Relación de ejercicios 5 EDIP

Carlos García, Bora Goker, Javier Gómez,
Ana Graciani, J.Alberto Hoces

2020/2021

Ejercicio 1. Sea X una variable aleatoria con función masa de probabilidad $P(X = i) = ki$; $i = 1, ..., 20$.

a) Determinar el valor de k, la función de distribución y las siguientes probabilidades:

$$P(X = 4),\ P(X < 4),\ P(3 \leq X \leq 10),\ P(3 < X \leq 10),\ P(3 < X < 10)$$

Para poder determinar el valor de k, hemos de tener en cuenta que estamos ante una variable aleatoria discreta X, y la función masa de probabilidad de una variable aleatoria debe cumplir que $\sum_i P(X = i) = 1$. En nuestro caso concretamente es $\sum_{i=1}^{20} P(X = i) = 1$, lo cual se traduce en la siguiente ecuación:

$$\sum_{i=1}^{20} P(X = i) = 1 \to 210k = 1 \to k = \frac{1}{210}$$

Para hallar la función de distribución tendremos en cuenta su definición:

$$F_X(i) = P(X \leq i) = \sum_{j=1}^{i} P(X = j) \quad \forall i \in \{1, ..., 20\}$$

Por lo que la función de distribución de la variable aleatoria X estará definida como:

$$F_X(i) = \begin{cases} 0 & si \quad i \leq 1 \\ \sum_{j=1}^{i} P(X = j) = \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{210} \cdot j & si \quad 1 \leq i \leq 20 \\ 1 & si \quad x > 20 \end{cases}$$

Y ahora podemos emplear esta función para hallar las probabilidades pedidas (cuando sea la probabilidad de que la variable aleatoria tome un valor concreto, usaremos la función masa de probabilidad):

$$P(X = 4) = \frac{1}{210} \cdot 4 = \frac{2}{105} = 0{,}0190476$$

$$P(X < 4) = P(X \leq 3) = F_X(3) = \frac{1}{210} + \frac{2}{210} + \frac{3}{210} = \frac{1}{35} = 0{,}0285714$$

$$P(3 \leq X \leq 10) = P(X \leq 10) - P(X < 3) = P(X \leq 10) - P(X \leq 2) = F_X(10) - F_X(2) =$$

$$= \sum_{j=3}^{10} \frac{1}{210} \cdot j = \frac{26}{105} = 0{,}247619$$

$$P(3 < X \leq 10) = P(X \leq 10) - P(X \leq 3) = F_X(10) - F_X(3) = \sum_{j=4}^{10} \frac{1}{210} \cdot j = \frac{7}{30} = 0{,}233333$$

$$P(3 < X < 10) = P(X < 10) - P(X \leq 3) = P(X \leq 9) - P(X \leq 3) = F_X(9) - F_X(3) =$$

$$= \sum_{j=4}^{9} \frac{1}{210} \cdot j = \frac{13}{70} = 0{,}1857142$$

b) Supongamos que un jugador gana 20 monedas si al observar esta variable obtiene un valor menor que 4, gana 24 monedas si obtiene el valor 4 y, en caso contrario, pierde una moneda. Calcular la ganancia esperada del jugador y decir si el juego le es favorable.

Definimos una nueva variable aleatoria Y que será el número de monedas obtenidas en función de los valores que toma la variable aleatoria X:

$$Y = h(X) = \begin{cases} 20 & si \quad 1 < X < 4 \\ 24 & si \quad X = 4 \\ -1 & si \quad 4 < X \leq 20 \end{cases}$$

Y calculamos la probabilidad de que la variable Y tome cada uno de sus valores posibles para que podamos hallar su esperanza:

$$P(Y = 20) = P(X < 4) = P(X \leq 3) = F_X(3) = \frac{1}{210} + \frac{2}{210} + \frac{3}{210} = \frac{1}{35} = 0{,}0285714$$

$$P(Y = 24) = P(X = 4) = \frac{1}{210} \cdot 4 = \frac{2}{105} = 0{,}0190476$$

$$P(Y = -1) = P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - P(X < 4) - P(X = 4) = \frac{20}{21} = 0{,}95238$$

Ya podemos hallar la esperanza matemática de $Y (y_1 = 20, y_2 = 24, y_3 = -1)$:

$$E[Y] = \sum_{i}^{3} y_i P(Y = y_i) = \frac{20}{35} + \frac{48}{105} - \frac{20}{21} = \frac{8}{105} = 0{,}0761904$$

Como la esperanza de Y es mayor que 0, el juego es favorable al jugador.

Ejercicio 2. Sea X el número de bolas blancas obtenidas al sacar dos de una urna cpn 10 bolas de las que 8 son blancas. Calcular:

a) Función masa de probabilidad y función de distribución.

$P(X = 0) = \dfrac{\binom{2}{2}}{\binom{10}{2}} = \dfrac{1}{45} = 0{,}022$

$P(X = 1) = \dfrac{\binom{2}{1}\cdot\binom{8}{1}}{\binom{10}{2}} = \dfrac{16}{45} = 0{,}356$

$P(X = 2) = \dfrac{\binom{8}{2}}{\binom{10}{2}} = \dfrac{28}{45} = 0{,}622$

F(x) =

$$\begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{45} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{17}{45} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

b) Media, mediana y moda, dando la interpretación de cada una de estas medidas.

$E[X] = 0\cdot\dfrac{1}{45} + 1\cdot\dfrac{16}{45} + 2\cdot\dfrac{28}{45} = \dfrac{8}{5} = 1{,}6$ bolas blancas. La media es el centro de gravedad de la distribución, en este caso son 1.6 bolas blancas.

Para calcular la mediana nos fijamos en la función masa y escogemos el valor inmediatamente mayor a 0.5, en este caso $\dfrac{28}{45}$, por lo que Me = 2. Es el valor que deja por encima y por debajo la misma probabilidad.

En el caso de la moda, se escoge el mayor valor de la función maso, en este caso, al igual que la mediana es $\dfrac{28}{45}$, por lo que Mo = 2. El valor con mayor probabilidad.

c) Intervalo intercuartílico, especificando su interpretación.

El primer cuartil es el valor cuya función de distribución es inmediatamente superior o igual a 0.25, en este caso sería 1, ya que su función de distribución es 0.378, por otro lado el tercer cuartil sería 2, ya que es 1 es el valor inmediatamente superior a 0.75. Por tanto el intervalo intercuartílico es 2 - 1 = 1, que es el intervalo en el que está contenido el 50 % de la probabilidad central.

Ejercicio 3. El número de lanzamientos de una moneda hasta salir cara es una variable aleatoria con distribución $P(X = x) = 2^{-x}$; $x = 1, 2, \ldots$.

a) Probar que la función masa de probabilidad está bien definida.

Para que la función masa esté bien defindida, se tiene que cumplir que:

$$P(X = x_i) \geq 0 \quad \forall i \in \mathbb{N} \qquad \sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-x} \overset{\text{Serie Geométrica}}{\Rightarrow} \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

La primera condición se cumple siempre, puesto que que la función tiene la expresión 2^{-x}, la cual es positiva $\forall x \in \mathbb{R}$.

La segunda condición se demuestra observando que es una serie geométrica, las cuales convergen si y solo si su razón $|r| < 1$. En este caso:

$$|r| = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{La serie converge}$$

Se cumplen las dos condiciones, así, afirmamos que la función masa de probabilidad está bien definida.

b) Calcular la probabilidad de que el número de lanzamientos necesarios para salir cara esté entre 4 y 10.

Esto es calcular

$$P(4 \leq x \leq 10) = \sum_{i=4}^{10} p_i = 2^{-4} \cdot 2^{-5} \cdot 2^{-6} \cdot 2^{-7} \cdot 2^{-8} \cdot 2^{-9} \cdot 2^{-10} = \frac{127}{1024}$$

c) Calcular los cuartiles y la moda de la distribución, interpretando los valores.

Como se ha visto en otros temas, sabemos que el percentil de orden n se calcula:

$$P(X \leq x_i) = \frac{n}{100} \Rightarrow P_n = x_i.$$

Así,

$$P(X \leq x_i) = 0{,}25 \Rightarrow x_i = 1 \Rightarrow Q_1 = 1 \qquad P(X \leq x_i) = 0{,}5 \Rightarrow x_i = 1 \Rightarrow Q_2 = 1$$

$$P(X \leq x_i) = 0{,}75 \Rightarrow P(X = 1) + P(X = 2) \geq \frac{3}{4} \Rightarrow Q_3 = 2$$

En una variable aleatoria discreta, definimos la moda como:

$$Mo = x_i : P(X = x_i) = \max\{p_i\}$$

Al ser la función masa de probabilidad decreciente, el máximo valor se encuentra en 1. Así:

$$x_1 = 1 \Rightarrow Mo = 1$$

d) Calcular función generatriz de momentos y, a partir de ella, el número medio de lanzamientos necesarios para salir cara y la desviación típica.

Definimos la función generatriz de momentos como

$$M_x(t) = E[e^{tX}] \quad \forall t \in (t_0, t_1) \text{ centrado en el origen}$$

$$M_x(t) = \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{2^x} = \sum_{x=1}^{\infty} \left(\frac{e^t}{2}\right)^x = \frac{\frac{e^t}{2}}{1 - \frac{e^t}{2}}$$

Observamos que esta serie es absolutamente convergente $\forall t < \log(2)$, por lo que converge en un entorno de cero, y por tanto, existe la función generatriz de momentos.

Ahora calculemos su esperanza:

$$E[X] = M_X'(t) = \frac{\frac{e^t}{2}(1 - \frac{e^t}{2}) - \frac{e^t}{2} \cdot -\frac{e^t}{2}}{(1 - \frac{e^t}{2})^2}$$

$$M'_X(0) = 2 = E[X]$$

Por último calculamos su desviación típica:

$$E[X^2] = M''_X(t) = \frac{2e^t(e^t-2)^2 - 2e^t(e^t-2)e^t}{(e^t-2)^4}$$

$$M''_X(0) = 6 \Rightarrow Var|X| = E[X^2] - E[X]^2 = 2 \Rightarrow \sigma_x = \sqrt{2}$$

Ejercicio 4. Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} k_1(x+1) & 0 \leq x \leq 4 \\ \\ k_2 x^2 & 4 < x \leq 6 \end{cases}$$

Sabiendo que $P(0 \leq X \leq 4) = 2/3$, determinar k_1, k_2, y deducir su función de distribución.

$$P(0 \leq X \leq 4) = \int_0^4 k_1(x+1)dx = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_0^4 = k_1\left(\frac{4^2}{2} + 4\right) = 12k_1 = \frac{2}{3} \Longrightarrow \quad k_1 = \frac{1}{18}$$

$$P(4 < X \leq 6) = 1 - P(0 \leq X \leq 4) = \frac{1}{3}$$

$$P(4 < X \leq 6) = \int_6^4 k_2 x^2 dx = k_2 \left.\frac{x^3}{3}\right|_6^4 = k_2\left(\frac{6^3}{3} - \frac{4^3}{3}\right) = k_2 \cdot \frac{152}{3} = \frac{1}{3} \Longrightarrow \quad k_2 = \frac{1}{152}$$

Función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x \\ \\ \frac{1}{18}\left(\frac{x^2}{2} + x\right) & 0 \leq x \leq 4 \\ \\ \frac{2}{3} + \frac{1}{152}\left(\frac{x^3-64}{3}\right) & 4 < x \leq 6 \\ \\ 1 & x > 6 \end{cases}$$

Ejercicio 5. La dimensión en centímetros de los tornillos que salen de cierta fábrica es una variable aleatoria, X, con función de densidad

$$f(x) = \frac{k}{x^2}, \quad 1 \leq x \leq 10.$$

a) Determinar el valor de k, y obtener la función de distribución.

Comencemos encontrando el valor de k:

$$\int_1^{10} \frac{k}{x^2}dx = 1 \Rightarrow k\int_1^{10} \frac{1}{x^2}dx = k - \left.\frac{1}{x}\right|_1^{10} = k\left(-\frac{1}{10} - \left(-\frac{1}{1}\right)\right) = k\left(1 - \frac{1}{10}\right) = k\frac{9}{10} = 1$$

$$k = \frac{10}{9}$$

Y podemos afirmar que la función de distribución es:

$$F(x) = \begin{cases} \int_1^x \frac{10}{9x^2} & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 10 \\ \\ 0 & \text{si} \quad x < 1 \end{cases}$$

b) Hallar la probabilidad de que la dimensión de un tornillo esté entre 2 y 5 cm.

$$\int_2^5 \frac{10}{9x^2}dx = \frac{10}{9}\int_2^5 \frac{1}{x^2}dx = \frac{10}{9}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_2^5 = \frac{10}{9}\left(-\frac{1}{5}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{10}{9}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right) = \frac{10}{9}\cdot\frac{3}{10} = \frac{1}{3}$$

Por lo tanto:

$$A = \text{Un tornillo tiene una dimensión entre 2 y 5 cm} \quad P(A) = \frac{1}{3}$$

c) Determinar la dimensión máxima del 50 % de los tornillos con menor dimensión y la dimesión mínima del 5 % con mayor dimensión.

Nos están pidiendo primero la mediana:

$$Me = \frac{10}{9}\int_1^x f(z)dz = \frac{10}{9}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^x = 0{,}5$$

$$-\frac{1}{x}\Big|_1^x = \frac{9}{10}\cdot 0{,}5 \Rightarrow -\frac{1}{x}+1 = 0{,}45 \Rightarrow \frac{1}{x} = 0{,}55 \Rightarrow x = 1{,}818 \text{ cm}$$

Por otro lado nos están pidiendo el percentil 95:

$$\frac{10}{9}\int_1^x \frac{1}{x^2}dx = \frac{10}{9}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^x = 0{,}95 \Rightarrow -\frac{1}{x}\Big|_1^x = 0{,}855$$

$$-\frac{1}{x}+1 = 0{,}855 \Rightarrow \frac{1}{x} = 0{,}145 \Rightarrow x = 6{,}896 \text{ cm}$$

d) Si Y denota la dimensión de los tornillos producidos en otra fábrica, con la misma medida y desviación típica que X, dar un intervalo en el que tome valores la variable Y con una probabilidad mínima de 0.99.

Puesto que ambas variables tienen la misma media y la misma desviación típica, podemos calcular dichos valores a través de la variable X

$$m_1 = E[X] = E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{1} 0dx + \int_1^{10} \frac{10}{9x}dx + \int_{10}^{+\infty} 0dx = \frac{10\log(10)}{9} = 2{,}558 \text{ cm}$$

$$m_2 = E[X^2] = \int_1^{10} \frac{10}{9}dx = 10 \text{ cm}^2 \Rightarrow \sigma_x = \sqrt{m_2 - m_1^2} = 1{,}859 \text{ cm}$$

Podemos afirmar que la variable X cumple la desigualdad de Chebyshev:

$$P(E[Y] - k\sigma_x \leq X \leq E[Y] + k\sigma_x) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Tomando $1 - \frac{1}{k^2} = 0{,}99 \Rightarrow k = 10$. Por lo que el intervalo que buscamos es [-16.02, 21.14]. pero al ser medidas de tornillos solo tomamos los valores positivos, así, el intervalo buscado es el [0, 21.14].

Ejercicio 6. Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x-1}{10} & 1 < x \leq 2 \\ \\ 0{,}4 & 4 < x \leq 6 \end{cases}$$

a) Calcular $P(1{,}5 < X \leq 2)$, $P(2{,}5 < X \leq 3{,}5)$, $P(4{,}5 \leq X \leq 5{,}5)$, $P(1{,}2 < X \leq 5{,}2)$.

Primero calculamos:

$$\int_a^t \frac{2x-1}{10}dx = \left.\frac{x^2-x}{10}\right|_a^t \qquad t \in [1,2]$$

$$\int_a^t 0{,}4x = 0{,}4x|_a^t \qquad t \in [4,6]$$

Así:

$$P(1{,}5 < X \leq 2) = \left.\frac{x^2-x}{10}\right|_{1{,}5}^2 = \frac{1}{8} \qquad P(2{,}5 < X \leq 3{,}5) = 0$$

$$P(4{,}5 \leq X \leq 5{,}5) = 0{,}4x|_{4{,}5}^{5{,}5} = \frac{2}{5} \qquad P(1{,}2 < X \leq 5{,}2) = \left.\frac{x^2-x}{10}\right|_{1{,}2}^2 + 0{,}4x|_4^{5{,}2} = \frac{82}{125}$$

b) Dar la expresión general de los momentos no centrados y deducir el valor medio de X.

Primero daremos la expresión del momento de orden k no centrado:

$$m_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx = \int_{-\infty}^{1} 0dx + \int_1^2 x^k \frac{2x-1}{10}dx + \int_2^4 0dx + \int_4^6 0{,}4x^k dx + \int_6^{+\infty} 0dx =$$

$$= \int_1^2 \frac{2x-1}{10}dx + \int_4^6 0{,}4x^k dx$$

Y por tanto podemos afirmar que la esperanza (valor medio) es:

$$E[X] = m_1 = \int_1^2 x\frac{2x-1}{10}dx + \int_4^6 0{,}4xdx = \left.\frac{2x^3}{30} - \frac{x^2}{20}\right|_1^2 + \left.\frac{x^2}{5}\right|_4^6 = \frac{259}{60}$$

c) Calcular la función generatriz de momentos de X.

Definimos la función generatriz de momentos como

$$M_X(t) = E[e^{tX}] \quad \forall t \in (t_0, t_1) \text{ que contenga al origen}$$

Así

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)dx = \int_1^2 e^{tx}\frac{2x-1}{10}dx + \int_4^6 0{,}4e^{tx}dx =$$

$$\frac{1}{10}\cdot\left.\left(2\left(xe^{tx} - \frac{e^{tx}}{t^2}\right) - \frac{e^{tx}}{t}\right)\right|_1^2 + 0{,}4\left.\frac{e^{tx}}{t}\right|_4^6 < +\infty \quad \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists M_X(t)$$

Ejercicio 7. Con objeto de establecer un plan de producción, una empresa ha estimado que la demanda de sus clientes, en miles de unidades del producto, se comporta semanalmente con arreglo a una ley de probabilidad dada por la función de densidad:

$$f(x) = \frac{3}{4}(2x - x^2), \quad 0 \leq x \leq 2$$

a) ¿Qué cantidad deberá tener dispuesta a la venta al comienzo de cada semana para poder satisfacer plenamente la demanda con probabilidad 0.5?

Se nos está pidiendo calcular el valor x que toma la variable aleatoria continua X "cantidad dispuesta a la venta" tal que $P(X \leq x) = F_X(x) = 0{,}5$, por lo que nos hace falta conocer la función de distribución de X. Al tratarse de una variable aleatoria continua, podemos calcularla a partir de la función de densidad de la siguiente forma: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

$$F_X(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} 0dt & si \quad x < 0 \\ \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} \frac{3}{4}(2t - t^2)dt & si \quad 0 \leq x \leq 2 \\ \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{2} \frac{3}{4}(2t - t^2)dt + \int_{2}^{x} 0dt & si \quad x > 2 \end{cases}$$

Desarrollamos las integrales:

$$\int_0^x \frac{3}{4}(2t - t^2)dt = \left[\frac{3t^2}{4} - \frac{t^3}{4}\right]_0^x = \frac{3x^2}{4} - \frac{x^3}{4}$$

$$\int_0^2 \frac{3}{4}(2t - t^2)dt = \left[\frac{3t^2}{4} - \frac{t^3}{4}\right]_0^2 = \frac{12}{4} - \frac{8}{4} = 1$$

Y la función de distribución queda así:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ \frac{3x^2}{4} - \frac{x^3}{4} & si \quad 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & si \quad x > 2 \end{cases}$$

Como F_X solo puede tomar el valor 0.5 en el intervalo $[0, 2]$, tendremos que resolver la siguiente ecuación:

$$\frac{3x^2}{4} - \frac{x^3}{4} = \frac{1}{2} \to x^3 - 3x^2 + 2 = 0$$

Y dicha ecuación tiene como soluciones: $x_1 = 1, x_2 = 1 - \sqrt{3}, x_3 = 1 + \sqrt{3}$. De entre esas soluciones, podemos descartar x_2 ya que es menor que 0 y nuestra variable aleatoria solo toma valores positivos. También podemos descartar x_3 ya que es mayor que 2 y por lo tanto $P(X \leq x_3) = 1 \neq 0{,}5$, por lo que el x que buscamos es $x = 1$, y podemos concluir que será necesario tener 1000 unidades disponibles a la venta desde el principio de la semana si se quiere satisfacer plenamente la demanda con probabilidad 0.5.

b) Pasado cierto tiempo, se observa que la demanda ha crecido, estimándose que en ese momento se distribuye según la función de densidad:

$$f(y) = \frac{3}{4}(4y - y^2 - 3), \quad 1 \leq y \leq 3$$

Los empresarios sospechan que este crecimiento no ha afectado a la dispersión de la demanda, ¿es cierta esta sospecha?

Para determinar si es cierta la sospecha, calcularemos los coeficientes de variación de las variables aleatorias X e Y, para lo cual necesitaremos hallar $E[X], E[Y], Var(X)$ y $Var(Y)$:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{2} \frac{3}{4}(2x^2 - x^3)dx + \int_{2}^{+\infty} 0dx = \left[\frac{x^3}{2} - \frac{3x^4}{16}\right]_0^2 = 1$$

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f(y)dx = \int_{-\infty}^{1} 0dy + \int_{1}^{3} \frac{3}{4}(4y^2 - y^3 - 3y)dy + \int_{3}^{+\infty} 0dy = \left[y^3 - \frac{3y^4}{16} - \frac{9y^2}{8}\right]_1^3 = 2$$

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{2} \frac{3}{4}(2x^3 - x^4)dx + \int_{2}^{+\infty} 0dx = \left[\frac{3x^4}{8} - \frac{3x^5}{20}\right]_0^2 = 1{,}2$$

$$E[Y^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \cdot f(y)dx = \int_{-\infty}^{1} 0dy + \int_{1}^{3} \frac{3}{4}(4y^3 - y^4 - 3y^2)dy + \int_{3}^{+\infty} 0dy =$$

$$= \left[\frac{3y^4}{4} - \frac{3y^5}{20} - \frac{3y^3}{4}\right]_1^3 = 4{,}2$$

$$C.V.(X) = \frac{\sqrt{Var(X)}}{E[X]} = \frac{\sqrt{E[X^2] - E[X]^2}}{E[X]} = \frac{\sqrt{0{,}2}}{1} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$C.V.(Y) = \frac{\sqrt{Var(Y)}}{E[Y]} = \frac{\sqrt{E[Y^2] - E[Y]^2}}{E[Y]} = \frac{\sqrt{0{,}2}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{10}$$

A la vista de los coeficientes de variación obtenidos, las sospechas eran ciertas ya que estos no coinciden.

Ejercicio 8. Calcular las funciones de densidad de las variables $Y = 2X + 3$ y $Z = |X|$, siendo X una variable continua con función de densidad

$$f_X(x) = \frac{1}{4}, -2 < x < 2.$$

- $Y = 2X + 3 = h(X) \qquad \forall x \in (-2, 2)$

  $h(]-2, 2[) =]-1, 7[\implies \qquad h^{-1}(y) = \frac{y-3}{2} \qquad \forall y \in (-1, 7)$
  $\frac{dh^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{2}$

  Por el teorema de cambio de variable de continua a continua:
  $g(y) = f\left(\frac{1}{2}\right)\left|\frac{1}{2}\right| \quad \forall y \in (-1, 7)$

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{8} & y \in (-1, 7) \\ \\ 0 & y \notin (-1, 7) \end{cases}$$

- $Z = |X| = h(X) \qquad \forall x \in (-2,2)$

$$h(X) = \begin{cases} h_1(X) = -X & X < 0 \\ \\ h_2(X) = X & 0 \leq X \end{cases} \qquad \forall X \in (-2,2)$$

$h(]-2,2[) = [0,2[$

$$\begin{cases} h_1^{-1}(z) = -z & \forall z \in [0,2) \\ \\ h_2^{-1}(z) = z & \forall z \notin [0,2) \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{dh_1^{-1}(z)}{dz} = -1 & \forall z \in [0,2) \\ \\ \frac{dh_2^{-1}(z)}{dz} = 1 & \forall z \notin [0,2) \end{cases}$$

Por el teorema de cambio de variable de continua a continua:
$g(z) = f\left(h^{-1}(z)\right)\left|\left(h^{-1}\right)'(z)\right| \quad \forall z \in [0,2)$

$$g(z) = \begin{cases} \frac{1}{4} & z \in [0,2) \\ \\ 0 & z \notin [0,2) \end{cases}$$

Ejercicio 9. Calcular las funciones de densidad de las variables $Y = 2X + 3$ y $Z = |X|$, siendo X una variable continua con función de densidad

$$f_X(x) = \frac{1}{4}, -2 < x < 2.$$

- $Y = 2X + 3 = h(X) \qquad \forall x \in (-2,2)$

$h(]-2,2[) =]-1,7[\quad \Longrightarrow \qquad h^{-1}(y) = \frac{y-3}{2} \qquad \forall y \in (-1,7)$
$\frac{dh^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{2}$

Por el teorema de cambio de variable de continua a continua:
$g(y) = f\left(\frac{1}{2}\right)\left|\frac{1}{2}\right| \quad \forall y \in (-1,7)$

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{8} & y \in (-1,7) \\ \\ 0 & y \notin (-1,7) \end{cases}$$

- $Z = |X| = h(X) \qquad \forall x \in (-2,2)$

$$h(X) = \begin{cases} h_1(X) = -X & X < 0 \\ \\ h_2(X) = X & 0 \leq X \end{cases} \qquad \forall X \in (-2,2)$$

$h(]-2,2[) = [0,2[$

$$\begin{cases} h_1^{-1}(z) = -z & \forall z \in [0,2) \\ \\ h_2^{-1}(z) = z & \forall z \notin [0,2) \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{dh_1^{-1}(z)}{dz} = -1 & \forall z \in [0,2) \\ \\ \frac{dh_2^{-1}(z)}{dz} = 1 & \forall z \notin [0,2) \end{cases}$$

Por el teorema de cambio de variable de continua a continua:
$g(z) = f\left(h^{-1}(z)\right)\left|\left(h^{-1}\right)'(z)\right| \quad \forall z \in [0,2)$

$$g(z) = \begin{cases} \frac{1}{4} & z \in [0,2) \\ \\ 0 & z \notin [0,2) \end{cases}$$

Ejercicio 10. Si X es una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \frac{e^{-|x|}}{2}, \quad -\infty < x < \infty,$$

hallar su funcíon de distribución y la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos:

Primero hallamos su función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}}{2} & \text{si} \quad 0 < x\infty \\ \\ \frac{e^{x}}{2} & \text{si} \quad -\infty < x \leq 0 \end{cases}$$

Así:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^2}{2} dx = \left.\frac{e^x}{2}\right|_{-\infty}^{0} \qquad \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-x}}{2} dx = -\left.\frac{e^{-x}}{2}\right|_{0}^{\infty}$$

Y la función de distribución será:

$$F(x) = \begin{cases} \left.\frac{e^x}{2}\right|_{-\infty}^{x} & \text{si} \quad -\infty < x < 0 \\ \\ 1 - \left.\frac{e^{-x}}{2}\right|_{0}^{x} & \text{si} \quad 0 \leq x < \infty \end{cases}$$

a) $\{|X| \leq 2\}$.

$$P(|X| \leq 2) = P(-2 \leq X \leq 2) = F(2) - F(-2) = 1 - e^{-2}$$

b) $\{|X| \leq 2 \text{ ó } X \geq 0\}$.

$$P(|X| \leq 2 \text{ ó } X \geq 0) = P(X \geq -2) = F(\infty) - F(-2) = 1 - -\frac{1}{2e^2}$$

c) $\{|X| \leq 2 \text{ y } X \leq -1\}$.

$$P(-2 \leq X \leq -1) = F(-1) - F(-2) = \frac{e^{-1} - e^{-2}}{2}$$

d) $\{X^3 - X^2 - X - 2 \leq 0\}$.

$$P((X-2)(X^2 + X + 1) \leq 0) = P(X \geq 2) = 1 - \frac{1}{2e^2}$$

e) $\{X| \text{ es irracional}\}$.

$$P(X \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})) = 0, \text{ al ser una variable continua, la probabilidad de un punto es nula}$$

Ejercicio 11. Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Encontrar la distribución de las variables:

a) $Y = \frac{X}{1+X}$

Busco la función de distribución

$$\left.\begin{array}{r} h(X) = \frac{X}{1+X} \quad \forall X \in [0,1] \\ \\ h([0,1]) = \left[0, \frac{1}{2}\right] \end{array}\right\} \Longrightarrow \qquad h^{-1}(y) = \frac{y}{1-y} \quad \forall y \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

$(h^{-1})'(y) = \frac{1-y+y}{(1-y)^2} = \frac{1}{(1-y)^2}$

Por el teorema de cambio de variable de continua a continua

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{(1-y)^2} & y \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \\ 0 & y \notin \left[0, \frac{1}{2}\right] \end{cases}$$

b) $Z = \left\{\begin{array}{ll} -1, & X < 3/4 \\ 0, & X = 3/4 \\ 1, & X > 3/4 \end{array}\right\} = h(X)$

Por el teorema de cambio de variable de continua a discreta

$P(Z = -1) = P(X < 3/4) = \int_0^{3/4} 1dx = \frac{3}{4}$
$P(Z = 0) = P(X = 3/4) = 0$ por ser un punto y X una variable discreta
$P(Z = 1) = P(X > 3/4) = 1 - P(Z \neq 1) = \frac{1}{4}$

$$P(Z = z) = \begin{cases} \frac{3}{4} & z = -1 \\ 0 & z = 0 \\ \frac{1}{4} & z = 1 \end{cases}$$

Ejercicio 12. Sea X una variable aleatoria simétrica con respecto al punto 2, y con coeficiente de variación 1. ¿Qué puede decirse acerca de las siguientes probabilidades?:

Por ser simétrica respecto de 2, la esperanza de X es 2. Como el coeficiente de variación se calcula como la desviación típica entre la esperanza, la desviación típica de X debe ser 2 tambióen, por lo que la varianza de X debe ser 4. El hecho de que exista varianza implica que el momento de orden 2 de la variable es finito, así que se puede usar la desigualdad de Chebyshev.

$P(|X - E[X]| < k) \geq 1 - \dfrac{Var(X)}{k^2}$

$P(|X-2| < k) \geq 1 - \dfrac{4}{k^2} \longrightarrow P(-k < X - 2 < k) \geq 1 - \dfrac{4}{k^2} \longrightarrow P(2-k < X < k+2) \geq 1 - \dfrac{4}{k^2}$

Si tomamos $k = 10$ y $k = 8$ tenemos las probabilidades pedidas:

$P(-8 < X < 12) \geq 1 - \dfrac{4}{100} = 0{,}96$

$P(-6 < X < 10) \geq 1 - \dfrac{4}{64} = 0{,}938$