Ejercicio 9 - Relación 1 LMD

José Alberto Hoces Castro

2 de abril 2022

Ejercicio 9. Es cierto que de un número n_0 en adelante se tiene que $100^n < n!$; encuéntrelo y demuestre por inducción lo dicho a partir de ese número n_0.

Sea $P(i)$ el enunciado del tenor "el número natural i verifica que $100^i < i!$". Empezamos buscando nuestro caso base, es decir, el n_0 a partir del cual $P(i)$ es cierta. Para ello, emplearemos la aproximación de Stirling:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

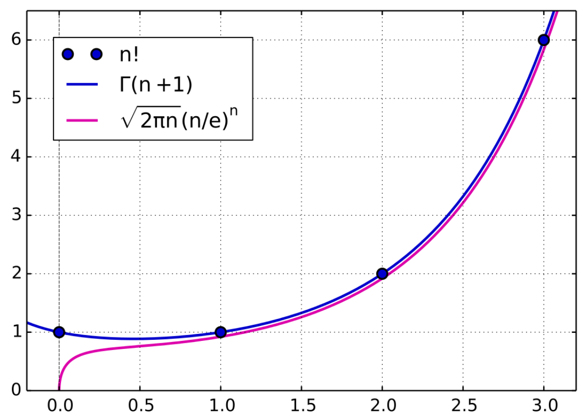

Figura 1: Gráfica de la aproximación de Stirling

Y como para valores grandes de n esta aproximación es muy fina, hallar el n para el cual se da que $100^n < n!$ es equivalente a estudiar la desigualdad $100^n < \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$. Comenzamos tomando logaritmos en la desigualdad (la función logaritmo es creciente, luego la desigualdad se conserva):

$$n \cdot \ln 100 < \frac{1}{2} \cdot \ln 2\pi + \frac{1}{2} \cdot \ln n + n \cdot \ln n - n$$

$$n < \frac{1}{2} \cdot \ln 2\pi + \frac{1}{2} \cdot \ln n + n \cdot \ln n - n \cdot \ln 100$$

Y tomando distintos valores de n:

$$n = 200 \longrightarrow 200 > 142{,}197$$

$$n = 250 \longrightarrow 250 > 232{,}752$$

$$n = 268 \longrightarrow 268 > 267{,}913$$

$$\boldsymbol{n = 269 \longrightarrow 269 < 269{,}903}$$

$$n = 270 \longrightarrow 270 < 271{,}896$$

Una vez sabemos que para $n_0 = 269$ se cumple que $100^n < n!$, suponemos que la fórmula $P(n)$ es cierta para $n > n_0$ y demostraremos que esto implica que $P(n+1)$ es cierta:

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n! > 100 \cdot n! > 100 \cdot 100^n = 100^{n+1}$$

Donde hemos aplicado para la primera desigualdad que $n_0 = 269$ y, por lo tanto, $n_0 > 100$; y para la segunda desigualdad hemos aplicado la hipótesis de inducción $100^n < n!$.