Antonio Martínez e ignacio Sánchez

Final

Toda la asignatura

1. Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ que respecto de la base usual tiene matriz asociada

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ \alpha & 3 & \alpha \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   a) Prueba que $\lambda = 1$ es un valor propio de f y estudia para qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ es diagonalizable.

   b) Cuando f no sea un automorfismo encontrar una base de vectores propios de f.

   c) Para algún valor de α, encontrar una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ con su métrica usual formada por vectores propios de f.

2. Sea g_β la métrica en $\mathbb{R}^3$ cuya forma cuadrática está dada por

$$\Phi_\beta(x, y, z) = y^2 + \beta z^2 + 2xy + 2\beta xz.$$

   a) Clasificar las métricas g_β según los valores de $\beta \in \mathbb{R}$.

   b) Calcular el radical o núcleo de cada g_β.

   c) Resolver la ecuación $\Phi_0(x, y, z) = 0$.

3. Se considera el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ dado por:

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2}(x - \sqrt{2}y - z, \sqrt{2}x + \sqrt{2}z, -x - \sqrt{2}y + z).$$

   Demostrar que es una isometría en $(\mathbb{R}^3, g_u)$, clasificarla y describir sus elementos geométricos.

4. Resolver de forma razonada las siguientes cuestiones:

   a) Sea $A \in M_2(\mathbb{R})$ con $p_A(\lambda) = (1 - \lambda)^2$. ¿Es A semejante a una matriz diagonal? Si la respuesta es negativa, mostrar un contraejemplo.

   b) Probar que si $f : V \to V$ es una isometría de un espacio vectorial euclídeo (V, g) y $det(f) = -1$, entonces $\lambda = -1$ es valor propio de f.

   c) ¿Es cierto que en $(\mathbb{R}^3, g_u)$ ninguna simetría ortogonal respecto a un plano es composición de simetrías ortogonales respecto a rectas?

Solo segunda parte

1. Se considera el espacio vectorial euclídeo $(M_2(\mathbb{R}), g)$, donde $M_2(\mathbb{R})$ es el espacio de las matrices cuadradas de orden 2 con coeficientes reales y g es la métrica definida como $g(A,C) = traza(AC^t)$. Se pide lo siguiente:

   a) Calcular el complemento ortogonal en $(M_2(\mathbb{R}), g)$ del subespacio $A_2(\mathbb{R})$ formado por las matrices antisimétricas.

   b) Obtener dos matrices $A, C \in S_2(\mathbb{R})$ que sean linealmente independientes, unitarias en $(M_2(\mathbb{R}), g)$, y que formen un ángulo $\pi/4$ con la matriz identidad I_2.

2. Se considera el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ dado por:

$$f(x,y,z) = \frac{1}{2}(x - \sqrt{2}y - z, \sqrt{2}x + \sqrt{2}z, -x - \sqrt{2}y + z).$$

   Demostrar que es una isometría en $(\mathbb{R}^3, g_u)$, clasificarla y describir sus elementos geométricos.

3. Resolver de forma razonada las siguientes cuestiones:

   a) Probar que si $f : V \to V$ es una isometría de un espacio vectorial euclídeo (V, g) y $det(f) = -1$, entonces $\lambda = -1$ es valor propio de f.

   b) Probar que si $f : V \to V$ es un endomorfismo diagonalizable, entonces existe una métrica euclídea g en V tal que f es autoadjunto en (V, g).

   c) ¿Es cierto que en $(\mathbb{R}^3, g_u)$ ninguna simetría ortogonal respecto a un plano es composición de simetrías ortogonales respecto a rectas?

The End.

10 de julio 2014

1. f endomorfismo $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$A = \mathcal{M}(f, B_u) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ \alpha & 3 & \alpha \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Probar que $\lambda = 1$ es valor propio y estudiar para qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ es diagonalizable.

$\lambda = 1$ valor propio $\Leftrightarrow \det(A - I_n) = 0 \Rightarrow \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & 2 & \alpha \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$

1ª y 3ª filas iguales

$$P_f(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ \alpha & 3-\lambda & \alpha \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda^2 - 4\lambda + 4)(3-\lambda) + \cancel{2\alpha} - 3 + \lambda - \cancel{2\alpha} + \alpha\lambda - 2\alpha + \alpha\lambda =$$

$$= -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12 + (2\alpha + 1)\lambda - 2\alpha - 3 =$$

$$= -\lambda^3 + 7\lambda^2 + (2\alpha - 15)\lambda + 9 - 2\alpha$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -7 & 15-2\alpha & 2\alpha-9 \\ 1 & & 1 & -6 & 9-2\alpha \\ \hline & 1 & -6 & 9-2\alpha & \boxed{0} \end{array}$$

$\to \lambda^2 - 6\lambda + 9 - 2\alpha = 0$

$\to \lambda = \dfrac{6 \pm \sqrt{8\alpha}}{2} = \begin{cases} 3 - \sqrt{2\alpha} \\ 3 + \sqrt{2\alpha} \end{cases}$

$3-\sqrt{2\alpha}=1 \Downarrow \alpha=2$ $\quad$ $3+\sqrt{2\alpha}=1 \Downarrow \nexists\alpha$ $\quad$ $3-\sqrt{2\alpha}=3+\sqrt{2\alpha} \Downarrow \alpha=0$

•) Si $\alpha\neq 2$ y $\alpha\neq 0$, $\lambda_1=1$, $\lambda_2=3-\sqrt{2\alpha}$, $\lambda_3=3+\sqrt{2\alpha}$ serán 3 valores propios distintos y, por estar en $\mathbb{R}^3$, f será diagonalizable.

•) Si $\alpha=2$, $\lambda_1=1$ $a_{\lambda_1}=2$ $\lambda_2=5$ $a_{\lambda_2}=1$. Veamos si $g_{\lambda_1}=2$. Veamos si ocurre:

$$g_{\lambda_1}=3-rg\left(\begin{pmatrix}2&1&1\\2&3&2\\1&1&2\end{pmatrix}-I_n\right)=3-rg\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\1&1&1\end{pmatrix}=3-1=2$$

Para $\alpha=2$ es diagonalizable.

•) Si $\alpha=0$, $\lambda_1=1$, $\lambda_2=3$ $a_{\lambda_1}=1$ $a_{\lambda_2}=2$. Para que sea diag., $g_{\lambda_2}=2$. Veamos si ocurre:

$$g_{\lambda_2}=3-rg\left(\begin{pmatrix}2&1&1\\0&3&0\\1&1&2\end{pmatrix}-3\cdot I_n\right)=3-rg\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&0&0\\1&1&-1\end{pmatrix}=3-2=1$$

Para $\alpha=0$ no es diag. En conclusión, f es diag. $\forall\alpha\in\,]0,+\infty[$

b) Cuando f no es automorfismo, hallar base de vectores propios.

f automorfismo $\Rightarrow \det(A)=0 \Leftrightarrow 12+\cancel{2\alpha}-3-\cancel{2\alpha}-2\alpha=0$

$\Downarrow$

$9=2\alpha \Leftrightarrow \boxed{\alpha=\frac{9}{2}}$

Por el apartado anterior, los valores propios serán $\lambda_1=1$, $\lambda_2=6$, $\lambda_3=0$.

$$V_0=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix}2&1&1\\9/2&3&9/2\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}=\mathcal{L}\{(1,-3,1)\}$$

$$\left.\begin{array}{l}x+y+2z=0\\2x+y+z=0\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l}x+y+2z=0\Rightarrow x=z\\-y-3z=0\Rightarrow y=-3z\end{array}$$

$$V_6=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix}-4&1&1\\9/2&-3&9/2\\1&1&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}=\mathcal{L}\{(1,3,1)\}$$

$$\left.\begin{array}{l}x+y-4z=0\\-4x+y+z=0\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l}x+y-4z=0\Rightarrow x=z\\5y-15z=0\Rightarrow y=3z\end{array}$$

$$V_1=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \underbrace{\begin{pmatrix}1&1&1\\9/2&2&9/2\\1&1&1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}=\mathcal{L}\{(1,0,-1)\}$$

$$\left.\begin{array}{l}x+y+z=0\\9x+4y+9z=0\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l}x+y+z=0\Rightarrow x=-z\\-5y=0\Rightarrow y=0\end{array}$$

Base de vectores propios: $B=\{(1,-3,1),(1,3,1),(1,0,-1)\}$

c) Para algún valor de α, encontrar una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ con su métrica usual formada por vectores propios de f. Tomemos, por ejemplo, $\alpha=9/2$ para aprovechar la base del apartado anterior y aplicar Gram-Schmidt sobre ella ya que estamos en un EVME:

$$u_1=(1,-3,1) \qquad \|u_1\|^2=11$$

$$u_2=(1,3,1)-\frac{g((1,3,1),(1,-3,1))}{\|u_1\|^2}(1,-3,1)=$$

$$=(1,3,1)+\frac{7}{11}(1,-3,1)=\left(\frac{18}{11},\frac{12}{11},\frac{18}{11}\right)$$

$$\|u_2\|^2=\frac{72}{11}$$

$$u_3=(1,0,-1)-\frac{\overbrace{g((1,0,-1),(1,-3,1))}^{=0}}{11}(1,-3,1)$$

$$-\frac{\overbrace{g((1,0,-1),(18/11,12/11,18/11))}^{=0}}{\|u_2\|^2}u_2=(1,0,-1)$$

Base ortogonal de vectores propios: $B=\left\{(1,-3,1),\left(\frac{18}{11},\frac{12}{11},\frac{18}{11}\right),(1,0,-1)\right\}$

2. g_β métrica en $\mathbb{R}^3$ cuya forma cuadrática viene dada por:

$$\Phi_\beta(x,y,z)=y^2+\beta z^2+2xy+2\beta xz$$

a) Clasificar g_β según el valor de $\beta\in\mathbb{R}$.

Vamos a trabajar con esta

$$M(g_\beta,B_u)=\begin{pmatrix}0&1&\beta\\1&1&0\\\beta&0&\beta\end{pmatrix}\overset{F_1\leftrightarrow F_2}{\Leftrightarrow}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&\beta\\\beta&0&\beta\end{pmatrix}\overset{C_1\leftrightarrow C_2}{\Leftrightarrow}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&\beta\\0&\beta&\beta\end{pmatrix}$$

Veamos cuándo es degenerada:

$$\det(\;)=-2\beta=0\Rightarrow\boxed{\beta=0}$$

Para $\beta=0$:

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\overset{F_2:F_2-F_1}{\Leftrightarrow}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\overset{C_2:C_2-C_1}{\Leftrightarrow}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

Indefinida degenerada de rango 2, índice 1 y signatura $(1,1)$

Veamos los casos $\beta<0$ y $\beta>0$: (Aplicamos criterio de Sylvester)

$\boxed{\beta<0}$ $\alpha_1>0$ $\alpha_2<0$ $\alpha_3>0 \Rightarrow$ Indef. no deg. rango 3 índice 2
Signatura $(1,2)$

$\boxed{\beta>0}$ $\alpha_1>0$ $\alpha_2<0$ $\alpha_3<0 \Rightarrow$ Indef. no deg. rango 3 índice 1
Signatura $(2,1)$

b) Calcular el radical o núcleo de cada g_β.

Esto solo es posible para $\beta=0$ ya que es el único caso para el que g_β es degenerada:

$$Rad(g_0)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, \underbrace{\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}}\right\}=\mathcal{L}\{(0,0,1)\}$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{matrix}x+y=0\\y=0\end{matrix}\right\} x=0$$

c) Resolver la ecuación
$\Phi_0(x,y,z)=0$.

$\Rightarrow \Phi_0(x,y,z)=\underbrace{y^2+2xy=0}$

$y^2=-2xy \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}y$

Sol.: $(-\frac{1}{2}y,y,z)$

La solución de la ecuación vendrá dada por el subespacio $\mathcal{L}\{(1,-2,0),(0,0,1)\}$

3. En $\mathbb{R}^3$ se considera el endomorfismo:

$$f(x,y,z)=\frac{1}{2}(x-\sqrt{2}y-z,\sqrt{2}x+\sqrt{2}z,-x-\sqrt{2}y+z)$$

Demostrar que es isometría en $(\mathbb{R}^3,g_u)$, clasificarla y describir sus elementos geométricos.

$f(1,0,0)=(1/2,\sqrt{2}/2,-1/2)$ $f(0,1,0)=(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2})$

$f(0,0,1)=(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2})$

$$M(f,B_u)=\begin{pmatrix}1/2&-\sqrt{2}/2&-1/2\\ \sqrt{2}/2&0&\sqrt{2}/2\\ -1/2&-\sqrt{2}/2&1/2\end{pmatrix}$$

f isometría $\Leftrightarrow \underbrace{M(g_u,B_u)}_{I_3}=M(f,B_u)^t\cdot \overbrace{M(g_u,B_u)}^{I_3}\cdot M(f,B_u)$

¿$M(f,B_u)^t\cdot M(f,B_u)=I_3$? $\Rightarrow \begin{pmatrix}1/2&\sqrt{2}/2&-1/2\\ -\sqrt{2}/2&0&-\sqrt{2}/2\\ -1/2&\sqrt{2}/2&1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2&-\sqrt{2}/2&-1/2\\ \sqrt{2}/2&0&\sqrt{2}/2\\ -1/2&-\sqrt{2}/2&1/2\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=M(g_u,B_u)=I_3 \Rightarrow f \text{ es isometría en } (\mathbb{R}^3,g_u)$$

$$\det\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{2}/2 & -1/2 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ -1/2 & -\sqrt{2}/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{2}{8}+\frac{2}{8}+\frac{2}{8}+\frac{2}{8}=\frac{8}{8}=1$$

$$V_1=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, \underbrace{\begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{2}/2 & -1/2 \\ \sqrt{2}/2 & -1 & \sqrt{2}/2 \\ -1/2 & -\sqrt{2}/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}\right\}=\mathcal{L}\{(1,0,-1)\}$$

$$\begin{cases} x+\sqrt{2}y+z=0 \\ \sqrt{2}x-2y+\sqrt{2}z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x+\sqrt{2}y+z=0 \Rightarrow x=-z \\ -4y=0\Rightarrow y=0 \end{array}$$

$$V_{-1}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, \underbrace{\begin{pmatrix} 3/2 & -\sqrt{2}/2 & -1/2 \\ \sqrt{2}/2 & 1 & \sqrt{2}/2 \\ -1/2 & -\sqrt{2}/2 & 3/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}\right\}=\{\vec{0}\}$$

$$\begin{cases} 3x-\sqrt{2}y-z=0 \\ \sqrt{2}x+2y+\sqrt{2}z=0 \\ x+\sqrt{2}y-3z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x+\sqrt{2}y-3z=0 \\ 4\sqrt{2}z=0\Rightarrow z=0 \quad x=0 \\ -4\sqrt{2}y+8z=0\Rightarrow y=0 \end{array}$$

Se trata de un giro de ángulo $\theta=\arccos\left(\frac{1}{2}(\operatorname{tr}(f)-1)\right)=$
$=\arccos(0)=\frac{\pi}{2}$ con eje $V_1=\mathcal{L}\{(1,0,-1)\}$

4. Espacio vectorial de las matrices $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de orden 2 con coef. reales. g es la métrica definida como $g(A,C)=\operatorname{traza}(AC^t)$. Se pide:

a) Calcular el complemento ortogonal en $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),g)$ del subespacio $A_2(\mathbb{R})$ formado por las matrices antisimétricas.

$$B=\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\} \Rightarrow \text{Base de } A_2(\mathbb{R})$$

$$(A_2(\mathbb{R}))^\perp=\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \,\middle|\, \operatorname{traza}\left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)=0\right\}=$$
$$=\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \,/\, \operatorname{traza}\begin{pmatrix} y & -x \\ t & -z \end{pmatrix}=0\right\}=\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \,/\, y-z=0\right\}=$$
$$=\mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

b) Obtener 2 matrices $A, C \in S_2(\mathbb{R})$ que sean L.I., unitarias en $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), g)$, y que formen un ángulo $\pi/4$ con I_2.

Si $A, C \in S_2(\mathbb{R})$, serán de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ y que el ángulo se define como:

$$\measuredangle(\vec{u},\vec{v}) = \arccos\left(\frac{g(\vec{u},\vec{v})}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}\right)$$

$$g(\vec{u},\vec{v}) = g(A, I_2) = tr\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = a+c$$

$$\cancel{\|\vec{u}\|^2 = g(A,A) = tr\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix} a^2+b^2 & ab+bc \\ ab+bc & b^2+c^2 \end{pmatrix}} = a^2+2b^2+c^2$$

$$\cancel{\|\vec{v}\|^2 = g(I_2, I_2) = tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2\right) = 2}$$

$$\cancel{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a+c}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{a^2+2b^2+c^2}}}$$

$$\cancel{1 = \frac{a+c}{\sqrt{a^2+2b^2+c^2}} \Leftrightarrow 1 = \frac{a^2+c^2+2ac}{a^2+2b^2+c^2}}$$

$$\cancel{a^2+2b^2+c^2 = a^2+c^2+2ac \Leftrightarrow b^2-ac=0 \Rightarrow a=1,\ b=c=0}$$

Como A y C son unitarias, $g(A,A) = 1 = g(C,C)$.

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a+c}{\sqrt{2}\cdot 1} \Leftrightarrow \boxed{1 = a+c} \Rightarrow \cancel{a = c = 1/2,\ b=0}$$
$$\Rightarrow \cancel{a = 1,\ c = 0,\ b=0}$$

$$\cancel{A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\left.\begin{array}{r} a^2+2b^2+c^2 = 1 \\ a+c = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow a = 1/2 \quad c = 1/2 \quad b = 1/2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow a = 1 \quad c = b = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\Rightarrow$ Claramente son L.I.

5. a) $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ con $p_A(\lambda) = (1-\lambda)^2$.
¿Es semejante a una matriz diagonal?
Si la respuesta es negativa, mostrar un contraejemplo.

Falso. Sea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$p_A(\lambda) = (1-\lambda)^2 \quad a_{\lambda_1} = 2$
$\lambda_1 = 1$

$$g_{\lambda_1} = 2 - rg\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 2 - rg\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2-1 = 1$$

Como $g_{\lambda_1} \neq 2$, A no es diagonalizable.

b) Probar que si $f: V \to V$ es una isometría de un EVME (V, g) y $\det(f) = -1$, entonces $\lambda = -1$ es valor propio de f. Por lo visto en teoría, sabemos que si $\det(f) = -1$ con f una isometría, existe una base B tal que f adopta su forma canónica:

$$M(f,B) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Y si calculamos el polinomio característico:

$$P_f(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta-\lambda & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)\det\begin{pmatrix} \cos\theta-\lambda & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (-1-\lambda)(\lambda^2 - 2\cos\theta\lambda + \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta) = \underbrace{(-1-\lambda)}(\lambda^2 - 2\cos\theta\lambda + 1)$$

$$\Downarrow$$

$$(-1-\lambda) = 0 \iff \boxed{\lambda = -1}$$

$$\Downarrow$$

Es valor propio

c) ¿Es cierto que en $(\mathbb{R}^3, g_u)$ ninguna simetría ortogonal respecto a un plano es composición de simetrías ortogonales respecto a rectas? Sí, es cierto. Para que eso fuese cierto, $M(f,B) = M(g,B) \cdot M(h,B)$, siendo f la simetría respecto de un plano y g y h simetrías respecto de rectas. $M(f,B)$ será semejante a una matriz de la forma $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y su determinante será ~~+~~ negativo, ~~(f, g, h son sconatoamente~~ mientras que $M(g,B)$ y $M(h,B)$ serán semejantes a una matriz de la forma $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $\det(M(g,B))$ y $\det(M(h,B))$ serán positivos. Por lo tanto, $\det(M(f,B)) < 0$, $\det(M(g,B)) \cdot \det(M(h,B)) > 0$ y nunca podrá ser que $M(f,B) = M(g,B) \cdot M(h,B)$.