UNIVERSIDAD DE GRANADA

Análisis de eficiencia de algoritmos

Algorítmica. Práctica 1

Jose Alberto Hoces Castro
Javier Gómez López
Moya Martín Castaño

Contenidos

Introducción

Análisis de eficiencia de algoritmos

- **Análisis de la eficiencia teórica:** estudio de la complejidad teórica de algoritmos.
- **Análisis de la eficiencia empírica:** ejecución y medición de tiempos de ejecución de los algoritmos estudiados.
- **Análisis de la eficiencia híbrida:** obtención de las constantes ocultas.

Cálculo de la eficiencia teórica

Consiste en analizar sobre el papel el peor tiempo de ejecución posible en un algoritmo para decidir en qué clase de funciones en notación O se encuentra

Cálculo de la eficiencia empírica

Ejecución de los algortimos en distintos agentes tecnológicos, calculando su tiempo de ejecución con la librería `<chrono>`.

Cálculo de la eficiencia híbrida

Obtención de las constantes ocultas a través de gnuplot.

Análisis de los algoritmos propuestos

Algoritmos trabajados

Se ha realizado un análisis de los siguientes algoritmos:

1. Algoritmo de Inserción
2. Algoritmo de Selección
3. Algoritmo de Quicksort
4. Algoritmo de Heapsort
5. Algoritmo de Floyd
6. Algoritmos de las torres de Hanoi

Inserción

El código del algoritmo de Inserción es el siguiente:

```
static void insercion_lims(int T[], int inicial, int final)
{
  int i, j;
  int aux;
  for (i = inicial + 1; i < final; i++) { // O(n)
    j = i; // O(1)
    while ((T[j] < T[j-1]) && (j > 0)) { // O(n)
      aux = T[j]; // O(1)
      T[j] = T[j-1]; // O(1)
      T[j-1] = aux; // O(1)
      j--; // O(1)
    };
  };
}
```

Inserción. Eficiencia teórica

En los comentarios del código observamos el análisis de la función.

Son dos bucles, uno `for` y otro `while`, los cuales están anidados y por ser cada uno $\mathcal{O}(n)$:

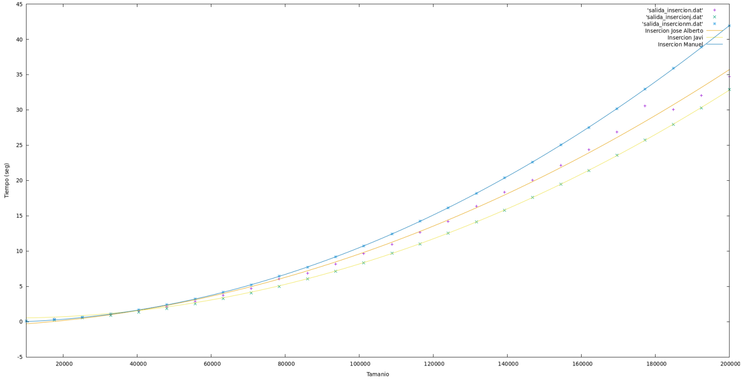
$$T(n) \in \mathcal{O}(n^2)$$

Inserción. Eficiencia empírica

Intel Core i7-6700 3.40 GHz		i5-1095G1 1.00 GHz		Ordenador Moya	
Elementos (n)	**Tiempo (s)**	**Elementos (n)**	**Tiempo (s)**	**Elementos (n)**	**Tiempo (s)**
17600	0.251124	17600	0.35799	17600	0.321303
25200	0.560574	25200	0.609488	25200	0.661228
32800	0.905768	32800	0.998112	32800	1.12508
40400	1.33038	40400	1.52076	40400	1.705
48000	1.87672	48000	2.12746	48000	2.41886
55600	2.51991	55600	2.89747	55600	3.23931
63200	3.29735	63200	3.74891	63200	4.18747
70800	4.08019	70800	4.70754	70800	5.2435
78400	4.98866	78400	6.08267	78400	6.4519
86000	6.08448	86000	6.88299	86000	7.74454
93600	7.17045	93600	8.15529	93600	9.18276
101200	8.36352	101200	9.6372	101200	10.7333
108800	9.71516	108800	10.9647	108800	12.4379
116400	11.0357	116400	12.6405	116400	14.2603
124000	12.5611	124000	14.1936	124000	16.1453
131600	14.1345	131600	16.3756	131600	18.1743
139200	15.7984	139200	18.3599	139200	20.4184
146800	17.6155	146800	20.0244	146800	22.6048
154400	19.5025	154400	22.1302	154400	25.0412
162000	21.4432	162000	24.3748	162000	27.5086
169600	23.5908	169600	26.8462	169600	30.1526
177200	25.7055	177200	30.5882	177200	32.9759
184800	27.9704	184800	30.0598	184800	35.8989
192400	30.2777	192400	32.0387	192400	38.8935
200000	32.8911	200000	34.7391	200000	41.9351

Tabla 1: Experiencia empírica de algoritmo de Inserción sin optimizar

Inserción. Eficiencia híbrida



Inserción. Eficiencia híbrida

- i7-6700 3.40Ghz
  $\longrightarrow T_1(n) = 8.49924 \cdot 10^{-10}x^2 - 8.57879 \cdot 10^{-6}x + 0.546581.$
- Ordenador José Alberto
  $\longrightarrow T_2(n) = 7.96341 \cdot 10^{-10}x^2 + 2.23563 \cdot 10^{-5}x - 0.592279.$
- Ordenador Manuel
  $\longrightarrow T_3(n) = 1.04394 \cdot 10^{-9}x^2 + 1.58593 \cdot 10^{-6}x - 0.0969414.$

Varianza residual:

- $T_1(n) \longrightarrow Var.res = 0.00162352$
- $T_2(n) \longrightarrow Var.res = 0.0050675$
- $T_3(n) \longrightarrow Var.res = 0.00161535$

Selección

El código del algoritmo de Selección es el siguiente:

```
static void seleccion_lims(int T[], int inicial, int final)
{
  int i, j, indice_menor;
  int menor, aux;
  for (i = inicial; i < final - 1; i++) { // O(n)
    indice_menor = i; // O(1)
    menor = T[i]; // O(1)
    for (j = i; j < final; j++) // O(n)
      if (T[j] < menor) {
    indice_menor = j; // O(1)
    menor = T[j]; // O(1)
      }
    aux = T[i]; // O(1)
    T[i] = T[indice_menor]; // O(1)
    T[indice_menor] = aux; // O(1)
  };
}
```

Selección. Eficiencia teórica

En los comentarios del código observamos el análisis de la función.

Son dos bucles `for`, los cuales están anidados y por ser cada uno $\mathcal{O}(n)$:

$$T(n) \in \mathcal{O}(n^2)$$

Selección. Eficiencia empírica

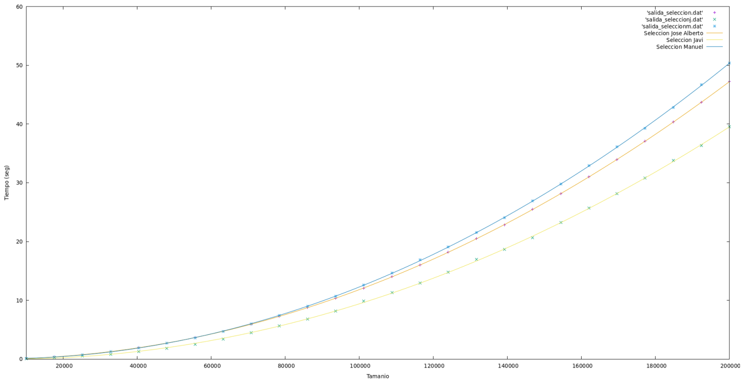
Intel Core i7-6700 3.40 GHz	
Elementos (n)	**Tiempo (s)**
17600	0.260828
25200	0.504322
32800	0.835328
40400	1.25944
48000	1.7931
55600	2.54346
63200	3.42159
70800	4.46734
78400	5.61827
86000	6.80333
93600	8.16667
101200	9.86304
108800	11.3351
116400	12.9138
124000	14.7895
131600	16.9792
139200	18.6877
146800	20629
154400	23.2312
162000	25691
169600	28.1704
177200	30.78
184800	33.7999
192400	36.3688
200000	39.5352

i5-1095G1 1.00 GHz	
Elementos (n)	**Tiempo (s)**
17600	0.391322
25200	0.76325
32800	1.27203
40400	1.92909
48000	2.71989
55600	3.65109
63200	4.71913
70800	5.91709
78400	7.25541
86000	8777
93600	10.3443
101200	12.0904
108800	14.0135
116400	16.0454
124000	18.19
131600	20.5113
139200	22.8553
146800	25.4735
154400	28141
162000	31.0438
169600	33.9582
177200	37.0641
184800	40.3583
192400	43.7206
200000	47.2209

Ordenador Moya	
Elementos (n)	**Tiempo (s)**
17600	0.357489
25200	0.730079
32800	1.25708
40400	1.90694
48000	2.69298
55600	3.61969
63200	4.72056
70800	6.01156
78400	7.41941
86000	8.98684
93600	10.7273
101200	12.5778
108800	14.6332
116400	16.8798
124000	19.0523
131600	21.5316
139200	24.0439
146800	26.9219
154400	29.7736
162000	32.9393
169600	36.1122
177200	39.2833
184800	42.7955
192400	46.6683
200000	50.4019

Tabla 2: Experiencia empírica de algoritmo de Selección sin optimizar

Selección. Eficiencia híbrida



Selección. Eficiencia híbrida

- i7-6700 3.40Ghz
  $\longrightarrow T_1(n) = 1.0371 \cdot 10^{-9}x^2 + -9.86278 \cdot 10^{-6}x + 0.0216418.$
- Ordenador José Alberto
  $\longrightarrow T_2(n) = 1.17905 \cdot 10^{-9}x^2 + 3.97249 \cdot 10^{-7}x - 0.00421685.$
- Ordenador Manuel
  $\longrightarrow T_3(n) = 1.29484 \cdot 10^{-9}x^2 - 7.43377 \cdot 10^{-6}x + 0.0733569.$

Varianza residual:

- $T_1(n) \longrightarrow Var.res = 0.0164518$
- $T_2(n) \longrightarrow Var.res = 0.000537586$
- $T_3(n) \longrightarrow Var.res = 0.00387134$

Floyd

El código del algoritmo de Floyd es el siguiente:

```
void Floyd(int **M, int dim)
{
    for (int k = 0; k < dim; k++) //O(n)
      for (int i = 0; i < dim;i++) //O(n)
        for (int j = 0; j < dim;j++) //O(n)
          {
        int sum = M[i][k] + M[k][j];
            M[i][j] = (M[i][j] > sum) ? sum : M[i][j]; //O(1)
          }
}           //Total O(n^3)
```

Floyd. Eficiencia teórica

En los comentarios del código observamos el análisis de la función.

Son tres bucles `for` anidados, cada uno $\mathcal{O}(n)$ y por tanto,

$$T(n) \in \mathcal{O}(n^3)$$

Floyd. Eficiencia empírica

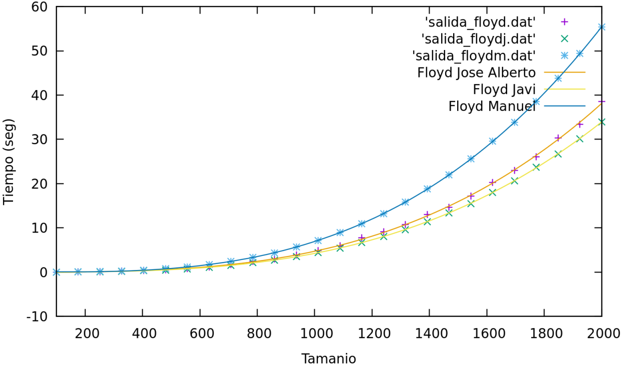
Intel Core i7-6700 3.40 GHz	
Elementos (n)	**Tiempo (s)**
176	0.0244106
252	0.0721776
328	0.155828
404	0.288165
480	0.465947
556	0.724968
632	1.09236
708	1.54374
784	2.13392
860	2.67022
936	3.52897
1012	4.4074
1088	5.42559
1164	6.6698
1240	8.06967
1316	9.55022
1392	11.4197
1468	13.3942
1544	15.5
1620	18.0399
1696	20.5893
1772	23.6714
1848	26.7337
1924	30.1601
2000	33.9673

i5-1095G1 1.00 GHz	
Elementos (n)	**Tiempo (s)**
176	0.0274773
252	0.0995705
328	0.20657
404	0.307902
480	0.51806
556	0.799187
632	1.16729
708	1.65895
784	2.42549
860	3.00331
936	3.84788
1012	4.84029
1088	5.97643
1164	7.78043
1240	9.08228
1316	10.7251
1392	12.9933
1468	14.6689
1544	17.2185
1620	20.2626
1696	22.9733
1772	26.0557
1848	30.2843
1924	33.4252
2000	38.5217

Ordenador Moya	
Elementos (n)	**Tiempo (s)**
176	0.038495
252	0.111472
328	0.244523
404	0.45528
480	0.761621
556	1.17395
632	1.73408
708	2.4355
784	3.29426
860	4.35444
936	5.64407
1012	7.16827
1088	8.91362
1164	10.9311
1240	13.2386
1316	15.8513
1392	18.7744
1468	21.9844
1544	25.5768
1620	29.5543
1696	33.8275
1772	38.5849
1848	43.8038
1924	49.4368
2000	55.3965

Tabla 3: Experiencia empírica de algoritmo de Floyd sin optimizar

Floyd. Eficiencia híbrida



Floyd. Eficiencia híbrida

- i7-6700 3.4GHz $\longrightarrow T_1(n) =$ $4.38237 \cdot 10^{-9}x^3 - 4.33753 \cdot 10^{-7}x^2 + 0.000337001x - 0.0504332$
- i5-1095G1 1.00 GHz $\longrightarrow T_2(n) = 5.12922 \cdot 10^{-9}x^3 - 1.11315 \cdot 10^{-6}x^2 + 0.00083571x - 0.134397$
- Ordenador Moya $\longrightarrow T_3(n) =$ $6.77297 \cdot 10^{-9}x^3 + 5.13099 \cdot 10^{-7}x^2 - 0.000427834x + 0.0714028$

Varianza residual:

- $T_1(n) \longrightarrow Var.res = 0.00204522$
- $T_2(n) \longrightarrow Var.res = 0.044778$
- $T_3(n) \longrightarrow Var.res = 0.000855184$

Hanoi

El código del algoritmo de las torres de Hanoi es el siguiente:

```
void hanoi (int M, int i, int j)
{
  if (M > 0)
    {
      hanoi(M-1, i, 6-i-j);
      hanoi (M-1, 6-i-j, j);
  }
}
```

Hanoi. Eficiencia teórica

Estamos ante un algoritmo recursivo, cuya ecuación de recurrencia es:

$$T(n) = 2T(n-1) + 1$$

$$(x-2)(x-1) = 0$$

$$T(n) = c_1 \cdot 2^n + c_2$$

Por tanto:

$$T(n) \in \mathcal{O}(2^n)$$

Hanoi. Eficiencia empírica

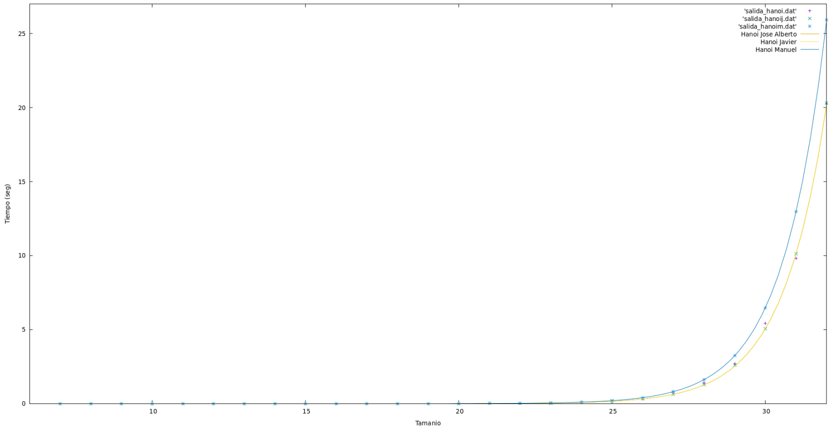
Intel Core i7-6700 3.40 GHz	
Elementos (n)	**Tiempo (s)**
8	0.00000136207
9	0.00000267907
10	0.00000528653
11	0.0000112702
12	0.0000234959
13	0.0000457819
14	0.0000904406
15	0.000198225
16	0.000439214
17	0.00088158
18	0.00145113
19	0.00253865
20	0.00499491
21	0.0100156
22	0.0209075
23	0.0402523
24	0.0878626
25	0.171153
26	0.339115
27	0.633015
28	1.28649
29	2.60592
30	5.05092
31	10.1126
32	20.301

i5-1095G1 1.00 GHz	
Elementos (n)	**Tiempo (s)**
8	0.0000037376
9	0.00000737613
10	0.0000145867
11	0.0000283526
12	0.0000460821
13	0.0000722887
14	0.000106264
15	0.000213395
16	0.000353459
17	0.000717674
18	0.00142487
19	0.00278949
20	0.00534407
21	0.0101673
22	0.0238254
23	0.0555082
24	0.112827
25	0.207041
26	0.344851
27	0.761311
28	1.41561
29	2.68719
30	5.41493
31	9.82069
32	20.2358

Ordenador Moya	
Elementos (n)	**Tiempo (s)**
8	0.0000017978
9	0.00000348253
10	0.00000737093
11	0.0000137999
12	0.0000274451
13	0.0000548052
14	0.000110116
15	0.000198426
16	0.000427075
17	0.000796963
18	0.00159355
19	0.00321857
20	0.00633508
21	0.012697
22	0.0253476
23	0.0506946
24	0.101314
25	0.202542
26	0.405264
27	0.809707
28	1.6195
29	3.23942
30	6.47798
31	12.9623

Tabla 4: Experiencia empírica de algoritmo de Hanoi sin optimizar

Hanoi. Eficiencia híbrida



Hanoi. Eficiencia híbrida

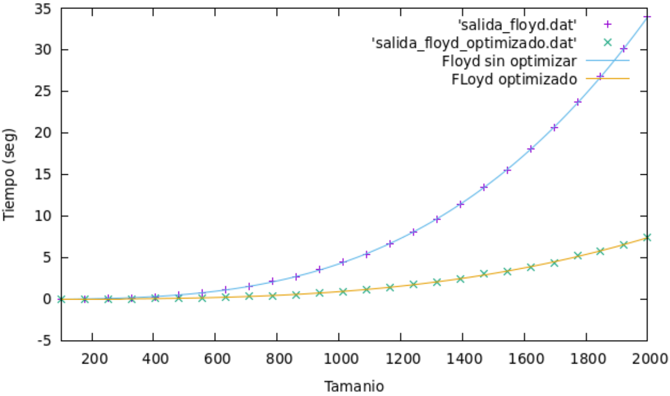
- i7-6700 3.40GHz $\rightarrow T_1(n) = 4.72408 \cdot 10^{-9} \cdot 2^x$.
- i5-1095G1 1.00 GHz $\rightarrow T_2(n) = 4.70707 \cdot 10^{-9} \cdot 2^x$.
- Ordenador Moya $\rightarrow T_3(n) = 6.03512 \cdot 10^{-9} \cdot 2^x$.

Varianza residual:

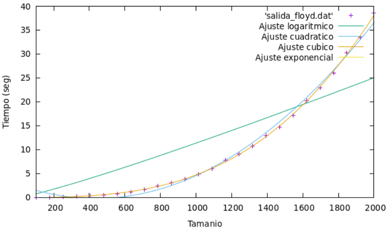
- $T_1(n) \longrightarrow Var.res = 0.000302074$
- $T_2(n) \longrightarrow Var.res = 0.0113386$
- $T_3(n) \longrightarrow Var.res = 3.87795 \cdot 10^{-7}$

Casos especiales

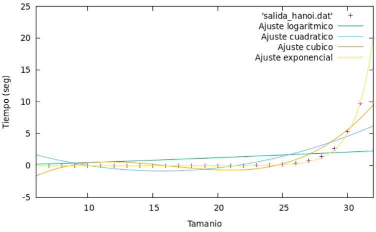
Casos especiales. Floyd Optimizado



Casos especiales. Otros posibles ajustes funcionales



Floyd

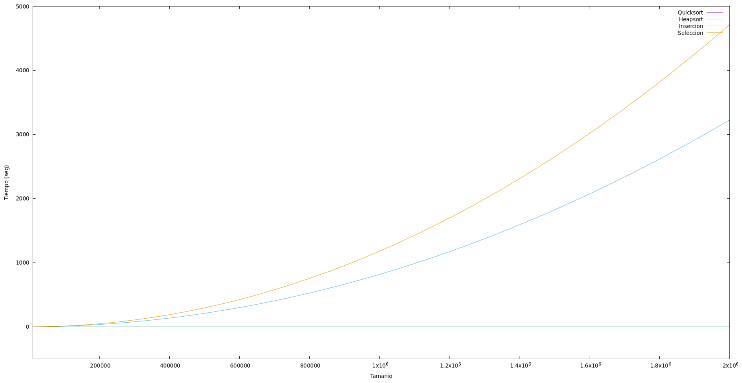


Hanoi

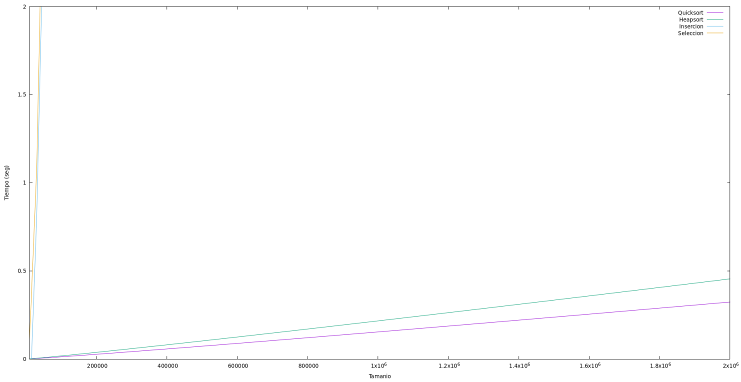
Comparativa de los algoritmos de ordenación

Una vez estudiados inserción, selección, quicksort y heapsort, procedemos a compararlos gráficamente y sacar conclusiones

Comparativa de los algoritmos de ordenación



Comparativa de los algoritmos de ordenación



Comparativa de los algoritmos de ordenación

Las conclusiones que sacamos son:

- Se verifica que los algoritmos $\in \mathcal{O}(n \cdot log(n))$ son más eficientes que los algoritmos $\in \mathcal{O}(n^2))$
- Es tal la diferencia que las gráficas de quicksort y heapsort parecen paralelas al eje X
- Quicksort y Heapsort no pasan del segundo por ejecución, mientras que Inserción y Selección para 2000000 requieren más de 5000 segundos por ejecución

Casos en la ejecución de inserción y selección: mejor, peor y promedio

Para el peor caso, tomamos un vector ordenado a la inversa:

```
for (int i = 0; i < n; i++)
      {
        T[i] = n - i;
      };
```

Para el mejor caso, tomamos un vector ordenado correctamente:

```
for (int i = 0; i < n; i++)
      {
        T[i] = i;
      };
```

Casos en la ejecución de inserción y selección: mejor, peor y promedio

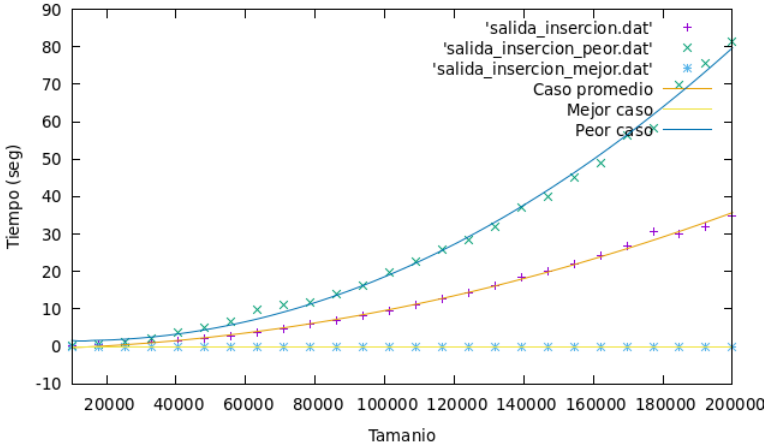
Los datasets de los dos casos extremos para inserción fueron:

Peor caso de inserción	
Elementos (n)	**Tiempo (s)**
17600	0.604135
25200	1.23844
32800	2193
40400	3.83771
48000	4.92643
55600	6.65173
63200	9.69109
70800	10.9557
78400	11.5942
86000	14.0269
93600	16.1625
101200	19.6924
108800	22.6823
116400	25.7428
124000	28.4764
131600	32.0522
139200	37.1527
146800	40.1051
154400	45.1864
162000	49014
169600	56.3554
177200	58.3219
184800	69.8676
192400	75.6931
200000	81.4641

Mejor caso de inserción	
Elementos (n)	**Tiempo (s)**
17600	0.000119171
25200	0.000154839
32800	0.000254579
40400	0.000268849
48000	0.000315367
55600	0.000221064
63200	0.000253476
70800	0.000218935
78400	0.000203775
86000	0.000202846
93600	0.000349709
101200	0.000310166
108800	0.000319687
116400	0.000467919
124000	0.000452129
131600	0.000604762
139200	0.000651269
146800	0.00058346
154400	0.000549033
162000	0.000648826
169600	0.000551999
177200	0.000769622
184800	0.00049894
192400	0.000406281
200000	0.000481777

Tabla 5: Datasets de la ejecución del peor y mejor caso para Inserción

Casos en la ejecución de inserción y selección: mejor, peor y promedio



Casos en la ejecución de inserción y selección: mejor, peor y promedio

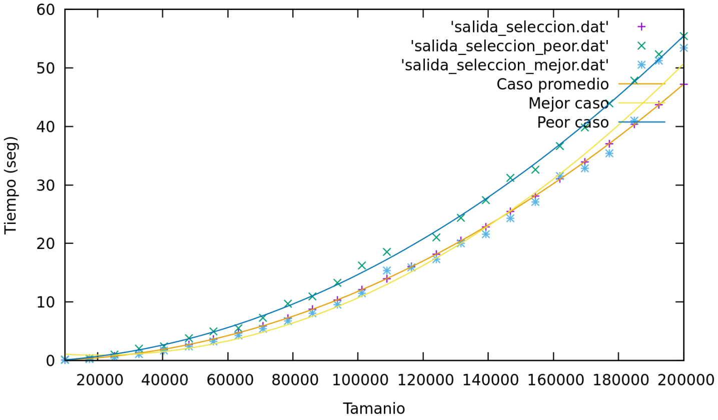
Los datasets de los dos casos extremos para selección fueron:

Peor caso de selección	
Elementos (n)	**Tiempo (s)**
17600	0.43298
25200	1.05541
32800	2.06101
40400	2.43286
48000	3.83567
55600	4.94909
63200	5.53895
70800	7.26986
78400	9.73586
86000	10.9612
93600	13.2779
101200	16.2492
108800	18.5379
124000	21.05
131600	24.3881
139200	27383
146800	31.2269
154400	32.5782
162000	36.6571
169600	39.8171
177200	43.9252
184800	47.8018
192400	52.3513
200000	55.4702

Mejor caso de selección	
Elementos (n)	**Tiempo (s)**
17600	0.280803
25200	0.583418
32800	1.09678
40400	1.68938
48000	2.4139
55600	3.26631
63200	4.24695
70800	5477
78400	6.74688
86000	8.11066
93600	9.54485
101200	11.4866
108800	15.3544
116400	15.8972
124000	17.35
131600	20.0171
139200	21.5481
146800	24.2838
154400	27.0934
162000	31.5408
169600	32.8615
177200	35.3771
184800	40.99
192400	51.2152
200000	53.4133

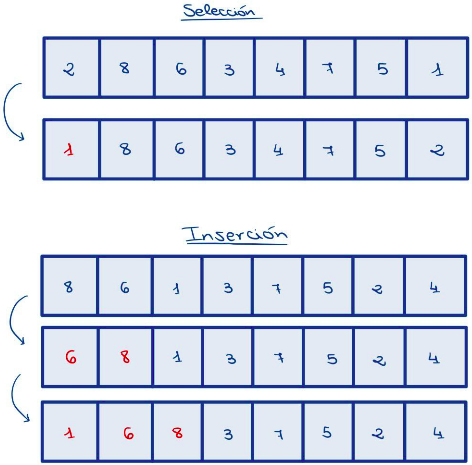
Tabla 6: Datasets de la ejecución del peor y mejor caso para Selección

Casos en la ejecución de inserción y selección: mejor, peor y promedio



Casos en la ejecución de inserción y selección: mejor, peor y promedio

¿A qué se debe este comportamiento?



Conclusiones

Conclusiones

El análisis híbrido nos confirma nuestro análisis teórico observando el coeficiente de regresión.

Lo que más influye en el tiempo es el orden de eficiencia del algoritmo.

Diversidad de agentes tecnológicos: diferentes computadores y arquitecturas da lugar a resultados distintos.