Anotaciones Espacios Topológicos Conexos

Quintín Mesa Romero

December 2021

1. (X, T) es conexo si no existen abiertos $A, B \in T$ tales que:

   1. $A, B \neq \emptyset$
   2. $A \cup B = X$
   3. $A \cap B = \emptyset$

   Intuitivamente, un espacio topológico es conexo cuando **no se puede partir en dos trozos abiertos**
   Podemos cambiar en la definición de conexo abiertos por cerrados.

2. Todo intervalo $J \subset \mathbf{R}$ es conexo:
   $J \subset \mathbf{R}$ es intervalo $\Rightarrow$ es conexo

3. Sea (X, T) un espacio topológico verificando: si $A, B \in T$, $A, B \neq \emptyset \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$. Entonces, (X, T) es conexo.

   1. (X, T_t), (X, T_{CF}) con X infinito, (X, T_{CN}) con X no numerable
   2. (X, T_D) es conexo $\Longleftrightarrow X$ tiene un solo punto

4. **Teorema 1.** En $(\mathbf{R}, T_U)$ un subconjunto es conexo sí y solo sí es un intervalo. En particular, como consecuencia del teorema, $\mathbf{R}$ es un intervalo.

5. Si (X, T) es un espacio topológico conexo y $T^{'} \subset T$, entonces, $(X, T^{'})$ es conexo.

6. En el espacio topológico $(\mathbf{R}, T_S)$, el conjunto $\mathbf{B_s} = \{[a, b]/a < b\}$ no es conexo. Luego, $(\mathbf{R}, T_S)$ tampoco es conexo.

7. Equivalen:

   1. (X, T) es conexo.
   2. Cualquier aplicación continua de (X, T) en un espacio topológico **discreto** es **constante**.
   3. Cualquier aplicación continua de (X, T) en $(\{0, 1\}, T_D)$ es constante.

8. Sea (X, T) un espacio topológico, $A \subset X$ un subconjunto conexo. Sea $B \subset X$ tal que $A \subset B \subset \overline{A}$. Entonces, B es un subconjunto conexo. En particular, si A es conexo, entonces $\overline{A}$ es conexo.

9. **Teorema 2.** Si $f : (X, T) \to (Y, T^{'})$ es una aplicación continua entre dos espacios topológicos y (X, T) conexo, entonces, $f(X)$ es subconjunto conexo de $(Y, T^{'})$.
   Esto viene a decirnos que **la imagen de un conexo por una función continua es conexa**.

10. Si $f : (X,T) \to (Y,T^{'})$ es un homeomorfismo y (X,T) es conexo, entonces, $(Y,T^{'})$ es conexo. Esto se deduce de lo anterior porque si antes decíamos que la imagen de un conexo por una función continua era conexa, ahora que tenemos un homeomorfismo: aplicación continua biyectiva y abierta; en particular es sobreyectiva, por lo tanto,la imagen de la apliación coincide con el codominio $(Y,T^{'})$. Luego, $(Y,T^{'})$ es conexo.

11. La conexión es un invariante topológico.

12. **Teorema 3. Bolzano o del Valor Intermedio.** Sea $f : (X,T) \to (\mathbb{R},T_U)$ una función continua. Supongamos que (X,T) es conexo. Si $x, y \in X$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, verifica que $f(x) <= \alpha <= f(y)$ entonces existe un $z \in X$ tal que $f(z) = \alpha$.
    Se deduce del hecho de que dado que f es continua y (X,T) conexo, $f(X)$ es conexo, y por tanto, al ser subconjunto de los reales y conexo, necesariamente ha de ser un intervalo, lo que garantiza la existencia de dicho z.

13. Ni la unión ni la intersección de conexos son necesariamente conjuntos conexos

14. Sea $\{C_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos conexos de un espacio topológico (X,T).
    1. Si existe $i_0 \in I$ tal que $C_{i_0} \cap C_i \neq \emptyset$, $\forall i \in I$, entonces $\bigcup_{i\in I} C_i$ es conexo.
    2. Si $I = \mathbb{N}$ y $C_i \cap C_{i+1} \neq \emptyset$, entonces $\bigcup_{i\in I} C_i$ es conexo.

15. Si A, B son subconjuntos conexos de un espacio topológico y $A \cap B \neq \emptyset$, entonces $A \cup B$ es conexo.

16. **Teorema 4.** Sean (X_i, T_i) con $i \in \{1, ..., k\}$ espacios topológicos. Entonces $(X_1 \times ... \times X_k, T_1 \times ... \times T_k)$ es conexo sí y solo sí (X_i, T_i) es conexo.

17. Sea (X,T) un espacio topológico, $x \in X$. La **componente conexo** de (X,T) que contiene al punto x es el conjunto: $C_x = \bigcup\{A : A \subset X \text{ conexo}, x \in A\}$.
    C_x es la unión de todos los conjuntos conexos que contienen a x.

18. **Propiedades de la componente conexo:**
    1. C_x es conexo y $x \in C_x$. De hecho, es el mayor conexo que contiene a x.
    2. Si A es conexo y $x \in A$, entonces $A \subset C_x$
    3. $\overline{C_x} = C_x$.
    4. Si $C_x \cap C_y \neq \emptyset$, entonces $C_x = C_y$. Los componentes conexos forman una partición.
    5. Si A es abierto y cerrado y $x \in A$ entonces $C_x \subset A$

19. **Ejemplos interesantes:**
    1. (X,T) conexo $\Rightarrow C_x = X$, $\forall x \in X$
    2. Sea (X,T) un espacio topológico tal que los únicos conjuntos conexos son los puntos. Si $x \in X$ entonces $C_x = \{x\}$
       $(\mathbb{R}, T_S)$ cumple esta propiedad: $x < y \Rightarrow \exists z \in (x,y)$; $(-\infty, z), [z, +\infty)$
       (x, T_D)
       $(\mathbb{Q}, (T_u)_{\mathbb{Q}})$; $q_1 < q_2$. Sea $r \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ / $q_1 < r < q_2 \Rightarrow \mathbb{R}\backslash\{r\} = (-\infty, r), (r, +\infty)$.
       Si $A \subset \mathbb{Q}$ y $q_1, q_2 \in A$ $(q_1 \neq q_2) \Rightarrow A \subset (-\infty, r), (r, +\infty)$.
    3. En $(\mathbb{R}, T_S)$, $C_x = \{x\}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ que **no** sea abierto. (Los componentes conexos no son en general conjuntos abiertos).
    4. Si (X,T) tiene una cantidad finita de componentes conexos entonces los componentes conexos son conjuntos abiertos.

20. **Teorema 5.** Sea $f : (X, T) \to (Y, T^{'})$ un homeomorfismo, $x \in X$. Entonces $f(C_x) = C_{f(x)}$.

21. **Corolario.** El cardinal del conjunto de componentes conexos de un espacio topológico es un invariante topológico.

22. Un **arco** en un espacio topológico (X, T) es una aplicación continua, $\gamma : ([0, 1], T_{u_{[0,1]}}) \to (X, T)$. $\gamma(0)$ es el origen del arco y $\gamma(1)$ el extremo. Si dados $x, y \in X$, $\gamma(0) = x$ y $\gamma(1) = y$, entonces diremos que el arco conecta a x e y.

23. Un espacio topológico (X, T) es conexo por arcos sí y solo sí $\forall x, y \in X$ existe un arco que conecta x e y.

24. Todo espacio conexo por arcos es conexo. El recíproco no es cierto.

25. **Ejemplos de conjuntos conexos:**

    1. Un punto en $\mathbb{R}^{\ltimes}$
    2. En $\mathbb{R}$ un intervalo cerrado por la derecha o por la izquierda.
    3. El complementario de un punto en $\mathbb{R}^{\ltimes}$

26. **Ejemplos de conjuntos disconexos:**

    1. El complementario de un punto en $\mathbb{R}$
    2. El conjunto $\mathbb{Q}$ de los número racionales con la topología usual de $\mathbb{R}$ no es conexo.
    3. El conjunto $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ de los número iracionales con la topología usual de $\mathbb{R}$ no es conexo.
    4. Cualquier conjunto finito que contenga más de un punto.
    5. El conjunto formado por todos los puntos de un número finito de cerrados $F_1, ..., F_k$, disjuntos dos a dos.