# *Cálculo II*
# *(Grupo 1º A)*
# *Relación de Ejercicios nº 5*

**Ejercicio 5.1:** Calcular usando el Teorema de Cauchy para integrales que

$$\int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1}, \qquad (p \in \mathbb{N} \cup \{0\}).$$

**Ejercicio 5.2:** Demostrar que la función $f(x) = \frac{e^x \operatorname{sen} x}{x}$ es integrable en $[0,1]$ verificándose que $0 \leq \int_0^1 f(x)dx \leq e - 1$.

**Ejercicio 5.3:** Justificar las siguientes desigualdades:

(i) $\frac{1}{2} < \int_0^1 \frac{dx}{1+x} < 1$.

(ii) $\frac{1}{4\sqrt{2}} < \int_0^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x}} < \frac{1}{4}$.

**Ejercicio 5.4:** Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua y tal que $f(x) \geq 0$, para cada $x \in [a,b]$. Demostrar que si $\int_a^b f(x)dx = 0$, entonces $f = 0$.

**Ejercicio 5.5:** Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable. Demostrar que si para cada $c, d \in [a,b]$ tales que $a < c < d < b$ existe $x \in ]c,d[$ verificando que $f(x) = 0$, entonces $\int_a^b f(x)dx = 0$.

**Ejercicio 5.6:** Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ función escalonada. Probar que $f$ es integrable y calcular su integral.

**Ejercicio 5.7:** Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Demostrar que $f$ es integrable sí, y solo si, para cada $\varepsilon > 0$ existen dos funciones escalonadas $\rho, \psi: [a,b] \to \mathbb{R}$ tales que $\rho(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$, para cada $x \in [a,b]$, y verificando además que $\int_a^b (\rho - \psi)(x)dx < \varepsilon$.

**Ejercicio 5.8:** Sea $f: [0,1] \to [0,1]$ una función continua verificando que $\int_0^x f(t)dt = \int_x^1 f(t)dt$, para cada $x \in [0,1]$. Demostrar que $f = 0$.

**Ejercicio 5.9:** Sean $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas tales que

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

Demostrar que entonces existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = g(c)$.

**Ejercicio 5.10:** Sea $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Demostrar que $\alpha = \int_a^b f(x)dx$ sí, y solo si, para cada partición $P$ de $[a, b]$ existe al menos una suma de Riemann $\sigma(f, P)$ tal que $\alpha = \sigma(f, P)$.

**Ejercicio 5.11:** Demostrar que la composición de dos funciones integrables puede no ser una función integrable.

**Ejercicio 5.12:** Sea $r > 0$ y sea $f: [-r, r] \to \mathbb{R}$ una función continua. Demostrar que:

i) Si $f$ es par entonces $\int_{-r}^{r} f(x)dx = 2\int_0^r f(x)dx$.

ii) Si $f$ es impar entonces $\int_{-r}^{r} f(x)dx = 0$.

**Ejercicio 5.13:** Sea $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada que es integrable. Sea $c \in \mathbb{R}$. Si $g: [a + c, b + c] \to \mathbb{R}$ está dada por $g(x) = f(x - c)$, para $x \in [a + c, b + c]$, demostrar que $g$ es integrable siendo

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} g(x)dx.$$

Dedúzcase que, para cada $h \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a-h}^{b-h} f(x + h)dx.$$

**Ejercicio 5.14:** Demostrar que si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua y periódica, de periodo $T$ entonces, para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_x^{x+T} f(t)dt = \int_0^T f(t + x)dt.$$

**Ejercicio 5.15:** Calcular los siguientes límites:

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[n\left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+4} + \frac{1}{n^2+9} \ldots + \frac{1}{2n^2}\right)\right]$

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{n} + \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} + \cdots + \operatorname{sen}\frac{n\pi}{n}\right)\right]$.

**Ejercicio 5.16:** Sea $f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ una función positiva y estrictamente decreciente. Demuéstrese que para cada $n, p \in \mathbb{N}$ se verifica que

$$f(n+p)+\int_n^{n+p} f(x)dx < f(n)+f(n+1)+\cdots+f(n+p) < f(n)+\int_n^{n+p} f(x)dx.$$

Como consecuencia demostrar que $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{p}} > \sqrt{p}$, para $p \geq 2$.

**Ejercicio 5.17:** Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función dada por $f(x)=e^{-x^2}$, para cada $x\in\mathbb{R}$. Sea $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función dada por $h(x)=\int_0^{\operatorname{sen} x} f(t)dt$, para cada $x\in\mathbb{R}$. Demostrar que $h$ es derivable en $\mathbb{R}$ y calcular su derivada.

**Ejercicio 5.18:** Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función dada por $f(x)=e^{-x^2}$, para cada $x\in\mathbb{R}$. Sea $g:\mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R}$ la función dada por $g(x)=\int_0^{\sqrt{x}} f(t)dt$, para cada $x\in\mathbb{R}$. Estudiar la continuidad uniforme de la función $g$ y su derivabilidad.

**Ejercicio 5.19:** Estudiar la derivabilidad de la función $F:\ \mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R}$ dada por $F(x)=\int_{\sqrt[3]{x}}^{x^2}\frac{t}{\sqrt{1+t^3}}dt$ y calcular $F'(1)$.

**Ejercicio 5.20:** Probar que todas las funciones continuas $f:\mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R}$ que verifican la igualdad $\int_0^x f(t)dt=\frac{x}{3}f(x)$ son derivables en $\mathbb{R}_0^+$. Determinar el conjunto de dichas funciones.

**Ejercicio 5.21:** Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función continua. Justificar que la función $H(x)=\int_{x^2}^{x^3} f(t)dt$ es derivable y calcular su derivada.

**Ejercicio 5.22:** Calcular la derivada de cada una de las siguientes funciones:

i) $F_1(x)=\int_0^x \operatorname{sen}^3 t\,dt,$

ii) $F_2(x)=\int_x^b \frac{1}{1+t^2+\operatorname{sen}^2 t}dt,$

iii) $F_3(x)=\int_a^b \frac{x}{1+t^2+\operatorname{sen}^2 t}dt.$

**Ejercicio 5.23:** Sea $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\int_0^{x^3-x^2} e^{-t^2}dt$. Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y determinar los extremos relativos de dicha función. Calcular $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\operatorname{sen}(x^3-x^2)}$.

**Ejercicio 5.24:** Sea $f:[1,+\infty[\to\mathbb{R}$ la función $f(x)=\int_0^{x-1}\left(e^{-t^2}-e^{-2t}\right)dt$. Calcular su máximo absoluto. Sabiendo que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\pi}-1\right)$, calcular el mínimo absoluto de $f$.

**Ejercicio 5.25:** Sea $H$ : [-1,1] → ℝ la función dada por $H(x) = \int_0^{\pi x^2} e^{2t} \text{sen} t\, dt$, para cada $x \in$ [-1,1]. Estudiar los extremos absolutos y relativos de la función $H$ y determinar su imagen.

**Ejercicio 5.26:** Probar que la función $f$: [1,2]→ ℝ dada por $f(y) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^4+y^4}}$, para cada $y \in$ [1,2] es lipschitziana.

**Ejercicio 5.27:** Dado $a > 0$, calcular la imagen de la función $G: [-a, a] \to \mathbb{R}$ dada por $G(x) = \int_{-x}^{x} \sqrt{a^2 - t^2} dt$.

**Ejercicio 5.28:** Sea $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a) = 0$ y $\int_a^b f(t) dt = 0$. Definimos la función $F: [a, b] \to \mathbb{R}$ como $F(a) = 0$ $y$

$$F(x) = \frac{\int_a^x f(t)dt}{x-a} \text{ si } x \neq a \, .$$

Probar que $F$ es continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b]$. Demostrar que si $f$ es derivable en $a$ entonces $F$ es derivable en $[a, b]$ y existe $c \in ]a, b[$ tal que $F'(c) = 0$.

**Ejercicio 5.29:** Calcular $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x \int_0^x \text{sen}\, t^2\, dt}{\text{sen}\, x^4}$.

**Ejercicio 5.30:** Calcular $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\int_1^{(x+1)e^x} \ln(t) \arctan(t)\, dt}{x^2 e^x}$.

**Ejercicio 5.31:** Sea $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^1$ en el intervalo $[a, b]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $I_n \coloneqq \int_a^b f(x) \cos nx\, dx$ y $J_n \coloneqq \int_a^b f(x) \,\text{sen}\, nx\, dx$. Demostrar que las sucesiones $\{I_n\}$ y $\{J_n\}$ convergen a cero.

**Ejercicio 5.32:** Demostrar que para cada $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ se verifica que

$$\int_0^{\cos^2 x} \arccos \sqrt{t}\, dt + \int_0^{\text{sen}^2 x} \text{arcsen} \sqrt{t}\, dt = \frac{\pi}{4}.$$