Antonio Martínez e Ignacio Sánchez

Parcial

1. Se consideran las dos matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & \alpha \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \\ 1 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$

   donde α es un parámetro real. Se pide lo siguiente:

   a) **(2,25 puntos)** Discutir razonadamente para qué valores de α la matriz A es diagonalizable. Para todos esos valores, encontrar una matriz regular P tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.

   b) **(1,75 puntos)** Calcular la signatura y clasificar la métrica g en $\mathbb{R}^3$ con $M(g, \mathcal{B}_u) = C$.

   c) **(2 puntos)** ¿Existe algún valor $\alpha \in \mathbb{R}$ para el que A y C sean semejantes? ¿Y congruentes?

   d) **(1 punto)** Utiliza lo obtenido en b) para encontrar dos soluciones linealmente independientes de la ecuación $y^2 - z^2 + 2xy + 2xz + 16yz = 0$.

2. Resuelve de forma razonada los siguientes apartados:

   a) **(1,5 puntos)** Demostrar que toda matriz simétrica de orden dos con coeficientes reales es diagonalizable (por semejanza).

   b) **(1,5 puntos)** Sea g una métrica sobre un espacio vectorial V de dimensión n. Demostrar que el índice de g coincide con la dimensión máxima que tienen los subespacios vectoriales U de V tales que la restricción de g a U es una métrica definida negativa.

30 de abril 2014

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & \alpha \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \\ 1 & 8 & -1 \end{pmatrix}$ $\alpha \in \mathbb{R}$

a) Valores de α para los que A es diagonalizable. Para todos esos valores, hallar P regular tal que $P^{-1}AP$ es diagonal.

$$P_f(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & -2-\lambda & \alpha \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda^2-2\lambda+1)(-2-\lambda)+18+9\lambda =$$

$$= -\lambda^3+3\lambda-2+18+9\lambda = -\lambda^3+12\lambda+16$$

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 0 & 12 & 16 \\ 4 & \downarrow & -4 & -16 & -16 \\ \hline & -1 & -4 & -4 & \boxed{0} \end{array}$$

$\lambda^2+4\lambda+4=0$

$\lambda = \dfrac{-4\pm 0}{2} = -2$

$\lambda_1 = 4 \quad a_{\lambda_1} = 1 = g_{\lambda_1} \quad \lambda_2 = -2 \quad a_{\lambda_2} = 2 \quad ¿g_{\lambda_2}?$

Para que sea diag., $g_{\lambda_2} = 2$:

$$g_{\lambda_2} = 3 - rg(A + 2\cdot I_n) = 3 - rg \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \alpha \\ \cancel{3 \quad 0 \quad 3} \end{pmatrix}$$

Si $\alpha = 0$ $\Downarrow$ $= 3-1 = 2$

Si $\alpha \neq 0$ $\Uparrow$ $= 3-2 = 1$

A es diag. para $\alpha = 0$. P tendrá como columnas los vectores de las bases de los subespacios propios que calculamos a continuación:

$$V_4 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & -6 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \mathcal{L}\{(1,0,1)\}$$

$\left.\begin{matrix} x - z = 0 \\ 6y = 0 \end{matrix}\right\} y = 0 \quad x = z$

$$V_{-2} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \mathcal{L}\{(1,0,-1),(0,1,0)\}$$

$x + z = 0 \Rightarrow x = -z \quad$ Sol.: $(-z, y, z)$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Signatura y clasificar métrica g en $\mathbb{R}^3$ con $M(g,B_u)=C$.

$$\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&8\\1&8&-1\end{pmatrix} \xrightarrow{F_2:F_2-F_1} \begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&8&-1\end{pmatrix} \xrightarrow{C_2:C_2-C_1}$$

$(0,1,0)$, $\omega_g(0,1,0)=1$

$$(\mathcal{L}\{(0,1,0)\})^{\perp} = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, (x\ y\ z)\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&8\\1&8&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=0\right\}=$$

$$=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, (x\ y\ z)\begin{pmatrix}1\\1\\8\end{pmatrix}=0\right\}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x+y+8z=0\}=$$

$$=\mathcal{L}\{\underbrace{(-1,-1,0)},(-1,0,-8)\}$$

$$(\mathcal{L}\{(-1,-1,0)\})^{\perp} = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, (x\ y\ z)\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&8\\1&8&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}=0\right\}=$$

$$=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, (x\ y\ z)\begin{pmatrix}-1\\0\\-7\end{pmatrix}=0\right\}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x+7z=0\}$$

$$\begin{cases}x+y+8z=0\\x+7z=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x+y+8z=0 \Rightarrow x=-7z\\-y-z=0 \Rightarrow y=-z\end{cases}$$

B ortogonal $=\{(0,1,0),(-1,-1,0),(7,1,-1)\}$

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&-1&0\\7&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&8\\1&8&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&7\\1&-1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&8\\-1&0&-7\\0&0&16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&7\\1&-1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-16\end{pmatrix}}$$

Es indefinida no degenerada de rango 3 e índice 2
Signatura $(1,2)$

c) ¿$\exists \alpha\in\mathbb{R}$ tal que A y C sean semejantes? ¿Y congruentes?

$$P_C(\lambda)=\det\begin{pmatrix}-\lambda&1&1\\1&1-\lambda&8\\1&8&-1-\lambda\end{pmatrix}=(\lambda^2-1)(-\lambda)+16-1+\lambda+1+\lambda+64\lambda=$$
$$=-\lambda^3+\lambda+16+66\lambda=-\lambda^3+67\lambda+16$$

No pueden ser semejantes ya que no tienen el mismo polinomio característico. C es congruente a la matriz $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ y debemos hallar el valor de α para el cual A represente a una métrica indefinida no degenerada de rango 3 e índice 2 respecto de la base usual (usamos Sylvester):

$\alpha_1=1>0 \quad \alpha_2=-2<0 \quad \alpha_3=\det(A)=-2+18=16>0$

$\forall\alpha\in\mathbb{R}$ A y C son congruentes.

d) Encuentra 2 soluciones linealmente independientes de la ecuación $y^2 - z^2 + 2xy + 2xz + 16yz = 0$

$$(7,1,-1)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \\ 1 & 8 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (0\ 0\ 16)\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -16$$

$$B = \left\{(0,1,0),(1,-1,0),\left(\tfrac{7}{4},\tfrac{1}{4},-\tfrac{1}{4}\right)\right\}$$

$y^2 - z^2 + 2xy + 2xz + 16yz = 0 \Rightarrow$ Forma cuadrática de g respecto de B_u

$x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0 \Rightarrow$ " " " de B (ortonormal)

$\Downarrow$

Sol.: $(1,1,0)_B$ $\Rightarrow$ Ahora vemos qué vectores
$(1,0,-1)_B$ respecto de la B_u son:

$$(1,1,0)_B = (0,1,0)+(1,-1,0) = (1,0,0)_{B_u}$$

$$(1,0,-1)_B = (0,1,0)+\left(-\tfrac{7}{4},-\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{4}\right) = \left(-\tfrac{7}{4},\tfrac{3}{4},\tfrac{1}{4}\right)_{B_u}$$

Y claramente $(1,0,0)$ y $\left(-\frac{7}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)$ son L.I.

ya que $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -7/4 & 3/4 \end{pmatrix} = 3/4 \neq 0$

2. a) Demostrar que toda matriz simétrica de orden dos con coeficientes reales es diagonalizable (por semejanza).

Toda matriz de $S_2(\mathbb{R})$ es de la forma $\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} = A$.

$$p_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} x-\lambda & y \\ y & z-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + (-x-z)\lambda + xz - y^2$$

$$p_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{x+z \pm \sqrt{x^2+z^2+2xz-4xz+4y^2}}{2} =$$

$$= \frac{x+z \pm \sqrt{x^2+z^2-2xz+4y^2}}{2} =$$

$$= \frac{x+z \pm \sqrt{(x-z)^2+4y^2}}{2} \Rightarrow$$ Discriminante ≥ 0, $y = 0$ cuando $x = z$ e $y = 0$, es decir, A es de la forma $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ y también sería diag.

Si >0, 2 valores propios distintos y por estar en $\mathbb{R}^2$, esto implicaría que son diagonalizables

b) $\dim(V) = n$ g métrica.
Demostrar que el índice de g coincide con la dimensión máxima que tienen los subespacios vectoriales U de V tales que la restricción de g a U es una métrica definida negativa.

Sea U con $\dim(U)=k$ y $g_{|U}$ def. negativa. U es el de dimensión máxima que cumple que $g_{|U}$ def. negativa. Sea B una base ortonormal de U, $B=\{u_1,\dots,u_k\}$, $M(g_{|U},B)=(-I_k)$. Sea $U^{\perp}$ y consideremos $B'=\{w_1,\dots,w_r\}$ base ortonormal. $\dim(U^{\perp})=r$

Claramente, $B\cup B'$ es una base ortonormal de (V,g) ya que los vectores de B y B' son unitarios y como $u_i\in U$ $i\in\{1,\dots,k\}$ y $w_j\in U^{\perp}$ $j\in\{1,\dots,r\}$, claramente $u_i\perp w_j$. Entonces $M(g,B\cup B')$:

$$M(g,B\cup B')=\begin{pmatrix} -1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & (0) & \\ & & -1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & -1 & & \\ & (0) & & & & 0 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\qquad}_{k=\dim(U)}$ $=$ nº menos unos en una base ortonormal $=$ índice.