EJERCICIO 14 RELACION 5:

Demostrar que si $f: R \to R$ es una función continua y periódica, de periodo T entonces, para cada $x \in R$:

$$\int_x^{x+T} f(t)dt = \int_0^T f(t+x)dt$$

Solución

Sea $x \in R$ como f es continua en $[0, T]$ es integrable.

$$\int_0^T f(t+x)dt = \begin{bmatrix} z = t + x \quad dz = dt \\ si\ t = 0 \Rightarrow z = x \\ si\ t = T \Rightarrow z = x + T \end{bmatrix} = \int_x^{x+T} f(z)dz$$

Sea $x \in R$ como f es continua en $[x, x+T]$ es integrable.

$$\int_x^{x+T} f(t)dt = \begin{bmatrix} z = t - x \quad t = z + x \quad dz = dt \\ si\ t = x \Rightarrow z = 0 \\ si\ t = x + T \Rightarrow z = T \end{bmatrix} = \int_0^T f(z+x)dz$$