Índice

Introducción

Objetivo: ¿Cómo saber si un conjunto de fórmulas implica semanticamente a otra?

ET 4.1.
$\{\exists x P(x) \rightarrow \forall y P(y); \forall x(P(x) \vee Q(x))\} \vDash \exists x \neg Q(x) \rightarrow \forall y P(y)$

El problema se transforma en estudiar si el conjunto
$\Gamma = \{\forall x \forall y[\neg P(x) \vee P(y)], \forall x(P(x) \vee Q(x)), \neg Q(x), \neg P(b)\}$
Este conjunto está en forma normal clausulada y el problema se transforma en estudiar si el conjunto formado por las cláusulas es o no satisfactible $\Gamma = \{\neg P(x) \vee P(y), P(x) \vee Q(x), \neg Q(x), \neg P(b)\}$

Calculamos la resolvente de dos cláusulas.
$R(\neg P(x) \vee P(y), P(x) \vee Q(x)) = P(y) \vee Q(x)$ y por lo tanto

$$\{\neg P(x) \vee P(y), P(x) \vee Q(x)\} \models P(y) \vee Q(x)$$

Unificación. Sustituciones

Objetivo: dados dos o más literales transformarlos de manera que queden iguales, esto es, UNIFICAR literales.
Usaremos una sustitución (elemental)
Una sustitución es una transformación de una variable por un término en todas las ocurrencias de la variable en una fórmula. Se representa como $\sigma = (x|t)$.
Ejemplos:

- $\{P(x), \neg P(a)\}$. Con $\sigma = (x|a)$ ambos literales quedan iguales.
- $\{P(x), \neg P(f(x))\}$. Para unificar literales haríamos $\sigma = (x|f(x))$entonces, $\{P(f(x)), \neg P(f(f(x)))\}$ y esto es imposible de unificar.
- $\{Q(x,a), Q(y,b)\}$. $\sigma = (x|y)$ entonces $\{Q(x,a), Q(x,b)\}$. Ahora habría que unificar a y b pero eso es imposible pues son constantes.

Unificación

Un unificador es una sustitución (o cadena de sustituciones) que hace que dos o más literales se conviertan en idénticos.

Ejemplo: $P(a, x, f(g(y))),\ P(z, f(z), f(u))$

$\sigma_1 = (z|a)$ $\quad P(a, x, f(g(y))),\ P(a, f(a), f(u))$
$\sigma_2 = (x|f(a))$ $\quad P(a, f(a), f(g(y))),\ P(a, f(a), f(u))$
$\sigma_3 = (u|g(y))$ $\quad P(a, f(a), f(g(y))),\ P(a, f(a), f(f(g(y))))$
Un unificador es $\sigma = (z|a; x|f(a); u|g(y))$

Otro unificador es $\tau = (x|f(a); y|a; z|a; u|g(a))$ y ambos literales quedarían $P(a, f(a), f(g(a)))$.
Si σ es un unificador y τ es una sustitución, entonces $\tau\sigma$ también es un unificador para esas fórmulas
σ es un **unificador principal** si todos los unificadores pueden obtenrse a partir de σ. es un unificador del que se pueden obtener todos los demás

Algortimo de unificación. Discordancia

Un conjunto de discordancia para un par de literales es el conjunto formado por los primeros términos (recorridos los literales de izquierda a derecha) en los que difieren.

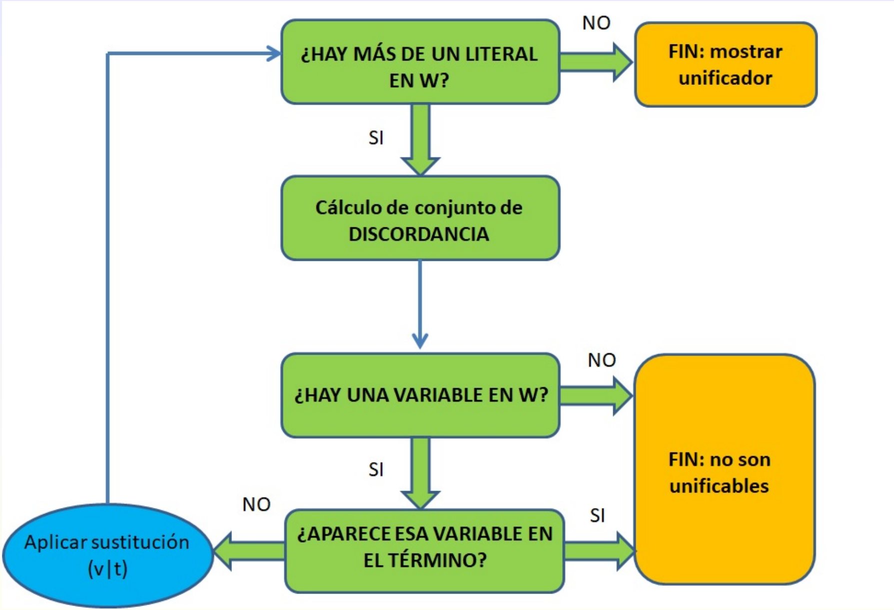
Ejemplos:

- $\{P(x), P(y)\}$.El conjunto de discordancia es $D = \{x, y\}$ (Dos símbolos de variable)
- $\{Q(x, f(x, y)); Q(x, f(y, y))\}$. El conjunto de discordancia es $D = \{x, y\}$ (Dos símbolos de variable)
- $\{R(g(x)); R(f(y))\}$.El conjunto de discordancia es $D = \{g(x), f(y)\}$ (Ningún símbolo de variable)
- $\{Q(x, f(x, y)); Q(x, f(g(x), y))\}$.El conjunto de discordancia es $D = \{x, g(x)\}$ (Un símbolo de variables y un término que depende de esa variable)

Algoritmo de unificación

- **Datos de entrada**: literales a unificar (W)
- **Salida**: un unificador principal o la respuesta "no son unificables".
- **Descripción del algortimo**:
  Inicialización: $W_0 := W$; $\sigma_0 = Id$
  Bucle: Si el número de elementos de W_k es 1, entonces el proceso acaba y σ_k es el unifcador principal.
  En otro caso: Calcular el conjunto de discordancia de W_k, D.
  Si en D no aparece ningún símbolo de variable o aparece un símbolo de variable y hay un término que depende de esa variable, entonces el proceso termina porque **no son unificables**.
  Si existe una variable v_k y un término t_k en el que no aparece la variable v_k entonces $\sigma_{k+1} = (v_k|t_k)$ y aplicamos la sustitución $(v_k|t_k)$ a W_k para obtener W_{k+1} y volvemos a ejecutar el bucle para W_{k+1}.

Esquema del algortimo de unificación



Algortimo de unificación. Ejemplo

$W = \{P(a,x,f(g(y))), P(z,f(z),f(u))\}$
Inicialización $W_0 = \{P(a,x,f(g(y))), P(z,f(z),f(u))\}$;
$\sigma_0 =$ identidad

- $|W_0| = 2$, el conjunto de discordancia es $D = \{a, z\}$; Entonces $\sigma_1 = (z|a)$ y $W_1 = \{P(a,x,f(g(y))), P(a,f(a),f(u))\}$
- $|W_1| = 2$, el conjunto de discordancia es $D = \{x, f(a)\}$; Entonces $\sigma_2 = (z|a; x|f(a))$ y $W_2 = \{P(a,f(a),f(g(y))), P(a,f(a),f(u))\}$
- $|W_2| = 2$,el conjunto de discordancia es $D = \{g(y), u\}$; Entonces $\sigma_3 = (z|a; x|f(a); u|g(y))$ y $W_3 = \{P(a,f(a),f(g(y)))\}$

Algortimo de unificación. Ejemplo

$$W = \{P(x,y), P(f(z),x), P(u,f(x))\}$$

D	τ	W$_i$	σ	$\lvert W_i$
		$\{P(x,y), P(f(z),x), P(u,f(x))\}$	Id	3
$\{x, f(z)\}$	$(x\lvert f(z))$	$\{P(f(z),y), P(f(z),f(z)), P(u,f(f(z)))\}$	$(x\lvert f(z))$	3
$\{y, f(z)\}$	$(y\lvert f(z))$	$\{P(f(z),f(z)), P(u,f(f(z)))\}$	$(y\lvert f(z))(x\lvert f(z))$	2
$\{u, f(z)\}$	$(y\lvert f(z))$	$\{P(f(z),f(z)), P(f(z),f(f(z)))\}$	$(u\lvert f(z))(y\lvert f(z))(x\lvert f(z))$	2
$\{z, f(z)\}$				

$$W = \{Q(x,g(y)), Q(f(y),g(f(b)))\}$$

Sistemas de ecuaciones en términos

Objetivo: Decidir si un conjunto de fórmulas es o no unificable.
Decidir si dos fórmulas atómicas con el mismo símbolo de predicado son unificables.
Dados $\alpha = R(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ y $\beta = R(t'_1, t'_2, \ldots, t'_n)$ buscamos una sustitución (σ) que transforme t_i en t'_i de manera que $\sigma(\alpha) = \sigma(\beta)$.
Tenemos un sistema con n ecuaciones $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, y una solución σ es una sustitución que tranforma t_i en t'_i.
Si a una solución le aplicamos una sustitución, tendremos otra solución.
Llamaremos solución principal a esa solución a partir de la cual se obtienen las demás.

Sistemas de ecuaciones en términos

Definición

Dado un sistema de ecuaciones en términos $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, se dice que está en forma resuelta si:

- Cada ecuación del sistema es de la forma $x_i = t_i$, con x_i una variable
- Las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son todas distintas
- En los términos $t_1, t_2, \ldots, t_n$ no hay ninguna ocurrencia de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$

En tal caso $\sigma_E = \{x_1|t_1, x_2|t_2, \ldots, x_n|t_n\}$ es una solución principal del sistema

Dos sistemas de ecuaciones en términos son equivalentes si tienen las mismas soluciones.
Queremos transformar nuestros sistemas en otros quivalentes que estén en forma resuelta

Sistemas de ecuaciones en términos. Transformaciones

1. Los sistemas $E \cup \{t = t\}$ y E son equivalentes.
2. Los sistemas $E \cup \{t_1 = t_2\}$ y $E \cup \{t_2 = t_1\}$ son equivalentes.
3. Los sistemas $E \cup \{f(t_1, \ldots, t_n) = f(t'_1, \ldots, t'_n)\}$ y $E \cup \{t_1 = t'_1, \ldots, t_n = t'_n\}$ son equivalentes
4. Los sistemas $E \cup \{x = t\}$, con x variable que no aparece en t y $\sigma(E) \cup \{x = t\}$ son equivalentes ($\sigma = (x|t)$).
5. Un sistema de la forma $E \cup \{x = t\}$, con t un término distinto de x pero en el que interviene la variable x, no tiene solución.
6. Un sistema de la forma $E \cup \{f(t_1, \ldots, t_n) = g(t'_1, \ldots, t'_n)\}$, con $f \neq g$ no tiene solución
7. Un sistema de la forma $E \cup \{f(t_1, \ldots, t_n) = a\}$, o de la forma $E \cup \{a = b\}$, con $a \neq b$ no tiene solución.

Transformaciones. Ejemplos

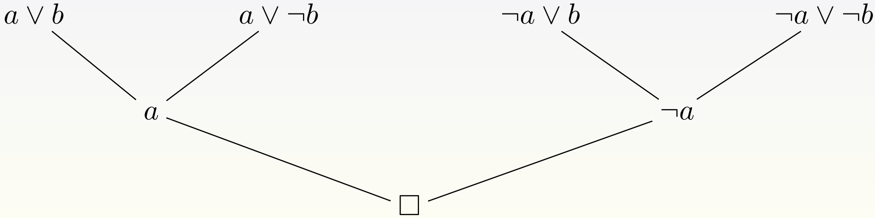
1. $$\left.\begin{array}{lcr} a & = & z \\ x & = & f(z) \\ f(g(y)) & = & f(u) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rcr} z & = & a \\ x & = & f(a) \\ u & = & g(y) \end{array}\right\}$$
2. ¿Es unificable $\{P(x,y), P(f(z),x), P(u,f(x))\}$?
3. ¿Es unificable $\{P(x,g(x),y,h(x,y),z,k(x,y,z)), P(u,v,e(v),w,f(v,w),t)\}$?

El método de resolución. Recordatorio

Un ejemplo en la lógica proposicional sería estudiar si el conjunto $\Gamma = \{a \vee b, a \vee \neg b, \neg a \vee b, \neg a \vee \neg b\}$ es satisfactible.
Calculamos la resolvente de dos cláusulas.

$$\begin{array}{l} a \vee b \\ a \vee \neg b \\ \hline a \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} \neg a \vee b \\ \neg a \vee \neg b \\ \hline \neg a \end{array}$$

Estudiar la insatisfactibilidad de Γ equivale a estudiar la de $\{a \vee b, a \vee \neg b, \neg a \vee b, \neg a \vee \neg b, a, \neg a\}$. Esto es



Ampliación del concepto de resolvente. Ejemplos

El objetivo es calcular resolventes para aplicar el método de resolución.

1. $C_1 = \neg P(x) \vee Q(b)$ y $C_2 = P(a).\{P(x), P(a)\}$ son unificables con $\sigma = (x|a)$ como unificador principal.

$$\sigma(C_1) = \neg P(a) \vee Q(b); \sigma(C_2) = P(a)$$

$$R(\sigma(C_1), \sigma(C_2) = Q(b) \Rightarrow \{C_1, C_2\} \models Q(b)$$

2. $C_1 = P(x, b) \vee Q(x, a)$; $C_2 = \neg P(a, z) \vee R(z)$

$$\{C_1, C_2\} \models Q(a, a) \vee R(b)$$

Ampliación del concepto de resolvente. Resolvente binaria

Dadas dos cláusulas C_1, C_2 que no tienen variables comunes, y supongamos que hay dos literales unificables tales que $C_1 = L_1 \vee C_1'$ y $C_2 = (L_2)^c \vee C_2'$ con σ el unificador de L_1 y L_2, entonces la cláusula $\sigma(C_1') \vee \sigma(C_2')$ es una resolvente binaria.

Ejemplos.

1. $Q(b)$ es una resolvente binaria de $C_1 = \neg P(x) \vee Q(b)$ y $C_2 = P(a)$.
2. $Q(a,a) \vee R(b)$ es una resolvente binaria de $C_1 = P(x,b) \vee Q(x,a)$; y $C_2 = \neg P(a,z) \vee R(z)$

Resolvente binaria. Ejemplos.

Si de un conjunto de cláusulas podemos obtener la cláusula vacía haciendo resolventes, entonces el conjunto es insatisfactible.

1. $\{P(x), \neg P(f(x))\}$ es insatisfactible.

Observación

Las variables de dos cláusulas distintas son distintas aunque se llamen igual. En caso de que ocurra eso cambiaremos el nombre a alguna de ellas.

$\{P(x), \neg P(f(y))\}$ es insatisfactible.

2. $\{P(x) \vee P(y), \neg P(z) \vee \neg P(u)\}$ es insatisfactible, pero no mediante resolventes binarias.

Ampliación del concepto de resolvente. Factor

Un factor es la cláusula que resulta al unificar dos literales de una misma cláusula.

Ejemplo. $C = P(x) \vee P(f(a)) \vee Q(x, b)$.
$P(x)$ y $P(f(a))$ son unificables bajo $\sigma = (x|f(a))$. Si hacemos $\sigma(C) = P(f(a)) \vee Q(f(a), b)$

Una resolvente de dos cláusulas es una resolvente binaria de ellas o de sus factores.

Observación

Si C es una resolvente de C_1 y C_2, entonces $\{C_1, C_2\} \models C$

Ejemplo $\{P(x) \vee P(y), \neg P(z) \vee \neg P(u)\}$ es insatisfactible.
$P(x)$ es un factor de $P(x) \vee P(y)$ y $\neg P(z)$ es un factor de $\neg P(z) \vee \neg P(u)$ y $\Box$ es una resolvente binaria de esos factores.

Ampliación del concepto de resolvente. Cálculo de resolventes

$$C_1 = Q(x) \vee \neg R(x) \vee P(x, y) \vee P(f(z), f(z)),$$

$$C_2 = \neg S(u) \vee \neg R(w) \vee \neg P(f(a), f(a)) \vee \neg P(f(w), f(w))$$

Ampliación del concepto de resolvente. ET.4.3.m)

$$\{Q(x,f(a)) \vee Q(f(b),y), \neg Q(x,f(y)) \vee \neg Q(f(z),t))\}$$

Calcularemos los factores y luego una resolvente binaria para obtener una resolvente.

$$\begin{tikzcd}
Q(x,f(a)) \vee Q(f(b),y) \arrow[d, "\sigma_1=(x|f(b);y|f(a))"] & & \neg Q(x,f(y)) \vee \neg Q(f(z),t) \arrow[d, "\sigma_2=(x|f(z);t|f(y))"] \\
Q(f(b),f(a)) \arrow[dr, dash] & & \neg Q(f(z),f(y)) \arrow[dl, dash, "\tau=(z|b;y|a)"] \\
& \square &
\end{tikzcd}$$

Ampliación del concepto de resolvente. ET.4.3.m)

En estos casos es conveniente renombrar variables y hacer todas las sustituciones

$$Q(x_1, f(a)) \vee Q(f(b), y_1) \qquad\qquad \neg Q(x_2, f(y_2)) \vee \neg Q(f(z), t)$$

$$(x_1|f(b); y_1|f(a)) \qquad\qquad (x_2|f(b); y_2|b; z|b; t|f(b))$$

$$\square$$

ET. 4.4 g)

$$\Gamma = \{R(a), D(y)\vee S(a,y), \neg R(x)\vee\neg Q(y)\vee\neg S(x,y), \neg D(f(x)), Q(f(x))\}$$

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
D(y) \vee S(a,y) \arrow[d, "(x|a)"] & \neg R(x) \vee \neg Q(y) \vee \neg S(x,y) \arrow[dl] \\
D(y) \vee \neg R(a) \vee \neg Q(y) \arrow[d] & R(a) \arrow[dl] \\
D(y) \vee \neg Q(y) \arrow[d, "(y|f(x))"] & \neg D(f(x)) \arrow[dl] \\
\neg Q(f(x)) \arrow[d] & Q(f(x)) \arrow[dl] \\
\square &
\end{tikzcd}$$

Deducción o refutación.

Este proceso se llama *deducción de la cláusula vacía mediante resolución o refutación*. Formalmente se escribe como una sucesión finita de cláusulas que bien son elementos del conjunto de partida, bien resolventes de ellas.

1. $D(y) \vee S(a,y)$ y $\neg R(x) \vee \neg Q(y) \vee \neg S(x,y)$ son cláusulas de Γ
2. $D(y) \vee \neg R(a) \vee \neg Q(y)$ es resolvente de $D(y) \vee S(a,y)$ y $\neg R(x) \vee \neg Q(y) \vee \neg S(x,y)$.
3. $R(a)$ es una cláusula de Γ
4. $D(y) \vee \neg Q(y)$ es resolvente de $D(y) \vee \neg R(a) \vee \neg Q(y)$ y $R(a)$
5. $\neg D(f(x))$ es una cláusula de Γ
6. $\neg Q(f(x))$ es resolvente de $D(y) \vee \neg Q(y)$ y $\neg D(f(x))$
7. $Q(f(x))$ es una cláusula de Γ
8. $\square$ es resolvente de $\neg Q(f(x))$ y $Q(f(x))$.

Completitud del principio de resolución

Teorema

Sea Γ un conjunto de cláusulas. Entonces Γ es insatisfactible sí y sólo sí existe una deducción de $\square$ a partir de Γ.

Ejemplos:

1. $\Gamma = \{\neg P(x) \vee Q(f(x), x), P(g(b)), \neg Q(y, z)\}$
2. $\{\forall x Q(x) \vee \exists y P(y), \neg \forall y Q(y)\} \models \exists P(x)$

Completitud del principio de resolución

Problema

¿Cómo estamos seguros de que NO existe una deducción lineal de $\square$ a partir de Γ?

- Estrategias de saturación: calcular todas las posibles resolventes.
- Estrategias lineales: se elige una raíz (lineales- input: sólo se calculan resolventes con las cláusulas de partida)

Estrategias de saturación. ET4. 4.a)

$$\{\neg P(x) \vee Q(f(x)), P(a), \neg P(x) \vee \neg Q(x)\}$$

$S_0 = \{C_1 = \neg P(x_1) \vee Q(f(x_1)), C_2 = P(a), C_3 =$
$\neg P(x_2) \vee \neg Q(x_2)\}$

$R(C_1, C_2) = Q(f(a))$
$R(C_1, C_3) = \neg P(x_1) \vee \neg P(f(x_1))$
$R(C_2, C_3) = \neg Q(a)$

$S_1 = \{C_1, C_2, C_3, C_4 = Q(f(a)), C_5 = \neg P(x_1) \vee \neg P(f(x_1)), C_6 =$
$\neg Q(a)\}$

$\nexists R(C_1, C_4)$	$\nexists R(C_2, C_4)$	$R(C_3, C_4) = \neg P(f(a))$	$\nexists R(C_4,$
$\nexists R(C_1, C_5)$	$R(C_2, C_5) = \neg P(f(a))$	$\nexists R(C_3, C_5)$	$\nexists R(C_4,$
$\nexists R(C_1, C_6)$	$\nexists R(C_2, C_6)$	$\nexists R(C_3, C_6)$	$\nexists R(C_5,$

$S_2 = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7 = \neg P(f(a))\}$

Como no hay resolvente de C_7 con ninguna de las demás clásusulas, $S_2 = S_3$ y por tanto el conjunto sería satisfactible porque no hemos encontrado la cláusula vacía.

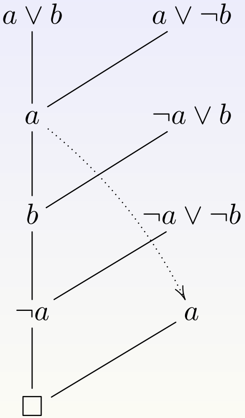
Estrategias de saturación. Ejemplos

1. $\{A(b), \neg M(y) \vee P(b, y), \neg P(x, z), M(a), C(a)\}$
2. $\{\neg P(x) \vee P(f(x)), P(a)\}$
   $S_n = \{\neg P(x) \vee$
   $P(f(x)), P(a), P(f(a)), P(f(f(a))), P(f(f(f(a)))), \ldots\}$

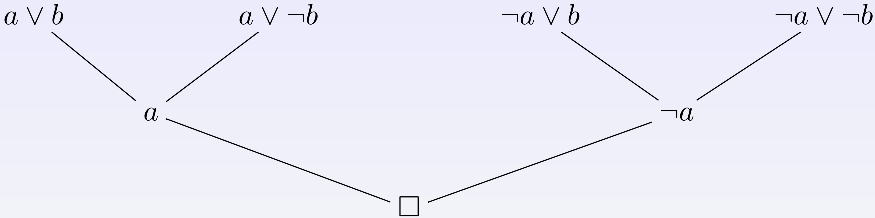
Voy a poder seguir calculando resolventes distintas y nunca acabaré ni llegaré a la cláusula vacía
Inconvenientes: son muy largas y **no siempre tiene fin**.

Estrategias lineales

En una estrategia lineal se elige un punto de partida (raíz) y se calculan resolventes sobre la anterior resolvente. Gráficamente:



Estrategias no lineales



Teorema

Si para un conjunto de cláusulas existe una deducción de la cláusula vacía, entonces existe una deducción lineal de la cláusula vacía.

Teorema: Completitud de la estrategia lineal

Γ es insatisfactible sí y sólo sí existe una deducción lineal de $\square$ a partir de Γ

Estrategia lineal-input

lineal: se elige raíz

input: sólo se calculan resolventes con las cláusulas de partida

El ejemplo lineal anterior no es input

- **Ventajas:** En cada paso sólo hay que probar con un número finito de claúsulas.
- **Inconvenientes:**
  1. ¿Cómo se elige la raíz?
  2. No es una estrategia completa (en el ejemplo anterior: el conjunto es insatisfactible, pero no hay una deducción L-I que llegue a la cláusula vacía)
- **¿Por qué es interesante?:** Porque es completa cuando el conjunto de cláusulas es un conjunto de Horn.

Conjuntos de Horn

Definición

Dado un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$:

1. Se dice que un literal es positivo si es una fórmula atómica.
2. Se dice que un literal es negativo si es el negado de una fórmula atómica.
3. Una cláusula se dice negativa si todos los literales que aparecen en ella son literales negativos.
4. Una cláusula se dice de Horn si tiene exactamente un literal positivo.
5. Un conjunto de cláusulas es un conjunto de Horn si tiene exactamente una cláusula negativa y el resto de las cláusulas son cláusulas de Horn.

Conjuntos de Horn. ET4. 4k)

$$\{\neg M(x)\vee\neg D(x)\vee\neg CC(x,y)\vee\neg C(y), C(b), D(x)\vee\neg M(x), \neg D(x)\vee M(x$$

$$\neg C(y)\vee CC(f(y),y), \neg C(y)\vee\neg CC(x,y)\vee M(x)\}$$

Conjuntos de Horn

Las cláusulas de Horn se clasifican como:

- Hechos: si sólo contienen al literal positivo
- Reglas: si tienen algún literal negativo

Las cláusulas negativas se denominan objetivos.
En un lenguaje de programación PROLOG, un conjunto de reglas y hechos (un conjunto de Horn) forman un programa

Teorema

Si Γ es un conjunto de Horn , Γ es insatisfactible sí y sólo sí existe una deducción lineal-input de $\Box$ con raíz la cláusula objetivo.

Observación

Un conjunto de Horn puede ser SATISFACTIBLE

$$\{\neg P, \neg Q \vee P\}$$