Relación 3

Aarón Jerónimo Fernández

Ejercicios

Ejercicio 3.10: Calcular el polinomio de Taylor de orden 8 en el punto $x = 0$ de la función $\ln(1 + x^4)$.
El polinomio de Taylor tiene la siguiente expresión:

$$p_{n,a}^{f}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

Donde n es el orden, f la función y a el punto en que que queremos calcularlo. Así que en este caso queremos calcular $p_{8,0}^{f}(x)$ siendo $f(x) = \ln(1 + x^4)$ la función f, para ello, calcularemos las derivadas de $f(x)$, las evaluaremos en $x = 0$ y luego simplemente sustitumos en la expresión dada anteriormente.

Calculamos las derivadas necesarias:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln(1 + x^4) \\
f'(x) &= \frac{4x^3}{1 + x^4} \\
f''(x) &= \frac{-4x^2(x^4 - 3)}{(1 + x^4)^2} \\
f'''(x) &= \frac{8x(x^8 - 12x^4 + 3)}{(1 + x^4)^3} \\
f^{(4)}(x) &= \frac{-24(x^{12} - 31x^8 + 31x^4 - 1)}{(1 + x^4)^4} \\
f^{(5)}(x) &= \frac{96x^3(x^{12} - 65x^8 + 155x^4 - 35)}{(1 + x^4)^5} \\
f^{(6)}(x) &= \frac{-480x^2(x^{16} - 120x^{12} + 546x^8 - 336x^4 + 21)}{(1 + x^4)^6} \\
f^{(7)}(x) &= \frac{2880x(x^{20} - 203x^{16} + 1554x^{12} - 1918x^8 + 413x^4 - 7)}{(1 + x^4)^7} \\
f^{(8)}(x) &= \frac{-20160(x^{24} - 322x^{20} + 3823x^{16} - 8092x^{12} + 3823x^8 - 322x^4 + 1)}{(1 + x^4)^8}
\end{aligned}$$

Ahora evaluamos estas derivadas en $x = 0$:

$$\begin{aligned}
f(0) &= 0 \\
f^{'}(0) &= 0 \\
f^{''}(0) &= 0 \\
f^{'''}(0) &= 0 \\
f^{(4)}(0) &= 24 \\
f^{(5)}(0) &= 0 \\
f^{(6)}(0) &= 0 \\
f^{(7)}(0) &= 0 \\
f^{(8)}(0) &= -20160
\end{aligned}$$

Finalmente, sustituimos en la expresión del polinomio:

$$p_{8,0}^{f}(x) = \frac{24}{4!}x^4 + \frac{-20160}{8!}x^8 = x^4 - \frac{1}{2}x^8$$