Análisis Matemático II

Tema 13: Teorema de Fubini

Notación y planteamiento del problema

Notación

En lo que sigue, fijaremos $p, q \in \mathbb{N}$, para tomar $N = p + q$

Para $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M}_k =$ σ-álgebra de los conjuntos medibles en $\mathbb{R}^k$

$\lambda_k : \mathcal{M}_k \to [0, \infty]$ medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^k$

$$\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q = \left\{ (x, y) \ : \ x \in \mathbb{R}^p, \ \ y \in \mathbb{R}^q \right\}$$

¿Qué relación guarda λ_N con λ_p y λ_q?

¿Qué relación guarda la integral de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$ con las de $\mathbb{R}^p$ y $\mathbb{R}^q$?

$A \in \mathcal{M}_p$, $B \in \mathcal{M}_q$, $g \in \mathcal{L}^+(A)$ o $g \in \mathcal{L}_1(A)$, $h \in \mathcal{L}^+(B)$ o $h \in \mathcal{L}_1(B)$

$$\int_A g(x)\, dx = \int_A g \qquad \text{y} \qquad \int_B h(y)\, dy = \int_B h$$

$\Omega \in \mathcal{M}_N$, $f \in \mathcal{L}^+(\Omega)$ o bien $f \in \mathcal{L}_1(\Omega)$

$$\int_\Omega f(x, y)\, d(x, y) = \int_\Omega f$$

Teorema de Fubini para funciones medibles positivas

Secciones de una función

$Z \neq \emptyset, \quad f : \mathbb{R}^N \to Z.$ Fijado $x \in \mathbb{R}^p$, definimos:

$$f_x : \mathbb{R}^q \to Z, \qquad f_x(y) = f(x,y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^q$$

Se dice que f_x es la sección vertical de f en el punto x

Fijado $y \in \mathbb{R}^q$, la sección horizontal de f en y es la función dada por

$$f^y : \mathbb{R}^p \to Z \qquad f^y(x) = f(x,y) \quad \forall x \in \mathbb{R}^p$$

Teorema de Tonelli

Si $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es una función medible positiva, se tiene:

- f_x es medible p.c.t. $x \in \mathbb{R}^p$ y f^y es medible p.c.t. $y \in \mathbb{R}^q$
- Las funciones φ y ψ, definidas c.p.d. en $\mathbb{R}^p$ y $\mathbb{R}^q$ respectivamente, por

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy \ \text{ p.c.t. } x \in \mathbb{R}^p \quad \text{y} \quad \psi(y) = \int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\,dx \ \text{ p.c.t. } y \in \mathbb{R}^q$$

son medibles y verifican:

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x,y)\,d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^p} \varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^q} \psi(y)\,dy$$

Resumen del teorema y preparativos para demostrarlo

Nomenclatura que se usa y resumen del teorema

Las funciones φ y ψ son las primeras integrales de f

El teorema afirma que están definidas c.p.d. en $\mathbb{R}^p$ y $\mathbb{R}^q$,

y que son medibles, luego tienen sentido sus integrales:

$$\int_{\mathbb{R}^p}\left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy\right)dx \quad \text{y} \quad \int_{\mathbb{R}^q}\left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\,dx\right)dy$$

a las que llamamos integrales iteradas de f

Resumen del teorema: la integral de f coincide con sus dos integrales iteradas

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x,y)\,d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^p}\left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy\right)dx = \int_{\mathbb{R}^q}\left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\,dx\right)dy$$

Basta probar las afirmaciones referentes a la función φ, con lo que, por simetría, también son ciertas las referentes a ψ

Llamamos $\mathcal{F}$ a la familia de funciones que verifican el teorema, y se trata de probar que $\mathcal{F} = \mathcal{L}^+(\mathbb{R}^N)$

Primera parte de la demostración y preparativos para la segunda

Estabilidad de la familia $\mathcal{F}$

- $f, g \in \mathcal{F}, \quad \alpha \in \mathbb{R}_0^+ \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha f + g \in \mathcal{F}$
- $f_n \in \mathcal{F}, \quad \{f_n\} \nearrow f \qquad \Longrightarrow \qquad f \in \mathcal{F}$

Por tanto: basta probar que $\chi_E \in \mathcal{F} \quad \forall E \in \mathcal{M}_N$

Secciones de conjuntos

Para $E \subset \mathbb{R}^N$ y $x \in \mathbb{R}^p$, la sección vertical de E en el punto x es

$$E_x = \Big\{ y \in \mathbb{R}^q \ : \ (x,y) \in E \Big\} \subset \mathbb{R}^q$$

Para $y \in \mathbb{R}^q$, la sección horizontal de E en el punto y es el conjunto

$$E^y = \Big\{ x \in \mathbb{R}^p \ : \ (x,y) \in E \Big\} \subset \mathbb{R}^p$$

Se tiene: $\big(\chi_E\big)_x = \chi_{E_x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^p$ y $\big(\chi_E\big)^y = \chi_{E^y} \quad \forall y \in \mathbb{R}^p$

Las secciones de conjuntos medibles pueden no ser medibles

$$a \in \mathbb{R}^p, \quad W \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^q) \setminus \mathcal{M}_q, \quad E = \{a\} \times W \subset \{a\} \times \mathbb{R}^q = Y$$

$\lambda_N(Y) = 0$ luego $E \in \mathcal{M}_N$ pero $E_a = W \notin \mathcal{M}_q$

El teorema de Tonelli para funciones características

Teorema

Para todo conjunto medible $E \subset \mathbb{R}^N$ se tiene:

- $E_x \in \mathcal{M}_q$ p.c.t. $x \in \mathbb{R}^p$ y $E^y \in \mathcal{M}_p$ p.c.t. $y \in \mathbb{R}^q$
- Las funciones $x \mapsto \lambda_q(E_x)$ e $y \mapsto \lambda_p(E^y)$,

  definidas c.p.d. en $\mathbb{R}^p$ y $\mathbb{R}^q$ respectivamente, son medibles con

$$\lambda_N(E) = \int_{\mathbb{R}^p} \lambda_q(E_x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^q} \lambda_p(E^y)\,dy$$

Idea clave para la demostración

Familia de conjuntos que verifican el teorema $\mathcal{E} = \{E \in \mathcal{M}_N : \chi_E \in \mathcal{F}\}$

- $A, B \in \mathcal{E}, \quad A \cap B = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad A \biguplus B \in \mathcal{E}$
- $E_n \in \mathcal{E} \;\; \forall n \in \mathbb{N}, \quad \{E_n\} \nearrow E \quad \Longrightarrow \quad E \in \mathcal{E}$
- $E_n \in \mathcal{E} \;\; \forall n \in \mathbb{N}, \quad E = \biguplus_{n=1}^{\infty} E_n \quad \Longrightarrow \quad E \in \mathcal{E}$

Fin de la demostración y una consecuencia

Fin de la demostración

- $H \subset \mathbb{R}^N$, H intervalo acotado $\implies$ $H \in \mathcal{E}$
- $G = G^\circ \subset \mathbb{R}^N$ $\implies$ $G \in \mathcal{E}$
- $D \subset \mathbb{R}^N$, D de tipo G_δ $\implies$ $D \in \mathcal{E}$
- $A \subset \mathbb{R}^N$, A de tipo F_σ $\implies$ $A \in \mathcal{E}$
- $Z \subset \mathbb{R}^N$, $\lambda_N(Z) = 0$ $\implies$ $Z \in \mathcal{E}$
- $\mathcal{E} = \mathcal{M}_N$

Una consecuencia destacable

$$A \in \mathcal{M}_p\,, \quad B \in \mathcal{M}_q \quad \implies \quad A \times B \in \mathcal{M}_N\,, \quad \text{y se tiene:}$$
$$\lambda_N(A \times B) = \lambda_p(A)\,\lambda_q(B)$$

Mejora de un ejemplo anterior

$$Z \subset \mathbb{R}^p, \quad \lambda_p(Z) = 0, \quad W \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^q) \setminus \mathcal{M}_q$$
$$\lambda_N(Z \times \mathbb{R}^p) = 0 \quad \text{luego} \quad Z \times W \in \mathcal{M}_N$$
$$(Z \times W)_x \in \mathcal{M}_q \quad \iff \quad x \in \mathbb{R}^p \setminus Z$$

Teorema de Fubini para funciones integrables

Criterio de integrabilidad

Para $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ se tiene que $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^N)$ si, y sólo si,

$$\int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} |f(x,y)|\, dy \right) dx < \infty \quad \text{o bien} \quad \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} |f(x,y)|\, dx \right) dy < \infty$$

Teorema de Fubini

Para toda función $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^N)$ se tiene:

- $f_x \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^q)$ p.c.t. $x \in \mathbb{R}^p$ y $f^y \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^p)$ p.c.t. $y \in \mathbb{R}^q$
- Las funciones φ y ψ, definidas c.p.d. en $\mathbb{R}^p$ y $\mathbb{R}^q$ respectivamente, por

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\, dy \ \text{ p.c.t. } x \in \mathbb{R}^p \quad \text{y} \quad \psi(y) = \int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\, dx \ \text{ p.c.t. } y \in \mathbb{R}^q$$

verifican que $\varphi \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^p)$ y $\psi \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^q)$ con:

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x,y)\, d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^p} \varphi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^q} \psi(y)\, dy$$

Observaciones sobre el teorema de Fubini (I)

Nomenclatura que se usa y resumen del teorema

Las funciones φ y ψ son las primeras integrales de f

El teorema afirma que están definidas c.p.d. en $\mathbb{R}^p$ y $\mathbb{R}^q$,

y que son integrables, luego tienen sentido sus integrales:

$$\int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\, dy \right) dx \quad \text{y} \quad \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\, dx \right) dy$$

a las que llamamos integrales iteradas de f

Resumen del teorema: la integral de f coincide con sus dos integrales iteradas

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x,y)\, d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\, dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\, dx \right) dy$$

Si no existe una de las integrales iteradas de f, o ambas existen pero no coinciden, el teorema asegura que f no es integrable en $\mathbb{R}^N$

Observaciones sobre el teorema de Fubini (II)

El teorema no sirve para probar que una función sea integrable

$$f(x,y) = \frac{x\,y}{\left(x^2+y^2\right)^2} \quad \forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\,, \qquad f(0,0)=0$$

Las dos integrales iteradas de f existen y coinciden, pero $f\notin\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^2)$

Se puede usar el teorema en un subconjunto medible de $\mathbb{R}^N$

$\Omega\in\mathcal{M}_N\,, \quad f\in\mathcal{L}^+(\Omega)$ o bien $f\in\mathcal{L}(\Omega)$

$$F(x,y)=f(x,y) \quad \forall\,(x,y)\in\Omega\,, \qquad F(x,y)=0 \quad \forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^N\setminus\Omega$$

Se tiene $F\in\mathcal{L}^+(\mathbb{R}^N)$ o bien $F\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ respectivamente

Si $f\in\mathcal{L}^+(\Omega)$, su integral en Ω coincide con la de F en $\mathbb{R}^N$

En el caso $f\in\mathcal{L}(\Omega)$ se tiene: $f\in\mathcal{L}_1(\Omega) \iff F\in\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^N)$

en cuyo caso, la integral de f en Ω coincide con la de F en $\mathbb{R}^N$

Interpretación geométrica de la integral

Gráfica y subgráfica de una función

$\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^p$. La gráfica de una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es

$$Gr(f) = \left\{ \big(x\,,\, f(x) \big) \,:\, x \in \Omega \right\} \subset \mathbb{R}^{p+1}$$

La subgráfica de una función $f : \Omega \to \mathbb{R}_0^+$ es

$$Sg(f) = \left\{ (x,y) \in \Omega \times \mathbb{R} \;:\; 0 < y < f(x) \right\} \subset \mathbb{R}^{p+1}$$

Interpretación geométrica de la integral

Si $\Omega \in \mathcal{M}_p$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}_0^+$ es medible, entonces

la subgráfica de f es un subconjunto medible de $\mathbb{R}^{p+1}$ y se verifica que

$$\lambda_{p+1}\big(Sg(f) \big) = \int_\Omega f(x)\, dx$$

Cálculo de medidas como integrales

Medida de la gráfica

Si $\Omega \in \mathcal{M}_p$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es medible, entonces la gráfica de f es un conjunto de medida nula en $\mathbb{R}^{p+1}$, es decir:

$$Gr(f) \in \mathcal{M}_{p+1} \quad \text{con} \quad \lambda_{p+1}\big(Gr(f)\big) = 0$$

El conjunto entre dos gráficas

$$\Omega \in \mathcal{M}_p\,, \quad f,g \in \mathcal{L}(\Omega)\,, \quad g(x) \leqslant f(x) \quad \forall x \in \Omega$$

Entonces el conjunto $E = \big\{ (x,y) \in \Omega \times \mathbb{R} \,:\, g(x) \leqslant y \leqslant f(x) \big\} \subset \mathbb{R}^{p+1}$

es medible con $\lambda_{p+1}(E) = \displaystyle\int_\Omega \big(f(x) - g(x) \big)\, dx$

Áreas en el plano

Ejemplos de cálculo de áreas

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 < x\,, \quad 0 < y < 1/x^2 \right\}$$

$$\lambda_2(A) = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^{+\infty} = 1$$

$$B = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 < x\,, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1/x \right\}$$

$$\lambda_2(B) = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \infty$$

$$E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1 \right\} \qquad (a,b \in \mathbb{R}^+)$$

$$\lambda_2(E) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda_1(E_x) = \int_{-a}^{a} 2\,(b/a)\,\sqrt{a^2 - x^2}\ dx$$

$$\lambda_2(E) = 2\,a\,b \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\ dt = 2\,a\,b \left[\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2t)}{4} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi\,a\,b$$

Integrales dobles (I)

Advertencia para el cálculo de integrales dobles

$$\Omega \in \mathcal{M}_2\,, \quad f \in \mathcal{L}^+(\Omega) \quad \text{o bien} \quad f \in \mathcal{L}(\Omega)$$

Se entiende que: $\quad F(x,y) = 0 \quad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega$

$$f = \chi_\Omega\, f \quad \text{luego} \quad f_x = \big(\chi_\Omega\big)_x\, f_x = \chi_{\Omega_x}\, f_x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

$$x \in \mathbb{R}, \quad \Omega_x = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad f_x = 0$$

$$x \in \mathbb{R}, \quad f_x \in \mathcal{L}^+(\mathbb{R}) \;\; \text{o} \;\; f_x \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}) \quad \Longrightarrow \quad \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy = \int_{\Omega_x} f(x,y)\,dy$$

Las integrales iteradas ¡¡ sólo !! involucran los valores de f en Ω

Hay que tener muy presente el conjunto Ω

Integrales dobles (II)

Ejemplo de integral doble

$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 < x < 1, \ \ 0 < y < 1/x \right\}$$

$$f(x,y) = x\,e^{-x\,y} \quad \forall\,(x,y) \in \Omega$$

$$\Omega_x = \emptyset \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus]0,1[\,, \qquad \Omega_x =]0, 1/x[\quad \forall x \in]0,1[$$

$$\Omega^y = \emptyset \ \forall y \in \mathbb{R}_0^-\,, \ \ \Omega^y =]0,1[\ \forall y \in]0,1[, \ \ \Omega^y =]0, 1/y[\ \forall y \in [1,+\infty[$$

Una integral iterada: $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^{1/x} x\,e^{-x\,y}\,dy \right) dx$

La otra: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\int_0^1 x\,e^{-x\,y}\,dx + \int_1^{1/y} x\,e^{-x\,y}\,dx \right) dy$

$$\int_0^{1/x} x\,e^{-x\,y}\,dy = \left[-e^{-x\,y} \right]_0^{1/x} = 1 - \frac{1}{e}$$

$$\int_\Omega x\,e^{-x\,y}\,d(x,y) = \int_0^1 \left(\int_0^{1/x} x\,e^{-x\,y}\,dy \right) dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{e} \right) dx = 1 - \frac{1}{e}$$

Integrales dobles (III)

El caso más sencillo

$$J =]\alpha,\beta[\times]\gamma,\delta[, \quad -\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant +\infty, \quad -\infty \leqslant \gamma < \delta \leqslant +\infty$$

La integrales iteradas de $f \in \mathcal{L}^+(J)$, o bien $f \in \mathcal{L}_1(J)$, son

$$\int_\alpha^\beta \left(\int_\gamma^\delta f(x,y)\,dy \right) dx \quad , \quad \int_\gamma^\delta \left(\int_\alpha^\beta f(x,y)\,dx \right) dy$$

Algo más que un ejemplo

$$J =]0,1[\times]0,1[\,, \quad g(x,y) = \frac{y^2 - x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \quad \forall (x,y) \in J$$

$$\int_0^1 \frac{y^2 - x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\,dx = \left[\frac{x}{x^2+y^2} \right]_0^1 = \frac{1}{1+y^2} \quad \forall y \in]0,1[$$

Porque g es antisimétrica

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 g(x,y)\,dx \right) dy = \frac{\pi}{4} \neq -\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \left(\int_0^1 g(x,y)\,dy \right) dx$$

El teorema de Fubini nos dice que g no es integrable en J

Cálculo de volúmenes (I)

Observaciones para el cálculo de volúmenes

- Los cambios de coordenadas son isometrías de $\mathbb{R}^3$
- Tomaremos $p=2$ y $q=1$ la otra elección da los mismos resultados

Sección vertical de $E \subset \mathbb{R}^3$ en un punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$E_{(x,y)} = \left\{ z \in \mathbb{R} : (x,y,z) \in E \right\}$$

Sección horizontal en un punto $z \in \mathbb{R}$:

$$E^z = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \in E \right\}$$

$$E \in \mathcal{M}_3 \implies \lambda_3(E) = \int_{\mathbb{R}} \lambda_2(E^z)\, dz = \int_{\mathbb{R}^2} \lambda_1(E_{(x,y)})\, d(x,y)$$

Cálculo de volúmenes (II)

Volumen encerrado por un elipsoide

$$E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} < 1 \right\}$$

$$E^z = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \frac{x^2}{u^2} + \frac{y^2}{v^2} < 1 \right\} \quad \forall z \in]-c, c[$$

donde $u = (a/c)\sqrt{c^2 - z^2}$ y $v = (a/c)\sqrt{c^2 - z^2}$

$$\lambda_2\big(E^z\big) = \pi \ u \ v = \pi \ \big(ab/c^2\big) \ \big(c^2 - z^2\big)$$

$$\lambda_3(E) = \pi \ \frac{ab}{c^2} \int_{-c}^{c} \big(c^2 - z^2\big)\, dz = \frac{4}{3} \ \pi \ a \ b \ c$$

Integrales triples

Cálculo de integrales triples

Para $f \in \mathcal{L}^+(\mathbb{R}^3)$, o bien $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^3)$, se tiene:

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\, d(x,y,z) = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y,z)\, dz \right) dy \right] dx$$

Hay en total seis integrales iteradas, y todas ellas coinciden con la integral de f

Un ejemplo

$$\Omega = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x,y \in [0,1], \ \ 0 \leqslant y+z \right\}$$

$$\int_{\Omega} \frac{d(x,y,z)}{(1+x+y+z)^2} = \log 2$$