Análisis Matemático II

Tema 6: Integración de funciones positivas

Integral de una función simple positiva

Definición de la integral

Sea $s : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_0^+$ una función simple positiva,

y consideremos su descomposición canónica:

$$s = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \, \chi_{A_k} \quad \text{con} \quad p \in \mathbb{N}, \;\; \alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}_0^+, \;\; A_1, \ldots, A_p \in \mathcal{M}$$

Para $E \in \mathcal{M}$, se define la integral de s sobre E mediante la igualdad:

$$\int_E s = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \; \lambda(E \cap A_k)$$

Propiedades que después generalizaremos

Homegeneidad

Si s es una función simple positiva y $\rho \in \mathbb{R}_0^+$, entonces:

$$\int_E \rho s = \rho \int_E s \quad \forall E \in \mathcal{M}$$

Aditividad

Si s es una función simple positiva y definimos:

$$\varphi : \mathcal{M} \to [0, \infty], \qquad \varphi(E) = \int_E s \quad \forall E \in \mathcal{M}$$

entonces $\varphi(\emptyset) = 0$ y φ es σ-aditiva, luego es una medida

Crecimiento

Si s, t son funciones simples positivas y $E \in \mathcal{M}$, entonces:

$$s(x) \leqslant t(x) \ \ \forall x \in E \quad \Longrightarrow \quad \int_E s \leqslant \int_E t$$

Definición de la integral de una función medible positiva

Notación

Denotaremos por $\mathcal{S}^+$ al conjunto de todas las funciones simples positivas

En todo lo que sigue, fijamos un conjunto medible $\Omega \subset \mathbb{R}^N$

Integral de una función medible positiva

Para $t \in \mathcal{S}^+$ y $E \in \mathcal{M}$ se tiene

$$\int_E t = \max \left\{ \int_E s \ : \ s \in \mathcal{S}^+, \ \ s(x) \leqslant t(x) \ \ \forall x \in E \right\}$$

lo que hace coherente la siguiente definición:

Si $f : \Omega \to [0, \infty]$ es una función medible positiva y $E \in \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(\Omega)$

se define la integral de f sobre E mediante la igualdad:

$$\int_E f = \sup \left\{ \int_E s \ : \ s \in \mathcal{S}^+, \ \ s(x) \leqslant f(x) \ \ \forall x \in E \right\}$$

Primeras propiedades de la integral

Crecimiento

Si f y g son funciones medibles positivas y $E \in \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(\Omega)$, se tiene:

$$f(x) \leqslant g(x) \quad \forall x \in E \qquad \Longrightarrow \qquad \int_E f \leqslant \int_E g$$

Homogeneidad

Si f es una función medible positiva, se tiene:

$$\int_E \rho f = \rho \int_E f \qquad \forall \rho \in \mathbb{R}_0^+, \quad \forall E \in \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(\Omega)$$

Localización

Si f es una función medible positiva, se tiene:

$$\int_E f = \int_\Omega \chi_E f \qquad \forall E \in \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(\Omega)$$

El primer teorema de convergencia

Teorema de la convergencia monótona

Sea $\{f_n\}$ una sucesión creciente de funciones medibles positivas,

y sea $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ para todo $x \in \Omega$. Entonces:

$$\int_\Omega f = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n$$

Las dos principales corolarios del teorema de la convergencia monótona

Integral de la suma de una serie

Para cualquier sucesión $\{f_n\}$ de funciones medibles positivas, se tiene:

$$\int_\Omega \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega f_n$$

Aditividad

Si f es una función medible positiva, definiendo

$$\varphi(E) = \int_E f \qquad \forall\, E \in \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(\Omega)$$

se obtiene una función $\varphi : \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(\Omega) \to [0, \infty]$,

que es σ-aditiva con $\varphi(\emptyset) = 0$, luego es una medida en Ω

Valores extremos de la integral

Integrales nulas

Si f es una función medible positiva y $E \in \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(\Omega)$, entonces:

$$\int_E f = 0 \iff \lambda\Big(\{x \in E, : f(x) > 0\}\Big) = 0$$

En particular, si $\lambda(E) = 0$, se tiene: $\displaystyle\int_E f = 0$

Integrales finitas

Si f es una función medible positiva y $E \in \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(\Omega)$

verifican que $\displaystyle\int_E f < \infty$, entonces:

$$\lambda\Big(\{x \in E : f(x) = \infty\}\Big) = 0$$

Propiedades que se verifican casi por doquier (I)

Casi por doquier en Ω

Si $P(x)$ es una condición que un punto $x \in \Omega$ puede cumplir o no,

decimos que se verifica $P(x)$ para casi todo $x \in \Omega$,

abreviado p.c.t. $x \in \Omega$,

cuando los puntos $x \in \Omega$ que no verifican $P(x)$

forman un conjunto de medida nula

Si no es necesario aludir a un punto genérico $x \in \Omega$,

decimos que la condición P se verifica casi por doquier (abreviado c.p.d.)

Ejemplos que ya han aparecido

Si f es una función medible positiva, se tiene:

- $\displaystyle\int_\Omega f = 0 \iff f(x) = 0$ p.c.t. $x \in \Omega \iff f = 0$ c.p.d.
- $\displaystyle\int_\Omega f < \infty \implies f(x) < \infty$ p.c.t. $x \in \Omega \iff f < \infty$ c.p.d.

Propiedades que se verifican casi por doquier (II)

Casi por doquier en un subconjunto de Ω

Dado un conjunto medible $E \subset \Omega$

decimos que se verifica $P(x)$ para casi todo $x \in E$,

abreviado p.c.t. $x \in E$,

cuando los puntos $x \in E$ que no verifican $P(x)$

forman un conjunto de medida nula

Si no es necesario aludir a un punto genérico $x \in E$, decimos que

la condición P se verifica casi por doquier en E (abreviado c.p.d. en E)

Ejemplos que ya han aparecido

Si f es una función medible positiva, y $E \in \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(\Omega)$, se tiene:

- $\displaystyle\int_E f = 0 \iff f(x) = 0$ p.c.t. $x \in E \iff f = 0$ c.p.d. en E
- $\displaystyle\int_E f < \infty \implies f(x) < \infty$ p.c.t. $x \in E \iff f < \infty$ c.p.d. en E

Información adicional sobre el teorema de la convergencia monótona

No hay un análogo para sucesiones decrecientes

En el caso $\Omega = \mathbb{R}$, y para cada $n \in \mathbb{N}$,

sea χ_n la función característica de la semirrecta $[n, +\infty[$

Es claro que $\{\chi_n\} \searrow 0$ pero $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \chi_n = \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Lema de Fatou

Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones medibles positivas, se tiene:

$$\int_{\Omega} \liminf_{n\to\infty} f_n \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_{\Omega} f_n$$