Análisis Matemático II

Tema 2: Series de funciones

Series de funciones

Concepto de serie de funciones

$A \neq \emptyset$, $\{f_n\}$ sucesión de funciones de A en $\mathbb{R}$

Consideramos la sucesión de funciones $\{S_n\}$ dada por

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{es decir,} \quad S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \quad \forall x \in A, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Entonces $\{S_n\}$ es una serie de funciones, que se denota por $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n$.

La sucesión $\{f_n\}$ es el término general de la serie $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n$

Para $n \in \mathbb{N}$, se dice que S_n es la n-ésima suma parcial de la serie $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n$

Toda sucesión de funciones $\{g_n\}$ se puede expresar como serie:

$$\{g_n\} = \sum_{n \geqslant 1} (g_n - g_{n-1}) \quad \text{donde} \quad g_0 = 0$$

Convergencia puntual de una serie de funciones

Convergencia puntual y suma de la serie

$$\emptyset \neq C \subset A, \qquad \sum_{n\geqslant 1} f_n \text{ serie de funciones de } A \text{ en } \mathbb{R}$$

La serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge en un punto $x \in A$ cuando

la serie de números reales $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ es convergente

Por tanto $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge puntualmente en C cuando

la serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge, para todo $x \in C$

Entonces, la suma de la serie en C es la función $f : C \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad \forall x \in C$$

Convergencia uniforme de una serie de funciones

Convergencia uniforme y criterio de Cauchy

Supongamos que la serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge puntualmente en C

y sea $f : C \to \mathbb{R}$ la suma de dicha serie en C

Entonces, $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformemente en C cuando

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, m \in \mathbb{N} \; : \; n \geqslant m \quad \Rightarrow \quad \left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| < \varepsilon \quad \forall x \in C$$

Esto equivale a que $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ sea uniformemente de Cauchy en C, es decir:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, m \in \mathbb{N} \; : \; m \leqslant p < q \quad \Longrightarrow \quad \left| \sum_{k=p+1}^{q} f_k(x) \right| < \varepsilon \quad \forall x \in C$$

Otras formas de numerar los sumandos

Series con otra numeración

$f_n : A \to \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m \in \mathbb{N}$ fijo. Definimos:

$$\sum_{n \geqslant 0} f_n = \sum_{n \geqslant 1} f_{n-1} = \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} f_k \right\}$$

$$\sum_{n \geqslant m+1} f_n = \sum_{n \geqslant 1} f_{m+n} = \left\{ \sum_{k=m+1}^{m+n} f_k \right\}$$

Si convergen puntualmente en un conjunto $C \subset A$,

sus sumas vienen dadas, para todo $x \in C$, por

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{n-1}(x) \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=m+1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{m+n}(x)$$

Convergencia de series con otra numeración

La numeración no afecta a la convergencia puntual

La convergencia puntual de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ en C equivale a la de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$

que a su vez equivale a la de $\sum\limits_{n\geqslant m+1} f_n$, en cuyo caso,

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = f_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad \forall x \in C$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{m} f_n(x) + \sum_{n=m+1}^{\infty} f_n(x) \qquad \forall x \in C$$

La numeración no afecta a la convergencia uniforme

La convergencia uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ en C equivale a la de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$

que a su vez equivale a la de $\sum\limits_{n\geqslant m+1} f_n$

Resto y término general de una serie

Resto de una serie que converge puntualmente

Suponiendo que la serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge puntualmente en C, definimos:

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \qquad \forall x \in C\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Se dice que la sucesión $\{R_n\}$ es el resto de la serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ en C

$\{R_n\}$ converge puntualmente a cero en C

La serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformemente en C si, y sólo si,

$\{R_n\}$ converge uniformemente a cero en C

Condición necesaria para la convergencia uniforme

Si una serie de funciones converge uniformemente en un conjunto C, entonces su término general converge uniformemente a cero en C

Convergencia uniforme de series y continuidad

Es frecuente probar que el término general no converge uniformemente a 0 para probar que la serie no converge uniformemente

Continuidad de la suma de una serie

Sea A un espacio topológico, $x_0 \in A$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : A \to \mathbb{R}$ una función continua en el punto x_0

Supongamos que la serie $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge uniformemente en un entorno U del punto x_0,

y sea $f : U \to \mathbb{R}$ su suma, es decir: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \forall x \in U$

Entonces f es continua en el punto x_0

Convergencia uniforme de series y derivación

Derivación de la suma de una serie

Dado un intervalo acotado no trivial $J \subset \mathbb{R}$,

para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : J \to \mathbb{R}$ una función derivable en J.

Supongamos que la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n'$ converge uniformemente en J,

y que existe $a \in J$, tal que la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n(a)$ es convergente.

Entonces, la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformemente en J

y definiendo $\displaystyle f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ para todo $x \in J$,

se tiene que la función $f : J \to \mathbb{R}$ es derivable en J con

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \quad \forall x \in J$$

Convergencia uniforme de series e integración

Integral de la suma de una serie

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas de $[a,b]$ en $\mathbb{R}$,

Si la serie $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge uniformemente en $[a,b]$, se tiene que

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx$$

Convergencia absoluta de series de funciones

Convergencia absoluta

Una serie de funciones $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge absolutamente en C,

cuando $\sum_{n\geqslant 1} \left| f_n \right|$ converge puntualmente en C, es decir, cuando

la serie de términos positivos $\sum_{n\geqslant 1} \left| f_n(x) \right|$ es convergente, para todo $x \in C$.

Relación con la convergencia puntual

Si la serie de funciones $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge absolutamente en C,

entonces también converge puntualmente en C y se verifica que

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left| f_n(x) \right| \qquad \forall x \in C$$

Criterio para la convergencia absoluta y uniforme

Ejemplo

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$$

↳ Converge unif. pero no absolutamente

Absoluta $\not\Leftrightarrow$ Uniforme

Absoluta $\Rightarrow$ Puntual $\Leftarrow$ Uniforme

Test de Weierstrass

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones, de un conjunto A en $\mathbb{R}$ y C un subconjunto no vacío de A. Supongamos que existe una serie convergente $\sum_{n\geqslant 1} M_n$ de números reales, tal que

$$\big|f_n(x)\big| \leqslant M_n \qquad \forall x \in C\,, \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Entonces la serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge absoluta y uniformemente en C.

TRABAJO: Criterios abelianos (Son 2)

Demostración

$x \in C$ fijo $|f_n(x)| \leq M_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n\geq 1} M_n \text{ converge} \Longrightarrow \sum_{n\geq 1} |f_n(x)| \text{ converge}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n\geq 1} f_n(x) \text{ converge absolutamente}$$

Y ahora para la convergencia uniforme:

$\varepsilon > 0$, $\exists m \in \mathbb{N}$: $m \leq p < q \Longrightarrow \displaystyle\sum_{k=p+1}^{q} M_k < \varepsilon$ (Unif. de Cauchy)

$$m \leq p < q \qquad \left| \sum_{k=p+1}^{q} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=p+1}^{q} |f_k(x)| \leq \sum_{k=p+1}^{q} M_k < \varepsilon \quad \forall x \in C$$

Series de potencias

Concepto de serie de potencias

Llamamos serie de potencias a toda serie de funciones $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ en la que,

para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, la función $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ venga dada por

Constante

$$f_n(x) = c_n (x-a)^n \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

donde $\{c_n\}$ es una sucesión de números reales y $c_0, a \in \mathbb{R}$

Se dice que tal serie está centrada en el punto $a \in \mathbb{R}$,

y para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $c_n \in \mathbb{R}$ es su n-ésimo coeficiente

La anterior serie de potencias de denota por $\sum_{n\geqslant 0} c_n (x-a)^n$

No se refiere a $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$,
sino a $\sum_{n\geq 1} f_n$

Radio de convergencia de una serie de potencias

Límite superior

Si $\{\alpha_n\}$ es una sucesión acotada de números reales, su límite superior viene dado por

$$\limsup_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sup\{\alpha_k : k \in \mathbb{N},\ \ k \geqslant n\}\right)$$

Cuando $\{\alpha_n\}$ no está mayorada, convenimos que: $\limsup_{n\to\infty} \alpha_n = +\infty$

Radio de convergencia

El radio de convergencia de una serie de potencias $\sum_{n\geqslant 0} c_n (x-a)^n$

es la constante $R \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$ definida por

$$R = 1/L \qquad \text{donde} \qquad L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$$

entendiendo que $R = 0$ si $L = +\infty$ y $R = +\infty$ si $L = 0$

Convergencia de las series de potencias (I)

Intervalo de convergencia

Si R el radio de convergencia de una serie de potencias $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$

se define el intervalo de convergencia de la serie como

$$J = \left\{x \in \mathbb{R} : |x-a| < R\right\}$$

$J = \emptyset$ cuando $R = 0$, mientras que $J = \mathbb{R}$ cuando $R = +\infty$

La información que nos da el radio de convergencia

Si J es el intervalo de convergencia de la serie $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$

La serie converge absoluta y uniformemente en todo compacto $K \subset J$,

y en particular, converge absolutamente en J.

Además, la serie no converge en ningún punto de $\mathbb{R} \setminus \left(\overline{J} \cup \{a\}\right)$

TRABAJO: Demostración

Convergencia de las series de potencias (II)

Los tres casos que pueden darse

- Radio de convergencia $+\infty$, intervalo de convergencia $\mathbb{R}$:

  La serie converge absolutamente en $\mathbb{R}$
  y uniformemente en cada compacto $K \subset \mathbb{R}$

- Radio de convergencia 0, intervalo de convergencia $\emptyset$:

  La serie sólo converge en el punto a

- Radio de convergencia $R \in \mathbb{R}^+$, intervalo de convergencia $]a-R, a+R[$:

  La serie converge absolutamente en $]a-R, a+R[$,
  y uniformemente en cada compacto $K \subset]a-R, a+R[$.
  No converge en ningún punto de $\mathbb{R} \setminus [a-R, a+R]$

Convergencia de las series de potencias (III)

Convergencia uniforme en $\mathbb{R}$

Una serie de potencias $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$

si, y sólo si, el conjunto $\{n\in\mathbb{N} : c_n\neq 0\}$ es finito

Información que no nos da el radio de convergencia

$$\sum_{n\geqslant 0} x^n, \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}, \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n^2}$$

- Las tres series tienen radio de convergencia $R=1$
- La primera no converge en 1 ni en -1
- La segunda converge en el punto -1 pero no en 1
- La tercera converge uniformemente en $[-1,1]$
- La primera no converge uniformemente en $]-1,1[$

La suma de una serie de potencias

Radio de convergencia de la serie de las derivadas

Las series de potencias $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ y $\sum_{n\geqslant 0}(n+1)\,c_{n+1}(x-a)^n$

tienen el mismo radio de convergencia

Derivabilidad de la suma de una serie de potencias

Sea $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $R \neq 0$,

J su intervalo de convergencia y $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(x-a)^n \quad \forall x \in J$

Entonces f es de clase C^∞ en J. Además, para todo $k \in N$,

la serie $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(n+k)!}{n!} c_{n+k}\,(x-a)^n$ tiene radio de convergencia R y

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} c_{n+k}\,(x-a)^n = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} c_n\,(x-a)^{n-k} \quad \forall x \in J$$

TRABAJO

En particular: $f^{(k)}(a) = k!\,c_k \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Algunos desarrollos en serie

La serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad \forall x \in]-1,1[$$

$$\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \quad \forall x \in]-1,1[, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

La función exponencial

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

El logaritmo

$$\log x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (x-1)^n \qquad \forall x \in]0,2[$$