Práctica 2. Diferenciabilidad

Ejercicios resueltos

1. Estudiar la continuidad, la diferenciabilidad y la continuidad de las derivadas parciales, de los campos escalares $f, g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definidos de la siguiente forma, donde $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$\textbf{(a)} \qquad f(x,y) = \frac{x^2\, y}{x^2 + y^4} \quad \forall\, (x,y) \in U\,, \qquad f(0,0) = 0$$

$$\textbf{(b)} \qquad g(x,y) = \frac{x^2\, y^2}{x^2 + y^4} \quad \forall\, (x,y) \in U\,, \qquad g(0,0) = 0$$

$$\textbf{(c)} \qquad h(x,y) = \frac{x^2\, y^2}{x^2 + y^2} \quad \forall\, (x,y) \in U\,, \qquad h(0,0) = 0$$

Solución

(a.1). Tenemos claramente que $f\big|_U \in C^1(U)$, por tratarse de una función racional. El conjunto $\{(0,0)\}$, con un solo punto, es cerrado, así que U es abierto. Por el carácter local de la diferenciabilidad y de la continuidad, vemos que f es diferenciable, luego continua, y sus derivadas parciales son continuas, en todo punto de U. De hecho,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2\,x\,y\,(x^2 + y^4) - 2\,x^3\,y}{(x^2 + y^4)^2} = \frac{2\,x\,y^5}{(x^2 + y^4)^2} \quad \forall\, (x,y) \in U \qquad \text{y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2\,(x^2 + y^4) - 4\,x^2\,y^4}{(x^2 + y^4)^2} = \frac{x^4 - 3\,x^2\,y^4}{(x^2 + y^4)^2} \quad \forall\, (x,y) \in U$$

(a.2). Para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ es claro que $f(x,0) = f(0,y) = 0$, luego f es parcialmente derivable en el origen, con

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \qquad \text{es decir,} \quad \nabla f(0,0) = (0,0)$$

(a.3). Con el fin de estudiar la diferenciabilidad de f en el origen, consideramos la función $\varphi : U \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(x,y) = \frac{x^2\, y}{(x^2 + y^4)\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \forall\, (x,y) \in U$$

Para todo $x \in \mathbb{R}^+$ tenemos

$$\varphi(x,x) = \frac{x^3}{x^3 + x^5} = \frac{1}{1 + x^2}$$

De donde $\lim\limits_{x \to 0^+} \varphi(x,x) = 1 \neq 0$. Como uno de los límites radiales de φ en el origen no es 0, no se cumple que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \varphi(x,y) = 0$, luego f no es diferenciable en el origen.

Puesto que f es parcialmente derivable en $\mathbb{R}^2$, si una de sus derivadas parciales fuese continua en el origen, entonces f sería diferenciable en el origen. Por tanto, ninguna de las dos derivadas parciales de f es continua en el origen.

(a.4). Observamos finalmente que f es continua en el origen, como vimos ya en la práctica 1. De hecho, para $(x,y) \in U$, es obvio que $x^2 \leq x^2 + y^4$, luego

$$\left| f(x,y) \right| = |y| \frac{x^2}{x^2 + y^4} \leq |y| \qquad \forall (x,y) \in U$$

de donde se deduce que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$.

En resumen, f es continua y parcialmente derivable en $\mathbb{R}^2$, es diferenciable en U pero no en el origen. Ambas derivadas parciales de f son continuas en U, pero ninguna de ellas es continua en el origen. ■

(b.1). El mismo razonamiento usado para f prueba que g es diferenciable, luego continua, y sus derivadas parciales son continuas, en todo punto de U. Esta vez,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^2(x^2+y^4) - 2x^3y^2}{(x^2+y^4)^2} = \frac{2xy^6}{(x^2+y^4)^2} \quad \forall (x,y) \in U \qquad \text{y}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{2x^2y(x^2+y^4) - 4x^2y^5}{(x^2+y^4)^2} = \frac{2x^2y(x^2-y^4)}{(x^2+y^4)^2} \quad \forall (x,y) \in U$$

(b.2). Puesto que $g(x,0) = g(0,y) = 0$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$, vemos también que g es parcialmente derivable en el origen, con

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = 0$$

(b.3). Para $(x,y) \in U$, usando que $x^2 \leq x^2+y^4$, y también $|x^2 - y^4| \leq x^2 + y^4$, obtenemos que

$$\left| \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \right| \leq 2|y| \frac{x^2|x^2-y^4|}{(x^2+y^4)^2} \leq 2|y|$$

Deducimos que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0$, luego $\frac{\partial g}{\partial y}$ es continua en el origen.

Como g es parcialmente derivable en $\mathbb{R}^2$, y su segunda derivada parcial es continua en el origen, deducimos que f es diferenciable, luego continua, en el origen.

(b.4). Estudiemos la continuidad en el origen de la primera derivada parcial de g. Para ello usamos el cambio de variable $(x,y) = (t^2,t) \in \mathbb{R}^2$ con $t \in \mathbb{R}$, teniendo en cuenta que $(t^2,t) \neq (0,0)$ para $t \neq 0$, y que $(t^2,t) \to (0,0)$ cuando $t \to 0$. Vemos que

$$\frac{\partial g}{\partial x}(t^2,t) = \frac{2t^2t^6}{(2t^4)^2} = \frac{1}{2} \qquad \forall t \in \mathbb{R}^*$$

Si fuese $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 0$, el cambio de variable nos daría $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\partial g}{\partial x}(t^2,t) = 0$, lo cual es falso, como acabamos de ver. Por tanto $\partial g / \partial x$ no es continua en el origen.

En resumen g es diferenciable, luego también continua, en todo el plano. Su segunda derivada parcial es continua en $\mathbb{R}^2$, mientras que la primera es continua en U, pero no en el origen. ■

(c.1). El mismo razonamiento usado para f y g prueba que h es diferenciable, luego continua, y sus derivadas parciales son continuas, en todo punto de U. Ahora tenemos

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \frac{2\,x\,y^2(x^2 + y^2) - 2\,x^3\,y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2\,x\,y^4}{(x^2 + y^2)^2} \quad \forall\,(x,y) \in U$$

y, por simetría,

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \frac{2\,x^4\,y}{(x^2 + y^2)^2} \quad \forall\,(x,y) \in U$$

(c.2) Para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$, de nuevo tenemos $h(x,0) = h(0,y) = 0$, luego h es parcialmente derivable en el origen, con

$$\frac{\partial h}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial h}{\partial y}(0,0) = 0$$

(c.2). Veremos que las derivadas parciales de h son continuas en el origen. Basta trabajar con una de ellas, puesto que

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial h}{\partial y}(y,x) \qquad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Para todo $(x,y) \in U$, se tiene $y^4 \leq (x^2 + y^2)^2$ luego

$$\left| \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) \right| = 2\,|\,x\,|\,\frac{y^4}{(x^2 + y^2)^2} \leq 2\,|\,x\,| \qquad \forall\,(x,y) \in U$$

de donde claramente deducimos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial h}{\partial x}(0,0)$$

es decir, $\dfrac{\partial h}{\partial x}$ es continua en el origen y, como ya se ha dicho, igual le ocurre a $\dfrac{\partial h}{\partial y}$. La condición suficiente para la diferenciabilidad nos dice que h es diferenciable en el origen.

En resumen, tenemos $h \in C^1(\mathbb{R}^2)$. ■

2. Estudiar la continuidad, la diferenciabilidad y la continuidad de las derivadas parciales, del campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definido por:

$$f(x,y) = \frac{x^3\,(y-1)^2}{x^2 + |\,y-1\,|} \qquad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,1)\}\,, \qquad f(0,1) = 0$$

Solución

(a). Sea $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1\}$, que es un conjunto cerrado, por ser la imagen inversa de $\{1\}$ por la función continua $(x,y) \mapsto y$, de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$, con lo que el conjunto $U = \mathbb{R}^2 \setminus A$ es abierto. Vemos que $f\big|_U \in C^1(U)$, por ser el cociente de dos funciones de clase C^1 en U. Concretamente, el numerador es una función polinómica y el denominador es la suma de otra función polinómica con la función $(x,y) \mapsto |\,y-1\,|$, de U en $\mathbb{R}$, que es composición de otra función polinómica, que toma valores en $\mathbb{R}^*$, con el valor absoluto, una función de clase C^1 en $\mathbb{R}^*$. Como U es abierto, por el carácter local de la diferenciabilidad y de la continuidad, deducimos que f es diferenciable, luego continua, y sus derivadas parciales son continuas, en todo punto de U. Concretamente, para todo $(x,y) \in U$ se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{3\,x^2\,(y-1)^2\,\big(x^2 + |\,y-1\,|\big) - 2\,x^4\,(y-1)^2}{\big(x^2 + |\,y-1\,|\big)^2} \\
&= \frac{x^2\,(y-1)^2\,\big(x^2 + 3\,|\,y-1\,|\big)}{\big(x^2 + |\,y-1\,|\big)^2} \qquad \text{y} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{2\,x^3\,(y-1)\,\big(x^2 + |\,y-1\,|\big) - x^3\,(y-1)^2\,\big(|\,y-1\,|/(y-1)\big)}{\big(x^2 + |\,y-1\,|\big)^2} \\
&= \frac{x^3\,(y-1)\,\big(2\,x^2 + |\,y-1\,|\big)}{\big(x^2 + |\,y-1\,|\big)^2}
\end{aligned}$$

(b). Fijemos ahora un punto del conjunto A, que será de la forma $(a,1)$ con $a \in \mathbb{R}$. Para todo $x \in \mathbb{R}$ tenemos $f(x,1) = f(a,1) = 0$ de donde

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,1) = \lim_{x\to a} \frac{f(x,1) - f(a,1)}{x-a} = 0$$

Por otra parte, para $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ se tiene $f(a,y) = \dfrac{a^3\,(y-1)^2}{a^2 + |\,y-1\,|}$ de donde, si $a \neq 0$, obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,1) = \lim_{y\to 1} \frac{f(a,y) - f(a,1)}{y-1} = \lim_{y\to 1} \frac{a^3\,(y-1)}{a^2 + |\,y-1\,|} = 0$$

igualdad también válida para $a = 0$, ya que $f(0,y) = f(0,1) = 0$ para todo $y \in \mathbb{R}$. Por tanto, f es parcialmente derivable en todo punto de $\mathbb{R}^2$ y en los puntos de A se tiene $\nabla f(a,1) = (0,0)$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

(c). Veamos que las derivadas parciales de f son continuas en todo punto $(a,1) \in A$ con $a \in \mathbb{R}$. Dado $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, para la primera derivada parcial podemos usar, por ejemplo, las desigualdades $x^2 \leq x^2 + |y-1|$ y $x^2 + 3|y-1| \leq 3\big(x^2 + |y-1|\big)$. Suponiendo $y \neq 1$, tenemos:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \right| = \frac{x^2 (y-1)^2 \big(x^2 + 3|y-1|\big)}{\big(x^2 + |y-1|\big)^2} \leq 3(y-1)^2$$

desigualdad que es evidente cuando $y = 1$, luego es válida para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. De ella se deduce claramente que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,1)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(a,1)$, luego $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ es continua en el punto $(a,1)$.

Para la otra derivada parcial, usamos que $2x^2 + |y-1| \leq 2\big(x^2 + |y-1|\big)$ y, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, obtenemos

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right| = \frac{x^3 (y-1)\big(2x^2 + |y-1|\big)}{\big(x^2 + |y-1|\big)^2} \leq 2|x|\,|y-1|$$

de donde $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,1)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(a,1)$, así que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ es continua en $(a,1)$.

En resumen, hemos probado que $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. ■

3. Probar que el campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definido por:

$$f(x,y) = \frac{x^6\big(x^2 + y^2\big)}{\big(y - x^2\big)^2 + x^6} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \qquad f(0,0) = 0$$

es diferenciable en $\mathbb{R}^2$.

Solución.

(a). Considerando el abierto $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ es obvio que $f\big|_U \in C^1(U)$, pues se trata de una función racional. El carácter local de la diferenciabilidad nos dice que f es diferenciable en todo punto de U.

(b). Observamos que, para cualesquiera $x,y \in \mathbb{R}$, se tiene $f(x,0) = f(0,y) = 0$, luego f es parcialmente derivable en el origen con $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

A poco que se piense, el cálculo de las derivadas parciales de f en puntos de U es laborioso, luego el estudio de su continuidad en el origen no parece fácil. Aprovechando que sólo interesa la diferenciabilidad de f en el origen, la abordamos directamente.

Consideramos entonces la función $\varphi : U \to \mathbb{R}$ dada por

$$\begin{aligned}\varphi(x,y) &= \frac{f(x,y) - f(0,0) - \big(\nabla f(0,0) \,\big|\, (x,y)\big)}{\|\,(x,y)\,\|} \\ &= \frac{x^6\,(x^2 + y^2)}{\big((y-x^2)^2 + x^6\big)\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^6\sqrt{x^2+y^2}}{(y-x^2)^2 + x^6} \qquad \forall\, x \in U\end{aligned}$$

Usando que $x^6 \leq (y-x^2)^2 + x^6$ obtenemos que

$$0 \leq \varphi(x,y) \leq \sqrt{x^2+y^2} \qquad \forall\,(x,y) \in U$$

de donde se deduce evidentemente que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \varphi(x,y) = 0$, luego f es diferenciable en el origen y, en resumen, es diferenciable en $\mathbb{R}^2$, como se quería. ■