Análisis Matemático I

Tema 6: Diferenciabilidad

Derivada de una función real de variable real

Repaso del concepto de derivada

$$\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}, \quad f : A \to \mathbb{R}, \quad a \in A \cap A'$$

f es derivable en el punto a cuando existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - \lambda(x-a)}{x-a} = 0\,, \quad \text{equivalentemente}$$

$$\lim_{x \to a} \frac{|f(x) - f(a) - \lambda(x-a)|}{|x-a|} = 0\,, \quad \text{o bien,} \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - \lambda(x-a)}{|x-a|} = 0$$

Entonces λ es único, le llamamos derivada de f en a y escribimos $\lambda = f'(a)$

El espacio $L(\mathbb{R},\mathbb{R})$

Para $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene $T_\alpha \in L(\mathbb{R},\mathbb{R})$, donde $T_\alpha(x) = \alpha x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Si ahora definimos $\Phi : \mathbb{R} \to L(\mathbb{R},\mathbb{R})$ por $\Phi(\alpha) = T_\alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$,

Φ es lineal biyectiva y conserva la norma

luego $\mathbb{R}$ y $L(\mathbb{R},\mathbb{R})$ son idénticos como espacios normados

En busca de una generalización

Diferencial de una función real de variable real

$$\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}, \quad f : A \to \mathbb{R}, \quad a \in A \cap A'$$

f es diferenciable en el punto a cuando existe $T \in L(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tal que:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{x-a} = 0, \quad \text{equivalentemente}$$

$$\lim_{x \to a} \frac{|f(x) - f(a) - T(x-a)|}{|x-a|} = 0, \quad \text{o bien,} \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{|x-a|} = 0$$

T es única, la llamamos diferencial de f en a y se denota por $Df(a)$

Relación entre derivada y diferencial

$$f \text{ diferenciable en } a \iff f \text{ derivable en } a$$

en cuyo caso, la derivada y la diferencial de f en a están relacionadas por:

$$Df(a)(x) = f'(a)\,x \quad \text{y} \quad f'(a) = Df(a)(1)$$

Por tanto, aquí no hay nada nuevo, pero el concepto de diferencial se generaliza inmediatamente para funciones definidas en un subconjunto de un espacio normado, con valores en cualquier otro espacio normado

Concepto de función diferenciable

Notación

En lo que sigue: X e Y espacios normados, $A \subset X$, $f : A \to Y$ y $a \in A^\circ$

Función diferenciable en un punto

f es diferenciable en el punto a cuando existe $T \in L(X,Y)$ tal que:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{\|x-a\|} = 0\,, \quad \text{o bien,} \quad \lim_{x \to a} \frac{\|f(x) - f(a) - T(x-a)\|}{\|x-a\|} = 0$$

Equivalentemente, estos límites pueden escribirse en la forma

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - T(h)}{\|h\|} = 0\,, \quad \text{o bien,} \quad \lim_{h \to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - T(h)\|}{\|h\|} = 0$$

Observaciones importantes (I)

1. Unicidad de la diferencial

Si f es diferenciable en a, la aplicación $T \in L(X,Y)$ es única

la llamamos diferencial de f en a y se denota por $Df(a)$

2. Relación con la continuidad

Si f es diferenciable en a, entonces f es continua en a

3. Significado analítico de la diferencial

Supongamos que f es diferenciable en a y sea $g : X \to Y$ dada por:

$$g(x) = f(a) + Df(a)(x-a) = f(a) - Df(a)(a) + Df(a)(x) \quad \forall x \in X$$

g es una función afín y continua, que verifica:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - g(x)}{\|x-a\|} = 0$$

luego g es una "buena aproximación" de f "cerca" del punto a

1. $a \in \mathring{A}$ $\exists r > 0 \,/\, B(a,r) \subset A$

$v \in X$ $\quad x = a + tv \quad |t| \|v\| < r$

$v \neq 0 \qquad\qquad t \in \mathbb{R}$

$x \to a$ cuando $t \to 0$ y $x \neq a$ para $t \neq 0$

$$T(v) = \lim_{t \to 0} \frac{\| f(a+tv) - f(a) - tT(v) \|}{|t| \cdot \|v\|} = 0 \qquad \forall v \in X \setminus \{0\}$$

$$\lim_{t \to 0} \left\| \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} - T(v) \right\| = 0$$

2. $$f(x) = \frac{f(x) - f(a) - Df(a)(x-a)}{\|x-a\|} \|x-a\| + f(a) + \underbrace{Df(a)(x-a)}_{\to 0}$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

5. $\lambda_1 \|x\| \leq \|x\|' \leq \rho_1 \|x\| \quad \forall x \in X$

$\lambda_2 \|y\| \leq \|y\|' \leq \rho_2 \|y\| \quad \forall y \in Y$

$$\lim_{x \to a} \frac{\| f(x) - f(a) - Df(a)(x-a) \|}{\|x-a\|} = 0$$

$$\frac{\| f(x) - f(a) - Df(a)(x-a) \|'}{\|x-a\|'} \leq \frac{\rho_2 \| f(x) - f(a) - Df(a)(x-a) \|}{\lambda_1 \|x-a\|}$$

Observaciones importantes (II)

4. Carácter local

Si $U \subset A$ y $a \in U^\circ$, se tiene:

$$f \text{ diferenciable en } a \iff f\Big|_U \text{ diferenciable en } a$$

en cuyo caso se tiene $Df(a) = D\left(f\Big|_U\right)(a)$

5. Independencia de las normas

Si f es diferenciable en a,

y sustituimos las normas de X e Y por sendas normas equivalentes,

entonces f sigue siendo diferenciable en a, con la misma diferencial

Espacios de funciones diferenciables

Diferenciabilidad global y funciones de clase C^1

Sean X e Y espacios normados, $\Omega = \Omega^\circ \subset X$ y $f : \Omega \to Y$

Si f es diferenciable en todo punto $x \in \Omega$

decimos simplemente que f es diferenciable

$D(\Omega, Y)$ será el conjunto de todas las funciones diferenciables de Ω en Y

$$D(\Omega, Y) \subset \mathcal{C}(\Omega, Y)$$

Para $f \in D(\Omega, Y)$, tenemos la función $Df : \Omega \to L(X, Y)$ dada por $x \mapsto Df(x)$, y decimos que Df es la diferencial de f

Decimos que f es de clase C^1 cuando $f \in D(\Omega, Y)$ y Df es continua

$C^1(\Omega, Y)$ es el conjunto de todas las funciones de clase C^1 de Ω en Y

$$C^1(\Omega, Y) \subset D(\Omega, Y) \subset \mathcal{C}(X, Y)$$

Primeros ejemplos, linealidad de la diferencial

Los dos primeros ejemplos

- $f : X \to Y$ constante $\Longrightarrow$ $f \in C^1(X,Y)$ con $Df(a) = 0 \ \ \forall a \in X$
- $f \in L(X,Y)$ $\Longrightarrow$ $f \in C^1(X,Y)$ con $Df(a) = f \ \ \forall a \in X$

Linealidad de la diferencial

$X\,, Y$ espacios normados, $\Omega = \Omega^\circ \subset X\,,$ $f\,, g : \Omega \to Y\,,$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Si f y g son diferenciables en un punto $a \in \Omega$, entonces

$\alpha f + \beta g$ es diferenciable en a con $D(\alpha f + \beta g)(a) = \alpha Df(a) + \beta Dg(a)$.

- $f, g \in D(\Omega, Y)$ $\Longrightarrow$ $\alpha f + \beta g \in D(\Omega, Y)$ con $D(\alpha f + \beta g) = \alpha Df + \beta Dg$
- $f, g \in C^1(\Omega, Y)$ $\Longrightarrow$ $\alpha f + \beta g \in C^1(\Omega, Y)$
- $D(\Omega, Y)$ y $C^1(\Omega, Y)$ son subespacios vectoriales de $\mathcal{C}(\Omega, Y)$

Composición de funciones diferenciables

Regla de la cadena

X, Y, Z espacios normados, $\Omega = \Omega^\circ \subset X$, $U = U^\circ \subset Y$, $f : \Omega \to U$, $g : U \to Z$

Si f es diferenciable en $a \in \Omega$ y g es diferenciable en $b = f(a)$,

entonces $g \circ f$ es diferenciable en a con: $D(g \circ f)(a) = Dg(b) \circ Df(a)$

- $f \in D(\Omega, Y)\,, \quad g \in D(U, Z) \quad \Longrightarrow \quad g \circ f \in D(\Omega, Z)$
- $f \in C^1(\Omega, Y)\,, \quad g \in C^1(U, Z) \quad \Longrightarrow \quad g \circ f \in C^1(\Omega, Z)$

Observación

$$T \in L(X, Y)\,, \quad S \in L(Y, Z) \quad \Longrightarrow \quad \|S \circ T\| \leqslant \|S\|\,\|T\|$$

Demostración - Regla de la cadena

$\Phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad \Phi$ continua en a , $\Phi(a) = 0$

$$\| f(x) - f(a) - Df(a)(x-a) \| = \Phi(x) \cdot \|x-a\| \quad \forall x \in \Omega$$

$\Psi : U \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ $\qquad \Psi$ continua $\qquad \Psi(b) = 0$

$$\| g(y) - g(b) - Dg(b)(y-b) \| = \Psi(y) \cdot \|y-b\| \quad \forall y \in U$$

$Dg(b) \circ Df(a) \in \mathcal{L}(X, Z)$

$$\Lambda(x) = \| (g \circ f)(x) - (g \circ f)(a) - (Dg(b) \circ Df(a))(x-a) \| \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$¿\lim_{x \to a} \frac{\Lambda(x)}{\|x-a\|} = 0?$$

$x \in \Omega \qquad y = f(x)$

$\Lambda(x)$

$$\| g(y) - g(b) - (Dg(b) \circ Df(a))(x-a) \| \leq \| g(y) - g(b) - Dg(b)(y-b) \| +$$
$$+ \| Dg(b)(y-b) - (Dg(b) \circ Df(a))(x-a) \| = \Psi(y) \cdot \|y-b\| + \| Dg(b)(y-b-Df(a)(x-a)) \| \leq$$
$$\leq \Psi(y) \cdot \|y-b\| + \|Dg(b)\| \cdot \| y-b-Df(a)(x-a) \|$$

$$\Downarrow$$

$$\Lambda(x) \leq \Psi(y) \cdot \|f(x) - f(a)\| + \|Dg(b)\| \cdot \| f(x) - f(a) - Df(a)(x-a) \| \leq$$
$$\leq \Psi(y) \cdot (\|f(x) - f(a) - Df(a)(x-a)\| + \|Df(a)(x-a)\|) + \|Dg(b)\| \cdot \| f(x) - f(a) - Df(a)(x-a) \| =$$

$$= \psi(y)\cdot\|Df(a)(x-a)\| + (\psi(y) + \|Dg(b)\|)\cdot\Phi(x)\cdot\|x-a\| \le [\psi(f(x))\cdot\|Df(a)\| + (\psi(f(x)) + \|Dg(b)\|)\cdot\Phi(x)]\cdot\|x-a\|$$

$x \neq a$ $$0 \le \frac{\Lambda(x)}{\|x-a\|} \le \underset{\psi(f(a))=0}{\underset{\downarrow}{\psi(f(x))}}\,(\underset{\|Df(a)\|}{\underset{\downarrow}{\|Df(a)\| + \Phi(x)}}) + \underset{cte}{\|Dg(b)\|}\cdot\underset{0}{\underset{\downarrow}{\Phi(x)}}$$

$$\|D(g\circ f)(x) - D(g\circ f)(a)\| \le \|Dg(y)\cdot(Df(x) - Df(a))\| + \|(Dg(y) - Dg(b))\cdot Df(a)\| \le$$

$$\le \|Dg(y)\|\cdot\underset{0}{\underset{\downarrow}{\|Df(x) - Df(a)\|}} + \underset{0}{\underset{\downarrow}{\|Dg(y) - Dg(b)\|}}$$

Funciones con valores en un producto

Notación

$$Y = \prod_{j=1}^{M} Y_j \quad \text{producto de espacios normados,} \quad j \in \Delta_M$$

- Proyección coordenada: $\pi_j : Y \to Y_j\,, \quad \pi_j y = y(j) \quad \forall y \in Y$

  $\pi_j \in L(Y, Y_j)$ con $\|\pi_j\| = 1$

- Inyección natural: $I_j : Y_j \to Y\,, \quad I_j u = (0, \ldots, 0, \overset{(j)}{u}, 0, \ldots, 0) \quad \forall u \in Y_j$

  $I_j \in L(Y_j, Y)$ con $\|I_j\| = 1$

$$\pi_j \circ I_j = \mathrm{Id}_{Y_j} \quad \forall j \in \Delta_M \qquad \text{y} \qquad \sum_{j=1}^{M} I_j \circ \pi_j = \mathrm{Id}_Y$$

Diferenciabilidad de funciones con valores en un producto

X espacio normado, $\Omega = \Omega^\circ \subset X\,, \quad f = (f_1, f_2, \ldots, f_M) : \Omega \to Y\,, \quad a \in \Omega$

$$f \text{ diferenciable en } a \iff f_j \text{ diferenciable en } a \quad \forall j \in \Delta_M$$

en cuyo caso: $\quad Df(a) = \big(Df_1(a), Df_2(a), \ldots, Df_M(a)\big)$

- $f \in D(\Omega, Y) \iff f_j \in D(\Omega, Y_j) \quad \forall j \in \Delta_M$
- $f \in C^1(\Omega, Y) \iff f_j \in C^1(\Omega, Y_j) \quad \forall j \in \Delta_M$

Producto de funciones reales diferenciables

Notación

$$X \text{ espacio normado}, \quad \Omega = \Omega^\circ \subset X$$

$$D(\Omega) \overset{\text{def}}{=} D(\Omega, \mathbb{R}) \quad \text{y} \quad C^1(\Omega) \overset{\text{def}}{=} C^1(\Omega, \mathbb{R})$$

Un campo escalar de clase C^1

$$P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad P(x,y) = xy \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$P \in C^1(\mathbb{R}^2) \quad \text{con} \quad DP(x,y)(h,k) = yh + xk \quad \forall (h,k) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Producto de funciones diferenciables

$$X \text{ espacio normado}, \quad \Omega = \Omega^\circ \subset X \quad f, g : \Omega \to \mathbb{R}, \quad a \in \Omega$$

$$f, g \text{ diferenciables en } a \quad \Longrightarrow \quad fg \text{ diferenciable en } a$$

$$\text{y se verifica que:} \quad D(fg)(a) = g(a)Df(a) + f(a)Dg(a)$$

- $f, g \in D(\Omega) \implies fg \in D(\Omega)$ con $D(fg) = g\,Df + f\,Dg$
- $f, g \in C^1(\Omega) \implies fg \in C^1(\Omega)$
- $D(\Omega)$ y $C^1(\Omega)$ son subanillos de $\mathcal{C}(\Omega)$

Cociente de funciones reales diferenciables

Funciones polinómicas

$$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{R}^N \quad \Longrightarrow \quad P(\Omega) \subset C^1(\Omega)$$

Cociente de funciones diferenciables

X espacio normado, $\Omega = \Omega^\circ \subset X$, $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$, $g(\Omega) \subset \mathbb{R}^*$, $a \in \Omega$

f, g diferenciables en $a \quad \Longrightarrow \quad f/g$ diferenciable en a

y se verifica que: $\displaystyle D(f/g)(a) = \frac{1}{g(a)^2}\big(g(a)Df(a) - f(a)Dg(a)\big)$

- $f, g \in D(\Omega)$, $g(\Omega) \subset \mathbb{R}^* \quad \Longrightarrow \quad f/g \in D(\Omega)$
- $f, g \in C^1(\Omega)$, $g(\Omega) \subset \mathbb{R}^* \quad \Longrightarrow \quad f/g \in C^1(\Omega)$

Funciones racionales

$$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{R}^N \quad \Longrightarrow \quad R(\Omega) \subset C^1(\Omega)$$