Pérez Ruiz, Daniel 15/1/2020

$\boxed{\text{Relación Tema 3}}$

$\boxed{1.}$ Sea (X, d) un espacio métrico compacto sin puntos aislados.

a) Dados $U \subset X$ abierto y $x \in X$, probar que $\exists V$ abierto tal que $V \subset U$ y $x \notin \overline{V}$.

→) En primer lugar supondremos que $U \neq \emptyset$.

→) X es de Hausdorff ⟹ Definición: teniendo un abierto U y $x \in X$, existen dos subconjuntos abiertos W, Y tal que $U \subset W$, $x \in Y$ y $W \cap Y = \emptyset$

→) Tengamos ahora $z \in U$, con $z \neq x$. Como hemos supuesto por hipótesis que el subconjunto U no es vacío $(U \neq \emptyset)$ y que en el espacio métrico definido no existen puntos aislados, la existencia de dicho z es garantizada.

Ahora, como $W \cap Y = \emptyset$, $\exists r, s > 0 : B(x, r) \cap B(y, s) = \emptyset$. Y no se puede dar que x pertenezca a $\overline{B}(y, s)$, ya que existe un entorno del punto x, es decir, un $V_x \in N_x$ tal que $B(y,s) \cap V_x = \emptyset$. Por tanto tenemos que $x \notin \overline{B}(y,s)$.

→) Finalmente, tenemos que $B(y,s)$ es el V que estábamos buscando □.

b) Si $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en X probar que existe una sucesión de conjuntos abiertos $\{V_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $V_{i+1} \subset V_i$ y $x_i \notin \overline{V_i}$. Concluir que $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \overline{V_i} \neq \emptyset$.

→) Sabemos que $\exists V \subset X$ abierto de tal manera que $x \notin \overline{V}$. (Ap a))

→) Consideremos que para cada $i \in \mathbb{N}$, existe un abierto V_i tal que $x_i \notin \overline{V_i}$. Construyamos una sucesión $\{V_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de modo que si tenemos V_{i-1}, se toma $V_i \subset V_{i-1}$, sabiendo que $x_i \notin V_i$.

→) Recordemos que X es compacto. Esto nos lleva a que la sucesión de cerrados $\{\overline{V_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ tiene intersección no vacía, puesto que $\overline{V_1} \supset \overline{V_2} \ldots$ Así por la propiedad de la intersección finita, $x \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \overline{V_i}$, con $x_i \neq x$, $\forall i \in \mathbb{N}$

c) Deducir que $\mathbb{X}$ no es numerable.

⇒) Supongamos $\mathbb{X}$ numerable ⇒ Existe una biyección de los naturales en el conjunto $\mathbb{X}$ definida por una función f. Esto es: $\exists f$ biyectiva ~~…~~ definida como $f: \mathbb{N} \to \mathbb{X}$

⇒) Concretemos la definición de f:

$$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{X}$$
$$n \longmapsto x_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

⇒) Esta función no es sobreyectiva, ya que $\exists x \in \mathbb{X}$ con $x \neq x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Esto demuestra que f no es biyectiva y $\mathbb{X}$ no es numerable.

$\boxed{2.}$ Sea $I_0 = [0,1] \subset \mathbb{R}$. Se define I_n inductivamente por la igualdad:

$$I_n = I_{n-1} \setminus \bigcup_{k=0}^{3^{n-1}-1} \left] \frac{1+3k}{3^n}, \frac{2+3k}{3^n} \right[$$

Probar que la intersección $C = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}^+} I_n$ es no vacía. Al conjunto C se le denomina conjunto de Cantor.

⇒) $\{0, 1\} \in C$, por tanto la intersección no es vacía.

$\boxed{2.1}$ Probar que cada conjunto I_n es unión finita de intervalos cerrados de longitud $\frac{1}{3^n}$ y que los extremos de dichos intervalos pertenecen a C.

⇒) Cada I_n es de la siguiente manera:

⇒) Del intervalo $[0,1]$ quitamos el intervalo $J_1 =]1/3, 2/3[$.

$$I_1 = [0,1] \setminus J_1 = [0, \tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3}, 1]$$

⇒) A cada intervalo le quitamos J_2^0 y J_2^1: $(J_2^0 = [1/9, 2/9]$; $J_2^1 = [7/9, 8/9])$.

de donde tenemos: $I_2 = ([0, 1/3] \setminus J_2^0) \cup ([2/3, 1] \setminus J_2^1)$
$$= [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$$

→) Por inducción, definimos $J_N^t = \left] \frac{3b_j-2}{3^N}, \frac{3b_j-1}{3^N} \right[$ para $b_j \in \{1, \dots, 3^{i-1}\}$, $j \in \{1, 2, \dots, 2^{N-1}\}$ $n \in \mathbb{N}$, de donde obtenemos que

$$J_N = \bigcup_{j=0}^{2^{N-1}} J_N^j \quad y \quad I_N = [0,1] \setminus \bigcup_{k=0}^{3^{N-1}-1} J_N$$

2.2 Probar que C es compacto

→) Como C es unión finita de cerrados, se tiene que C es cerrado. Además C está acotado por $C \subset [0,1]$. C es compacto por el T^a de Heine-Borel.

2.3 Probar que C es totalmente disconexo.

→) 1º: C no contiene intervalos.

→) Supongamos que $]x,y[\subset C$. Tomemos un $q \in]x,y[$ y sea un $\varepsilon > 0$ tal que $]q-\varepsilon, q+\varepsilon[\subset]x,y[$. Sea $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $\frac{1}{2 \cdot 3^N} < \varepsilon$. Como $q \in C$.

Tenemos que $]q-\varepsilon, q+\varepsilon[\cap (\mathbb{R} \setminus C_N) \neq \emptyset$, siendo $C_N = [0,1] \setminus J_N$, definido en apartado 2.1

→) Con esto, existe un $a \in]q-\varepsilon, q+\varepsilon[\cap (\mathbb{R} \setminus C_N)$, por lo que ~~(...)~~

$a \in]q-\varepsilon, q+\varepsilon[\subset C \subset C_N$ ~~(...)~~ y $a \in \mathbb{R} \setminus C_N$. Imposible!!

→) Se concluye que $]x,y[\not\subset C$.

→) 2º C totalmente disconexo:

→) Supongamos que existe una componente conexa Δ con más de un punto. Entonces $\Delta \subset C$. Tomemos $x, y \in \Delta$, $x<y$. Como C no tiene intervalos, $\exists t \in \mathbb{R} \setminus C$ tal que $x < t < y \Rightarrow \Delta = (]-\infty, t[\cap \Delta) \cup (\Delta \cap]t, +\infty[)$. con $x \in]-\infty, t[\cap \Delta$, $y \in \Delta \cap]t, +\infty[$

→) Δ no es conexo por haber obtenido unión de abiertos con intersección vacía.

2.4 Probar que C no tiene puntos aislados.

$\Rightarrow$) $\forall x \in C_N$, $\exists y \in C$, con $y \neq x$ tal que $|x-y| \leq \frac{1}{3^N}$

Como $x \in C_N$, pertenece a alguno de los 2^{N-1} segmentos de longitud $\frac{1}{3^N}$ que constituyen C_N. Llamemos a_N y b_N a los extremos de ese intervalo.

$\Rightarrow$) $x \in [a_N, b_N] \subset C_N$, $a_N \leq x \leq b_N$

$\Rightarrow$) Cogemos $y = \begin{cases} a_N & \text{si } |x-a_N| \geq |x-b_N| \\ b_N & \text{si sucede otro caso} \end{cases}$

$\Rightarrow$) Como y es extremo de C_N, $y \in C$ y la longitud del segmento es $\frac{1}{3^N}$, $\Rightarrow$ $|x-y| \leq \frac{1}{3^N}$, $x \neq y$ y $y \in C$.

2.5 Usando el problema anterior, probar que C no es numerable.

$\Rightarrow$) Como la propiedad de Hausdorff es hereditaria, C tamb la cumple.

$\Rightarrow$) C compacto y sin puntos aislados.

$\Rightarrow$ Por el ejercicio 1, C no es numerable.