Análisis Matemático II

Tema 8: Espacios de Lebesgue

Desigualdad de Young

Motivación

Para $\Omega \in \mathcal{M}$ y $f, g \in \mathcal{L}(\Omega)$ nos preguntamos si $f\,g$ es integrable.

Para $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ se tiene: $a\,b \leqslant \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{b^2}{2}$

luego si f^2 y g^2 son integrables, entonces $f\,g$ también lo es.

Pretendemos sustituir 2 por otros exponentes

Exponente conjugado

Para $p \in \mathbb{R}$ con $p > 1$, su exponente conjugado p^* viene dado por

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$$

Es claro que $p^* > 1$ y $\left(p^*\right)^* = p$

Desigualdad de Young

Para $p \in \mathbb{R}$ con $p > 1$ y $a, b \in \mathbb{R}_0^+$, se tiene:

$$a\,b \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p^*}}{p^*}$$

Desigualdad de Hölder

Funciones p-integrables

Para $\Omega \in \mathcal{M}$ y $p \in \mathbb{R}$ con $p > 1$, definimos:

$$\mathcal{L}_p(\Omega) = \left\{ f \in \mathcal{L}(\Omega) \ : \ \int_\Omega |f|^p < \infty \right\}$$

y los elementos de $\mathcal{L}_p(\Omega)$ son las funciones p-integrables

Desigualdad integral de Hölder

Dado $p \in \mathbb{R}$ con $p > 1$, si $f \in \mathcal{L}_p(\Omega)$ y $g \in \mathcal{L}_{p^*}(\Omega)$,

entonces $f\,g \in \mathcal{L}_1(\Omega)$ con: $$\int_\Omega |f\,g| \leqslant \left(\int_\Omega |f|^p \right)^{1/p} \left(\int_\Omega |g|^{p^*} \right)^{1/p^*}$$

Desigualdad de Hölder para sumas finitas

Para $p \in \mathbb{R}$ con $p > 1$, $n \in \mathbb{N}$ y $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}_0^+$, se tiene:

$$\sum_{k=1}^n a_k\, b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^n a^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n b^{p^*} \right)^{1/p^*}$$

Desigualdad de Minkowski

Una propiedad del conjunto $\mathcal{L}_p(\Omega)$

Para $\Omega \in \mathcal{M}$ y $p \in \mathbb{R}$ con $p > 1$ se tiene que

$\mathcal{L}_p(\Omega)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(\Omega)$

Desigualdad integral de Minkowski

Para $p \in \mathbb{R}$ con $p \geqslant 1$ y $f, g \in \mathcal{L}_p(\Omega)$, se tiene:

$$\left(\int_\Omega |f+g|^p \right)^{1/p} \leqslant \left(\int_\Omega |f|^p \right)^{1/p} + \left(\int_\Omega |g|^p \right)^{1/p}$$

Desigualdad de Minkowski para sumas finitas

Para $p \in \mathbb{R}$ con $p \geqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$ y $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}_0^+$, se tiene:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p \right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} b^p \right)^{1/p}$$

Hacia la definición de los espacios de Lebesgue

En busca de un espacio normado

En lo que sigue, fijamos $\Omega \in \mathcal{M}$ y $p \in \mathbb{R}$ con $p \geqslant 1$. Definimos:

$$\varphi_p(f) = \left(\int_\Omega |f|^p \right)^{1/p} \qquad \forall\, f \in \mathcal{L}_p(\Omega)$$

La función $\varphi_p : \mathcal{L}_p(\Omega) \to \mathbb{R}_0^+$ es una seminorma, es decir, verifica:

- $\varphi_p\big(f+g\big) \leqslant \varphi_p\big(f\big) + \varphi_p\big(g\big) \quad \forall\, f,g \in \mathcal{L}_p(\Omega)$
- $\varphi_p\big(\alpha f\big) = |\alpha|\, \varphi_p\big(f\big) \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ \forall\, f \in \mathcal{L}_p(\Omega)$

Para $f \in \mathcal{L}_p(\Omega)$, se tiene: $\varphi_p\big(f\big) = 0 \iff f = 0$ c.p.d.

$\mathcal{N}(\Omega)$ será el conjunto de las funciones de Ω en $\mathbb{R}$ que se anulan c.p.d.

Una observación útil

Toda función $f \in \mathcal{N}(\Omega)$ es medible,

luego $\mathcal{N}(\Omega)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}_p(\Omega)$

Definición y complitud de los espacios de Lebesgue

Paso a cociente para obtener un espacio normado

Para $\Omega \in \mathcal{M}$ y $p \in \mathbb{R}$ con $p \geqslant 1$, el espacio de Lebesgue $L_p(\Omega)$

es por definición el espacio vectorial cociente

$$L_p(\Omega) = \mathcal{L}_p(\Omega) / \mathcal{N}(\Omega) = \left\{ f + \mathcal{N}(\Omega) \ : \ f \in \mathcal{L}_p(\Omega) \right\}$$

En $L_p(\Omega)$ se considera siempre la norma $\|\cdot\|_p$ definida por:

$$\left\| f + \mathcal{N}(\Omega) \right\|_p = \varphi_p(f) = \left(\int_\Omega |f|^p \right)^{1/p} \quad \forall f \in \mathcal{L}_p(\Omega)$$

Para $f \in \mathcal{L}_p(\Omega)$ abreviamos escribiendo $\widetilde{f} = f + \mathcal{N}(\Omega)$

Teorema de Riesz-Fischer

Para todo $\Omega \in \mathcal{M}$ y todo $p \in \mathbb{R}$ con $p \geqslant 1$, el espacio normado $L_p(\Omega)$

es completo, es decir, es un espacio de Banach

Convergencia en los espacios de Lebesgue

Convergencia en $L_p(\Omega)$ y convergencia c.p.d.

Dadas $f \in \mathcal{L}_p(\Omega)$ y $f_n \in \mathcal{L}_p(\Omega)$ para todo $n \in \mathbb{N}$,

supongamos que $\left\{ \widetilde{f_n} \right\}$ converge a $\widetilde{f}$ en $L_p(\Omega)$.

Entonces $\{f_n\}$ tiene una sucesión parcial $\{f_{\sigma(n)}\}$ tal que:

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_{\sigma(n)}(x) \quad \text{p.c.t. } x \in \Omega$$

Funciones simples integrables

Funciones simples

Para $\Omega \in \mathcal{M}$, decimos que $s : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función simple en Ω cuando s es medible y $s(\Omega)$ es un conjunto finito

Integrabilidad de las funciones simples

Para una función simple $s : \Omega \to \mathbb{R}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- Existe $p \in \mathbb{R}$ con $p \geqslant 1$ tal que $s \in \mathcal{L}_p(\Omega)$
- s es la restricción a Ω de una combinación lineal de funciones características de subconjuntos medibles de Ω, con medida finita:
$$s(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{A_k}(x) \quad \forall x \in \Omega$$
donde $n \in \mathbb{N}$ y, para $k \in \Delta_n$, se tiene $\alpha_k \in \mathbb{R}$
y $A_k \in \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(\Omega)$ con $\lambda(A_k) < \infty$
- Se tiene $s \in \mathcal{L}_p(\Omega)$, para todo $p \in \mathbb{R}$ con $p \geqslant 1$

Aproximación por funciones simples

Funciones simples integrables

Una función simple integrable en Ω

es una función simple $s : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $s \in \mathcal{L}_1(\Omega)$,

con lo que s verifica las afirmaciones equivalentes del resultado anterior

Denotamos por $\mathcal{S}(\Omega)$ al conjunto de las funciones simples integrables en Ω

$\mathcal{S}(\Omega)$ es subespacio vectorial de $\mathcal{L}_p(\Omega)$ para todo $p \in \mathbb{R}$ con $p \geqslant 1$

En el cociente $S(\Omega) = \left\{ \widetilde{s} : s \in \mathcal{S}(\Omega) \right\}$ es subespacio vectorial de $L_p(\Omega)$

Primer teorema de densidad

Dados $\Omega \in \mathcal{M}$ y $p \in \mathbb{R}$ con $p \geqslant 1$, para cada $f \in \mathcal{L}_p(\Omega)$,

existe una sucesión $\{s_n\}$ de funciones simples integrables en Ω,

que converge puntualmente a f en Ω y verifica:

$$\lim_{n \to \infty} \int_\Omega \left| f - s_n \right|^p = 0$$

Como consecuencia, $S(\Omega)$ es denso en $L_p(\Omega)$

$\{f_n\}$ funciones medibles positivas $f_n: \Omega \to [0,\infty]$

Se cumple que $\displaystyle\int_\Omega \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega f_n$

s,t simples positivas

$$s = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \cdot \chi_{A_k} \qquad \alpha_1,\dots,\alpha_p \in \mathbb{R}_0^+ \quad A_1,\dots,A_k \in \mathcal{M}$$

$$t = \sum_{j=1}^{q} \beta_j \chi_{B_j} \qquad \beta_1,\dots,\beta_q \in \mathbb{R}_0^+ \quad B_1,\dots,B_j \in \mathcal{M}$$

$$\Omega = \biguplus_{k=1}^{p}\left(\biguplus_{j=1}^{q}(A_k \cap B_j)\right)$$

Por la aditividad de la integral de $s+t$:

$$\int_\Omega s+t = \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\int_{A_k\cap B_j} s+t = \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}(\alpha_k+\beta_j)\lambda(A_k\cap B_j)$$

Aditividad de la integral de s: $\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\int_{A_k\cap B_j} s = \sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{p}\int_{A_k\cap B_j} s = \sum_{j=1}^{q}\int_{B_j} s = \int_\Omega s$

" " t: $\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\int_{A_k\cap B_j} t = \sum_{k=1}^{p}\int_{A_k} t = \int_\Omega t$

Lo unimos con lo de antes y: $\displaystyle\int_\Omega s+t = \int_\Omega s + \int_\Omega t$

f,g medibles positivas. Sucesiones de f. simp. positivas $\{s_n\}\nearrow f \quad \{t_n\}\nearrow g \Rightarrow \{s_n+t_n\}\nearrow f+g$

Usando el teorema de la conv. monótona y usando lo de antes:

$$\int_\Omega f+g = \int_\Omega \lim_{n\to\infty}(s_n+t_n) \underset{\text{Tma}}{=} \lim_{n\to\infty}\int_\Omega (s_n+t_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\int_\Omega s_n + \int_\Omega t_n\right) \underset{\text{Tma}}{=} \int_\Omega f + \int_\Omega g$$

Inducción $\to$ Cierto para una suma finita de funciones medibles positivas.

$\{f_n\}$ sucesión arbitraria de funciones simples positivas:

$$\int_\Omega \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \int_\Omega \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f_k \underset{\text{Tma}}{=} \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \sum_{k=1}^{n} f_k \underset{\text{Cierto para suma finita}}{=} \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_\Omega f_k = \sum_{n=1}^{\infty}\int_\Omega f_n$$

f medible positiva

$$\varphi(E) = \int_E f \qquad \forall E \in \mathcal{M}\cap\mathcal{P}(\Omega)$$

$\varphi: \mathcal{M}\cap\mathcal{P}(\Omega) \to [0,\infty] \qquad \varphi(\emptyset)=0$, es σ-aditiva y es medida en Ω.

$E \in \mathcal{M}\cap\mathcal{P}(\Omega)$

$E = \displaystyle\biguplus_{n=1}^{\infty} E_n$ con $E_n \in \mathcal{P}(\Omega)\ \forall n\in\mathbb{N}$

$$\chi_E = \sum_{n=1}^{\infty}\chi_{E_n} \Rightarrow \chi_E \cdot f = \sum_{n=1}^{\infty}\chi_{E_n}\cdot f$$

$E_n \in \mathcal{M}$ $\{\chi_{E_n} f\}$ sucesión de funciones medibles positivas, luego podemos aplicar el resultado anterior:

$$\varphi(E) = \varphi\left(\biguplus_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \int_E f = \int_\Omega \chi_E\cdot f = \int_\Omega \sum_{n=1}^{\infty}\chi_{E_n} f = \sum_{n=1}^{\infty}\int_\Omega \chi_{E_n} f =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f = \sum_{n=1}^{\infty}\varphi(E_n) \longrightarrow \sigma\text{-aditiva}$$

Funciones escalonadas

Funciones escalonadas

Una función escalonada es una combinación lineal de funciones características de intervalos acotados, es decir, una función $h : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ de la forma:

$$h = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, \chi_{J_k} \quad \text{con} \quad n \in \mathbb{N}, \;\; \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}, \;\; J_1, \ldots, J_n \in \mathcal{J}$$

Para $\Omega \in \mathcal{M}$ llamamos $\mathcal{E}(\Omega)$ al conjunto de todas las restricciones a Ω de funciones escalonadas

Para $p \in \mathbb{R}$ con $p \geqslant 1$, $\mathcal{E}(\Omega)$ es subespacio vectorial de $\mathcal{L}_p(\Omega)$

En el cociente $E(\Omega) = \left\{ \widetilde{g} : g \in \mathcal{E}(\Omega) \right\}$ es subespacio vectorial de $L_p(\Omega)$

Una observación sencilla

Si Y es un subespacio vectorial de un espacio normado X, entonces el cierre de Y también es subespacio vectorial de X

Aproximación por funciones escalonadas

Densidad de las funciones escalonadas

Para $\Omega \in \mathcal{M}$ y $p \in \mathbb{R}$ con $p \geqslant 1$, el conjunto $E(\Omega)$

de las clases de equivalencia que contienen una función escalonada,

es denso en $L_p(\Omega)$

Como consecuencia, para cada $f \in \mathcal{L}_p(\Omega)$

existe una sucesión $\{g_n\}$ de funciones escalonadas que verifica:

$$\{g_n(x)\} \to f(x) \ \text{ p.c.t. } x \in \Omega \quad \text{y} \quad \lim_{n \to \infty} \int_\Omega \left| f - g_n \right|^p = 0$$

Funciones continuas de soporte compacto

Funciones continuas de soporte compacto

En lo que sigue Ω es abierto de $\mathbb{R}^N$

Se define el soporte de una función $f:\Omega\to\mathbb{R}$ como:

$$\text{sop}\, f = \overline{\{x\in\Omega : f(x)\neq 0\}} \subset \Omega \quad \text{(cierre relativo a } \Omega\text{)}$$

Si f es continua y $\text{sop}\, f$ es un subconjunto compacto de Ω, decimos que f es una función continua de soporte compacto en Ω

Denotamos por $C_c(\Omega)$ al conjunto de tales funciones

Para $p\in\mathbb{R}$ con $p\geqslant 1$, $C_c(\Omega)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}_p(\Omega)$

La aplicación cociente $f\mapsto\widetilde{f}$ es inyectiva en $C_c(\Omega)$,

luego identificando $C_c(\Omega)$ con su imagen, tenemos $C_c(\Omega)\subset L_p(\Omega)$

Lema de Uryshon (para espacios métricos)

Si A_0 y A_1 son cerrados, no vacíos y disjuntos de un espacio métrico X, existe una función continua $h: X\to[0,1]$, tal que

$$h(x)=0 \quad \forall x\in A_0 \qquad \text{y} \qquad h(x)=1 \quad \forall x\in A_1$$

Aproximación por funciones continuas de soporte compacto

Abundancia de funciones continuas de soporte compacto

Si U es un abierto de $\mathbb{R}^N$ y K un subconjunto compacto no vacío de U, entonces existe una función $h \in C_c(\mathbb{R}^N)$ verificando que

$$h(\mathbb{R}^N) \subset [0,1], \quad h(x) = 1 \ \ \forall x \in K, \quad \operatorname{sop} h \subset U$$

Densidad de las funciones continuas de soporte compacto

Si Ω es abierto de $\mathbb{R}^N$, y $p \in \mathbb{R}$ con $p \geqslant 1$,
entonces $C_c(\Omega)$ es denso en $L_p(\Omega)$.

Como consecuencia, para cada $f \in \mathcal{L}_p(\Omega)$,
existe una sucesión $\{g_n\}$ en $C_c(\Omega)$ tal que

$$\{g_n(x)\} \to f(x) \ \text{ p.c.t. } x \in \Omega \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \left| f - g_n \right|^p = 0$$

La integral de Riemann

Definición de la integral de Riemann

Trabajamos en un intervalo compacto $I \subset \mathbb{R}^N$ con $I^\circ \neq \emptyset$

Una subdivisión de I es una familia finita P de intervalos compactos, cuya unión es I, y cuyos interiores son dos a dos disjuntos

Llamamos $\delta(P) \in \mathbb{R}^+$ al máximo de los diámetros de los intervalos de P:

$$\delta(P) = \max\left\{\text{diam}\, J : J \in P\right\} = \max\left\{ \max\{\|x-y\| : x,y \in J\} : J \in P\right\}$$

Sea ahora $f : I \to \mathbb{R}$ una función acotada: $\sup\left\{|f(x) : x \in I\right\} < \infty$

La suma inferior y la suma superior de f para cada subdivisión P son:

$$I(f,P) = \sum_{J \in P} \Big(\inf f(J)\Big)\, \lambda(J) \quad \text{y} \quad S(f,P) = \sum_{J \in P} \Big(\sup f(J)\Big)\, \lambda(J)$$

La función f es Riemann-integrable, cuando existe $\mathcal{R}(f) \in \mathbb{R}$ verificando que para toda sucesión $\{P_n\}$ de subdivisiones de I, con $\{\delta(P_n)\} \to 0$, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} I(f,P_n) = \mathcal{R}(f) = \lim_{n\to\infty} S(f,P_n)$$

Entonces $\mathcal{R}(f)$ es la integral de Riemann de f

Caracterización de las funciones Riemann-integrables

Un teorema de Lebesgue

Sea I un intervalo compacto en $\mathbb{R}^N$ con interior no vacío,

$f: I \to \mathbb{R}$ una función acotada

y $D(f)$ el conjunto de las discontinuidades de f, es decir,

el conjunto de puntos de I en los que f no es continua.

Entonces $D(f) \in \mathcal{M}$ y las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) f es Riemann-integrable

(2) $\lambda\big(D(f)\big) = 0$

Si se cumplen (1) y (2), entonces $f \in \mathcal{L}_1(I)$, con

$$\int_I f = \mathcal{R}(f)$$