Fundamentos Físicos y Tecnológicos

Tema 3. Circuitos en Corriente Alterna

Isabel M. Tienda Luna

Departamento de Electrónica y Tecnología de Computadores
Universidad de Granada

isabelt@ugr.es

Grado en Informática
Curso 2012-2013

CA vs CC

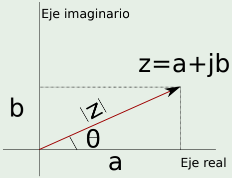
- El amplio uso de la CA viene determinada por su facilidad de transformación, que no existe CC.
- Elevación de tensión en CC: conexión de generadores en serie $\Rightarrow$ poco práctico.
- Elevación de tensión en CA: uso de transformadores $\Rightarrow$ eficiente porque se eleva el voltaje hasta altos valores (alta tensión), disminuyendo en igual proporción la intensidad de corriente.
- Energía transportada: $U = vit$. La misma energía puede ser distribuida a largas distancias con bajas intensidades de corriente y, por tanto, con bajas pérdidas ($U_{perdidas} = Ri^2t$).
- Una vez en el punto de consumo o en sus cercanías, el voltaje puede ser de nuevo reducido para su uso industrial o doméstico de forma cómoda y segura.

Números complejos

- ¿Qué es un número complejo?
  - Los números complejos están relacionados con las raices de números negativos.
  - Nosotros vamos a usar la notación $j \equiv \sqrt{-1}$
- ¿Cómo se expresan los números complejos?
  - Forma binomial: $z = a + jb$.
  - Forma polar: $z = |z|e^{j\theta}$.
  - Forma trigonométrica: $z = |z|\cos\theta + j|z|\sin\theta$

- Transformaciones.
- Representación gráfica.
- Complejo conjugado.
- Opuesto de un número complejo.
- Igualdad de números complejos.

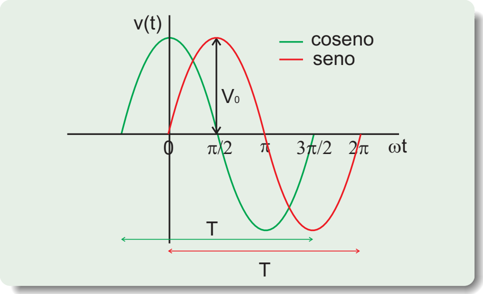
Representación



Números complejos

- Operaciones con números complejos: dependiendo de la operación a realizar, será más conveniente tener el número complejo expresado en una forma u otra.
  1. Suma (binomial)
  2. Resta (binomial)
  3. Producto (polar)
  4. División (polar)
- Para hacer ejemplos sobre operaciones con números complejos, usar el pdf sobre complejos que está dentro de la carpeta Curso cero de matemáticas básicas disponible en el moodle (material extra en semana 1).

Señal sinusoidal (tipo seno o tipo coseno)



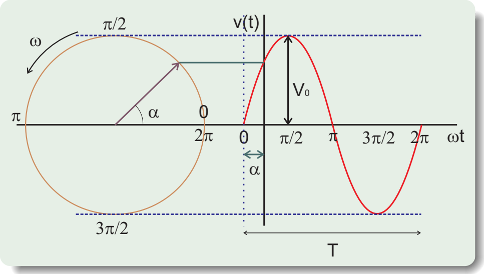
- $v(t) = V_0 \sin\left(\omega t + \alpha\right) = V_0 \cos\left(\omega t + \alpha - \pi/2\right)$
- $v(t) = V_0 \sin\left(2\pi f t + \alpha\right) = V_0 \cos\left(2\pi f t + \alpha - \pi/2\right)$
- $v(t) = V_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \alpha\right) = V_0 \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \alpha - \pi/2\right)$

Algunas definiciones

- Frecuencia angular (ω), frecuencia (f), y Periodo (T).
- Diferencia de fase entre dos señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$. $x_1(t)$ adelantada si $0 < \alpha_1 - \alpha_2 < \pi$. $x_2(t)$ adelantada si $-\pi < \alpha_1 - \alpha_2 < 0$.
- Valor instantáneo.
- Valor pico a pico.
- Valor eficaz (r.m.s)$= \sqrt{\int_0^T v^2(t)dt} = V_0/\sqrt{2}$. Relación con la potencia.

Fasores y números complejos

- Puedo usar números complejos para representar señales sinusoidales (ver $http://en.wikipedia.org/wiki/Phasor$ o $http://es.wikipedia.org/wiki/Fasor$):
  $v(t) = V_0(\cos(\omega t + \alpha) + j\sin(\omega t + \alpha))$ **¡¡Sólo nos interesa una parte!!**
- Representación fasorial: $v(t) = V_0 e^{j(\omega t+\alpha)}$ si $V = V_0 e^{j\alpha} \Rightarrow v(t) = V e^{j\omega t}$



Fasor ($V_0 e^{j\alpha}$)

Es un número complejo que representa el módulo V_0 y la fase inicial $e^{j\alpha}$ de una señal sinusoidal $v(t)$.

- ¿Por qué trabajar con números complejos?
  - Ventaja: permite transformar ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas fáciles de resolver.(Derivada e integral de la exponencial).
  - Desventaja: hay que familiarizarse con los números complejos.

Características Generales

- ¿Qué es una señal de corriente alterna? Se denomina corriente alterna a la corriente eléctrica en la que la magnitud y dirección varían cíclicamente. La forma de onda de la corriente alterna más comúnmente utilizada es la de una onda senoidal. Sin embargo, en ciertas aplicaciones se utilizan otras formas de onda periódicas, tales como la triangular o la cuadrada.
- Representación: polaridad.
- Notación.
- Vamos a comenzar analizando las características y el comportamiento de las señales más sencillas: aquellas que son de tipo senoidal.

Características Generales II

- Algunos tipos de ondas periódicas tienen el inconveniente de no tener definida su expresión matemática, por lo que no se puede operar analíticamente con ellas.
- ¿Por qué trabajamos con ondas senoidales?
  - Las funciones seno y coseno están perfectamente definidas matemáticamente. Mediante la teoría de los números complejos se analizan con facilidad los circuitos de alterna.
  - Las ondas periódicas no senoidales se pueden descomponer en suma de una serie de ondas senoidales de diferentes frecuencias (armónicos): series de Fourier.
  - Se pueden generar con facilidad y en magnitudes de valores elevados para facilitar el transporte de la energía eléctrica: transformadores.
- Las **leyes de Kirchoff** se siguen cumpliendo. **Problema**: ahora trabajamos con ecuaciones diferenciales.

Impedancia. Ley de Ohm generalizada.

- Si $v(t) = V_0 cos(\omega t + \alpha)$, se cumple que $v(t) = \mathrm{Real}\left(V_0 e^{j(\omega t+\alpha)}\right) \Rightarrow$ A partir de ahora usaremos $v(t) = V_0 e^{j(\omega t+\alpha)}$ para hacer las cuentas y al final, al calcular potenciales o intensidades, nos quedaremos sólo con la parte real del resultado porque $v(t)$ es la parte real del número complejo $V_0 e^{j(\omega t+\alpha)}$.
- ¿Por qué hacemos esto? Para poder seguir usando la Ley de Ohm.

Generalización de la ley de Ohm

$$v(t) = Zi(t)$$

Z es la Impedancia y se mide en Ohmios (Ω). Su valor depende del tipo de elemento a considerar. A continuación lo calcularemos para:

- Resistencia
- Condensador
- Bobina

Impedancia de una resistencia

Para una resistencia se cumple siempre que:

$$v(t) = Ri(t)$$

Si usamos que $v(t) = V_0 e^{j(\omega t+\alpha)}$, la Ley de Ohm nos dice que $V_0 e^{j(\omega t+\alpha)} = Ri(t)$. Esta expresión tiene dos consecuencias:

1. La impedancia de una resistencia se calcula como $Z_R = R$.
2. La intensidad que recorre la resistencia es $i(t) = \frac{V_0}{R} e^{j(\omega t+\alpha)}$. Como puede observarse, $i(t)$ tiene las mismas frecuencia angular y fase que $v(t)$ pero distinto módulo.

Impedancia de un condensador

Para un condensador se cumple siempre que:

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$$

Si usamos que $v(t) = V_0 e^{j(\omega t+\alpha)}$, la expresión anterior queda como $i(t) = C\frac{d(V_0 e^{j(\omega t+\alpha)})}{dt} = Cj\omega V_0 e^{j(\omega t+\alpha)} = Cj\omega v(t)$. Esta expresión tiene dos consecuencias:

1. La impedancia de un condensador se calcula como $Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{\omega C} = \frac{1}{\omega C}e^{-j\frac{\pi}{2}}$ ya que $v(t) = \frac{1}{j\omega C}i(t)$.
2. La intensidad que recorre el condensador es $i(t) = Cj\omega v(t) = C\omega V_0 e^{j(\omega t+\alpha+\frac{\pi}{2})}$. Como puede observarse, $i(t)$ tiene la misma frecuencia angular que $v(t)$ pero distinto módulo ($C\omega V_0$) y distinta fase ($\alpha + \frac{\pi}{2}$).

Impedancia de una bobina

Para una bobina se cumple siempre que:

$$\boxed{v(t) = L\frac{di(t)}{dt}}$$

Si usamos que $v(t) = V_0 e^{j(\omega t+\alpha)}$, la expresión anterior queda como $i(t) = \frac{1}{L}\int v(t)dt = \frac{1}{L}\int V_0 e^{j(\omega t+\alpha)}dt = \frac{1}{L}\frac{1}{j\omega}V_0 e^{j(\omega t+\alpha)}$. Esta expresión tiene dos consecuencias:

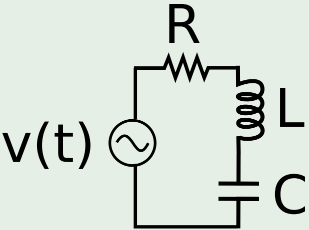
1. La impedancia de una bobina se calcula como $Z_L = j\omega L = \omega L e^{j\frac{\pi}{2}}$ ya que $v(t) = j\omega L i(t)$.
2. La intensidad que recorre la bobina es $i(t) = \frac{1}{j\omega L}v(t) = \frac{V_0}{\omega L}e^{j(\omega t+\alpha-\frac{\pi}{2})}$. Como puede observarse, $i(t)$ tiene la misma frecuencia angular que $v(t)$ pero distinto módulo ($\frac{V_0}{\omega L}$) y distinta fase ($\alpha - \frac{\pi}{2}$).

Impedancia

- A partir de ahora, trataremos resistencias, bobinas y condensadores como si fueran resistencias de valor Z (Z_R para resistencias, Z_L para bobinas y Z_C para condensadores) en los circuitos alimentados por corriente alterna de manera que cumplirán la Ley de Ohm generalizada.
- Las asociaciones de impedancias se harán:
  - Serie: $Z_{equivalente} = \sum_i^N Z_i$
  - Paralelo: $\frac{1}{Z_{equivalente}} = \sum_i^N \frac{1}{Z_i}$
- Puesto que la existencia de una resistencia, condensador o bobina no cambia la frecuencia angular de las señales, a partir de ahora, ignoraremos la dependencia temporal de las mismas en los cálculos (nos olvidamos del término $e^{j\omega t}$). Añadiremos esta dependencia temporal (el término $e^{j\omega t}$) al final y, por tanto, operaremos sólo con fasores.

Ejemplo 1: RCL serie

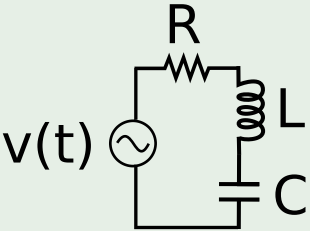
Ejemplo 1



- R=1kΩ
- L=1mH
- C=2nF
- v(t)=$10\cos\left(10^6\frac{rad}{s}t\right)V$

Ejemplo 1: RCL serie

Ejemplo 1



- Se cumple que:

$$v(t) = v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) \quad (1)$$

$$v(t) = i(t)R + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)dt \quad (2)$$

- Pero si usamos fasores:

$$10V = IZ_R + IZ_L + IZ_C \quad (3)$$

$$10V = IR + Ij\omega L + I\frac{1}{j\omega C} \quad (4)$$

Ejemplo 1: RCL serie

- Calculamos las impedancias:

$$
\begin{aligned}
Z_R &= 10^3\Omega && (5)\\
Z_C &= \frac{1}{j10^6\frac{rad}{s}2\,10^{-9}F} = -j0{,}5\,10^3\Omega = 0{,}5\,10^3 e^{-j\frac{\pi}{2}}\Omega && (6)\\
Z_L &= j10^6\frac{rad}{s}10^{-3}H = j10^3\Omega = 10^3 e^{j\frac{\pi}{2}}\Omega && (7)
\end{aligned}
$$

- Como las tres están en serie, la impedancia equivalente:

$$Z_{eq} = Z_R + Z_C + Z_L = (10^3 + j0{,}5\,10^3)\Omega = 1{,}12\,10^3 e^{j0{,}46}\Omega \tag{8}$$

- Calculamos el fasor que reperesenta la intensidad:

$$I = \frac{10V}{(10^3 + j0{,}5\,10^3)\Omega} = \frac{10V}{1{,}12\,10^3 e^{j0{,}46}\Omega} = 8{,}93e^{-j0{,}46}mA \tag{9}$$

- Añadimos la dependencia temporal: $i(t) = 8{,}93e^{j\left(10^6\frac{rad}{s}t - 0{,}46\right)}mA$
- Nos quedamos sólo con la parte real: $i(t) = 8{,}93\cos\left(10^6\frac{rad}{s}t - 0{,}46\right)mA$

Ejemplo 1: RCL serie

- Usamos la ley de Ohm Generalizada aplicada a cada elemento para calcular la diferencia de potencial entre sus extremos:

$$V_R = RI = 10^3\Omega 8{,}93e^{-j0{,}46}mA = 8{,}93e^{-j0{,}46}V \quad (10)$$

$$V_C = \frac{1}{j\omega C}I = \frac{8{,}93e^{-j0{,}46}mA}{j10^6\,\frac{rad}{s}2\,10^{-9}F} = 0{,}5\,10^3 e^{-j\frac{\pi}{2}}\Omega 8{,}93e^{-j0{,}46}mA = 4{,}46e^{-j2{,}03}V \quad (11)$$

$$V_L = j\omega L I = j10^3\Omega 8{,}93e^{-j0{,}46}mA = 10^3 e^{j\frac{\pi}{2}}\Omega 8{,}93e^{-j0{,}46}mA = 8{,}93e^{j1{,}11}V \quad (12)$$

- Añadimos la dependencia temporal:

$$v_R(t) = 8{,}93e^{-j0{,}46}e^{j10^6\frac{rad}{s}t}V = 8{,}93e^{j(10^6\frac{rad}{s}t-0{,}46)}V \quad (13)$$

$$v_C(t) = 4{,}46e^{-j2{,}03}e^{j10^6\frac{rad}{s}t}V = 4{,}46e^{j(10^6\frac{rad}{s}t-2{,}03)}V \quad (14)$$

$$v_L(t) = 8{,}93e^{j1{,}11}e^{j10^6\frac{rad}{s}t}V = 8{,}93e^{j(10^6\frac{rad}{s}t+1{,}11)}V \quad (15)$$

- Nos quedamos sólo con la parte real:

$$v_R(t) = 8{,}93\cos\left(10^6\frac{rad}{s}t - 0{,}46\right)V \quad (16)$$

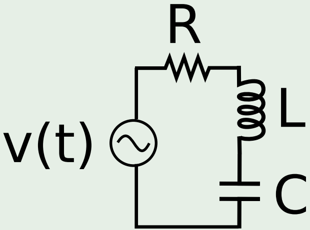
$$v_C(t) = 4{,}46\cos\left(10^6\frac{rad}{s}t - 2{,}03\right)V \quad (17)$$

$$v_L(t) = 8{,}93\cos\left(10^6\frac{rad}{s}t + 1{,}11\right)V \quad (18)$$

Ejemplo 1: RCL serie

¿Qué ocurriría para otro valor de ω?

Ejemplo 1



- R=1kΩ
- L=1mH
- C=2nF
- v(t)=$10\cos(\omega t) V$

Ejemplo 1: RCL serie

Se sigue cumpliendo:

$$\begin{aligned}
10V &= IZ_R + IZ_L + IZ_C && (19)\\
10V &= IR + Ij\omega L + I\frac{1}{j\omega C} && (20)\\
10V &= I\left(1k\Omega + j\omega 1mH + \frac{1}{j\omega 2\,10^{-9}F}\right) && (21)\\
Z_{eq} &= \left(1k\Omega + j\left(\omega 1mH - \frac{1}{\omega 2\,10^{-9}F}\right)\right) && (22)\\
&= \sqrt{(1k\Omega)^2 + \left(\omega 1mH - \frac{1}{\omega 2\,10^{-9}F}\right)^2}\, e^{j\arctan\left(\frac{\omega 1mH - \frac{1}{\omega 2\,10^{-9}F}}{1k\Omega}\right)}
\end{aligned}$$

Ejemplo 1: RCL serie

- El fasor que representa a la intensidad es un número complejo:

$$I = \frac{10V}{\sqrt{(1k\Omega)^2 + \left(\omega 1mH - \frac{1}{\omega 2\ 10^{-9}F}\right)^2} e^{j \arctan\left(\frac{\omega 1mH - \frac{1}{\omega 2\ 10^{-9}F}}{1k\Omega}\right)}} \quad (23)$$

$$I = \frac{10V}{\sqrt{(1k\Omega)^2 + \left(\omega 1mH - \frac{1}{\omega 2\ 10^{-9}F}\right)^2}} e^{-j \arctan\left(\frac{\omega 1mH - \frac{1}{\omega 2\ 10^{-9}F}}{1k\Omega}\right)} \quad (24)$$

- Añadimos la dependencia temporal :

$$i(t) = Ie^{j\omega t} = \frac{10V}{\sqrt{(1k\Omega)^2 + \left(\omega 1mH - \frac{1}{\omega 2\ 10^{-9}F}\right)^2}} e^{j\left(\omega t - \arctan\left(\frac{\omega 1mH - \frac{1}{\omega 2\ 10^{-9}F}}{1k\Omega}\right)\right)} \quad (25)$$

- Nos quedamos sólo con la parte real:

$$i(t) = \frac{10V}{\sqrt{(1k\Omega)^2 + \left(\omega 1mH - \frac{1}{\omega 2\ 10^{-9}F}\right)^2}} \cos\left(\omega t - \arctan\left(\frac{\omega 1mH - \frac{1}{\omega 2\ 10^{-9}F}}{1k\Omega}\right)\right) \quad (26)$$

Ejemplo 1: RCL serie

- Usamos la ley de Ohm para calcular la diferencia de potencial entre los extremos de la resistencia. Trabajo con fasores.

$$V_R = Z_R I = 1k\Omega \frac{10V}{\sqrt{(1k\Omega)^2 + \left(\omega 1mH - \frac{1}{\omega 2\,10^{-9}F}\right)^2}} e^{-j\arctan\left(\frac{\omega 1mH - \frac{1}{\omega 2\,10^{-9}F}}{1k\Omega}\right)} \tag{27}$$

- Añadimos la dependencia temporal

$$v_R(t) = 1k\Omega \frac{10V}{\sqrt{(1k\Omega)^2 + \left(\omega 1mH - \frac{1}{\omega 2\,10^{-9}F}\right)^2}} e^{j\left(\omega t - \arctan\left(\frac{\omega 1mH - \frac{1}{\omega 2\,10^{-9}F}}{1k\Omega}\right)\right)} \tag{28}$$

- Nos quedamos sólo con la parte real:

$$v_R(t) = 1k\Omega \frac{10V}{\sqrt{(1k\Omega)^2 + \left(\omega 1mH - \frac{1}{\omega 2\,10^{-9}F}\right)^2}} \cos\left(\omega t - \arctan\left(\frac{\omega 1mH - \frac{1}{\omega 2\,10^{-9}F}}{1k\Omega}\right)\right) \tag{29}$$

Ejemplo 1: RCL serie

- Usamos la ley de Ohm generalizada para calcular la diferencia de potencial entre los extremos del condensador. Trabajo con fasores.

$$V_C = Z_C I = \frac{e^{-j\frac{\pi}{2}}}{\omega 2\ 10^{-9} F} \frac{10V e^{-j \arctan\left(\frac{\omega 1mH - \frac{1}{\omega 2\ 10^{-9}F}}{1k\Omega}\right)}}{\sqrt{(1k\Omega)^2 + \left(\omega 1mH - \frac{1}{\omega 2\ 10^{-9}F}\right)^2}} \quad (30)$$

$$= \frac{10V e^{-j\left(\arctan\left(\frac{\omega 1mH - \frac{1}{\omega 2\ 10^{-9}F}}{1k\Omega}\right) + \frac{\pi}{2}\right)}}{\omega 2\ 10^{-9} F \sqrt{(1k\Omega)^2 + \left(\omega 1mH - \frac{1}{\omega 2\ 10^{-9}F}\right)^2}} \quad (31)$$

- Añado la dependencia temporal $v_C(t) = \frac{10V e^{j\left(\omega t - \arctan\left(\frac{\omega 1mH - \frac{1}{\omega 2\ 10^{-9}F}}{1k\Omega}\right) - \frac{\pi}{2}\right)}}{\omega 2\ 10^{-9} F \sqrt{(1k\Omega)^2 + \left(\omega 1mH - \frac{1}{\omega 2\ 10^{-9}F}\right)^2}}$

- Me quedo sólo con la parte real:

$$v_C(t) = \frac{10V}{\omega 2\ 10^{-9} F \sqrt{(1k\Omega)^2 + \left(\omega 1mH - \frac{1}{\omega 2\ 10^{-9}F}\right)^2}} \cos\left(\omega t - \arctan\left(\frac{\omega 1mH - \frac{1}{\omega 2\ 10^{-9}F}}{1k\Omega}\right) - \frac{\pi}{2}\right)$$

Ejemplo 1: RCL serie

- Uso la ley de Ohm generalizada para calcular la diferencia de potencial entre los extremos de la bobina. Trabajo con fasores.

$$V_L = Z_L I = \omega 1mH e^{j\frac{\pi}{2}} \frac{10V e^{-j\arctan\left(\frac{\omega 1mH - \frac{1}{\omega 2\,10^{-9}F}}{1k\Omega}\right)}}{\sqrt{(1k\Omega)^2 + \left(\omega 1mH - \frac{1}{\omega 2\,10^{-9}F}\right)^2}} \quad (32)$$

$$= \frac{10V\omega 1mH e^{-j\left(\arctan\left(\frac{\omega 1mH - \frac{1}{\omega 2\,10^{-9}F}}{1k\Omega}\right) - \frac{\pi}{2}\right)}}{\sqrt{(1k\Omega)^2 + \left(\omega 1mH - \frac{1}{\omega 2\,10^{-9}F}\right)^2}} \quad (33)$$

- Añado la dependencia temporal:

$$v_L(t) = \frac{10V\omega 1mH e^{j\left(\omega t - \arctan\left(\frac{\omega 1mH - \frac{1}{\omega 2\,10^{-9}F}}{1k\Omega}\right) + \frac{\pi}{2}\right)}}{\omega 2\,10^{-9}F\sqrt{(1k\Omega)^2 + \left(\omega 1mH - \frac{1}{\omega 2\,10^{-9}F}\right)^2}}$$

- Me quedo sólo con la parte real:

$$v_L(t) = \frac{10V}{\omega 2\,10^{-9}F\sqrt{(1k\Omega)^2 + \left(\omega 1mH - \frac{1}{\omega 2\,10^{-9}F}\right)^2}} \cos\left(\omega t - \arctan\left(\frac{\omega 1mH - \frac{1}{\omega 2\,10^{-9}F}}{1k\Omega}\right) - \frac{\pi}{2}\right)$$

Potencia

Supongamos que

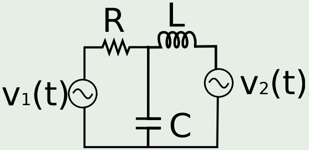
$$
\begin{aligned}
v(t) &= Ve^{j(\omega t+\alpha_V)} \\
i(t) &= Ie^{j(\omega t+\alpha_I)}
\end{aligned}
$$

¿Cómo calculo la potencia?

- No puedo multiplicar los números complejos y quedarme con la parte real
- Procedimiento adecuado:
  $p(t) = VI\cos(\omega t+\alpha_V)\cos(\omega t+\alpha_I) = \frac{VI}{2}\left[\cos(2\omega t+\alpha_V+\alpha_I)+\cos(\alpha_V-\alpha_I)\right]$
- La potencia varía con el tiempo con una frecuencia doble a la de las señales del circuito.
- La potencia tiene una parte independiente del tiempo que es la que da lugar al valor medio de la potencia distinto de cero.
- La potencia media disipada en una bobina o un condensador es cero.

Principio de Superposición en circuitos con CA

Ejemplo 3



Si:

- $v_1(t) = 10\cos(10^6 \frac{rad}{s} t) V$
- $v_2(t) = 3\cos(2\,10^6 \frac{rad}{s} t + \frac{\pi}{6}) V$

¿Cómo calculo las impedancias?
¿Qué valor de ω tengo que usar?

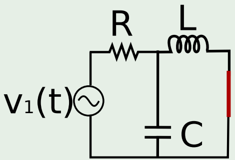
SOLUCIÓN: Uso el Principio de superposición

- El Principio de Superposición es especialmente útil en CA para resolver circuitos en los que hay varias fuentes que operan a distintas frecuencias. En este caso, no podemos emplear ningún otro método de resolución de los aprendidos en CC.

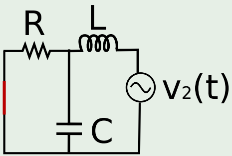
Principio de Superposición en circuitos con CA

- La intensidad o diferencia de potencial entre los extremos de cualquier elemento del circuito del Ejemplo 3 se puede calcular como la suma de las intensidades o diferencias de potenciales que se obtienen al resolver los circuitos de los ejemplos 3a y 3b.

Ejemplo 3a



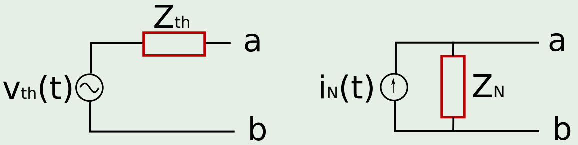
Ejemplo 3b



- Resuelvo el Ejemplo 3a usando $\omega = 10^6 \, \frac{rad}{s}$.
- Resuelvo el Ejemplo 3b usando $\omega = 2\,10^6 \, \frac{rad}{s}$.
- Sumo las **soluciones finales**, las que dependen del tiempo y son funciones coseno!!!

Teoremas de Thevenin y Norton en circuitos en CA

Equivalentes Thevenin y Norton



- La formulación de ambos teoremas es similar a la vista en CC. Ahora hablaremos de Impedancia Thevenin y de Impedancia Norton en lugar de Resistencias Thevenin y Norton.
- Las impedancias Thevenin y Norton son ahora números complejos $\Rightarrow$ complejidad de determinación experimental.
- Las impedancias Thevenin y Norton son ahora funciones de la frecuencia.

Función de Transferencia. Filtros

Supongamos un circuito arbitrario de manera que entre dos de sus puntos conectamos una fuente de tensión con cierta amplitud y cierta frecuencia ($v_{entrada,\omega}$) y estamos interesados en ver cómo este hecho afecta la difencia de potencial entre otros dos puntos del circuito ($v_{salida,\omega}$). Observamos que:

- La frecuencia de entrada es igual a la de salida.
- Si cambio la frecuencia de entrada, cambia la amplitud de salida.
- Si cambio la frecuencia de entrada, cambio el desfase entre entrada y salida.

Matemáticamente:

$$v_{salida,\omega} = T(\omega) v_{entrada,\omega}$$

donde:

$$\left.\begin{array}{rcl} v_{salida,\omega} & = & |v_{salida,\omega}| e^{jarg(v_{salida,\omega})} \\ v_{entrada,\omega} & = & |v_{entrada,\omega}| e^{jarg(v_{entrada,\omega})} \\ T(\omega) & = & |T(\omega)| e^{jarg(T(\omega))} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} |T(\omega)| e^{jarg(T(\omega))} = \frac{|v_{salida,\omega}|}{|v_{entrada,\omega}|} \\ e^{j(arg(v_{salida,\omega}) - arg(v_{entrada,\omega}))} \end{array}\right.$$

Función de Transferencia. Filtros

¿Cómo puedo estudiar la función de transferencia gráficamente?

Uso su representación: Diagrama de Bode

¿Cómo se pinta un Diagrama de Bode?

- Puesto que la función de transferencia es un número complejo, para representar su comportamiento en función de la frecuencia (Diagrama de Bode) necesitamos hacer **dos** dibujos: el del argumento y el del módulo.
- Para estudiar el **módulo**, representamos $20log|T(\omega)|$ (en decibelios) frente a la frecuencia (ω) usando una escala logarítmica para la frecuencia.
- Para estudiar el **argumento**, representamos su valor frente a la frecuencia usando para esta última una escala logarítmica.
- Para aprender a dibujar diagramas de Bode, usar el documento titulado *Dibujo de diagramas de Bode* disponible en moodle.
- Link muy útil para práctica 3: *www.ugr.es/ jmolinos/files/elaboraciondediagramasdebode.pdf*

Función de Transferencia. Filtros

$$|T(\omega)|e^{j arg(T(\omega))} = \frac{|v_{salida,\omega}|}{|v_{entrada,\omega}|} e^{j(arg(v_{salida,\omega})-arg(v_{entrada,\omega}))}$$

Analizamos el módulo de la Función de Transferencia

$$|T(\omega)| = \frac{|v_s|}{|v_e|} \Rightarrow |v_s| = |T(\omega)||v_e|$$

- Si $|T(\omega)| = \frac{|v_s|}{|v_e|} < 1 \Rightarrow |v_s| < |v_e| \Rightarrow 20\log|T(\omega)| < 0$
- Si $|T(\omega)| = \frac{|v_s|}{|v_e|} > 1 \Rightarrow |v_s| > |v_e| \Rightarrow 20\log|T(\omega)| > 0$
- Si $|T(\omega)| = \frac{|v_s|}{|v_e|} = 1 \Rightarrow |v_s| = |v_e| \Rightarrow 20\log|T(\omega)| = 0$

Función de Transferencia. Filtros

$$|T(\omega)|e^{j\,arg(T(\omega))} = \frac{|v_{salida,\omega}|}{|v_{entrada,\omega}|} e^{j(arg(v_{salida,\omega}) - arg(v_{entrada,\omega}))}$$

Analizamos el argumento de la Función de Transferencia

$$arg(T(\omega)) = arg(v_s) - arg(v_e)$$

- Si $arg(T(\omega)) = arg(v_s) - arg(v_e) < 0 \Rightarrow arg(v_s) < arg(v_e)$
- Si $arg(T(\omega)) = arg(v_s) - arg(v_e) > 0 \Rightarrow arg(v_s) > arg(v_e)$
- Si $arg(T(\omega)) = arg(v_s) - arg(v_e) = 0 \Rightarrow arg(v_s) = arg(v_e)$

Circuito RC: Filtros paso alta y paso baja

Analizamos un circuito RC y ponemos la salida en:

1. el condensador: Filtro paso baja

$$T(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}} e^{j(-arctan(RC\omega))}$$

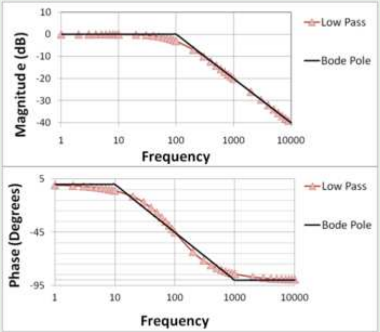
2. la resistencia: Filtro paso alta

$$T(\omega) = \frac{RC\omega}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}} e^{j(\frac{\pi}{2}-arctan(RC\omega))}$$

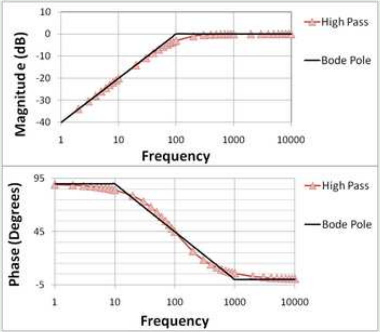
Frecuencia de corte: es la frecuencia a la que la salida es un 70 % de la señal de entrada. Esto se traduce en una disminución o aumento de la función de transferencia en 3 dB.

Circuito RC: Filtros paso alta y paso baja

Bode del Filtro paso baja



Bode del Filtro paso alta



Circuito RLC: Filtro paso banda

Si tomamos la salida en la resistencia:

$$T(\omega) = \frac{\omega RC}{\sqrt{(1-\omega^2 CL)^2 + \omega^2 C^2 R^2}} e^{j(\frac{\pi}{2} - arctan(\frac{\omega RC}{1-\omega^2 CL}))}$$

Si definimos:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{CL}} \text{ y } \delta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} R$$

La función de transferencia puede escribirse como:

$$T(\omega) = \frac{2\delta \frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{(1-\frac{\omega}{\omega 0})^2 + \frac{4\omega^2}{\omega_0}}} e^{j(\frac{\pi}{2} - arctan(\frac{2\delta\omega\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}))}$$

Circuito RLC: Filtro paso banda

¿Qué ocurre a bajas frecuencias ($\omega << \omega_0$)?

$$|T(\omega)| = \frac{2\delta\frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1}} e^{j(\frac{\pi}{2} - arctan(\frac{2\delta\omega}{\omega_0}))}$$

- Bode en amplitud: $20\log|T(\omega)| = 20\log 2\delta\frac{\omega}{\omega_0} = 20\log\omega + \log\frac{2\delta}{\omega_0}$
- Bode en fase: $arg(|T(\omega)|) = \frac{\pi}{2} - arctan(2\delta\frac{\omega}{\omega_0})$

¿Qué ocurre a altas frecuencias ($\omega >> \omega_0$)?

$$|T(\omega)| = 2\delta\frac{\omega_0}{\omega} e^{j(\frac{\pi}{2} - arctan(\frac{2\delta\omega_0}{-\omega}))}$$

- Bode en amplitud: $20\log|T(\omega)| = 20\log 2\delta\frac{\omega_0}{\omega} = -20\log\omega + \log\frac{2\delta}{\omega_0}$
- Bode en fase: $arg(|T(\omega)|) = \frac{\pi}{2} - arctan(2\delta\frac{\omega_0}{-\omega})$

Pintando Bode a mano alzada

Los tipos de funciones sencillas que nos podemos encontrar son:

1. $T(\omega) = K$ donde K es un valor constante (no depende de ω).
2. $T(\omega) = j\frac{\omega}{\omega_0}$ donde ω_0 es un valor constante.
3. $T(\omega) = \frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_0}}$ donde ω_0 es un valor constante.
4. $T(\omega) = 1 + j\frac{\omega}{\omega_0}$ donde ω_0 es un valor constante.
5. $T(\omega) = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$ donde ω_0 es un valor constante.

Pintando Bode a mano alzada. $T(\omega) = K$

La forma del diagrama de Bode de $T(\omega) = K$ depende del signo de K. Vamos a escribir la función de transferencia $T(\omega) = K$ en forma polar:

- $T(\omega) = |K|e^{j0}$ si K es positivo.
- $T(\omega) = |K|e^{j\pi}$ si K es negativo.

Entonces:

1. para el diagrama de Bode del módulo necesito:

$$20 \log |T(\omega)| = 20 \log |K| dB$$

2. para el diagrama de Bode del argumento necesito:

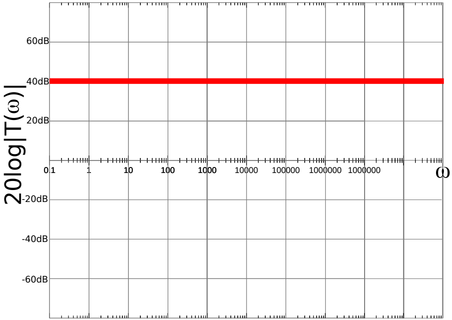
$$\begin{aligned} \arg T(\omega) &= 0 \;\; si \;\; K \;\; es \;\; positivo. \\ \arg T(\omega) &= \pi \;\; si \;\; K \;\; es \;\; negativo. \end{aligned}$$

Conclusión: El diagrama de Bode tanto del módulo como del argumento para este tipo de funciones es **constante**, no depende de ω.

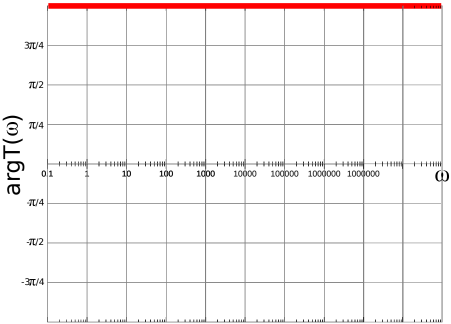
Pintando Bode a mano alzada. $T(\omega) = K$

Ejemplo: $T(\omega) = -100$

Módulo



Argumento



Pintando Bode a mano alzada. $T(\omega) = j\frac{\omega}{\omega_0}$

Comenzamos escribiendo la función de transferencia $T(\omega) = j\frac{\omega}{\omega_0}$ en forma polar. Para ello usamos que esta función es un número complejo que tiene sólo parte imaginaria.

$$T(\omega) = |\frac{\omega}{\omega_0}|e^{j\frac{\pi}{2}}$$

Entonces:

1. para el diagrama de Bode del módulo necesito:

$$20\log|T(\omega)| = 20\log|\frac{\omega}{\omega_0}| = \mathbf{20}\log\omega - 20\log\omega_0$$

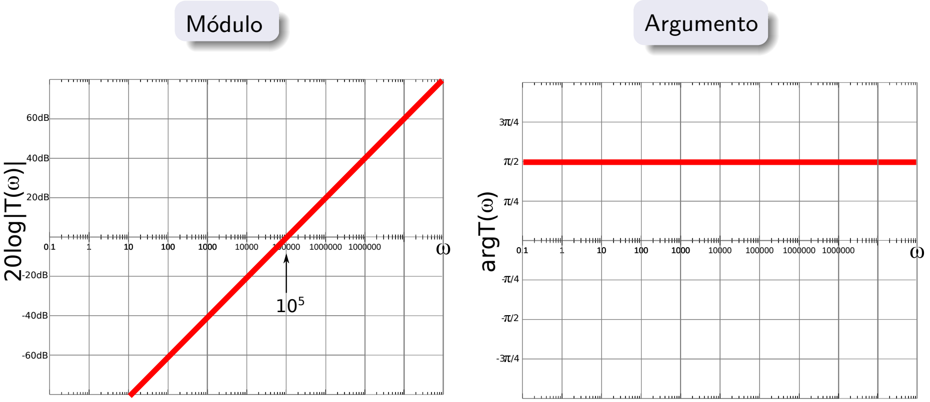
2. para el diagrama de Bode del argumento necesito:

$$\arg T(\omega) = \frac{\pi}{2}$$

Conclusiones: El diagrama de Bode tanto del módulo es una recta de pendiente 20dB que corta al eje X en $\omega = \omega_0$. El diagrama de Bode del argumento para este tipo de funciones es **constante**, no depende de ω.

Pintando Bode a mano alzada. $T(\omega) = j\frac{\omega}{\omega_0}$

Ejemplo: $T(\omega) = j\frac{\omega}{10^5}$



Pintando Bode a mano alzada. $T(\omega) = \frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_0}}$

Comenzamos escribiendo la función de transferencia $T(\omega) = \frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_0}}$ en forma polar. Para ello usamos que esta función es un número complejo que tiene sólo parte imaginaria.

$$T(\omega) = -j\frac{\omega_0}{\omega} = |\frac{\omega_0}{\omega}|e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

Entonces:

1. para el diagrama de Bode del módulo necesito:

$$20\log|T(\omega)| = 20\log|\frac{\omega_0}{\omega}| = 20\log\omega_0 \text{-} \mathbf{20}\log\omega$$

2. para el diagrama de Bode del argumento necesito:

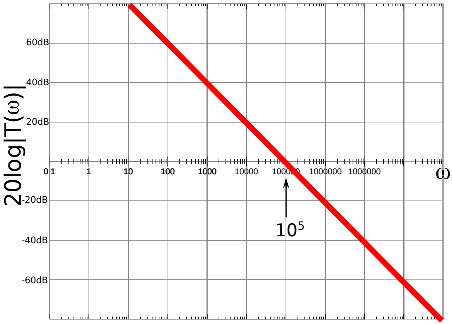
$$\arg T(\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

Conclusiones: El diagrama de Bode tanto del módulo es una recta de pendiente -20dB que corta al eje X en $\omega = \omega_0$. El diagrama de Bode del argumento para este tipo de funciones es **constante**, no depende de ω.

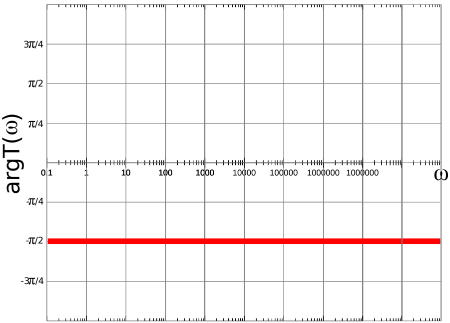
Pintando Bode a mano alzada. $T(\omega) = \frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_0}}$

Ejemplo: $T(\omega) = \frac{1}{j\frac{\omega}{10^5}}$

Módulo



Argumento



Pintando Bode a mano alzada. $T(\omega) = 1 + j\frac{\omega}{\omega_0}$

Comenzamos escribiendo la función de transferencia $T(\omega) = 1 + j\frac{\omega}{\omega_0}$ en forma polar:

$$T(\omega) = \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)} e^{j \arctan \frac{\omega}{\omega_0}}$$

Entonces:

1. para el diagrama de Bode del módulo necesito:

$$20 \log |T(\omega)| = 20 \log \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)}$$

2. para el diagrama de Bode del argumento necesito:

$$\arg T(\omega) = \arctan \frac{\omega}{\omega_0}$$

Pintando Bode a mano alzada. $T(\omega) = 1 + j\frac{\omega}{\omega_0}$

$$20\log|T(\omega)| = 20\log\sqrt{\left(1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)}$$

Analizamos ahora el comportamiento asintótico del módulo:

- Si $\omega >> \omega_0 \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_0} >> 1 \Rightarrow 1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \approx \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{\left(1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)} \approx \frac{\omega}{\omega_0}$

  $$20\log|T(\omega)| \approx 20\log\frac{\omega}{\omega_0} = \mathbf{20}\log\omega - 20\log\omega_0$$

- Si $\omega << \omega_0 \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_0} << 1 \Rightarrow 1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \approx 1 \Rightarrow \sqrt{\left(1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)} \approx 1$

  $$20\log|T(\omega)| \approx 20\log 1 = 0dB$$

- Si $\omega = \omega_0 \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_0} = 1 \Rightarrow 1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = 2 \Rightarrow \sqrt{\left(1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)} = \sqrt{2}$

  $$20\log|T(\omega)| = 20\log\sqrt{2} \approx 3dB$$

Pintando Bode a mano alzada. $T(\omega) = 1 + j\frac{\omega}{\omega_0}$

$$\arg T(\omega) = \arctan \frac{\omega}{\omega_0}$$

Analizamos ahora el comportamiento asintótico del argumento:

- Si $\omega >> \omega_0 \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_0} >> 1 \Rightarrow \arctan \frac{\omega}{\omega_0} \approx \frac{\pi}{2}$

  $\arg T(\omega) \approx \frac{\pi}{2}$

- Si $\omega << \omega_0 \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_0} << 1 \Rightarrow \arctan \frac{\omega}{\omega_0} \approx 0$

  $\arg T(\omega) \approx 0$

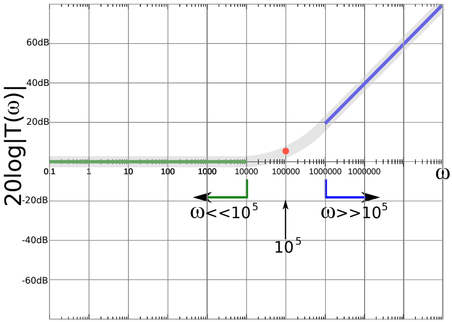
- Si $\omega = \omega_0 \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_0} = 1 \Rightarrow \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$

  $\arg T(\omega) = \frac{\pi}{4}$

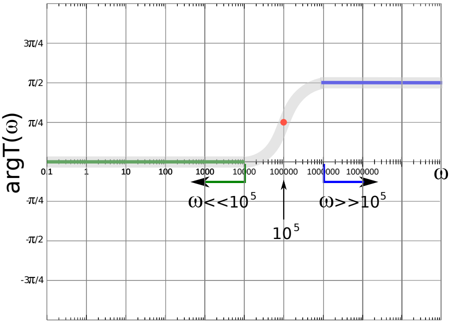
Pintando Bode a mano alzada. $T(\omega) = 1 + j\frac{\omega}{\omega_0}$

Ejemplo: $T(\omega) = 1 + j\frac{\omega}{10^5}$

Módulo



Argumento



Pintando Bode a mano alzada. $T(\omega) = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$

Comenzamos escribiendo la función de transferencia $T(\omega) = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$ en forma polar:

$$T(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)}e^{j\arctan\frac{\omega}{\omega_0}}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)}}e^{-j\arctan\frac{\omega}{\omega_0}}$$

Entonces:

1. para el diagrama de Bode del módulo necesito:

$$20\log|T(\omega)| = 0 - 20\log\sqrt{\left(1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)}$$

2. para el diagrama de Bode del argumento necesito:

$$\arg T(\omega) = -\arctan\frac{\omega}{\omega_0}$$

Pintando Bode a mano alzada. $T(\omega) = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$

$$20\log|T(\omega)| = -20\log\sqrt{\left(1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)}$$

Analizamos ahora el comportamiento asintótico del módulo:

- Si $\omega >> \omega_0 \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_0} >> 1 \Rightarrow 1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \approx \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{\left(1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)} \approx \frac{\omega}{\omega_0}$

  $$20\log|T(\omega)| \approx -20\log\frac{\omega}{\omega_0} = \mathbf{-20}\log\omega + 20\log\omega_0$$

- Si $\omega << \omega_0 \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_0} << 1 \Rightarrow 1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \approx 1 \Rightarrow \sqrt{\left(1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)} \approx 1$

  $$20\log|T(\omega)| \approx 20\log 1 = 0dB$$

- Si $\omega = \omega_0 \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_0} = 1 \Rightarrow 1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = 2 \Rightarrow \sqrt{\left(1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)} = \sqrt{2}$

  $$20\log|T(\omega)| = -20\log\sqrt{2} \approx -3dB$$

Pintando Bode a mano alzada. $T(\omega) = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$

$$\arg T(\omega) = -\arctan \frac{\omega}{\omega_0}$$

Analizamos ahora el comportamiento asintótico del argumento:

- Si $\omega >> \omega_0 \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_0} >> 1 \Rightarrow \arctan \frac{\omega}{\omega_0} \approx \frac{\pi}{2}$

  $\arg T(\omega) \approx -\frac{\pi}{2}$

- Si $\omega << \omega_0 \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_0} << 1 \Rightarrow \arctan \frac{\omega}{\omega_0} \approx 0$

  $\arg T(\omega) \approx 0$

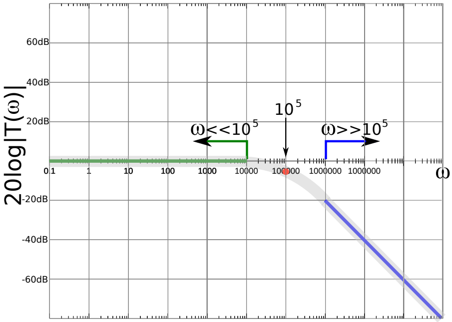
- Si $\omega = \omega_0 \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_0} = 1 \Rightarrow \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$

  $\arg T(\omega) = -\frac{\pi}{4}$

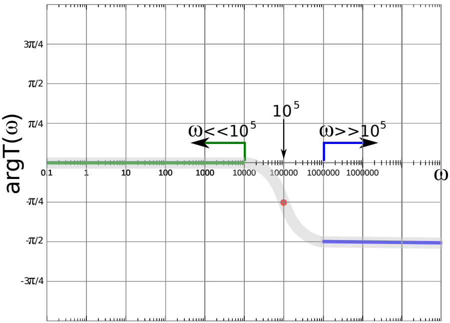
Pintando Bode a mano alzada. $T(\omega) = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$

Ejemplo: $T(\omega) = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{10^5}}$

Módulo



Argumento



Pintando Bode a mano alzada.

En general, en esta asignatura, vamos a poder escribir siempre una función de transferencia $T(\omega)$ como el producto de una serie de funciones de transferencia sencillas ($T_i(\omega)$):

$$T(\omega) = \prod_i T_i(\omega) = \prod_i \left(|T_i(\omega)| e^{j \arg T_i(\omega)}\right) = \left(\prod_i |T_i(\omega)|\right) e^{j \sum_i \arg T_i(\omega)} = |T(\omega)| e^{j \arg T}$$

De la igualdad anterior podemos concluir que:

$$\begin{aligned} |T(\omega)| &= \prod_i |T_i(\omega)| \Rightarrow 20 \log |T(\omega)| = \sum_i (20 \log |T_i(\omega)|) \\ \arg T(\omega) &= \sum_i \arg T_i(\omega) \end{aligned}$$

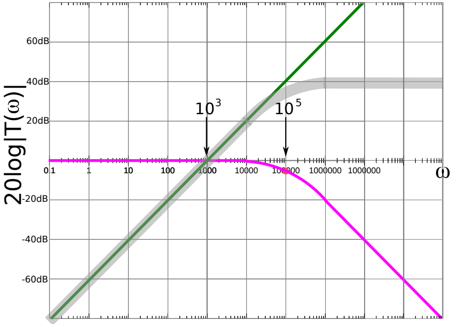
Entonces,

- si conozco el diagrama de Bode en módulo cada $T_i(\omega)$ podré calcular el de $T(\omega)$ simplemente sumándolos.
- si conozco el diagrama de Bode de cada $\arg T_i(\omega)$ podré calcular el de $\arg T(\omega)$ sumándolos.

Pintando Bode a mano alzada.

Ejemplo: $T(\omega) = \frac{j\frac{\omega}{10^3}}{1+j\frac{\omega}{10^5}} \Rightarrow \mathbf{T}(\omega) = T_1(\omega)T_2(\omega) = (j\frac{\omega}{10^3})\frac{1}{1+j\frac{\omega}{10^5}}$

Módulo



Argumento