LMD (Grupos D y E del GII)

Relación de ejercicios del Tema 5

Curso 2021-2022

1. Demuestre las siguientes propiedades por el método de inducción:

   a) $\forall n \geq 1,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$

   b) $\forall n \geq 1,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1.$

   c) $\forall n \geq 1,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{k}.$

   d) $\forall n \geq 2,\ \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{n+n} > \dfrac{1}{2}.$

   e) $\forall n \geq 4,\ n^2 \leq 2^n < n!.$

   f) $\forall n \geq 1,\ \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \leq \dfrac{1}{\sqrt{3n+1}}.$

   g) $\forall n \geq 0,\ 5^{n+1} + 2 \cdot 3^n + 1$ es múltiplo de 8.

   h) $\forall n \geq 0,\ 7^{2n} + 16n - 1$ es múltiplo de 64.

   i) $\forall n \geq 1,\ (n+1)(n+2)\cdots(n+n)$ es múltiplo de 2^n.

   j) $\forall n \geq 0,\ 10^{3^n} - 1$ es múltiplo de 3^{n+2}.

2. Obtenga el valor exacto de las siguientes expresiones numéricas:

   $$a)\ \sum_{k=1}^{100} \Big(3k+4\Big). \qquad b)\ \sum_{k=1}^{100} k \cdot (k-1). \qquad c)\ \sum_{k=1}^{100} (k+100)^2. \qquad d)\ \sum_{k=1}^{100} \binom{k}{2}.$$

3. Calcule un número natural c de modo que para todo número natural n, si $n \geq c$, entonces $(2 \cdot n)! > 3^n \cdot (n!)^2$. Justifique su respuesta.

4. Sea la sucesión dada por $f(0) = 1$, $f(1) = 2$ y $f(n) = 4 + f(n-2)$ para $n \geq 2$. Demuestre por inducción que $f(n) = \dfrac{4n+1+(-1)^n}{2}$ para todo $n \geq 0$.

5. Definimos las sucesiones siguientes:

   $$g(1) = 0 \quad \text{y} \quad g(n) = n \cdot g(n-1) + (-1)^n \quad \text{para } n \geq 2,$$

   $$f(n) = n! \cdot \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right) \quad \text{para } n \geq 1.$$

   Exprese $f(n)$ con la notación de sumatoria y demuestre que $f(n) = g(n)$ para todo $n \geq 1$.

6. La sucesión de los *números de Fibonacci* se define de la siguiente forma:

   $$f(0) = 0,\ f(1) = 1 \quad \text{y} \quad f(n) = f(n-1) + f(n-2) \text{ para } n \geq 2.$$

   Demuestre cada una de las propiedades siguientes:

   a) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} f(i)^2 = f(n) \cdot f(n+1)$ para todo $n \geq 0$.

   b) 5 divide a $f(5n)$ para todo $n \geq 0$.

   c) $f(n-1) \cdot f(n+1) = f(n)^2 + (-1)^n$ para todo $n \geq 1$.

   d) $\operatorname{mcd}(f(n), f(n+1)) = 1$ para todo $n \geq 0$.

e) $\sum_{k=1}^{n} f(2k-1) = f(2n)$ para todo $n \geq 1$.

f) $\sum_{k=1}^{n} f(2k) = f(2n+1) - 1$ para todo $n \geq 1$.

g) $\theta^n = f(n) \cdot \theta + f(n-1)$ para todo $n \geq 1$, donde $\theta = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Deduzca de lo anterior que $f(n+1) < \theta^n < f(n+2)$ para todo $n \geq 1$.

7. Sea la sucesión dada por $f(0) = 1, f(1) = 2$ y $f(n) = 7f(n-1) - 2f(n-2)$ para $n \geq 2$. Para cada número natural $n \geq 1$, sea $P(n)$ el enunciado que afirma que
$$f(n+1) \cdot f(n-1) - (f(n))^2 = 2^{n+2}.$$
   a) ¿Para cualquier $n \geq 1$, es cierto que $P(n)$ implica $P(n+1)$?
   b) ¿Es cierto el enunciado $P(n)$ para todo $n \geq 1$?

8. Sea la sucesión $f(0) = 9$, $f(n) = f(n-1) + 2\sqrt{f(n-1)} + 1$ para $n \geq 1$. Obtenga los primeros términos de esta sucesión y a partir de ellos encuentre una fórmula cerrada para $f(n)$. A continuación demuestre la validez de la fórmula obtenida.

9. Consideramos la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Para cada número natural $n \geq 1$ encuentre una fórmula para la matriz A^n y demuestre que dicha fórmula es correcta.

10. Para cada $n \geq 0$ se define el n-ésimo *número de Fermat* como $F_n = 2^{2^n} + 1$. Demuestre para todo $n \geq 1$ que $F_n = 2 + F_0 F_1 \cdots F_{n-1}$.

11. Pruebe que para todo $n \geq 1$, el número $2^{2^n} - 1$ tiene al menos n divisores primos distintos.

12. Para cada número natural $n \geq 1$, sea a_n un número real mayor o igual que 1. Demuestre que
$$(1+a_1)\cdots(1+a_n) \geq \frac{2^n}{n+1} \cdot (1 + a_1 + \cdots + a_n).$$

13. Sea $n \geq 1$ un número natural. Escribimos n veces el número 1 y n veces el número -1 mezclados de forma arbitraria formando un círculo. Demuestre que es posible comenzar en uno de dichos valores y recorrer todo el círculo en algún sentido tal que en todo momento la suma de todos los números por los que se ha pasado es siempre mayor ó igual que cero.

14. Resuelva las recurrencias siguientes obteniendo fórmulas en las que aparezcan sólo números reales:
   a) $f(0) = 1, f(1) = 2,\ f(n) = 5f(n-1) - 6f(n-2)$ para $n \geq 2$.
   b) $f(0) = 1, f(1) = 4,\ f(n) = 2f(n-1) - f(n-2)$ para $n \geq 2$.
   c) $f(0) = 1, f(1) = 1, f(2) = 3,\ f(n) = 4f(n-1) - 5f(n-2) + 2f(n-3)$ para $n \geq 3$.
   d) $f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 1,\ 2f(n) = 9f(n-1) - 12f(n-2) + 4f(n-3)$ para $n \geq 3$.
   e) $f(0) = 0, f(1) = 1,\ f(n) = 3f(n-1) - 2f(n-2) + 2^n + 2$ para $n \geq 2$.
   f) $f(0) = 0, f(1) = 1,\ f(n) = 3f(n-1) - 2f(n-2) + n \cdot 2^n - 1$ para $n \geq 2$.
   g) $f(0) = 1, f(1) = 4,\ f(n) = -f(n-2)$ para $n \geq 2$.
   h) $f(0) = 0, f(1) = 1,\ f(n) = -f(n-2) + 2^{2n} + 4^{n+1}$ para $n \geq 2$.
   i) $f(0) = 0, f(1) = 1,\ f(n) = -f(n-2) + 2^n + (-1)^{n+1}$ para $n \geq 2$.
   j) $f(0) = 0, f(1) = 1,\ f(n) = -9f(n-2) + 3^{n+1}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 3^n \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ para $n \geq 2$.
   k) $f(0) = 0, f(1) = 1,\ f(n) = -4f(n-2) + 4^n\ \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ para $n \geq 2$.
   l) $f(0) = 0, f(1) = 1,\ f(n) = 4f(n-1) - 8f(n-2)$ para $n \geq 2$.
   m) $f(0) = 0, f(1) = 1,\ f(n) + 2f(n-1) + 2f(n-2) = 0$ para $n \geq 2$.

n) $f(0) = 0,\ f(n) = 2f(n-1) + \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) + 2^n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ para $n \geq 1$.

ñ) $f(0) = 0,\ f(n) = 2f(n-1) + \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{2n\pi}{4}\right)$ para $n \geq 1$.

o) $f(0) = 1,\ f(1) = 1,\ f(2) = 2,\ f(n) = f(n-1) - 9f(n-2) + 9f(n-3) + 2$ para $n \geq 3$.

15. En cada apartado, obtenga una recurrencia lineal homogénea para la sucesión dada para $n \geq 0$, y cuyo orden sea el más pequeño posible:

a) $f(n) = 2 + 3n$.

b) $f(n) = 2^n + 3n$.

c) $f(n) = 2^n + 3^n$.

d) $f(n) = 2^n + n \cdot (-1)^n + 3$.

e) $f(n) = 3 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$.

f) $f(n) = 3 + \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$.

g) $f(n) = 3^n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$.

h) $f(n) = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + 5n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$.

i) $f(n) = n \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{4}\right)$.

j) $f(n) = \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi}{8}\right) + 1$.

16. Obtenga el orden más pequeño que puede tener una recurrencia lineal homogénea que define a la sucesión de término general $f(n) = 4 \cdot 2^n + (2n-1) \cdot 3^n + 4 + 8\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$ para $n \geq 0$.

17. Todas de las sucesiones de números reales que verifican la recurrencia

$$f(n) = 7f(n-1) - 15f(n-2) + 9f(n-3),$$

se pueden representar mediante una expresión de la forma:

a) $an + b + c3^n$ *b*) $n^2 + an + b + c3^n$ *c*) $a + (bn + c)3^n$ *d*) $a + (n^2 + bn + c)3^n$

18. Pruebe que $a^n + \frac{1}{a^n} \in \mathbb{N}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $a = \frac{5 - \sqrt{21}}{2}$.

19. Encuentre una fórmula cerrada para cada una de las expresiones siguientes definidas para todo $n \geq 1$:

a) $1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + \cdots + n \cdot 2^n$.

b) $a^n + a^{n-1} \cdot b + \cdots + a \cdot b^{n-1} + b^n$, donde a y b son números reales no nulos.

c) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (2n-1)^2 - (2n)^2$.

20. Disponemos de tres postes sobre un plano numerados con los números 1, 2 y 3. En el poste 1 tenemos apilados discos tales que en la parte superior hay un disco de radio 1, justo debajo hay dos discos de radio 2, debajo de éstos hay tres discos de radio 3, y así hasta llegar a la parte inferior de la pila en la que hay n discos de radio n. Se desea trasladar la pila de discos del palo 1 al palo 3 de modo que en cada movimiento se mueva un sólo disco y en ningún momento haya un disco por encima de otro de radio menor. Encuentre una fórmula cerrada para el menor número de movimientos necesarios para resolver el problema planteado.

21. ¿De cuántas formas podemos subir una escalera de n peldaños, donde $n \geq 1$, si en cada paso podemos avanzar uno, dos ó tres peldaños?

22. ¿De cuántas formas podemos pavimentar un pasillo rectangular de tamaño $2\times n$, si podemos usar baldosas de tamaño 2×1 y de tamaño 1×2 y no hay solapamientos? ¿Cuál es la respuesta, si las baldosas que se pueden usar son de tamaño 1×2 y 1×1?

23. Trazamos n líneas rectas en el plano de forma que cada una de ellas corte a cada una de las restantes exactamente en un punto y no haya tres o más líneas que pasen por un mismo punto. Encuentre una fórmula cerrada para el número de regiones en las que el plano queda dividido al trazar dichas líneas rectas.

24. Encuentre una fórmula cerrada para las sucesiones tales que $f(0) = 2,\ g(0) = 1$ y

$$\begin{cases} f(n) = 8f(n-1) - 5g(n-1) \\ g(n) = 10f(n-1) - 7g(n-1) \end{cases}$$

para todo $n \geq 1$.

25. Para cada número natural $n \geq 1$, sea la matriz siguiente de orden $n \times n$,

$$A_n = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a \end{pmatrix},$$

donde $a \in \mathbb{R}$. Llamamos $f(n) = |A_n|$.

a) Obtenga una recurrencia lineal homogénea para $f(n)$.

b) Encuentre una fórmula cerrada para $f(n)$ para cada uno de los siguientes valores del parámetro a: $-2,\ 0,\ 5/2$ y 4.

26. Resuelva cada una de las recurrencias siguientes:

a) $x_0 = 1, x_1 = 1,\ x_n = \dfrac{x_{n-1} \cdot x_{n-2}}{x_{n-1} + x_{n-2}}$ para $n \geq 2$.

b) $x_0 = 1,\ x_1 = 2,\ x_2 = 8$ y $x_n \cdot x_{n-2} \cdot x_{n-3} + 2x_{n-1} \cdot x_{n-2}^2 = 3x_{n-1}^2 \cdot x_{n-3}$ para $n \geq 3$.

c) $x_0 = a,\ x_1 = b,\ x_2 = c$ y $x_n = \dfrac{x_{n-1}^4 \cdot x_{n-3}^2}{x_{n-2}^5}$ para $n \geq 3$, donde $a, b, c \in \mathbb{R}^+$.