GEOMETRÍA I.

Relación de problemas 2: ESPACIOS VECTORIALES

Doble Grado Ing. Informática y Matemáticas

1. En $\mathbb{R}^3$ se considera la suma de elementos coordenada a coordenada y el producto por escalares reales dado por:

$$a \star (x,y,z) = (a \cdot x, a^2 y, a^3 \cdot z),$$

para todo $a \in \mathbb{R}$ y $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Determínese si $\mathbb{R}^3$ con estas operaciones satisface las propiedades de un espacio vectorial real.

2. Sea X un conjunto no vacío y V un espacio vectorial sobre un cuerpo K. Denotamos por $F(X,V)$ al conjunto de las aplicaciones $f : X \to V$. En $F(X,V)$ se definen la suma y el producto por elementos de K siguientes:

$$\begin{array}{ll} (f+g)(x) = f(x) + g(x), & \forall x \in X, \quad \forall f,g \in F(X,V), \\ (a \cdot f)(x) = a \cdot f(x), & \forall x \in X, \quad \forall a \in K, \quad \forall f \in F(X,V). \end{array}$$

Demostrar que, con estas operaciones, $F(X,V)$ es un espacio vectorial sobre K.

3. Sean V_1 y V_2 dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K.

   a) Demostrar que el conjunto $V_1 \times V_2 = \{(v_1,v_2) \,|\, v_1 \in V_1,\, v_2 \in V_2\}$ es un espacio vectorial sobre K cuando definimos la suma y el producto por elementos de K como:

$$\begin{array}{rcl} (u_1,u_2) + (v_1,v_2) & = & (u_1 + v_1, u_2 + v_2), \\ a \cdot (v_1,v_2) & = & (a \cdot v_1, a \cdot v_2). \end{array}$$

   b) Supongamos que U_i es un subespacio vectorial de V_i para cada $i = 1,2$. Demostrar que $U_1 \times U_2$ es un subespacio vectorial de $V_1 \times V_2$. ¿Es todo subespacio vectorial de $V_1 \times V_2$ de la forma $U_1 \times U_2$ donde cada U_i es un subespacio vectorial de V_i?

4. En cada uno de los siguientes casos estudiar si U es o no un subespacio vectorial de V:

   a) $V = \mathbb{R}^2, \quad U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x = y^2\}$.

   b) $V = \mathbb{R}^2, \quad U = \{(1,0),(0,0)\}$.

c) $V = M_2(\mathbb{R})$, $\quad U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$.

d) $V = K[x]$, $\quad U_n = \{p(x) \in K[x] \mid \text{grado}(p(x)) = n\} \cup \{0\}$ $(n \in \mathbb{N})$.

e) $V = \mathbb{R}^4$, $\quad U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y = 3\}$.

f) $V = \mathbb{R}^n$, $\quad U = \mathbb{Q}^n = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1,\dots,x_n \in \mathbb{Q}\}$.

g) $V = \mathbb{R}^5$, $\quad U = \{(x,y,z,t,s) \in \mathbb{R}^5 \mid -y = 2x + z\}$.

h) $V = \mathbb{R}^3$, $\quad U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2yz = 0\}$.

i) $V = \mathbb{R}^3$, $\quad U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z \geq 0\}$.

j) $V = \mathbb{R}^3$, $\quad U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}$.

k) $V = \mathbb{R}^5$, $\quad U = \{(0,0,1,-1,2),(3,2,\sqrt{5},-8,32)\}$.

l) $V = \mathbb{R}^5$, $\quad U = L((0,0,1,-1,2),(3,2,\sqrt{5},-8,32))$.

m) $V = M_2(\mathbb{R})$, $\quad U = \left\{ \begin{pmatrix} a & 1+a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} / \ a \in \mathbb{R} \right\}$.

n) $V = F(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\quad U = \{f \in F(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f''(x) + f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}\}$.

ñ) $V = M_n(K)$, $\quad U = \{A \in M_n(K) \mid A \text{ es diagonal}\}$.

o) $V = M_n(K)$, $\quad U = \{A \in M_n(K) \mid A \text{ es triangular superior}\}$ (una matriz $A = (a_{ij})$ en $M_n(K)$ es *triangular superior* si $a_{ij} = 0$ siempre que $i > j$).

5. En cada uno de los siguientes casos decidir si el vector v del espacio vectorial V pertenece o no al subespacio $L(S)$ y, en caso afirmativo, expresar v como combinación lineal de S:

   a) $V = \mathbb{R}^3$, $\quad v = (0,2,-5)$, $\quad S = \{(1,-3,2),(2,-4,-1),(1,-5,7)\}$.

   b) $V = \mathbb{R}^4$, $\quad v = (9,-17,10,-5)$, $\quad S = \{(2,-1,0,0),(-1,3,-2,1)\}$.

   c) $V = \mathbb{R}^4$, $\quad v = (5,7,a,6)$, $\quad S = \{(1,2,3,0),(1,1,1,2)\}$.

   d) $V = M_2(\mathbb{C})$, $\quad v = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$, $\quad S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ i & 2i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

   e) $V = \mathbb{R}[x]$, $\quad v = x^2 + x + 1$, $\quad S = \{-x, x^2+1, x^3\}$.

6. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K. Demostrar los siguientes hechos:

   a) si S y S' son subconjuntos no vacíos de V con $S \subseteq S'$ entonces $L(S) \subseteq L(S')$,

   b) $L(S) = S$ si y sólo si S es un subespacio vectorial de V,

   c) si $U_i = L(S_i)$ para cada $i = 1,\dots,m$, entonces $\sum_{i=1}^m U_i = L(\cup_{i=1}^m S_i)$.

   Supongamos que $U_i = L(S_i)$, para cada $i = 1,\dots,m$. ¿Es cierto que $\cap_{i=1}^m U_i = L(\cap_{i=1}^m S_i)$?

7. ¿Qué se puede decir sobre dos subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$ cuya suma es $\{0\}$? ¿Y cuya intersección es $\mathbb{R}^n$?

8. En cada uno de los siguientes casos demostrar que U_1 y U_2 son subespacios vectoriales de V. Estudiar también si se cumple $V = U_1 \oplus U_2$.

   a) $V = \mathbb{R}^3$, $U_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = z\}$, $U_2 = L((3,0,2))$.

   b) $V = F(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $U_1 = \{f \in F(\mathbb{R},\mathbb{R}) \,|\, f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$,
   $U_2 = \{f \in F(\mathbb{R},\mathbb{R}) \,|\, f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$.

   c) $V = \mathbb{R}_n[x]$, $U_1 = \{p(x) \in \mathbb{R}_n[x] \,/\, p(1) + p'(1) = 0\}$,
   $U_2 = \{p(x) \in \mathbb{R}_n[x] \,|\, p(0) + p''(0) = 0\}$ ($n \in \mathbb{N}$ y las primas $'$ y $''$ son derivadas).

   d) $V = \mathbb{R}^3$, $U_1 = L((1,0,-1),(0,1,-1))$, $U_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = 0\}$.
   ¿De cuántas formas podemos escribir $v = u_1 + u_2$ con $v \in \mathbb{R}^3$, $u_1 \in U_1$ y $u_2 \in U_2$?

9. Consideremos en $\mathbb{R}^4$ los siguientes subespacios vectoriales:

$$U_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x - y = 0,\ z - t = 0\},$$
$$U_2 = L((0,1,1,0)),$$
$$U_3 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x - y + z - t = 0\}.$$

   Probar que $U_1 + U_2 = U_3$. ¿Se cumple que $U_3 = U_1 \oplus U_2$?

10. Sea $V = F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ el espacio vectorial real de las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Analizar si la familia $S = \{f,g,h\}$ es linealmente independiente, donde $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = 2x$ y $h(x) = e^x$.

11. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo infinito K. Tomemos $\mathcal{B} = \{v_1,\dots,v_n\}$ una base de V y $\{a_1,\dots,a_n\}$ una familia en K con $a_i \neq 0$ para cada $i = 1,\dots,n$. Demostrar que $\mathcal{B}' = \{a_1 \cdot v_1,\dots,a_n \cdot v_n\}$ es una base de V. Concluir que V tiene infinitas bases.

12. Sean V_1 y V_2 espacios vectoriales finitamente generados sobre un cuerpo K. Demostrar que el espacio vectorial producto $V_1 \times V_2$ definido en el ejercicio 3 es finitamente generado. Construir una base de $V_1 \times V_2$ a partir de bases de V_1 y de V_2. Calcular $\dim_K(V_1 \times V_2)$.

13. Sea V un espacio vectorial complejo con $\dim_{\mathbb{C}}(V) = n$. Demostrar que V es un espacio vectorial real con $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 2n$.

14. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K. Supongamos que $S = \{v_1,\dots,v_m\}$ es una familia de vectores de V. Demostrar que:

   a) Si S es sistema de generadores de V y cumple la propiedad de que cuando se elimina cualquier vector de S la familia resultante no es un sistema de generadores de V, entonces S es una base de V.

   b) Si S es linealmente independiente y cumple la propiedad de que cuando se añade a S cualquier vector de V la familia resultante es linealmente dependiente, entonces S es una base de V.

15. Describir todos los subespacios vectoriales de $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$ y de $\overrightarrow{\mathbb{R}^3}$.

16. En $\mathbb{R}^3$ se consideran los subespacios vectoriales dados por:

$$U_1 = L((1,1-\alpha^2,2),(1+\alpha,1-\alpha,-2)),$$
$$U_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x+y+z=0\}.$$

Calcular todos los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los que $U_1 = U_2$.

17. Calcular una base y la dimensión de los subespacios vectoriales que aparecen en los apartados *c*), *g*) y *ñ*) del ejercicio 4.

18. Para cada uno de los subespacios vectoriales U del espacio vectorial V que aparecen a continuación calcular una base, la dimensión y un subespacio complementario:

a) $U = L((1,-2,1,0),(2,3,-2,1),(4,-1,0,1)), \quad V = \mathbb{R}^4.$
b) $U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x-2y+z=0, x+y+z+t=0\}, \quad V = \mathbb{R}^4.$
c) $U = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \,|\, p'(1)=0\}, \quad V = \mathbb{R}_3[x]$ ($p'(1)$ es la derivada de $p(x)$ en $x=1$).
d) $U = \left\{p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \,|\, \int_0^1 p(x)\,dx = 0\right\}, \quad V = \mathbb{R}_2[x].$

19. Sea K un cuerpo en el que $2 \neq 0$. Calcular una base y la dimensión de los subespacios de matrices $S_n(K)$ y $A_n(K)$ (estudiar primero los casos particulares $n=2$ y $n=3$).

20. Sea K un cuerpo. Demostrar que si S es una familia de $K[x]$ que no contiene dos polinomios con el mismo grado, entonces S es linealmente independiente. Deducir que si $\mathcal{B} = \{p_0(x),\ldots,p_n(x)\}$ es una familia de $K[x]$ de forma que grado$(p_i(x)) = i$, para cada $i = 0,\ldots,n$, entonces $\mathcal{B}$ es una base de $K_n[x]$.

21. Encontrar bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ del espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ en las que el polinomio $p(x) = x+1$ cumpla que $p(x)_{\mathcal{B}} = (1,0,0)^t$ y $p(x)_{\mathcal{B}'} = (1,1,0)^t$.

22. En el espacio vectorial $V = \mathbb{R}_2[x]$ se consideran las bases $\mathcal{B} = (1,1+x,1+x+x^2)$ y $\mathcal{B}' = (1,x,x^2)$. ¿Qué relación existe entre las coordenadas de un polinomio $p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ con respecto a $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$? Encontrar $p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ tal que $p(x)_{\mathcal{B}} = (1,-2,4)^t$.

23. En el espacio vectorial $M_2(\mathbb{C})$ se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -i \\ 1 & 2i \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix}.$$

¿Para qué números $\alpha \in \mathbb{C}$ el subespacio $U = L(A,B,C)$ de $M_2(\mathbb{C})$ tiene dimensión 2? Para tales valores calcular una base de U y las coordenadas de la matriz

$$v = \begin{pmatrix} 2i-1 & -i \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

con respecto a dicha base.

24. Se consideran los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$ dados por:

$$U_1 = L((3,6,1,0),(1,0,-1,2),(2,3,0,1)), \quad U_2 = L((2,0,-1,3),(3,3,-2,4)),$$

$$U_3 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x-z=0\}, \quad U_4 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x-2y+t=0,\ 3x+y+6z=0\}.$$

a) Calcular una base y la dimensión de U_i, para cada $i = 1,2,3,4$.

b) Calcular una base y la dimensión de $U_1 \cap U_2$, $U_2 \cap U_4$ y $U_3 \cap U_4$.

c) Calcular una base y la dimensión de $U_1 + U_2$, $U_2 + U_4$ y $U_3 + U_4$.

25. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz en $M_n(\mathbb{R})$. Se define la *traza* de A como:

$$\operatorname{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $U_n = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \,|\, \operatorname{tr}(A) = 0\}$. Se pide lo siguiente:

a) Demostrar que U_n es un subespacio vectorial de $M_n(\mathbb{R})$.

b) Calcular una base y la dimensión de U_n cuando $n = 2,3$.

c) Calcular $U_2 \cap S_2(\mathbb{R})$ y $U_2 + S_2(\mathbb{R})$. ¿Es cierto que $M_2(\mathbb{R}) = U_2 \oplus S_2(\mathbb{R})$?

26. Decidir de forma razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Existe en $\mathbb{R}$ una estructura de espacio vectorial complejo.

b) Si U es un subespacio vectorial de V, entonces el conjunto $V - U = \{v \in V \,|\, v \notin U\}$ es un subespacio vectorial de V.

c) Si K es un cuerpo, entonces los únicos subespacios vectoriales de K (como espacio vectorial sobre sí mismo) son los impropios.

d) En un espacio vectorial V, si dos planos vectoriales no son iguales entonces su intersección es una recta o el vector nulo.

e) En un espacio vectorial V la suma de dos rectas vectoriales es un plano vectorial.

f) Si V es un espacio vectorial y U es un subespacio vectorial suyo, entonces $U + U = U$.

g) El espacio vectorial real $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ es finitamente generado.

h) $\mathbb{R}$ no es finitamente generado como espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$.

i) Si V es un espacio vectorial sobre un cuerpo K y $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ es un sistema de generadores de V, entonces todo vector $v \in V$ se expresa de forma única como combinación lineal de S.

j) En un espacio vectorial V los vectores $\{u,v,w\}$ son linealmente independientes si y sólo si los vectores $\{u,u+v,u+v-w\}$ también lo son.

k) En $\mathbb{R}^3$ el subconjunto $U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-2y=0\}$ es un plano vectorial. Además, la familia $\mathcal{B}_U=\{(0,0,2),(1,1,0)\}$ es una base de U.

l) Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con $V=U_1\oplus U_2$. Si $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ son bases de U_1 y U_2, entonces $\mathcal{B}=\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_2$ es una base de V.

m) Existe un subespacio U de $\mathbb{R}^{12}$ con $\dim_{\mathbb{R}}(U)=14$.

n) Si U es un subespacio de K^n con $\dim_K(U)=5$, entonces los vectores de U tienen por lo menos cinco coordenadas.

ñ) Si V es un espacio vectorial sobre K con $\dim_K(V)=7$, entonces cada sistema de generadores de V tiene por lo menos siete vectores.

o) Existe un subespacio $U=L(v_1,v_2)$ de K^4 tal que $\dim_K(U)=3$.

p) Existe un subespacio U de $\mathbb{R}^n$ que es solución de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo con cuatro incógnitas y tal que $\dim_{\mathbb{R}}(U)=5$.

q) Si U_1 y U_2 son dos hiperplanos de V, entonces $U_1=U_2$ o bien $U_1+U_2=V$.

r) Sea V un espacio vectorial con $\dim_K(V)=n\geq 2$. Dado $v\in V$ con $v\neq 0$, y escalares $\{a_1,\dots,a_n\}$ de K no todos nulos, existe al menos una base $\mathcal{B}$ de V tal que las coordenadas de v en $\mathcal{B}$ coinciden con los escalares dados.

27. Dado $k\in\mathbb{R}$, consideramos en $\mathbb{R}^4$ el subespacio:

$$U_k=L((0,-1,k,3),(0,k,-2-k,3),(k-2,-1,-2,3)).$$

a) Calcular $\dim_{\mathbb{R}}(U_k)$ en función de k. Determinar una base y unas ecuaciones cartesianas de U_k para cada $k\in\mathbb{R}$.

b) Para k con $\dim_{\mathbb{R}}(U_k)=2$, encontrar un subespacio W de $\mathbb{R}^4$ tal que $\mathbb{R}^4=U_k\oplus W$. Determinar unas ecuaciones cartesianas para W.