{x_n^2 + y_n^2}) \to 0$, ya que $x_n^2 + y_n^2 \to 0$ y $h(0) = 0$.

También se podía haber hecho con el sólo cambio de haber tomado h un homeomorfismo entre $(-1,1)$ y $\mathbb{R}$ que lleve el 0 en 0 y definiendo f como $f(x,y) = h(\sqrt{x^2+y^2})(x,y)/\sqrt{x^2+y^2}$. En este caso, ya sabíamos que una tal aplicación h era $h(t) = t/(1-t^2)$, con $h^{-1}(t) = t/(1+t^2)$.

3. Una base de entornos de (x,y) es $\beta_{(x,y)} = \{(x-\epsilon, x+\epsilon) \times \{y\}; \epsilon > 0\}$.

   Para los puntos del borde de A, los conjuntos $(x-\epsilon, x+\epsilon) \times \{y\}$ siempre intersecan a A, excepto para el punto $(0,1)$ y $(0,-1)$ ya que la ordenadas de los puntos del entorno básico o es 1 o es -1, que nunca interseca a A. Si (x,y) satisface $x^2 + y^2 > 1$, no es adherente: se sabe que existe una bola euclídea de radio $r > 0$ centrada en el punto que no interseca a A, pero esa bola contiene a $(x-r, x+r) \times \{y\}$. Por tanto $\overline{A} = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\} - \{(0,1), (0,-1)\}$.

   Si $D = \{(x,x); x \in \mathbb{R}\}$ es la diagonal, entonces una base de entornos de (x,x) en $(\tau_u \times \tau_D)_{|D}$ es

$$\beta_{(x,x)} \cap D = \{((x-\epsilon, x+\epsilon) \times \{x\}) \cap D; \epsilon > 0\} = \{(x,x)\},$$

   probando que tiene la topología discreta. Por tanto, un homeomorfismo es cualquier aplicación biyectiva de D en $\mathbb{R}$, ya que las aplicaciones biyectivas entre espacios discretos son homeomorfismos. Por ejemplo, $f(x,x) = x$.

4. Se define $f : X \to [0,1]$ mediante

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-1,0] \\ x & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x \in [1,2] \end{cases}$$

   Esta apicación es evidentemente sobreyectiva. También es continua porque en cada uno de los tres trozos es continua (o es constante o es la identidad), y cada uno de los trozos son cerrados en X, pues ya lo son en $\mathbb{R}$. El dominio de f es un compacto (cerrado, por ser un intervalo, y acotado, por ser un intervalo acotado) y llega a un subconjunto de $\mathbb{R}$. Esto prueba que f es cerrada y, de paso, f es una identificación. Sólo queda probar que $R_f = R$, pero esto es evidente por la propia definición de f.

(También se podía haber probado que f es una identificación observando que la inclusión $i : [0,1] \hookrightarrow X$ es una inversa (¡continua!) por la derecha, es decir, $f \circ i = 1_{[0,1]}$.)

TOPOLOGÍA I. Examen del Tema 2
– Grado en Matemáticas. Curso 2013/14 –

Nombre:

1. Estudiar en qué puntos es continua la aplicación $f : (\mathbb{R}, \tau_u) \to (\mathbb{R}, \tau_d)$, $f(x) = \sin(x)$.

2. Probar que los espacios de cada pareja son homeomorfos entre sí:

   (a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, x \geq 0\}$, $B = [0, 1]$.

   (b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.

   (c) $A = (0, 1) \cup [2, 3]$, $B = (5, 7) \cup [10, 12]$.

3. Se considera $(\mathbb{R}, \tau)$ donde τ es la topología del punto incluido para $p = 1$. Estudiar la continuidad global de la aplicación $f : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \tau \times \tau) \to (\mathbb{R}, \tau)$, $f(x, y) = y - x$. Hallar el interior del conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x\}$ en $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \tau \times \tau)$.

4. En $X = ([0, 1] \times \{0\}) \cup ([0, 1] \times \{1\}) \subset \mathbb{R}^2$ se define la relación

$$(x, y)\ R\ (x', y') \Leftrightarrow \begin{cases} (x, y) = (x', y') \\ (0, 0)\ R\ (0, 1) \\ (1, 0)\ R\ (1, 1) \end{cases}$$

   Hallar y probar a qué subconjunto de $\mathbb{R}^2$ es homeomorfo X/R.

Razonar todas las respuestas

Soluciones

1. Una base de entornos de $x \in (\mathbb{R}, \tau_u)$ es $\beta_x = \{(x-r, x+r) : r > 0\}$ y de $x \in (\mathbb{R}, \tau_d)$ es $\beta'_x = \{[x, \infty)\}$. La continuidad de f en x se expresa como: encontrar $r > 0$ tal que
$$f((x-r, x+r)) \subset [\sin(x), \infty) \Leftrightarrow f((x-r, x+r)) \geq \sin(x).$$
Analizando la gráfica de la función seno, se observa que para todo $r > 0$, $f((x-r, x+r))$ tiene puntos menores estrictos que $\sin(x)$. Esto está asegurado al menos en los puntos donde la función es creciente o decreciente. En los puntos donde el seno es 1, es decir, si $x = \pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, la continuidad equivale a que $f((x-r, x+r)) \geq 1$, lo cual es imposible. Y en los puntos donde el seno es -1, es decir, si $x = 3\pi/2 + 2k\pi$, $\sin(x) = -1$, y la continuidad exige que $f((x-r, x+r)) \geq -1$, que siempre es cierto.

   Por tanto, la función sólo es continua en los puntos donde el seno es -1, es decir, $\{3\pi/2 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

2. (a) El conjunto A es el grafo sobre el eje y de la función $f(y)\sqrt{1-x^2}$ definida en $[-1, 1]$. Por tanto, $A = G(f) \cong [-1, 1]$ y se sabe que dos intervalos cerrados son homeomorfos entre sí, luego homeomorfo a B.

   [Otra forma. Hacemos en $\mathbb{R}^2$ un giro de 90 grados (que es un homeomorfismo) y lleva A en $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$. Este conjunto es el grafo de la función $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ definida en $[-1, 1)$ y el argumento sigue los mismos pasos que antes.]

   (b) El conjunto A es $(0, \infty) \times (0, \infty)$. Como $(0, \infty) \cong \mathbb{R}$ ya que dos intervalos abiertos de $\mathbb{R}$ son homeomorfos entre sí, entonces $A \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Ahora bien, el producto topológico de $\mathbb{R}$ con la topología usual sobre sí mismo es $\mathbb{R}^2$ con la topología usual. Por tanto, $A \cong \mathbb{R}^2$. El conjunto B es una bola y se probó en clase que una bola de $\mathbb{R}^n$ es homeomorfa a $\mathbb{R}^n$.

   (c) Escribimos $A = A_1 \cup A_2$ y $B = B_1 \cup B_2$. Sabemos que $A_1 \cong B_1$ (los dos son intervalos abiertos) y que $A_2 \cong B_2$ (los dos son intervalos cerrados). El homeomorfismo entre A y B es el que lleva A_1 en B_1 y A_2 en B_2 y observando que A_1 y A_2 son conjuntos abiertos *en* A:
$$A_1 = (0, 1) \cap A, \; A_2 = (1, 5) \cap A.$$
   La continuidad de la inversa sigue los mismos pasos, observando de nuevo, que B_1 y B_2 son abiertos *en* B.

   [Nota: Los conjuntos A_1 y A_2 también son cerrados en A, luego el argumento de continuidad también se pueda realizar usando este hecho: $A_1 = [0, 1] \cap A$ y $A_2 = [2, 3] \cap A$.]

3. (a) El conjunto $O' = \{1\}$ es abierto en $(\mathbb{R}, \tau)$. Hallamos su imagen inversa: $(x, y) \in f^{-1}(O')$ si $y - x \in \{1\}$, es decir, $f^{-1}(O') = \{(x, y) : y = x + 1\}$, es decir, es una recta del plano. Este conjunto no es abierto en $(\mathbb{R}^2, \tau \times \tau)$ ya que al menos, contendría un elemento de la base $\tau \times \tau$, es decir, al menos $G_1 \times G_2 \in f^{-1}(O')$, con $G_i \in \tau$. En particular, $(1, 1) \in f^{-1}(O')$, lo cual no es cierto. Esto prueba que la aplicación no es continua globalmente.

   [Nota: se puede tomar otros abiertos O', tales como $O' = \{1, 2\}$, cuya imagen inversa son dos rectas paralelas y ninguna contiene al $(1, 1)$. Si se hubiera tomado como abierto el conjunto $G' = \{0, 1\}$, entonces sí contiene al $(1, 1)$, pero esto no quiere decir que el conjunto $f^{-1}(G')$ sea abierto, ya que la topología $\tau \times \tau$ *no* es la topología del punto incluido en $\mathbb{R}^2$ para el punto $(1, 1)$. En verdad, tampoco dicho conjunto es abierto, ya que $(0, 0) \in f^{-1}(G')$ y si es un punto interior, entonces $(0, 0) \in \{0, 1\} \times \{0, 1\} \subset f^{-1}(G')$, lo cual tampoco es cierto.]

   (b) Sea $(x, y) \in int(A)$. Entonces existe $O, O' \in \tau$ tal que $(x, y) \in O \times O' \subset A$. Ya que $1 \in O, O'$, entonces $(1, 1) \in A$, lo cual es falso. Esto prueba que $int(A) = \emptyset$.

4. El conjunto cociente X/R es homeomorfo a $\mathbb{S}^1$ donde $f : X \to \mathbb{S}^1$ está dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} (\cos(\pi x), \sin(\pi x)) & y = 0 \\ (\cos(\pi(1 - x) + \pi), \sin(\pi(1 - x) + 1)) & y = 1 \end{cases}$$

La aplicación f lleva $[0, 1] \times \{0\}$ en la parte de arriba de $\mathbb{S}^1$ y lleva $[0, 1] \times \{1\}$ en la de abajo de $\mathbb{S}^1$, continuando desde el punto $(-1, 0)$ hasta $(1, 0)$. Por tanto, $R = R_f$. Además esto prueba que es sobreyectiva.

[Con algo más de detalle. Si $y = 0$, πx varía de 0 a π conforme vamos recorriendo el intervalo $[0, 1]$. Si $y = 1$, $(\pi(1 - x) + \pi$ va de 2π a π, conforme vamos de 0 a 1. Por tanto, en el primer trozo, se cubre la parte de arriba ($y \geq 0$) de $\mathbb{S}^1$ y en el segundo trozo, la parte de abajo ($y \leq 0$) de $\mathbb{S}^1$. Además, $f(0, 0) = f(0, 1)$ y $f(1, 0) = f(1, 1)$.]

La aplicación f es continua, ya que es continua en cada trozo de X (componiendo con las proyecciones de $\mathbb{R}^2$) y $[0, 1] \times \{0\}$ y $[0, 1] \times \{1\}$ son cerrados de $\mathbb{R}^2$ (producto de cerrados) y por tanto de cerrados en X.

Ya que X es acotado y cerrado en $\mathbb{R}^2$ (y f es continua), la aplicación f es cerrada. Por tanto una identificación, probando que $X/R_f = X/R \cong f(X) = \mathbb{S}^1$.