⑥ Demostrar las siguientes desigualdades para valores de x indicados en cada caso:

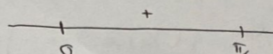
c) $\frac{2x}{\pi} < \text{sen } x < x < \text{tg } x \quad , \forall x \in \left]0, \pi/2\right[$

→ Demostramos primero: $\frac{2x}{\pi} < \text{sen } x \quad \forall x \in \left]0, \pi/2\right[$

- Para ello, defino $h(x) = \text{sen } x - \frac{2x}{\pi}$ y buscamos las raíces:

  $h(x) = \text{sen } x - \frac{2x}{\pi} = 0 \rightarrow x = 0$ y $x = \frac{\pi}{2}$

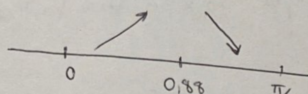
  Como $h(x)$ corta al eje en $x=0$ y $x=\pi/2$,
  pero no está definido en ninguno de esos puntos,
  en el intervalo $\left]0, \pi/2\right[$ tendrá signo constante.



  $h(\pi/4) > 0 \Rightarrow h(x) > 0 \quad \forall x \in \left]0, \pi/2\right[$

- Para asegurarnos, estudiamos la primera derivada:

  $h'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi} = 0 \Leftrightarrow x \simeq 0{,}88$



  $h'(\frac{1}{2}) \simeq 0{,}24 > 0 \Rightarrow h$ creciente en $\left]0, 0'88\right[$
  $h'(1) \simeq -0{,}09 < 0 \Rightarrow h$ decreciente en $\left]0'88, \pi/2\right[$

  $h''(x) = -\text{sen } x$
  $h''(0{,}88) < 0 \Rightarrow h$ tiene un máximo relativo en $0{,}88$.

  La función h toma valores positivos en el intervalo $\left]0, \pi/2\right[$, luego se verifica $\frac{2x}{\pi} < \text{sen } x \quad \forall x \in \left]0, \pi/2\right[$

→ Veamos ahora: $\text{sen } x < x \quad \forall x \in \left]0, \pi/2\right[$

  Definimos $g(x) = x - \text{sen } x$.

- Si calculamos la raíces obtenemos $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Como $g(\pi/4) > 0 \Rightarrow$ $g(x) > 0 \quad \forall x \in \left]0, \pi/2\right[$.

- Estudiamos la primera derivada:

  $g'(x) = 1 - \cos x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

  Como $g'(1/2) = 0{,}12 > 0 \Rightarrow g$ creciente en $\left]0, \pi/2\right[$

Luego, hemos obtenido, $g(x) > 0$ $\forall x \in]0, \pi/2[$ y se verifica la desigualdad.

→ Por último, veamos $tg\,x \geq x$ $\forall x \in]0, \pi/2[$

Definimos $f(x) = tg\,x - x$.

- Si calculamos las raíces de f, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, como $f(\pi/4) > 0 \Rightarrow f(x) > 0$ $\forall x \in]0, \pi/2[$.

- Calculamos la derivada: $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0;\ x = \pi$

  Como $f'(1/2) > 0 \Rightarrow f$ es creciente en el intervalo $]0, \pi[$, y por tanto en el intervalo $]0, \pi/2[$.

Se verifica, $tg\,x > 0$ $\forall x \in]0, \pi/2[$.