Geometría

Prueba Temas 1 y 2

Nombre: José Alberto Hoces Castro

2. $P^3(\mathbb{R})$

$U = \mathcal{L}(\{1-x, 1+x^2\})$

$W = \{p(x) \in P^3(\mathbb{R}) \mid p(1)=0, p''(1)=0\}$.

a) ¿$U+W$? ¿$U \cap W$? ¿Es suma directa?

Necesitamos hallar una base de W:

$p(1)=0 \Rightarrow \boxed{a_0+a_1+a_2+a_3=0}$

$p''(1)=0 \Rightarrow a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$

$p'(x) \Rightarrow a_1+2a_2x+3a_3x^2$

$p''(x) \Rightarrow 2a_2+6a_3x$

$p''(1)=0 \Rightarrow \boxed{2a_2+6a_3=0}$

Como se tienen 2 ecuaciones y $P^3(\mathbb{R})$ tiene dimensión 4, entonces W tiene dimensión 2 y una base de W estará formada por 2 polinomios L.I. que cumplan sus ecuaciones cartesianas. Por ejemplo:

- $-1-x+3x^2-x^3 \in W$ con coordenadas $(-1,-1,3,-1)$
- $1-x \in W$ con coordenadas $(1,-1,0,0)$

Sus coordenadas muestran que ambos polinomios son L.I y, por lo tanto

$W = \mathcal{L}\{(+1-x), (-1-x+3x^2-x^3)\}$

Entonces $U+W$:

$$U+W = \mathcal{L}\{(1-x), (-1-x+3x^2-x^3), (1-x), (1+x^2)\}$$

Veamos si son L.I con sus coordenadas:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1-3-1 = -5 \neq 0$$

Hemos visto que el 1º, 2º y 4º polinomios son L.I., por lo que:

$$U+W = \mathcal{L}\{(1-x), (-1-x+3x^2-x^3), (1+x^2)\}$$

$$\dim_{\mathbb{R}}(U+W) = 3$$

$\boxed{U \cap W}$

Las ecuaciones de W son: $\begin{cases} a_0+a_1+a_2+a_3=0 \\ 2a_2+6a_3=0 \end{cases}$

Para hallar las de U:

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & a_0 \\ -1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} = 2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & a_0 \\ -1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{-a_0+a_2-a_1=0}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a_0 \\ -1 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{a_3=0}$$

Por lo que $U \cap W$ viene dado por las ecuaciones:

$$\begin{cases} a_0+a_1+a_2+a_3=0 \\ 2a_2+6a_3=0 \\ -a_0+a_2-a_1=0 \\ a_3=0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Veamos su rango}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2+2=0 \Rightarrow rg(A)\leq 3$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow rg(A)=3$$

Ec. cartesianas de $U \cap W$:

$$\begin{cases} 2a_2 + 6a_3 = 0 \\ -a_0 - a_1 + a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \end{cases} \qquad \dim_{\mathbb{R}}(U\cap W) = 1$$

Solo necesitamos un vector que cumpla las ecuaciones para tener una base:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -6+2-6=-10\neq 0 \Rightarrow rg(A)=3$$

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ 2a_2 + 6a_3 = 0 \\ -a_0 + a_2 - a_1 = 0 \end{cases} \qquad \dim_{\mathbb{R}}(U\cap W)=1$$

Para tener una base de $U \cap W$ solo necesitamos un vector que cumpla las ecuaciones, por ejemplo: $(-1,1,0,0)$

$$U\cap W = \mathcal{L}\{(-1+x)\}$$

$U+W$ no es suma directa ya que $\dim_{\mathbb{R}}(U\cap W)\neq 0$

6) Complementario de U y W.

El complementario de U estará formado por 2 polinomios L.I. con los de la base de U. Los de U son: $1-x$ $(1,-1,0,0)$
$1+x^2$ $(1,0,1,0)$

Si cogemos el determinante de 4×4 siguiente:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$ como $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$ entonces el determinante de 4x4 también por lo que los polinomios de coordenadas $(0,0,1,0), (0,0,0,1)$ forman un complementario de U al que llamaremos A.

$A = \mathcal{L}\{(x^2),(x^3)\}$

Ahora con W hacemos igual:

- $(1-x) \to (1,-1,0,0)$
- $(-1-x+3x^2-x^3) \to (-1,-1,3,-1)$

Si tomamos el determinante de 4x4:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$ Como $$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0,$$ entonces el determinante de 4x4 desarrollando por la última columna también es distinto de 0. Por lo explicado antes, un complementario de W será: (Lo llamaremos B)

$(1,0,0,0) \to 1$
$(0,0,0,1) \to x^3$

$B = \mathcal{L}\{(1),(x^3)\}$

c) Base de $P^3(\mathbb{R})/U \cap W$.
Base de un complementario de $U \cap W$:
Primero se busca un complementario de $U \cap W$:

$U \cap W = \mathcal{L}\{(-1+x)\}$

El complementario tendrá una base formada por 3 polinomios L.I. con $-1+x$:

- $(-1+x) \to (-1,1,0,0)$
- $1 \to (1,0,0,0)$
- $x^2 \to (0,0,1,0)$
- $x^3 \to (0,0,0,1)$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ también y por lo tanto, el determinante de 4×4 también, por lo que el complementario de $U \cap W$ (llamémosle C) estará formado por los tres polinomios de las coordenadas que hemos añadido:

$$C = \mathcal{L}\{(1),(x^2),(x^3)\}$$

y, por lo tanto, $\frac{P^3(\mathbb{R})}{U\cap W}$:

$$\frac{P^3(\mathbb{R})}{U\cap W} = \mathcal{L}\{((1)+U\cap W, (x^2)+U\cap W, (x^3)+U\cap W)\}$$

1. $\begin{cases} ax+z+t=0 \\ ax+y+2z=a \\ y+z+at=a \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 & 1 \\ a & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$

$$A^* = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 & 1 & 0 \\ a & 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & a & a \end{pmatrix}$$

Veamos el rango de A en función de a:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ $rg(A) \geq 2$

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 1-2-a = -a-1 \Rightarrow -a-1=0 \Leftrightarrow a=-1$

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ a & 2 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = 2a^2 + a - a^2 = a^2 + a \Rightarrow a^2 + a = 0 \Leftrightarrow a(a+1) = 0$$

$a = 0 \quad a = -1$

Entonces, $rg(A) = 2$ cuando $a = -1$.

Ahora veamos el rango de la ampliada:

Si $a = -1$

$$A^* = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad rg(A^*) \geq 2$$

$$\left.\begin{aligned} &\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 + 2 = 0 \\ &\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0 \\ &\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0 \end{aligned}\right\} rg(A^*) = 2 \text{ si } a = -1$$

En caso de que $a \neq -1$:

$$\begin{cases} ax + z + t = 0 \\ ax + y + 2z = a \\ y + z + at = a \end{cases}$$

Resuelvo por Gauss:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 1 & 1 & 0 \\ a & 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & a & a \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_1} \begin{pmatrix} a & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & 1 & a & a \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3 - F_2} \begin{pmatrix} a & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & a \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ax + z + t = 0 \\ y + z - t = a \\ (a+1)t = 0 \end{cases}$$

1º) $(a+1)t=0 \Rightarrow$ Como $a\neq -1$, solo puede ser que $t=0$.

2º) $y+z-t=a \Rightarrow y+z=a \Rightarrow z=a-y$

3º) $ax+z+t=0 \Rightarrow ax+a-y=0 \Rightarrow x=\dfrac{y-a}{a}$ Solo cuando $a\neq 0$

Tomamos y como parámetro $\lambda\in\mathbb{R}$

Sol.: $\left(\dfrac{\lambda-a}{a}, \lambda, a-\lambda, 0\right)$ $\forall\lambda\in\mathbb{R}$ (Sería un S.C. Indeterm.)

~~Ahora consideramos~~

- Entonces, si $a\neq -1$, $rg(A)=rg(A^*)=3<$ nº incóg. $=4$, por lo que sería un S.C. Indeterminado.
- Si $a=-1$, $rg(A)=rg(A^*)=2<$ nº incóg. $=4$, por lo que sería un S.C. Indeterminado de 2 parámetros:

Resolvamos este caso:

$$\begin{cases} -x+z+t=0 \\ -x+y+2z=-1 \\ y+z-t=-1 \end{cases}$$

- $x=z+t$
- $-x+y+2z=-1 \Rightarrow -z-t+y+2z=-1$

$\Rightarrow z-t+y=-1 \Rightarrow \boxed{z=-1+t-y}$

- $y+z-t=-1 \Rightarrow y-1+t-y=-1 \Rightarrow -1=-1$ ✓
- $x=z+t \Rightarrow x=-1+t-y+t \Rightarrow \boxed{x=2t-y-1}$

Tomamos como parámetros "y", "t":

$t=\lambda$
$y=\mu$

Sol.: $(2\lambda-\mu-1, \mu, -1+\lambda-\mu, \lambda)$ $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}$