Relación 5:

(15) ii) $\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+4}+\cdots+\frac{1}{2n^2}\right)\right]=\lim_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2+k^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}}$

Para calcular esto vamos a usar un corolario de la integral de Cauchy que dice lo siguiente: Si $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ es continua entonces $\int_0^1 f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Esto se cumple si tomamos $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ ya que entonces tendríamos:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}(x)\Big]_0^1=\operatorname{arctg}(1)=\frac{\pi}{4}$$