Ejercicio 15. Apartado iii

Shao Jie Hu Chen

Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty}[\frac{1}{n}(sen(\frac{\pi}{n})+sen(\frac{2\pi}{n})+...+sen(\frac{n\pi}{n}))]$$

Sea la función $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, definida por $f(x)=sen(\pi x)$. La función así definida es continua por ser composición de funciones continuas. Por tanto:

$$\lim_{n\to\infty}[\frac{1}{n}(sen(\frac{\pi}{n})+sen(\frac{2\pi}{n})+...+sen(\frac{n\pi}{n}))]=\int_0^1 sen(\pi x)dx$$

Basta calcular la integral, aplicando la regla de Barrow:

$$\int_0^1 sen(\pi x)dx=\frac{-cos(\pi x)}{\pi}\Big|_0^1=\frac{1}{\pi}-(-\frac{1}{\pi})=\frac{2}{\pi}$$

Concluimos que:

$$\lim_{n\to\infty}[\frac{1}{n}(sen(\frac{\pi}{n})+sen(\frac{2\pi}{n})+...+sen(\frac{n\pi}{n}))]=\frac{2}{\pi}$$