resumen

TEMA 1

MATRICES, DETERMINANTES Y SIST. DE ECUACIONES LINEALES

MÉTODO GAUSS-JORDAN

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad = b_1 \\ \quad x_2 \qquad\quad = b_2 \\ \qquad \ddots \\ \qquad\quad x_n = b_n \end{cases} \qquad \underline{\text{SCD}}$$

$$\begin{cases} x_1 \qquad + a_{1r+1}x_{r+1} + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad x_2 \quad + a_{2r+1}x_{r+1} + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \ddots \\ \qquad x_r + a_{rr+1}x_{r+1} + \dots + a_{rn}x_n = b_r \end{cases} \qquad \underline{\text{SCI}}$$

$\{$ Ecuación del tipo $0=b$ con $b \neq 0$ $\underline{\text{SI}}$

PIVOTE

(de una fila): Primer elemento no nulo de dicha fila siempre que esta no esté compuesta únicamente por ceros.

ESCALONADA

por filas:
$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 1 & 0 & 5 \\ 0 & \underline{1} & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 3 \end{pmatrix}$$

reducida por filas:
$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \underline{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 1 \end{pmatrix}$$

EQUIVALENTES

por filas: tienen la misma forma normal de Hermite (reducida por filas).

DEFINICIÓN RANGO DE UNA MATRIZ → P.16 (pt 1)

MATRICES Y SISTEMAS DE ECUACIONES

- Matriz ampliada del sistema : (A | B)
  - → coef. incógnitas
  - → términos independ.

Si obtenemos la forma normal de Hermite de (A|B), prácticamente hemos resuelto el sistema

- Tma ROUCHÉ - FROBENIUS
  - SC ⟺ rg (A) = rg (A|B)
  - SCD ⟺ rg (A) = rg (A|B) = n (nº incógnitas)

OPERACIONES CON MATRICES

- $A \cdot B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ p & q & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \circ & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

  $a \cdot j + b \cdot m + e \cdot p$ ↗ y se repite el proceso

- MATRIZ TRASPUESTA

  $(A+B)^t = A^t + B^t \qquad (A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

- MATRIZ SIMÉTRICA : $A = A^t$
- MATRIZ ANTISIMÉTRICA : $A = -A^t$
- TRAZA : suma de los elementos de la diagonal
  - $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$
  - $tr(\alpha A) = \alpha \cdot tr(A)$
  - $tr(AB) = tr(BA)$

MATRICES ELEMENTALES P.3 (pt 2)

MATRIZ INVERSA (ha de ser regular!)

- $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$
- $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ (si A y B son invertibles)
- $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ (si A es invertible)
- Tma reuo P. 6 (pt. 2)
- Cálculo:

→ $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ $\quad \underbrace{\qquad}_{A} \; \underbrace{\qquad}_{I_n}$

Hago transformaciones elementales en A para obtener In. Simultáneamente, las hago en In para convertirla en A^{-1}.

→ ¹ Calculo $Adj(A) = B$

² Hago B^t

³ $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot B^t$

MATRICES EQUIVALENTES $A \sim B$

A y B misma forma Hermite

⇕

$\exists Q$ regular : $B = Q \cdot A$

resumen

TEMA 2 ESPACIOS VECTORIALES

ESPACIO VECTORIAL

- $K \rightarrow$ cuerpo conmutativo
- $V \rightarrow$ conjunto cualquiera

→ $V(K)$ es un espacio vectorial si:

- $(V,+)$ abeliano
  - asociativa $(u+w)+v = u+(w+v)$
  - conmutativa $u+w = w+u$
  - elemento neutro $0+v = v+0 = v$
  - opuesto $v+(-v) = (-v)+v = 0$
- ley de composición externa $\cdot(\overset{\in K}{\alpha}, \overset{\in V}{v}) = \alpha \cdot v \in V$
  - distributividad $\alpha(u+w) = \alpha u + \alpha w$
    $(\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta v$
  - pseudoasociatividad $(\alpha\beta)v = \alpha\cdot(\beta v)$
  - propiedad modular $1v = v$

⟼ A los elementos de $V(K)$ se les llama vectores ⟼

DEPENDENCIA LINEAL

Con un conjunto <u>finito</u> de vectores de $V(K)$ puedo hacer combinaciones lineales sumando y multiplicando por escalares los vectores

Un conjunto finito es l.i. si para conseguir el $\vec{0}$ los escalares tienen que ser todos 0.

Equivalentemente, un conjunto finito es l.i. si no puedo escribir ninguno de ellos como c.l. del resto.

→ Demostrar la dependencia o independencia lineal de un cierto conjunto de vectores es equivalente a decidir si un sistema de ecuaciones homogéneo es SCD o SCI

Ppdades relacionadas con (in)dep. lineal → p.6

SISTEMA GENERADOR DE UN E.V.

- Conjunto de vectores $S \subset V(K)$ es s.g. si cualquier $v \in V$ se puede expresar como c.l. de los elementos de S.

Prop P.8 $\left[\begin{array}{l} \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \text{ es l.i.} \\ \{u_1, u_2, \dots, u_m\} \text{ es s.g.} \end{array}\right\} \rightarrow n \leq m$

BASE DE UN E.V.

- $\beta \subset V(K)$ es base si $\left\langle \begin{array}{l} \beta \text{ es l.i.} \\ \beta \text{ es s.g.} \end{array} \right. \Big\} n = m$
- T^{ma}: si $V(K)$ es generado de forma finita, todas las bases del e.v. son finitas y con el mismo número de vectores
- T^{ma} ampliación de la base (P.10)

COORDENADAS DE UN VECTOR RESPECTO DE UNA BASE

- Todo vector admite una <u>única</u> c.l. de los vectores de una base arbitraria

COORDENADAS Y DEP. LINEAL

Expresamos los vectores de $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ en coordenadas respecto de una base y colocamos las coordenadas en filas o columnas de una matriz A. Si $|A| = 0 \rightarrow$ l.d.
Si $|A| \neq 0 \rightarrow$ l.i

MATRIZ DE CAMBIO DE BASE

$\underbrace{M_{\beta_c \leftarrow \beta} = A}$ → $M_{\beta \leftarrow \beta_c} = A^{-1}$

expreso los vectores de β en coordenadas respecto de β_c (normalmente columnas).

SUBESPACIO VECTORIAL

→ Sea $\emptyset \neq U \subset V(K)$. U es s.v. de $V(K)$ si:

$\forall a,b \in K$
$\forall u,v \in V(K)$
$au + bv \in U$

- es cerrado para la suma
  $\forall u,v \in U, \; u+v \in U$
- es cerrado para el producto por escalares
  $\forall a \in K, \forall u \in U, \; a \cdot u \in U$

→ $\{0\}$ y $V(K)$ son subespacios impropios

→ $\mathcal{L}(S)$ = subespacio generado por $S \subseteq V(K)$

ECUACIONES PARAMÉTRICAS Y CARTESIANAS DE S.V.

→ Ejemplo: $\underline{x+y-z=0}$ → nos genera $U \subseteq \mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} x = -1\cdot\lambda + 1\cdot\mu \\ y = 1\cdot\lambda + 0\cdot\mu \\ z = 0\cdot\lambda + 1\cdot\mu \end{cases} \qquad U = \mathcal{L}(\{(-1,1,0), (1,0,1)\})$$

→ Si nos dan un s.g. de un s.v., cogemos los vectores l.i. y los ponemos por columnas en una matriz. Añadimos una última columna con incógnitas y calculamos todos los det. posibles igualándolos a 0.

DIMENSIÓN DE UN S.V.

$\dim_K(V) = \dim_K(U) + n^{o}$ ecuaciones de U

INTERSECCIÓN DE SUBESPACIOS

$U \cap W$ → considero todas las ecuaciones

SUMA DE SUBESPACIOS

$U + W$ → unimos las bases y quito los l.d.

SUMA DIRECTA DE S.V. P.22

- $U \oplus W \Leftrightarrow U + W = V(K)$ y $U \cap W = \{0\}$
- s.v. complementario de U: aquel que verifica la suma directa

FÓRMULA DE LAS DIMENSIONES

- $\dim_K(U) + \dim_K(W) = \dim_K(U+W) + \dim_K(U \cap W)$

ESPACIO VECTORIAL COCIENTE P.24

si $W = \mathcal{L}(\{v_1, \dots, v_r\})$ es complementario de $U = \mathcal{L}(\{u_1, \dots, u_s\})$ con $r+s = n = \dim_K(V)$, entonces una base del e.v. cociente $\mathbb{R}^3/U$ es : $\{(v_1+U, \dots, v_r+U)\}$

resumen

TEMA 3 APLICACIONES LINEALES

INTRO

mismo cuerpo!!

$V(K)$, $V'(K)$: $f: V \to V'$ es una aplicación lineal si:

$$\begin{cases} 1- \ \forall u,v \in V ; \ f(u+v) = f(u) + f(v) \\ 2- \ \forall a \in K, \forall u \in V ; \ f(a \cdot u) = a \cdot f(u) \end{cases}$$

$$f(au+bv) = a \cdot f(u) + b \cdot f(v) \ \begin{cases} \forall a,b \in K \\ \forall u,v \in V \end{cases}$$

NÚCLEO E IMAGEN DE UNA APLICACIÓN LINEAL

→ $f: V \to V'$ $\begin{cases} Ker(f) = \{v \in V : f(v) = 0\} \\ Im(f) = \{f(v) : v \in V\} \end{cases}$

→ $Ker(f) \subseteq V$ $\quad Im(f) \subseteq V'$

→ si $\{v_1, \dots, v_n\}$ es s.g. de V, entonces $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ es s.g. de $Im(f)$

MONO, EPI, ISO - MORFISMOS P.4

$f: V \to V'$

- inyectiva → monomorfismo $\quad Ker(f) = \{0\}$
- sobreyectiva → epimorfismo $\quad Im(f) = V'$
- biyectiva → isomorfismo

si $\forall S \subset V$ l.i, $f(S) \subset V'$ es l.i.

si $\forall T \subset V$ s.g, $f(T) \subset V'$ es s.g.

OPERACIONES CON APLICACIONES LINEALES

es un e.v. sobre K

→ $Hom_K(V, V') = \{f: V \to V' \ / \ f$ es aplicación lineal$\}$

(todas las ap. lineales!)

- Suma: $(f+g)(au+bw) = a(f+g)(u) + b(f+g)(w)$
- Prod. escalares: $(af)(bu+cw) = b(af)(u) + c(af)(w)$

→ composición de app. lineales

$$\left.\begin{array}{l} f: V \to V' \\ g: V' \to V'' \end{array}\right\} \ g \circ f : V \to V''$$

→ ENDOMORFISMO: dominio = codominio

ppdades en P.5

→ AUTOMORFISMO: endomorfismo biyectivo

APLICACIONES LINEALES Y MATRICES

MATRIZ ASOCIADA A UNA APP. LINEAL $f: V \to V'$

$$\mu(f; \beta' \leftarrow \beta) = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{array}\right) \\ \downarrow \ \cdots \ \downarrow \\ f(u_1) \quad f(u_n) \end{array}$$

- $\beta = \{u_1, \dots, u_n\}$
- $f(\beta)$ está expresado en coordenadas de β'

- número de filas → $dim_K(V')$
  número de columnas → $dim_K(V)$

- $\mu(f; \beta \leftarrow \beta) \equiv \mu(f; \beta)$

- FÓRMULA DIMENSIONES

$$dim_K(Ker(f)) + dim_K(Im(f)) = dim_K(V)$$

- Rango $\mu(f; \beta' \leftarrow \beta) = dim_K(Im(f))$
  Nulidad $\mu(f; \beta' \leftarrow \beta) = dim_K(Ker(f))$

- PROPOSICIÓN

$f: V \to V'$ $\quad \begin{array}{l} dim_K(V) = n \\ dim_K(V') = m \end{array} \quad A = \mu(f; \beta' \leftarrow \beta)$

1- f monomorfismo $\Leftrightarrow rg(A) = n$

2- f epimorfismo $\Leftrightarrow rg(A) = m$

3- f isomorfismo $\Leftrightarrow$ A cuadrada y regular

- $V \cong V'$ isomorfos $\Leftrightarrow$ misma dimensión

MATRIZ ASOCIADA Y CAMBIO DE BASE

$$\underbrace{\mu(f; \bar{\beta}' \leftarrow \bar{\beta})}_{C} = \underbrace{\mu_{\bar{\beta}' \leftarrow \beta'}}_{Q^{-1}} \cdot \underbrace{\mu(f; \beta' \leftarrow \beta)}_{A} \cdot \underbrace{\mu_{\beta \leftarrow \bar{\beta}}}_{P}$$

C y A son equivalentes

"Dos matrices son equivalentes $\Leftrightarrow$ son matrices asociadas a la misma app. respecto de distintas bases (A y B)"

* dos matrices $A, C \in \mathcal{M}_n(K)$ son semejantes si $\exists P \in \mathcal{M}_n(K)$ regular : $C = P^{-1} A P$

MATRIZ ASOCIADA Y OPERACIONES CON APP. LINEALES

- $\mu(f+g; \beta' \leftarrow \beta) = \mu(f; \beta' \leftarrow \beta) + \mu(g; \beta' \leftarrow \beta)$
- $\mu(k \cdot f; \beta' \leftarrow \beta) = k \cdot \mu(f; \beta' \leftarrow \beta)$
- $\mu(g \circ f; \beta'' \leftarrow \beta) = \mu(u; \beta'' \leftarrow \beta') \cdot \mu(f; \beta' \leftarrow \beta)$

una que relaciona las app lineales (y, por ende, sus matrices asociadas) con el espacio vectorial de las matrices

resumen

$\boxed{\text{TEMA 4}}$ ESPACIO DUAL DE UN ESPACIO VECTORIAL

INTRODUCCIÓN

$f: V \to K$ con $\mathcal{V}(K)$ se llama forma lineal

El conjunto $\{f: V \to K \,/\, f \text{ es lineal}\}$ es el espacio dual de $\mathcal{V}$ (es un espacio vectorial)

matriz asociada: $\mu(f; \{1\} \leftarrow \beta) \equiv \mu(f; \beta)$

BASES DUALES

$\boxed{\dim_K(V) = \dim_K(V^*)}$

$$\begin{cases} \beta = \{v_1, \dots, v_n\} \text{ base de } V \\ \beta^* = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \text{ base de } V^* \end{cases}$$

- β^* es la base dual de β si se verifica que $\varphi_i(v_i) = 1$, pero que $\varphi_j(v_i) = 0$ con $j \neq i$

→ **Prop**: Si β^* es la dual de β, entonces $\forall \varphi \in \mathcal{V}^*$, los elementos de su matriz asociada en la base β coinciden con sus coordenadas en la base β^*.

→ **Prop**: $\forall \beta$ de $\mathcal{V}$, $\exists!\ \beta^*$ de $\mathcal{V}^*$

$$\begin{cases} \beta = \{(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3)\} \\ \beta^* = \{(\mu_1, \mu_2, \mu_3), (\beta_1, \beta_2, \beta_3), (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\} \end{cases}$$

Si β y β^* son duales:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 & \beta_1 & \lambda_1 \\ \mu_2 & \beta_2 & \lambda_2 \\ \mu_3 & \beta_3 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

→ **Prop**: Si β y β^* son duales, entonces si $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $\beta^* = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ y $v \in \mathcal{V}$, es $v_i = \varphi_i(v)$ con $i \in \{1, \dots, n\}$.

T^{MA} DE REFLEXIVIDAD

La aplicación $\Phi: V \to (V^*)^*$, dada por $\Phi(v) = \Phi_v: V^* \to K$ tal que $\forall \varphi \in V^*$, $\Phi_v(\varphi) = \varphi(v)$, es un isomorfismo de e.v.

En resumidas cuentas: $(V^*)^* \equiv V$ y $\Phi_v \equiv v$

ANULADOR DE UN S.V.

$an(S) = \{\varphi \in V^* \,/\, \varphi(v) = 0 \ \forall v \in S\}$

- $an(S)$ es s.v. de V^*
- $an(S) = an(\mathcal{L}(S))$

- $\dim_K(an(U)) = \dim_K(V) - \dim_K(U)$
- $an(U+W) = an(U) \cap an(W)$
- $an(U \cap W) = an(U) + an(W)$
- $V \subseteq W \Rightarrow an(W) \subseteq an(U)$
- $an(V) = \{\varphi_0\}$ y $an(\{0\}) = V^*$

  $an(V^*) = \{\vec{0}\}$ y $an(\{\varphi_0\}) = V$

APLICACIÓN LINEAL TRASPUESTA

Sea $f: V \to V'$ y $A = \mu(f; \beta' \leftarrow \beta)$

Sea $\varphi': V' \to K$

$$V \xrightarrow{f} V' \xrightarrow{\varphi'} K$$

Definimos $f^t: (V')^* \to V^*$ con $f^t(\varphi') = \varphi' \circ f$

- f^t es una app lineal
- $\mu(f^t; \beta^* \leftarrow (\beta')^*) = A^t$

se verifica: β y β^* duales, β' y $(\beta')^*$ duales

Ppdades

$$\begin{cases} Ker(f^t) = an(Im(f)) \\ Im(f^t) = an(Ker(f)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Ker(f) = an(Im(f^t)) \\ Im(f) = an(Ker(f^t)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Rg(f) = Rg(f^t) \\ Tr(f) = Tr(f^t) \end{cases}$$