

---

## **Cálculo II** **(Grupo 1ºA)** **Relación de Ejercicios nº 4**

---

**Ejercicio 4.1:** Sean  $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$  funciones uniformemente continuas en  $A$ . Probar que  $f + g$  también es uniformemente continua en  $A$ . Si adicionalmente las funciones  $f$  y  $g$  están acotadas en  $A$ , demostrar que entonces la función producto  $fg$  también es uniformemente continua en  $A$ .

**Ejercicio 4.2:** Sea  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  la función  $f(x) = \frac{1}{x}$ , para cada  $x \in \mathbb{R}^+$ . Dado  $r > 0$ , probar que la restricción de  $f$  a  $[r, +\infty[$  es lipschitziana, mientras que la restricción de  $f$  a  $]0, r]$  no es uniformemente continua. ¿Sucedec lo mismo con  $g(x) = \ln x$ ?

**Ejercicio 4.3:** Sea  $I$  un intervalo no trivial. Probar que si todas las funciones continuas en  $I$  son uniformemente continuas en  $I$  entonces  $I$  es un intervalo cerrado y acotado.

**Ejercicio 4.4:** Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y sea  $r > 0$ . Probar que si la restricción de  $f$  al conjunto  $\{x \in \mathbb{R} : |x| \geq r\}$  es uniformemente continua, entonces  $f$  es uniformemente continua.

**Ejercicio 4.5:** Sea  $f: ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  una función ( $a < b$ ). Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i) Existe  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua tal que  $f(x) = f(x), \forall x \in ]a, b[$ .
- (ii)  $f$  es uniformemente continua en  $]a, b[$ .

**Ejercicio 4.6:** Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y periódica. Probar que:

- (i)  $f$  está acotada y alcanza (en  $\mathbb{R}$ ) su máximo y su mínimo absoluto.
- (ii)  $f$  es uniformemente continua en  $\mathbb{R}$ .

**Ejercicio 4.7:** Se dice que dos sucesiones  $x_n$  y  $y_n$  son *paralelas* si, para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|x_n - y_n| < \varepsilon$ , para cada  $n > n_0$ . Demostrar que  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  es uniformemente continua en  $A$  si, y solo si, transforma sucesiones paralelas de  $A$  en sucesiones paralelas de  $\mathbb{R}$ .

**Ejercicio 4.8:** Sea  $A \subseteq \mathbb{R}$  un conjunto acotado. Demostrar que  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  es uniformemente continua en  $A$  si, y solo si, preserva las sucesiones de Cauchy. ¿Sería cierto el resultado si  $A$  no es un conjunto acotado?

**Ejercicio 4.9:** Estudiar la continuidad uniforme de  $f(x) = e^x$  en  $\mathbb{R}_0^+$  y de  $g(x) = \sin(1/x)$  en  $]0, 1[$ .