Ejemplo de cálculo de Campo Eléctrico con distribuciones discretas de carga

Isabel M. Tienda Luna

En este documento analizaremos cómo solucionar ejercicios de campo eléctrico donde aparecen cargas puntuales.

1. Enunciado del ejercicio

En el punto (1,2) hay una carga Q_1 de $10\mu C$ y en el punto (3,4) hay una carga Q_2 de $2\mu C$. Calcula:

1. La fuerza que la primera carga ejerce sobre la segunda, $\vec{F}_{12}$.
2. La fuerza que la segunda carga ejerce sobre la primera, $\vec{F}_{21}$.
3. El campo que la primera carga crea en el punto donde está la segunda carga, $\vec{E}_1$.
4. El campo que la segunda carga crea en el punto donde está la primera carga, $\vec{E}_2$.
5. El campo en el punto A situado en las coordenadas (5,2).
6. El potencial en el punto A situado en las coordenadas (5,2).
7. El potencial en el punto B situado en las coordenadas (4,2).
8. El trabajo necesario para llevar una carga Q_3 de $8\mu C$ desde A hasta B. Razone si es un trabajo realizado por el campo o en contra del campo.

2. Calcular la fuerza que la primera carga ejerce sobre la segunda, $\vec{F}_{12}$

Para realizar este cálculo en primer lugar hay que conocer la expresión para la fuerza que tenemos que utilizar. Al ser las dos cargas que aparecen en el problema cargas puntuales, para calcular la fuerza hay que utilizar la ley de Coulomb

$$\vec{F}_{12} = K\frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2}\hat{e}_{r_{12}} \tag{1}$$

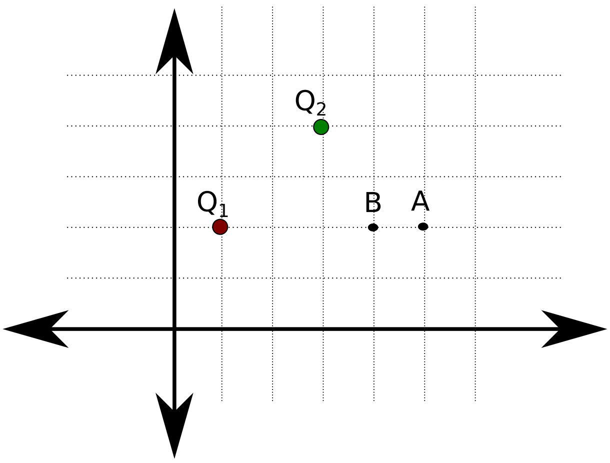

Figura 1: Esquema del problema.

donde K es una constante, r_{12} es el módulo del vector que va desde la carga Q_1 hasta la carga Q_2 y $\hat{e}_{r_{12}}$ es el vector unitario que marca la dirección y sentido del vector $\vec{r}_{12}$. Este vector se calcula (ver figura 2) desplazandose desde el punto donde está la carga que crea el campo hasta el punto donde está la carga sobre la que actúa el campo.

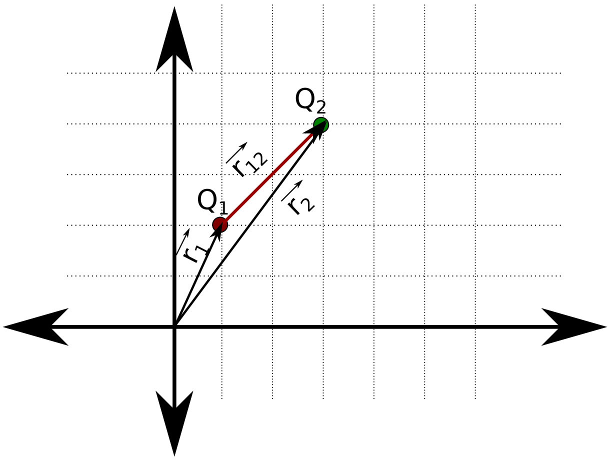

Figura 2: Esquema del problema para el cálculo de $\vec{F}_{12}$.

En la expresión 1 conocemos los valores de K, Q_1 y Q_2 de manera que hay que calcular dos magnitudes, r_{12} y $\hat{e}_{r_{12}}$.

2.1. Cálculo de r_{12}

Como r_{12} es el módulo del vector $\vec{r}_{12}$, hay que comenzar calculando precisamente ese vector. Como hemos visto en clase este vector va desde la carga que crea el campo (Q_1) hasta el punto donde está la carga sobre la que actúa el campo (Q_2):

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath})m - (\hat{\imath} + 2\hat{\jmath})m = (2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath})m \tag{2}$$

Una vez calculado el vector (ver ecuación 2), el módulo se puede expresar como:

$$r_{12} = \sqrt{(2)^2 + (2)^2} = \sqrt{8}m \tag{3}$$

Las unidades de todas las magnitudes anteriores son metros.

2.2. Cálculo de $\hat{e}_{r_{12}}$

El vector $\hat{e}_{r_{12}}$ es un vector unitario que marca la dirección y sentido del vector $\vec{r}_{12}$. Según la definición de vector unitario, este puede calcularse sin más que dividir el vector $\vec{r}_{12}$ por su módulo (r_{12}):

$$\hat{e}_{r_{12}} = \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} = \frac{(2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath})m}{\sqrt{8}m} = \frac{2}{\sqrt{8}}\hat{\imath} + \frac{2}{\sqrt{8}}\hat{\jmath} \tag{4}$$

Como puede verse en la ecuación 4, $\hat{e}_{r_{12}}$ no tiene unidades. Es adimensional.

2.3. Cálculo del valor de $\vec{F}_{12}$

En este punto, ya conocemos los valores de todas las variables presentes en la ecuación 1. Por tanto, sólo queda sustituir:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{12} &= 9\,10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \frac{10\,10^{-6}C 2\,10^{-6}C}{(\sqrt{8}m)^2} \left(\frac{2}{\sqrt{8}}\hat{\imath} + \frac{2}{\sqrt{8}}\hat{\jmath} \right) \\ &= 45\,10^{-3} \left(\frac{1}{\sqrt{8}}\hat{\imath} + \frac{1}{\sqrt{8}}\hat{\jmath} \right) N \end{aligned} \tag{5}$$

3. Calcular la fuerza que la segunda carga ejerce sobre la primera, $\vec{F}_{21}$

Para realizar este cálculo en primer lugar hay que conocer la expresión para la fuerza que tenemos que utilizar. Al ser las dos cargas que aparecen en el problema cargas puntuales, para calcular la fuerza hay que utilizar la ley de Coulomb

$$\vec{F}_{21} = K\frac{Q_1 Q_2}{r_{21}^2}\hat{e}_{r_{21}} \tag{6}$$

donde K es una constante, r_{21} es el módulo del vector que va desde la carga Q_2 hasta la carga Q_1 y $\hat{e}_{r_{21}}$ es el vector unitario que marca la dirección y sentido del vector $\vec{r}_{21}$ (ver figura 3). Según la figura 3, este vector va desde la carga que crea el campo hasta la carga sobre la que actúa el campo.

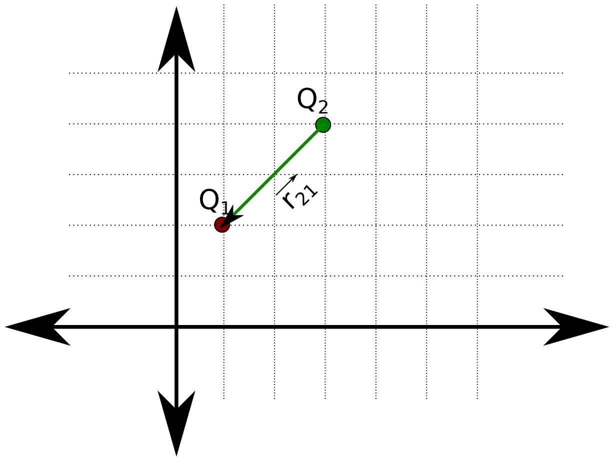

Figura 3: Esquema del problema para el cálculo de $\vec{F}_{21}$.

En la expresión 1 conocemos los valores de K, Q_1 y Q_2 de manera que hay que calcular dos magnitudes, r_{21} y $\hat{e}_{r_{21}}$.

3.1. Cálculo de r_{21}

Como r_{21} es el módulo del vector $\vec{r}_{21}$, hay que comenzar calculando precisamente ese vector:

$$\vec{r}_{21} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = (\hat{\imath} + 2\hat{\jmath})m - (3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath})m = (-2\hat{\imath} - 2\hat{\jmath})m \tag{7}$$

Una vez calculado el vector (ver ecuación 7), el módulo se puede expresar como:

$$r_{21} = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}m \tag{8}$$

Las unidades de todas las magnitudes anteriores son metros.

3.2. Cálculo de $\hat{e}_{r_{21}}$

El vector $\hat{e}_{r_{21}}$ es un vector unitario que marca la dirección y sentido del vector $\vec{r}_{21}$. Según la definición de vector unitario, este puede calcularse sin más que dividir el vector $\vec{r}_{21}$ por su módulo (r_{21}):

$$\hat{e}_{r_{21}} = \frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}} = \frac{(-2\hat{\imath} - 2\hat{\jmath})m}{\sqrt{8}m} = -\frac{2}{\sqrt{8}}\hat{\imath} - \frac{2}{\sqrt{8}}\hat{\jmath} \tag{9}$$

Como puede verse en la ecuación 9, $\hat{e}_{r_{21}}$ no tiene unidades. Es adimensional.

3.3. Cálculo del valor de $\vec{F}_{21}$

En este punto, ya conocemos los valores de todas las variables presentes en la ecuación 6. Por tanto, sólo queda sustituir:

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{21} &= 9\,10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \frac{10\,10^{-6}C 2\,10^{-6}C}{(\sqrt{8}m)^2} \left(-\frac{2}{\sqrt{8}}\hat{\imath} - \frac{2}{\sqrt{8}}\hat{\jmath} \right) \qquad (10) \\
&= 45\,10^{-3} \left(-\frac{1}{\sqrt{8}}\hat{\imath} - \frac{1}{\sqrt{8}}\hat{\jmath} \right) N
\end{aligned}$$

Como puede verse, $\vec{F}_{21}$ y $\vec{F}_{12}$ tienen el mismo módulo, misma dirección pero sentidos opuestos.

4. Calcula el campo que la primera carga crea en el punto donde está la segunda carga, $\vec{E}_1$.

Como ya se ha calculado $\vec{F}_{12}$, tenemos dos formas de realizar el cálculo de $\vec{E}_1$. En este apartado se realizará sólo una de ellas y se dejará como ejercicio de autoevaluación para el alumno el cálculo utilizando la otra forma alternativa.

4.1. Método 1

En esta forma de resolver este apartado usamos que hemos calculado en el apartado anteior $\vec{F}_{12}$. La relación que existe entre el campo que crea un carga en un punto (en este caso en el punto en el que se encuentra Q_2) y la fuerza que experimenta una carga (en este caso Q_2) que se encuentra en ese punto es:

$$\vec{F}_{12} = \vec{E}_1 Q_2 \qquad (11)$$

De la ecuación anterior puede despejarse $\vec{E}_1$ quedando:

$$\vec{E}_1 = \frac{\vec{F}_{12}}{Q_2} = \frac{45\,10^{-3}\left(\frac{1}{\sqrt{8}}\hat{\imath} + \frac{1}{\sqrt{8}}\hat{\jmath}\right) N}{2\,10^{-6}C} = 22{,}5\,10^3 \left(\frac{1}{\sqrt{8}}\hat{\imath} + \frac{1}{\sqrt{8}}\hat{\jmath} \right) N/C \qquad (12)$$

4.2. Método 2

La otra alternativa de cálculo del vector $\vec{E}_1$ consiste en utilizar su definición:

$$\vec{E}_1 = K \frac{Q_1}{r_{12}^2} \hat{e}_{12} \qquad (13)$$

Se deja como ejercicio comprobar que el resultado obtenido al aplicar la ecuación 13 es el mismo que el que se obtiene en la ecuación 12.

5. Calcula el campo que la primera carga crea en el punto donde está la segunda carga, $\vec{E}_2$.

Como ya se ha calculado $\vec{F}_{21}$, tenemos dos formas de realizar el cálculo de $\vec{E}_2$. En este apartado se realizará sólo una de ellas y se dejará como ejercicio de autoevaluación para el alumno el cálculo utilizando la otra forma alternativa.

5.1. Método 1

En esta forma de resolver este apartado usamos que hemos calculado en el apartado anteior $\vec{F}_{21}$. La relación que existe entre el campo que crea un carga en un punto (en este caso en el punto en el que se encuentra Q_1) y la fuerza que experimenta una carga (en este caso Q_1) que se encuentra en ese punto es:

$$\vec{F}_{21} = \vec{E}_2 Q_1 \tag{14}$$

De la ecuación anterior puede despejarse $\vec{E}_1$ quedando:

$$\vec{E}_2 = \frac{\vec{F}_{21}}{Q_1} = \frac{45\,10^{-3}\left(-\frac{1}{\sqrt{8}}\hat{\imath} - \frac{1}{\sqrt{8}}\hat{\jmath}\right)N}{10\,10^{-6}C} = 4{,}5\,10^{3}\left(\frac{1}{-\sqrt{8}}\hat{\imath} - \frac{1}{\sqrt{8}}\hat{\jmath}\right)N/C \tag{15}$$

5.2. Método 2

La otra alternativa de cálculo del vector $\vec{E}_1$ consiste en utilizar su definición:

$$\vec{E}_2 = K\frac{Q_2}{r_{21}^2}\hat{e}_{21} \tag{16}$$

Se deja como ejercicio comprobar que el resultado obtenido al aplicar la ecuación 16 es el mismo que el que se obtiene en la ecuación 15.

6. Calcular el campo en el punto A situado en las coordenadas (5,2).

Para calcular el campo total en el punto A (ver figura 5) hay que calcular el campo que la carga Q_1 crea en el punto A así como el campo que la carga Q_2 crea en el punto A:

$$\vec{E}_1 = K\frac{Q_1}{r_{1A}^2}\hat{e}_{1A} \tag{17}$$

$$\vec{E}_2 = K\frac{Q_2}{r_{2A}^2}\hat{e}_{2A} \tag{18}$$

$$\vec{E}_{TOT_A} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \tag{19}$$

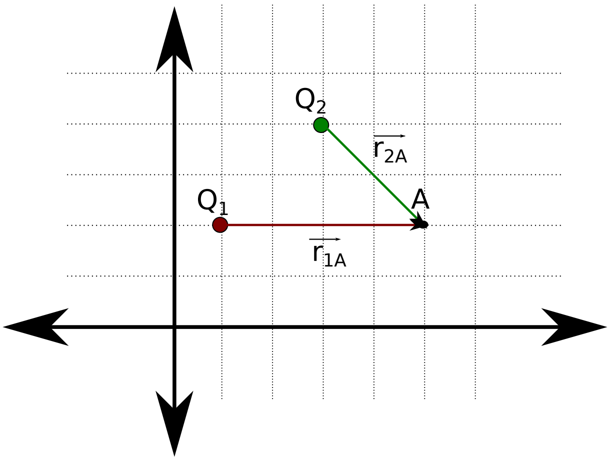

Figura 4: Esquema del problema para el cálculo del campo en el punto A.

La principal dificultad relacionada con los cálculos anteriores está en el cálculo de los vectores $\vec{r}_{1A}$ y $\vec{r}_{2A}$ así como de sus correspondientes vectores unitarios. Como este tipo de cálculos ya se ha hecho de forma detallada anteriormente en este documento, a continuación simplmente se presentan los resultados de los vectores para que el alumno compruebe si ha hecho este cálculo adecuadamente:

$$\vec{r}_{1A} = \vec{r}_A - \vec{r}_1 = (5\hat{\imath} + 2\hat{\jmath})m - (\hat{\imath} + 2\hat{\jmath})m = 4\hat{\imath}m \quad (20)$$

$$\vec{r}_{2A} = \vec{r}_A - \vec{r}_2 = (5\hat{\imath} + 2\hat{\jmath})m - (3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath})m = (2\hat{\imath} - 2\hat{\jmath})m \quad (21)$$

$$\hat{e}_{1A} = \hat{\imath} \quad (22)$$

$$\hat{e}_{2A} = \frac{2}{\sqrt{8}}\hat{\imath} - \frac{2}{\sqrt{8}}\hat{\jmath} \quad (23)$$

7. Calcula el potencial en el punto A situado en las coordenadas (5,2).

Para calcular el potencial en el punto A hay que tener en cuenta de nuevo que ese potencial se debe tanto a la carga Q_1 (V_{1A}) como a la carga Q_2 (V_{2A}). Por tanto, el potencial total se calculará como la suma de V_{1A} y V_{2A}

7.1. Cálculo de V_{1A}

Para calcular V_{1A} utilizamos la expresión vista en clase:

$$V_{1A} = K\frac{Q_1}{r_{1A}} = 9\ 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \frac{10\ 10^{-6}C}{4m} = \frac{9\ 10^4}{4}\frac{Nm}{C} = \frac{9\ 10^4}{4}V \quad (24)$$

7.2. Cálculo de V_{2A}

Para calcular V_{2A} utilizamos la expresión vista en clase:

$$V_{2A} = K\frac{Q_2}{r_{2A}} = 9\ 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}\frac{2\ 10^{-6}C}{\sqrt{8}m} = \frac{1{,}8\ 10^4}{\sqrt{8}}\frac{Nm}{C} = \frac{1{,}8\ 10^4}{\sqrt{8}}V \tag{25}$$

7.3. Cálculo del potencial total

Para calcular el potencial total en el punto A debido a la presencia de las cargas Q_1 y Q_2, se suman los potenciales V_{1A} y V_{2A}.

$$V_A = V_{1A} + V_{2A} = \left(\frac{9}{4} + \frac{1{,}8}{\sqrt{8}}\right) 10^4 V \tag{26}$$

8. Calcula el potencial en el punto B situado en las coordenadas (4,2).

Para calcular el potencial en el punto A hay que tener en cuenta de nuevo que ese potencial se debe tanto a la carga Q_1 (V_{1B}) como a la carga Q_2 (V_{2B}). Por tanto, el potencial total se calculará como la suma de V_{1B} y V_{2B}. Para ello, las variables que hay que calcular son r_{1B} y r_{2B} (ver figura).

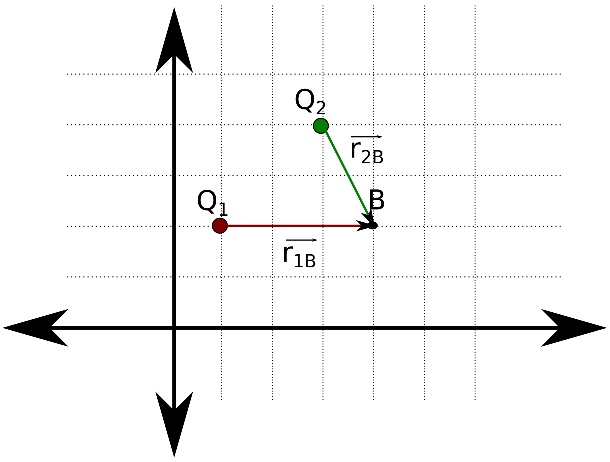

Figura 5: Esquema del problema para el cálculo del potencial en el punto B.

8.1. Cálculo de V_{1B}

Para calcular V_{1B} utilizamos la expresión vista en clase:

$$V_{1B} = K\frac{Q_1}{r_{1B}} = 9\ 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}\frac{10\ 10^{-6}C}{4m} = \frac{9\ 10^4}{3}\frac{Nm}{C} = 3\ 10^4 V \tag{27}$$

8.2. Cálculo de V_{2B}

Para calcular V_{2B} utilizamos la expresión vista en clase:

$$V_{2B} = K\frac{Q_2}{r_{2A}} = 9\ 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}\frac{2\ 10^{-6}C}{\sqrt{5}m} = \frac{1{,}8\ 10^4}{\sqrt{5}}\frac{Nm}{C} = \frac{1{,}8\ 10^4}{\sqrt{5}}V \tag{28}$$

8.3. Cálculo del potencial total

Para calcular el potencial total en el punto B debido a la presencia de las cargas Q_1 y Q_2, se suman los potenciales V_{1B} y V_{2B}.

$$V_B = V_{1B} + V_{2B} = \left(3 + \frac{1{,}8}{\sqrt{5}}\right) 10^4 V \tag{29}$$

9. Calcula el trabajo necesario para llevar una carga Q_3 de $8\mu C$ desde A hasta B. Razone si es un trabajo realizado por el campo o en contra del campo.

Como hemos visto en clase, el trabajo se relaciona con la energía potencial de la siguiente manera:

$$W_{A\rightarrow B} = -\Delta Ep = -\left(Ep_B - Ep_A\right) = Ep_A - Ep_B \tag{30}$$

donde cada una de las energías potenciales que aparecen en la ecuación anterior están relacionadas con el potencial de la siguiente forma:

$$Ep_A = Q_3 V_A = Q_3\left(V_{1A} + V_{2A}\right) \tag{31}$$

$$Ep_B = Q_3 V_B = Q_3\left(V_{1B} + V_{2B}\right) \tag{32}$$

Por tanto

$$W_{A\rightarrow B} = \left(Q_3\left(V_{1A} + V_{2A}\right)\right) - \left(Q_3\left(V_{1B} + V_{2B}\right)\right) = Q_3\left(V_{1A} + V_{2A} - V_{1B} - V_{2B}\right) \tag{33}$$

si ahora sustituimos los valores numéricos, el resultado es:

$$W_{A\rightarrow B} = 8\ 10^{-6}C\left(\left(\frac{9}{4} + \frac{1{,}8}{\sqrt{8}}\right) 10^4 V - \left(3 + \frac{1{,}8}{\sqrt{5}}\right) 10^4 V\right) \tag{34}$$

Finalmente, se deja al alumno realizar los cálculos anteriores con la calculadora. Con el signo del trabajo calculado según la ecuación 34, podremos determinar si este trabajo es realizado por el campo o en contra del campo.