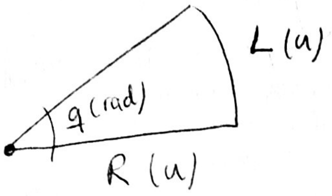
⑨

Jardín con forma de sector circular

Área del jardín A fija (u^2)

¿Valores de R y q hacen mínimo el perímetro q bordea el jardín?



Problema de optimización

1) obtenemos la ligadura calculando el área del sector circular

$$A = \frac{1}{2} R^2 \cdot q \Rightarrow \boxed{q = \frac{2A}{R^2}} \rightarrow \text{ligadura}$$

2) Obtenemos la función a optimizar calculando el perímetro del sector circular

$$p = R + R + L = 2R + \underbrace{Rq}_{\text{longitud del arco}} \longrightarrow \boxed{P(R, q) = R(2+q)}$$

3) obtenemos la función objetivo sustituyendo la ligadura en la f. a optimizar:

$$P(R) = 2R + \cancel{R} \cdot \frac{2A}{R^{\cancel{2}}} = \boxed{2\left(R + \frac{A}{R}\right) = P(R)}$$ con A fija, $A > 0$ por ser un área

4) Calculamos un mínimo de P(R) usando su primer derivada

• $P'(R) = 0 \longrightarrow P'(R) = 2 \cdot \left(1 - \frac{A}{R^2}\right) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{A}{R^2} = 0 \Rightarrow \frac{R^2 - A}{R^2} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow R^2 = A \Rightarrow \boxed{R = \pm\sqrt{A}}$$

Por el criterio de la 2ª derivada

• Para saber cuál es el mínimo calculamos la segunda derivada: $P''(R) = +\frac{4A}{R^3}$

$\hookrightarrow P''(+\sqrt{A}) = \frac{4A}{(+\sqrt{A})^3} = \frac{4A}{+\sqrt{A^3}} = \frac{4A}{A^{3/2}} = \frac{4}{+\sqrt{A}} > 0 \Rightarrow \boxed{R = +\sqrt{A} \text{ es un mínimo}}$

$\hookrightarrow P''(-\sqrt{A}) = \frac{4A}{(-\sqrt{A})^3} = -\frac{4A}{+\sqrt{A^3}} = -\frac{4}{+\sqrt{A}} < 0 \Rightarrow R = -\sqrt{A}$ es un máximo

• Sabiendo $R = +\sqrt{A}$, calculamos q: $q = \frac{2A}{(+\sqrt{A})^2} = \boxed{2 \text{ (rad)} = q}$

→ $\boxed{\text{Solución}}$: $R = +\sqrt{A}$ (u), $q = 2$ (rad)