# Práctica 4. Funciones implícitas

## Ejercicios resueltos

**1.** Probar que el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} e^{u+x}\cos(y+v)-x^2+y^2 &= 0 \\ e^{u+x}\operatorname{sen}(y+v)-2xy &= 0 \end{aligned}$$

define funciones implícitas $u=u(x,y)$ y $v=v(x,y)$, diferenciables en un entorno del punto $(1,0)$, con $u(1,0)=-1$ y $v(1,0)=0$. Calcular las derivadas parciales de $u$ y $v$ en dicho punto.

**Solución**

Tomamos $\Omega=\mathbb{R}^4$ y consideramos la función $F=(F_1,F_2):\Omega\to\mathbb{R}^2$ definida, para cualesquiera $x,y,u,v\in\mathbb{R}$, por

$$\begin{aligned} F_1(x,y,u,v) &= e^{u+x}\cos(y+v)-x^2+y^2 \\ F_2(x,y,u,v) &= e^{u+x}\operatorname{sen}(y+v)-2xy \end{aligned}$$

Se tiene claramente que $F(1,0,-1,0)=(0,0)$. También es evidente que $F_1$ y $F_2$ son funciones de clase $C^1$ en $\mathbb{R}^4$, pues ambas se obtienen mediante sumas, productos y composiciones de funciones de clase $C^1$: funciones polinómicas, la exponencial, el seno y el coseno. Por tanto $F\in C^1(\mathbb{R}^4,\mathbb{R}^2)$.

En todo punto $P=(x,y,u,v)\in\mathbb{R}^4$, se tiene claramente que

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial x}(P) &= e^{u+x}\cos(y+v)-2x & \frac{\partial F_1}{\partial y}(P) &= -e^{u+x}\operatorname{sen}(y+v)+2y \\ \frac{\partial F_1}{\partial u}(P) &= e^{u+x}\cos(y+v) & \frac{\partial F_1}{\partial v}(P) &= -e^{u+x}\operatorname{sen}(y+v) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(P) &= e^{u+x}\operatorname{sen}(y+v)-2y & \frac{\partial F_2}{\partial y}(P) &= e^{u+x}\cos(y+v)-2x \\ \frac{\partial F_2}{\partial u}(P) &= e^{u+x}\operatorname{sen}(y+v) & \frac{\partial F_2}{\partial v}(P) &= e^{u+x}\cos(y+v) \end{aligned}$$

En particular, en el punto $P_0=(1,0,-1,0)$, obtenemos

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F_1}{\partial x}(P_0)=-1, \quad \frac{\partial F_1}{\partial y}(P_0)=0, \quad \frac{\partial F_1}{\partial u}(P_0)=1, \quad \frac{\partial F_1}{\partial v}(P_0)=0 \\ &\frac{\partial F_2}{\partial x}(P_0)=0, \quad \frac{\partial F_2}{\partial y}(P)=-1, \quad \frac{\partial F_2}{\partial u}(P_0)=0, \quad \frac{\partial F_2}{\partial v}(P_0)=1 \end{aligned}$$

Así pues, la matriz jacobiana que nos interesa es

$$JF(1,0,-1,0) \;=\; \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como consecuencia tenemos claramente que

$$\det\left(\frac{\partial\,(F_1,F_2)}{\partial(u,v)}\right) \;=\; \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \;=\; 1 \neq 0$$

Por tanto, el teorema de función implícita nos dice que el sistema del enunciado define funciones implícitas $u = u(x,y)$ y $v = v(x,y)$, que son diferenciables en un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ con $(1,0) \in U$, $u(1,0) = -1$ y $v(1,0) = 0$.

Para todo $(x,y) \in U$, el mencionado sistema nos dice ahora que

$$\begin{aligned} &e^{\,x+u(x,y)}\,\cos\big(y+v(x,y)\big) \,-\, x^2 \,+\, y^2 \,=\, 0 \qquad \text{y} \\ &e^{\,x+u(x,y)}\,\operatorname{sen}\big(y+v(x,y)\big) \,-\, 2xy \,=\, 0 \end{aligned} \tag{$*$}$$

Tenemos aquí dos funciones idénticamente nulas en $U$, cuyas derivadas parciales también deberán ser idénticamente nulas. Así pues, si abreviamos entendiendo que todas las funciones se evalúan en un punto arbitrario $(x,y) \in U$, se tiene:

$$\begin{aligned} e^{\,x+u}\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cos(y+v) \,-\, e^{\,x+u}\,\operatorname{sen}(y+v)\,\frac{\partial v}{\partial x} \,-\, 2x \,&=\, 0 \\ e^{\,x+u}\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\operatorname{sen}(y+v) \,+\, e^{\,x+u}\,\cos(y+v)\,\frac{\partial v}{\partial x} \,-\, 2y \,&=\, 0 \end{aligned}$$

Para $(x,y) = (1,0)$, como $u(1,0) = -1$ y $v(1,0) = 0$, obtenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,0) \,=\, 1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial x}(1,0) \,=\, 0$$

Análogamente, de $(*)$ deducimos que, para todo $(x,y) \in U$ se tiene:

$$\begin{aligned} e^{\,x+u}\cos(y+v)\,\frac{\partial u}{\partial y} \,-\, e^{\,x+u}\,\operatorname{sen}(y+v)\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right) \,+\, 2y \,&=\, 0 \\ e^{\,x+u}\operatorname{sen}(y+v)\,\frac{\partial u}{\partial y} \,+\, e^{\,x+u}\,\cos(y+v)\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right) \,-\, 2x \,&=\, 0 \end{aligned}$$

y en particular, para $(x,y) = (1,0)$ concluimos que

$$\frac{\partial u}{\partial y}(1,0) \,=\, 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial y}(1,0) \,=\, 1$$

Con esto hemos calculado las derivadas parciales de $u$ y $v$ en $(1,0)$. ■

**2.** Probar que la ecuación

$$x\,y\,z + \log(z-5) - 2\,x - 2\,y - 2\,x^2y^2 = 0$$

define una función implícita $z = z(x,y)$, diferenciable en un entorno de $(1,1)$, con $z(1,1) = 6$. Calcular $\nabla z(1,1)$.

**Solución**

Consideramos el conjunto $\Omega = \big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z > 5 \big\}$, que es un abierto de $\mathbb{R}^3$, y la función $F : \Omega \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x,y,z) = x\,y\,z + \log(z-5) - 2\,x - 2\,y - 2\,x^2y^2 \qquad \forall\,(x,y,z) \in \Omega$$

que claramente verifican $(1,1,6) \in \Omega$ y $F(1,1,6) = 0$.

La función $(x,y,z) \mapsto \log(z-5)$ es de clase $C^1$ en $\Omega$, como composición de una función polinómica, que toma valores en $\mathbb{R}^+$, con el logaritmo, que es una función de clase $C^1$ en $\mathbb{R}^+$. Como $F$ es la suma de la función anterior con otra función polinómica, concluimos que $F \in C^1(\Omega)$.

Para todo $(x,y,z) \in \Omega$ se tiene que

$$\nabla F(x,y,z) = \left( y\,z - 2 - 4\,x\,y^2 \,,\; x\,z - 2 - 4\,x^2y \,,\; x\,y + \frac{1}{z-5} \right)$$

Para $(x,y,z) = (1,1,6)$ obtenemos que $\nabla F(1,1,6) = \big(0,0,2\big)$, y en particular se tiene:

$$\frac{\partial F}{\partial z}(1,1,6) = 2 \neq 0$$

El teorema de la función implícita nos dice que la ecuación dada define una función implícita $z = z(x,y)$, diferenciable en un entorno $U$ de $(1,1)$ con $z(1,1) = 6$.

Para todo $(x,y) \in U$ se tiene entonces que

$$x\,y\,z(x,y) + \log\big(z(x,y) - 5\big) - 2\,x - 2\,y - 2\,x^2y^2 = 0$$

y tenemos una función idénticamente nula, cuyas derivadas parciales también lo serán. Por tanto, para todo $(x,y) \in U$, evaluando la función $z$ y sus derivadas parciales en el punto $(x,y)$ obtenemos que

$$\begin{aligned} y\,z + x\,y\,\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{z-5}\,\frac{\partial z}{\partial x} - 2 - 4\,x\,y^2 &= 0 \\ x\,z + x\,y\,\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{1}{z-5}\,\frac{\partial z}{\partial y} - 2 - 4\,x^2\,y &= 0 \end{aligned}$$

Para $(x,y) = (1,1)$, teniendo en cuenta que $z(1,1) = 6$, obtenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,1) = \frac{\partial z}{\partial y}(1,1) = 0$$

Se tiene por tanto que $\nabla z(1,1) = (0,0)$. ■