5.

$A = \pi l r$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Despejamos el lado en función del radio

$$\begin{cases} V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \rightarrow h = \frac{3V}{\pi r^2} \\ h^2 + r^2 = l^2 \end{cases} \left(\frac{3V}{\pi r^2}\right)^2 + r^2 = l^2 \rightarrow l = \sqrt{r^2 + \frac{9V^2}{\pi^2 r^4}}$$

Creamos una función para la cantidad de lona necesaria a la que le buscaremos el mínimo

$$A(r) = \pi \cdot l \cdot r = \pi r \cdot \sqrt{r^2 + \frac{9V^2}{\pi^2 r^4}} = \sqrt{\pi^2 r^4 + \frac{9V^2}{r^2}}$$

Como la función $\sqrt{x}$ es creciente podemos construir la función auxiliar $A_{aux}(r) = \pi^2 r^4 + \frac{9V^2}{r^2}$ que tendrá el mismo mínimo que $A(r)$

La función $A_{aux}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y derivable en $\mathbb{R}^+$ así que calculamos su derivada

$$A'_{aux}(r) = 4\pi^2 r^3 - \frac{18V^2}{r^3}$$

Buscamos los extremos relativos

$$A'_{aux}(r) = 0 \rightarrow 4\pi^2 r^3 - \frac{18V^2}{r^3} = 0$$

$$4\pi^2 r^6 = 18V^2$$

$$r_0 = \sqrt[6]{\frac{9V^2}{2\pi^2}}$$

Comprobamos que para ese valor de r_0 se trata de un mínimo calculando la segunda derivada

$$A''_{aux}(r) = 12\pi^2 r^2 + \frac{54V^2}{r^4} \rightarrow A''_{aux}(r_0) > 0 \rightarrow \text{mínimo en } r = r_0 = +\sqrt[6]{\frac{9V^2}{2\pi^2}}$$