SIMULACRO DE EXAMEN. 4/11/2020

(1) Encuentra una ec. en diferencias del tipo $x_{n+k}+a_{k-1}x_{n+k-1}+\dots+a_0x_n=0$ que admita la sol. $\{0,-1,0,1,0,-1,\dots\}$

~~Tomamos $k=1$ y la ecuación $x_{n+1}=(-i)x_n=\alpha(-i)^{n+1}$ es geométrica con $\alpha\in\mathbb{C}$.~~

Tomamos $k=2$. La ecuación $x_{n+2}+x_n=0$ tiene $p(\lambda)=\lambda^2+1 \Rightarrow \boxed{\lambda_\pm=\pm i}$

Con lo cual:

$$\Sigma_{\mathbb{C}}=\{c_1\Pi_i+c_2\Pi_{-i} \,/\, c_1,c_2\in\mathbb{C}\}$$

Buscamos una solución real, si $c_1=0$ y $c_2=1$. $\mathrm{Im}(\Pi_{-i})$ es una solución real que verifica la ecuación:

$$\mathrm{Im}(-i)=\{\operatorname{sen}\frac{-\pi}{2}k\}=\{-\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}k\}=\{0,-1,0,1,\dots\}$$

Con lo cual, la ecuación que buscábamos es: $\boxed{x_{n+2}+x_n=0}$.

(2) ¿Es periódica la función $f(t)=2\cos\frac{5}{3}t+7\cos(5t)+\cos t$? En caso afirmativo calcula un periodo.

Sí es periódica porque si tomamos $w=\frac{1}{3}$

$$f(t)=2\cos 5wt+7\cos 15wt+\cos 3wt$$

Como todas las frecuencias son un múltiplo de la principal w, esta función es periódica según la teoría de armónicos.

Al aumentar la frecuencia en $k\cdot w$, el periodo se reduce en $\frac{T}{k}$.

El primer periodo común será el periodo correspondiente a la menor frecuencia (el mayor periodo).

$$T=\frac{2\pi}{1/3}=6\pi.$$

efectivament $T=6\pi$ es periodo.

Comprobamos que es periodo de los demás:

$$T'=\frac{6\pi}{5}=\frac{T}{5}\Rightarrow T=5T',\quad T''=\frac{2\pi}{5}=\frac{T}{15},\quad T'''=2\pi=\frac{T}{3}$$

Escaneado con CamScanner

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

③ Un producto se ajusta : $D(p_n) = O(p_n^e)$ p_n^e = precio estimado por los productores

$O(p) = 1+p$, $D(p) = 2-p$. $p_n^e = \mu p_{n-1} + (1-\mu) p_{n-2}$ $\mu \in]0,1[$.

¿ Para qué valores de μ tiende a estabilizarse el precio ?

$$D(p_n) = 2 - p_n = O(p_n^e) = 1 + \mu p_{n-1} + (1-\mu) p_{n-2}$$

$\longrightarrow$ $\boxed{p_n + \mu p_{n-1} + (1-\mu) p_{n-2} = 1}$ Ec. lineal completa de 2° orden.

Claramente, $\{x_n\} = \{\frac{1}{2}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es solución particular.

Ahora resolvemos la ecuación homogénea $p_n + \mu p_{n-1} + (1-\mu) p_{n-2} = 0$

Tenemos $p(\lambda) = \lambda^2 + \mu\lambda + (1-\mu)$.

Las raíces de este polinomio nos proporcionan todas las soluciones :

$$\Sigma_h = \{ c_1 \Pi_{\lambda_1} + c_2 \Pi_{\lambda_2} \ / \ c_1, c_2 \in \mathbb{K} \} \text{ con } \lambda_i \text{ raíces.}$$

Para que todas las soluciones se estabilicen, necesitamos $|\lambda_i| < 1$ con $i = 1,2$.

Así :

$$y_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n + \frac{1}{2} \longrightarrow \frac{1}{2} \text{ estabilización}$$

Usaremos que :

$$|\lambda_i| < 1 \quad i = 1,2 \iff \begin{cases} p(-1) > 0 \\ p(1) > 0 \\ p(0) < 1 \end{cases}$$

Entonces :

$$p(+1) = 1 + \mu + 1 - \mu = 2 > 0$$
$$p(-1) = 1 - \mu + 1 - \mu = 2 - 2\mu > 0 \Rightarrow \boxed{\mu < 1}$$
$$p(0) = 1 - \mu > 1 \Rightarrow \boxed{0 < \mu}$$

Todos los valores de $\mu \in]0,1[$ son válidos y el sistema se estabiliza.

Escaneado con CamScanner

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

④ Dar que las suc. $X = \{1, 3, 9 \dots\}$, $Y = \{0, 1, 6, 27 \dots\}$, $Z = \{1, 2, 4, 8, \dots\}$
$W = \{0, 1, 4, 12, 32 \dots\}$ son linealmente independientes en el espacio de suc. reales S.

Sea la ec. en diferencias correspondiente al $p(\lambda) = (\lambda - 2)^2 (\lambda - 3)^2$.
No es necesaria la ec. explícita.
Sabemos que la base del espacio de soluciones $\Sigma_{\mathbb{R}}$ asociado a esa ecuación es:

$$\Sigma_{\mathbb{R}} = \{ c_1 \Pi_2 + c_2 D\Pi_2 + c_3 \Pi_3 + c_4 D\Pi_3 \ / \ c_i \in \mathbb{R} \}$$
$$= \{ c_1 X + c_2 Y + c_3 Z + c_4 W \ / \ c_i \in \mathbb{R} \}$$

$\{X, Y, Z, W\}$ son base y por lo tanto linealmente independientes.

⑤ Sea $f(t) = \cos(e^t) + \cos(4e^t)$ ¿Alcanza el máximo absoluto?
¿Es periódica? Dar su periodo si procede

a) $f(t) = 2 \iff e^t = 2\pi k$ y $4e^t = 2\pi k' \iff e^t = 2\pi k$ y $e^t = \frac{\pi}{2} k'$
Si $k' = 4k$ con $k \in \mathbb{Z}$, tenemos infinitas soluciones y por lo tanto f alcanza el máximo.

b) $\lim_{t \to -\infty} f(t) = 2 \Rightarrow f$ no puede ser periódica

Una función periódica no tiene límite en $\pm\infty$.

Escaneado con CamScanner

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.