CÁLCULO II

(1º del Doble Grado en Matemáticas e Informática)

Granada, 3 de mayo de 2021

1. (1 punto). Demostrar que $|\cos x - \cos y| \leq |x - y|$, para cada $x, y \in \mathbb{R}$.

2. (2 puntos). Sea $a > 0$.

(i) Determinar (en función del parámetro a) la imagen de la función $f_a : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f_a(x) := x \ln a - a \ln x$, para cada $x \in \mathbb{R}^+$.

(ii) Determinar los valores de $a > 0$ que son tales que $x \ln a \geq a \ln x$, para cada $x \in \mathbb{R}^+$.

3. (2.5 puntos). Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = 4 - x^2$.

(i) Estudiar la concavidad de f. ¿Posee algún punto de inflexión? Justifíquese la respuesta.

(ii) Determinar el punto $(a, f(a))$ de la gráfica de $f(x) = 4 - x^2$ cuya recta tangente corta en el primer cuadrante tanto al eje OX como al eje OY, determinando un triángulo de área mínima.

4. (3 puntos).

(i) Calcular el polinomio de Taylor de orden 10 centrado en el origen de las funciones $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$.

(ii) Determinar $P_{3,0}^{\operatorname{sen}(x)}(\frac{\pi}{18})$ y $P_{3,0}^{\cos(x)}(\frac{\pi}{18})$ y dar una estimación del error cometido al aproximar $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{18})$ y $\cos(\frac{\pi}{18})$ por dichos valores, respectivamente (esto es una aproximación del seno y el coseno del ángulo de 10^0).

(iii) Haciendo uso del polinomio de Taylor calcular $\lim_{x\to 0} \frac{(2x-\operatorname{sen}(x))(\cos(x)-1)}{x^3}$.

5. (1.5 puntos). Calcular

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x(1+x)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2}\right).$$