Lógica y Métodos Discretos (grupo C del Grado de Ingeniería Informática)

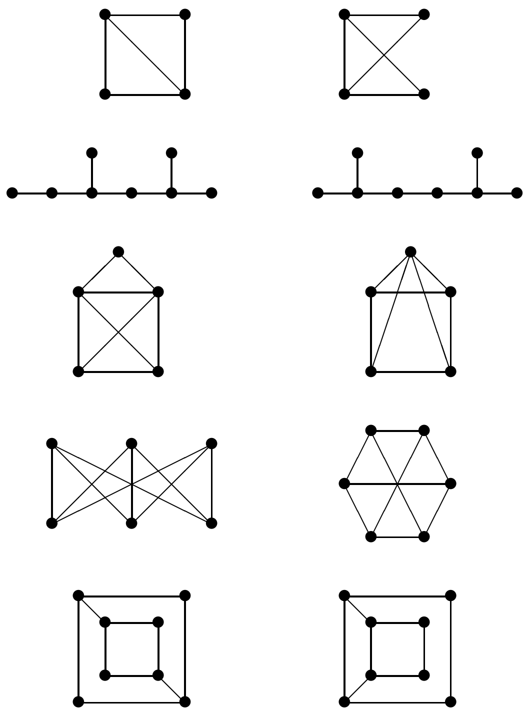
Relación de ejercicios del tema 6: Introducción a la teoría de grafos.

Ejercicio (básico) 1. Exprese en forma matricial los grafos siguientes

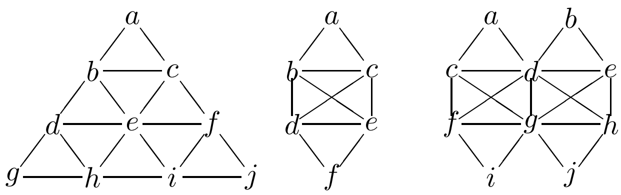
Ejercicio (básico) 2. Represente gráficamente los grafos cuyas matrices de adyacencia son

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

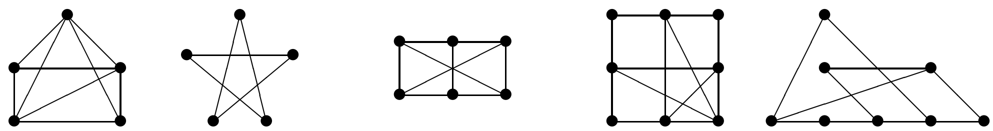
Ejercicio (básico) 3. ¿Son isomorfos las parejas de grafos siguientes?



Ejercicio (básico) 4. Encuentre un circuito o un camino de Euler para los siguientes grafos:



Ejercicio (básico) 5. Determine cuáles de los siguientes grafos son planos:



Ejercicio (básico) 6. Demuestre que en un grafo el número de vértices de grado impar es par.

Ejercicio (básico) 7. Demuestre que si colocamos las 28 fichas del dominó en fila, de forma que si una ficha está junto a otra los cuadrados adyacentes son del mismo valor, entonces los valores de los cuadrados inicial y final son el mismo.

Si tuviéramos un dominó con 36 fichas, en la que los valores marcados en cada una fueran de 0 a 7, ¿sería posible colocarlas todas en fila como hemos explicado en el apartado anterior?

Ejercicio (básico) 8. Conteste razonadamente a las siguientes cuestiones:

(a) ¿Para qué valores de n el grafo K_n es un circuito de Euler?

(b) Obtenga una fórmula para el número de lados de $K_{m,n}$.

(c) ¿Para qué valores de m y n el grafo $K_{m,n}$ es un circuito de Euler?

(d) Demuestre que cualquier grafo con cuatro vértices o menos es siempre plano.

(e) Demuestre que si un grafo tiene a lo sumo cinco vértices y uno de ellos es de grado tres entonces es plano.

(f) ¿Cuál es el menor número de vértices que puede tener un grafo (sin lazos ni lados paralelos) con 1000 lados?

(g) ¿Cuál es el mayor número de vértices que puede tener un grafo conexo con 1000 lados?

(h) Demuestre que en cualquier árbol con dos o más vértices existe, al menos, un vértice de grado uno.

(i) ¿Es cierto que todo grafo se puede colorear con, a lo sumo, cuatro colores?

(j) Demuestre que en todo grafo (sin lazos ni lados paralelos) con más de un vértice existen dos vértices con el mismo grado.

(k) ¿Existe algún grafo regular de grado cinco con veinticinco vértices?

(l) ¿Existe un grafo completo con quinientos noventa y cinco lados?

(m) ¿Depende el número de caras resultante de una representación plana de un grafo plano de la representación que escojamos?

Ejercicio (básico) 9. Determine cuáles de las siguientes sucesiones son gráficas. En los casos afirmativos, proporcione un grafo con tantos vértices como elementos de la sucesión y cuyos grados sean estos elementos:

- $2, 3, 3, 4, 4$
- $1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 5$
- $6, 6, 5, 4, 3, 3, 1$
- $8, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1$
- $4, 4, 4, 4, 3, 3, 3, 2, 2, 1$
- $1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1$
- $1, 3, 5, 7, 7, 5, 3, 1$
- $2, 2, 3, 2, 2, 3$
- $5, 5, 4, 4, 4, 4, 2, 2$

Ejercicio (básico) 10. Un árbol tiene 33 vértices de grado uno, 25 vértices de grado 2, 15 vértices de grado 3, y el resto, vértices de grado 4. ¿Cuántos vértices tiene en total?

Ejercicio (básico) 11. Pruebe que si un grafo G contiene sólo dos vértices de grado impar, entonces ambos han de encontrarse en la misma componente conexa.

Ejercicio 12. Sea G un grafo completo con cuatro vértices. Construya todos sus subgrafos salvo isomorfismos.

Ejercicio 13. Se conocen los siguientes datos sobre las personas a, b, c, d, e, f y g:

(a) La persona a habla inglés.

(b) La persona b habla inglés y español.

(c) La persona c habla inglés, italiano y ruso.

(d) La persona d habla japonés y español.

(e) La persona e habla alemán e italiano.

(f) La persona f habla francés, japonés y ruso.

(g) La persona g habla francés y alemán.

¿Es cierto que cada par de personas se pueden comunicar entre ellas utilizando si, es necesario, a otra persona como intérprete?

Ejercicio 14. Dado un grafo G (sin lazos ni lados paralelos) se define el complementario de G, $\overline{G}$, como el grafo cuyo conjunto de vértices es el mismo que de G, y para el que existe un lado que une los vértices u y v si, y sólo sí, en G no existe un lado que una esos dos vértices.

Demuestre que si G es no conexo, el complementario de G es conexo. ¿Es cierto que si G es conexo su complementario no lo es?.

Ejercicio 15. Un grafo G se dice autocomplementario, si $G \cong \overline{G}$.

(a) Demuestre que si G es autocomplementario y tiene n vértices, entonces el número de lados es $\frac{n(n-1)}{4}$.

(b) Demuestre que si G es autocomplementario, entonces G tiene $4k$ ó $4k+1$ vértices.

(c) Encuentre todos los grafos autocomplementarios de 4 y de 5 vértices.

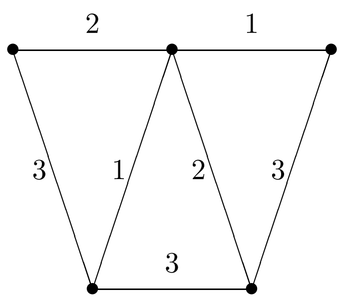
(d) Encuentre un grafo autocomplementario de 8 vértices.

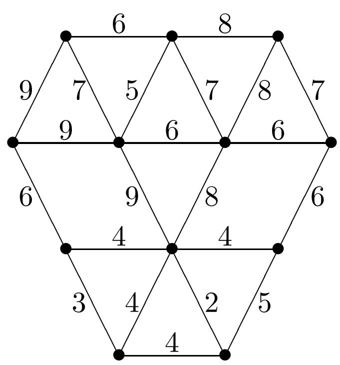
(e) Encuentre todos los árboles que sean autocomplementarios.

Ejercicio 16. Demuestre que si un grafo G tiene 11 vértices o más, entonces, o bien G, o bien $\overline{G}$ no es plano.

Ejercicio 17. Un automorfismo de un grafo G es un isomorfismo de G en G. Determine el número de automorfismos para cada uno de los grafos siguientes: K_n, P_n, C_n y $K_{m,n}$.

Ejercicio 18. Encuentre un árbol generador de peso mínimo para los siguientes grafos ponderados:





Ejercicio 19. Para $n \geq 1$, un n-cubo es cualquier grafo isomorfo al grafo Q_n que describimos a continuación: El conjunto de vértices es $\{0,1\}^n$, es decir, el conjunto de todas las n-uplas binarias de longitud n, y dos vértices $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n)$ son adyacentes en Q_n si, y sólo si, éstos difieren en una sola posición.

(a) Dibuje los grafos Q_n para $n = 1, 2, 3, 4$.

(b) ¿Es Q_n conexo para todo n?

(c) Calcule el número de lados y el número de vértices de Q_n.

(d) ¿Cuál es la distancia máxima que puede haber entre dos vértices de Q_n?

(e) Calcule el número cromático de Q_n. ¿Para qué valores de n es Q_n bipartido?

(f) ¿Para qué valores de n existe en Q_n un circuito de Euler?

(g) Demuestre que para todo $n \geq 2$ existe en Q_n un ciclo que recorre todos los vértices.

(h) Compruebe que Q_3 es plano aunque Q_4 no lo es.

(i) ¿Habrá algún grafo Q_n con $n \geq 5$ que también sea plano?

Ejercicio 20 (Códigos de Gray)**.** Una forma de representar la posición de una aguja de forma digital es dividiendo la circunferencia en 2^n arcos de igual longitud, y asignándole a cada arco una sucesión de n bits. Cuando la aguja está cerca de la línea de división entre dos arcos, se puede producir un error en la lectura. Para minimizar el efecto de un error al determinar la posición de la aguja, la asignación de las cadenas de bits debe hacerse de forma que los bits asociados a dos arcos adyacentes difieran únicamente en un bit.

Un *código de Gray* es una forma de etiquetar los 2^n arcos de una circunferencia por medio de n bits de forma que las etiquetas de dos arcos adyecentes difieran únicamente en un bit.

Por ejemplo, un código de Gray, con tres bits, podría ser 000, 010, 011, 001, 101, 111, 110, 100.

Demuestre, usando el ejercicio anterior, que existen códigos de Gray para cadenas de bits de cualquier longitud.

Ejercicio 21. A una cena acuden diez personas (Antonio, Bárbara, Carmen, Daniel, Emilia, Francisco, Gonzalo, Helia, Inés y Jesús) que deben sentarse en una mesa redonda. Muchas de estas personas no se conocen entre sí. A continuación explicamos quienes se conocen:

- Antonio conoce a Carmen, Emilia e Inés.

- Bárbara conoce a Carmen, Gonzalo y Helia.
- Carmen conoce a Antonio, Daniel, Francisco y Gonzalo.
- Daniel conoce a Carmen y Helia.
- Emilia conoce a Antonio, Gonzalo y Jesús.
- Francisco conoce a Carmen y Jesús.
- Gonzalo conoce a Bárbara, Carmen, Emilia e Inés.
- Helia conoce a Bárbara, Daniel e Inés.
- Inés conoce a Antonio, Gonzalo y Helia.
- Jesús conoce a Emilia y Francisco.

¿Podrían sentarse las diez personas a la mesa de forma que cada persona conoce a las dos que tiene a su lado?

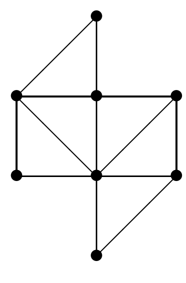
Ejercicio 22. Un grafo bipartido completo tiene 1357 lados. ¿Cuántos vértices puede tener?

Ejercicio 23. ¿Cuál es el mayor número de lados que puede tener un grafo bipartido completo con 50 vértices? ¿Y con 75? Justifica la respuesta.

Ejercicio 24. ¿Cuál es el menor número de vértices que puede tener un grafo bipartido completo con 1000 lados?

Ejercicio 25. Dado un grafo plano G, y una representación plana de éste, se define el grafo dual G' como aquel cuyo conjunto de vértices es el conjunto de caras de la representación plana de G, el conjunto de lados es el mismo que el de G. Un lado e es incidente (en G') en los vértices u y v si el lado e es frontera común de las caras correspondientes a u y v en el grafo G.

Calcule el dual del grafo



Ejercicio 26. Sea G un grafo sin lazos ni lados paralelos que tiene $2n$ vértices. Demuestra que si G no tiene ciclos de longitud 3 entonces el número de lados de G es menor o igual que n^2.

Proporcione un ejemplo de un grafo que tenga $2n$ vértices, n^2 lados y no tenga ciclos de longitud 3.

Ejercicio 27. Un árbol con raíz se dice binario si cada nodo tiene a lo sumo dos hijos. Se dice completo si cada nodo tiene 0 o dos hijos. Construya todos los árboles binarios completos con siete vértices.

Ejercicio 28. ¿Cuántas ramas tiene un árbol binario completo con treinta y cinco vértices?

Ejercicio 29. Calcule el número de vértices de un árbol sabiendo que tiene 33 vértices de grado 1, 25 vértices de grado 2, 15 vértices de grado 3 y los restantes de grado 4.

Ejercicio 30. (Junio 2014) Sea $G = K_{20}$. Calcule el número mínimo de lados que hay que suprimir en G para que:

(a) nos quede un grafo de Euler.

(b) Nos quede un grafo que no sea de Hamilton.

(c) Nos quede un grafo plano.

(d) nos quede un grafo que no sea conexo.

(e) nos quede un grafo que no tenga ciclos.

(f) nos quede un grafo cuyo número cromático sea 2.

Ejercicio 31. Sea $G = K_{10,15}$. Calcule el número mínimo de lados que hay que suprimir en G para que:

(a) ¿Cuál es el número mínimo de lados que hay que añadir a G para obtener un grafo de Hamilton?

(b) ¿Cuál es el número mínimo de lados que hay que añadir a G para obtener un grafo de Euler?

(c) ¿Cuál es el número mínimo de lados que hay que suprimir en G para que el grafo no sea conexo?

(d) ¿Cuál es el número mínimo de lados que hay que suprimir en G para que el grafo sea de Euler?

(e) ¿Cuál es el número mínimo de lados que hay que suprimir en G para que el grafo no tenga ciclos?

(f) ¿Cuál es el número mínimo de lados que hay que suprimir en G para que nos quede un grafo plano?

(g) nos quede un grafo cuyo número cromático sea 2.

Ejercicio 32. (Junio 2015) Sea G el grafo cuyo conjunto de vértices es $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ y cuya matriz de adyacencia es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) ¿Hay algún lazo ó camino cerrado de Euler en G? Si la respuesta es afirmativa, muestre uno.

(b) ¿Hay algún ciclo de Hamilton en G? Si la respuesta es afirmativa, muestre uno.

(c) ¿Es G un grafo plano? Si la respuesta es afirmativa, obtenga una representación plana de G.

(d) Calcule el número cromático de G. ¿Es G un grafo bipartido?

Ejercicio 33. (Julio 2016)

1. Estudie si los árboles siguientes son o no isomorfos:

2. Sea G un grafo y A su matriz de adyacencia. Sabemos que:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

   a) ¿Es G conexo?

   b) ¿Es G un grafo de Euler?

c) ¿Es G un árbol?

d) ¿Es G bipartido?

e) ¿Es G plano?

f) ¿Cuántos caminos de longitud 5 hay de v_1 a v_5?. ¿Y de v_1 a v_6?

g) ¿Cuál es la distancia de v_1 a v_4?

Ejercicio 34. (Septiembre 2016) La siguiente matriz debe ser la matriz de adyacencia de un grafo simple, sin lazos y no dirigido con 6 vértices. Complétela como sea conveniente en cada caso para que el grafo resultante sea como se pide en cada apartado:

(a) un árbol con 3 hojas (vértices de grado 1).

(b) regular de grado 2.

(c) conexo, no sea un árbol y no sea de Euler.

(d) tenga el mayor número posible de lados.

(e) tenga número cromático 3.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \_ \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \_ \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \_ \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \_ \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ & \_ & \_ \end{pmatrix}$$

Ejercicio 35. (Septiembre 2016. Incidencias)

¿Puede haber un árbol que tenga 13 vértices de grado 5, 20 vértices de grado 3, 23 vértices de grado 2, 95 hojas y el resto vértices de grado 4?

En caso afirmativo, ¿cuántos lados habría que añadir como mínimo para obtener un grafo de Euler?

Ejercicio 36. Razone que en cualquier grafo el número de vértices de grado impar es par.

Ejercicio 37. Pruebe que en todo grafo con al menos dos vértices hay siempre al menos dos vértices con el mismo grado.

Ejercicio 38. Se sabe que un grafo G de 21 lados tiene 7 vértices de grado 1, 3 de grado 2, 7 de grado 3, y el resto de grado 4. ¿Cuántos vértices hay en G?

Ejercicio 39. Calcule el número de vértices de un árbol sabiendo que tiene 33 vértices de grado 1, 25 vértices de grado 2, 15 vértices de grado 3 y los restantes de grado 4.

Ejercicio 40. ¿Existe algún grafo regular de grado 5 con 25 vértices?

Ejercicio 41. Justifique las siguientes propiedades.

(a) Si un grafo tiene exactamente dos vértices de grado impar, entonces ambos vértices han de encontrarse en la misma componente conexa.

(b) En todo grafo con al menos dos vértices existen siempre al menos dos vértices con el mismo grado.

Ejercicio 42. ¿Existe algún grafo completo con 7021 lados?

Ejercicio 43. Determine cuáles de las secuencias siguientes son gráficas, y para aquellas que lo sean, encuentre un grafo correspondiente a dicha secuencia:

(a) $4, 4, 3, 2, 2, 1$

(b) $7, 6, 5, 4, 3, 3, 2$

(c) $5, 5, 4, 4, 4, 4, 2, 2$

(d) $6, 6, 5, 4, 3, 3, 1$

(e) $11, 10, 8, 8, 8, 8, 7, 7, 7, 6, 5, 4, 4, 3$.

Ejercicio 44. Sea S la secuencia de números naturales $11, 10, 8, 8, 8, 8, 7, 7, 7, 6, 5, 4, 4, 3$. De las siguientes afirmaciones, elija las que sean correctas:

1. Existen grafos cuya secuencia de grados viene dada por S. Además el número de lados de cada uno de tales grafos es 48.

2. No existe ningún grafo cuya secuencia de grados viene dada por S.

3. Existen grafos cuya secuencia de grados viene dada por S, aunque el número de lados de cada uno de tales grafos no está determinado a partir de los datos del problema.

4. Existen grafos cuya secuencia de grados viene dada por S. Además el número de lados de cada uno de tales grafos es 96.

Ejercicio 45. Sea G un grafo con n vértices tal que $\mathrm{gr}_G(v) \geq \frac{n-1}{2}$ para todo $v \in \mathrm{V}(G)$. Demuestre que G es un grafo conexo en el cual la distancia entre dos vértices cualesquiera ha de ser menor o igual que 2.

Ejercicio 46. Sobre siete personas $A_1, A_2, \ldots, A_7$ se sabe que A_1 habla inglés, A_2 habla inglés y chino, A_3 habla inglés, italiano y ruso, A_4 habla japonés y chino, A_5 habla alemán e italiano, A_6 habla francés, japonés y ruso, y que A_7 habla francés y alemán.

(a) Demuestre que dos personas cualesquiera pueden siempre comunicarse, si es necesario, con la ayuda de otras actuando como intérpretes.

(b) ¿Cual es el menor número de intérpretes para que A_1 y A_7 se puedan comunicar?

(c) Demuestre que sigue siendo posible la comunicación entre dos personas cualesquiera, aún cuando una de las restantes sufra afonía. La respuesta a este apartado está relacionada con el concepto de *conectividad* de un grafo. Defina la conectividad de un grafo y ponga ejemplos.

(d) ¿Cual es el menor número de grupos en los que hay que dividir a todas las personas para que dos personas en un mismo grupo no puedan comunicarse entre sí?

Ejercicio 47. Encuentre dos grafos conexos no isomorfos con el mismo número de vértices, el mismo número de lados, y la misma secuencia de grados.

Ejercicio 48. Justifique que dos grafos G_1 y G_2 son isomorfos si, y sólo si, los grafos $\overline{G}_1$ y $\overline{G}_2$ son isomorfos. Explique en qué circunstancias la propiedad demostrada en este ejercicio puede ser útil.

Ejercicio 49. ¿Son isomorfos los grafos G_1 y G_2 dados por las matrices de adyacencia siguientes?

$$A(G_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } A(G_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 50. ¿Existe un isomorfismo entre los grafos G_1 y G_2 dados por las matrices de adyacencia siguientes?

$$A(G_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A(G_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 51. Un grafo G se dice autocomplementario, si $G \cong \overline{G}$.

(a) Demuestre que si G es autocomplementario, entonces G tiene $4k$ ó $4k+1$ vértices, donde k es un número natural.

(b) Encuentre todos los grafos autocomplementarios con a lo sumo cinco vértices.

(c) Encuentre un grafo autocomplementario de 8 vértices.

(d) Encuentre todos los árboles que son autocomplementarios.

Ejercicio 52. Un automorfismo de un grafo G es un isomorfismo de G en G. Determine el número de automorfismos para cada uno de los grafos siguientes: K_n, P_n, C_n y $\mathrm{K}_{m,n}$

Ejercicio 53. Dado el grafo dirigido $G = (V, L, \varphi)$, donde

- $V = \{1, 2, 3, 4\}$, $L = \{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5, \ell_6\}$, y
- $\varphi(\ell_1) = (4, 1), \varphi(\ell_2) = (3, 4), \varphi(\ell_3) = (2, 4),$
  $\varphi(\ell_4) = (1, 2), \varphi(\ell_5) = (4, 2), \varphi(\ell_6) = (2, 3),$

encuentre el número de automorfismos de G.

Ejercicio 54. Estudie si los dos grafos dirigidos siguientes son isomorfos: $G_1 = (V, L, \varphi)$ tal que:

- $V = \{1, 2, 3, 4\}$, $L = \{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5, \ell_6, \ell_7\}$, y
- $\varphi(\ell_1) = (1, 1), \varphi(\ell_2) = (3, 4), \varphi(\ell_3) = (4, 1), \varphi(\ell_4) = (1, 2),$
  $\varphi(\ell_5) = (4, 2), \varphi(\ell_6) = (2, 3), \varphi(\ell_7) = (4, 2).$

$G_2 = (V, L, \varphi)$ tal que:

- $V = \{1, 2, 3, 4\}$, $L = \{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5, \ell_6, \ell_7\}$, y
- $\varphi(\ell_1) = (4, 1), \varphi(\ell_2) = (4, 1), \varphi(\ell_3) = (1, 2), \varphi(\ell_4) = (4, 2),$
  $\varphi(\ell_5) = (2, 3), \varphi(\ell_6) = (3, 4), \varphi(\ell_7) = (3, 3).$

Ejercicio 55. Si G es un grafo no conexo, pruebe que $\overline{G}$ es conexo.

Ejercicio 56. Demuestre que todo grafo con $2n$ vértices y sin ciclos de longitud 3 tiene a lo sumo n^2 lados. (Sugerencia: Aplique inducción sobre n.)
Dé un grafo en las condiciones anteriores que tenga exactamente n^2 lados.

Ejercicio 57. Demuestre el Teorema del número de caminos para grafos no dirigidos.

Ejercicio 58. Si A es la matriz de adyacencia de un grafo G, ¿qué significado tienen los valores que aparecen en la diagonal principal de la matriz A^2? ¿Qué interpretación geométrica tienen los valores que aparecen en la diagonal principal de la matriz A^3?

Ejercicio 59. Sea G un grafo tal que $\mathrm{V}(G) = \{v_1, \ldots, v_5\}$ y cuya matriz de adyacencia es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

¿Cuál es el número de caminos de longitud 8 desde el vértice v_1 hasta el vértice v_2? ¿Cuántos de dichos caminos no pasan por v_3?

Ejercicio 60. Sea G un grafo dirigido tal que $\mathrm{V}(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y cuya matriz de adyacencia es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dibuje el grafo G y calcule el número de caminos de longitud 8 desde el vértice v_1 hasta el vértice v_2.

Ejercicio 61. Explique, utilizando la Teoría de grafos, por qué en el juego del dominó se puede formar una secuencia cerrada en la que intervienen todas las fichas. Se recuerda que cada ficha tiene dos números entre 0 y 6, pudiendo ser ambos iguales, y que al formar la citada secuencia, cada dos fichas consecutivas han de tener un número en común.

Ejercicio 62. A una reunión asistirán 10 personas $P_1, P_2, \ldots, P_{10}$. Decida si es posible sentar a las 10 personas en torno a una mesa de modo que cada persona conozca a aquellas que se sienten a su lado. Las amistades de cada persona vienen dadas por la tabla siguiente:

P_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
conoce a P_j donde j es	$4,8$	$4,9$	$6,4,8$	$1,2,3$	$7,10$	$3,7,9$	$5,6,8$	$1,3,7,9$	$2,6,8,10$	$5,9$

Ejercicio 63. Resuelva os siguientes apartados:

(a) Encuentre un grafo en el que haya un lazo de Euler, pero no haya ningún ciclo de Hamilton.

(b) Encuentre un grafo en el que haya un ciclo de Hamilton, pero no haya ningún lazo de Euler.

Ejercicio 64. Responda a las siguientes preguntas:

(a) ¿Para qué valores de m el grafo K_m tiene algún camino de Euler?

(b) ¿Para qué valores de m y n el grafo $\mathrm{K}_{m,n}$ tiene algún camino de Euler?

(c) ¿Para qué valores de m el grafo K_m tiene algún camino de Hamilton?

(d) En el caso en el que hayan ciclos de Hamilton, calcule cuántos ciclos de Hamilton en K_m empiezan y acaban en cualquier vértice v.

(e) ¿Para qué valores de m y n el grafo $\mathrm{K}_{m,n}$ tiene algún camino de Hamilton?

Ejercicio 65. Para cada uno de los grafos dirigidos siguientes, estudie si existen caminos de Euler y si hay caminos de Hamilton:

1. $G_1 = (V, L, \varphi)$ tal que:
   - $V = \{1, 2, 3, 4\}$, $L = \{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5, \ell_6\}$, y
   - $\varphi(\ell_1) = (4, 1), \varphi(\ell_2) = (3, 4), \varphi(\ell_3) = (2, 4),$
     $\varphi(\ell_4) = (1, 2), \varphi(\ell_5) = (4, 2), \varphi(\ell_6) = (2, 3).$

2. $G_2 = (V, L, \varphi)$ tal que:
   - $V = \{1, 2, 3, 4\}$, $L = \{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5, \ell_6\}$, y
   - $\varphi(\ell_1) = (1, 4), \varphi(\ell_2) = (4, 1), \varphi(\ell_3) = (3, 4),$
     $\varphi(\ell_4) = (3, 2), \varphi(\ell_5) = (1, 2), \varphi(\ell_6) = (2, 3).$

3. $G_3 = (V, L, \varphi)$ tal que:
   - $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $L = \{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5, \ell_6, \ell_7, \ell_8, \ell_9, \ell_{10}, \ell_{11}\}$, y
   - $\varphi(\ell_1) = (5, 1), \varphi(\ell_2) = (6, 2), \varphi(\ell_3) = (5, 3),$
     $\varphi(\ell_4) = (1, 2), \varphi(\ell_5) = (2, 3), \varphi(\ell_6) = (2, 1),$
     $\varphi(\ell_7) = (1, 4), \varphi(\ell_8) = (3, 5), \varphi(\ell_9) = (4, 6),$
     $\varphi(\ell_{10}) = (4, 5), \varphi(\ell_{11}) = (3, 6).$

Ejercicio 66. Un torneo es un grafo dirigido que resulta al asignarle una dirección a cada uno de los lados de un grafo completo K_n. Demuestre que todo torneo contiene un camino abierto de Hamilton.

Ejercicio 67. Sea G un grafo dirigido en el que cada una de las flechas tiene asignado un número real positivo llamado costo o peso, que lo podemos interpretar como la distancia entre el vértice inicial y el vértice final que forman dicha flecha. La distancia de un camino en G es la suma de las distancias asignadas a las flechas que aparecen en dicho camino. El **Algoritmo de Floyd**, que describimos a continuación, determina para cada par de nodos de G, una geodésica y su longitud.

Para facilitar la notación, vamos a suponer que $\mathrm{V}(G) = \{1, 2, \ldots, n\}$, y consideramos la matriz $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\})$, tal que:

- $c_{ii} = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

- Para $i \neq j$, se verifica que $c_{ij} \in \mathbb{R}^+$ si $(i, j) \in \mathrm{L}(G)$, mientras que $c_{ij} = +\infty$ en otro caso.

Para especificar el algoritmo, escribiremos $C[i, j]$ en lugar de c_{ij}. El algoritmo además utiliza dos matrices auxiliares D y P, ambas de orden $n \times n$.

$D := C$.
Para $i := 1$ hasta n, hacer:
  Para $j := 1$ hasta n, hacer:
    $P[i, j] := 0$.
Para $k := 1$ hasta n, hacer:
  Para $i := 1$ hasta n, hacer:
    Para $j := 1$ hasta n, hacer:
      Si $D[i, k] + D[k, j] < D[i, j]$, entonces hacer:
        $D[i, j] := D[i, k] + D[k, j]$,
        $P[i, j] := k$.

Se puede demostrar que tras la iteración k-ésima, la matriz D contiene las longitudes de los caminos más cortos en G que usan como nodos intermedios a nodos pertenecientes al conjunto $\{1, 2, \ldots, k\}$. Por tanto, cuando finaliza el algoritmo, la matriz D contiene las longitudes de los caminos más cortos para cada par de vértices de G.

Podemos obtener una geodésica del vértice i al vértice j teniendo en cuenta que $P[i, j]$ contiene el número de la última iteración sobre k que modificó el valor $D[i, j]$. De manera más precisa:

- Si $P[i, j] = 0$, entonces $D[i, j]$ no se ha modificado nunca, y una geodésica del vértice i al vértice j, es la flecha que hay en G de i a j.

- Si $P[i, j] = k > 0$, entonces hay una geodésica de i a j que pasa por el vértice intermedio k. En tal caso, miramos recursivamente en $P[i, k]$ y en $P[k, j]$ para obtener los restantes nodos intermedios de la geodésica buscada.

Aplique el Algoritmo de Floyd al grafo dirigido G cuya matriz de adyacencia es

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

donde los costos o pesos de los lados vienen dados por la tabla siguiente:

ℓ	$(1, 2)$	$(2, 1)$	$(2, 4)$	$(3, 2)$	$(4, 1)$	$(4, 3)$
c_ℓ	5	7	2	3	4	1

Para cada par de vértices indique la distancia entre ambos y una geodésica.

Ejercicio 68. El algoritmo de Floyd que hemos estudiado en el ejercicio anterior también es aplicable a grafos no dirigidos con pesos en sus lados. Aplique el algoritmo de Floyd al grafo no dirigido siguiente, donde

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

y los costos o pesos de los lados vienen dados por la tabla siguiente:

ℓ	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,4\}$	$\{2,5\}$	$\{3,5\}$	$\{4,5\}$
c_ℓ	5	1	2	2	6	1

Ejercicio 69. Si G es un árbol, demuestre que $|\mathrm{L}(G)| = |\mathrm{V}(G)| - 1$. (Sugerencia: Llame $n = |\mathrm{V}(G)|$ y aplique inducción sobre n.)

Ejercicio 70. Determine todos los grafos bipartido-completos con 19 vértices y 84 lados.

Ejercicio 71. De entre todos los grafos bipartidos con n vértices, determine aquellos que tienen el mayor número de lados.

Ejercicio 72. De entre todos los grafos bipartidos con 146 vértices, determine aquellos que tienen el mayor número de lados. ¿Cuál es la respuesta para grafos bipartidos con 147 vértices? No olvide justificar su respuesta en cada caso.

Ejercicio 73. ¿Existen grafos bipartidos en los que el número de vértices es impar y mayor o igual que 3, y además hay un ciclo de Hamilton?

Ejercicio 74. ¿Cuál es el menor número de lados que hay que suprimir en K_n para que el grafo resultante sea bipartido? ¿Y para que tenga un recorrido de Euler? (Se recuerda que al suprimir lados no se eliminan vértices.)

Ejercicio 75. Sea G un grafo con n vértices y con matriz de adyacencia A del que conocemos tan sólo las matrices $A^2, A^3, \ldots, A^n$. ¿A partir de la información anterior es posible decidir si G es un grafo bipartido?

Ejercicio 76. Dado un grafo completo $\mathrm{K}_n = (V, L)$, con $n \geq 5$ y $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, calcule el número cromático de los grafos $G_1 = (V, L \setminus \{\{1,2\}\})$ y $G_2 = (V, L \setminus \{\{1,2\}, \{3,4\}\})$.

Ejercicio 77. Sea G el grafo tal que $\mathrm{V}(G) = \{n \in \mathbb{N} : 700 \leq n \leq 900\}$, y para dos vértices cualesquiera a y b se verifica que $\{a, b\} \in \mathrm{L}(G)$ si, y sólo si, $a \neq b$ y $a + b$ es múltiplo de 4. Calcule el número cromático de G.

Ejercicio 78. Calcule el menor número de lados que hay que suprimir en el grafo completo K_{100} para que el número cromático del grafo resultante sea igual a 2. Se recuerda que al suprimir un lado no se eliminan los dos vértices que forman dicho lado.

Ejercicio 79. Calcule el polinomio cromático, y a partir de él el número cromático, de cada uno de los grafos siguientes dados por sus matrices de adyacencia:

$$A(G_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A(G_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 80. Si el polinomio cromático de un grafo G es $p(G,x) = x^5 - 9x^4 + 29x^3 - 39x^2 + 18x$, calcule el número cromático de G.

Ejercicio 81. Demuestre la siguiente fórmula para el polinomio cromático del grafo ciclo C_n, donde $n \geq 3$:

$$p(\mathrm{C}_n, x) = (x-1)^n + (-1)^n(x-1).$$

(Sugerencia: Aplique inducción sobre n.)

Ejercicio 82. Sabiendo que el polinomio cromático de un ciclo C_n viene dado por

$$p(\mathrm{C}_n, x) = (x-1)^n + (-1)^n(x-1),$$

deduzca a partir de esta fórmula el valor de $\chi(\mathrm{C}_n)$.

Ejercicio 83. Demuestre el *Teorema de Euler para grafos planos*, es decir, si G es un grafo plano conexo con c caras, entonces $|\mathrm{V}(G)| - |\mathrm{L}(G)| + c = 2$. (Sugerencia: Aplique inducción sobre c.)

Ejercicio 84. Sea G un grafo plano conexo con n vértices, m lados y c caras en el cual cada cara es un ciclo de longitud r. Suponemos además que $n \geq 3$.

(a) Demuestre que $c \cdot r = 2 \cdot m$.

(b) Utilice el Teorema de Euler para grafos planos y la identidad obtenida en el apartado (a), para deducir que $m = \frac{r \cdot (n-2)}{r-2}$.

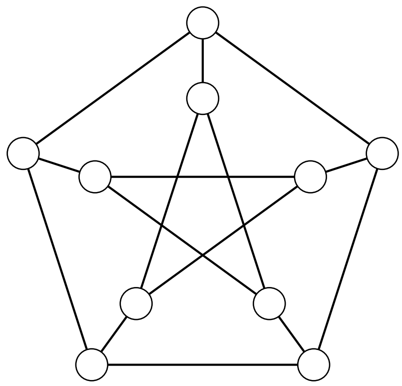
(c) Si $r = 3$, ¿qué conclusión se obtiene al particularizar la fórmula obtenida en el apartado (b)?

(d) Si $r \geq 4$, ¿qué conclusión se obtiene al particularizar la fórmula obtenida en el apartado (b)?

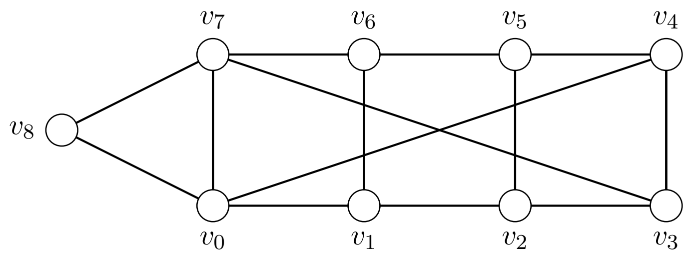
Ejercicio 85. Si G es un grafo plano con al menos 3 vértices, pruebe que $|\mathrm{L}(G)| \leq 3 \cdot \Big(|\mathrm{V}(G)| - 2\Big)$.

Ejercicio 86. Si G es un grafo plano con al menos 3 vértices y en el que no hay ciclos de longitud 3, demuestre que $|\mathrm{L}(G)| \leq 2 \cdot \Big(|\mathrm{V}(G)| - 2\Big)$.

Ejercicio 87. Compruebe mediante el Teorema de Kuratowski que el grafo siguiente no es plano:



Ejercicio 88. Compruebe mediante el Teorema de Wagner-Harary-Tutte que el grafo siguiente no es plano:



Ejercicio 89. ¿Cuál es el mayor número de caras que pueden resultar al representar de forma plana un grafo plano con n vértices?
¿Y si además en dicho grafo no hay ciclos de longitud 3?

Ejercicio 90. ¿Cual es el mayor número de lados que puede tener un grafo bipartido de n vértices?

Ejercicio 91. Encuentre un grafo no plano que no sea homeomorfo a K_5 ni a $\mathrm{K}_{3,3}$.

Ejercicio 92. Responda a las siguientes cuestiones:

(a) ¿Para qué valores de m es el grafo K_m plano?

(b) ¿Para qué valores de m y n es el grafo $\mathrm{K}_{m,n}$ plano?

Ejercicio 93. Un grafo plano conexo tiene dos vértices de grado 3, dos vértices de grado 4, dos vértices de grado 5 y el resto de grado 6. En una representación plana nos salen 16 regiones o caras. ¿Cuántos vértices tiene el grafo? No se admiten soluciones basadas sólo en dibujos.

Ejercicio 94. Si G es un grafo plano, demuestre que en G hay al menos un vértice de grado menor o igual que 5.

Ejercicio 95. En cada uno de los apartados siguientes, determine el menor número de lados que hay que suprimir en el grafo completo K_{80} para que el grafo resultante verifique las condiciones especificadas:

(a) No sea conexo.

(b) Sea conexo y sin ciclos.

(c) Sea bipartido.

(d) Tenga un ciclo de Hamilton.

(e) Tenga algún camino de Euler.

(f) Sea plano.

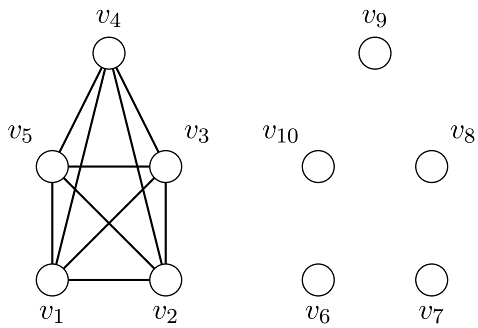
(g) ¿Cuántas caras resultan en cualquier representación plana de G?

Se recuerda que al suprimir lados no se eliminan vértices.

Ejercicio 96. Si G es un grafo plano con 11 o más vértices, demuestre que al menos uno de los grafos G o $\overline{G}$ no es plano. Proporcione un ejemplo de un grafo con menos de 11 vértices tal que él y su complementario sean planos.

Ejercicio 97. Si G es un grafo tal que $\mathrm{V}(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$, justifique que existe al menos un número real c que verifica la siguiente propiedad: Es posible asignarle a cada vértice v_i un número real x_i tal que no todos los números $x_1, \ldots, x_n$ sean nulos, y para cada $i = 1, \ldots, n$, si $v_{i_1}, \ldots, v_{i_j}$ son los vértices adyacentes con v_i, entonces, $x_{i_1} + \cdots + x_{i_j} = c \cdot x_i$.

Ejercicio 98. Sea G el complementario del grafo siguiente:



(a) ¿Es G un grafo plano?

(b) ¿Hay algún camino de Euler en G? Si la respuesta es afirmativa, muestre uno.

(c) ¿Hay algún ciclo de Hamilton en G? Si la respuesta es afirmativa, muestre uno.

(d) Calcule el número cromático de G.

(e) ¿Es G un grafo bipartido?

Ejercicio 99. Sea $L = [11, x, 9, 9, 9, 8, 8, 8, 7, 6, 6, 5]$ una lista de números naturales ordenada de manera decreciente.

(a) Determine el valor de x para que L sea la secuencia de grados de algún grafo.

En los apartados siguientes, G denota cualquier grafo con secuencia de grados L.

(b) ¿Cuántos lados tiene G? ¿Y su grafo complementario?

(c) ¿Puede ser G no conexo?

(d) ¿Puede ser G plano?

(e) ¿Puede ser G bipartido?

(f) ¿Cuál es el menor número de lados que habría que suprimir en G, sin suprimir vértices, de modo que se obtuviera un árbol?

(g) ¿Cuál es el menor número de lados que habría que añadirle a G para que en el grafo resultante existiese algún lazo de Euler?

Ejercicio 100. Sea G un grafo tal que $\mathrm{V}(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Demuestre que existen números reales $x_1, \ldots, x_n$, no todos nulos, y un número real b tales que para cualquier vértice $v_i \in \mathrm{V}(G)$, si $v_{i_1}, \ldots, v_{i_t}$ son todos los vértices adyacentes con v_i en G, entonces

$$\sum_{j=1}^{t} x_{i_j} = b \cdot x_i.$$

Ilustre la propiedad anterior con los grafos C_3, C_4 y K_4.

Ejercicio (básico) 6. Demuestre que en un grafo el número de vértices de grado impar es par.

Dado un vértice v, denotaremos por grad(v) al nº de aristas incidentes con v.

Supongamos que el nº de vértices de grado impar es impar. La suma de los grados de los vértices se puede descomponer en las sumas de los grados de los vértices de grado par e impar:

$$\sum_{v \in V} \text{grad}(v) = \sum_{v \in V \text{ impar}} \text{grad}(v) + \underbrace{\sum_{v \in V \text{ par}} \text{grad}(v)}$$

Por ser suma de grados de vértices de grado par, el resultado de esa sumatoria será un número par.

Como hemos supuesto que el nº de vértices de grado impar es impar, $\sum_{v \in V \text{ impar}} \text{grad}(v)$ por ser suma de un número impar de sumandos que son impares. Por lo tanto, como $\sum_{v \in V \text{ par}} \text{grad}(v)$ es par y $\sum_{v \in V \text{ impar}} \text{grad}(v)$ es impar, entonces $\sum_{v \in V} \text{grad}(v)$ es impar. Esto es una contradicción ya que la suma de los grados de los vértices de un grafo $G = (V, A)$ es par. Esto se debe a que cada arista que une 2 vértices suma 1 al grado de cada uno de ellos, luego $\sum_{v \in V} \text{grad}(v) = 2\underbrace{|A|}_{\text{nº aristas}}$

Como hemos llegado a una contradicción, nuestra hipótesis era falsa y necesariamente, el nº de vértices de grado impar es par.