7 Calcular los siguientes límites utilizando el desarrollo de Taylor:

iii) $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)\operatorname{sen} x - x^2 + x^3}{x^3} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{Indeterminación}$$

Desarrollo de Taylor de:

$\cdot)\ \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \dots$

$\cdot)\ \operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \dots$

El polinomio de Taylor de $-x^2+x^3$ es el propio $-x^2+x^3$, y con resto nulo

Lo mismo ocurre con x^3

Sea $f(x) = \ln(1+x)\operatorname{sen} x$

$$P_{3,0}^{f(x)} = \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right)\left(x - \frac{x^3}{6}\right) \underset{\substack{\text{truncado en}\\ n=3}}{=} x^2 - \frac{1}{2}x^3$$

Conclusión:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)\operatorname{sen}x - x^2 + x^3}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{P_{3,0}^{f(x)} + R_{3,0}^{f(x)} - x^2 + x^3}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \frac{1}{2}x^3 - x^2 + x^3 + R_{3,0}^{f(x)}}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 - \frac{1}{2}x^3 + R_{3,0}^{f(x)}}{x^3}$$

Dividimos num y den. por x_3 $\Rightarrow$ $$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{2} + \frac{R_{3,0}}{x^3}}{1} \overset{(*)}{=} \frac{1}{2}$$

$$\left(\lim_{x\to 0} \frac{R_{3,0}^{f(x)}}{x^3} = 0\right)^{(*)}$$

Escaneado con CamScanner

iv) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln^2(1+x) - \text{sen}^2(x)}{1-e^{-x^2}} = \dfrac{0}{0} \Rightarrow$ Indeterminación.

Desarrollo de Taylor de:

$\cdot)\ \ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots$

$\cdot)\ \text{sen}(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots$

$\cdot)\ e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots$

$e^{-x^2} = 1 + (-x^2) + \dfrac{(-x^2)^2}{2!} = 1 - x^2 + \dfrac{x^4}{2!} + \cdots$

$1 - e^{-x} = x^2 - \dfrac{x^4}{2!} + \cdots \Rightarrow P_{4,0}^{1-e^{-x^2}} = x^2 - \dfrac{x^4}{2!}$

Sea $f(x) = \ln^2(1+x) - \text{sen}^2(x)$

$$P_{4,0}^{f(x)} = \Big(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\Big)\underbrace{\Big(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\Big)}_{\text{trunco en } n=4} - \Big(x - \frac{x^3}{3!}\Big)\underbrace{\Big(x - \frac{x^3}{3!}\Big)}_{\text{trunco en } n=4}$$

$$= x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 - x^2 + \frac{x^4}{3} = -x^3 + \frac{5}{4}x^4$$

Conclusión

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln^2(1+x) - \text{sen}^2(x)}{1-e^{-x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{P_{4,0}^{f(x)}(x) + R_{4,0}^{f(x)}(x)}{P_{4,0}^{1-e^{-x^2}}(x) + R_{4,0}^{f(x)}(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^3 + \frac{5}{4}x^4 + R_{4,0}^{f}(x)}{x^2 - \frac{x^4}{2} + R_{4,0}^{1-e^{-x^2}}(x)}$$

divido por x^2 num y denom.

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x + \frac{5}{4}x^2 + \frac{R_{4,0}^{f}}{x^2}}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{R_{4,0}^{1-e^{-x^2}}(x)}{x^2}} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x\to 0} \dfrac{R_{4,0}^{f}(x)}{x^2} = 0 \\ \lim_{x\to 0} \dfrac{R_{4,0}^{1-e^{-x^2}}(x)}{x^2} = 0 \end{array} \right\}$$