Métodos Numéricos I

Relación Tema 3

1. Sean $x_0, x_1, \dots, x_n$ $n+1$ números reales. Comprueba que

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & \cdots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_{n-1}^n & x_n^n \end{bmatrix} = \prod_{\substack{i,j=0 \\ i<j}}^{n} (x_j - x_i)$$

Deduce que si $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ tales que

$$i, j = 1, \dots, n \Rightarrow x_i \neq x_j$$

entonces existe una única función polinómica $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de grado menor o igual que n con

$$i = 0, 1, \dots, n \Rightarrow p(x_i) = y_i$$

Probaremos este resultado por inducción. Por ello, empezaremos viendo que se cumple para $n=1$:

$\boxed{n=1}$ $\quad \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ x_0 & x_1 \end{bmatrix} = (x_1 - x_0)$ ✓

Ahora supondremos que se cumple para $n-1$ y veamos si esto implica que se cumpla para n: (Empezamos considerando para n)

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} = \left(\text{A continuación le restamos a cada fila la anterior multiplicada por } -x_0\text{. Esto no varía el valor del determinante} \right) =$$

$$= \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_1 - x_0 & \cdots & x_n - x_0 \\ \vdots & x_1^2 - x_0 x_1 & \cdots & x_n^2 - x_0 x_n \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_1^n - x_0 x_1^{n-1} & \cdots & x_n^n - x_0 x_n^{n-1} \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{l} \text{Desarrollamos} \\ \text{por el 1 de} \\ \text{la esquina} \end{array} \right) =$$

$$= \det \begin{bmatrix} x_1 - x_0 & \cdots & x_n - x_0 \\ x_1^2 - x_0 x_1 & \cdots & x_n^2 - x_0 x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^n - x_0 x_1^{n-1} & \cdots & x_n^n - x_0 x_n^{n-1} \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{l} \text{Todas las columnas} \\ \text{tienen un factor común} \\ \text{en sus elementos, concre-} \\ \text{tamente } x_i - x_0 \text{ en} \\ \text{cada columna } i\text{. Extraemos} \\ \text{esos factores del determinante} \end{array} \right) =$$

$$= (x_1 - x_0) \cdot \ldots \cdot (x_n - x_0) \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} =$$

$$= \left(\begin{array}{l} \text{Justo tenemos el determinante} \\ \text{para } n-1\text{, así que podemos} \\ \text{aplicar la hipótesis} \end{array} \right) = (x_1 - x_0) \cdot \ldots \cdot (x_n - x_0) \cdot \prod_{\substack{i,j=0 \\ i<j}}^{n-1} (x_j - x_i) =$$

$$= \prod_{\substack{i,j=0 \\ i<j}}^{n} (x_j - x_i) \Rightarrow$$ Hemos demostrado lo que queríamos

Pasemos a la 2ª parte del ejercicio. Una función polinómica de grado menor o igual que n es de la forma: $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$

Si pasa por los puntos $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$, esto equivale a imponer el siguiente sistema:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n = y_1 \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n = y_n \end{cases}$$

La matriz de coeficientes es de la forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix}$$

Y su determinante es justo:

El determinante de una matriz y su traspuesta coinciden

$$\det\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} = \prod_{\substack{i,j=0 \\ i<j}}^{n} (x_j - x_i)$$

$\neq 0$ ya que $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ no comparten abscisas.

Por lo tanto, el sistema de antes era un SEL compatible determinado, por lo que tiene una única solución $\Rightarrow$ Una única función polinómica de grado menor o igual que n que pasa por esos puntos.

2. Comprueba que el problema de interpolación anterior no está bien definido si el grado de la función polinómica p es distinto de M (número de datos menos 1).

Partiendo de que $gr(p) \neq M$, se nos presenta la siguiente casuística:

$\boxed{gr(p) < M}$ Sea $N = gr(p)$. Como $gr(p) < M$, N será de la forma $N = M - K$ con $K \in \{1, \dots, M\}$ y p será de la forma $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_N x^N$. Al imponer que pase por los puntos del ejercicio 1, resulta el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} a_0 + a_1 x_0 + \dots + a_N x_0^N = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_N x_1^N = y_1 \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_N + \dots + a_N x_N^N = y_N \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_M + \dots + a_N x_M^N = y_M \end{array}\right. \Rightarrow$$

Como tenemos M ecuaciones y N incógnitas, y $M > N$, podemos eliminar las filas $N+1, \dots, M$

$$\left\{\begin{array}{l} a_0 + a_1 x_0 + \dots + a_N x_0^N = y_0 \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_N + \dots + a_N x_N^N = y_N \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ La matriz de coeficientes tiene determinante:

Por el ejercicio 1

$$\det\begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_N & \cdots & x_N^N \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & \cdots & x_N \\ \vdots & & \vdots \\ x_0^N & \cdots & x_N^N \end{bmatrix} \neq 0$$

Sin embargo, del sistema se deduce que p pasa por $(x_0, y_0), \dots, (x_M, y_M)$ pero no tiene por qué hacerlo en los (x_i, y_i) con $i \in \{N+1, \dots, M\}$

$\boxed{gr(p) > M}$ Sea $N = gr(p)$. Como $gr(p) > M$, N será de la forma $N = M + K$ con $K \in \mathbb{N}$. Será de la forma $a_0 + a_1 x + \dots + a_N x^N$, y si imponemos que pasa por los puntos $(x_0, y_0), \dots, (x_M, y_M)$, resulta el siguiente sistema:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \dots + a_M x_0^M + \dots + a_N x_0^N = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_M x_1^M + \dots + a_N x_1^N = y_1 \\ \vdots \\ \underbrace{\underbrace{a_0 + a_1 x_M + \dots + a_M x_M^M}_{A} + \dots + a_N x_M^N = y_M}_{A'} \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^M \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_M & \cdots & x_M^M \end{bmatrix} \Longrightarrow \det(A) \neq 0$$

$$\Downarrow$$

$$rg(A) = rg(A') = M$$

Y por el Tma Rouché-Frobenius, como $rg(A) = rg(A') = M < N =$ nº incógnitas, por lo que el sistema es compatible indeterminado y hay más de una solución $\Longrightarrow$ El polinomio de interpolación no es único $\Longrightarrow$ No está bien definido.

3. Demuestra que si $a<b$, $f\in C^3([a,b])$ y $I_2 f$ es el polinomio en $\mathbb{P}_2$ de forma que

$$I_2 f(x_0) = f(x_0),\ I_2 f(x_1) = f(x_1),\ I_2 f(x_2) = f(x_2),$$

con los nodos igualmente espaciados $x_0 = a$, $x_1 = (a+b)/2$ y $x_2 = b$, entonces el correspondiente error de interpolación $E_2 f$ verifica

$$\|E_2 f\|_\infty \leq \frac{\|f'''\|_\infty}{9\sqrt{3}} h^3,$$

siendo $h = \frac{(b-a)}{2}$.

Por el corolario de la diapositiva 53 sabemos que siendo $x_0, \dots, x_N$ números reales distintos, $x \in \mathbb{R}$ y $a := \min\{x_0, \dots, x_N\}$ $b := \max\{x_0, \dots, x_N\}$. $f \in C^{N+1}([a,b])$, entonces $\exists \varepsilon \in]a,b[$ tal que

$$E_N f(x) = \frac{f^{N+1}(\varepsilon)}{(N+1)!} \omega_{N+1}(x)$$

siendo ω_{N+1} el polinomio nodal de grado $N+1$. Aplicando este resultado a la situación concreta con $f \in C^3([a,b])$ y 3 nodos $x_0 = a$, $x_1 = \frac{(a+b)}{2}$, $x_2 = b$.

Por lo tanto, la expresión anterior quedaría así:

$$E_2 f(x) = \frac{f'''(\varepsilon)}{3!} \omega_3(x)$$

$$\hookrightarrow \|E_2 f\|_\infty \leq \frac{\|f'''\|_\infty}{6} \|\omega_3\|_\infty$$

$$\Downarrow$$

Acotaremos $\|\omega_3\|_\infty$ de tal forma que lleguemos a la expresión que se nos pide demostrar.

Sea $x \in [a,b]$, será de la forma $x = a + th$ con $t \in [0,2]$ ya que si $t=0$, $x=a$, y si $t=2$, $x = a + 2 \cdot \frac{b-a}{2} = b$. Es decir, $t \in [0,2]$ para que se cumple que $x \in [a,b]$ y lo podamos expresar como $x = a+th$. Intentemos acotar $\|\omega_3\|_\infty$ como dijimos antes, es decir, hallar el máximo en valor absoluto de ω_3:

Aplicamos la definición de la diapositiva 26

$$|\omega_3(x)| = |(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)| =$$

Sustituimos $x_0 = a$, $x = a+th$, $x_1 = \frac{(a+b)}{2}$ y $x_2 = b$

$$= \left|(a+th-a)\left(a+th-\frac{a+b}{2}\right)(a+th-b)\right| =$$

$\frac{a-b}{2} = -h$

$$= th\left|\frac{a-b}{2} + th\right||a-b+th| = th|-h+th||-2h+th| =$$

Sacamos factor común h

$$= th^3|t-1||t-2| = th^3|t-1|(2-t)$$

Así, hemos probado que si $x = a+th$ con $t \in [0,2]$, entonces

$$|\omega_3(x)| = t|t-1|(2-t)h^3$$

Por ello, definimos $f : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$t \longmapsto t|t-1|(2-t)$$

$$f(t) := \begin{cases} t(1-t)(2-t) & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ t(t-1)(2-t) & \text{si } 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

Hallamos sus máximos:

$$f'(t) = \begin{cases} 3t^2 - 6t + 2 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ -3t^2 + 6t - 2 & \text{si } 1 < t \leq 2 \end{cases}$$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow t = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$\Rightarrow t = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(1 - 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(2 - 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\left(1 - \frac{3}{9}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{9} = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$f\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3} - 1\right)\left(2 - 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

Por lo tanto, $|f(t)| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}} \Rightarrow |\omega_3(x)| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}} h^3$,

lo que equivale a que $\|\omega_3\|_\infty \leq \frac{2}{3\sqrt{3}} h^3$ y

como $\|E_2 f\|_\infty \leq \frac{\|f'''\|_\infty}{6} \|\omega_3\|_\infty$:

$$\underbrace{\|E_2 f\|_\infty \leq \frac{\|f'''\|_\infty}{6} \|\omega_3\|_\infty \leq \frac{\|f'''\|_\infty}{6} \cdot \frac{2}{3\sqrt{3}} h^3 = \frac{\|f'''\|_\infty}{9\sqrt{3}} h^3}_{\text{Uniendo principio y final}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\|E_2 f\|_\infty \leq \frac{\|f'''\|_\infty}{9\sqrt{3}} h^3} \Rightarrow$$ Es justo lo que se nos pedía probar

4. Calcula los 7 nodos de Chebyshev $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ del intervalo $[1.6, 3]$ y úsalos para resolver el problema de interpolación

encontrar $p \in \mathbb{P}_6 : i = 0, \ldots, 6 \Rightarrow p(x_i) = \sqrt{|x_i - 2|}$

mediante las fórmulas de Lagrange y Newton. Analiza el condicionamiento de este problema y obtén una estimación del error de interpolación.

En este ejercicio he usado mucho Máxima. Se comienza calculando los 7 nodos de Chebyshev, que son de la forma $x_i := \cos\left(\pi \cdot \frac{2i+1}{2N}\right)$ con $N = 7$. Usamos Máxima y los nodos son:

$[0.975, 0.782, 0.434, 0, -0.434, -0.782, -0.975]$

Construimos un isomorfismo afín $f(x) = ax + b$ tal que $f(-1) = 1.6$ y $f(1) = 3$, resultando ser $a = \frac{7}{10}$ y $b = \frac{23}{10}$. Aplicamos f sobre los nodos anteriores del intervalo $[-1, 1]$ para saber los nodos en el $[1.6, 3]$:

$[2.982, 2.847, 2.604, 2.3, 1.997, 1.753, 1.618]$

En Máxima aplicamos los algoritmos pertinentes para la fórmula de Newton y Lagrange:

$$\text{lagrange}(x) = \sum_{i=1}^{7} y_i l_i(x) \quad \text{con } l_i(x) = \prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{7} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$\text{newton}(x) = \sum_{i=1}^{7} f[x_0, \ldots, x_i] \cdot \omega_i(x) \quad \text{con } \omega_i(x) = \prod_{j=1}^{i-1} (x - x_j)$$

y ambos nos llevan al mismo polinomio de interpolación:

$$p(x) = -24.753x^6 + 349.994x^5 - 2041.7541x^4$$
$$+ 6285.746x^3 - 10762.695x^2 + 9711.293x - 3605.2527$$

Para ver el condicionamiento hallamos aproximadamente la constante de Lebesgue graficando la función de Lebesgue: $\sum_{i=1}^{7} |l_i(x)|$. El condicionamiento es pequeño ya que de la gráfica deducimos que $\Lambda_N \approx 2.2$. Para estimar el error de interpolación, estimamos la $\|\cdot\|_\infty$ de $|f(x) - \text{lagrange}(x)|$ y vemos que el error de interpolación es menor que 0.2.

5. Considera en el intervalo $[-1,1]$ 9 nodos x_i uniformemente distribuidos y los correspondientes 9 nodos de Chebyshev u_i. Estudia en cada caso el problema de interpolación

$$\text{encontrar } p \in \mathbb{P}_8 : i = 0, \ldots, 8 \Rightarrow p(x_i) = 2|x_i| + 1$$

así como el análogo para los nodos u_i. Dibuja simultáneamente ambos interpolantes junto con la función $2|x| + 1, -1 \leq x \leq 1$

Este ejercicio es igual que el anterior solo que no hace falta un isomorfismo afín al estar en el intervalo $[-1,1]$. El resto es análogo (ver Máxima).

7. Dada la partición uniforme P del intervalo $[-1,1]$ determinada por 6 puntos y la función de Runge f, determina el spline s que verifica

$$i=0,\dots,5 \Rightarrow s(-1+2i/5)=f(-1+2i/5),$$

siendo, o bien $s=S_5^1\in S_0^1(P)$, o bien $s=S_5^2\in S_3^2(P)$ con $s''(-1)=s''(1)=0$ (natural).

Ilustra con un ejemplo el principio de mínima energía para este último spline.

Este ejercicio está resuelto entero en el apartado de Máxima. Lo único que cabe destacar es que para $S_5^1\in S_0^1(P)$, la base viene dada por

$$B_i(x):=\begin{cases}\dfrac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & [x_{i-1},x_i]\\[2ex] \dfrac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} & [x_i,x_{i+1}]\\[2ex] 0 & \text{en cualquier otro caso}\end{cases}\qquad \text{con } x_i=-1+\frac{2i}{5}$$

$$\boxed{S_0^1=\sum_{i=1}^{5} f(x_i)B_i(x)}$$

Para el spline cúbico hemos usado las fórmulas de la diapositiva 107:

$$\boxed{S_{i-1}(x)=c_{i-1}\frac{(x_i-x)^3}{6h}+c_i\frac{(x-x_{i-1})^3}{6h}+\alpha_{i-1}(x-x_{i-1})+\beta_{i-1}}$$

$$\boxed{\alpha_{i-1}=\frac{y_i-y_{i-1}}{h}-\frac{h}{6}(c_i-c_{i-1})}\quad\boxed{\beta_{i-1}=y_{i-1}-c_{i-1}\cdot\frac{h^2}{6}}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix}2 & 0 & \cdots & & 0\\ 1/2 & 2 & 1/2 & \cdots & 0\\ 0 & 1/2 & 2 & 1/2\cdots & 0\\ \vdots & & & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_0\\ c_1\\ \vdots\\ c_N\end{bmatrix}=\frac{3}{h^2}\begin{bmatrix}0\\ y_2-2y_1+y_0\\ y_3-2y_2+y_1\\ \vdots\\ y_N-2y_{N-1}+y_{N-2}\\ 0\end{bmatrix}}$$