Relación de Ejercicios 1

1) Estudiar el comportamiento en $+\infty$ de la función $f: A \to \mathbb{R}$, en cada uno de los siguientes casos:

a) $A = \mathbb{R}^+$, $f(x) = (a^x + x)^{\frac{1}{x}}$, $a \in \mathbb{R}^+$

b) $A =]1, +\infty[$, $f(x) = \dfrac{x(x^{\frac{1}{x}} - 1)}{\ln x}$

a) $f(x) = (a^x + x)^{\frac{1}{x}}$

Para estudiar el comportamiento en $+\infty$ de $f(x)$ vas a estudiar el límite cuando x tiende a $+\infty$ de $f(x)$:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (a^x + x)^{\frac{1}{x}}$$

Si sustituimos por $+\infty$ nos queda: $(a^\infty + \infty)^{\frac{1}{\infty}} = \infty^0 \Rightarrow$ Indeterminación.

Resolvemos la indeterminación.

Para ello, vamos a expresar $f(x)$ de una forma equivalente:

$$f(x) = (a^x + x)^{\frac{1}{x}} = e^{\ln (a^x + x)^{\frac{1}{x}}}$$

A continuación tomamos límites:

$$\lim_{x\to\infty} e^{\ln(a^x+x)^{\frac{1}{x}}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Propiedades del límite}}}{=} e^{\lim_{x\to\infty} \ln(a^x+x)^{\frac{1}{x}}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Prop. del logaritmo}}}{=} e^{\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(a^x+x)}{x}}$$

Aplicamos a continuación un corolario de la 2ª Regla de l'Hôpital.

$$\Rightarrow e^{\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(a^x+x)}{x}} \text{"="} e^{\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\ln(a)a^x+1}{a^x+x}}{1}} = e^{\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(a)a^x+1}{a^x+x}}$$

$$\text{"="} e^{\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(a)^2 a^x}{\ln(a)a^x+1}} \text{"="} e^{\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(a)^3 \cancel{a^x}}{\ln(a)^2 \cancel{a^x}}} = e^{\ln(a)} = \boxed{a}.$$

Luego, $\lim_{x\to\infty} f(x) = a \quad \forall\, a \in \mathbb{R}^+$

b). $A =]1, +\infty[$, $f(x) = \dfrac{x(x^{\frac{1}{x}}-1)}{\ln x}$

En este caso, procedemos como en el ej. anterior a hallar el límite cuando $x \to +\infty$ de $f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x(x^{\frac{1}{x}}-1)}{\ln x} \underset{\uparrow}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{\ln x}{x}}$$

Divido Numerador y denominador por x para obtener $\frac{0}{0}$ y poder aplicar l'Hôpital

19 a) Caso en que $a < 1$

Retomamos en $\Rightarrow e^{\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(a^x + x)}{x}} \overset{\text{"}0\text{"}}{=} e^{\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{\ln(a)a^x + 1}{1}}{a^x + x}}$

Aplicamos 2ª R. L'Hôpital

$$= e^{\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(a)\, a^x + 1}{a^x + x}} =$$

Como $a < 1 \Rightarrow \ln(a) < 0$ y a^x, cuando $x \to +\infty$ es menor que 1; tiende a cero.

En definitiva, me queda $\Rightarrow e^{\frac{0+1}{0+\infty}} = e^{\frac{1}{\infty}} = e^0 = 1$

A continuación, aplico la Regla de L'Hôpital ya que estamos ante una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{\ln x}{x}} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$$

A continuación, derivo numerador y denominador y compruebo el límite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{1/x}-1}{\frac{\ln x}{x}} \text{"="} \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{1}{x}}\left(\cancel{\frac{1-\ln x}{x^2}}\right)}{\cancel{\frac{(1-\ln x)}{x^2}}} = \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \infty^0 \ \underline{\text{Indeterm}}$$

Derivo $x^{\frac{1}{x}}$: Sea $h(x) = x^{\frac{1}{x}}$

Tomo logaritmos $\Rightarrow$ $\ln h(x) = \ln x^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}\ln x$

Derivo ambos miembros $\Rightarrow$ $\frac{h'(x)}{h(x)} = -\frac{1}{x^2}\ln x + \frac{1}{x^2}$

$$h'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}\, x^{\frac{1}{x}}$$

$\Rightarrow$ Resolvemos ∞^0 $\Rightarrow$ $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln x}{x}}$

$$\text{"="}\ e^{\lim_{x\to\infty}\frac{1-\ln(x)}{x}} = e^0 = 1$$