

# Tema 5

## Complitud y continuidad uniforme

Como ocurría con la acotación, las nociones que ahora vamos a estudiar no son topológicas, pero se conservan en espacios normados al cambiar las normas por otras equivalentes. Gracias al teorema de Hausdorff, para estudiarlas en  $\mathbb{R}^N$  podemos usar cualquier norma.

El concepto de *sucesión de Cauchy* se generaliza fácilmente, para manejarlo en un espacio métrico arbitrario, lo que nos llevará a la definición de *espacio métrico completo*. Generalizando el teorema de complitud de  $\mathbb{R}$ , probaremos el resultado análogo en  $\mathbb{R}^N$ .

En cuanto a la *continuidad uniforme*, probamos la versión general del *teorema de Heine*, completando así el análisis de los principales teoremas que conocíamos sobre continuidad de funciones reales de variable real. Entre las funciones uniformemente continuas destacamos las *lipschitzianas*, y entre ellas las llamadas *contractivas*. Sobre estas últimas trata un importante resultado, el *teorema del punto fijo de Banach*, que es útil en muy diversos campos y aquí servirá para el estudio del cálculo diferencial. Finalmente veremos una caracterización, también muy útil, de las aplicaciones lineales y continuas entre espacios normados.

### 5.1. Sucesiones de Cauchy

Si recordamos las sucesiones de Cauchy de números reales, la siguiente definición no será ninguna sorpresa. Si  $E$  es un **espacio métrico con distancia  $d$** , y  $x_n \in E$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , se dice que  $\{x_n\}$  es una **sucesión de Cauchy** en  $E$ , cuando:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} : p, q \geq m \Rightarrow d(x_p, x_q) < \varepsilon$$

Es obvio que, **en  $\mathbb{R}$  con la distancia usual**, las sucesiones de Cauchy son las que ya conocíamos, que **coinciden con las convergentes**. En general, tenemos siempre una implicación:

■ *En cualquier espacio métrico, toda sucesión convergente es una sucesión de Cauchy.*

Para **comprobarlo**, sea  $\{x_n\}$  una sucesión de puntos de un espacio métrico  $E$ , y supongamos que  $\{x_n\} \rightarrow x \in E$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que, para  $n \geq m$  se tiene  $d(x_n, x) < \varepsilon/2$ . Para  $p, q \geq m$ , concluimos entonces que  $d(x_p, x_q) \leq d(x_p, x) + d(x, x_q) < \varepsilon$ . ■

Es fácil ver que, en general, el recíproco del resultado anterior no es cierto. En el espacio métrico  $\mathbb{Q}$ , subespacio métrico de  $\mathbb{R}$ , existen sucesiones de Cauchy que no son convergentes. Si  $r_n \in \mathbb{Q}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y, en el espacio métrico  $\mathbb{R}$ , tenemos  $\{r_n\} \rightarrow \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , es claro que  $\{r_n\}$  es una sucesión de Cauchy en el espacio métrico  $\mathbb{Q}$  que no es convergente, pues si fuese  $\{r_n\} \rightarrow r \in \mathbb{Q}$ , entonces  $\{r_n\}$  también convergería a  $r$  en el espacio métrico  $\mathbb{R}$ , luego se tendría  $\alpha = r$ , lo cual es una contradicción.

Aclaremos ahora que la noción de sucesión de Cauchy no es topológica:

**Ejemplo.** Dos distancias equivalentes que no dan lugar a las mismas sucesiones de Cauchy. Sea  $d$  la distancia usual de  $\mathbb{R}$  y definamos otra distancia  $\rho$  de la siguiente forma:

$$\rho(x, y) = |e^x - e^y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Es obvio que  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$  para cualesquiera  $x, y \in \mathbb{R}$ , así como que  $\rho(x, y) = 0$  si, y sólo si,  $x = y$ . La desigualdad triangular también es evidente, pues para  $x, y, z \in \mathbb{R}$  se tiene:

$$\rho(x, z) = |e^x - e^z| \leq |e^x - e^y| + |e^y - e^z| = \rho(x, y) + \rho(y, z)$$

Por tanto  $\rho$  es una distancia en  $\mathbb{R}$  y, para ver que es equivalente a  $d$ , comprobamos que ambas dan lugar a las mismas sucesiones convergentes. Si  $x_n \in \mathbb{R}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y  $x \in \mathbb{R}$ , usando la continuidad de la exponencial y del logaritmo, tenemos

$$\{\rho(x_n, x)\} \rightarrow 0 \Leftrightarrow \{|e^{x_n} - e^x|\} \rightarrow 0 \Leftrightarrow \{|x_n - x|\} \rightarrow 0 \Leftrightarrow \{d(x_n, x)\} \rightarrow 0$$

Es claro que una sucesión  $\{x_n\}$  es de Cauchy para la distancia  $\rho$  si, y sólo si,  $\{e^{x_n}\}$  es de Cauchy para la distancia usual, es decir,  $\{e^{x_n}\}$  es convergente. Puesto que  $\{e^{-n}\} \rightarrow 0$ , vemos que  $\{-n\}$  es una sucesión de Cauchy para la distancia  $\rho$ , pero obviamente no lo es para  $d$ . Está claro que, en  $\mathbb{R}$  con la distancia  $\rho$ , existen sucesiones de Cauchy que no son convergentes. ■

## 5.2. Complitud

Dado un espacio métrico  $E$  con distancia  $d$ , la siguiente definición está ya motivada. Se dice que  $d$  es una **distancia completa**, o también que  $E$  es un **espacio métrico completo**, cuando toda sucesión de Cauchy de puntos de  $E$  es convergente.

El **teorema de complitud de  $\mathbb{R}$** , como su nombre indica, afirma que la distancia usual de  $\mathbb{R}$  es completa, o que  $\mathbb{R}$  con la distancia usual es un **espacio métrico completo**. Pero en el ejemplo anterior hemos visto una distancia  $\rho$  en  $\mathbb{R}$ , equivalente a la usual, que no es completa. Por tanto, la complitud de un espacio métrico no es una propiedad topológica.

Diremos ahora que una norma  $\|\cdot\|$  en un espacio vectorial  $X$  es una **norma completa**, cuando es completa la distancia  $d$  asociada, definida por  $d(x, y) = \|y - x\|$  para  $x, y \in X$ . Un **espacio normado** cuya norma es completa recibe el nombre de **espacio de Banach**, en honor del matemático polaco Stefan Banach (1892-1945). Así pues, un espacio de Banach es un espacio normado que, con la distancia asociada a su norma, es un espacio métrico completo. Un **espacio pre-hilbertiano** cuya norma, la asociada a su producto escalar, es completa, recibe el nombre de **espacio de Hilbert**, esta vez en honor del matemático alemán David Hilbert (1862-1943).

En el ambiente particular de los espacios normados tenemos una ventaja que no teníamos en espacios métricos cualesquiera:

■ *Dos normas equivalentes en un mismo espacio vectorial dan lugar a la mismas sucesiones de Cauchy. Por tanto, toda norma equivalente a una norma completa es completa.*

Si  $\|\cdot\|_1$  y  $\|\cdot\|_2$  son dos normas equivalentes en un espacio vectorial  $X$ , sabemos que existen constantes  $\lambda, \rho \in \mathbb{R}^+$  tales que  $\lambda\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \rho\|x\|_1$ . Entonces, para toda sucesión  $\{x_n\}$  de vectores de  $X$  tendremos

$$\lambda\|x_p - x_q\|_1 \leq \|x_p - x_q\|_2 \leq \rho\|x_p - x_q\|_1 \quad \forall p, q \in \mathbb{N}$$

Es ya evidente que toda sucesión de Cauchy para  $\|\cdot\|_1$  es de Cauchy para  $\|\cdot\|_2$  y viceversa. Como ambas normas también dan lugar a las mismas sucesiones convergentes, deducimos que una de ellas es completa si, y sólo si, lo es la otra. ■

Así pues, un espacio de Banach lo sigue siendo al sustituir su norma por otra equivalente. Gracias al teorema de Hausdorff, todas las normas en  $\mathbb{R}^N$  dan lugar a las mismas sucesiones de Cauchy, así que podemos hablar sin ambigüedad de sucesiones de Cauchy de vectores de  $\mathbb{R}^N$ . Pero es que, en realidad tales sucesiones no son otras que las convergentes:

**Teorema.** *Todo espacio normado de dimensión finita es un espacio de Banach. Por tanto, el espacio euclídeo  $N$ -dimensional es un espacio de Hilbert.*

**Demostración.** Basta, por ejemplo, probar que la norma del máximo en  $\mathbb{R}^N$  es completa. Si  $\{x_n\}$  es una sucesión de Cauchy de vectores de  $\mathbb{R}^N$ , le aplicamos una desigualdad que ya hemos usado varias veces:

$$|x_p(k) - x_q(k)| \leq \|x_p - x_q\|_\infty \quad \forall p, q \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \Delta_N$$

Deducimos que, para cada  $k \in \Delta_N$ , la sucesión de números reales  $\{x_n(k)\}$  es de Cauchy luego, por el teorema de complitud de  $\mathbb{R}$ , es convergente. Por tanto,  $\{x_n\}$  es convergente. ■

Procede preguntar ahora qué subespacios métricos de  $\mathbb{R}^N$  son espacios métricos completos, pero es preferible analizar esta pregunta en general, para subconjuntos de un espacio métrico cualquiera.

■ *Sea  $E$  un espacio métrico y  $A$  un subespacio métrico de  $E$ . Se tiene:*  
 (i) *Si  $A$  es completo, entonces  $A$  es un subconjunto cerrado de  $E$ .*  
 (ii) *Si  $E$  es completo y  $A$  es un subconjunto cerrado de  $E$ , entonces  $A$  es completo.*

(i). Si  $\{a_n\}$  es una sucesión de puntos de  $A$  tal que  $\{a_n\} \rightarrow x \in E$ , bastará ver que  $x \in A$ . Pero está claro que  $\{a_n\}$  es una sucesión de Cauchy en  $A$ , luego es convergente:  $\{a_n\} \rightarrow a \in A$ . Deducimos claramente que  $x = a$ , luego  $x \in A$  como queríamos.

(ii). Sea  $\{x_n\}$  una sucesión de Cauchy en el espacio métrico  $A$ , luego también en  $E$ . Como ahora  $E$  es completo, tenemos  $\{x_n\} \rightarrow x \in E$  y, al ser  $A$  cerrado, deducimos que  $x \in A$ . Por tanto,  $\{x_n\}$  es convergente en el espacio métrico  $A$ , así que  $A$  es completo. ■

Deducimos que, cuando el espacio métrico  $E$  es completo, un subespacio  $A$  es completo si, y sólo si,  $A$  es un subconjunto cerrado de  $E$ . Esto se aplica en particular al caso de  $\mathbb{R}^N$  con cualquier norma: los subconjuntos completos de  $\mathbb{R}^N$  no son otros que los cerrados.

### 5.3. Funciones uniformemente continuas

La definición de continuidad uniforme no precisa ninguna motivación, basta observar que la definición que conocemos para funciones reales de variable real viene expresada en términos de la distancia usual de  $\mathbb{R}$ . En lo que sigue fijamos dos espacios métricos  $E$  y  $F$ , cuyas distancias se denotan ambas por  $d$ , y una función  $f: E \rightarrow F$ . La continuidad de  $f$  se expresa en la forma

$$\forall x \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : y \in E, d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

donde sabemos que  $\delta$  puede depender tanto de  $\varepsilon$  como del punto  $x \in E$  considerado. Pues bien, tendremos continuidad uniforme cuando podamos conseguir que  $\delta$  sólo dependa de  $\varepsilon$ .

Por tanto, decimos que  $f$  es **uniformemente continua** cuando:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : x, y \in E, d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Está claro que así generalizamos la definición de continuidad uniforme que conocemos para funciones reales de variable real. También es obvio que toda función uniformemente continua es continua, pero sabemos que el recíproco es falso. Caracterizamos fácilmente la continuidad uniforme en términos de sucesiones:

- Si  $f$  es uniformemente continua y  $\{x_n\}, \{y_n\}$  son sucesiones de puntos de  $E$  verificando que  $\{d(x_n, y_n)\} \rightarrow 0$ , entonces  $\{d(f(x_n), f(y_n))\} \rightarrow 0$ . El recíproco también es cierto, más aún: si  $f$  no es uniformemente continua, existen dos sucesiones  $\{x_n\}$  e  $\{y_n\}$  de puntos de  $E$  y existe un  $\varepsilon > 0$  tales que  $d(x_n, y_n) < 1/n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , pero también se tiene  $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Dado  $\varepsilon > 0$ , sea  $\delta > 0$  dado por la continuidad uniforme de  $f$ . Existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que, para todo  $n \geq m$ , se tiene  $d(x_n, y_n) < \delta$ , luego  $d(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon$ . Recíprocamente, si  $f$  no es uniformemente continua, existe  $\varepsilon > 0$  tal que, para cada  $\delta > 0$ , podemos encontrar  $x, y \in E$  tales que  $d(x, y) < \delta$ , pero  $d(f(x), f(y)) \geq \varepsilon$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$  tomamos entonces  $\delta = 1/n$  para encontrar  $x_n, y_n \in E$  verificando que  $d(x_n, y_n) < 1/n$  y  $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$ . En particular tenemos  $\{d(x_n, y_n)\} \rightarrow 0$  pero la sucesión  $\{d(f(x_n), f(y_n))\}$  no converge a cero. ■

Probamos ya el principal resultado acerca de la continuidad uniforme:

**Teorema de Heine.** Sean  $E$  y  $F$  dos espacios métricos y  $f: E \rightarrow F$  una función continua. Si  $E$  es compacto, entonces  $f$  es uniformemente continua.

**Demostración.** Por reducción al absurdo, suponemos que  $f$  no es uniformemente continua. Existen sucesiones  $\{x_n\}$  e  $\{y_n\}$  de puntos de  $E$ , y un  $\varepsilon > 0$ , tales que, para todo  $n \in \mathbb{N}$  se tiene

$$d(x_n, y_n) < 1/n \quad \text{y} \quad d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$$

Por ser  $E$  compacto, tenemos una sucesión parcial  $\{x_{\sigma(n)}\}$  que converge a un punto  $x \in E$ . Puesto que  $\{d(x_{\sigma(n)}, y_{\sigma(n)})\} \rightarrow 0$ , deducimos que también  $\{y_{\sigma(n)}\} \rightarrow x$ . Como  $f$  es continua, tenemos  $\{f(x_{\sigma(n)})\} \rightarrow f(x)$  y  $\{f(y_{\sigma(n)})\} \rightarrow f(x)$ , luego  $\{d(f(x_{\sigma(n)}), f(y_{\sigma(n)}))\} \rightarrow 0$ , lo cual es una contradicción, ya que  $d(f(x_{\sigma(n)}), f(y_{\sigma(n)})) \geq \varepsilon$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . ■

El teorema anterior pone de manifiesto que la continuidad uniforme no es una propiedad local: si  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es continua, para cada  $x \in \mathbb{R}$  existe un entorno  $U$  de  $x$  tal que  $f|_U$  es uniformemente continua, pero sabemos que esto no implica que  $f$  sea uniformemente continua.

Observemos ahora que la continuidad uniforme no es una propiedad topológica. Usamos para ello una distancia  $\rho$  en  $\mathbb{R}$ , equivalente a la usual, que ya conocemos:

$$\rho(x, y) = |e^x - e^y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Si como espacio métrico  $E$  tomamos  $\mathbb{R}$  con la distancia usual, mientras que  $F$  es  $\mathbb{R}$  con la distancia  $\rho$ , entonces la función identidad  $f: E \rightarrow F$  no es uniformemente continua. Si lo fuese tendríamos que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : x, y \in \mathbb{R}, |x - y| < \delta \Rightarrow |e^x - e^y| < \varepsilon$$

$$\begin{aligned} x_n &= \ln(n) \\ y_n &= \ln(n+1) \\ |x_n - y_n| &= |\ln(\frac{n}{n+1})| \rightarrow 0 \\ |f(x_n) - f(y_n)| &= |n - n - 1| \rightarrow 1 \end{aligned}$$

Esto sería tanto como decir que la función exponencial es uniformemente continua, vista como función de  $\mathbb{R}$  con la distancia usual en sí mismo, cosa que sabemos que es falsa. Sin embargo, es obvio que si en  $F$  cambiamos su distancia por la usual de  $\mathbb{R}$  tendremos la continuidad uniforme de  $f$ . Lo mismo ocurre si, tanto en  $E$  como en  $F$  usamos la distancia  $\rho$ . Tenemos así ejemplos en los que una función uniformemente continua deja de serlo cuando sustituimos la distancia del espacio de partida, o del de llegada, por otra equivalente.

Ocorre sin embargo con la continuidad uniforme lo mismo que ocurrió con la acotación y con la complitud. Si  $X$  e  $Y$  son espacios normados y  $E$  es un subconjunto de  $X$ , la continuidad uniforme de una función  $f: E \rightarrow Y$  se mantiene cuando sustituimos las normas, tanto la de  $X$  como la de  $Y$ , por otras equivalentes. La comprobación de este hecho es un sencillo ejercicio. En particular, si  $E$  es un subconjunto no vacío de  $\mathbb{R}^N$ , para estudiar la continuidad uniforme de una función  $f: E \rightarrow \mathbb{R}^M$  podemos usar cualquier norma, tanto en  $\mathbb{R}^N$  como en  $\mathbb{R}^M$ .

## 5.4. Funciones lipschitzianas

Si  $E$  y  $F$  son espacios métricos, una función  $f: E \rightarrow F$  es **lipschitziana** cuando existe una constante  $M \in \mathbb{R}_0^+$  tal que:

$$d(f(x), f(y)) \leq M d(x, y) \quad \forall x, y \in E \quad (1)$$

Cuando convenga resaltar la constante  $M$  que aparece en esta desigualdad, podemos decir que la función  $f$  es **lipschitziana con constante  $M$** . Es evidente que toda función lipschitziana es uniformemente continua, y sabemos que el recíproco es falso, incluso en el caso  $E = F = \mathbb{R}$ .

La mínima constante  $M_0$  que verifica (1) es la **constante de Lipschitz** de  $f$ , que viene dada por

$$M_0 = \sup \left\{ \frac{d(f(x), f(y))}{d(x, y)} : x, y \in E, x \neq y \right\}$$

Cuando  $M_0 \leq 1$  se dice que  $f$  es **no expansiva**. Cuando se tiene de hecho  $M_0 < 1$  decimos que  $f$  es **contractiva**.

Por ejemplo, si  $X$  es un espacio normado, su norma es una función no expansiva de  $X$  en  $\mathbb{R}$ , puesto que  $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$  para cualesquiera  $x, y \in X$ . Análogamente, en cualquier espacio métrico  $E$ , fijado  $z \in E$ , la aplicación  $x \mapsto d(x, z)$  es no expansiva, puesto que  $|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$  para cualesquiera  $x, y \in E$ . Como función de dos variables, definida en el espacio métrico producto  $E \times E$ , la distancia es una función lipschitziana, pues para cualesquiera  $x, y, u, v \in E$  se tiene

$$\begin{aligned} |d(x, y) - d(u, v)| &\leq |d(x, y) - d(y, u)| + |d(y, u) - d(u, v)| \leq d(x, u) + d(y, v) \\ &\leq 2 \max\{d(x, u), d(y, v)\} = 2 d_\infty((x, y), (u, v)) \end{aligned}$$

Por tanto,  $d$  es uniformemente continua, y en particular es continua, cosa que ya sabíamos.

El hecho de que una función sea lipschitziana, y no digamos su constante de Lipschitz, es muy inestable cuando cambiamos de distancias. En el ejemplo usado para mostrar que la continuidad uniforme no es una propiedad topológica, teníamos una aplicación no expansiva que dejaba de ser uniformemente continua al sustituir la distancia del espacio métrico de partida o de llegada por otra equivalente. En el caso de dos espacios normados, es fácil ver que una función lipschitziana lo sigue siendo al cambiar las normas por otras equivalentes, pero su constante de Lipschitz puede claramente cambiar.

## 5.5. Teorema del punto fijo de Banach

El siguiente resultado muestra una propiedad importante de las aplicaciones contractivas y, de paso, pone muy de manifiesto la utilidad de la complitud de un espacio métrico.

**Teorema.** Sea  $E$  un espacio métrico completo y  $f : E \rightarrow E$  una aplicación contractiva. Entonces  $f$  tiene un único punto fijo, es decir, existe un único punto  $x \in E$  tal que  $f(x) = x$ .

**Demostración.** Fijamos  $x_0 \in E$  arbitrario y definimos por inducción una sucesión  $\{x_n\}$  de puntos de  $E$ , tomando  $x_1 = f(x_0)$  y  $x_{n+1} = f(x_n)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Probaremos que esta sucesión es convergente y su límite será el punto fijo que buscamos.

Si  $\alpha < 1$  es la constante de Lipschitz de  $f$  y  $\rho = d(x_0, x_1)$ , comprobamos por inducción que

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha^n \rho \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (2)$$

En efecto, tenemos  $d(x_1, x_2) = d(f(x_0), f(x_1)) \leq \alpha d(x_0, x_1) = \alpha \rho$  y, suponiendo que (2) se verifica para un  $n \in \mathbb{N}$ , deducimos que

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) = d(f(x_n), f(x_{n+1})) \leq \alpha d(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha \alpha^n \rho = \alpha^{n+1} \rho$$

Ahora, para cualesquiera  $n, k \in \mathbb{N}$  tenemos

$$d(x_n, x_{n+k}) \leq \sum_{j=0}^{k-1} d(x_{n+j}, x_{n+j+1}) \leq \rho \sum_{j=0}^{k-1} \alpha^{n+j} \leq \rho \alpha^n \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j = \frac{\rho \alpha^n}{1 - \alpha} \quad (3)$$

Desigualdad triangular  
k-1 veces

Se está aplicando esto en cada uno de los k-1 términos y se saca factor común  $\rho$

Se usa la fórmula del límite de una serie de razón  $\alpha < 1$



De la desigualdad (3) deduciremos fácilmente que  $\{x_n\}$  es una sucesión de Cauchy. En efecto, dado  $\varepsilon > 0$ , como  $\{\alpha^n\} \rightarrow 0$ , existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que, para  $n \geq m$  se tiene  $\rho \alpha^n < \varepsilon(1 - \alpha)$ . Entonces, para  $p, q \geq m$ , suponiendo sin perder generalidad que  $p < q$ , usamos (3) con  $n = p$  y  $k = q - p$  para obtener

$$d(x_p, x_q) = d(x_n, x_{n+k}) \leq \frac{\rho \alpha^n}{1 - \alpha} < \varepsilon$$

Como por hipótesis  $E$  es completo, tenemos  $\{x_n\} \rightarrow x \in E$ , luego  $\{f(x_n)\} = \{x_{n+1}\} \rightarrow x$ . Pero  $f$  continua, luego  $\{f(x_n)\} \rightarrow f(x)$ , y concluimos que  $f(x) = x$ . Finalmente, si  $y \in E$  es otro punto fijo de  $f$ , se tiene  $d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$ , luego  $(1 - \alpha)d(x, y) \leq 0$ . Como  $\alpha < 1$ , deducimos que  $d(x, y) \leq 0$ , es decir,  $x = y$ . ■

El teorema anterior se aplica en contextos muy variados, pues se trata de una herramienta muy potente para resolver ecuaciones. Al fin y al cabo nos asegura que, bajo ciertas condiciones sobre el espacio métrico  $E$  y la función  $f : E \rightarrow E$ , la ecuación  $f(x) = x$  tiene solución única.

## 5.6. Continuidad de aplicaciones lineales

Vamos a obtener ahora una útil caracterización de la continuidad de una aplicación lineal entre dos espacios normados cualesquiera:

■ Sean  $X, Y$  dos espacios normados y sea  $T : X \rightarrow Y$  una aplicación lineal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i)  $T$  es continua
- (ii) Existe una constante  $M \in \mathbb{R}_0^+$  tal que  $\|T(x)\| \leq M\|x\|$  para todo  $x \in X$

(i)  $\Rightarrow$  (ii). Teniendo en cuenta que  $T(0) = 0$ , la continuidad de  $T$  en 0 nos dice que

$$\exists \delta > 0 : z \in X, \|z\| < \delta \Rightarrow \|T(z)\| < 1 = \varepsilon$$

Dado  $x \in X \setminus \{0\}$ , tomando  $z = \frac{\delta x}{2\|x\|}$  tenemos claramente  $\|z\| = \delta/2 < \delta$ , luego

$$\|T(x)\| = \frac{2\|x\|}{\delta} \|T(z)\| \leq \frac{2}{\delta} \|x\|$$

Como esta desigualdad es obvia cuando  $x = 0$ , hemos probado (ii) con  $M = 2/\delta$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i). Para cualesquiera  $u, v \in X$ , de (ii) deducimos claramente que

$$\|T(u) - T(v)\| = \|T(u - v)\| \leq M\|u - v\|$$

lo que prueba que  $T$  es lipschitziana, luego continua. ■

Merece la pena comentar dos ideas importantes que han aparecido en la demostración del resultado anterior.

En primer lugar, para probar que  $(i) \Rightarrow (ii)$  sólo hemos usado que  $T$  es continua en el origen. Por tanto, de ser  $T$  continua en el origen se deduce que es continua en todo punto de  $X$ . De hecho el origen no tiene nada de especial: usando la traslación adecuada, vemos fácilmente que si  $T$  es continua en un punto cualquiera de  $X$ , entonces es continua en el origen y, por tanto, en todo punto de  $X$ . Dicho de manera equivalente: si  $T$  no es continua, entonces no puede ser continua en ningún punto de  $X$ .

Por otra parte, al probar  $(ii) \Rightarrow (i)$  no sólo hemos visto que  $T$  es continua, sino que  $T$  es lipschitziana y, en particular, uniformemente continua. Así pues, **para una aplicación lineal entre espacios normados, ser continua equivale a ser uniformemente continua, lo que a su vez equivale a ser lipschitziana.**

En el estudio del cálculo diferencial trabajaremos sobre todo con espacios normados de dimensión finita, en cuyo caso la continuidad de una aplicación lineal es automática, como muestra el siguiente resultado, importante consecuencia del teorema de Hausdorff:

■ Si  $X$  es un espacio normado de dimensión finita, toda aplicación lineal de  $X$  en cualquier otro espacio normado, es continua.

Sea  $Y$  otro espacio normado y  $T: X \rightarrow Y$  una aplicación lineal. Definimos entonces una nueva norma  $\|\cdot\|_T$  en  $X$ , de la siguiente forma

$$\|x\|_T = \|x\| + \|T(x)\| \quad \forall x \in X$$

Se comprueba rutinariamente que  $\|\cdot\|_T$  es efectivamente una norma en  $X$ . Como  $X$  tiene dimensión finita, el teorema de Hausdorff nos dice que  $\|\cdot\|_T$  es equivalente a la norma de partida en  $X$ , luego existe una constante  $\rho \in \mathbb{R}^+$  tal que  $\|x\|_T \leq \rho \|x\|$  para todo  $x \in X$ . Pero entonces está bien claro que

$$\|T(x)\| \leq \|x\|_T \leq \rho \|x\| \quad \forall x \in X$$

y esto prueba que  $T$  es continua. ■

## 5.7. Norma de una aplicación lineal continua

Si  $X$  e  $Y$  son espacios normados arbitrarios, denotaremos siempre por  $L(X, Y)$  al espacio vectorial de todas las aplicaciones lineales y continuas de  $X$  en  $Y$ , cuya suma y producto por escalares vienen definidos, para  $T, S \in L(X, Y)$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ , por

$$(T+S)(x) = T(x) + S(x) \quad \forall x \in X \quad \text{y} \quad (\lambda T)_x = \lambda T(x) \quad \forall x \in X$$

De hecho,  $L(X, Y)$  es un subespacio vectorial de  $\mathcal{C}(X, Y)$ , el espacio vectorial de todas las funciones continuas de  $X$  en  $Y$ , que ya conocíamos. Pues bien, nuestro próximo objetivo es convertir a  $L(X, Y)$  en un espacio normado.



Ya se ha comentado que toda aplicación lineal y continua  $T \in L(X, Y)$  es lipschitziana. Esto permite definir la **norma de  $T$** , que naturalmente se denota por  $\|T\|$ , como la **constante de Lipschitz de  $T$** , es decir, la mínima constante  $M \in \mathbb{R}_0^+$  tal que  $\|T(u) - T(v)\| \leq M \|u - v\|$  para cualesquiera  $u, v \in X$ . Se obtiene una descripción más sencilla de esta constante viendo que, para  $M \in \mathbb{R}_0^+$ , se tiene:

$$\|T(u) - T(v)\| \leq M \|u - v\| \quad \forall u, v \in X \iff \|T(x)\| \leq M \|x\| \quad \forall x \in X$$

Tomando  $x = u$  y  $0 = v$

En efecto, para la implicación hacia la derecha, dado  $x \in X$ , se toma  $u = x$  y  $v = 0$ . Hacia la izquierda, dados  $u, v \in X$ , basta tomar  $x = u - v$ . Por tanto, la constante de Lipschitz de  $T$  también es la mínima constante que verifica la desigualdad de la derecha, es decir,

$$\|T\| = \min \{ M \in \mathbb{R}_0^+ : \|T(x)\| \leq M \|x\| \quad \forall x \in X \} \quad (4)$$

Antes de comprobar que efectivamente hemos definido una norma en  $L(X, Y)$ , explicamos la forma en que dicha norma suele usarse. La continuidad de una aplicación lineal  $T : X \rightarrow Y$  se comprueba hallando  $M \in \mathbb{R}_0^+$  tal que  $\|Tx\| \leq M \|x\|$  para todo  $x \in X$ , con lo que (4) nos dice que  $\|T\| \leq M$ . Si por el contrario ya sabemos que  $T \in L(X, Y)$ , podemos escribir

$$\|T(x)\| \leq \|T\| \|x\| \quad \forall x \in X \quad (5)$$

y esta desigualdad es óptima, en el sentido de que  $\|T\|$  es la mínima constante que puede aparecer en ella. Esto es lo que ocurrirá siempre que  $X$  tenga dimensión finita.

En general, **comprobar que tenemos una norma en  $L(X, Y)$**  es bien fácil. Para  $T, S \in L(X, Y)$ , usando (5) se tiene:

$$\|(T+S)(x)\| \leq \|T(x)\| + \|S(x)\| \leq (\|T\| + \|S\|) \|x\| \quad \forall x \in X$$

y de (4) deducimos la desigualdad triangular:  $\|T+S\| \leq \|T\| + \|S\|$ .

**Para la homogeneidad por homotecias** preferimos usar **otra descripción de la norma** de una aplicación lineal y continua, que pasamos a explicar. La igualdad (4) nos dice que  $\|T\|$  es el mínimo mayorante, es decir, el supremo, de un cierto conjunto de números reales:

$$\|T\| = \sup \left\{ \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : x \in X \setminus \{0\} \right\}$$

Por ser  $T$  lineal

Esta expresión se simplifica aún más si pensamos que  $\|T(x)\|/\|x\| = \|T(x/\|x\|)\|$ . Además, es claro que  $u = x/\|x\|$  verifica  $\|u\| = 1$ . Pero recíprocamente, dado  $u \in X$  con  $\|u\| = 1$ , tenemos  $u = x/\|x\|$  sin más que tomar  $x = u$ . Por tanto:

$$\|T\| = \sup \{ \|T(u)\| : u \in X, \|u\| = 1 \}$$

Tenemos así otra expresión muy útil de la norma de una aplicación lineal y continua.

Ahora, para  $T \in L(X, Y)$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$  se tiene claramente:

$$\begin{aligned} \|\lambda T\| &= \sup \{ \|\lambda T(u)\| : u \in X, \|u\| = 1 \} \\ &= \sup \{ |\lambda| \|T(u)\| : u \in X, \|u\| = 1 \} = |\lambda| \|T\| \end{aligned}$$

Finalmente es obvio que de  $\|T\| = 0$  se deduce  $T = 0$ . Queda así comprobado que **tenemos una norma en  $L(X, Y)$**  como queríamos.

Conviene finalmente resaltar que, aunque el espacio vectorial  $L(X, Y)$  sólo depende de las topologías de  $X$  e  $Y$ , **la norma que hemos definido en  $L(X, Y)$  sí depende esencialmente de las normas concretas que tengamos en  $X$  e  $Y$** . Si sustituimos dichas normas por otras **equivalentes**, **la norma de  $L(X, Y)$  también cambiará**, aunque es fácil ver que **la nueva norma en  $L(X, Y)$  también será equivalente a la de partida**. En el caso que más nos interesa, esto ocurre de nuevo automáticamente, pues **cuando  $X$  e  $Y$  tienen dimensión finita,  $L(X, Y)$  también la tiene**, luego **todas las normas en  $L(X, Y)$  son equivalentes**.

## 5.8. Ejercicios

1. Probar que, en cualquier espacio métrico, toda sucesión de Cauchy está acotada.
2. Probar que todo espacio métrico compacto es completo.
3. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua e inyectiva. Probar que definiendo

$$\rho(x, y) = |f(x) - f(y)| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

se obtiene una distancia en  $\mathbb{R}$ , equivalente a la usual. ¿Cuándo es  $\rho$  completa?

4. ¿Qué se puede afirmar sobre la composición de dos funciones uniformemente continuas?
5. Dado un espacio normado  $X \neq \{0\}$ , probar que la función  $f : X \setminus \{0\} \rightarrow X$ , dada por

$$f(x) = \frac{x}{\|x\|} \quad \forall x \in X \setminus \{0\}$$

no es uniformemente continua. Sin embargo, probar también que, para cada  $\delta \in \mathbb{R}^+$ , la restricción de  $f$  al conjunto  $\{x \in X : \|x\| \geq \delta\}$  es una función lipschitziana.

6. Sea  $A$  un subconjunto no vacío de un espacio métrico  $E$  y  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x) = \inf \{d(x, a) : a \in A\}$  para todo  $x \in E$ . Probar que  $f$  es no expansiva.
7. Dado  $y \in \mathbb{R}^N$ , se define  $T_y \in L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$  usando el producto escalar en  $\mathbb{R}^N$ :

$$T_y(x) = (x|y) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

Calcular la norma de la aplicación lineal  $T_y$ , considerando en  $\mathbb{R}^N$

- a) la norma euclídea
  - b) la norma del máximo
  - c) la norma de la suma
8. Consideremos los espacios normados  $X = \mathbb{R}^N$  con la norma de la suma e  $Y = \mathbb{R}^N$  con la norma del máximo. Denotando como siempre por  $\{e_k : k \in \Delta_N\}$  a la base usual de  $\mathbb{R}^N$ , probar que, para toda  $T \in L(X, Y)$  se tiene:

$$\|T\| = \max \{ |(T(e_j)|e_k)| : j, k \in \Delta_N \}$$