

Tema

12

Función implícita

Estudiamos ahora un tercer resultado fundamental del cálculo diferencial en varias variables, el *teorema de la función implícita*. Como motivación, explicaremos la forma en que el teorema de la función inversa resuelve “localmente” ciertos sistemas de ecuaciones, para después hacer un planteamiento más ambicioso, consistente en intentar resolver sistemas de ecuaciones mucho más generales. Conseguiremos este objetivo, también desde un punto de vista “local”. Por tanto el teorema de la función implícita es formalmente más general que el de la inversa. No obstante, veremos que la demostración del primero se consigue fácilmente a partir del segundo. Por tanto, en esencia ambos teoremas son equivalentes, pero el de la función implícita permite obtener aplicaciones relevantes de forma más directa. Está mejor preparado para usarlo en la práctica.

12.1. Planteamiento del problema

Puede decirse que el teorema de la función inversa resuelve localmente algunos sistemas de ecuaciones, en el sentido que vamos a explicar. Dada una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}^N$, donde A es un subconjunto de \mathbb{R}^N , consideremos la ecuación

$$f(x) - y = 0 \tag{1.1}$$

en la que intervienen dos variables vectoriales $x, y \in \mathbb{R}^N$, sólo sujetas a la condición $x \in A$. Sus soluciones son todos los pares $(x, y) \in A \times \mathbb{R}^N$ que la verifican.

Si consideramos las componentes de x e y , así como las de la función f , entonces (1.1) se convierte en el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_N) - y_1 &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_N) - y_2 &= 0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ f_N(x_1, x_2, \dots, x_N) - y_N &= 0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

en el que intervienen $2N$ variables reales $x_1, x_2, \dots, x_N, y_1, \dots, y_N$, que sólo están sometidas a la restricción $(x_1, x_2, \dots, x_N) \in A$.

Nos centramos en la ecuación (1.1), sin olvidar que equivale al sistema (1.2). Resolverla, con x como dato e y como incógnita, es bien obvio: las soluciones son todos los pares $(x, f(x))$ con $x \in A$. Lo podemos resumir en una obvia igualdad entre conjuntos:

$$\{(x, y) \in A \times \mathbb{R}^N : f(x) - y = 0\} = \{(x, f(x)) : x \in A\}$$

Pero el problema no trivial va en sentido opuesto: resolver la ecuación (1.1), con y como dato y x como incógnita, es decir, expresar las soluciones en la forma $(g(y), y)$ para conveniente función g , o si se quiere, “despejar” x como función de y . Claro está que esto equivale a invertir la función f .

Cuando f es inyectiva, la respuesta es la función $g = f^{-1}$, definida en el conjunto $f(A)$. Lo podemos expresar como una igualdad de conjuntos análoga a la anterior:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^N \times A : f(x) - y = 0\} = \{(g(y), y) : y \in f(A)\} \quad (1.3)$$

Esta igualdad resuelve el problema *globalmente*, pues en ambos miembros aparecen *todas* las soluciones de (1.1), o si se quiere, f^{-1} está definida en el conjunto más grande posible, es la inversa *global* de f .

En general f no tiene por qué ser inyectiva, pero el teorema de la función inversa permite resolver *localmente* el problema. Partiendo de una solución (a, b) de la ecuación (1.1), es decir, tomando $a \in A$ y $b = f(a)$, y con hipótesis adecuadas, el teorema nos da dos abiertos U y V , con $a \in U \subset A$ y $b \in V \subset f(A)$, tales que $f|_U$ es una biyección de U sobre V . Escribamos este resultado como una igualdad entre conjuntos, para compararlo con (1.3). Tomando $W = U \times V$ tenemos un abierto de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ con $(a, b) \in W \subset A \times \mathbb{R}^N$ y, si $g = (f|_U)^{-1}$, se tiene:

$$\{(x, y) \in W : f(y) - x = 0\} = \{(x, g(x)) : x \in V\} \quad (1.4)$$

Obsérvese por qué esta igualdad sólo resuelve localmente nuestro problema. A diferencia de lo que ocurría en (1.3), g no está definida en todo el conjunto $f(A)$, sino sólo en V : un entorno de b , contenido en $f(A)$. Este carácter local también se refleja en el primer miembro de (1.4), donde no aparecen todas las soluciones de (1.1), sino sólo las que pertenecen a $W = U \times V$, un entorno de la solución de partida (a, b) .

Pues bien, hacemos ahora un planteamiento más ambicioso, sustituyendo la ecuación (1.1) por otra más general, que será de la forma

$$F(x, y) = 0 \quad (2.1)$$

donde x e y son variables vectoriales, en principio independientes, y queremos saber hasta qué punto (2.1) equivale a expresar una de ellas como función de la otra, pues ahora la asimetría del problema ha desaparecido. Aunque intercambiemos los papeles de las variables, parece más natural expresar y como función de x . Dicho intuitivamente, en la ecuación $F(x, y) = 0$, queremos “despejar” y como función de x . En el caso particular de la función inversa, era esencial que las variables x e y se movieran en espacios de la misma dimensión, $x, y \in \mathbb{R}^N$, pero ahora esta limitación está fuera de lugar, pues ya no se trata de invertir ninguna función. Para $x \in \mathbb{R}^N$ e $y \in \mathbb{R}^M$, tiene perfecto sentido que y se pueda expresar como función de x .

Por tanto, F estará definida en un abierto de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$, con valores, en principio, en \mathbb{R}^k con $k \in \mathbb{N}$, pero enseguida vemos que debe ser $k = M$. En efecto, no olvidemos que seguimos trabajando con sistemas de ecuaciones, así que (2.1) será la ecuación vectorial que resume un sistema de k ecuaciones con $N + M$ incógnitas y queremos despejar M de ellas en función de las otras N . Si queremos despejar M , y no más de M , incógnitas, debemos tener M ecuaciones.

Tendremos por tanto $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^M$ donde Ω es un abierto de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$. Escribiendo de nuevo $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_M)$ y $F = (F_1, F_2, \dots, F_M)$, visualizamos el sistema de M ecuaciones y $N + M$ incógnitas con el que estamos trabajando:

$$\begin{aligned} F_1(x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_M) &= 0 \\ F_2(x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_M) &= 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ F_M(x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_M) &= 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Pretendemos ahora que la igualdad $F(x, y) = 0$ sea equivalente a una de la forma $y = \psi(x)$ para conveniente función ψ . Digamos que *resolver* la ecuación (2.1), o lo que es lo mismo, resolver el sistema (2.2), es tanto como encontrar la función ψ .

Claramente, este problema es mucho más general que el de la función inversa, luego no debemos esperar nada mejor que lo obtenido en ese caso particular. Por tanto, no aspiramos a resolver globalmente la ecuación (2.1), sino tan sólo localmente. Comparando con lo dicho para la ecuación (1.1), no buscamos una igualdad análoga a (1.3) sino a (1.4). Para ello debemos disponer de una solución de partida, es decir, de un par $(a, b) \in \Omega$ tal que $F(a, b) = 0$, cuya existencia no está ahora garantizada. Supondremos que tal solución existe, pues en otro caso, el conjunto de soluciones de la ecuación (2.1) es vacío y no hay nada que estudiar.

Nuestro objetivo es, por tanto, encontrar un abierto W de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$, con $(a, b) \in W \subset \Omega$, otro abierto U de \mathbb{R}^N y una función $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^M$ tales que

$$\{(x, y) \in W : F(x, y) = 0\} = \{(x, \psi(x)) : x \in U\} \tag{2.4}$$

Este es precisamente el contenido del teorema de la función implícita. Resuelve localmente la ecuación (2.1) mediante la igualdad (2.4), igual que el teorema de la función inversa resolvía localmente (1.1) mediante la igualdad (1.4).

Tendremos así multitud de soluciones de la ecuación (2.1), todas las de la forma $(x, \psi(x))$ con $x \in U$, que de hecho son todas las soluciones en el conjunto W , es decir, suficientemente próximas a la solución inicial (a, b) . Para $(x, y) \in W$ se tiene $F(x, y) = 0$ si, y sólo si, $y = \psi(x)$, luego podemos decir que la función ψ está “implícita” en la ecuación $F(x, y) = 0$, de ahí el nombre del teorema. Lo probaremos con ciertas hipótesis acerca de la diferenciabilidad de F , y obtendremos que ψ también es diferenciable. Las hipótesis son análogas a las del teorema de la función inversa, y la demostración consiste en aplicar dicho teorema a una función construida a partir de F , así que el nuevo teorema es consecuencia fácil del que ya conocemos, pero a su vez es más general, luego en realidad ambos teoremas son equivalentes.

Nótese finalmente que el problema de la existencia de una función implícita tiene interés incluso en el caso $N = M = 1$ y, aunque buscamos una función real de variable real ψ , el resultado se escapa del ámbito del cálculo en una variable, puesto que la función F está definida en un abierto de \mathbb{R}^2 .

12.2. Teorema de la función implícita

Vamos a probar exactamente el resultado que hemos anunciado:

Teorema. Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$, $F \in D(\Omega, \mathbb{R}^M)$ y $(a, b) \in \Omega$ tal que $F(a, b) = 0$. Consideremos el abierto $\Omega_a \subset \mathbb{R}^M$ y la función $F_a \in D(\Omega_a, \mathbb{R}^M)$ dados por

$$\Omega_a = \{y \in \mathbb{R}^M : (a, y) \in \Omega\} \quad \text{y} \quad F_a(y) = F(a, y) \quad \forall y \in \Omega_a$$

Supongamos que DF es continua en (a, b) y que $DF_a(b)$ es biyectiva. Entonces existen, un abierto W , con $(a, b) \in W \subset \Omega$, un abierto $U \subset \mathbb{R}^N$ y una función $\psi \in D(U, \mathbb{R}^M)$, tales que:

$$\{(x, y) \in W : F(x, y) = 0\} = \{(x, \psi(x)) : x \in U\} \quad (3)$$

Demostración. Consistirá simplemente en aplicar el teorema de la función inversa local a la función $H : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ definida por

$$H(x, y) = (x, F(x, y)) \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

que claramente verifica $H(a, b) = (a, 0)$.

Empezamos observando que H es diferenciable, pues sus dos componentes lo son. Pero conviene calcular explícitamente la diferencial de H en cada punto de Ω .

Para ello, consideramos las proyecciones lineales naturales de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ sobre \mathbb{R}^N y \mathbb{R}^M , que denotamos por π_1 y π_2 respectivamente, es decir, escribimos:

$$\pi_1(x, y) = x \quad \text{y} \quad \pi_2(x, y) = y \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$$

Por otra parte J_1 y J_2 serán las inyecciones lineales de \mathbb{R}^N y \mathbb{R}^M en $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$, dadas por

$$J_1(x) = (x, 0) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \quad \text{y} \quad J_2(y) = (0, y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^M$$

De esta forma, para todo $(x, y) \in \Omega$, tenemos claramente

$$H(x, y) = (x, 0) + (0, F(x, y)) = J_1(x) + J_2(F(x, y)) = J_1(\pi_1(x, y)) + J_2(F(x, y))$$

lo que se resume escribiendo: $H = J_1 \circ (\pi_1|_{\Omega}) + J_2 \circ F$. Deducimos claramente que

$$DH(x, y) = J_1 \circ \pi_1 + J_2 \circ DF(x, y) \quad \forall (x, y) \in \Omega \quad (4)$$

Entonces, también para todo $(x, y) \in \Omega$, tenemos

$$\|DH(x, y) - DH(a, b)\| = \|J_2 \circ (DF(x, y) - DF(a, b))\| \leq \|J_2\| \|DF(x, y) - DF(a, b)\|$$

y como DF es continua en (a, b) , vemos que DH también lo es. Para aplicar el teorema de la función inversa local, sólo queda comprobar que $DH(a, b)$ es biyectiva, para lo cual usaremos la hipótesis sobre la función F_a .

Observamos que para todo $y \in \Omega_a$ se tiene $F_a(y) = F((a, 0) + (0, y)) = F(J_1(a) + J_2(y))$, y la regla de la cadena nos da

$$DF_a(y) = DF(a, y) \circ J_2 \quad \forall y \in \Omega_a, \quad \text{luego} \quad DF_a(b) = DF(a, b) \circ J_2 \quad (5)$$

Para comprobar que $DH(a, b)$ es biyectiva, como se trata de una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales de la misma dimensión, bastará ver que es inyectiva. Suponemos por tanto que $DH(a, b)(u, v) = (0, 0)$ con $(u, v) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$, para probar que $u = v = 0$. En efecto, usando (4) tenemos

$$(0, 0) = DH(a, b)(u, v) = (u, 0) + (0, DF(a, b)(u, v))$$

de donde deducimos, primero que $u = 0$, y entonces que

$$0 = DF(a, b)(0, v) = (DF(a, b) \circ J_2)(v) = (DF_a(b))(v)$$

donde, para la última igualdad, hemos usado (5). Como por hipótesis, $DF_a(b)$ es biyectiva, obtenemos $v = 0$, como queríamos.

El teorema de la función inversa nos da un abierto W de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$, con $(a, b) \in W \subset \Omega$, y un abierto $G = H(W)$ de \mathbb{R}^M , con $(a, 0) \in G$, tales que $H|_W$ es una biyección de W sobre G , cuya inversa es diferenciable en G . Dicha inversa es por tanto una biyección $K : G \rightarrow W$ que es diferenciable y verifica que $H(K(x, z)) = (x, z)$ para todo $(x, z) \in G$.

Tomando $U = J_1^{-1}(G) = \{x \in \mathbb{R}^N : (x, 0) \in G\}$, tenemos un abierto de \mathbb{R}^N tal que $a \in U$, y la última igualdad nos dice que

$$H(K(x, 0)) = (x, 0) \quad \forall x \in U \quad (6)$$

Consideremos ahora las dos componentes de la función $x \mapsto K(x, 0)$, de U en W , pues la segunda es la función $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^M$ que buscamos. Más concretamente, definimos

$$\varphi(x) = \pi_1(K(x, 0)) \quad \text{y} \quad \psi(x) = \pi_2(K(x, 0)) \quad \forall x \in U$$

Pero φ es fácil de calcular. Para $x \in U$, tenemos $(\varphi(x), \psi(x)) = K(x, 0) \in W$ y (6) nos da

$$(x, 0) = H(\varphi(x), \psi(x)) = (\varphi(x), F(\varphi(x), \psi(x)))$$

luego $\varphi(x) = x$ para todo $x \in U$. Deducimos que

$$(x, \psi(x)) \in W \quad \text{y} \quad F(x, \psi(x)) = 0 \quad \forall x \in U \quad (7)$$

Claramente ψ es diferenciable, pues basta observar que $\psi = \pi_2 \circ K \circ (J_1|_U)$. Sólo nos queda comprobar que W , U y ψ verifican la igualdad (3).

Una inclusión la tenemos en (7), pues si $x \in U$ e $y = \psi(x)$, vemos en (7) que $(x, y) \in W$ y $F(x, y) = 0$.

Recíprocamente, si $(x, y) \in W$ y $F(x, y) = 0$, tenemos que $(x, 0) = H(x, y) \in G$, luego $x \in U$. Además, también sabemos que $K(x, 0) \in W$ y $H(K(x, 0)) = (x, 0)$, pero H es inyectiva en W , luego $(x, y) = K(x, 0) = (x, \psi(x))$, de donde $y = \psi(x)$ como queríamos demostrar. ■

Conviene hacer algunas observaciones sobre la función ψ que nos da el teorema anterior. Como $F(a, b) = 0$, de (3) deducimos que $a \in U$ y que $\psi(a) = b$. Veamos además que, fijados los abiertos W y U , la función ψ que verifica (3) es **única**. En efecto si $\psi_1 : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ también verifica (3), para cada $x \in U$ tomamos $y = \psi_1(x)$ y (3) nos dice que $(x, y) \in W$ y $F(x, y) = 0$, pero como ψ también verifica (3), tenemos $\psi(x) = y = \psi_1(x)$.

Así pues, la función ψ está definida en un entorno de a , verifica que $\psi(a) = b$ y está determinada por la igualdad (3). Para $(x, y) \in W$ se tiene que $F(x, y) = 0$ si, y sólo si, $y = \psi(x)$, luego podemos entender que la función ψ está “implícita” en la ecuación $F(x, y) = 0$. Por eso, se dice que *la ecuación (2.1) define a la variable y como función implícita de x , en un entorno del punto a , con $y = b$ para $x = a$* . Naturalmente se está hablando de la función ψ , pero sin hacer alusión a ella, entendiéndola como una relación entre variables, como otras veces hemos hecho. Es importante especificar que $y = b$ para $x = a$, porque puede existir $c \in \mathbb{R}^M$ con $c \neq b$ tal que $F(a, c) = 0$. Entonces, si podemos aplicar el teorema con la solución de partida (a, c) en vez de (a, b) , expresaremos y como función implícita de x , también en un entorno de a , pero con $y = c$ para $x = a$, una función implícita distinta de la que teníamos antes.

En la práctica, se suele aludir a las variables reales x_1, \dots, x_N e y_1, \dots, y_N que aparecen en el sistema (2.2) que son las componentes de x e y . Si $b = (b_1, \dots, b_M)$, se dice entonces que *el sistema (2.2) define a y_1, y_2, \dots, y_M como funciones implícitas de x_1, x_2, \dots, x_N en un entorno del punto (a_1, a_2, \dots, a_N) , con $(y_1, \dots, y_M) = (b_1, \dots, b_M)$ para $(x_1, \dots, x_N) = (a_1, \dots, a_N)$* . Incluso, como hemos hecho otras veces, dichas funciones implícitas se denotan con el mismo nombre de las variables, escribiendo $y_j = y_j(x_1, \dots, x_N)$ para todo $j \in \Delta_M$.

Conviene comentar brevemente las hipótesis del teorema anterior. Que F sea diferenciable y que DF sea continua, no ya en el punto (a, b) , sino incluso en Ω , son hipótesis muy poco restrictivas. Se trata simplemente de que la ecuación $F(x, y) = 0$ sea manejable con técnicas de cálculo diferencial. En la práctica estas dos hipótesis se suelen comprobar con un simple vistazo a la función F .

Nótese por ejemplo que, si las componentes de F son funciones polinómicas, estas hipótesis se cumplen obviamente y, aún en este caso tan particular, el sistema de ecuaciones (2.2) puede ser extraordinariamente complicado, por no hablar de lo que ocurre si las componentes de F involucran funciones trascendentes como la exponencial o las trigonométricas.

La última hipótesis, que $DF_a(b)$ sea biyectiva, parece más rebuscada, pero es muy natural y también muy fácil de comprobar. Como $DF_a(b)$ es biyectiva si, y sólo si, su determinante jacobiano no se anula, veamos cual es ese determinante.

Se comprueba fácilmente que

$$\frac{\partial F_a}{\partial y_j}(b) = \frac{\partial F}{\partial y_j}(a, b) \quad \forall j \in \Delta_M$$

sin más que escribir la definición de las derivadas parciales de ambos campos vectoriales, pues ambas definiciones son idénticas.

Así pues, las columnas de la matriz $JF_a(b)$ son las M últimas columnas de $JF(a, b)$. Por tanto, basta considerar la matriz $JF(a, b) \in \mathcal{M}_{M \times (N+M)}$ y comprobar que el determinante de la submatriz cuadrada formada por sus últimas M columnas no se anula.

Esto sugiere usar la siguiente notación, para la matriz jacobiana $JF_a(b)$ y su determinante, que es muy cómoda en la práctica. Si $F = (F_1, \dots, F_M)$ son las componentes de F , escribimos:

$$JF_a(b) = \frac{\partial(F_1, \dots, F_M)}{\partial(y_1, \dots, y_M)}(a, b) \quad \text{y} \quad \det JF_a(b) = \det \left(\frac{\partial(F_1, \dots, F_M)}{\partial(y_1, \dots, y_M)}(a, b) \right)$$

Esta notación indica claramente que nos referimos a la matriz cuadrada y su determinante, que tienen como j -ésima columna al vector derivada parcial de F con respecto a la variable y_j en el punto (a, b) , para todo $j \in \Delta_M$.

Pensemos además que en la práctica, lo que pretendemos es expresar M variables, que no tienen por qué ser las M últimas, ni llamarse y_1, \dots, y_M , como funciones implícitas de la restantes. La notación anterior indica claramente las variables que pretendemos despejar.

Observemos también que, la auténtica hipótesis para poder aplicar el teorema de la función implícita es que la matriz $JF(a, b)$ tenga rango M , pues entonces habrá M columnas que forman una submatriz cuadrada con determinante no nulo y esas columnas nos indican las variables que podemos expresar como funciones implícitas de las restantes.

Se comprende ahora el papel que juega esta hipótesis, por analogía con el caso en que F es lineal y $DF(a, b) = F$. Dicho intuitivamente, que $DF(a, b)$ tenga rango menor que M , significa que alguna de las ecuaciones de nuestro sistema es consecuencia de las restantes, al menos en un entorno del punto (a, b) . Digamos que el rango de la matriz $DF(a, b)$ es el número de ecuaciones verdaderamente independientes, y esto explica que sea también el máximo número de variables que el teorema anterior nos permite expresar como funciones implícitas de las restantes. Por poner un ejemplo muy obvio, si añadimos una ecuación al sistema repitiendo una de las que ya teníamos, el sistema pasará a tener $M + 1$ ecuaciones, pero eso no nos va a permitir despejar más variables.

Finalmente, merece la pena destacar el caso particular $N = M = 1$ del teorema anterior:

- Sean Ω un abierto de \mathbb{R}^2 , $F \in D(\Omega)$ y $(a, b) \in \Omega$ tal que $F(a, b) = 0$. Supongamos que las dos derivadas parciales de F son continuas en el punto (a, b) y que $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$. Entonces existen un abierto W de \mathbb{R}^2 , con $(a, b) \in W \subset \Omega$, un abierto $U \subset \mathbb{R}$ y una función derivable $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}$, tales que:

$$\{(x, y) \in W : F(x, y) = 0\} = \{(x, \psi(x)) : x \in U\}$$