Ejercicios Axiomática - Álgebra

1.2. Dar por extensión los siguientes conjuntos.

a) $P(\emptyset) \Rightarrow$ Dado que el vacío es el único conjunto que no tiene elementos, el único subconjunto que podemos formar a partir de él es el mismo: $P(\emptyset)=\{\emptyset\}$

b) $P(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

c) $P(P(P(\emptyset))) = P(P(\{\emptyset\})) = P(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

Este último, aunque parezca enrevesado, nos lo podemos imaginar como $P(A)$, siendo $A=\{x, y\}$:

$$P(A)=\{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$$

1.11. Sean $A, B \subseteq X$. Demostrar que si $A \subseteq B$, entonces $P(A) \subseteq P(B)$.

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall a \in A,\ a \in B$$

Por la propia definición de contenido, sabemos que todos los elementos del conjunto A también son elementos del conjunto B. $P(A)$ es el conjunto cuyos elementos son subconjuntos formados a partir de los elementos de A. Como a B pertenecen todos los elementos de A (aparte de los que no pertenecen a A), $P(B)$ tendrá todos los subconjuntos que se pueden formar a partir de A, aparte de los que se puedan formar con los elementos que no pertenecen a A.

Por ello, si $A \subseteq B$, $P(A) \subseteq P(B)$

2. Demuestra que $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B$.

Definición contenido: $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall a \in A,\ a \in B$

Sabemos que todos los elementos del conjunto A pertenecen a B. El conjunto $A \cap B$, el cual es la intersección entre los conjuntos A y B, es aquel cuyos elementos pertenecen tanto a A como a B. Como todos los elementos de A son también de B, pero no todos los de B son de A, necesariamente $A \cap B = A$.

Por otra parte, para demostrar que $A \cup B = B$, pensaremos en la definición. La unión de A y B es el subconjunto

de elementos "a" tales que $a \in A$ ó $a \in B$ ($a \in A \vee a \in B$).
Como $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall a \in A, a \in B$, si cogemos un elemento de $A \cup B$ pueden ocurrir 2 cosas:

- $a \in A$ y que por $A \subseteq B$, $a \in B$
- $a \in B$ pero $a \notin A$

En cualquier caso, cualquier elemento que se coja de $A \cup B$ va a pertenecer a B siempre, por lo que $A \cup B = B$.

1.6. (Leyes de Morgan) Si A y B son subconjuntos de un conjunto X, demostrar:

i) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ ii) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

i) ① $C(A \cap B) \subset C(A) \cup C(B)$

$x \in C(A \cap B) \Rightarrow x \notin (A \cap B) \Rightarrow x \notin A$ ó $x \notin B \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Si $x \notin A \Rightarrow x \in C(A) \Rightarrow x \in (C(A) \cup C(B))$

$\Rightarrow$ Si $x \notin B \Rightarrow x \in C(B)$

$\Downarrow$

$C(A \cap B) \subset (C(A) \cup C(B))$

② $C(A) \cup C(B) \subset C(A \cap B)$

$x \in C(A)$ o $x \in C(B) \Rightarrow x \notin A$ ó $x \notin B \Rightarrow (C(A) \cup C(B) \subset C(A \cap B))$

Si $x \notin A \Rightarrow x \notin A \cap B \Rightarrow x \in C(A \cap B)$

Si $x \notin B \Rightarrow x \notin A \cap B \Rightarrow x \in C(A \cap B)$

$\boxed{\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}}$

ii) ① $C(A \cup B) \subset (C(A) \cap C(B))$

$x \in C(A \cup B) \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin A$ y $x \notin B$

$x \notin A \Rightarrow x \in C(A)$

y $x \notin B \Rightarrow x \in C(B)$

$x \in (C(A) \cap C(B))$

$\Downarrow$

$C(A \cup B) \subset (C(A) \cap C(B))$

$\boxed{\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}}$

② $(C(A) \cap C(B)) \subset C(A \cup B)$

$x \in (C(A) \cap C(B)) \Rightarrow x \in C(A)$ y $x \in C(B) \Rightarrow x \notin A$ y $x \notin B$

Si $x \notin A \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \in C(A \cup B)$

Si $x \notin B \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \in C(A \cup B)$

$(C(A) \cap C(B)) \subset C(A \cup B)$

1.4.

i) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq \overline{B} \Leftrightarrow B \subseteq \overline{A}$

① $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow B \subseteq \overline{A}$

$\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que $A \cap B = \emptyset$ y veamos que ~~$A \subseteq \overline{B}$~~ $B \subseteq \overline{A}$.

Para ello, sea $x \in B$ un elemento arbitrario.

Si fuese $x \in A$, entonces sería $x \in A \cap B = \emptyset$ lo cual es imposible, luego $B \subseteq \overline{A}$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos que $B \subseteq \overline{A}$ y probemos que $A \cap B = \emptyset$

Para ello, supongamos por reducción al absurdo que $A \cap B \neq \emptyset$, es decir, que existe $x \in A \cap B \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x \in A \\ y \\ x \in B \end{array} \right.$ $\left.\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B \xrightarrow[\text{hip. } B \subseteq \overline{A}]{} x \in \overline{A} \end{array}\right\}$ Esto no puede ser, luego $A \cap B = \emptyset$

② $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq \overline{B}$

Ya hemos probado que $\forall X, Y$, $X \cap Y = \emptyset \Leftrightarrow Y \subseteq \overline{X}$

Si $X = B$
$Y = A$

1.5.

$$\left.\begin{array}{l} A \cup B \subseteq A \cup C \\ A \cap B \subseteq A \cap C \end{array}\right| \Rightarrow B \subseteq C$$

Supongamos que la hipótesis es cierta y probemos que entonces $B \subseteq C$.

Para ello, sea $x \in B$ arbitrario

Una forma $x \in A \cup B \underset{①}{\subseteq} A \cup C \rightarrow \left| \begin{array}{l} x \in A \rightarrow x \in A \cap B \overset{②}{\subseteq} A \cap C \rightarrow x \in C \\ \text{o} \\ x \in C \end{array} \right.$

Otra forma $x \in B$ $\left[\begin{array}{l} \text{o bien } x \in A \rightarrow x \in A \cap B \subseteq A \cap C \rightarrow x \in C \\ \text{o bien } x \notin A \rightarrow \left.\begin{array}{l} x \in A \cup B \subseteq A \cup C \\ x \notin A \end{array}\right| \rightarrow x \in C \end{array} \right.$

1.7.

i) $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$

$$(A \cap \overline{C}) \cap (\overline{B \cap \overline{C}}) = (A \cap \overline{C}) \cap (\overline{B} \cup \overline{\overline{C}}) \overset{\overline{\overline{C}} = C}{=} (A \cap \overline{C}) \cap (\overline{B} \cup C) \overset{\text{Distr}}{=}$$

$$(A \cap \overline{C} \cap \overline{B}) \cup \underbrace{(A \cap \overline{C} \cap C)}_{A \cap \emptyset \,=\, \emptyset} = \cancel{A \cap \overline{C} \cap \overline{B}}\ A \cap \overline{B} \cap \overline{C} = (A \setminus B) \setminus C$$

ii) $(A\setminus C)\cup(B\setminus C) = (A\cup B)\setminus C$ Conmutatividad de $\cap$ Distributividad de $\cap$ sobre $\cup$

$$(A\cap\bar C)\cup(B\cap\bar C) = (\bar C\cap A)\cup(\bar C\cap B) = \bar C\cap(A\cup B) =$$
$$(A\cup B)\cap\bar C = (A\cup B)\setminus C$$

iii) $(A\setminus C)\cap(B\setminus C) = (A\cap B)\setminus C$ Asociatividad de $\cap$

$\bar C\cap\bar C=\bar C$

$$(A\cap\bar C)\cap(B\cap\bar C) = A\cap\bar C\cap B\cap\bar C = A\cap B\cap\bar C\cap\bar C = (A\cap B)\cap(\bar C\cap\bar C) =$$
$$(A\cap B)\cap\bar C = (A\cap B)\setminus C$$

Distributividad de $\cap$ sobre $\cup$

iv) $(A\setminus B)\setminus(A\setminus C) = A\cap(C\setminus B)$

Leyes de Morgan $\bar{\bar C} = C$

$$(A\cap\bar B)\cap(\overline{A\cap\bar C}) = (A\cap\bar B)\cap(\bar A\cup\bar{\bar C}) = (A\cap\bar B)\cap(\bar A\cup C) =$$
$$(\underbrace{(A\cap\bar B)\cap\bar A}_{\text{Asociatividad de }\cap})\cup((A\cap\bar B)\cap C) = ((\underbrace{A\cap\bar A}_{\emptyset})\cap\bar B)\cup((A\cap\bar B)\cap C) =$$
$$(\emptyset\cap\bar B)\cup((A\cap\bar B)\cap C) = \emptyset\cup(\underbrace{(A\cap\bar B)\cap C}_{\text{Asociatividad de }\cap}) = (A\cap(C\cap\bar B)) = A\cap(C\setminus B)$$

v) $(A\setminus B)\cup(A\setminus C) = A\setminus(B\cap C)$ Distributividad de $\cap$ sobre $\cup$

$$(A\cap\bar B)\cup(A\cap\bar C) = (A\cap(\underbrace{\bar B\cup\bar C}_{\text{Leyes de Morgan}})) = A\cap(\overline{B\cap C}) = A\setminus(B\cap C)$$

vi) $(A\setminus B)\cap(A\setminus C) = A\setminus(B\cup C)$ Asociatividad de $\cap$

$$(A\cap\bar B)\cap(A\cap\bar C) = A\cap\bar B\cap A\cap\bar C = A\cap A\cap\bar B\cap\bar C = (\overbrace{A\cap A}^{A})\cap(\bar B\cap\bar C) =$$
$$A\cap(\underbrace{\bar B\cap\bar C}_{\text{Leyes de Morgan}}) = A\cap(\overline{B\cup C}) = A\setminus(B\cup C)$$

1.8. $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Demostrar que $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ y que $A \Delta B = \emptyset$ sí, y sólo sí $A = B$.

$$\underline{(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)}$$

↳ Vamos a suponer que es cierta

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)} = (A \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B})$$

Tomamos un $x \in (A \cup B)$, entonces $x \in (\bar{A} \cup \bar{B})$:

$$\left.\begin{array}{l} x \in (A \cup B) \to \begin{array}{c} x \in A \\ \text{ó} \\ x \in B \end{array} \\ \text{y} \\ x \in (\bar{A} \cup \bar{B}) \to \begin{array}{c} x \in \bar{A} \\ \text{ó} \\ x \in \bar{B} \end{array} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \text{Si } x \in A \to x \notin \bar{A} \to x \in \bar{B} \Rightarrow x \in (A \cap \bar{B}) \\ \text{ó} \\ \text{Si } x \in B \to x \notin \bar{B} \to x \in \bar{A} \Rightarrow x \in (B \cap \bar{A}) \end{array}\right\}$$

$$\Downarrow$$

$$x \in (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})$$

$$\Downarrow$$

$$x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

$A \Delta B = \emptyset \Leftrightarrow A = B \Rightarrow$ Demostración

$\boxed{\Leftarrow}$ Suponemos que $A = B$ y probamos que $A \Delta B = \emptyset$

Si $A = B$, $\bar{A} = \bar{B}$. Dicho esto, usamos la definición de $A \Delta B = \emptyset$:

$$A \Delta B = (A \cap \underbrace{\bar{B}}_{\bar{B} = \bar{A}}) \cup (B \cap \underbrace{\bar{A}}_{\bar{A} = \bar{B}}) = (A \cap \bar{A}) \cup (B \cap \bar{B}) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Suponemos que $A \Delta B = \emptyset$ y probamos que $A = B$.

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \emptyset \begin{cases} A / B = \emptyset \\ B / A = \emptyset \end{cases}$$

Para que esto se cumpla, necesariamente, pues $\emptyset \cup \emptyset = \emptyset$

$A / B = \emptyset \Rightarrow A \cap \bar{B} = \emptyset \to \bar{B} = \bar{A}$, pues $A \cap \bar{A} = \emptyset$

$B / A = \emptyset \Rightarrow B \cap \bar{A} = \emptyset \to \bar{A} = \bar{B}$, pues $B \cap \bar{B} = \emptyset$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{B} = \bar{A} \\ \bar{A} = \bar{B} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} B = A \\ A = B \end{cases}$$

1.9. Sean $A, B \subseteq X$. Demostrar:

i) $A = \underbrace{(A \cap B) \cup (A \setminus B)}$ es una representación de A como una unión disjunta.

$$(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A \cap (B \cup \bar{B}) = A \cap X = A$$

Distr. de $\cap$ sobre $\cup$

ii) $A \cup B = \underbrace{A \cup (B \setminus A)}$ es una representación de $A \cup B$ como una unión disjunta.

$A \cup (B \cap \bar{A}) = (A \cup B) \cap (A \cup \bar{A}) = (A \cup B) \cap X = A \cup B$

Distr.
de $\cup$ sobre $\cap$