CÁLCULO II : RELACIÓN DE EJERCICIOS 3 Mario Megías Mateo

3.1. Sea $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$. Dado $a \in \mathbb{R}$ expresar el polinomio $p(x)$ en potencias de $(x-a)$. Como aplicación, expresar en potencias de $(x-2)$ el polinomio $p(x) = 6 + 7x - 3x^2 - 5x^3 + x^4$.

Polinomio de Taylor de orden n de la función $p(x)$ en el punto a :

$$P^{p}_{n,a}(x) = p(a) + p'(a)(x-a) + \frac{p''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{p^{k}(a)}{k!}(x-a)^k + \ldots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Si definimos $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como $p(x) = 6 + 7x - 3x^2 - 5x^3 + x^4$, al ser una función polinómica es de clase C^∞ en $\mathbb{R}$, luego es n veces derivable en $\mathbb{R}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ que tomemos.

Para expresar $p(x)$ en potencias de $(x-2)$ calculamos el polinomio de Taylor de orden 4 de $p(x)$ para $a=2$:

$f(2) = 6 + 7 \cdot 2 - 3 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2^3 + 2^4 = -16$

$f'(x) = 7 - 6x - 15x^2 + 4x^3$, $f'(2) = -33$

$f''(x) = -6 - 30x + 12x^2$, $f''(2) = -18$

$f'''(x) = -30 + 24x$, $f'''(2) = 18$

$f^{(4)}(x) = 24$, $f^{(4)}(2) = 24$

$$p(x) = p(2) + p'(2)(x-2) + \frac{p''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{p'''(2)}{3!}(x-2)^3 + \frac{p^{(4)}(2)}{4!}(x-2)^4 =$$

$$= -16 - 33(x-2) - 9(x-2)^2 + 3(x-2)^3 + (x-2)^4$$