

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Cálculo I – Evaluación 6

1. a) Sea $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y definamos $Z = \{x \in [c, d] : f(x) = 0\}$. Supuesto que $Z \neq \emptyset$, prueba que Z tiene máximo y mínimo.
b) Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a) < 0$, $f(b) < 0$ y $f(c) > 0$ para algún $c \in]a, b[$. Prueba que hay dos números u, v verificando que $a < u < v < b$, $f(u) = f(v) = 0$ y $f(x) > 0$ para todo $x \in]u, v[$.
2. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua y creciente. Prueba que para todo conjunto $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y mayorado se verifica que $\sup(f(A)) = f(\sup(A))$.
Debes hacer este ejercicio de dos formas: una usando sucesiones y otra sin usar sucesiones (usando *épsilon*s y *delta*s).
3. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Prueba que la función $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dada para todo $x \in [a, b]$ por $g(x) = \max f([a, x])$, es continua.
Sugerencia. Prueba que $g([a, b]) = [f(a), M]$ donde $M = \max f([a, b])$. En mi libro *Cálculo diferencial e integral para funciones de una variable* puedes encontrar alguna ayuda adicional.