Ejercicio 1.13: Calcular la imagen de la función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^{1/x}$.

Claramente, si $x > 0 \Rightarrow x^y > 0 \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad Im(f) \subseteq \mathbb{R}^+$.

Buscamos los puntos extremos de f con su derivada:

si $f(x) = x^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{1}{x} \log(x)\right) \Rightarrow f'(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\log(x)\right) \cdot \dfrac{1 - 1 \cdot \log(x)}{x^2} =$

$$= x^{\frac{1}{x}-2}(1 - \log x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^{\frac{1}{x}-2} = 0 & \text{no tiene solución} \\ 1 - \log x = 0 \Rightarrow e^{\log x} = \underline{e^1 = x} \end{cases}$$

$$\text{Como } \begin{cases} f'(2) = \dfrac{1}{\sqrt{8}}(1 - \log 2), \quad \dfrac{1}{\sqrt{8}} > 0 \text{ y } 1 - \log 2 > 0 \text{ (porque } e > 2) \\ f'(3) = \dfrac{1}{\sqrt{3^5}}(1 - \log 3), \quad \dfrac{1}{\sqrt{3^5}} > 0 \text{ y } 1 - \log 3 < 0 \text{ (porque } e < 3) \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ en e hay un máximo absoluto por ser la única solución de $f'(x) = 0$.

Luego $Im(f) \subseteq \left]0, \sqrt[e]{e}\right] \subseteq \mathbb{R}^+$.

Por otro lado, como $\lim_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}\log x} = \frac{1}{e^\infty} = 0$, concluimos

que $\boxed{Im(f) = \left]0, \sqrt[e]{e}\right]}$