Análisis Matemático I

Tema 10: Teorema del valor medio

Motivación

El teorema que conocemos

$a\,,b\in\mathbb{R}\,,\quad a<b\,,\quad f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en $]a,b[$

Teorema del valor medio:

$$\exists\ c\in]a,b[\ :\ f(b)-f(a)=f'(c)\,(b-a)$$

Desigualdad del valor medio:

Si existe $M\in\mathbb{R}_0^+$ tal que $|f'(x)|\leqslant M\quad\forall x\in]a,b[$, entonces:

$$|f(b)-f(a)|\leqslant M(b-a)$$

Teorema del valor medio escalar

Notación

X espacio normado, $a,b \in X$

$$[a,b] = \{a+t(b-a) : t \in [0,1]\} \quad \text{y} \quad]a,b[= \{a+t(b-a) : t \in]0,1[\}$$

Teorema del valor medio escalar

X espacio normado, $\Omega = \Omega^\circ \subset X$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $a,b \in \Omega$ tales que $[a,b] \subset \Omega$

Si f es continua en $[a,b]$ y diferenciable en $]a,b[$, entonces:

$$\exists\ c \in]a,b[\ : \ f(b) - f(a) = Df(c)(b-a)$$

Si existe $M \in \mathbb{R}_0^+$ tal que $\|Df(x)\| \leqslant M \quad \forall x \in]a,b[$, entonces:

$$|f(b) - f(a)| \leqslant M\|b-a\|$$

Dem.

$\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$

$\varphi(t) = f(a + t(b-a)) \quad \forall t \in [0,1]$

continua en $[0,1]$ por ser composición de continuas

$t \in]0,1[$

Como φ es derivable en $]0,1[$, $\varphi'(t) = Df(a+t(b-a))(b-a)$

$\exists t_0 \in]0,1[\ / \ f(b) - f(a) = \varphi'(t_0)$

$]a,b[\ni a + t_0(b-a) = c$

$f(b) - f(a) = Df(c)(b-a)$

$|f(b) - f(a)| \leq M \|b-a\|$

Teorema del valor medio para campos escalares

Caso particular de un campo escalar

$$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{R}^N, \quad f : \Omega \to \mathbb{R}, \quad a, b \in \Omega \text{ tales que } [a,b] \subset \Omega$$

Si f es continua en $[a,b]$ y diferenciable en $]a,b[$, entonces:

$$\exists\, c \in]a,b[\;\; : \;\; f(b) - f(a) = \big(\nabla f(c) \,\big|\, b - a \big)$$

Usando en $\mathbb{R}^N$ la norma euclídea,

si existe $M \in \mathbb{R}_0^+$ tal que $\|\nabla f(x)\| \leqslant M \;\; \forall x \in]a,b[$, entonces:

$$|f(b) - f(a)| \leqslant M \|b - a\|$$

El teorema no es cierto para campos vectoriales

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad f(t) = \big(\cos t, \operatorname{sen} t \big) \;\; \forall t \in \mathbb{R}$$

f es derivable con $f'(t) = \big(-\operatorname{sen} t, \cos t \big) \;\; \forall t \in \mathbb{R}$

$f(0) = f(2\pi)$ pero $f'(t) \neq (0,0) \;\; \forall t \in \mathbb{R}$

Desigualdad del valor medio

Lema clave

Y espacio normado, $g:[0,1]\to Y$, $\alpha:[0,1]\to\mathbb{R}$,

Supongamos que g y α son continuas en $[0,1]$ y derivables en $]0,1[$,

verificando que: $\|g'(t)\|\leqslant\alpha'(t)\quad\forall t\in]0,1[$

Entonces: $\|g(1)-g(0)\|\leqslant\alpha(1)-\alpha(0)$

Desigualdad del valor medio

X,Y espacios normados, $\Omega=\Omega^\circ\subset X$, $f:\Omega\to Y$, $a,b\in\Omega$, $[a,b]\subset\Omega$

Supongamos que f es continua en $[a,b]$ y diferenciable en $]a,b[$, y que

existe $M\in\mathbb{R}_0^+$ tal que $\|Df(x)\|\leqslant M\quad\forall x\in]a,b[$

Entonces: $\|f(b)-f(a)\|\leqslant M\|b-a\|$

Dem.

$g : [0,1] \to Y \qquad \forall t \in [0,1]$

$\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}$

$g(t) = f((1-t)a + tb) \quad \forall t \in [0,1]$

$\alpha(t) = t \cdot M \|b-a\|$

Consecuencias de la desigualdad del valor medio

Consecuencias de la desigualdad del valor medio

Corolario 1

Consecuencias de la desigualdad del valor medio

Corolario 1

$X\,,Y$ espacios normados, $\Omega = \Omega^\circ \subset X\,,$ Ω convexo, $f \in D(\Omega, Y)$

Consecuencias de la desigualdad del valor medio

Corolario 1

$X\,,Y$ espacios normados, $\Omega = \Omega^\circ \subset X\,,$ Ω convexo, $f \in D(\Omega, Y)$

Supongamos que existe $M \in \mathbb{R}_0^+$ tal que $\|Df(x)\| \leqslant M \quad \forall x \in \Omega$

Consecuencias de la desigualdad del valor medio

Corolario 1

$X\,,Y$ espacios normados, $\Omega = \Omega^\circ \subset X\,,$ Ω convexo, $f \in D(\Omega, Y)$

Supongamos que existe $M \in \mathbb{R}_0^+$ tal que $\|Df(x)\| \leqslant M \quad \forall x \in \Omega$

Entonces f es lipschitziana con constante M, es decir:

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant M\|b-a\| \quad \forall a,b \in X$$

Consecuencias de la desigualdad del valor medio

Corolario 1

X, Y espacios normados, $\Omega = \Omega^\circ \subset X$, Ω convexo, $f \in D(\Omega, Y)$

Supongamos que existe $M \in \mathbb{R}_0^+$ tal que $\|Df(x)\| \leqslant M \quad \forall x \in \Omega$

Entonces f es lipschitziana con constante M, es decir:

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant M\|b - a\| \quad \forall a, b \in X$$

Corolario 2

Consecuencias de la desigualdad del valor medio

Corolario 1

$X\,,Y$ espacios normados, $\Omega = \Omega^\circ \subset X\,,$ Ω convexo, $f \in D(\Omega, Y)$

Supongamos que existe $M \in \mathbb{R}_0^+$ tal que $\|Df(x)\| \leqslant M \quad \forall x \in \Omega$

Entonces f es lipschitziana con constante M, es decir:

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant M\|b-a\| \quad \forall a,b \in X$$

Corolario 2

$X\,,Y$ espacios normados, $\Omega = \Omega^\circ \subset X\,,$ Ω conexo, $f \in D(\Omega, Y)$

Consecuencias de la desigualdad del valor medio

Corolario 1

$X\,,Y$ espacios normados, $\Omega = \Omega^\circ \subset X\,,$ Ω convexo, $f \in D(\Omega, Y)$

Supongamos que existe $M \in \mathbb{R}_0^+$ tal que $\|Df(x)\| \leqslant M \quad \forall x \in \Omega$

Entonces f es lipschitziana con constante M, es decir:

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant M\|b - a\| \quad \forall a, b \in X$$

Corolario 2

$X\,,Y$ espacios normados, $\Omega = \Omega^\circ \subset X\,,$ Ω conexo, $f \in D(\Omega, Y)$

Supongamos que $Df(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega$

Consecuencias de la desigualdad del valor medio

Corolario 1

$X\,,Y$ espacios normados, $\Omega = \Omega^\circ \subset X\,,$ Ω convexo, $f \in D(\Omega, Y)$

Supongamos que existe $M \in \mathbb{R}_0^+$ tal que $\|Df(x)\| \leqslant M \quad \forall x \in \Omega$

Entonces f es lipschitziana con constante M, es decir:

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant M\|b - a\| \quad \forall a, b \in X$$

Corolario 2

$X\,,Y$ espacios normados, $\Omega = \Omega^\circ \subset X\,,$ Ω conexo, $f \in D(\Omega, Y)$

Supongamos que $Df(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega$

Entonces f es constante

Aplicaciones a campos escalares o vectoriales

Aplicaciones a campos escalares o vectoriales

Todas las derivadas parciales idénticamente nulas

Aplicaciones a campos escalares o vectoriales

Todas las derivadas parciales idénticamente nulas

$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{R}^N$, Ω conexo, $f : \Omega \to \mathbb{R}^M$, parcialmente derivable

Aplicaciones a campos escalares o vectoriales

Todas las derivadas parciales idénticamente nulas

$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{R}^N$, Ω conexo, $f : \Omega \to \mathbb{R}^M$, parcialmente derivable

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = 0 \;\; \forall x \in \Omega, \;\; \forall k \in \Delta_N \quad \Longrightarrow \quad f \;\text{ constante}$$

Aplicaciones a campos escalares o vectoriales

Todas las derivadas parciales idénticamente nulas

$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{R}^N$, Ω conexo, $f : \Omega \to \mathbb{R}^M$, parcialmente derivable

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = 0 \ \ \forall x \in \Omega, \ \ \forall k \in \Delta_N \quad \Longrightarrow \quad f \ \text{ constante}$$

Notación

Aplicaciones a campos escalares o vectoriales

Todas las derivadas parciales idénticamente nulas

$$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{R}^N, \quad \Omega \text{ conexo}, \quad f : \Omega \to \mathbb{R}^M, \text{ parcialmente derivable}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = 0 \ \ \forall x \in \Omega, \ \ \forall k \in \Delta_N \quad \Longrightarrow \quad f \ \text{ constante}$$

Notación

Si $N \geqslant 2$, fijado $k \in \Delta_N$, para $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, escribiremos:

Aplicaciones a campos escalares o vectoriales

Todas las derivadas parciales idénticamente nulas

$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{R}^N$, Ω conexo, $f : \Omega \to \mathbb{R}^M$, parcialmente derivable

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall k \in \Delta_N \quad \Longrightarrow \quad f \text{ constante}$$

Notación

Si $N \geqslant 2$, fijado $k \in \Delta_N$, para $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, escribiremos:

$$\widehat{x} = (x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^{N-1}$$

Aplicaciones a campos escalares o vectoriales

Todas las derivadas parciales idénticamente nulas

$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{R}^N$, Ω conexo, $f : \Omega \to \mathbb{R}^M$, parcialmente derivable

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = 0 \ \ \forall x \in \Omega, \ \ \forall k \in \Delta_N \quad \Longrightarrow \quad f \ \text{ constante}$$

Notación

Si $N \geqslant 2$, fijado $k \in \Delta_N$, para $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, escribiremos:

$$\widehat{x} = (x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^{N-1}$$

Una derivada parcial idénticamente nula

Aplicaciones a campos escalares o vectoriales

Todas las derivadas parciales idénticamente nulas

$$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{R}^N, \quad \Omega \text{ conexo}, \quad f : \Omega \to \mathbb{R}^M, \text{ parcialmente derivable}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = 0 \ \ \forall x \in \Omega, \ \ \forall k \in \Delta_N \quad \Longrightarrow \quad f \ \text{ constante}$$

Notación

Si $N \geqslant 2$, fijado $k \in \Delta_N$, para $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, escribiremos:

$$\widehat{x} = (x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^{N-1}$$

Una derivada parcial idénticamente nula

$$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{R}^N, \quad \Omega \text{ convexo}, \ k \in \Delta_N, \ U = \left\{ \widehat{x} : x \in \Omega \right\}$$

Aplicaciones a campos escalares o vectoriales

Todas las derivadas parciales idénticamente nulas

$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{R}^N$, Ω conexo, $f : \Omega \to \mathbb{R}^M$, parcialmente derivable

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall k \in \Delta_N \quad \Longrightarrow \quad f \ \text{ constante}$$

Notación

Si $N \geqslant 2$, fijado $k \in \Delta_N$, para $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, escribiremos:

$$\widehat{x} = (x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^{N-1}$$

Una derivada parcial idénticamente nula

$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{R}^N$, Ω convexo, $k \in \Delta_N$, $U = \left\{ \widehat{x} : x \in \Omega \right\}$

$f : \Omega \to \mathbb{R}^M$, derivable con respecto a la k-ésima variable con

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega$$

Aplicaciones a campos escalares o vectoriales

Todas las derivadas parciales idénticamente nulas

$$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{R}^N, \quad \Omega \text{ conexo}, \quad f : \Omega \to \mathbb{R}^M, \text{ parcialmente derivable}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall k \in \Delta_N \quad \Longrightarrow \quad f \quad \text{constante}$$

Notación

Si $N \geqslant 2$, fijado $k \in \Delta_N$, para $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, escribiremos:

$$\widehat{x} = (x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^{N-1}$$

Una derivada parcial idénticamente nula

$$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{R}^N, \quad \Omega \text{ convexo}, \; k \in \Delta_N, \; U = \left\{ \widehat{x} : x \in \Omega \right\}$$

$f : \Omega \to \mathbb{R}^M$, derivable con respecto a la k-ésima variable con

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega$$

Entonces f no depende de la k-ésima variable:

Aplicaciones a campos escalares o vectoriales

Todas las derivadas parciales idénticamente nulas

$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{R}^N$, Ω conexo, $f : \Omega \to \mathbb{R}^M$, parcialmente derivable

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = 0 \;\; \forall x \in \Omega, \;\; \forall k \in \Delta_N \quad \Longrightarrow \quad f \;\text{ constante}$$

Notación

Si $N \geqslant 2$, fijado $k \in \Delta_N$, para $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, escribiremos:

$$\widehat{x} = (x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^{N-1}$$

Una derivada parcial idénticamente nula

$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{R}^N$, Ω convexo, $k \in \Delta_N$, $U = \left\{ \widehat{x} : x \in \Omega \right\}$

$f : \Omega \to \mathbb{R}^M$, derivable con respecto a la k-ésima variable con

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega$$

Entonces f no depende de la k-ésima variable:

Existe $g : U \to \mathbb{R}^M$ tal que $f(x) = g\big(\widehat{x}\big) \quad \forall x \in \Omega$

Un ejemplo referente al último resultado

Un ejemplo referente al último resultado

No basta que Ω sea conexo

Un ejemplo referente al último resultado

No basta que Ω sea conexo

$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y) : y \geqslant 0\}$ abierto y conexo, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ definida por:

Un ejemplo referente al último resultado

No basta que Ω sea conexo

$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y) : y \geqslant 0\}$ abierto y conexo, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = y^2 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \qquad f(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in \Omega \setminus (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$$

Un ejemplo referente al último resultado

No basta que Ω sea conexo

$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y) : y \geqslant 0\}$ abierto y conexo, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = y^2 \ \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \qquad f(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in \Omega \setminus (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$$

f es derivable con respecto a la primera variable, de hecho $f \in C^1(\Omega)$

Un ejemplo referente al último resultado

No basta que Ω sea conexo

$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y) : y \geqslant 0\}$ abierto y conexo, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = y^2 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \qquad f(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in \Omega \setminus (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$$

f es derivable con respecto a la primera variable, de hecho $f \in C^1(\Omega)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in \Omega$$

Un ejemplo referente al último resultado

No basta que Ω sea conexo

$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y) : y \geqslant 0\}$ abierto y conexo, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = y^2 \;\; \forall (x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \qquad f(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in \Omega \setminus (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$$

f es derivable con respecto a la primera variable, de hecho $f \in C^1(\Omega)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in \Omega$$

Pero f sí depende de la primera variable: $f(-1,1) = 0 \neq 1 = f(1,1)$