Análisis Matemático II

Tema 7: Integración de funciones reales

Versión definitiva de la integral

Funciones integrables y su integral

Seguimos trabajando en un conjunto medible $\Omega \subset \mathbb{R}^N$

$f \in \mathcal{L}(\Omega)$ es integrable en un conjunto medible $E \subset \Omega$ cuando: $\displaystyle\int_E |f| < \infty$

Se tiene entonces que $\displaystyle\int_E f^+ < \infty$ y $\displaystyle\int_E f^- < \infty$

y se define la integral de f sobre E como el número real dado por

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^-$$

- Cuando $f \geqslant 0$, esta integral coincide con la que conocíamos
- f es integrable en E si y sólo si lo es $f\big|_E$, y las integrales coinciden

Observaciones inmediatas sobre de integral

Localización

$f \in \mathcal{L}(\Omega)$ es integrable en un conjunto medible $E \subset \Omega$

si, y sólo si, $\chi_E f$ es integrable en Ω, en cuyo caso se tiene:

$$\int_E f = \int_\Omega \chi_E f$$

El conjunto de las funciones integrables

Denotamos por $\mathcal{L}_1(\Omega)$ al conjunto de las funciones integrables en Ω, es decir,

$$\mathcal{L}_1(\Omega) = \left\{ f \in \mathcal{L}(\Omega) \ : \ \int_\Omega |f| < \infty \right\}$$

Los elementos de $\mathcal{L}_1(\Omega)$ son las funciones integrables

Propiedades clave de la integral

Linealidad

$\mathcal{L}_1(\Omega)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(\Omega)$

y definiendo: $I(f) = \int_\Omega f \quad \forall f \in \mathcal{L}_1(\Omega)$,

se obtiene una aplicación lineal $I : \mathcal{L}_1(\Omega) \to \mathbb{R}$

Positividad

$$h \in \mathcal{L}_1(\Omega), \quad h \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad \int_\Omega h \geqslant 0$$

- $f, g \in \mathcal{L}_1(\Omega), \quad f \leqslant g \quad \Longrightarrow \quad \int_\Omega f \leqslant \int_\Omega g$
- $\left| \int_\Omega f \right| \leqslant \int_\Omega |f| \quad \forall f \in \mathcal{L}_1(\Omega)$

Se dice que la integral es un funcional lineal positivo en $\mathcal{L}_1(\Omega)$

Relación de la integral con la convergencia puntual

La convergencia puntual no preserva la integrabilidad

Para $n \in \mathbb{N}$ sea f_n la función característica de $[-n\,,\,n]^N$. Entonces:

$f_n \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^N)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y $\{f_n\}$ converge puntualmente en $\mathbb{R}^N$

a la función $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$

pero f no es integrable en $\mathbb{R}^N$

En general, no podemos permutar límite e integral

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $g_n = (2n)^{-N} f_n \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^N)$,

donde $\{f_n\}$ es la sucesión del ejemplo anterior

Ahora $\{g_n\}$ converge uniformemente a cero en $\mathbb{R}^N$

pero $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} g_n = 1$

El segundo teorema de convergencia

Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones reales medibles,

que converge puntualmente en Ω a una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

Supongamos que existe una función integrable $g : \Omega \to \mathbb{R}_0^+$ tal que:

$$\big| f_n(x) \big| \leqslant g(x) \quad \forall x \in \Omega, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Entonces f es integrable y se verifica que

$$\lim_{n \to \infty} \int_\Omega |f_n - f| = 0, \quad \text{de donde:} \quad \int_\Omega f = \lim_{n \to \infty} \int_\Omega f_n$$

Un corolario de los dos teoremas de convergencia

Teorema de la convergencia absoluta

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones integrables tal que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega |f_n| < \infty$.

Entonces existe un conjunto $E \subset \Omega$, con $\lambda(\Omega \setminus E) = 0$ tal que:

la serie $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge absolutamente en E.

Además, definiendo $\displaystyle f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_E(x) f_n(x)$ para todo $x \in \Omega$,

Se tiene que $f \in \mathcal{L}_1(\Omega)$ con $\displaystyle\int_\Omega f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega f_n$.

La integral como función del conjunto en el que se integra

Notación

Fijada $f \in \mathcal{L}_1(\Omega)$, consideramos la función $\Phi_f : \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\Phi_f(E) = \int_E f \quad \forall E \in \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(\Omega)$$

Aditividad

La función Φ_f es σ-aditiva, es decir:

Si $E = \biguplus_{n=1}^{\infty} E_n$ con $E_n \in \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(\Omega) \;\; \forall n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\int_E f = \Phi_f(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_f(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f$$

Continuidad creciente y decreciente

La función Φ_f es crecientemente y decrecientemente continua, es decir:

si $A_n \in \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(\Omega) \;\; \forall n \in \mathbb{N}$, y $\{A_n\} \nearrow A$ o bien $\{A_n\} \searrow A$, entonces:

$$\int_A f = \Phi_f(A) = \lim_{n \to \infty} \Phi_f(A_n) = \lim_{n \to \infty} \int_{A_n} f$$

Continuidad absoluta de la integral

Continuidad absoluta

Para $f \in \mathcal{L}_1(\Omega)$, la función Φ_f es absolutamente continua

en el siguiente sentido: para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$E \in \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(\Omega), \quad \lambda(E) < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \left| \int_E f \right| \leqslant \int_E |f| < \varepsilon$$

Versión para sucesiones

$$f \in \mathcal{L}_1(\Omega), \quad E_n \in \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(\Omega) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad E \in \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(\Omega)$$

$$\{\lambda(E \setminus E_n) + \lambda(E_n \setminus E)\} \to 0 \quad \Longrightarrow \quad \int_E f = \lim_{n \to \infty} \int_{E_n} f$$

Integral sobre conjuntos de medida finita (I)

Integrabilidad de las funciones acotadas

Si $\lambda(\Omega) < \infty$ y $f \in \mathcal{L}(\Omega)$ verifica que $|f(x)| \leqslant M < \infty \quad \forall x \in \Omega$,

entonces $f \in \mathcal{L}_(\Omega)$, ya que $\displaystyle\int_\Omega |f| \leqslant M\,\lambda(\Omega)$

Teorema de la convergencia acotada

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones reales medibles,

que converge puntualmente en Ω a una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

Supongamos que $\lambda(\Omega) < \infty$ y que $|f_n(x)| \leqslant M < \infty \quad \forall x \in \Omega, \ \forall n \in \mathbb{N}$

Entonces $f \in \mathcal{L}(\Omega)$ es integrable y se tiene $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f| = 0$,

de donde $$\int_\Omega f = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n$$

Integral sobre conjuntos de medida finita (II)

Convergencia uniforme

Supongamos que $\lambda(\Omega) < \infty$

y sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones integrables en Ω,

que converge uniformemente en Ω a una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

Entonces $f \in \mathcal{L}_1(\Omega)$ y se tiene $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f| = 0$,

de donde $\displaystyle\int_\Omega f = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n$