Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Modelos matemáticos I (curso 2021/22)

Teoremas de Perron. Aplicaciones

Theorem 1. *(Teorema de Perron-Frobenius) Sea A una matriz cuadrada $k \times k$ real de coeficientes positivos $[A]_{i,j} > 0$ para cada $i, j \in 1..k$. Entonces $\lambda = \rho(A) > 0$ es un valor propio dominante. Además existe $\vec{v}$ vector propio asociado a λ con todas sus componentes positivas. $[\vec{v}]_i > 0$ para $i \in 1..k$.*

1 Cadenas de Markov

- Si A es matriz de estados y positiva entonces $\lambda = 1$ es dominante luego para cualquier $\vec{x}_0 \in \Delta$ la secuencia de distribuciones definida por
$$\vec{x}_{n+1} = A\vec{x}_n$$
tiende a x^*, único vector propio asociado a $\lambda = 1$ en Δ. Este es el caso de todas las cadenas donde para cualquier $i, j \in 1..k$,
$$\text{Probabilidad}\{S_i \to S_j\} > 0.$$
- En el modelo Pagerank es necesario resolver
$$\vec{x}^* = \mathbb{G}_\alpha \vec{x}^*,$$
donde $\mathbb{G}_\alpha$ es una matriz de estados positiva. Una forma de resolver este problema es usar la secuencia
$$\vec{x}_{n+1} = \mathbb{G}_\alpha \vec{x}_n$$
donde $\vec{x}_0 \in \Delta$ es un vector inicial que se suele tomar según los datos de un cómputo anterior. Esta es la adpatación de un método númerico de calculo de vectores propios llamado método de las potencias.

2 Matrices Ergódicas

- Una matriz de coeficientes no negativos ($A \geq 0_{k\times k}$) se dice ergódica si existe un valor $q \in \mathbb{N}$ tal que A^q es una matriz de coeficientes positivos $A^q >> 0_{k\times k}$.
- Una matriz con una fila o una columna de ceros no es nunca ergódica. (A^q tiene la misma fila/columna de ceros.
- Si $A^{q_0} >> 0_{k\times k}$ entonces $A^q >> 0_{k\times k}$ para $q \geq q_0$, al menor número q_0 verificando esto se llama índice de ergodicidad.

Theorem 2. *Sea A una matriz cuadrada $k \times k$ real ergódica. Entonces $\lambda = \rho(A) > 0$ es un valor propio dominante. Además existe $\vec{v}$ vector propio asociado a λ con todas sus componentes positivas. $[\vec{v}]_i > 0$ para $i \in 1..k$.*

Lemma 1. *(Teorema de Schur) Sea A matriz cuadrada entonces existe una matriz compleja P regular talque $A = P.T.P^{-1}$ y T es una matriz triangular.*

Proposition 1. *Sea A una matriz compleja, $q \in \mathbb{N}$. Entonces*
$$\sigma(A^q) = \sigma(A)^q = \{\lambda^q : \lambda \in \sigma(A)\}.$$
Ademas λ es valor propio dominante de A si y solo si λ^q es dominante de A^q.

3 Criterios de ergodicidad

- Si una matriz es ergodica es automaticamente transitiva.
- Si una matriz es transitiva y existe un elemento que actua sobre el mismo entonces es ergodica.
- Un ciclo es un camino cerrado.
- Si tenemos un p ciclo y A^p es transitiva entonces A es ergodica.

4 Ciclicidad

Se llama ciclicidad de una matriz al maximo comun divisor de todas las loongitudes de los ciclos. Una matriz se dice aciclica si dicho maximo comun divisor es 1.

Theorem 3. *Una matriz es ergodica si y solo si es transitiva y aciclica.*