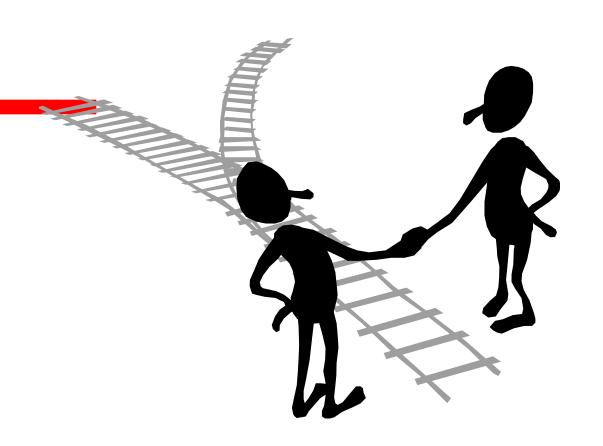
Algoritmica Capítulo 2: Algoritmos Divide y Vencerás Tema 4: Método General DV

- El método general
- Determinación del umbral

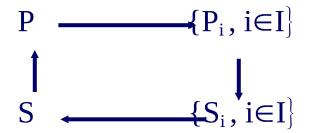
Divide y Vencerás





Divide y Vencerás

- **Dividir** el problema (P) en varios subproblemas (P_i)
- Vencer los subproblemas (resolverlos)
- Combinar las soluciones (S_i) de los subproblemas para obtener la solución (S) del problema inicial



- Este enfoque, sobre todo cuando se utiliza recursivamente, a menudo proporciona soluciones eficientes para problemas en los que los subproblemas son **versiones reducidas** y **resolubles** del problema ori ginal.
- Las ecuaciones recurrentes serán naturales en este método



Recordatorio de recurrencias

• Calcular el orden de T(n) si n es potencia de 2 y $T(n) = 3T(n/2) + dn (d es constante, n \ge 1).$

Obtenemos sucesivamente,

$$T(2^{k}) = 3T(2^{k-1}) + d2^{k}$$

 $t_{k} = 3t_{k-1} + d2^{k}$

Ecuación característica: (x-3)(x-2) = 0, y así, $t_k = c_1 3^k + c_2 2^k$ $T(n) = c_1 3^{lgn} + c_2 n$

• y como $a^{\lg b} = b^{\lg a}$,

$$\mathbf{T}(\mathbf{n}) = \mathbf{c}_1 \, \mathbf{n}^{\lg 3} + \mathbf{c}_2 \, \mathbf{n}$$



Divide y Vencerás

- La eficacia de la técnica DV dependerá de varios factores
- Se trata de un proceso complejo que requiere muchas comprobaciones:
 - No sabemos si el problema P podrá descomponerse.
 - Los P_i tendrán la misma naturaleza entre ellos y con P; han de ser razonablemente pequeños en número; no pueden ser muy numerosos; cada P_i debe ser más sencillo de resolver que P.
 - Hay que esperar que tenga sentido integrar las S_i para obtener la solución final S.
 - Debemos esperar que S se corresponda con la solución del problema P.
- Aplicando este procedimiento debemos obtener un algoritmo que sea mejor que otro algoritmo que resuelva P sin esta técnica en peor tiempo.



Divide y Vencerás, justificación

 Supongamos un problema P, de tamaño n, que sabemos puede resolverse con un algoritmo (básico) A

$$t_A(n) \leq cn^2$$
.

- Dividimos P en 3 subproblemas de tamaños n/2, siendo cada uno de ellos del mismo tipo que A, y consumiendo un tiempo lineal la combinación de sus soluciones: $t(n) \le dn$
- Tenemos un nuevo algoritmo B, Divide y Vencerás, que consumirá un tiempo

$$t_B(n) = 3 t_A(n/2) + t(n) \le 3 t_A(n/2) + dn \le$$

 $\le (3c/4) n^2 + dn.$

 B tiene un tiempo de ejecución mejor que el algoritmo A, ya que disminuye la constante oculta



Divide y Vencerás, justificación

 Pero si cada subproblema se resuelve de nuevo con Divide y Vencerás, podemos hacer un tercer algoritmo C recursivo que tendría un tiempo:

$$t_{\rm C}(n) = 3 t_{\rm C}(n/2) + t(n)$$

de forma que:

$$t_C(n) = t_A(n)$$
 $\sin n \le n_0$
= $3 t_C(n/2) + t(n)$ $\sin n \ge n_0$

$$\mathbf{t}_{\mathbf{C}} = \mathbf{c}_1 \, \mathbf{n}^{\lg 3} + \mathbf{c}_2 \, \mathbf{n}$$



Divide y Vencerás, justificación

 Pero si cada subproblema se resuelve de nuevo con Divide y Vencerás, podemos hacer un tercer algoritmo C recursivo que tendría un tiempo:

$$t_{\rm C}(n) = 3 t_{\rm C}(n/2) + t(n)$$

de forma que:

$$t_{C}(n) = t_{A}(n)$$
 $\sin n \le n_{0}$
= $3 t_{C}(n/2) + t(n) \sin n \ge n_{0}$.

- t_C (n) es mejor en eficiencia que los algoritmos A y B.
- El dividir el problema P en una serie de subproblemas, no significa que dichos subproblemas sean disjuntos. La división de P es exhaustiva pero no excluyente.
- Al valor n₀ se le denomina umbral y es fundamental para que funcione bien la técnica



Algoritmo Divide y Vencerás

Funcion DV(P)

```
Si P es suficientemente pequeño o simple entonces devolver basico (P).

Descomponer P en subcasos P(1), P(2), ..., P(k) mas pequeños para i = 1 hasta k hacer S(i) = DV(P(i))

recombinar las S(i) en S (solucion de P)

Devolver (S)
```

- Cuando k = 1 DV se llama simplificación.
- No hay ninguna regla para hallar k, sólo basándose en la experiencia sabemos que los DV con pocos subproblemas de tamaños parecidos entre ellos funcionan mejor.
- En función del valor del umbral n₀, obtendremos mejores o peores resultados. Su determinación es clave.



Análisis de algoritmos DV

- Cuando un algoritmo contiene una llamada recursiva a si mismo, generalmente su tiempo de ejecución puede describirse por una rec urrencia que da el tiempo de ejecución para un caso de tamaño n en función de inputs de menor tamaño.
- En el caso de DV nos encontraremos recurrencias como:

$$T(n) = \begin{cases} t(n) & \text{si } n \le c \\ aT(n/b) + D(n) + C(n) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde a es el numero de subproblemas, n/b el tamaño de estos,
 D(n) el tiempo de dividir el problema en los sub-problemas y C(n) el tiempo de combinacion de las soluciones de los subproblemas



Ejemplo: Las Torres de Hanoi

- Problema: Mover los n discos del tubo A al B usando el tubo C como tubo intermedio temporal
- Enfoque Divide y Vencerás:
 - Dos subproblemas de tamaño n-1:
 - (1) Mover los n-1 discos mas pequeños de A a C
 - (*) Mover el nº disco mas pequeño de A a B es fácil
 - (2) Mover los n-1 discos mas pequeños de C a B
 - El movimiento de los n-1 discos mas pequeños se hace con la aplicación recursiva del método



- Es difícil hablar del umbral n₀ si no tratamos con implementaciones, ya que gracias a ellas conocemos las constantes ocultas que nos permitirán afinar el cálculo de dicho valor.
- El umbral no es único, pero si lo es en cada implementación.
- De partida no hay restricciones sobre el valor que puede tomar n₀,
 por tanto variará entre cero e infinito
 - Un umbral de valor infinito supone no aplicar nunca DV de forma efectiva, porque estariamos resolviendo con el algoritmo básico siempre.
 - Si n₀ = 1, entonces estaríamos en el caso opuesto, ya que el algoritmo básico sólo actúa una vez, y se aplica la recursividad continuamente



Supongamos el algoritmo anterior, en el que

$$t_{C}(n) = t_{A}(n) \qquad \text{si } n \leq n_{0}$$
$$= 3 t_{C}(n/2) + t(n) \qquad \text{si } n \geq n_{0}$$

- Una implementación concreta $t_A(n) = n^2 y t (n) = 16n (ms)$, y un caso de tamaño n = 1024.
- Las dos posibilidades extremas nos llevan a

• Si
$$n_0 = 1$$
, $t_C(n) = 32 \text{ m y } 34\text{sg}$

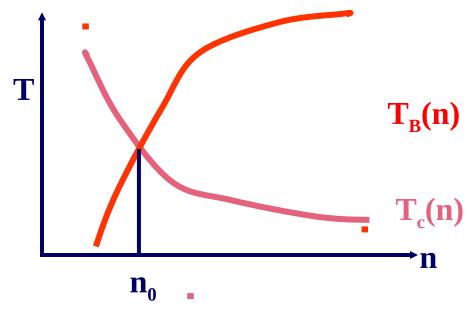
- Si $n_0 = \infty$, $t_C(n) = 17 \text{ m y } 40 \text{ sg}$
- Si puede haber tan grandes diferencias, ¿como podremos determinar el valor óptimo del umbral?
- Dos métodos: Experimental y Teórico



- Método experimental
- Implementamos el algoritmo básico y el algoritmo DV
- Resolvemos para distintos valores de n con ambos algoritmos

 Hay que esperar que conforme n aumente, el tiempo del algoritmo básico vaya aumentando asintóticamente, y el del DV

disminuyendo.





Método teórico

 La idea del enfoque experimental se traduce teoricamente a lo siguiente

$$t_{C}(n) = t_{A}(n) si n \le n_{0}$$
$$= 3 t_{C}(n/2) + t (n) si n \ge n_{0}$$

Cuando coinciden los tiempos de los dos algoritmos

$$t_A(n) = 3 t_A(n/2) + t(n); t_C(n) = t_A(n) y n = n_0$$

• Para una implementación concreta (por ejemplo, la anterior, $t_A(n) = n^2 y t(n) = 16n (ms) y n = 1024)$

$$n^2 = \frac{34}{4} n^2 + 16 n \rightarrow n = \frac{34}{4} n + 16$$

$$\mathbf{n_0} = \mathbf{64}$$