Análisis Matemático II

8 de julio de 2022

1. Enunciar los teoremas de unicidad de la medida de Lebesgue y explicar el interés de tales resultados.

2. Enunciar y demostrar el teorema de aproximación de Lebesgue

3. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se considera la función $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \operatorname{sen}(n\,x) \log\left(1 + \frac{|x|}{n}\right) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Probar que la serie de funciones $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge absoluta y uniformemente en cada subconjunto acotado de $\mathbb{R}$.

4. Sea $\Omega = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1 , y > 0\}$. Probar que la función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} \qquad \forall (x, y) \in \Omega$$

es integrable en Ω y calcular su integral.

5. Dado $r \in \mathbb{R}^+$, probar que el conjunto

$$E = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq r^2 ,\ x^2 + z^2 \leq r^2 \}$$

es medible y calcular su volumen.