Ejercicio 1.1: Estudiar la derivabilidad de la función $f: A \to \mathbb{R}$, en cada uno de los siguientes casos:

c) $A = \mathbb{R}$ y $f(x) = \dfrac{2x}{1+|x|}$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{1+x} & x \geq 0 \\ \dfrac{2x}{1-x} & x < 0 \end{cases}$$

La función es claramente continua en $\mathbb{R}$, ya que:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 0$$

Veamos ahora si es derivable en $x = 0$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^2+2x+1} & x \geq 0 \\ \dfrac{2}{x^2-2x+1} & x < 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} f'_-(0) &= 2 \\ f'_+(0) &= 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f'_-(0) = f'_+(0)$$

La función por tanto es derivable para todo $x \in \mathbb{R}$

Escaneado con CamScanner

d) $A = \mathbb{R}_0^+$ y $f(x) = x^x$ si $x \in \mathbb{R}^+$, y $f(0) = 0$.

La función es claramente continua en $\mathbb{R}^+$.
Veamos si lo es en A

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = L$$

$$\ln L = \lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{-\infty}{\infty}\right)$$

Aplicamos la segunda regla de L'Hôpital

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} -x = 0$$

$$\ln L = 0 \Rightarrow L = e^0 \Rightarrow L = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \neq f(0) = 0$$

La función no es continua en $x = 0$, por tanto tampoco es derivable en ese punto.

Veamos en $\mathbb{R}^+$:

$$f(x) = x^x \Rightarrow \ln(f(x)) = x \ln x \Rightarrow \frac{d}{dx} \ln(f(x)) = \frac{d}{dx}(x \ln x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln x + 1 \Rightarrow f'(x) = x^x(\ln x + 1)$$

La función es derivable en $\mathbb{R}^+$.