Sea $\alpha > 0$ y considera la ley recurrente $x_{n+1} = x_n \cdot \ln(\alpha + x_n^2)$. Estudiar el número de puntos fijos y su estabilidad en función de α.

$x = x \cdot \ln(\alpha + x^2) \Rightarrow x = 0$

$\Rightarrow 1 = \ln(\alpha + x^2) \Rightarrow e = \alpha + x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{e-\alpha}$

Solo tiene sentido para $\alpha < e$

$\boxed{\alpha < e}$

$f(x) = x \cdot \ln(\alpha + x^2)$

$f'(x) = \ln(\alpha + x^2) + \dfrac{2x^2}{\alpha + x^2}$

$f'(0) = \ln(\alpha)$ ¿$-1 < \ln(\alpha) < 1$? $\Rightarrow \frac{1}{e} < \alpha < e$

Para $\frac{1}{e} < \alpha < e$, $x = 0$ as. estable

Para $\alpha = 1/e$, no da información

Para $0 < \alpha < 1/e$, $x = 0$ inestable

$f'(x) = \ln(1/e + x^2) + \dfrac{2x^2}{1/e + x^2}$

$f''(x) = \dfrac{2x}{1/e + x^2} + \dfrac{4x(1/e + x^2) - 4x^3}{(1/e + x^2)^2} = \dfrac{2x}{1/e + x^2} + \dfrac{4/e\, x}{(1/e + x^2)^2}$

$f'''(x) = \dfrac{2/e + x^2 - 4x^2}{(1/e + x^2)^2} + \dfrac{4/e(1/e + x^2)^2 - 4x(1/e + x^2) \cdot 4/e\, x}{(1/e + x^2)^4}$

$f''(0) = 0$ $\quad f'''(0) = \dfrac{4/e^3}{1/e^4} = \dfrac{4e^4}{e^3} = 4e$

Aplicamos el lema: $2 \cdot f'''(0) + 3 \cdot f''(0)^2 = 8e > 0 \longrightarrow$ As. estable $x = 0$

¿Qué pasa con $\pm\sqrt{e-\alpha}$?

$f'(-\sqrt{e-\alpha}) = \ln(e) + \dfrac{2(e-\alpha)}{e} = 1 +$ Algo positivo

$\shortparallel$

$f'(\sqrt{e-\alpha})$

Ambos puntos fijos son inestables

$\boxed{\alpha = e}$ Aprovechamos las derivadas de antes (donde ponga $1/e$ se pone e)

$f'(0) = 1$

$f''(0) = 0$

$f'''(0) = \dfrac{4e^3}{e^4} = \dfrac{4}{e} > 1 \Rightarrow$ Inestable

$\alpha > e$ $\quad f'(0) = \ln(\alpha) > 1 \Rightarrow$ Inestable