GEOMETRÍA III
Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Respuestas al examen final Convocatoria Ordinaria (19/01/2022)

1. *Denotemos por $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ y $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ los espacios afines de los polinomios reales en la variable x de grado ≤ 2 y las matrices simétricas reales de orden 2, respectivamente.*

   Dados los subespacios afines

$$S = \{p(x) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \colon p'(1) = 1\} \quad y \quad T = \{A \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \colon \text{Traza}(A) = -1\},$$

   probar que existe una afinidad $f\colon \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ tal que

$$f(S) = T \quad y \quad f(-x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Si $\mathcal{R}_0 = \{0, \{1, x, x^2\}\}$ y $\mathcal{R}_0' = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}\right\}$ denotan las correspondientes referencias usuales de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$y $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, determinar

   a*) $M(f, \mathcal{R}_0, \mathcal{R}_0')$ y*

   b*) las ecuaciones implícitas de $f^{-1}(R)$ para $R = \{A \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \colon \text{Traza}(A - \mathrm{I}_2) = 0\}$.*

Solución: Es claro que si escribimos $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, la ecuación $p'(1) = 1$ nos dice que $2a_2 + a_1 = 1$ y por tanto

$$S = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \colon 2a_2 + a_1 = 1\} = x + L\left(\{1, 2x - x^2\}\right).$$

De aquí que $x, 1 + x, -x + x^2$ sean puntos de S afínmente independientes en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ y S sea el plano

$$S = x \vee 1 + x \vee -x + x^2.$$

Análogamente, si $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ la ecuación $\text{Traza}(A) = -1$ se traduce en $a + c = -1$, y por tanto

$$T = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} : a + c = -1\right\} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + L\left(\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}\right)$$

De aquí que $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sean puntos de T afínmente independientes en $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ y T sea el plano

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Observemos que $-x \notin S$ y por tanto $x, 1+x, -x+x^2, -x$ son cuatro puntos afínmente independientes de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, y por un razonamiento análogo $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ son cuatro puntos afínmente independientes en $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. Como $\dim \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) = \dim \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) = 3$, por el Teorema Fundamental de la Geometría afín existe una única afinidad $f\colon \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ tal que

$$f(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ f(1+x) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ f(-x+x^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ f(-x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

y en particular $f(S) = T$ y $f(-x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ como dice el enunciado. Claramente, la aplicación lineal $\vec{f}$ asociada a f satisface

$$\vec{f}(1) = f(1+x) - f(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{f}(x^2 - 2x) = f(-x + x^2) - f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{f}(-2x) = f(-x) - f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto en las referencias respectivas de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ y $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ dadas por

$$\mathcal{R} = \big\{x, \{1, x^2 - 2x, -2x\}\big\}\,,\ \mathcal{R}' = \left\{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}\right\},$$

se tiene que

$$M(f, \mathcal{R}, \mathcal{R}') = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \mathrm{I}_4.$$

Como

$$M(\mathrm{Id}_{\mathbb{P}_2(\mathbb{R})}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right), \quad M(\mathrm{Id}_{\mathcal{S}_2(\mathbb{R})}, \mathcal{R}', \mathcal{R}'_0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right),$$

deducimos que

$$M(f, \mathcal{R}_0, \mathcal{R}'_0) = M(\mathrm{Id}_{\mathcal{S}_2(\mathbb{R})}, \mathcal{R}', \mathcal{R}'_0) \cdot M(f, \mathcal{R}, \mathcal{R}') \cdot M(\mathrm{Id}_{\mathbb{P}_2(\mathbb{R})}, \mathcal{R}_0, \mathcal{R}) =$$

$$= M(\mathrm{Id}_{\mathcal{S}_2(\mathbb{R})}, \mathcal{R}', \mathcal{R}'_0) \cdot M(f, \mathcal{R}, \mathcal{R}') \cdot M(\mathrm{Id}_{\mathbb{P}_2(\mathbb{R})}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0)^{-1} =$$

$$= \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \cdot \mathrm{I}_4 \cdot \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right).$$

Esto concluye a).

Para resolver b), observemos que de la expresión de $M(f, \mathcal{R}_0, \mathcal{R}'_0)$ se tiene que $f\colon \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ viene dada por

$$f\big(a_0 + a_1 x + a_2 x^2\big) = \begin{pmatrix} -a_1 - a_2 & a_0 \\ a_0 & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}a_1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto $f\big(a_0 + a_1 x + a_2 x^2\big) \in R$ si y sólo si

$$\mathrm{Traza}\left(\begin{pmatrix} -a_1 - a_2 & a_0 \\ a_0 & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}a_1 \end{pmatrix} - \mathrm{I}_2\right) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a_1 + 2a_2 + 5 = 0.$$

De aquí que la expresión

$$f^{-1}(R) = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})\colon a_1 + 2a_2 + 5 = 0\}$$

describa las ecuaciones implícitas de $f^{-1}(R)$ en la referencia $\mathcal{R}_0$.

2. *En un espacio afín euclidiano* $(\mathcal{A}, \vec{\mathcal{A}}, \rightarrow, \langle\, ,\, \rangle)$ *con* $\dim \mathcal{A} = 3$ *consideramos dos puntos* p_1, p_2 *y una recta* R *tales que*

$$\mathrm{d}(p_1, R) = \mathrm{d}(p_2, R) > 0.$$

Probar que existe un único movimiento rígido directo $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ *tal que* $f(R) = R$ *y* $f(p_1) = p_2$*, describiendo su naturaleza y elementos geométricos.*

Como consecuencia, probar que dados los puntos $p_1 = (0, 0, -2)$*,* $p_2 = (-1, 1, 1)$ *y la recta*

$$R = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon x_2 - x_1 - 1 = x_3 - x_2 + 1 = 0\}$$

del espacio afín euclidiano $\mathbb{R}^3$*, existe un único movimiento helocoidal* $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *tal que* $f(R) = R$ *y* $f(p_1) = p_2$*. Calcular* $M(f, \mathcal{R}_0)$*, donde* $\mathcal{R}_0$ *es la referencia canónica o usual de* $\mathbb{R}^3$*.*

Solución: Para la primera parte teórica, recordemos que los movimientos rígidos directos en $(\mathcal{A}, \vec{\mathcal{A}}, \rightarrow, \langle\, ,\, \rangle)$ son traslaciones, giros respecto a una recta ó movimientos helicoidales. Discutamos tres casos:

- $\overrightarrow{p_1p_2} \in \vec{R}$: En este caso, tomando $v = \overrightarrow{p_1p_2}$, la traslación τ_v evidentemente satisface $f(R) = R$ y $f(p_1) = p_2$.
- $\overrightarrow{p_1p_2} \in \vec{R}^\perp$: En este caso los puntos p_1, p_2 están en el plano $S = p_1 + \vec{R}^\perp = p_2 + \vec{R}^\perp$ perpendicular a la recta R. Llamemos q al punto en la intersección $R \cap S$. Como $\mathrm{d}(p_1, R) = \mathrm{d}(p_2, R)$, el giro $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ con eje R y de ángulo el formado por los los vectores $\overrightarrow{qp_1}, \overrightarrow{qp_2}$ (respecto de una orientación dada en $\vec{R}^\perp$) claramente satisface $f(R) = R$ y $f(p_1) = p_2$.
- $\overrightarrow{p_1p_2} \notin \vec{R} \cup \vec{R}^\perp$: Llamemos q_1, q_2 a los puntos de R tales que

  $$\mathrm{d}(p_j, R) = \mathrm{d}(p_j, q_j), \quad j = 1, 2.$$

  La condición $\mathrm{d}(p_1, R) = \mathrm{d}(p_2, R) > 0$ se traduce en que $\mathrm{d}(p_1, q_1) = \mathrm{d}(p_2, q_2) > 0$. Si llamamos α al ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{q_1p_1}$ y $\overrightarrow{q_2p_2}$ en el plano $\vec{R}^\perp$ (respecto a una orientación dada) y v al vector $\overrightarrow{q_1q_2} \in \vec{R}$, el movimiento helicoidal con eje R, ángulo orientado α (respecto a la orientación en $\vec{R}$ fijada), y vector de deslizamiento v satisface $f(R) = R$ y $f(p_1) = p_2$.

Para la unicidad, supongamos que hay dos movimientos rígidos directos $f_1, f_2\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ fijando globalmente R y llevando p_1 en p_2. El movimiento rígido $f = f_2^{-1} \circ f_1$ es también directo y satisface $f(R) = R$, $f(p_1) = p_1$. Como f tiene un punto fijo no contenido en R, a saber p_1, f no puede ser ni una traslación de vector no nulo (que no tiene puntos fijos), ni un giro de ángulo no trivial con eje R (que sólo fija los puntos de R), ni un movimiento helicoidal con eje R (que no tiene puntos fijos), por lo que $f = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$, esto es, $f_1 = f_2$.

Para la parte práctica, estudiemos la posición relativa euclidiana en $\mathbb{R}^3$ de los puntos

$$p_1 = (0, 0, -2), \ \ p_2 = (-1, 1, 1)$$

y la recta

$$R = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon x_2 - x_1 - 1 = x_3 - x_2 + 1 = 0\},$$

comprobando que están en las hipótesis anteriores.

Resolviendo el sistema que forman las ecuaciones implícitas de R tenemos que

$$R = (0, 1, 0) + L\left(\{(1, 1, 1)\}\right),$$

y por tanto

$$\vec{R} = L\left(\{(1, 1, 1)\}\right), \ \ \vec{R}^\perp = L\left(\{(1, 1, 1)\}\right)^\perp = L\left(\{(1, -1, 0), (1, 0, -1)\}\right).$$

El punto $q_1 = (-1, 0, -1)$ pertenece a R y satisface $\overrightarrow{q_1p_1} = (1, 0, -1) \in \vec{R}^\perp = L\left(\{(1, 1, 1)\}\right)^\perp$, de donde

$$\mathrm{d}(p_1, R) = \mathrm{d}(p_1, q_1) = \sqrt{2}.$$

Análogamente, $q_2 = (0,1,0) \in R$ y $\overrightarrow{q_2p_2} = (-1,0,1) \in \vec{R}^{\perp} = L\left(\{(1,1,1)\}\right)^{\perp}$, por lo que

$$\mathrm{d}(p_2, R) = \mathrm{d}(p_2, q_2) = \sqrt{2}$$

y $\mathrm{d}(p_1, R) = \mathrm{d}(p_2, R) > 0$. Como $\overrightarrow{p_1p_2} = (-1,1,3) \notin L\left(\{(1,1,1)\}\right) \cup L\left(\{(1,1,1)\}\right)^{\perp}$, lo visto en la parte teórica nos garantiza que la solución del ejercicio es el movimiento helicoidal $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con eje $R = (0,1,0) + L\left(\{(1,1,1)\}\right)$, ángulo $\alpha = \pi$ respecto de cualquier orientación dada en $\vec{R}^{\perp} = L\left(\{(1,1,1)\}\right)^{\perp}$ (ya que $\overrightarrow{q_1p_1} = -\overrightarrow{q_2p_2}$), y vector de deslizamiento $v = \overrightarrow{q_1q_2} = (1,1,1) \in \vec{R}$.

Para calcular $M(f, \mathcal{R}_0)$ consideremos el sistema de referencia

$$\mathcal{R} = \left\{(0,1,0), B = \{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\}\right\},$$

y observermos que $(0,1,0) \in R$ y B es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1),\ \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1) \in \vec{R}^{\perp},\ \ \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \in \vec{R}.$$

Por tanto $\mathcal{R}$ es un sistema de referencia rectangular adaptado a f en el que, teniendo en cuenta que $v_B = (1,1,1)_B = (0,0,\sqrt{3})$,

$$M(f, \mathcal{R}) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Como

$$M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 & 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right)$$

y

$$\begin{aligned} M(f, \mathcal{R}_0) &= M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0) \cdot M(f, \mathcal{R}) \cdot M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}_0, \mathcal{R}) = \\ &= M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0) \cdot M(f, \mathcal{R}) \cdot M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0)^{-1}, \end{aligned}$$

finalmente queda

$$M(f, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 & 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 & 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right)^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{7}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

3. *Consideremos la recta $R = (-1,0) \vee (0,1)$ en el plano euclidiano $\mathbb{R}^2$, y definamos para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ el lugar de puntos*

$$C_\lambda = \left\{p \in \mathbb{R}^2 \colon \mathrm{d}\big(p, R\big) = \mathrm{d}\big(p, (\lambda, -\lambda)\big)\right\},$$

donde $\mathrm{d}(\cdot\,, \cdot)$ indica distancia euclídea.

a*) Probar que C_λ es una cónica para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, y clasificarla afínmente.*

b) *Encontrar una referencia de $\mathbb{R}^2$ en la que la cónica C_1 (para $\lambda = 1$) adopta su forma reducida o canónica.*

Solución: Es claro que

$$R = (-1,0) + L(\{(1,1)\}) = \{(-1+\mu,\mu)\colon \mu \in \mathbb{R}\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x - y + 1 = 0\},$$

y por tanto $\vec{R} = L(\{(1,1)\})$ y $\vec{R}^{\perp} = L(\{(1,-1)\})$. De aquí que si $p = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ entonces el único punto $q = (-1+\mu,\mu) \in R$ tal que $\overrightarrow{pq} \in \vec{R}^{\perp}$ se determina por la condición

$$(-1+\mu-x,\mu-y) \in L(\{(1,-1)\}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x+y+1-2\mu = 0.$$

Resolviendo $\mu = \frac{1}{2}(x+y+1)$, y en consecuencia

$$q = \left(\frac{1}{2}(x+y-1), \frac{1}{2}(x+y+1)\right)$$

De aquí que

$$\mathrm{d}(p,R) = \mathrm{d}(p,q) = \mathrm{d}\left((x,y), \left(\frac{1}{2}(x+y-1), \frac{1}{2}(x+y+1)\right)\right) =$$

$$= \left\| \left(\frac{1}{2}(-x+y-1), \frac{1}{2}(x-y+1)\right) \right\| = \frac{1}{\sqrt{2}}|x-y+1|.$$

Análogamente, para $p = (x,y)$ se tiene que

$$\mathrm{d}\big(p,(\lambda,-\lambda)\big) = \|(x-\lambda, y+\lambda)\| = \sqrt{(x-\lambda)^2 + (y+\lambda)^2},$$

de donde

$$C_\lambda = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \frac{1}{2}(x-y+1)^2 = (x-\lambda)^2 + (y+\lambda)^2\big\} =$$

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + 2xy + y^2 - (4\lambda+2)x + (4\lambda+2)y - 1 + 4\lambda^2 = 0\}.$$

De aquí que C_λ sea una cónica para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Para proceder a su clasificación, notemos que

$$M_{\mathcal{R}_0}(C_\lambda) = \left(\begin{array}{c|cc} -1+4\lambda^2 & -2\lambda-1 & 2\lambda+1 \\ \hline -2\lambda-1 & 1 & 1 \\ 2\lambda+1 & 1 & 1 \end{array}\right), \quad N_{\mathcal{R}_0}(C_\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

De estas expresiones deducimos que los polinomios característicos $\hat{p}(x) = \det\left(M_{\mathcal{R}_0}(C_\lambda) - x\mathrm{I}_3\right)$ y $p(x) = \det\left(N_{\mathcal{R}_0}(C_\lambda) - x\mathrm{I}_2\right)$ quedan

$$\hat{p}(x) = -x^3 + (1+4\lambda^2)x^2 + (4+8\lambda)x - 4(1+2\lambda)^2 = (x-2)\left(-x^2 + (4\lambda^2-1)x + 2 + 2(2\lambda+1)^2\right)$$

$$p(x) = x(x-2).$$

De lo anterior deducimos que $\det\left(M_{\mathcal{R}_0}(C_\lambda)\right) = -4(1+2\lambda)^2$ y $\det\left(N_{\mathcal{R}_0}(C_\lambda)\right) = 0$. Es claro además que $r_{C_\lambda} = 1$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y

$$R_{C_\lambda} = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad \lambda \neq -\frac{1}{2} \\ 1 & \text{si} \quad \lambda = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Por tanto de la clasificación de las cónicas

$$C_\lambda \equiv \begin{cases} \text{parábola si} & \lambda \neq -\frac{1}{2} \\ \text{recta doble si} & \lambda = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Esto concluye a).

Para $\lambda = 1$ tenemos que

$$M_{\mathcal{R}_0}(C_1) = \left(\begin{array}{c|cc} 3 & -3 & 3 \\ \hline -3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{array}\right), \quad N_{\mathcal{R}_0}(C_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para responder b) y determinar el sistema de referencia en el que la parábola C_1 viene representada matricialmente por su forma canónica

$$\left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

calculemos los subespacios propios de los valores propios $0, 2$ de $N_{\mathcal{R}_0}(C_1)$.

$$V_0 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot (x_1, x_2)^{\mathrm{t}} = (0,0)^{\mathrm{t}}\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 + x_2 = 0\} = L(\{(1,-1)\}),$$

$$V_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \mathrm{I}_2\right) \cdot (x_1, x_2)^{\mathrm{t}} = (0,0)^{\mathrm{t}}\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 - x_2 = 0\} = L(\{(1,1)\}).$$

Al vector $(1,1)$ lo normalizamos $1/\sqrt{2}(1,1)$, y luego lo dividimos por la raíz cuadrada del valor propio 2 asociado al mismo, quedando $1/2(1,1)$. El vector $(1,-1) \in V_0$ no necesita ser modificado (como siempre ocurre para el valor propio 0), y formamos la referencia

$$\mathcal{R}_1 = \{(0,0), \{1/2(1,1), (1,-1)\}\}.$$

Recordemos que

$$M_{\mathcal{R}_1}(C_1) = M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0)^{\mathrm{t}} \cdot M_{\mathcal{R}_0}(C_1) \cdot M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|cc} 3 & -3 & 3 \\ \hline -3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 & -1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} 3 & 0 & -6 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Por tanto, si para cada $p \in \mathbb{R}^2$ escribimos como $p_{\mathcal{R}_1} = (y_1, y_2)^{\mathrm{t}}$ sus coordenadas en $\mathcal{R}_1$, la cónica C_1 viene representada en $\mathcal{R}_1$ por la expresión

$$y_1^2 - 12y_2 + 3 = 0.$$

El cambio de variables

$$z_1 = y_1, \ z_2 = -6y_2 + 3/2$$

permite definir un nuevo sistema de referencia $\mathcal{R}_2$ en el que las coordenadas de los puntos $p \in \mathbb{R}^2$ se escriben como $p_{\mathcal{R}_2} = (z_1, z_2)^{\mathrm{t}}$. Siendo más precisos, $\mathcal{R}_2$ es el sistema de referencia que satisface

$$M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 3/2 & 0 & -6 \end{array}\right).$$

Claramente la parábola C_1 adopta en $\mathcal{R}_2$ la forma

$$z_1^2 + 2z_2 = 0,$$

y por tanto

$$M_{\mathcal{R}_2}(C_1) = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

como deseábamos. Si queremos conocer la expresión analítica de la referencia $\mathcal{R}_2$ en las coordenadas usuales de $\mathcal{R}_0$, bastará con observar que

$$M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0) = M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) \cdot M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1) = M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) \cdot M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)^{-1} =$$

$$= \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 & -1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 3/2 & 0 & -6 \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{array}\right).$$

4. Si E_1, E_2 son espacios vectoriales reales de dimensión 3 y

$$X_1, X_2, X_3 \subset P(E_1), \quad Y_1, Y_2, Y_3 \subset P(E_2)$$

son tripletas de rectas proyectivas distintas dos a dos *concurrentes, esto es, tales que*

$$X_1 \cap X_2 \cap X_3 = \{p\}, \quad Y_1 \cap Y_2 \cap Y_3 = \{q\}$$

para ciertos puntos $p \in P(E_1), q \in P(E_2)$, probar que existe una homografía $f\colon P(E_1) \to P(E_2)$ tal que $f(X_j) = Y_j$, $j = 1, 2, 3$.

Como aplicación, dadas las rectas en $\mathbb{R}^2$

$$R_1 = \{(x_1, x_2)\colon x_1 = 0\}, \;\; R_2 = \{(x_1, x_2)\colon x_2 = 1\}, \;\; R_3 = \{(x_1, x_2)\colon x_1 + x_2 = 1\},$$

$$S_1 = \{(x_1, x_2)\colon x_1 - x_2 = 0\}, \;\; S_2 = \{(x_1, x_2)\colon x_1 - x_2 = 1\}, \;\; S_3 = \{(x_1, x_2)\colon x_1 - x_2 = -1\},$$

probar que existe una homografía $f\colon \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ tal que $f(X_{R_j}) = X_{S_j}$, $j = 1, 2, 3$, donde $X_R \subseteq \mathbb{P}^2$ representa la proyectivización de R para todo subespacio afín $R \subseteq \mathbb{R}^2$. Calcular $M(f, B_0)$, donde B_0 es la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Solución: Tengamos presente que en un plano proyectivo dos rectas distintas se cortan siempre en un único punto. Para la primera parte del ejercicio será fundamental demostrar que se pueden elegir puntos

$$p_j \in R_j \setminus \{p\}, \;\; q_j \in S_j \setminus \{q\}, \quad j = 1, 2, 3,$$

tales que las tripletas $\{p_1, p_2, p_3\}$ y $\{q_1, q_2, q_3\}$ sean proyecticamente independientes, esto es, no sean puntos alineados.

Razonemos cómo determinar los puntos p_j en las rectas R_j, $j = 1, 2, 3$, satisfaciendo la condición anterior (análogamente se haría con los puntos q_j en las rectas S_j, $j = 1, 2, 3$). Para ello tomemos cualesquiera $p_1 \in R_1 \setminus \{p\}$, $p_2 \in R_2 \setminus \{p\}$, que han de ser puntos distintos ya que $R_1 \neq R_2$. Notemos que la recta $p_1 \vee p_2$ no contiene al punto p; en otro caso la recta $R_j = p \vee p_j$ coincidiría con $p_1 \vee p_2$, $j = 1, 2$, y $R_2 = R_1 = p_1 \vee p_2$, algo absurdo. Como $p \notin p_1 \vee p_2$ también $p_1 \vee p_2$ es distinta a $R_3 = p \vee p_3$, de donde la recta $p_1 \vee p_2$ corta a R_3 en un punto p' distinto de p. Eligiendo $p_3 \in R_3 \setminus (\{p, p'\}$ los puntos de la tripleta $\{p_1, p_2, p_3\}$ no están alineados y satisfacen lo deseado. Como consecuencia

$$\{p, p_1, p_2, p_3\} \subset P(E_1), \quad \{q, q_1, q_2, q_3\} \subset P(E_2)$$

son cuadriláteros en $P(E_1)$ y $P(E_2)$ respectivamente, ya que por construcción cualesquiera tres puntos de esas cuaternas no están alineados.

El Teorema Fundamental de la Geometría Proyectiva nos garantiza que existe una homografía $f\colon P(E_1) \to P(E_2)$ tal que $f(p) = q$ y $f(p_j) = q_j$ $j = 1, 2, 3$. Esta homografía puede construirse como la asociada a un isomorfismo lineal $\hat{f}\colon E_1 \to E_2$ satisfaciendo

$$\hat{f}(v) = u, \hat{f}(v_j) = u_j, \quad j = 1, 2, 3,$$

para convenientes vectores $v, v_1, v_2, v_3 \in E_1$, $u, u_1, u_2, u_3 \in E_2$ tales que:

- $\pi_1(v) = p, \pi_1(v_j) = p_j$, $j = 1, 2, 3$, donde $\pi_1 \colon E_1^* \to P(E_1)$ es la proyección natural.
- $\pi_2(u) = q, \pi_2(u_j) = q_j$, $j = 1, 2, 3$, donde $\pi_2 \colon E_2^* \to P(E_2)$ es la proyección natural.

Para esta homografía se tiene que

$$f(R_j) = f(p \vee p_j) = f(p) \vee f(p_j) = q \vee q_j = S_j, \quad j = 1, 2, 3,$$

lo que prueba la parte teórica del ejercicio.

Para la aparte práctica, observemos que las correspondientes proyectivizaciones en $\mathbb{P}^2$ de las rectas en el enunciado vienen dadas por

$$X_{R_1} = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2 \colon x_1 = 0\},$$

$$X_{R_2} = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2 \colon -x_0 + x_2 = 0\},$$
$$X_{R_3} = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2 \colon -x_0 + x_1 + x_2 = 0\}.$$

$$X_{S_1} = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2 \colon x_1 - x_2 = 0\},$$
$$X_{S_2} = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2 \colon -x_0 + x_1 - x_2 = 0\},$$
$$X_{S_3} = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2 \colon x_0 + x_1 - x_2 = 0\},$$

Por tanto

$$X_{R_1} \cap X_{R_2} \cap X_{R_3} = \{(1 : 0 : 1)\}, \quad X_{S_1} \cap X_{S_2} \cap X_{S_3} = \{(0 : 1 : 1)\}.$$

y las tripletas de rectas $X_{R_1}, X_{R_2}, X_{R_3}$ y $X_{S_1}, X_{S_2}, X_{S_3}$ satisfacen las hipótesis de la parte teórica del ejercicio. Por lo probado en a) existen homografías $f \colon \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ tal que $f(X_{R_j}) = X_{S_j}$, $j = 1, 2, 3$. Determinemos una tal f y calculemos $M(f, B_0)$. Para ello, como arriba, llamemos

$$p = (1 : 0 : 1), \quad q = (0 : 1 : 1),$$

y consideremos los puntos

$$p_1 = (0 : 1 : 1) \in X_{R_1} \setminus \{p\}, \quad p_2 = (1 : 1 : 1) \in X_{R_2} \setminus \{p\}, \quad p_3 = (1 : 1 : 0) \in X_{R_3} \setminus \{p\}.$$

$$q_1 = (1 : 1 : 1) \in X_{S_1} \setminus \{q\}, \quad q_2 = (1 : 0 : -1) \in X_{S_2} \setminus \{q\}, \quad q_3 = (1 : 0 : 1) \in X_{S_3} \setminus \{q\},$$

Como la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

es regular, los puntos p_1, p_2, p_3 son proyectivamente independientes en $\mathbb{P}^2$. Análogamente la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

es regular, y por tanto q_1, q_2, q_3 son proyectivamente independientes en $\mathbb{P}^2$. De aquí que $\{p, p_1, p_2, p_3\} \subset P(E_1)$ y $\{q, q_1, q_2, q_3\} \subset P(E_2)$ sean cuadriláteros.

Llamemos

$$v = (1, 0, 1),\ v_1 = (0, 1, 1),\ v_2 = (1, 1, 1),\ v_3 = (1, 1, 0) \in \mathbb{R}^3,$$
$$u = (0, 1, 1),\ u_1 = (1, 1, 1),\ u_2 = (1, 0, -1),\ u_3 = (1, 0, 1) \in \mathbb{R}^3,$$

y observemos que

$$\pi(v) = p,\ \pi(v_j) = p_j,\ j = 1, 2, 3,\ \pi(u) = q,\ \pi(u_j) = q_j,\ j = 1, 2, 3.$$

Consideremos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}^*$ y las asignaciones

$$v_j \mapsto \lambda_j u_j, \quad j = 1, 2, 3.$$

Como

$$B_1 = \{v_1, v_2, v_3\},\ B_2 = \{u_1, u_2, u_3\},$$

son bases de $\mathbb{R}^3$, por el Teorema Fundamental del Álgebra Lineal existe un único isomorfismo lineal $\hat{f}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$\hat{f}(v_j) = \lambda_j u_j,\ j = 1, 2, 3.$$

Claramente

$$M(\hat{f}, B_1, B_2) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

y como

$$M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, B_1, B_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, B_2, B_0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

y

$$\begin{aligned} M(\hat{f}, B_0) &= M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, B_2, B_0) \cdot M(\hat{f}, B_1, B_2) \cdot M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, B_0, B_1) = \\ &= M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, B_2, B_0) \cdot M(\hat{f}, B_1, B_2) \cdot M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, B_1, B_0)^{-1}, \end{aligned}$$

finalmente queda

$$M(\hat{f}, B_0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_2 - \lambda_1 & \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 & \lambda_2 - \lambda_3 \\ -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & -\lambda_2 - \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

La condición $\hat{f}(v) = u$ nos dice que

$$\begin{pmatrix} \lambda_2 - \lambda_1 & \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 & \lambda_2 - \lambda_3 \\ -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & -\lambda_2 - \lambda_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

esto es,

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0, -\lambda_1 = 1, -\lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 = 1.$$

De aquí que $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1/4, \lambda_3 = 1/2$ y

$$M(\hat{f}, B_0) = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 1 & -1 & 0 \\ \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Por lo probado en a), la homografía $f\colon \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ asociada a $\hat{f}$ satisface las condiciones requeridas y tiene por matriz $M(f, B_0) = M(\hat{f}, B_0)$. Esto concluye el ejercicio.