Topología I. Convocatoria extraordinaria

Grado en matemáticas, doble grado en física y matemáticas y doble grado en ingeniería informática y matemáticas

7 de febrero de 2020

1.- (4 puntos). Sea $X = \mathbb{R} \cup \{\alpha\}$ donde $\alpha \notin \mathbb{R}$. En X se considera la topología T de la que conocemos una base $\mathcal{B}$ dada por:

$$\mathcal{B} = \{(a,b) \,/\, a,b \in \mathbb{R},\ a<b\} \cup \{(-\varepsilon,0) \cup \{\alpha\} \cup (0,\varepsilon) \,/\, \varepsilon > 0\}.$$

a) Decidir si (X,T) es un espacio de Hausdorff.

b) Probar que $T_{|X-\{\alpha\}} = T_u$ y que $(X-\{0\}, T_{X-\{0\}})$ es homeomorfo a $(\mathbb{R}, T_u)$.

c) Estudiar la conexión en (X,T) del conjunto $A = (a,b) \cup \{\alpha\}$.

d) ¿Es el conjunto $C = [-1,1]$ cerrado en (X,T)? ¿Es C compacto en (X,T)?

2.- (2 puntos). Sean (X,T) e (Y,T') espacios topológicos. Probar que el espacio producto $(X \times Y, T \times T')$ es conexo si y sólo si (X,T) e (Y,T') son conexos.

3.- (4 puntos). Resolver de forma razonada los siguientes apartados:

a) Se considera $f : ([0,1], T_{u|[0,1]}) \to (\{0,1\}, T)$, donde $T = \{\emptyset, \{1\}, \{0,1\}\}$ y f se define como $f = 1$ en $[0,1/2)$ y $f = 0$ en $[1/2,1]$. Probar que f es una identificación pero no es abierta ni cerrada.

b) Sea (X,T) un espacio compacto y $A \subseteq X$ infinito. Demostrar que $A' \neq \emptyset$, donde A' es el conjunto de puntos de acumulación de A en (X,T).

Duración del examen: 3 horas

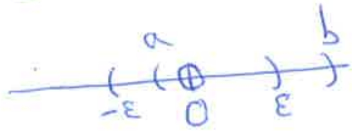
EJERCICIO 1

$X = \mathbb{R} \cup \{\alpha\}$ con $\alpha \notin \mathbb{R}$. T = top. en X tal que:
$\mathcal{B} = \{(a,b) / a,b \in \mathbb{R}, a<b\} \cup \{(-\varepsilon,0)\cup\{\alpha\}\cup(0,\varepsilon) / \varepsilon>0\}$
es una base de (X,T).

a) ¿(X,T) es Hausdorff? Lo será si se cumple:
$\forall x,y \in X$ con $x\neq y$ $\exists\, U,V\in T$ con $x\in U$, $y \in V$ y $U\cap V=\emptyset$.

No es difícil probar que si $x,y\in X-\{0,\alpha\}$ y $x\neq y$ entonces $\exists\, B,B'\in\mathcal{B}$ tales que $x\in B$, $y\in B'$, y $B\cap B'=\emptyset$.
Veamos sin embargo que $x=0$ e $y=\alpha$ no se pueden separar por abiertos disjuntos. Así (X,T) <u>NO es de Hausdorff</u>. Vamos a probar
Sean $U,V\in T$ tales que $0\in U$ y $\alpha\in V$.
que $U\cap V\neq\emptyset$.

$0\in U$ y $\mathcal{B}$ base $\Rightarrow \exists\, B\in\mathcal{B} / 0\in B\subseteq U$
$\alpha\in V$ y $\mathcal{B}$ base $\Rightarrow \exists\, B'\in\mathcal{B} / \alpha\in B'\subseteq V$.



Por la descripción de $\mathcal{B}$ tenemos que:
$B=(a,b)$ con $a<0<b$
$B'=(-\varepsilon,0)\cup\{\alpha\}\cup(0,\varepsilon)$ para cierto $\varepsilon>0$.
Como $((a,b)\cap(-\varepsilon,\varepsilon))-\{0\}\neq\emptyset \Rightarrow \emptyset\neq B\cap B'\subseteq U\cap V$.

---

b) ¿$T_{|X-\{\alpha\}} = T_u$? Como $X-\{\alpha\}=\mathbb{R}$, nos estamos preguntando si $T_{|\mathbb{R}}=T_u$.
Como $\mathcal{B}$ es, por definición, una base de (X,T), entonces:
$\mathcal{B}_{|\mathbb{R}} = \{B\cap\mathbb{R} / B\in\mathcal{B}\}$ es una base de $(\mathbb{R},T_{|\mathbb{R}})$.
Por la descripción de $\mathcal{B}$ tenemos que:

$\mathcal{B}_{|\mathbb{R}} = \{ (a,b) \,/\, a,b \in \mathbb{R},\ a<b \} \cup \{ (-\varepsilon,0)\cup(0,\varepsilon) \,/\, \varepsilon>0 \}.$

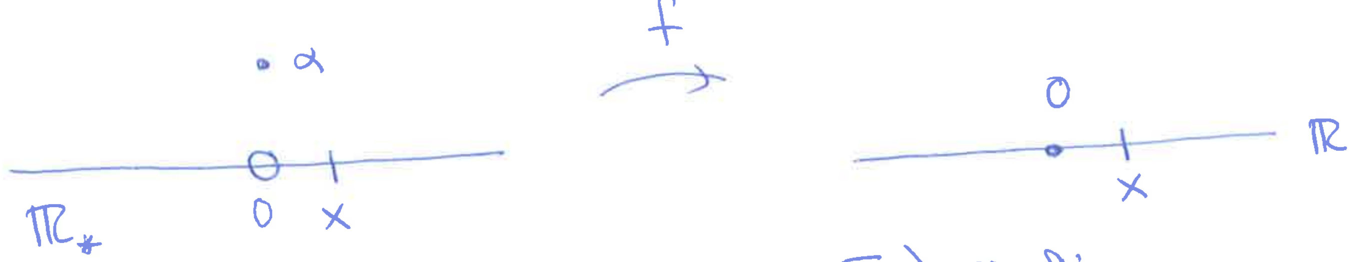
Como $\mathcal{B}_u \subseteq \mathcal{B}_{|\mathbb{R}} \Rightarrow T_u \leq T_{|\mathbb{R}}$.

Por otro lado, es claro que $\mathcal{B}_{|\mathbb{R}} \subseteq T_u$, de donde deducimos que $T_{|\mathbb{R}} \leq T_u$.

• ¿$(\mathbb{X}-\{0\}, T_{|\mathbb{X}-\{0\}}) \cong (\mathbb{R}, T_u)$?

$\mathbb{X}_* = \mathbb{X}-\{0\} = (\mathbb{R}-\{0\})\cup\{\alpha\} = \mathbb{R}_* \cup \{\alpha\}$.

Vamos a encontrar un homeo. bastante simple.



Definimos $f: (\mathbb{X}_*, T_{|\mathbb{X}_*}) \to (\mathbb{R}, T_u)$ como:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{R}_*, \text{ es decir, si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = \alpha. \end{cases}$$

Es muy sencillo comprobar que f es biyectiva, es decir, (ejercicio).
$\forall y \in \mathbb{R}\ \exists_1 x \in \mathbb{X}_*$ tal que $f(x)=y$

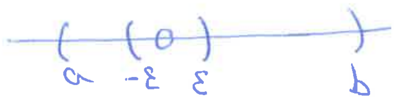
¿Es f continua? Tomo $\mathcal{B}_u = \{(a,b) / a,b \in \mathbb{R}, a<b\}$ base usual de $(\mathbb{R}, T_u)$. Es suficiente con demostrar que $f^{-1}((a,b)) \in T_{|\mathbb{X}_*}$ $\forall (a,b) \in \mathcal{B}_u$. Por la definición de f llegamos a:

$$f^{-1}((a,b)) = \begin{cases} (a,b) \in \mathcal{B} \subseteq T_{|\mathbb{X}_*} & \text{si } 0 \notin (a,b) \\ (a,0)\cup\{\alpha\}\cup(0,b) & \text{si } 0 \in (a,b). \end{cases}$$

¿$(a,0)\cup\{\alpha\}\cup(0,b) \in T$? Veamos que todos sus puntos son interiores en $(\mathbb{X}_*, T_{|\mathbb{X}_*})$. Basta comprobarlo con $x=\alpha$

Como $0\in(a,b)$ y $(a,b)\in T_u$

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon>0 \,/\, (-\varepsilon,\varepsilon)\subseteq(a,b)$



Entonces $(-\varepsilon,0)\cup\{\alpha\}\cup(0,\varepsilon)\in T$

y $(-\varepsilon,0)\cup\{\alpha\}\cup(0,\varepsilon)\subseteq \mathbb{X}_*$.

Concluimos que $(-\varepsilon,0)\cup\{\alpha\}\cup(0,\varepsilon)\in T|_{\mathbb{X}_*}$, contiene a α,

y $(-\varepsilon,0)\cup\{\alpha\}\cup(0,\varepsilon)\subseteq(a,0)\cup\{\alpha\}\cup(0,b)$.

¿Es f abierta? Basta comprobar que $f(B)\in T_u\ \forall B\in\mathcal{B}|_{\mathbb{X}_*}$

$\mathcal{B}|_{\mathbb{X}_*}=\{B\cap\mathbb{X}_* \,/\, B\in\mathcal{B}\}$.

Por un lado tenemos:

$f((a,b))=(a,b)\quad \forall (a,b)\in\mathcal{B}|_{\mathbb{X}_*}=\{(a,b)\,/\,a,b\in\mathbb{R}, a<b, 0\notin(a,b)\}\cup\{(-\varepsilon,0)\cup\{\alpha\}\cup(0,\varepsilon)\,/\,\varepsilon>0\}$

y por otro:

$f((-\varepsilon,0)\cup\{\alpha\}\cup(0,\varepsilon))=f((-\varepsilon,0))\cup\{f(\alpha)\}\cup f((0,\varepsilon))$

$=(-\varepsilon,0)\cup\{0\}\cup(0,\varepsilon)=(-\varepsilon,\varepsilon)\in T_u$.

---

c) Estudiar la conexión en $(\mathbb{X},T)$ de $A=(a,b)\cup\{\alpha\}$.

Vamos a distinguir 2 casos:

cierre de (a,b) en $(\mathbb{X},T)$

c1) $0\in[a,b]$.

Veamos que $\alpha\in\overline{(a,b)}$. Por definición de cierre, basta ver que $B\cap(a,b)\neq\emptyset\ \forall B\in\mathcal{B}$ con $\alpha\in B$.

Dado $B\in\mathcal{B}$ con $\alpha\in B\Rightarrow B=(-\varepsilon,0)\cup\{\alpha\}\cup(0,\varepsilon)$ con $\varepsilon>0$.

y claramente $B\cap(a,b)\neq\emptyset$ porque $0\in[a,b]$.

Por otro lado nótese que (a,b) es conexo en $(\mathbb{X},T)$.

En efecto; como $(a,b)\subseteq\mathbb{R}$ y $T|_{\mathbb{R}}=T_u$, entonces:

(a,b) es conexo en $(\mathbb{X},T)\Leftrightarrow(a,b)$ es conexo en $(\mathbb{R},T_u)$,

lo que se cumple porque (a,b) es un intervalo.

Finalmente, como $\alpha \in \overline{(a,b)}$ tenemos

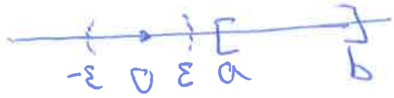
$$\underbrace{(a,b)}_{\text{conexo}} \subseteq (a,b)\cup\{\alpha\} = A \subseteq \overline{(a,b)},$$

y por un resultado de clase se sigue que A es conexo.

c2) $0 \notin [a,b]$.

En este caso A no es conexo en $(\mathbb{X},T)$: encontraremos abiertos inducidos $U_A, V_A \in T_{|A}$ tales que $A = U_A \cup V_A$, $U_A \cap V_A = \emptyset$ y $U_A, V_A \neq \emptyset$.

Como $0 \notin [a,b]$, podemos encontrar $\varepsilon > 0$ tal que se cumple $(-\varepsilon,\varepsilon)\cap[a,b]=\emptyset$



Así $(-\varepsilon,0)\cup\{\alpha\}\cup(0,\varepsilon)\in\mathcal{B}\subseteq T$ y se verifica que

$((-\varepsilon,0)\cup\{\alpha\}\cup(0,\varepsilon))\cap A = \{\alpha\}$

Esto prueba que $\{\alpha\}\in T_{|A}$. Como $(a,b)\in\mathcal{B}\subseteq T$ y $(a,b)\subseteq A \Rightarrow (a,b)\in T_{|A}$. Así, la separación no trivial buscada para A es $U_A=(a,b)$ y $V_A=\{\alpha\}$.

---

d) Sea $C=[-1,1]$. ¿$C\in C_T$? Nótese que $C^c = \mathbb{X} - C = (-\infty,1)\cup(1,+\infty)\cup\{\alpha\}$. C^c no es abierto, puesto que α no es un punto interior: $(-\varepsilon,0)\cup\{\alpha\}\cup(0,\varepsilon)\not\subseteq C^c$ para cada $\varepsilon>0$ pequeño. ¿C compacto en $(\mathbb{X},T)$? Como $C\subseteq\mathbb{R}$ y $T_{|\mathbb{R}}=T_u$, entonces C es compacto en $(\mathbb{X},T) \Leftrightarrow$ lo es en $(\mathbb{R},T_u)$.

Y esto último se cumple por el teorema de Heine-Borel ya que $C\in C_u$ y C es acotado.

EJERCICIO 2

Resultado de teoría demostrado en los apuntes de clase.

— o —

EJERCICIO 3

a) Se define $f : ([0,1], T_u|_{[0,1]}) \to (\{0,1\}, T)$ donde $T = \{\emptyset, \{1\}, \{0,1\}\}$ y f viene dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1/2), \\ 0 & \text{si } x \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

· Veamos que f es una identificación.

¿f sobreyectiva? Evidente.

¿f continua? Veamos que $f^{-1}(U') \in T_u|_{[0,1]}$ $\forall U' \in T$. Hay 3 abiertos. Esto es fácil de comprobar ya que en T hay 3 abiertos.

$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in T_u|_{[0,1]}$, $f^{-1}(\{0,1\}) = [0,1] \in T_u|_{[0,1]}$

$f^{-1}(\{1\}) = [0, 1/2) = (-\infty, 1/2) \cap [0,1] \in T_u|_{[0,1]}$.

¿$T_f = T$? Como f es continua sabemos que $T \subseteq T_f$.

¿$T_f \subseteq T$? Recordemos que $T_f = \{U' \subseteq \{0,1\} / f^{-1}(U') \in T_u|_{[0,1]}\}$

$P(\{0,1\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$.

Como $f^{-1}(\{0\}) = [1/2, 1] \notin T_u|_{[0,1]} \Rightarrow T_f \subseteq T$.

· Veamos que f no es abierta ni cerrada.

$U = (1/2, 1) = (1/2, 1) \cap [0,1] \in T_u|_{[0,1]}$ y $f(U) = \{0\} \notin T$

Así, f no es abierta.

$F = [0, 1/4] = [0, 1/4] \cap [0,1] \in C_u|_{[0,1]}$ y $f(F) = \{1\} \notin C_T$

porque $\{1\}^c = \{0\} \notin T$.

$C_T = \{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}\}$

b) (X,T) compacto ¿? $\Longrightarrow$ $A' \neq \emptyset$.
$A \subseteq X$ infinito

Recuerda: $x \in A' \Leftrightarrow \forall U \in T,\ x \in U$ se cumple $(U-\{x\}) \cap A \neq \emptyset$.

Razonamos por reducción al absurdo. Supongamos $A' = \emptyset$.
Entonces, $\forall x \in X$ se cumple que $x \notin A'$. Así, $\forall x \in X$ $\exists U_x \in T$ con $x \in U_x$ tal que $(U_x - \{x\}) \cap A = \emptyset$. Claramente $\{U_x\}_{x \in X} \subseteq T$ y $X \subseteq \bigcup_{x \in X} U_x$. Así, la compacidad de (X,T) implica la existencia de $J \subseteq X$ finito tal que $X \subseteq \bigcup_{x \in J} U_x$. Y como $A \subseteq X$, entonces $A \subseteq \bigcup_{x \in J} U_x$. Finalmente, el hecho de que $(U_x - \{x\}) \cap A = \emptyset$ $\forall x \in X$ implica que $A \subseteq \bigcup_{x \in J} \{x\}$, lo que contradice que A es infinito.