UNIVERSIDAD DE GRANADA

Departamento de
Geometría y Topología

Geometría II – Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Convocatoria ordinaria -14 de junio de 2021

1. (3,5 PUNTOS) Para cada $a \in \mathbb{R}$ se considera la métrica g_a de $\mathbb{R}^4$ cuya forma cuadrática asociada está dada por

$$\omega_a(x_1, x_2, x_3, x_4) = a\, x_1^2 - \, x_2^2 + 2x_1x_3 + 2a\, x_1x_4 + 2x_3x_4$$

(a) Calcula el índice y la nulidad.

(b) Si A es la matriz de g_1 respecto de la base usual de $\mathbb{R}^4$, encuentra una matriz ortogonal $P \in O(4)$ y una matriz diagonal D tal que $P^t A P = D$.

2. (3 PUNTOS) Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo, $a \in V$ un vector unitario y $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$. Definimos $h : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$h(u, v) = g(u, v) + \lambda g(u, a) g(v, a)$$

(a) Prueba que h es una métrica en V.

(b) Prueba que h es euclídea si y solo si $\lambda > -1$.

3. (3,5 PUNTOS) En $(\mathbb{R}^3, g_u)$ se considera f la simetría axial respecto de la recta $U = \{(x, y, z) \mid x = 0, y - z = 0\}$ y $h(x, y, z) = (y, x, z)$.

(a) Prueba que h es una isometría. Clasifica y describe dicha isometría.

(b) Clasifica y describe la isometría $f \circ h$.

EJERCICIO 2

a) (1 PUNTO)

Veamos que h es una métrica en V.

h SIMÉTRICA: Veamos que $h(u,v) = h(v,u)\ \forall u,v \in V$

$$h(u,v) = g(u,v) + \lambda g(u,a)\, g(v,a) \overset{\uparrow}{=}$$

g simétrica
Producto en ℝ conmutativo

$$= g(v,u) + \lambda g(v,a)\, g(u,a) =$$

$$= h(v,u)$$

h BILINEAL: Como acabamos de probar que es simétrica basta con probar que h es lineal en la 1ª componente. Es decir tenemos que ver

$$h(\alpha u + \beta u', v) = \alpha h(u,v) + \beta h(u',v)$$

$$\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R},\ \forall u,u',v \in V.$$

$$h(\alpha u + \beta u', v) = g(\alpha u + \beta u', v) + \lambda g(\alpha u + \beta u', a)\, g(v,a)$$

$$\overset{\uparrow}{=} \alpha g(u,v) + \beta g(u',v) + \lambda\left(\alpha g(u,a) + \beta g(u',a)\right) \cdot g(v,a)$$

g bilineal

$$= \alpha g(u,v) + \lambda \alpha g(u,a)\, g(v,a) + \beta g(u',v) + \lambda \beta g(u',a)\, g(v,a)$$

$$= \alpha\left(g(u,v) + \lambda g(u,a)\, g(v,a)\right) + \beta\left(g(u',v) + \lambda g(u',a)\, g(v,a)\right)$$

$$= \alpha h(u,v) + \beta h(u',v).$$

b) (2 PUNTOS) Tenemos que probar que

$$h \text{ euclídea} \iff \lambda > -1$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que h es euclídea. Entonces $h(u,u) > 0,\ \forall\, u \in V \setminus \{0\}$. En particular

$$h(a,a) = g(a,a) + \lambda\, g(a,a)\cdot g(a,a) =$$

$$\underset{\boxed{\|a\| = 1}}{=} 1 + \lambda > 0 .$$ Por tanto $\lambda > -1$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos ahora que $\lambda > -1$ y veamos que $h(u,u) > 0$ para $\forall\, u \in V \setminus \{0\}$.

$\boxed{\text{CASO } \lambda > 0}$ En este caso tenemos

$$h(u,u) = g(u,u) + \lambda\, g(u,a)\, g(u,a) =$$

$$= \underset{0}{\underset{\vee}{g(u,u)}} + \underset{0}{\underset{\vee}{\lambda}}\, \underset{0}{\underset{\vee\!\!|}{g(u,a)^2}} > 0$$

Por ser g euclídea

$\boxed{\text{CASO } -1 < \lambda < 0}$

En este caso vamos a utilizar la Desigualdad de Cauchy-Schwarz para g.

$$|g(u,a)| \leq \|u\| \cdot \|a\| .$$ De aquí

$$(*) \quad g(u,a)^2 \leq \|u\|^2 \cdot \|a\|^2 \underset{\|a\| = 1.}{\overset{}{=}} \|u\|^2$$

Utilizando lo anterior tenemos

$$h(u,u) = g(u,u) + \lambda\, g(u,a)^2 \geq$$

$$* \; -1<\lambda<0$$

$$\geq \|u\|^2 + \lambda \|u\|^2 = (1+\lambda)\,\|u\|^2 > 0$$

OTRA FORMA DE HACER EL APARTADO b).

Tomamos el vector a que es unitario y denotamos $\mathcal{U} = L(a)$. Sea $\{u_2, \dots, u_n\}$ una base ortonormal de $\mathcal{U}^\perp$ donde $n = \dim V$. Entonces

$$B = \{a, u_2, \dots, u_n\}$$

es una base ortonormal de (V, g).

Es fácil ver que:

$$m(h, B) = \begin{pmatrix} 1+\lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & 1 & & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

Viendo esta matiz es claro que

$$h \text{ euclídea} \iff 1+\lambda > 0 \iff \lambda > -1.$$