Análisis Matemático I

Práctica 3: Imagen de una función de dos variables

Planteamiento del problema y primeras hipótesis

El problema

Nos proponemos calcular la imagen de una función de dos variables:

$$f : A \to \mathbb{R} \qquad \text{donde} \qquad \emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^2$$

- El problema así planteado es inabordable
- Veremos un método para resolverlo en casos muy concretos

Hipótesis topológicas y sus consecuencias

Asumimos las siguientes hipótesis (que en la práctica debemos comprobar)

(H.1) El conjunto A es compacto y conexo

(H.2) La función f es continua

Así, $f(A)$ es un intervalo cerrado y acotado: $f(A) = \big[\min f(A)\,, \max f(A)\big]$

El problema se reduce a calcular $\min f(A)$ y $\max f(A)$

luego buscamos los puntos en los que f puede tener un extremo absoluto

Uso de la condición necesaria de extremo relativo

Estudio de los puntos interiores

Asumimos otra hipótesis (que también deberemos comprobar)

(H.3) La función f es parcialmente derivable en todo punto de A°

Calculamos el conjunto de puntos críticos de f:

$$E_0 = \{(x,y) \in A^\circ : \nabla f(x,y) = 0\}$$

Entonces E_0 es el conjunto de puntos de A° en los que f puede tener un extremo absoluto

Si no se cumple **(H.3)** deberemos añadir a E_0 los puntos de A° en los que f no sea parcialmente derivable

En la práctica E_0, o al menos $f(E_0)$, suele ser un conjunto finito

Estudio de la frontera

Arcos paramétricos

Un arco paramétrico es un conjunto de la forma $C = g(I) \subset \mathbb{R}^2$ donde $I \subset \mathbb{R}$, I es un intervalo compacto y $g : I \to \mathbb{R}^2$ es una función continua

Para estudiar f en $\operatorname{Fr} A = A \setminus A^\circ$ asumimos la última hipótesis:

(H.4) $\operatorname{Fr} A$ es unión finita de arcos paramétricos: $\operatorname{Fr} A = \bigcup_{k=1}^{n} C_k$

Estudio en cada arco paramétrico

Consideremos un arco paramétrico $C = g(I) \subset \operatorname{Fr} A \subset A$

Se tiene $f(C) = h(I)$ donde $h = f \circ g : I \to \mathbb{R}$

Como I, C son compactos y conexos, y h, f son continuas, se tiene:

$$\big[\, \min f(C), \max f(C) \,\big] = f(C) = h(I) = \big[\, \min h(I), \max h(I) \,\big]$$

Esto permite encontrar el conjunto $f(C)$,

calculando $h(I)$, problema que damos por conocido

En la práctica no es necesario usar g, basta con la igualdad $f(C) = h(I)$

Primera opción para resolver el problema

Usando solamente valores de la función

Tenemos $\quad \mathrm{Fr}\,\mathrm{A} = \bigcup_{k=1}^{n} C_k$, unión de arcos paramétricos

Para $k = 1, 2, \dots n$, conocemos $\alpha_k = \min f(C_k)$ y $\beta_k = \max f(C_k)$

con lo que tomamos $\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n\}$ y $\beta = \max\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$

Entonces $\min f(A) = \min\left(f(E_0) \cup \{\alpha\}\right)$ y $\max f(A) = \max\left(f(E_0) \cup \{\beta\}\right)$

Segunda opción para resolver el problema

Usando un conjunto que contiene todos los puntos que necesitamos

Para $k = 1, 2, \ldots, n$ tenemos $f(C_k) = h_k(I_k)$ y consideramos el conjunto $T_k \subset I_k$ de los puntos en los que h_k puede tener un extremo absoluto, que pueden ser de tres tipos:

- Los extremos del intervalo I_k
- Los puntos de I_k en los que h_k no es derivable
- Los puntos $t \in I_k$ en los que h_k es derivable y $h_k'(t) = 0$

Consideramos $E = \left\{ (x,y) \in C_k : f(x,y) = h_k(t) \text{ con } t \in T_k \right\}$

Y finalmente definimos: $S = \bigcup_{k=0}^{n} E_k$

Entonces: $\min f(A) = \min f(S)$ y $\max f(A) = \max f(S)$

Resumen

Pasos a dar para encontrar la imagen de f

- Comprobamos que A es compacto y conexo
- Comprobamos que f es continua, luego $f(A) = \big[\min f(A), \max f(A)\big]$
- Calculamos A° y estudiamos la derivabilidad parcial de f en A°
- Encontramos el conjunto E_0 formado por los puntos críticos de f y los puntos de A° en los que f no sea parcialmente derivable
- Comprobamos que Fr A es unión de arcos paramétricos: $\bigcup_{k=1}^{n} C_k$
- Para $k = 1, 2, \ldots, n$, tenemos $f(C_k) = h_k(I_k)$, donde I_k es un intervalo compacto y $h_k : I_k \to \mathbb{R}$ es una función continua
- Primera opción: para cada $k \in \Delta_n$, calculamos

$$\alpha_k = \min h_k(I_k) \quad \text{y} \quad \beta_k = \max h_k(I_k)$$

Tomando $\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ y $\beta = \max\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$, se tiene

$$\min f(A) = \min\big(f(E_0) \cup \{\alpha\}\big) \quad \text{y} \quad \max f(A) = \max\big(f(E_0) \cup \{\beta\}\big)$$

- Segunda opción: para cada $k \in \Delta_n$, encontramos $E_k \subset C_k$ tal que

$$\min f(E_k) = \min h_k(I_k) \quad \text{y} \quad \max f(E_k) = \max h_k(I_k)$$

Tomando entonces $S = \bigcup_{k=0}^{n} E_k$, se tiene

$$\min f(A) = \min f(S) \quad \text{y} \quad \max f(A) = \max f(S)$$

Ejercicio

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq 2y - y^2\} \Rightarrow$ Círculo centro $(0,1)$ y radio 1

$f(x,y) = x^2 + y(y^3 - 4)$

Anotaciones

$(x,y) \in Fr(A) \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1 \Rightarrow$ Despejamos x y sustituimos en f, obteniendo una función de una variable

$x^2 \leq 2y - y^2 \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 \leq 1$

$A = \overline{B}((0,1),1)$ euclídea $\Rightarrow$ Cerrado y acotado $\Rightarrow$ Compacto

Convexo $\Rightarrow$ Conexo

$\mathring{A} = B((0,1),1)$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 - 4 \qquad \forall (x,y) \in \mathring{A}$

$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow$ Cuidado, pueden salir soluciones que no son del interior.

Único punto crítico: $(0,1) \Rightarrow f(0,1) = -3$

Pasemos ahora a estudiar los puntos de la frontera: $Fr(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-1)^2 = 1\}$

$(x,y) \in Fr(A) \Leftrightarrow x^2 = 2y - y^2 \Rightarrow y \in [0,2]$

$f(x,y) = 2y - y^2 + y(y^3 - 4) = y^4 - y^2 - 2y$

$f(Fr(A)) = h([0,2]) \quad h(y) = y^4 - y^2 - 2y \quad \forall y \in [0,2]$

$h'(y) = 4y^3 - 2y - 2 \Rightarrow h'(y) = 0 \Leftrightarrow y = 1$

$h(0) = 0 \quad h(1) = -2 \quad h(2) = 8 \Rightarrow h([0,2]) = [-2,8]$

Concluimos que $\operatorname{Im} f = [-3,8]$

El conjunto de los puntos sospechosos era $S = \{\underset{-3}{\underset{\downarrow}{(0,1)}}, \underset{-2}{\underset{\downarrow}{(-1,1)}}, \underset{-2}{\underset{\downarrow}{(1,1)}}, \underset{8}{\underset{\downarrow}{(0,2)}}, \underset{0}{\underset{\downarrow}{(0,0)}}\}$

Ejercicio

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0\} \Rightarrow A = B \cap H \qquad B \equiv$ bola euclídea cerrada $(1,0), 2$

$H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$

$f(x,y) = (x-2)^2 + 2y^2 \quad \forall (x,y) \in A$

$\mathring{A} = \mathring{B} \cap \mathring{H} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2(x-2) \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y \Rightarrow \nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow x = 2 \ \ y = 0$

$\mathring{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 < 4,\ x > 0\}$

$Fr(A) = A \setminus \mathring{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 = 4,\ x \geq 0\} \cup \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \leq 3\}$

$f(2,0) = 0$, y como $f(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow$ mínimo en $(2,0) \Rightarrow \min f(A) = 0$

El máximo en $\{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \leq 3\}$ está en $(0,-\sqrt{3})$ y $(0,\sqrt{3})$

En $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 = 4,\ x \geq 0\} \quad f(x,y) = (x-2)^2 + 8 - 2(x-1)^2 = -x^2 + 10$ en $[0,3] \Rightarrow h([0,3]) = [0,10]$

Luego $f(A) = [0,10]$