7- $1-\frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24} \quad \forall x \in [0,\pi]$

Calculamos el polinomio de Tylor con el resto de Lagrange de orden 3 y 4 en 0

$$\cos x = P_{3,0}(x) + R_{3,0}(x) = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{\cos(c)}{24}x^4$$

$$\cos x = P_{4,0}(x) + R_{4,0}(x) = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{\sin(c)}{120}x^5$$

Empezamos demostrando $1-\frac{x^2}{2} \leq \cos x$

$1-\frac{x^2}{2} \leq \cos x = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{\cos(c)}{24}x^4$ siendo c un número comprendido entre 0 y x

Como $\cos(c) \geq 0 \ \forall c \in [0,\pi/2] \Rightarrow \frac{\cos(c)}{24}x^4 \geq 0 \ \forall x \in [0,\pi] \Rightarrow 1-\frac{x^2}{2} \leq \cos x \ \forall x \in [0,\pi]$

Demostramos ahora la otra desigualdad

$\cos x \leq 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24} \rightarrow 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{\sin(c)}{120}x^5 \leq 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24} \rightarrow \frac{\sin(c)}{120}x^5 \geq 0$

Como $\sin(c) \geq 0 \ \forall c \in [0,\pi] \Rightarrow \frac{\sin(c)}{120}x^5 \geq 0 \ \forall x \in [0,\pi] \Rightarrow \cos(x) \leq 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24} \ \forall x \in [0,\pi]$