Análisis Matemático I

Tema 8: Vector gradiente

Derivadas direccionales: motivación

Notación

$X\,, Y$ espacios normados, $\Omega = \Omega^\circ \subset X\,,\ \ f : \Omega \to Y\,,\ \ a \in \Omega$

Motivación

f diferenciable en $a \quad \Longrightarrow \quad Df(a)(u) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(a+tu)-f(a)}{t} \quad \forall u \in X$

Para saber si f es diferenciable en a podríamos estudiar estos límites

Si $v = \lambda u$ con $\lambda \in \mathbb{R}^*$, entonces:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tu)-f(a)}{t} = y \in Y \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{s\to 0} \frac{f(a+sv)-f(a)}{s} = \lambda y$$

No se pierde generalidad suponiendo que $\|u\| = 1$

Derivadas direccionales

Derivadas direccionales

Dirección en X: vector $u \in X$ con $\|u\| = 1$. $S = \{u \in X : \|u\| = 1\}$

Fijamos $r \in \mathbb{R}^+$ con $B(a,r) \subset \Omega$ y para cada dirección $u \in S$ definimos:

$$\varphi_u :]-r, r[\to Y, \quad \varphi_u(t) = f(a + tu) \ \ \forall t \in]-r, r[$$

f es derivable en la dirección u en el punto a, cuando φ_u es derivable en 0

Entonces, la derivada direccional de f en a, en la dirección u, es:

$$f'_u(a) \overset{\text{def}}{=} \varphi'_u(0) = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi_u(t) - \varphi_u(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tu) - f(a)}{t}$$

$\exists\, f'_u(a) \iff \exists\, f'_{-u}(a)$, en cuyo caso: $f'_{-u}(a) = -f'_u(a)$

f es direccionalmente derivable en a cuando

es derivable en a, en la dirección u, para todo $u \in S$

Relación entre diferenciabilidad y derivabilidad direccional

Si f es diferenciable en a, entonces f es direccionalmente derivable en a

y para todo $u \in S$, se tiene: $f'_u(a) = Df(a)(u)$

Caso $X = \mathbb{R}^N$: derivadas parciales

Derivadas parciales

$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{R}^N$ (norma euclídea), $\{e_k : k \in \Delta_N\}$ base usual de $\mathbb{R}^N$

Y espacio normado, $f : \Omega \to Y$, $a \in \Omega$, $k \in \Delta_N$

Cuando f es derivable en a en la dirección e_k, decimos que f es derivable con respecto a la k-ésima variable en el punto a y la k-ésima derivada parcial de f en a se define por

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \stackrel{\text{def}}{=} f'_{e_k}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+te_k) - f(a)}{t}$$

f es parcialmente derivable en a cuando esto ocurre para todo $k \in \Delta_N$

Tenemos entonces N derivadas parciales de f en a:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_N}(a) \in Y$$

Relación entre diferenciabilidad y derivabilidad parcial

Si f es diferenciable en a, entonces f es parcialmente derivable en a y para todo $k \in \Delta_N$ se tiene: $\displaystyle \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = Df(a)(e_k)$

Derivadas parciales de un campo vectorial

Caso $Y = \mathbb{R}^M$

$$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{R}^N, \quad f = (f_1, f_2, \ldots, f_M) : \Omega \to \mathbb{R}^M, \quad a \in \Omega, \quad k \in \Delta_N$$

f es parcialmente derivable con respecto a la k-ésima variable en a

si, y sólo si, lo es f_j para todo $j \in \Delta_M$, en cuyo caso,

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_k}(a), \frac{\partial f_2}{\partial x_k}(a), \ldots, \frac{\partial f_M}{\partial x_k}(a) \right) \in \mathbb{R}^M$$

f es parcialmente derivable en a si, y sólo si, lo es f_j para todo $j \in \Delta_M$

El estudio de la derivabilidad parcial de un campo vectorial

se reduce al caso de un campo escalar

Derivadas parciales de campos escalares

Notación alternativa para las derivadas parciales

$$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{R}^N, \quad f : \Omega \to \mathbb{R}, \quad a = (a_1, a_2, \ldots a_N) \in \Omega$$

Para $t \in \mathbb{R}$ y $k \in \Delta_N$ se tiene: $a + te_k = \big(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k + t, a_{k+1}, \ldots, a_N\big)$

donde: $a + te_1 = \big(a_1 + t, a_2, \ldots, a_N\big)$ y $a + te_N = \big(a_1, \ldots, a_{N-1}, a_N + t\big)$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_k) - f(a)}{t} = \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\iff \quad \lim_{x_k \to a_k} \frac{f(a_1, \ldots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \ldots, a_N) - f(a)}{x_k - a_k} = \alpha$$

Si f es parcialmente derivable en a, se tiene:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \lim_{x_k \to a_k} \frac{f(a_1, \ldots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \ldots, a_N) - f(a)}{x_k - a_k} \quad \forall k \in \Delta_N$$

Caso $N = 2$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{x \to a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{y \to b} \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b}$$

Derivabilidad parcial en un abierto

Función derivada parcial

$$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{R}^N\,, \quad f : \Omega \to \mathbb{R}\,, \quad k \in \Delta_N$$

f es parcialmente derivable con respecto a la k-ésima variable

cuando lo es en todo punto $x \in \Omega$

Entonces, la función $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x)\,,$ de Ω en $\mathbb{R}$

es la k-ésima función derivada parcial de f

Para $x = \big(x_1, \ldots, x_{k-1}\,, x_k\,, x_{k+1}, \ldots, x_N\big) \in \Omega$, se tiene:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_k}\big(x_1, \ldots, x_{k-1}\,, x_k\,, x_{k+1}, \ldots, x_N\big)$$

Repaso de las derivadas parciales (I)

Caso $N = 2$

$$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{R}^2, \quad f : \Omega \to \mathbb{R}$$

Las derivadas parciales de f en un punto $(x_0, y_0) \in \Omega$, cuando existen, son:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

En un punto genérico $(x, y) \in \Omega$ podemos escribir

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{w \to x} \frac{f(w, y) - f(x, y)}{w - x} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{w \to y} \frac{f(x, w) - f(x, y)}{w - y}$$

Ejemplo

$f(x, y) = e^x \operatorname{sen} y \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ es parcialmente derivable con:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^x \operatorname{sen} y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = e^x \cos y \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Obsérvese que $\dfrac{\partial f}{\partial x} = f$

Repaso de las derivadas parciales (II)

Segundo ejemplo

$$f(\rho,\theta) = \big(\rho\cos\theta\,,\,\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\big) \quad \forall\,(\rho,\theta)\in\mathbb{R}^2$$

Componentes: $f = (x,y)$ donde

$$x(\rho,\theta) = \rho\cos\theta\,, \quad y(\rho,\theta) = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,, \quad \forall\,(\rho,\theta)\in\mathbb{R}^2$$

Se puede escribir: $x = \rho\cos\theta\,, \quad y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \quad (\rho,\theta\in\mathbb{R})$

x e y son parcialmente derivables y, para todo $(\rho,\theta)\in\mathbb{R}^2$, se tiene:

$$\frac{\partial x}{\partial\rho}(\rho,\theta) = \cos\theta\,, \quad \frac{\partial x}{\partial\theta}(\rho,\theta) = -\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,, \quad \frac{\partial y}{\partial\rho}(\rho,\theta) = \mathrm{sen}\,\theta\,, \quad \frac{\partial y}{\partial\theta}(\rho,\theta) = \rho\cos\theta$$

Obsérvese que: $\dfrac{\partial x}{\partial\theta} = -y\,,$ y $\dfrac{\partial y}{\partial\theta} = x$

f es parcialmente derivable y, para todo $(\rho,\theta)\in\mathbb{R}^2$ se tiene:

$$\frac{\partial f}{\partial\rho}(\rho,\theta) = \big(\cos\theta\,,\,\mathrm{sen}\,\theta\big)\,, \quad \frac{\partial f}{\partial\theta}(\rho,\theta) = \big(-\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,,\,\rho\cos\theta\big)$$

Gradiente de un campo escalar

Definición de gradiente

$$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{R}^N, \quad f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ parcialmente derivable en } a \in \Omega$$

El gradiente de f en a es el vector $\nabla f(a) \in \mathbb{R}^N$ definido por:

$$\nabla f(a) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)\, e_k = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_N}(a) \right)$$

Relación entre la diferencial y el gradiente

$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{R}^N, \quad f : \Omega \to \mathbb{R} \quad a \in \Omega$. Son equivalentes:

(1) f es diferenciable en a

(2) f es parcialmente derivable en a y se verifica que:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - \big(\nabla f(a) \,\big|\, x - a\big)}{\| x - a \|} = 0$$

Cuando se cumplen (1) y (2), se tiene: $Df(a)(x) = \big(\nabla f(a) \,\big|\, x\big) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$

Otra visión de la relación entre diferencial y gradiente

El espacio normado $L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$

Usemos en $\mathbb{R}^N$, a todos los efectos, la norma euclídea

Fijado $y \in \mathbb{R}^N$, definimos $T_y : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ por: $T_y(x) = (y|x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$

Entonces $T_y \in L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ con $\|T_y\| = \|y\|$

Si ahora definimos $\Phi : \mathbb{R}^N \to L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ por: $\Phi(y) = T_y \quad \forall y \in \mathbb{R}^N$

Φ es lineal, biyectiva y preserva la norma,

Luego Φ identifica totalmente los espacios normados $\mathbb{R}^N$ y $L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$

De las derivadas parciales a la diferencial

Condición suficiente de diferenciabilidad

$$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{R}^N, \quad f : \Omega \to \mathbb{R}, \quad a \in \Omega, \quad k \in \Delta_N$$

Supongamos que:

- f es derivable con respecto a la k-ésima variable en a

  abreviadamente: $\exists \ \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a)$

- Para cada $j \in \Delta_N \setminus \{k\}$, f es derivable con respecto a la j-ésima variable y la función $\dfrac{\partial f}{\partial x_j} : \Omega \to \mathbb{R}$ es continua en a

abreviado: $\forall j \in I_N \setminus \{k\} \ \exists \ \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x) \ \forall x \in \Omega$ y $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$

Entonces f es diferenciable en el punto a

Campos escalares de clase C^1

La función gradiente

$$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{R}^N, \quad f : \Omega \to \mathbb{R} \ \text{ parcialmente derivable}$$

La función $\nabla f : \Omega \to \mathbb{R}^N, \quad x \mapsto \nabla f(x)$ es la función gradiente de f

Componentes: $$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_N} \right)$$

Caracterización de los campos escalares de clase C^1

$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{R}^N, \quad f : \Omega \to \mathbb{R}$. Son equivalentes:

- $f \in C^1(\Omega)$
- f es parcialmente derivable en Ω y $\nabla f \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R}^N)$
- f es parcialmente derivable en Ω y $\dfrac{\partial f}{\partial x_k} \in \mathcal{C}(\Omega) \quad \forall k \in \Delta_N$

Interpretación física del gradiente

Derivadas direccionales y gradiente

$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{R}^N$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ direccionalmente derivable en $a \in \Omega$ fijo

Derivadas direccionales: $$f'_u(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tu) - f(a)}{t} \quad \forall u \in S$$

$f'_u(a)$ es la tasa de variación del campo por unidad de longitud en la dirección y sentido del vector u

Si f es diferenciable en a con $\nabla f(a) \neq 0$ y $v = \nabla f(a) / \|\nabla f(a)\|$:

$$f'_u(a) = \big(\nabla f(a) \,\big|\, u \big) \leqslant \|\nabla f(a)\| = f'_v(a) \quad \forall u \in S$$

En la dirección y el sentido del vector gradiente,
el campo aumenta lo más rápidamente posible,
a razón de $\|\nabla f(a)\|$ unidades de campo por unidad de longitud
En el sentido opuesto, disminuye lo más rápidamente posible

$$\nabla f(a) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f'_u(a) = 0 \ \forall u \in S$$

a es un punto crítico o estacionario del campo f

Interpretación geométrica del vector gradiente

Superficies en forma explícita

$$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{R}^2, \quad \Omega \ \text{conexo}, \quad f : \Omega \to \mathbb{R}^2 \ \text{continua}$$

Superficie explícita: $\Sigma = \operatorname{Gr} f = \{\big(x, y, f(x,y)\big) : (x,y) \in \Omega\} \subset \mathbb{R}^3$

Ecuación explícita de Σ: $z = f(x,y) \quad \big((x,y) \in \Omega\big)$

Otros dos tipos de superficie explícita:

$\Sigma_1 = \{\big(f(y,z), y, z\big) : (y,z) \in \Omega\}$ o bien $\Sigma_2 = \{\big(x, f(x,z), z\big) : (x,z) \in \Omega\}$

con ecuaciones: $x = f(y,z) \quad \big((x,z) \in \Omega\big)$ o bien $y = f(x,z) \quad \big((x,z) \in \Omega\big)$

Supongamos que f es diferenciable en $(x_0, y_0) \in \Omega$ y sean

$$z_0 = f(x_0, y_0), \quad P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Sigma, \quad \alpha_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \quad \beta_0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

$$\Pi_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z - z_0 = \alpha_0(x - x_0) + \beta_0(y - y_0)\}$$

es el plano tangente a la superficie Σ en el punto P_0

$$\big(\alpha_0, \beta_0, -1\big) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right)$$

es un vector normal a la superficie Σ en el punto P_0

Extremos absolutos y relativos

Extremos absolutos

$$\emptyset \neq A, \quad f : A \to \mathbb{R}, \quad a \in A$$

f tiene en a un máximo absoluto, cuando $\quad f(a) \geqslant f(x) \quad \forall x \in A$

f tiene en a un mínimo absoluto, cuando $\quad f(a) \leqslant f(x) \quad \forall x \in A$

extremo absoluto $=$ máximo absoluto o mínimo absoluto

Extremos relativos

E espacio métrico, $\emptyset \neq A \subset E \quad f : A \to \mathbb{R}, \quad a \in A^\circ$

f tiene en a un máximo relativo, cuando

$$\exists\, r \in \mathbb{R}^+ \ : \ B(a,r) \subset A \quad \text{y} \quad f(a) \geqslant f(x) \quad \forall x \in B(a,r)$$

f tiene en a un mínimo relativo, cuando

$$\exists\, r \in \mathbb{R}^+ \ : \ B(a,r) \subset A \quad \text{y} \quad f(a) \leqslant f(x) \quad \forall x \in B(a,r)$$

extremo relativo $=$ máximo relativo o mínimo relativo

extremo relativo $\not\Rightarrow$ extremo absoluto

extremo absoluto $\not\Rightarrow$ extremo relativo

Puntos críticos de un campo escalar

Condición necesaria de extremo relativo

$$\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^N, \quad f : A \to \mathbb{R}$$

Si f tiene un extremo relativo en un punto $a \in A^\circ$

y es parcialmente derivable en el punto a

entonces $\nabla f(a) = 0$

Cuando f es parcialmente derivable en $a \in A^\circ$ y $\nabla f(a) = 0$

se dice que f tiene en a un punto crítico