Segunda prueba de Geometría I
Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas,
Grupo A, curso 2020/21

14 de Enero de 2021. Hora límite 21:45

1. Sea $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal. Definimos $\bar{f} : V/Ker(f) \longrightarrow Im(f)$ mediante $\bar{f}(v + Ker(f)) = f(v)$ para cualquier $v \in V$.

    - Demostrar que $\bar{f}$ es una aplicación (está bien definida).
    - Demostrar que $\bar{f}$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.

2. Sobre el espacio vectorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de las matrices cuadradas reales de orden 2 se definen

$$\varphi \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = x + t \qquad \psi \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = x + y + z + t.$$

    .

    - Ampliar $\{\varphi, \psi\}$ a una base del espacio dual.
    - Hallar la matriz de cambio de base entre la base dual de la usual de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ y la base obtenida en el apartado anterior.

Geometría

Prueba Temas 3 y 4

Nombre: José Alberto Hoces Castro

2. $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$\varphi\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = x+t \qquad \psi\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = x+y+z+t$$

- Ampliar $\{\varphi, \psi\}$ a una base del espacio dual.

Primero hemos de hallar las coordenadas de φ y ψ respecto de la base usual dual:

$$B_u = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B_u^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \\ \varphi_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \\ \varphi_3\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \\ \varphi_4\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \end{array}\right\}$$ Valen 0 para cualquier otra matriz de B_u

Empecemos con φ:

$$\varphi = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + a_3\varphi_3 + a_4\varphi_4$$

$$\varphi\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = x+t = (a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + a_3\varphi_3 + a_4\varphi_4)\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow a_1x + a_2y + a_3z + a_4t = x+t \Longrightarrow \begin{array}{l} a_1 = 1 \\ a_2 = a_3 = 0 \\ a_4 = 1 \end{array}$$

$$\varphi = (1,0,0,1)_{B_u^*}$$

Ahora ψ:

$$\psi = b_1\varphi_1 + b_2\varphi_2 + b_3\varphi_3 + b_4\varphi_4$$

$$\psi\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = x+y+z+t = (b_1\varphi_1 + b_2\varphi_2 + b_3\varphi_3 + b_4\varphi_4)\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 1 \Longrightarrow \psi = (1,1,1,1)_{B_u^*}$$

Para ampliar a una base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})^*$ hemos de añadir 2 formas lineales cuyas coordenadas respecto de la base usual son L.I. con las de φ y ψ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Las formas lineales de coordenadas $(0,0,1,0)_{Bu^*}$ y $(0,0,0,1)_{Bu^*}$ son L.I. con ψ y φ ya que desarrollando por la 3ª y la 4ª columna los respectivos determinantes y sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, entonces el determinante de 4×4 no es nulo.

$B^* = \{\psi, \varphi, \alpha, \beta\}$ con $\alpha = (0,0,1,0)_{Bu^*}$ y
$\beta = (0,0,0,1)_{Bu^*}$

b) Hallar la matriz de cambio de base entre la base dual de la usual de $M_2(\mathbb{R})$ y la base obtenida en el apartado anterior.

Nos están pidiendo $M_{B^* \leftarrow Bu^*}$. Justo del apartado anterior tenemos $M_{Bu^* \leftarrow B^*}$, por lo que tenemos que calcular la inversa de $M_{Bu^* \leftarrow B^*}$.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xRightarrow{F_2 - F_1 \Rightarrow F_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xRightarrow{F_3 - F_1 \Rightarrow F_3}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xRightarrow{F_4 - F_1 \Rightarrow F_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\xRightarrow{\frac{F_2}{(-1)} \Rightarrow F_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xRightarrow{F_3 + F_2 \Rightarrow F_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\xRightarrow{F_1 - F_2 \Rightarrow F_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow M_{B^* \leftarrow Bu^*} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. $f: V \to V'$ una aplicación lineal.
Definimos $\bar{f}: V/Ker(f) \to Im(f)$
mediante $\bar{f}(v+Ker(f)) = f(v)$ para cualquier $v \in V$

- Demostrar que $\bar{f}$ es una aplicación (está bien definida).

Primero hemos de tener en cuenta qué es el conjunto cociente $V/Ker(f)$. Dicho conjunto estará formado por clases de equivalencia, y para que dos vectores estén en la misma clase de equivalencia, deben diferenciarse entre ellos un elemento del $Ker(f)$. En resumen, $V/Ker(f) = \{v+Ker(f) / v \in V\}$.

Ahora bien, para que $\bar{f}$ esté bien definida tenemos que probar que $\bar{f}(v+Ker(f))$ no depende del representante que escojamos de la clase, sino de la clase (como se ha especificado antes, los representantes de una clase son aquellos que se diferencian entre sí un elemento del $Ker(f)$):

Supongamos que v y w (elementos de V) están en la misma clase:
$v+Ker(f) = w+Ker(f) \Rightarrow v-w \in Ker(f)$ (Por lo que se ha explicado antes)

Como $v-w \in Ker f$, $f(v-w)=0$, y como f es una aplicación lineal, $f(v-w)=0 \Rightarrow f(v)-f(w)=0 \Rightarrow f(v)=f(w)$

Por lo tanto, $\bar{f}$ está bien definida.

- Demostrar que $\bar{f}$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Un isomorfismo es una aplicación lineal biyectiva, así que primero hemos de probar que es una aplicación lineal. Para ello, por lo visto en teoría, hemos de probar que dados dos escalares cualesquiera y dos clases de $V/Ker(f)$, se tiene lo siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} \forall a,b \in K \\ \forall v+Ker(f), w+Ker(f) \in V/Ker(f) \end{array}\right\} \bar{f}(a(v+Ker(f))+b(w+Ker(f))) = a\bar{f}(v+Ker(f)) + b\bar{f}(w+Ker(f))$$

Por la definición de la suma de clases

DEMOSTRACIÓN

$$\bar{f}(a(v+Ker(f))+b(w+Ker(f))) \overset{\swarrow}{=} \bar{f}((av+bw)+Ker(f)) =$$

$$= f(av+bw) = af(v)+bf(w) = a\bar{f}(v+Ker(f))+b\bar{f}(w+Ker(f))$$

Aplicamos que f es lineal

Por la propia definición de $\bar{f}$

Ya que hemos demostrado que $\bar{f}$ es lineal, veamos primero que es monomorfismo y luego que es epimorfismo:

DEMOSTRACIÓN MONOMORFISMO

Para que $\bar{f}$ sea monomorfismo, debe ser que $Ker(\bar{f}) = \{0+Ker(f)\}$ (la clase del 0). Veamos si esto es cierto:

$Ker(\bar{f}) = \{v+Ker(f) \in V/Ker(f) : \bar{f}(v+Ker(f)) = 0\}$

Como sabemos que $\bar{f}(v+Ker(f)) = f(v)$, entonces si $\bar{f}(v+Ker(f)) = f(v) = 0$, por lo que:

$Ker(\bar{f}) = \{Ker(f)\} = \{0+Ker(f)\}$

DEMOSTRACIÓN EPIMORFISMO

Esta parte es clara, ya que $\forall v' \in Im(f)$ debe existir algún $v \in V$ tal que $f(v) = v'$. Por lo tanto, por cómo se ha definido $\bar{f}$ tenemos que $\bar{f}(v+Ker(f)) = v'$, lo cual nos hace concluir que $\bar{f}$ es sobreyectiva (epimorfismo).

En conclusión, como $\bar{f}$ es una aplicación lineal biyectiva, $\bar{f}$ es un isomorfismo.