Ejercicios Álgebra - Relación 5

Congruencias. Ideales y cocientes

5.1. En el anillo $\mathbb{Z}[x]$ de los polinomios con coeficientes en $\mathbb{Z}$, estudiar si son ideales los subconjuntos:

a) I (todos los polinomios con término independiente cero).

1º) $0 \in I$, pues el polinomio nulo tiene término ind. cero.

2º) $\left.\begin{array}{l} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 \quad a_0 = 0 \\ b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_0 \quad b_0 = 0 \end{array}\right\}$ Al sumarlos, el término independiente será $a_0 + b_0 = 0$ ✓

Cerrado para sumas

3º) Si multiplicamos un polinomio del ideal por otro del anillo, obtenemos un polinomio cuyo término independiente es $b_0 c_0$, y como $b_0 = 0$, $b_0 c_0 = 0$ y por tanto el polinomio pertenece al ideal. Cerrado para productos ✓

$\boxed{I \trianglelefteq \mathbb{Z}[x]}$

b) J (todos los polinomios con término independiente par).

1º) $0 \in J$, pues el polinomio nulo tiene término independiente par.

2º) $\left\{\begin{array}{l} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 \quad a_0 = 2a \\ b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_0 \quad b_0 = 2b \end{array}\right.$

Al sumarlos, el término independiente será $a_0 + b_0 = 2(a+b)$, que es par. Cerrado para sumas ✓

3º) Si multiplicamos un polinomio del ideal por otro del anillo, obtenemos un polinomio cuyo término independiente es $b_0 c_0$ y será par, ya que b_0 es par. Cerrado para productos ✓ $\boxed{J \trianglelefteq \mathbb{Z}[x]}$

c) K (todos los polinomios con sus coeficientes todos pares).

1º) $0 \in K$, pues el polinomio nulo tiene todos sus coeficientes pares.

2º) $\left.\begin{array}{l} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 \\ b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_0 \end{array}\right\}$ Al sumarlos, se obtiene un polinomio con coeficientes todos pares, pues resultan de sumar números pares.

Cerrado para sumas ✓

3°) Si multiplicamos un polinomio del ideal por otro del anillo, obtenemos un polinomio con coeficientes todos pares ya que par · par = par y par · impar = par.

Cerrado para productos ✓ $\boxed{K \leq \mathbb{Z}[x]}$

5.7 Estudiar qué ideales de los del ejercicio 5.1 son principales.

a) El ideal I es principal ya que a todos sus polinomios se les puede extraer factor común x, es decir, se pueden expresar de la forma $x \cdot \mathbb{Z}[x]$. En resumen, es el ideal principal generado por x.

c) El ideal K es principal ya que a todos sus polinomios se les puede extraer factor común 2, es decir, se pueden expresar de la forma $2 \cdot \mathbb{Z}[x]$. En resumen, es el ideal principal generado por 2, siendo 2 el polinomio con coeficientes nulos y término independiente 2.

5.2. Determinar los ideales del cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales.

1° Sea A un anillo y $u \in A$ una unidad ($\exists v$ tq $u \cdot v = 1$)

$\left.\begin{array}{l} I \leq A \\ 1 \in A \end{array}\right\} \Rightarrow I = A$, pues como I es cerrado para productos y tiene al 1, cualquier elemento de A por 1 está en I, luego $I = A$.

2° $\left.\begin{array}{l} I \leq A \\ u \text{ unidad} \\ u \in I \end{array}\right\} \Rightarrow I = A$, pues I es cerrado para productos y el 1 estará en I ya que si $u^{-1} \in A$ y $u \in I$, $u^{-1} \cdot u = 1 \in I$, y por el apartado anterior, concluimos que $I = A$.

3° Sea K un cuerpo $0 \neq I \leq K$ $\Big\}$ $I = K$, pues como todos los elementos de K son invertibles, $1 \in I$ por el apartado 2 y por el apartado 1, $I = K$.

Por todo esto, concluimos que como $\mathbb{R}$ es un cuerpo, los ideales de $\mathbb{R}$ serán $\{0\}$ y el propio $\mathbb{R}$

5.8. En el anillo $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ se considera el subconjunto $I = \{(x,y) \mid x,y$ son múltiplos de $3\}$. Probar que I es un ideal no principal de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

Primero debemos ver que es un ideal:

1° $0 \in I$ ya que $(0,0)$, $0\cdot 3$ y $0\cdot 3$

2° Sean $(x,y), (z,t) \in I$:

$(x,y)+(z,t) = (x+z, y+t) \in I$, porque si x,y,z,t son múltiplos de 3, entonces $x+z, y+t$ también. ✓

Cerrado para sumas

3° Sea $(x,y) \in I$ y $(z,t) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$:

$(x,y)\cdot(z,t) = (xz, yt) \in I$, porque si x e y son múltiplos de 3, entonces xz e yt también.

5.6. Describir los ideales de $\mathbb{Z}_{14}$ enumerando los elementos de cada uno de ellos.

$\mathbb{Z}_{14} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13\}$

Sabemos que $\frac{\mathbb{Z}}{14\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_{14}$, y por el ejercicio 5.3., sabemos que los ideales de un anillo cociente A/I son todos de la forma J/I con $I \leq A$ $J \leq A$ y $I \subseteq J$. Por ello, los ideales de $\mathbb{Z}_{14}$ serán:

$$\frac{2\mathbb{Z}}{14\mathbb{Z}} = \{[0],[2],[4],[6],[8],[10],[12]\}$$

$$\frac{7\mathbb{Z}}{14\mathbb{Z}} = \{[0],[7]\}$$

$$\frac{14\mathbb{Z}}{14\mathbb{Z}} = \{[0]\}$$

$$\frac{\mathbb{Z}}{14\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_{14}$$

5.5. Probar que todos los ideales de $\mathbb{Z}$ son principales. Dar condiciones para que se verifique que $n\mathbb{Z} \subseteq m\mathbb{Z}$.

Supongamos un ideal no trivial $I \trianglelefteq \mathbb{Z}$ (pues el trivial es claramente principal) y denotemos $I^+ = \{a \in I ; a > 0\} \subseteq \mathbb{N}$
Puesto que si $a \in I^+$, entonces $-a \in I$ e I es no trivial, tenemos que $I^+ \neq \emptyset$ y por tanto podemos tomar $a = \min(I^+)$.
Como $a \in I^+ \subseteq I$, tenemos que $aA \subseteq I$.

Recíprocamente, sea $b \in I$ un elemento cualquiera, y como $a \neq 0$, podemos dividir b por a de tal forma que $b = aq + r$ con $q, r \in \mathbb{Z}$ y $0 \leq r < |a| = a$. Veamos que $r = 0$. Si no fuese cero, $r = b - aq$. Independientemente de si $b < 0$ o $b > 0$, $b - aq > 0$, y como $b \in I$, y $-aq \in I$ (cerrado para productos), $b - aq \in I^+$
(cerrado para combinaciones lineales). Esto significaría que
$r < a$, pero $a = \min(I^+)$, por lo tanto tenemos una con-
tradicción y necesariamente $r = 0$. Así, concluimos que
$b = aq \in aA$. Como b era un elemento cualquiera de I,
$I \subseteq aA$, y como teníamos ya de antes que $aA \subseteq I$,
podemos asegurar que todo ideal de $\mathbb{Z}$ es principal $I = aA$.

Para que $n\mathbb{Z} \subseteq m\mathbb{Z}$, m debe ser divisor de n. Por ejemplo:

$3\mathbb{Z} = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, \ldots\}$

$6\mathbb{Z} = \{0, 6, 12, 18, \ldots\}$

$$6\mathbb{Z} \subseteq 3\mathbb{Z}$$