

Ejercicio 12

Probar que la ecuación $\tan(x) = x$ tiene infinitas soluciones

Para un $k \in \mathbb{Z}$, sea $f: \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi \right) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \tan(x) - x$$

f es una función continua definida en un intervalo. Como

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + k\pi^+} f(x) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi^-} f(x) = +\infty$$

Dado que f cambia de signo sabemos que f se anula al menos una vez en cada uno de los intervalos. Por tanto, $\tan(x) = x$ tiene infinitas soluciones.