Tema 10

Teorema del valor medio

Podría decirse que hasta ahora sólo hemos sentado las bases para el estudio del cálculo diferencial en varias variables. Hemos introducido el concepto general o abstracto de función diferenciable y comprobado algunas propiedades básicas, como su carácter local o su relación con la continuidad. También hemos visto cómo se concreta dicho concepto en los tres casos particulares que más nos interesan, vector derivada, vector gradiente y matriz jacobiana, viendo al mismo tiempo diversas interpretaciones geométricas y físicas. Por último disponemos de algunos métodos para estudiar la diferenciabilidad de una función y calcular su diferencial, entre los que destaca la regla de la cadena.

Ha llegado ya el momento de estudiar los teoremas fundamentales del cálculo diferencial, empezando como es lógico por intentar generalizar el *teorema del valor medio*, que es sin duda el resultado más importante del cálculo diferencial en una variable. Obtendremos fácilmente una versión del teorema para funciones que parten de un espacio normado arbitrario y toman valores reales, que en particular se aplica a los campos escalares en $\mathbb{R}^N$. Para funciones con valores vectoriales las cosas se complican, la versión literal del teorema es falsa, incluso para funciones de una variable real con valores en $\mathbb{R}^2$. Sin embargo, probaremos una versión más débil, que sí es cierta a plena generalidad y permite deducir algunas consecuencias interesantes.

10.1. Funciones con valores escalares

Recordemos el teorema del valor medio para funciones reales de variable real:

- *Sean $a,b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua, que suponemos derivable en el intervalo abierto $]a,b[$.*

  (i) **Teorema del valor medio**: *existe $c \in]a,b[$ tal que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$*

  (ii) **Desigualdad del valor medio**: *si existe $M \in \mathbb{R}_0^+$ verificando que $|f'(x)| \leqslant M$ para todo $x \in]a,b[$, entonces $|f(b) - f(a)| \leqslant M(b-a)$.*

Cuando se trabaja con funciones reales de variable real, la desigualdad del valor medio no suele destacarse, siendo como es, consecuencia obvia del teorema. Sin embargo, veremos que, cuando se trabaja con espacios normados, el teorema no siempre es cierto, mientras que la desigualdad es válida a plena generalidad. Por otra parte, la desigualdad es suficiente para conseguir varias consecuencias importantes del teorema. Por ejemplo, permite probar que toda función derivable en un intervalo, con derivada acotada, es lipschitziana y, en el caso de que la derivada sea idénticamente nula, la función es constante.

Con vistas a la generalización del teorema anterior, conviene hacer algunas observaciones. Por una parte, el papel del intervalo $[a,b]$ puede hacerlo cualquier segmento entre dos puntos de un espacio normado, mientras que $]a,b[$ debe ser el mismo segmento, excluidos sus extremos. Concretamente, si X es un espacio normado y $a,b \in X$, escribiremos

$$[a,b] = \{a+t(b-a) : t \in [0,1]\} \qquad \text{y} \qquad]a,b[= \{a+t(b-a) : t \in]0,1[\}$$

Obsérvese que, cuando $a \neq b$, único caso que nos interesa, se tiene $]a,b[= [a,b] \setminus \{a,b\}$. Tiene sentido decir que $[a,b]$ es el *segmento cerrado* de extremos a y b, pues se trata de un conjunto cerrado, e incluso compacto. Pero conviene notar que, salvo que X tenga dimensión 1, el conjunto $]a,b[$ no es abierto, de hecho $[a,b]$ tiene interior vacío. Por esta razón, no podemos trabajar con una función f definida solamente en el segmento $[a,b]$, pues no tendría sentido hablar de la diferenciabilidad de f. Una solución aceptable consiste en suponer que f está definida en un abierto que contenga al segmento $[a,b]$. Eso sí, supondremos solamente que f es continua en $[a,b]$ y diferenciable en todo punto de $]a,b[$.

Por otra parte, está claro que la tesis del teorema del valor medio tiene perfecto sentido, otra cosa es que sea cierta, para una función con valores en un espacio normado arbitrario Y. Piénsese que, en el caso $X = Y = \mathbb{R}$, multiplicar $b-a$ por la derivada $f'(c)$ es tanto como aplicar al número real $b-a$ la diferencial $Df(c)$. Por tanto, en general, podemos preguntarnos si existe un punto $c \in]a,b[$ que verifique $f(b) - f(a) = Df(c)\,(b-a)$, pues ambos miembros de esta igualdad son vectores de Y.

Pues bien, expresado de esta forma, el teorema del valor medio, y la desigualdad que de él se deduce, son ciertos, siempre que el espacio normado de llegada sea $\mathbb{R}$, es decir, para funciones con valores escalares:

Teorema del valor medio escalar. *Sea Ω un abierto de un espacio normado X, $a,b \in \Omega$ tales que $[a,b] \subset \Omega$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y diferenciable en $]a,b[$. Entonces, existe $c \in]a,b[$ tal que*

$$f(b) - f(a) = Df(c)\,(b-a) \tag{1}$$

Como consecuencia, si $M \in \mathbb{R}_0^+$ verifica que $\|Df(x)\| \leqslant M$ para todo $x \in]a,b[$, se tendrá:

$$|f(b) - f(a)| \leqslant M \|b-a\| \tag{2}$$

Demostración. Definimos una función $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$, escribiendo $\varphi(t) = f\big(a+t(b-a)\big)$ para todo $t \in [0,1]$. Entonces φ es continua y, por la regla de la cadena, es derivable en $]0,1[$ con derivada dada por

$$\varphi'(t) = Df\big(a + t\,(b-a)\big)\,(b-a) \qquad \forall t \in]0,1[$$

El teorema del valor medio para funciones reales de variable real nos da un $t_0 \in]0,1[$ tal que

$$f(b) - f(a) = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(t_0) = Df\big(a + t_0\,(b-a)\big)\,(b-a)$$

Tomando $c = a + t_0\,(b-a) \in]a,b[$, obtenemos (1). Para deducir (2) basta usar la definición de la norma en $L(X,\mathbb{R})$:

$$|\,f(b) - f(a)\,| = |\,Df(c)(b-a)\,| \leqslant \|\,Df(c)\,\|\;\|\,b-a\,\| \leqslant M\,\|\,b-a\,\| \qquad \blacksquare$$

En el caso particular de un campo escalar en $\mathbb{R}^N$, usando la desigualdad de Cauchy-Schwartz obtenemos:

- *Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^N$, $a,b \in \Omega$ tales que $[a,b] \subset \Omega$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ un campo escalar continuo en $[a,b]$ y diferenciable en $]a,b[$. Entonces, existe $c \in]a,b[$ tal que*

$$f(b) - f(a) = \big(\nabla f(c)\,\big|\,b-a\big)$$

Por tanto, usando en $\mathbb{R}^N$ la norma euclídea, si existe $M \in \mathbb{R}_0^+$ tal que $\|\,\nabla f(x)\,\| \leqslant M$ para todo $x \in]a,b[$, se tendrá:

$$|\,f(b) - f(a)\,| \leqslant M\,\|\,b-a\,\|$$

Como se habrá podido observar, la demostración del teorema del valor medio escalar ha consistido en una aplicación muy inmediata del ya conocido para funciones de una variable. De hecho, como sólo se trabaja con la función f en un segmento $[a,b]$, en esencia tenemos una función de una variable. Los resultados anteriores, generalizan formalmente el teorema del valor medio que ya conocíamos, pero en realidad sólo consisten en darse cuenta de que dicho teorema puede aplicarse fácilmente en situaciones más generales. Tiene mayor interés ver lo que ocurre en el caso de un campo vectorial, o incluso para una función entre espacios normados arbitrarios, como enseguida vamos a intentar.

10.2. Caso general

Observamos inmediatamente que la primera afirmación del teorema del valor medio escalar no es cierta para funciones con valores en $\mathbb{R}^2$, incluso aunque sean funciones de una variable real. Concretamente, basta considerar la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, que claramente es derivable en todo punto de $\mathbb{R}$ con

$$f'(t) = \big(-\operatorname{sen} t\,,\,\cos t\big) \neq (0,0) \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

Tomando $a \in \mathbb{R}$ arbitrario y $b = a + 2\pi$ se tiene $f(b) = f(a)$. Si existiese $c \in [a,b]$ verificando que $f(b) - f(a) = Df(c)(b-a) = 2\pi\,f'(c)$, se tendría $f'(c) = (0,0)$, lo cual es imposible.

Sin embargo, probaremos a plena generalidad la segunda de las afirmaciones del teorema del valor medio escalar, es decir, la desigualdad del valor medio. Ciertamente es más débil que el teorema, pero será suficiente para deducir interesantes consecuencias.

La dificultad para probarlo se concentra en el caso de funciones de una variable real, que es el que resolvemos previamente.

Lema. *Sea* Y *un espacio normado y sean* $g : [0,1] \to Y$ *y* $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}$ *dos funciones continuas en* $[0,1]$ *y derivables en* $]0,1[$, *verificando que*

$$\| g'(t) \| \leqslant \alpha'(t) \qquad \forall t \in]0,1[\tag{3}$$

Se tiene entonces la siguiente desigualdad:

$$\| g(1) - g(0) \| \leqslant \alpha(1) - \alpha(0) \tag{4}$$

Demostración. Fijado $\varepsilon > 0$, consideramos el conjunto

$$\Lambda = \big\{ t \in [0,1] \ : \ \| g(t) - g(0) \| \leqslant \alpha(t) - \alpha(0) + \varepsilon\, t + \varepsilon \big\}$$

y a poco que se piense, la demostración estará casi concluida si probamos que $1 \in \Lambda$.

Por ser g y α continuas, la función $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(t) = \| g(t) - g(0) \| - \big(\alpha(t) - \alpha(0) \big) - \varepsilon\, t \qquad \forall t \in [0,1]$$

también es continua, de lo que deduciremos dos consecuencias:

En primer lugar, como $\varphi(0) = 0$, la continuidad de φ en 0 nos permite encontrar $\eta \in]0,1[$ tal que, para $t \in [0,\eta]$ se tenga $\varphi(t) < \varepsilon$, con lo que $[0,\eta] \subset \Lambda$.

Por otra parte, como $\Lambda = \{ t \in [0,1] \ : \ \varphi(t) \leqslant \varepsilon \}$, la continuidad de φ nos dice que Λ es un subconjunto cerrado de $[0,1]$, luego es compacto, y en particular tiene máximo. Sea pues $t_0 = \max \Lambda$ y anotemos que $t_0 \geqslant \eta > 0$. Nuestro objetivo es probar que $t_0 = 1$, así que supondremos que $t_0 < 1$ para llegar a una contradicción.

Al ser $0 < t_0 < 1$, tenemos que g y α son derivables en t_0, luego existe $\delta > 0$ tal que, para todo $t \in [0,1]$ con $|t - t_0| \leqslant \delta$, se tiene

$$\begin{aligned} \| g(t) - g(t_0) - g'(t_0)\,(t - t_0) \| &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} |t - t_0| \qquad \text{y también} \\ |\alpha(t) - \alpha(t_0) - \alpha'(t_0)\,(t - t_0)| &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} |t - t_0| \end{aligned}$$

Obviamente podemos suponer que $t_0 + \delta < 1$, para tomar $t = t_0 + \delta$ y obtener

$$\begin{aligned} \| g(t_0 + \delta) - g(t_0) - \delta\, g'(t_0) \| &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} \delta \qquad \text{así como} \\ |\alpha(t_0 + \delta) - \alpha(t_0) - \delta\, \alpha'(t_0)| &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} \delta \end{aligned} \tag{5}$$

Llegaremos a contradicción viendo que $t_0 + \delta \in \Lambda$. Para ello, usando la primera desigualdad de (5), la hipótesis (3) con $t = t_0$, y el hecho de que $t_0 \in \Lambda$, tenemos:

$$\begin{aligned} \| g(t_0 + \delta) - g(0) \| &\leqslant \| g(t_0 + \delta) - g(t_0) - \delta\, g'(t_0) \| + \delta \| g'(t_0) \| + \| g(t_0) - g(0) \| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} \delta + \delta\, \alpha'(t_0) + \alpha(t_0) - \alpha(0) + \varepsilon\, t_0 + \varepsilon \end{aligned} \tag{6}$$

Por otra parte, usando la segunda desigualdad de (5) tenemos también

$$\begin{aligned} \delta\alpha'(t_0) + \alpha(t_0) &= \alpha(t_0+\delta) - \big(\alpha(t_0+\delta) - \alpha(t_0) - \delta\alpha'(t_0)\big) \\ &\leqslant \alpha(t_0+\delta) + \frac{\varepsilon}{2}\delta \end{aligned} \tag{7}$$

De (6) y (7) deducimos claramente que

$$\begin{aligned} \|g(t_0+\delta) - g(0)\| &\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\delta + \alpha(t_0+\delta) + \frac{\varepsilon}{2}\delta - \alpha(0) + \varepsilon t_0 + \varepsilon \\ &= \alpha(t_0+\delta) - \alpha(0) + \varepsilon(t_0+\delta) + \varepsilon \end{aligned}$$

es decir, que $t_0+\delta \in \Lambda$. Esto es una clara contradicción, ya que $t_0+\delta > t_0 = \text{máx}\,\Lambda$.

Así pues hemos comprobado que $t_0 = 1$ y en particular $1 \in \Lambda$, es decir

$$\|g(1) - g(0)\| \leqslant \alpha(1) - \alpha(0) + 2\varepsilon$$

Como esto es válido para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, tenemos (4), como queríamos. ■

En el caso $Y = \mathbb{R}^2$, aunque también se podría hacer en general, el resultado anterior tiene una interpretación física que lo hace muy plausible. Pensemos que g describe un movimiento curvilíneo en el plano y α un movimiento rectilíneo, durante el mismo intervalo de tiempo. La hipótesis (3) significa que la celeridad del primer móvil nunca supera a la del segundo. Entonces $\|g(1) - g(0)\|$ es la distancia entre las posiciones inicial y final del móvil más lento, que será menor o igual que la longitud de la trayectoria recorrida, pero esta longitud ha de ser a su vez menor o igual que $\alpha(1) - \alpha(0)$, que es la distancia recorrida por el móvil más rápido.

Desigualdad del valor medio. *Sean X e Y espacios normados, Ω abierto de X, $a, b \in X$ tales que $[a,b] \subset \Omega$ y $f : \Omega \to Y$ una función. Supongamos que f es continua en $[a,b]$ y diferenciable en $]a,b[$, y que existe $M \in \mathbb{R}_0^+$ tal que $\|Df(x)\| \leqslant M$ para todo $x \in]a,b[$. Se tiene entonces:*

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant M\|b-a\|$$

Demostración. Basta aplicar el lema anterior a las funciones $g : [0,1] \to Y$ y $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}$ definidas, para todo $t \in [0,1]$, por

$$g(t) = f\big((1-t)a + tb\big) \qquad \text{y} \qquad \alpha(t) = M\|b-a\|t$$

Es claro que g y α son continuas en $[0,1]$ y derivables en $]0,1[$ con

$$\begin{aligned} \|g'(t)\| &= \|Df\big((1-t)a + tb\big)(b-a)\| \\ &\leqslant \|Df\big((1-t)a + tb\big)\| \, \|b-a\| \leqslant M\|b-a\| = \alpha'(t) \qquad \forall t \in]0,1[\end{aligned}$$

Aplicando pues el lema anterior, obtenemos la desigualdad buscada:

$$\|f(b) - f(a)\| = \|g(1) - g(0)\| \leqslant \alpha(1) - \alpha(0) = M\|b-a\| \qquad ■$$

Como primera aplicación de este resultado, es natural ponerse en una situación que permita usarlo con cualquier par de puntos $a, b \in \Omega$, lo cual es bien fácil:

Corolario 1. *Sean X e Y espacios normados, Ω un abierto convexo de X y $f : \Omega \to Y$ una función diferenciable. Supongamos que existe $M \in \mathbb{R}_0^+$ verificando que $\| Df(x) \| \leqslant M$ para todo $x \in \Omega$. Entonces f es lipschitziana con constante M, es decir:*

$$\| f(b) - f(a) \| \leqslant M \| b - a \| \qquad \forall a, b \in \Omega$$

Obsérvese que, en caso de que podamos tomar $M = 0$, esto es, cuando la diferencial Df es idénticamente nula, obtenemos que $f(b) = f(a)$ para cualesquiera $a, b \in \Omega$, es decir, que f es constante. Pero podemos conseguir el mismo resultado con una hipótesis más débil que la convexidad de Ω:

Corolario 2. *Sean X e Y espacios normados, Ω un subconjunto abierto y conexo de X y $f : \Omega \to Y$ una función diferenciable tal que $Df(x) = 0$ para todo $x \in \Omega$. Entonces f es constante.*

Demostración. Fijado $a \in \Omega$, consideramos el conjunto $A = \{x \in \Omega : f(x) = f(a)\}$ y se trata de probar que $A = \Omega$. Por ser f continua, A es un subconjunto cerrado de Ω, pero vamos a comprobar que también es abierto. Dado $x \in A$, como Ω es abierto, existe $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $B(x, r) \subset \Omega$. Podemos entonces aplicar el corolario anterior, a la restricción de f al abierto convexo $B(x, r)$, cuya función diferencial es idénticamente nula, obteniendo que f es constante en $B(x, r)$. Por tanto tenemos que $f(y) = f(x) = f(a)$ para todo $y \in B(x, r)$, es decir, $B(x, r) \subset A$. Como $x \in A$ era arbitrario, hemos probado que A es abierto. Puesto que Ω es conexo y $A \neq \emptyset$, porque $a \in A$, concluimos que $A = \Omega$ como se quería. ■

Destacamos una consecuencia obvia: con las mismas hipótesis sobre Ω, si f y g son dos funciones diferenciables en Ω tales que $Df = Dg$, entonces $f - g$ es constante. Dicho de otra forma, una función diferenciable en un subconjunto abierto y conexo de un espacio normado, queda determinada por su función diferencial, salvo adición de una constante.

10.3. Aplicaciones a campos escalares o vectoriales

En el caso de un campo escalar o vectorial, es decir, cuando $X = \mathbb{R}^N$ e $Y = \mathbb{R}^M$, para usar el último corolario no necesitamos comprobar la diferenciabilidad de la función f, sino que basta trabajar con sus derivadas parciales:

- *Sea Ω un abierto conexo de $\mathbb{R}^N$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}^M$ una función. Supongamos que todas las derivadas parciales de f son idénticamente nulas, es decir,*

  $$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = 0 \qquad \forall x \in \Omega, \ \forall k \in \Delta_N$$

  Entonces f es constante.

Trabajando con cada una de las componentes de f, basta considerar el caso $M = 1$. Es obvio que todas las derivadas parciales de f son funciones continuas, luego podemos usar la condición suficiente de diferenciabilidad, obteniendo que f es diferenciable en Ω. Como $Df(x) = 0$ para todo $x \in \Omega$, basta usar el Corolario 2. ■

Terminamos este tema con una aplicación del teorema del valor medio en su versión para funciones reales de variable real. Intuitivamente, si Ω es un abierto de $\mathbb{R}^N$ con $N \geqslant 2$, y un campo escalar o vectorial $f : \Omega \to \mathbb{R}^M$ es derivable con respecto a una variable, siendo dicha derivada parcial idénticamente nula en Ω, parece natural pensar que f sólo dependa de las demás variables. Esto es obviamente falso cuando Ω no es conexo, como se puede fácilmente comprobar, y veremos más adelante que puede ser falso aunque Ω sea conexo. Previamente probaremos un resultado positivo en el caso de que Ω sea *convexo*, cuya demostración nos mostrará la posibilidad de considerar una hipótesis más general y nos hará comprender lo que puede fallar cuando no se cumple esa hipótesis.

- *Sea Ω un abierto convexo de $\mathbb{R}^N$ con $N \geqslant 2$, y fijado $k \in \Delta_N$, sea $f : \Omega \to \mathbb{R}^M$ una función derivable con respecto a la k-ésima variable en Ω, con*

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = 0 \qquad \forall x \in \Omega$$

Si para $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \Omega$ escribimos $\widehat{x} = (x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1} \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^{N-1}$, y consideramos el conjunto $U = \{\widehat{x} : x \in \Omega\}$, entonces existe una función $g : U \to \mathbb{R}^M$ tal que $f(x) = g(\widehat{x})$ para todo $x \in \Omega$. Dicho de manera más intuitiva, f no depende de la k-ésima variable.

De nuevo, usando las componentes de f, basta considerar el caso $M = 1$. A poco que se piense, bastará comprobar lo siguiente:

$$x, u \in \Omega, \ \widehat{x} = \widehat{u} \quad \Longrightarrow \quad f(x) = f(u) \tag{8}$$

Comprobada esta implicación, para $\widehat{x} \in U$ con $x \in \Omega$, podremos definir $g(\widehat{x}) = f(x)$. Esta definición es correcta, pues aunque x no es único, para otro $u \in \Omega$ que verifique $\widehat{u} = \widehat{x}$, tendremos $f(u) = f(x)$, luego el valor de $g(\widehat{x})$ dependerá de $\widehat{x}$, pero no de x. Obtenemos una función $g : U \to \mathbb{R}^M$, que obviamente cumple la condición requerida.

Para probar (8) escribimos $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ y consideramos el conjunto

$$J = \{t \in \mathbb{R} : (x_1, \ldots, x_{k-1}, t, x_{k+1}, \ldots, x_N) \in \Omega\} \tag{9}$$

Usando que Ω es convexo, se comprueba rutinariamente que J también lo es, luego J es un intervalo. Consideramos ahora la función $\varphi : J \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(t) = f\left(x_1, \ldots, x_{k-1}, t, x_{k+1}, \ldots, x_N\right) \qquad \forall t \in J$$

Como f es derivable con respecto a la k-ésima variable en todo punto de Ω, vemos claramente que φ es derivable en J con

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_k}\left(x_1, \ldots, x_{k-1}, t, x_{k+1}, \ldots, x_N\right) = 0 \qquad \forall t \in J$$

Del teorema del valor medio para funciones reales de variable real, deducimos que φ es constante. Es obvio que $x_k \in J$ y, como $\widehat{u} = \widehat{x}$, escribiendo $u = \big(x_1, \ldots, x_{k-1}, u_k, x_{k+1}, \ldots, x_N\big)$, de $u \in \Omega$ deducimos que $u_k \in J$. Concluimos entonces que $f(x) = \varphi(x_k) = \varphi(u_k) = f(u)$, y hemos probado (8), concluyendo así la demostración. ■

Es fácil adivinar una hipótesis más general sobre Ω, para conseguir el mismo resultado. Basta observar que la convexidad de Ω sólo se ha usado para deducir que el conjunto J definido en (9) es un intervalo. Bastará por tanto suponer que, para todo $x \in \Omega$, el conjunto J es un intervalo. Geométricamente, esto significa que, si una recta R tiene la dirección del k-ésimo eje de coordenadas, el conjunto $R \cap \Omega$ ha de ser convexo, pudiendo ser vacío. Por ejemplo, si $N = 2$ y $k = 1$, la intersección con Ω de cualquier recta horizontal debe ser un conjunto convexo. Es claro que esta condición es más débil que la convexidad de Ω. De hecho, si Ω es convexo, entonces $R \cap \Omega$ es un conjunto convexo para toda recta R, cualquiera que sea su dirección. Veamos finalmente que, aunque Ω sea conexo, el resultado anterior puede no verificarse.

Consideremos el conjunto $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \big\{ (0,y) : y \geqslant 0 \big\}$, que también podemos escribir en la forma $\Omega = A \cup B \cup C$ donde

$$A = \big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0 \big\}, \quad B = \big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0 \big\}, \quad C = \big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \big\}$$

tres semiplanos, que obviamente son conjuntos abiertos y convexos, luego conexos. Por tanto, vemos que Ω es abierto, y también conexo. De hecho, como $A \cap B \neq \emptyset$, vemos que $A \cup B$ es conexo, pero también $(A \cup B) \cap C \neq \emptyset$ luego $A \cup B \cup C = \Omega$ es conexo. Observamos que la intersección de Ω con la recta de ecuación $y = 1$ es el conjunto $\big\{ (x,1) : x \in \mathbb{R} \big\} \setminus \{(0,1)\}$, que no es convexo. Esto hace que una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ pueda depender de la primera variable, aunque su primera derivada parcial sea idénticamente nula en Ω, como vamos a ver.

Consideramos la función $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x,y) = y^2 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \qquad f(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in \Omega \setminus (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$$

Como f es idénticamente nula en el conjunto abierto $A \cup B$, es derivable con respecto a la primera variable, con derivada parcial idénticamente nula en dicho conjunto. Por otra parte, en el primer cuadrante $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, que también es abierto, tenemos claramente que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \qquad \forall x,y \in \mathbb{R}^+$$

Para un punto de la forma $(x_0, 0)$ con $x_0 > 0$, observamos que $f(x,0) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$, de donde deducimos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0) = 0 \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R}^+$$

En resumen, f es derivable con respecto a la primera variable, y su primera derivada parcial es idénticamente nula en Ω. Sin embargo, vemos que f sí depende de la primera variable, puesto que $f(-1,1) = 0 \neq 1 = f(1,1)$.

Es fácil comprobar que f también es derivable con respecto a la segunda variable y su segunda derivada parcial es continua, luego de hecho se tiene que $f \in C^1(\Omega)$.