Análisis Matemático II

Tema 12: Integrales dependientes de un parámetro

Noción de integral dependiente de un parámetro

Integrales que dependen de un parámetro

En todo lo que sigue, Ω es un subconjunto medible de $\mathbb{R}^N$

Si $f \in \mathcal{L}^+(\Omega)$, o bien $f \in \mathcal{L}_1(\Omega)$, escribiremos:

$$\int_\Omega f(y)\,dy \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega f$$

Se suele decir que y es la variable de integración

y f puede depender de otras variables que llamamos parámetros

Ejemplos: $\displaystyle\int_1^2 y^x\,dy\,, \qquad \int_1^2 y^x\,dx$

En general: X conjunto no vacío arbitrario, $\Phi : X \times \Omega \to \mathbb{R}$

Si, para cada $x \in X$, la función $y \mapsto \Phi(x,y)$ es integrable en Ω,

Podemos definir: $\varphi : X \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \displaystyle\int_\Omega \Phi(x,y)\,dy \quad \forall x \in X$

Decimos que φ es una integral dependiente de un parámetro

Continuidad de la integral dependiente de un parámetro

Teorema de continuidad

Sea X un espacio métrico, $x_0 \in X$

y $\Phi : X \times \Omega \to \mathbb{R}$ una función verificando:

(M) Para cada $x \in X$, la función $y \mapsto \Phi\big(x, y\big)$ es medible

(C) Para cada $y \in \Omega$, la función $x \mapsto \Phi\big(x, y\big)$ es continua en el punto x_0

(D) Existe $g \in \mathcal{L}_1(\Omega)$ tal que: $|\Phi(x,y)| \leqslant g(y) \quad \forall (x,y) \in X \times \Omega$

Entonces la función $\varphi : X \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(x) = \int_\Omega \Phi(x,y)\, dy \qquad \forall x \in X$$

es continua en el punto x_0

Otras versiones del teorema de continuidad

Cálculo de límites

X subconjunto de un espacio métrico, $x_0 \in X'$

Si $\Phi : X \times \Omega$ verifica las condiciones (M) y (D) y suponemos que

(L) Para cada $y \in \Omega$ la función $x \to \Phi(x,y)$ tiene límite en x_0

Entonces: $$\lim_{x \to x_0} \int_\Omega \Phi(x,y)\, dy = \int_\Omega \left(\lim_{x \to x_0} \Phi(x,y) \right) dy$$

Versión para límites en el infinito

X subconjunto no mayorado de $\mathbb{R}$, $\Phi : X \times \Omega$ verificando $(M), (D)$ y

(L) Para cada $y \in \Omega$ la función $x \to \Phi(x,y)$ tiene límite en $+\infty$

Entonces: $$\lim_{x \to +\infty} \int_\Omega \Phi(x,y)\, dy = \int_\Omega \left(\lim_{x \to +\infty} \Phi(x,y) \right) dy$$

Hay un resultado análogo para límites en $-\infty$

Derivación de la integral dependiente de un parámetro

Teorema de derivación

Dado un intervalo no trivial $J \subset \mathbb{R}$,

sea $\Phi : X \times \Omega \to \mathbb{R}$ una función verificando:

(1) Para cada $x \in X$, la función $y \mapsto \Phi\big(x, y\big)$ es integrable en Ω

(2) Para cada $y \in \Omega$, la función $x \mapsto \Phi\big(x, y\big)$ es derivable en J

Equivalentemente: $\exists \ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x,y) \quad \forall (x,y) \in J \times \Omega$

(3) Existe $g \in \mathcal{L}_1(\Omega)$ tal que: $\left| \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x,y) \right| \leqslant g(y) \quad \forall (x,y) \in J \times \Omega$

Entonces la función $\varphi : X \to \mathbb{R}$ definida por: $\displaystyle \varphi(x) = \int_\Omega \Phi(x,y)\, dy \quad \forall x \in X$

es derivable en J y su derivada viene dada por:

$$\varphi'(x) = \int_\Omega \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,y)\, dy \quad \forall x \in J$$

Derivación parcial de la integral dependiente de un parámetro

Versión para derivadas parciales

G abierto de $\mathbb{R}^M$, $k \in \Delta_M$, $\Phi : X \times \Omega \to \mathbb{R}$ verificando:

(1) Para cada $x \in G$, la función $y \mapsto \Phi\big(x, y\big)$ es integrable en Ω

(2) Φ es parcialmente derivable con respecto a la k-ésima variable en $G \times \Omega$

(3) Existe $g \in \mathcal{L}_1(\Omega)$ tal que: $\left|\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_k}(x,y)\right| \leqslant g(y) \quad \forall (x,y) \in G \times \Omega$

Entonces la función $\varphi : X \to \mathbb{R}$ dada por: $\varphi(x) = \displaystyle\int_\Omega \Phi(x,y)\, dy \quad \forall x \in X$

es derivable con respecto a la k-ésima variable en $G \times \Omega$ con:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x,y) = \int_\Omega \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}(x,y)\, dy \quad \forall (x,y) \in G \times \Omega$$

La función Gamma de Euler

Definición de Gamma

Para cada $x \in \mathbb{R}^+$ definimos $f_x(t) = t^{x-1} e^{-t} \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$

y se tiene $f_x \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^+)$, lo que permite definir:

$$\Gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, dt$$

La propiedad más atractiva

Se tiene: $\Gamma(1) = 1$ y $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

Por tanto $\Gamma(n+1) = n! \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

luego es coherente definir: $x! = \Gamma(x+1) \quad \forall x \in]-1, +\infty[$

Derivabilidad y comportamiento en el origen

Γ es una función de clase C^∞ en $\mathbb{R}^+$ con

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} (\log t)^k \, dt \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+, \ \forall k \in \mathbb{N}$$

Se tiene que $\Gamma(x) \to +\infty \quad (x \to 0)$