Tema 16

4.38 Definición (Límite de una función en un punto). Se dice que f tiene límite en el punto a si existe un número $L \in \mathbb{R}$ tal que se verifica lo siguiente:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : \quad \left. \begin{array}{c} 0 < |x-a| < \delta \\ x \in I \end{array} \right\} \Longrightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Dicho número se llama **límite de** f **en** a y escribimos $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

Observa que la existencia del límite es independiente de que f esté o no definida en a y, en caso de estarlo, del valor que f pueda tener en a. También debe advertirse que en la definición de la *igualdad* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, sólo intervienen *desigualdades*.

4.44 Proposición. *Sea* f *una función y sean* $a, L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. *Equivalen las afirmaciones:*

i) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

ii) Para toda sucesión $\{x_n\}$ *de puntos en el dominio de definición de* f*, tal que* $x_n \neq a$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y* $\{x_n\} \to L$*, se verifica que* $\{f(x_n)\} \to L$.

4.52 Definición (Clasificación de las discontinuidades). Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo y sea $a \in I$.

- Si f tiene límite en a y $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$, se dice que f tiene en el punto a una **discontinuidad evitable**.
- Si los dos límites laterales de f en a existen y son distintos:

  $$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$$

  se dice que f tiene en el punto a una **discontinuidad de salto**.
- Si alguno de los límites laterales no existe se dice que f tiene en el punto a una **discontinuidad esencial**.

4.53 Teorema (Límites de una función monótona). *Sea* f *una función creciente definida en un intervalo* I.

i) Para todo punto $a \in I$ *que no sea un extremo de* I *se verifica que:*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \sup\{f(x) : x \in I, x < a\}, \qquad \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \inf\{f(x) : x \in I, x > a\}$$

ii) Si $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ *es el extremo izquierdo de* I*, entonces:*

a) Si f *está minorada en* I *es* $\lim_{x\to a} f(x) = \inf\{f(x) : x \in I \setminus \{a\}\}$.

b) Si f *no está minorada en* I *es* $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.

iii) Si $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *es el extremo derecho de* I*, entonces:*

a) Si f *está mayorada en* I *es* $\lim_{x\to a} f(x) = \sup\{f(x) : x \in I \setminus \{a\}\}$.

b) Si f *no está mayorada en* I *es* $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$.

Demostración. Supongamos que $a \in I$ no es el extremo izquierdo de I, es decir que el conjunto $\{x \in I : x < a\}$ no es vacío. Entonces, el conjunto $B = \{f(x) : x \in I, x < a\}$ tampoco es vacío y, por ser f creciente, el número $f(a)$ es un mayorante de B. Sea $\alpha = \sup\{f(x) : x \in I, x < a\}$. Dado $\varepsilon > 0$, el número $\alpha - \varepsilon$ no puede ser mayorante de B, es decir, tiene que haber algún punto $x_0 \in I$, $x_0 < a$ tal que $\alpha - \varepsilon < f(x_0)$. Sea $\delta = a - x_0 > 0$. Entonces para $a - \delta < x < a$, esto es, para $x_0 < x < a$, se verifica que $\alpha - \varepsilon < f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant \alpha$, lo que claramente implica que $\alpha - \varepsilon < f(x) < \alpha + \varepsilon$, es decir, $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$. Hemos probado así que $\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \sup\{f(x) : x \in I, x < a\}$.

Los demás casos se prueban de forma muy parecida y quedan como ejercicios. Igualmente, queda como ejercicio considerar el caso en que la función es decreciente. □

4.54 Teorema (Discontinuidades de las funciones monótonas). *Sea* f *una función monótona en un intervalo. Entonces:*

i) En los puntos del intervalo que no son extremos del mismo, f *solamente puede tener discontinuidades de salto.*

ii) Si el intervalo tiene máximo o mínimo, f *puede tener en dichos puntos discontinuidades evitables.*

iii) El conjunto de las discontinuidades de f *es numerable.*