Examen Final Geo 2018

1.

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ -x+y+z-t=\alpha \\ x+\alpha y-z+t=1 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & \alpha \\ 1 & \alpha & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & -1 \end{vmatrix} = -1+1-\alpha-1-1-\alpha = -2-2\alpha \Rightarrow -2-2\alpha=0 \quad \boxed{\alpha=-1}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & 1 \end{vmatrix} = 1-1+1+\alpha \Rightarrow 1+\alpha=0 \Rightarrow \boxed{\alpha=-1}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \end{vmatrix} = 1+\alpha+1-\alpha^2 \Rightarrow \alpha^2-\alpha-2=0$$

$$\alpha = \frac{1\pm 3}{2} = \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases}$$

Si $\alpha=-1 \Rightarrow$ S.C.I.

$$\left.\begin{cases} x+y+z=0 \\ -x+y+z-t=-1 \\ x-y-z+t=1 \end{cases}\right\} \text{Son iguales} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y-z+t=1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x+y&=-z \\ x-y&=1+z-t \\ \hline 2x&=1-t \Rightarrow x=\frac{1-t}{2} \end{aligned} \qquad y=-z-x=-z+\frac{t-1}{2}$$

$$\text{Sol.: } \left(\frac{1-t}{2}, -z+\frac{t-1}{2}, z, t\right)$$

Si $\alpha \neq -1 \Rightarrow$ S.C.I:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ -x+y+z-t=\alpha \\ x+\alpha y-z+t=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y-z+t=-\alpha \\ x+\alpha y-z+t=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-y-z+t=-\alpha \\ (\alpha+1)y=1+\alpha \Rightarrow y=\frac{1+\alpha}{1+\alpha}=1 \\ 2y+2z-t=\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-z+t=-\alpha+1 \\ 2z-t=\alpha-2 \Rightarrow z=\frac{t}{2}+\frac{\alpha-2}{2} \end{cases} \qquad x=-\alpha+1-t+\frac{t}{2}+\frac{\alpha-2}{2}$$

$$x=-\frac{t}{2}+\frac{-\alpha}{2}$$

$$\boxed{\text{Sol.: } \left(-\frac{t}{2}-\frac{\alpha}{2}, 1, \frac{t}{2}+\frac{\alpha-2}{2}, t\right)}$$

3. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

- Imagen del plano $x_1 - x_2 = 0$ es el plano $x_1 - x_3 = 0$.
- $f(1,-1,0) = (1,0,1)$

Veamos qué significa la 1ª condición:

$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x - y = 0\}$
$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x - z = 0\}$

Tienen dimensión 2 ya que presenta una única ecuación cartesiana

$\boxed{f(U) = W}$

Para que esto ocurra, calculemos una base de U y W y apliquemos cada uno de los vectores de la base de U en los de la base de W:

$U = \mathcal{L}\{(0,0,1),(1,1,0)\}$ $W = \mathcal{L}\{(0,1,0),(1,0,1)\}$

$f(0,0,1) = (0,1,0)$ $f(1,1,0) = (1,0,1)$

Así se cumple que $f(U) = W$.

Además, como la segunda condición nos da que $f(1,-1,0) = (1,0,1)$, ya tenemos la aplicación definida ya que:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{Forman base}$$

$B = \{(0,0,1),(1,1,0),(1,-1,0)\}$

$$M(f; B_u \leftarrow B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular la matriz de f en la base usual de $\mathbb{R}^3$.

$$M(f; B_u) = M(f; B_u \leftarrow B) \cdot M_{B \leftarrow B_u} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. V dimensión 4 sobre $\mathbb{R}$

B base de V, $B = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$

$B^* = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ dual de B

$U = \mathcal{L}\{u_1+u_2+u_3, u_3+u_4\} \Rightarrow$ Subespacio de V

a) Anulador de U. Ec. implícitas de U.

Como B^* es la dual de B, sabemos que:

$$\omega_1(u_1)=1 \quad \omega_2(u_2)=1 \quad \omega_3(u_3)=1 \quad \omega_4(u_4)=1$$

Valen 0 para cualquier otro vector de la base.
Los vectores de la base de U tienen en la base B las siguientes coordenadas:

$$u_1+u_2+u_3 = (1,1,1,0)_B \quad u_3+u_4 = (0,0,1,1)_B$$

$\dim_{\mathbb{R}} U = 2 \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} an(U) = \dim_{\mathbb{R}}(V) - \dim_{\mathbb{R}}(U) = 4-2=2$

Sea $\varphi \in an(U)$, sabemos que se cumple que:

$$\varphi = a\omega_1 + b\omega_2 + c\omega_3 + d\omega_4$$

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(u_1+u_2+u_3)=0 \Rightarrow a+b+c=0 \\ \varphi(u_3+u_4)=0 \Rightarrow c+d=0\end{array}\right\} \text{Sol.: } (-b+d, b, -d, d)$$

Como $\dim_{\mathbb{R}} an(U)=2$, tomaremos 2 formas lineales que cumplan dichas ecuaciones:

$$\varphi_1 = (1,0,-1,1)_{B^*} \quad \varphi_2 = (-1,1,0,0)$$

$$\boxed{b=0 \quad d=1} \qquad \boxed{b=1 \quad d=0}$$

$$an(U) = \mathcal{L}\{\varphi_1, \varphi_2\} = \mathcal{L}\{\omega_1-\omega_3+\omega_4, -\omega_1+\omega_2\}$$

Ec. implícitas de U

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 0 & y \\ 1 & 1 & z \\ 0 & 1 & t \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rango } 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & y \\ 1 & 1 & z \\ 0 & 1 & t \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow t+y-z=0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & z \\ 0 & 1 & t \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow t+x-z=0$$

$$\boxed{\begin{cases} y-z+t=0 \\ x-z+t=0 \end{cases}}$$

b) Extender una base de U a una base de V.

Para ello basta con coger otros dos vectores L.I. con $(1,1,1,0)_B$ y $(0,0,1,1)_B$ con sus coordenadas con respecto de la base B:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, desarrollando determinantes por la 3^a y 4^a columna se deduce que las columnas añadidas son L.I. con el resto.

$$B' = \{u_1+u_2+u_3,\ u_3+u_4,\ u_2,\ u_1\}$$

c) Calcular la base dual $(B')^*$ en función de las formas lineales de la base B^*.

$$\varphi = a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + a_3\omega_3 + a_4\omega_4$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$(B')^* = \{\omega_3-\omega_4,\ \omega_4,\ \omega_2-\omega_3+\omega_4,\ \omega_1-\omega_3+\omega_4\}$$