Ejercicio 1.17: Estudiar el comportamiento en cero de la función $f: A \to \mathbb{R}$, en cada uno de los siguientes casos:

a) $A =]0, \frac{\pi}{2}[,\ f(x) = (\operatorname{sen} x + \cos x)^{\frac{1}{x}}\ (x \in A)$,

La función no está definida en $x=0$ y tampoco para $x<0$, pero podemos estudiar el comportamiento de $f(x)$ al tomar valores tan cercanos al 0 como queramos por la derecha.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x + \cos x)^{1/x}; \quad \left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x + \cos x) = 1 \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^+} f(x) = e^L \\ L = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}(\operatorname{sen} x + \cos x - 1) \end{array}\right.$$

$$L = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}(\operatorname{sen} x + \cos x - 1) \overset{\frac{0}{0};\ \text{L'hôpital}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{1} = 1 \Longrightarrow \boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = e}$$

b) $A =]0, \frac{\pi}{2}[,\ f(x) = \left(\cos x + \frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}\ (x \in A)$,

La función no está definida en $x=0$ y tampoco para $x<0$, pero podemos estudiar el comportamiento de $f(x)$ al tomar valores tan cercanos al 0 como queramos por la derecha.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\cos(x) + \frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}} \quad \left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^+} (\cos x + \frac{x^2}{2}) = 1 \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = \infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^+} f(x) = e^L \\ L = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}(\cos x + \frac{x^2}{2} - 1) \end{array}\right.$$

$$L = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}\left(\cos x + \frac{x^2}{2} - 1\right) \overset{\frac{0}{0};\ \text{L'hôpital}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{-\operatorname{sen} x + x}{2x} \overset{\frac{0}{0};\ \text{L'hôpital}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{-\cos x + 1}{2} = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x) = e^0 \Longrightarrow \boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1}$$