11/ DEMOSTRAR QUE LA COMPOSICIÓN DE DOS FUNCIONES INTEGRABLES PUEDE NO SER UNA FUNCIÓN INTEGRABLE

$$f(x)\begin{cases} 1, & x \in \{0,1\} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \text{ con m.c.d. } (p,q)=1 \end{cases}$$

Con la función de Thomae ($f(x)$) y

$$g(x)\begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$x \in [0,1]$

Se forma $g \circ f(x) = g(f(x))$, conocida como función "peine" de Dirichlet:

$c \neq d$; $c, d \in \mathbb{R}$

$$D(x) = \begin{cases} c & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ d & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

$d = 0$, $c = 1$, en este caso.

Como $f(x)$ y $g(x)$ son integrables, pero su combinación forma una función discontinua en todo su dominio conocida por no ser integrable, se demuestra el enunciado.