Análisis Matemático I

Tema 11: Función inversa

1 Regla de diferenciación

2 Teorema local

3 Aplicaciones

4 Teorema global

Regla de derivación de la función inversa

Motivación: caso de funciones reales de variable real

$$\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}, \quad f : A \to \mathbb{R} \text{ inyectiva}, \quad B = f(A), \quad f^{-1} : B \to \mathbb{R}$$

Supongamos que f es derivable en un punto $a \in A \cap A'$ y sea $b = f(a)$.

entonces $b \in B'$ y las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- f^{-1} es derivable en el punto b
- f^{-1} es continua en b y $f'(a) \neq 0$

En caso de que ambas se cumplan, se tiene: $\left(f^{-1}\right)'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$

Observaciones para generalizar el resultado anterior

- En general necesitaremos que $b \in B^\circ$, habrá que suponerlo
- $f'(a) \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad Df(a)$ biyectiva
- $\left(f^{-1}\right)'(b) = \dfrac{1}{f'(a)} \quad \Longleftrightarrow \quad Df^{-1}(b) = Df(a)^{-1}$

Caso general

Homeomorfismo lineal

X, Y espacios normados, $T : X \to Y$ es un homeomorfismo lineal cuando:

$$T \in L(X,Y), \quad T \text{ es biyectiva y } T^{-1} \in L(Y,X)$$

Regla de diferenciación de la función inversa

X,Y normados, $\Omega = \Omega^\circ \subset X$, $f : \Omega \to Y$ inyectiva, $B = f(\Omega)$, $f^{-1} : B \to X$

Supongamos que f es diferenciable en $a \in \Omega$ y que $b = f(a) \in B^\circ$

Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- f^{-1} es diferenciable en el punto b
- f^{-1} es continua en b y $Df(a)$ es un homeomorfismo lineal

En caso de que ambas se cumplan, se tiene: $Df^{-1}(b) = Df(a)^{-1}$

Una consecuencia

X,Y espacios normados, $U = U^\circ \subset X$, $V = V^\circ \subset Y$, $f : U \to V$ biyectiva.

Si f es diferenciable en $a \in U$ y f^{-1} es diferenciable en $b = f(a)$, entonces X e Y son linealmente homeomorfos. $\dim(X) = N \in \mathbb{N} \Rightarrow \dim(Y) = N$

Motivación para el teorema de la función inversa

Versión global del teorema de la función inversa en $\mathbb{R}$

$I \subset \mathbb{R}$, I intervalo no trivial, $f : I \to \mathbb{R}$ derivable.

Supongamos que $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$. Entonces:

- f es inyectiva
- $f(I)$ es un intervalo
- f^{-1} es derivable en $f(I)$ con $\left(f^{-1}\right)'\big(f(x)\big) = 1/f'(x) \quad \forall x \in I$

Versión local del teorema de la función inversa en $\mathbb{R}$

$I \subset \mathbb{R}$, I intervalo no trivial, $f : I \to \mathbb{R}$ derivable, $a \in I$.

Supongamos que f' es continua en a y $f'(a) \neq 0$.

Entonces, existe $\delta > 0$ tal que, si $I_\delta = I \cap]a-\delta, a+\delta[$ y $\varphi = f\big|_{I_\delta}$, se tiene:

- f es inyectiva en I_δ
- $f(I_\delta)$ es un intervalo
- $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in I_\delta$
- φ^{-1} es derivable en $f(I_\delta)$ con $\left(\varphi^{-1}\right)'\big(f(x)\big) = 1/f'(x) \quad \forall x \in I_\delta$

Preparativos para el teorema de la función inversa en $\mathbb{R}^N$

Continuidad del determinante

$$T \in L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N), \quad A_T \text{ matriz de } T, \quad \det A_T \text{ determinante de } A_T$$

Sabemos que T es biyectiva si, y sólo si, $\det A_T \neq 0$

La aplicación $T \mapsto \det A_T$, de $L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ en $\mathbb{R}$, es continua

Determinante jacobiano

$$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{R}^N, \quad f : \Omega \to \mathbb{R}^N \text{ diferenciable en } a \in \Omega$$

$\det Jf(a)$ es el determinante jacobiano de f en a

Si $f \in D(\Omega, \mathbb{R}^N)$ y Df es continua en $a \in \Omega$, entonces:

la aplicación $x \mapsto \det Jf(x)$, de Ω en $\mathbb{R}$, es continua en a

Enunciado del teorema de la función inversa local en $\mathbb{R}^N$

Teorema de la función inversa (local)

$$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{R}^N, \quad f \in D(\Omega, \mathbb{R}^N), \quad a \in \Omega$$

Supongamos que Df es continua en a y $\det Jf(a) \neq 0$. Entonces:

Existe un abierto U, con $a \in U \subset \Omega$, tal que, si $\varphi = f\big|_U$, se tiene:

- f es inyectiva en U
- $V = f(U)$ es abierto
- $\det Jf(x) \neq 0 \quad \forall x \in U$
- $\varphi^{-1} \in D(V, \mathbb{R}^N)$ con $D\varphi^{-1}\big(f(x)\big) = Df(x)^{-1} \quad \forall x \in U$

Se dice que φ^{-1} es una inversa local de f en el punto a

Nótese que φ^{-1} está definida en V, que es un entorno de $f(a)$

Esquema de demostración. Caso particular: $a = f(a) = 0\,, \quad Df(0) = \mathrm{Id}$

Primera fase: uso de las hipótesis

- Las hipótesis sobre f se trasladan a la función $g = \mathrm{Id} - f$
- Se usa que Dg es continua en 0 con $Dg(0) = 0$
- Se usa que $x \mapsto \det Jf(x)$ es continua en 0 con $\det Jf(0) = 1$

Conclusión: existe un $r > 0$ con $B(0,3r) \subset \Omega$, tal que:

$$\|x\| < 3r \quad \Longrightarrow \quad \|Dg(x)\| \leqslant 1/2 \ \text{ y } \ \det Jf(x) \neq 0$$

Segunda fase: Desigualdad del valor medio

$$x, z \in B(0,3r) \quad \Longrightarrow \quad \|g(x) - g(z)\| \leqslant (1/2)\|x - z\| \quad \text{y} \quad \|g(x)\| \leqslant (1/2)\|x\|$$

Tercera fase: Teorema del punto fijo de Banach

Para cada $y_0 \in \overline{B}(0,r)$ existe un único $x_0 \in \overline{B}(0,2r)$ tal que $f(x_0) = y_0$

Si además $\|y_0\| < r$, entonces $\|x_0\| < 2r$

Cuarta fase: Fin del caso particular

$$U = B(0,2r) \cap f^{-1}\big(B(0,r)\big)$$

- Las tres primeras afirmaciones son fáciles
- Para la cuarta, se prueba que φ^{-1} es lipschitziana, luego continua

Fin de la demostración: caso general

Quinta fase: el caso general se deduce del caso particular ya resuelto

- $\Omega_0 = \{z \in \mathbb{R}^N : z + a \in \Omega\}$
- $f_0(z) = Df(a)^{-1}\big(f(z+a) - f(a)\big) \ \ \forall z \in \Omega_0$
- f_0 cumple las mismas hipótesis que f y está en el caso particular
- Existe un abierto U_0 que cumple lo pedido, para f_0
- $U = \{z + a : z \in U_0\}, \quad f(x) = Df(a)\big(f_0(x-a)\big) + f(a) \ \ \forall x \in \Omega$
- El abierto U cumple todo lo pedido en el teorema

Aplicaciones del teorema de la función inversa (I)

Coordenadas polares en el plano

$$\Omega = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \quad f(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta\,,\,\rho\operatorname{sen}\theta) \;\; \forall(\rho,\theta)\in\Omega$$

$$f(\Omega) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} = G, \quad \text{pero } f \text{ no es inyectiva}$$

$$\forall(x,y)\in G \;\; \exists\,(\rho,\theta)\in\Omega \;:\; x=\rho\cos\theta, \quad y=\rho\operatorname{sen}\theta$$

Todo $(x,y)\in G$ tiene coordenadas polares $(\rho,\theta)\in\Omega$, que no son únicas

$$f\in C^1(\Omega,\mathbb{R}^2) \;\text{ con }\; \det Jf(\rho,\theta)=\rho\neq 0 \;\; \forall(\rho,\theta)\in\Omega$$

f admite una inversa local en cada punto $(\rho,\theta)\in\Omega$, es decir,

En un entorno de cada punto de G,
se pueden definir de manera única las coordenadas polares,
como una función diferenciable de las coordenadas cartesianas

Si $g: G\to\mathbb{R}$ es un campo escalar, y $h=g\circ f$, entonces

h es diferenciable si, y sólo si, g es diferenciable

Aplicaciones del teorema de la función inversa (II)

Coordenadas cilíndricas

$$\Omega = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2,, \quad f(\rho,\theta,z) = (\rho\cos\theta\,,\,\rho\operatorname{sen}\theta\,,\,z) \ \ \forall(\rho,\theta,z)\in\Omega$$

$f(\Omega) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z)\,:\,z\in\mathbb{R}\} = G$, pero f no es inyectiva

$$\forall(x,y,z)\in G \ \ \exists\,(\rho,\theta,z)\in\Omega \ :\ x=\rho\cos\theta\,,\quad y=\rho\operatorname{sen}\theta$$

Todo $(x,y,z)\in G$ tiene coordenadas cilíndricas $(\rho,\theta,z)\in\Omega$, que no son únicas

$f\in C^1(\Omega,\mathbb{R}^3)$ con $\det Jf(\rho,\theta,z)=\rho\neq 0 \ \ \forall(\rho,\theta,z)\in\Omega$

f admite una inversa local en cada punto $(\rho,\theta,z)\in\Omega$, es decir,

En un entorno de cada punto de G,
se pueden definir de manera única las coordenadas cilíndricas,
como una función diferenciable de las coordenadas cartesianas

Si $g:G\to\mathbb{R}$ es un campo escalar, y $h=g\circ f$, entonces

h es diferenciable si, y sólo si, g es diferenciable

Aplicaciones del teorema de la función inversa (III)

Coordenadas esféricas

$$\Omega = \left\{ (r,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^3 \ : \ r \in \mathbb{R}^+ , \quad |\varphi| < \pi/2 \right\}$$

$$f(r,\theta,\varphi) = (r\cos\theta\cos\varphi\,,\, r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi\,,\, r\,\mathrm{sen}\,\varphi) \quad \forall\,(\rho,\theta,z) \in \Omega$$

$f(\Omega) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\} = G$, pero f no es inyectiva

$$\forall\,(x,y,z) \in G \ \ \exists\ (r,\theta,\varphi) \in \Omega \ : \ x = r\cos\theta\cos\varphi\,, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi\,, \quad z = r\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

Todo $(x,y,z) \in G$ tiene coordenadas esféricas $(r,\theta,\varphi) \in \Omega$, que no son únicas

$f \in C^1(\Omega,\mathbb{R}^3)$ con $\det Jf(r,\theta,\varphi) = r^2\cos\varphi \neq 0 \ \ \forall\,(r,\theta,\varphi) \in \Omega$

f admite una inversa local en cada punto $(r,\theta,\varphi) \in \Omega$, es decir,

En un entorno de cada punto de G,
se pueden definir de manera única las coordenadas esféricas,
como una función diferenciable de las coordenadas cartesianas

Si $g : G \to \mathbb{R}$ es un campo escalar, y $h = g \circ f$, entonces

h es diferenciable si, y sólo si, g es diferenciable

Teorema global

Teorema de la función inversa global

$$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{R}^N, \quad f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$$

Supongamos que f es inyectiva y que $\det Jf(x) \neq 0 \ \ \forall x \in \Omega$. Entonces

- $W = f(\Omega)$ es abierto
- f^{-1} es diferenciable con $Df^{-1}\big(f(x)\big) = Df(x)^{-1} \ \ \forall x \in \Omega$

De hecho, $f^{-1} \in C^1(W, \mathbb{R}^N)$

Observación para probarlo

$$\mathcal{G} = \{T \in L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) : T \text{ biyectiva}\}$$

La aplicación $T \mapsto T^{-1}$, de $\mathcal{G}$ en $\mathcal{G}$, es continua