Esto signfica que para saber cuales son los objetos t para los cuales $q(t)$ es consecuencia de Σ' (o lo que es equivalente $q(t)$ es verdadero en todo modelo de Herbrand de Σ'), basta con explorar el árbol de deducciones input ordenadas por una estrategia "primero en profundidad", (o por una estrategia "primero en profundidad con retorno" si se está seguro que el árbol es finito) anotando por cada cláusula vacía que se encuentre el objeto t asociado.

Éste es el principio de los métodos de extracción de respuestas utilizados en numerosos sistemas de demostración automática (cfr. [18]) y en ciertos lenguajes de interrogación de bases de datos. En particular, el lenguaje Prolog está basado en este resultado. Puede decirse que calcula lo que pasa en el más pequeño modelo de Herbrand de Σ', el conjunto de cláusulas que definen el programa (cfr. [15]).

5.20. Ejercicios sobre Resolución

1. Decir si son unificables o no las fórmulas $r(x, f(a), y)$ y $r(f(y), x, b)$. En caso de respuesta afirmativa, dar un unificador principal. Igual pregunta para las fórmulas $r(x, f(a), y)$ y $r(f(y), x, z)$.

2. Dados los literales $p(g(f(x), u), f(a), g(z, f(y)))$ y $p(g(f(f(y)), g(v, a)), f(v), g(g(x, b), x))$, di cuales de las siguientes sustituciones es un unificador de máxima generalidad o principal.

    a) $(v|a)(u|g(v, a))(z|g(a, b))(x|a)$.
    b) $(v|a)(u|g(a, a))(z|g(f(b), b))(y|b)(x|f(b))$.
    c) $(v|a)(u|g(a, a))(z|g(x, b))(x|f(u))$.
    d) $(z|g(f(y), b))(v|a)(u|g(a, a))(x|f(y))$.

3. Decir si son unificables o no las fórmulas atómicas:

    - $\varphi_1 \equiv p(x, y)$
    - $\varphi_2 \equiv p(f(z), x)$
    - $\varphi_3 \equiv p(w, f(x))$

    e igual pregunta para:

    - $\varphi_1 \equiv p(x, z)$
    - $\varphi_2 \equiv p(f(y), g(a))$
    - $\varphi_3 \equiv p(f(u), z)$

4. Comprobar si son unificables los siguientes conjuntos de literales. En caso afirmativo, calcular un unificador de máxima generalidad:

    a) $\{p(g(y), f(x, h(x), y)), p(x, f(g(z), w, z))\}$
    b) $\{p(x, g(f(a)), f(x)), p(f(a), g(y), y), p(y, z, y)\}$
    c) $\{p(x, f(g(y), b)), p(h(a, y), f(g(f_1(x)), b))\}$
    d) $\{p(x, z), p(g(f(z)), g(b)), p(g(f(w)), w)\}$

5. Mediante el "algoritmo de subsumisión", determinar

    a) si la cláusula $p(x, x)$ subsume a (es generalizada por) la cláusula $p(f(x), y) \vee p(y, f(x))$.
    b) si la cláusula $\neg p(x) \vee q(f(x), a)$ subsume a (es generalizada por) la cláusula $\neg p(h(y)) \vee q(f(h(y)), a) \vee \neg p(z)$.

6. Probar que el conjunto formado por las siguientes cláusulas es insatisfacible:
   - $t(x, g(a), z, f(u)) \vee \neg p(g(a)) \vee s(y, z) \vee \neg r(f(y))$
   - $q(x, f(y)) \vee \neg p(g(x))$
   - $\neg s(f(a), f(a)) \vee \neg r(f(f(a))) \vee \neg p(g(x))$
   - $r(f(x))$
   - $p(g(a)) \vee \neg q(g(b), f(x))$
   - $\neg p(x) \vee s(y, z) \vee \neg t(a, x, y, f(z)) \vee \neg q(g(b), z)$
   - $p(g(x))$
7. Encontrar el conjunto apropiado de cláusulas a través del cual estudiar si la fórmula $\exists x p(f(x))$ es consecuencia semántica del conjunto de hipótesis:
   - $\exists x \neg p\big(f(x)\big) \to \forall x q(x)$
   - $\exists y \forall z\big(r(z, y) \wedge r(z, a)\big) \to \forall x p(x)$
   - $\forall x \forall z\big(q(z) \to p(x) \vee q(z, a)\big)$
8. Dar una refutación lineal ordenada del conjunto de las siguientes cláusulas:
   - $\neg r\big(x, f(a), f(g(z))\big) \vee \neg q(a, x)$
   - $\neg p(z, y)$
   - $\neg q(a, x)$
   - $q\big(y, g(x)\big) \vee p(y, z)$
   - $q(x, z) \vee r\big(g(y), f(y), z\big) \vee p(x, z)$
9. Se quiere establecer a partir de los enunciados hipotéticos siguientes:
   - para todo crimen, hay alguien que lo ha cometido
   - sólo la gente deshonesta comete crímenes
   - no es detenida más que la gente deshonesta
   - la gente deshonesta detenida no comete crímenes
   - ocurren crímenes

   el enunciado:
   - hay gente deshonesta no detenida

   como pretendida tesis. Utilizar para ello la resolución en lógica de primer orden.
10. A partir de las fórmulas:

    $\varphi 1)$ $\forall x \forall y \exists z p(x, y, z)$

    $\varphi 2)$ $\forall x \forall y \forall z \forall u \forall v \forall w\big((p(x, y, u) \wedge p(y, z, v)) \to (p(x, v, w) \leftrightarrow p(u, z, w))\big)$

    $\varphi 3)$ $\exists x\big(\forall y p(x, y, y) \wedge \forall z \exists u p(u, z, x)\big)$

    concluir como consecuencia semántica:

    $$\exists x\big(\forall y p(x, y, y) \wedge \forall z \exists u p(z, u, x)\big)$$

    utilizando la resolución. Enunciar un problema de la teoría de grupos que quede demostrado con lo que precede en este ejercicio.

11. Si es posible, extraer la cláusula vacía como resolvente del siguiente conjunto de cláusulas:

    $\sigma 1)$ $\neg p(x) \vee q(x, f(x))$

    $\sigma 2)$ $\neg p(x) \vee r(f(x))$

    $\sigma 3)$ $p(a)$

    $\sigma 4)$ $\neg q(x, y)$

12. Si en el sistema $\vdash_{rcv}$ la regla de resolución no impusiera el renombramiento previo, en una de las cláusulas padre, de las variables comunes ¿sería cierto el resultado de que todo conjunto insatisfacible de cláusulas es refutable? Sustentar la respuesta, según su naturaleza, con una demostración o un ejemplo.

13. Mostrar con un ejemplo que la conocida como *regla de disminución* es indispensable para la deducción semántica en lógica de primer orden utilizando la resolución. Para ello, encontrar un conjunto de cláusulas (de al menos dos) que siendo insatisfacible, sea imposible generar la cláusula vacía a partir de él con el mero y exclusivo uso de la regla de resolución.

14. Demostrar que el conjunto de fórmulas $\{\forall x\big(p(x) \to \forall y(q(x, y) \to r(y))\big),\ \neg\exists z\neg q(f(z), g(z)),\ p(f(a))\}$ implica semánticamente $r(g(a))$.

15. Demuestra, usando resolución, que la fórmula

    $$\forall x \forall y((r(x, y) \vee q(x)) \wedge \neg r(x, g(x)) \wedge \neg q(y))$$

    es insatisfacible.

16. Construir una derivación de la cláusula vacía a partir de las formas clausulares que se obtienen del conjunto de fórmulas $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ donde:

    - $\varphi_1 \equiv \forall x(\exists y p(x, y) \vee \neg q(x))$
    - $\varphi_2 \equiv \forall x(r(x) \to (t(x) \vee q(x)))$
    - $\varphi_3 \equiv \forall y(t(y) \to \exists z p(y, z))$
    - $\varphi_4 \equiv \exists z(\forall y \neg p(z, y) \wedge r(z))$

17. Construir una derivación de la cláusula vacía a partir de las formas clausulares que se obtienen del conjunto de fórmulas $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ donde:

    - $\varphi_1 \equiv m(a)$
    - $\varphi_2 \equiv \forall x(m(x) \to m(f(x)) \vee m(g(x)))$
    - $\varphi_3 \equiv \forall x(q(x, f(x)) \wedge q(x, g(x)))$
    - $\varphi_4 \equiv \forall x(\neg m(x) \vee \forall y \neg q(y, x))$

18. Demostrar, usando la resolución, que la fórmula $\exists x \exists y(p(x, y) \wedge q(y))$ es consecuencia semántica de las fórmulas:

    - $q(a)$
    - $\forall x(q(x) \to q(g(x)) \vee q(f(x)))$
    - $\forall x(p(x, g(x)) \wedge p(x, f(x)))$

19. Demostrar, usando resolución lineal ordenada, que la fórmula

    $$\exists x(o(x) \wedge \forall y(t(y) \to \exists z p(y, z, x)))$$

    es consecuencia de las fórmulas:

- $\forall x((t(x) \land \neg q(x)) \to \forall y \forall z(o(y) \to p(x,z,y)))$
- $\forall x((t(x) \land q(x)) \to \forall y \forall z((o(y) \land s(y)) \to p(x,z,y)))$
- $\exists x(o(x) \land r(x)) \land \exists y(o(y) \land s(y))$

20. Demostrar, usando resolución lineal ordenada, que la fórmula

$$\exists x(r(x) \land t(x))$$

es consecuencia de las fórmulas:

- $\exists x(r(x) \land \forall y(p(y) \to q(x,y)))$
- $\forall x(r(x) \to \exists y(s(x,y) \land p(y)))$
- $\forall x(\exists y(s(x,y) \land q(x,y)) \to t(x))$

21. Demostrar, usando resolución lineal ordenada, que la fórmula

$$\exists x \exists y(pl(x) \land cn(y) \land cp(x,y))$$

es consecuencia de las fórmulas:

- $\forall x(je(x) \land cs(x) \to \exists y(pp(y) \land cp(x,y)))$
- $\forall x(je(x) \to pl(x)) \land \exists x(je(x) \land cs(x))$
- $\forall x(pp(x) \to \neg cd(x) \land jg(x))$
- $\forall x(jg(x) \to cn(x) \lor cd(x))$

22. Construir una OL-refutación del conjunto de cláusulas:

- $r(a, f(c), f(b))$
- $p(a)$
- $r(x, x, f(x))$
- $\neg r(x,y,z) \lor r(y,x,z)$
- $\neg r(x,y,z) \lor q(x,z)$
- $\neg p(x) \lor \neg r(y,z,u) \lor \neg q(x,u) \lor q(x,y) \lor q(x,z)$
- $\neg q(a,b)$

23. Demostrar, usando OL-resolución, que la fórmula

$$\exists x(r(x) \lor \exists y(q(x,y) \land p(y)))$$

es consecuencia de las fórmulas:

- $\forall x((o(x) \land \exists y(q(y,x) \land s(y))) \to p(x))$
- $\forall x(o(x) \land v(x) \to s(x))$
- $\forall x(o(x) \land \neg v(x) \to r(x))$
- $\forall x(\exists y(q(y,x) \land o(y)) \to o(x))$
- $o(a) \land q(a,b)$

24. Demostrar, usando resolución lineal ordenada, que la fórmula

$$\neg \forall x o(x)$$

es consecuencia de las fórmulas:

- $\forall x(q(x) \wedge \neg t(x) \rightarrow s(x))$
- $\forall x(q(x) \wedge t(x) \rightarrow r(x) \vee p(x))$
- $\forall x((s(x) \vee r(x) \vee p(x)) \rightarrow \neg o(x)$
- $\exists x q(x)$

25. Demostrar, usando resolución lineal ordenada, que la fórmula

$$\exists x as(s)$$

es consecuencia de las fórmulas:

- $\forall x(md(x) \wedge \neg bl(x) \rightarrow ca(x))$
- $\forall x(un(x) \wedge ca(x) \rightarrow mx(g(x)) \vee fm(f(x)))$
- $\forall x(bl(x) \rightarrow dg(x))$
- $\forall x(mx(x) \rightarrow il(x))$
- $\forall x(fm(x) \rightarrow fa(x))$
- $\forall x(dg(x) \vee il(x) \vee fa(x) \rightarrow as(x))$
- $un(a) \vee md(a)$

26. Demostrar, usando resolución lineal ordenada, que la fórmula

$$\neg\exists x(r(x) \wedge s(x))$$

es consecuencia de las fórmulas:

- $\forall x((r(x) \wedge s(x)) \rightarrow \exists y(q(y) \wedge p(x,y)))$
- $\forall x(q(x) \rightarrow t(x))$
- $\forall x(t(x) \rightarrow o(x))$
- $\forall x \forall y(r(x) \wedge o(y) \rightarrow \neg p(x,y))$

27. Determine si el siguiente conjunto de cláusualas es satisfacible o insatisfacible:

$$\begin{aligned}\Gamma = \{&c(x) \vee d(f(x),x),\\ &c(y) \vee \neg d(x,y) \vee b(x),\\ &\neg a(x) \vee b(x),\\ &\neg b(x) \vee \neg a(x) \vee c(y) \vee \neg d(x,y)\\ &\neg c(a)\\ &a(x) \vee \neg b(x)\}\end{aligned}$$

28. Sea el conjunto de fórmulas:

$$\begin{aligned}\Gamma = \{&\forall x(\exists y(p(x,y) \wedge r(x,y)) \rightarrow b(x)),\\ &\exists x(\neg c(x) \wedge \forall y(\neg q(y) \rightarrow r(x,y)),\\ &\forall x(\forall y(q(y) \vee \neg p(x,y)) \rightarrow c(x))\}\end{aligned}$$

y sea γ la fórmula:

$$\exists(b(x) \wedge \neg c(x))$$

Compruebe que γ es consecuencia semántica de Γ.

Ejercicio 5.2.1. Demuestre las siguientes aseveraciones:

1. $\forall v_1 q(v_1) \models q(v_2)$
2. $q(v_1) \not\models \forall v_1 q(v_1)$
3. $\forall v_1 q(v_1) \models \exists v_2 q(v_2)$
4. $\exists x \forall y p(x, y) \models \forall y \exists x p(x, y)$
5. $\forall y \exists x p(x, y) \not\models \exists x \forall y p(x, y)$
6. $\models \exists x(q(x) \to \forall x q(x))$

5.3. Ejercicios sobre Lenguajes e Interpretaciones

1. Para las siguientes fórmulas concluir qué variables son libres y cuáles son ligadas, detallando el carácter de libertad de cada una de sus ocurrencias respectivas:

   a) $\forall z(r(x, z) \to s(y, z))$
   b) $\exists x r(x, y)$
   c) $\exists x r(y, x)$
   d) $\exists z r(y, x)$
   e) $\exists x(r(x, y) \wedge s(x, y))$
   f) $\exists x r(x, y) \wedge \forall y s(x, y)$
   g) $\exists x(r(x, y) \wedge \forall y s(x, y))$
   h) $\exists x(\forall y r(x, y) \wedge s(x, y))$
   i) $\exists z(r(x, z) \vee p(y))$
   j) $\forall x(p(x) \to r(x, y))$
   k) $\forall x((p(x) \wedge q(x)) \to \neg r(x, y))$
   l) $\exists x(p(x) \wedge s(x, y))$
   m) $\exists x(\exists y q(x) \vee r(x, y))$
   n) $\forall x(\exists y r(x, y) \to r(x, z))$
   ñ) $\forall x(r(x, z) \to \exists y r(x, y))$
   o) $\forall x(\forall z r(x, z) \to s(x, z))$
   p) $((p(x) \vee q(y)) \wedge \forall x \forall y r(x, y))$

2. Consideremos un lenguaje **L** con los siguientes símbolos:

   - símbolos de constante: c, d
   - símbolos de función: no hay
   - símbolos de relación: p^1, q^1, e^2, r^2, s^2

   Sea **A** la estructura algebraica para **L** definida por:

   - $A = \mathbb{Z}_4$

- $(c)^{\mathbf{A}} = 0$, $(d)^{\mathbf{A}} = 1$
- $(p)^{\mathbf{A}} = \{x \colon x \in \mathbf{Z}_4, x^2 = 0\}$
- $(q)^{\mathbf{A}} = \{x \colon x \in \mathbf{Z}_4, x^2 = 2\}$
- $(e)^{\mathbf{A}} = \Delta(\mathbb{Z}_4)$
- $(r)^{\mathbf{A}} = \{(0,1),(0,2),(2,3),(2,2),(1,2),(3,0)\}$
- $(s)^{\mathbf{A}} = \{(0,1),(0,2),(0,3),(2,3),(0,0)\}$

Estudiar cuales de las siguientes sentencias son verdaderas para esta estructura:

1) $p(c)$
2) $\neg p(d)$
3) $p(c) \wedge p(d)$.
4) $p(c) \to \neg q(d)$
5) $\exists x q(x)$
6) $\neg(\exists x q(x))$
7) $\exists x \neg q(x)$
8) $\exists x(p(x) \wedge q(x))$
9) $\forall x q(x)$
10) $\forall x(p(x) \to q(x))$
11) $\forall x(q(x) \to \neg p(x))$
12) $\forall x(q(x) \to \exists y(p(x) \vee q(y)))$
13) $\forall x r(c,x)$
14) $\forall x s(c,x)$
15) $\forall x(r(c,x) \to s(c,x))$
16) $\exists y \forall x(r(c,x) \to s(c,x))$
17) $\forall x \forall y(r(x,y) \to s(x,y))$
18) $\forall x \forall y(r(x,y) \to \exists z(s(x,z)))$
19) $\forall x(p(x) \to \exists y(r(x,y)))$
20) $\forall x(p(x) \to \exists y(s(x,y) \wedge r(y,x)))$
21) $\forall x \exists y r(x,y)$
22) $\forall x \exists y s(x,y)$
23) $\exists y \forall x r(x,y)$
24) $\exists y \forall x s(x,y)$
25) $\exists y \forall x r(y,x)$
26) $\forall x \forall y \forall z((s(x,y) \wedge s(y,z)) \to r(x,z))$
27) $\forall x \forall y(r(x,y) \to \neg r(y,x))$
28) $\forall x \forall y(\neg s(x,y) \to \neg s(x,y))$
29) $\forall x \forall y(\exists z(r(x,z) \wedge r(z,y)) \to r(x,y))$
30) $\forall x \forall y(\exists z(r(x,z) \wedge s(z,y)) \to r(x,y))$
31) $\forall x \forall y(\exists z(s(x,z) \wedge r(z,y)) \to r(x,y))$
32) $\forall x \forall y(\exists z(r(x,z) \wedge r(z,y)) \to s(x,y))$

33) $\forall x(p(x) \to \exists y r(y,x))$
34) $\forall x(e(x,c) \to \exists y r(y,x))$
35) $\forall x(\exists y r(y,x) \to p(x))$
36) $\forall x(e(x,d) \leftrightarrow r(c,x))$

3. Calcular la interpretación de las siguientes fórmulas en cada una de las **L**-estructuras que se dan:

   a) $\forall x \forall y e(f(x,y), f(y,x))$ en las **L**-estructuras:

      1) **A** definida por:
         - $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$
         - $(f)^{\mathbf{A}}(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{, si } x+y \in A, \\ x & \text{, en otro caso.} \end{cases}$
         - $(e)^{\mathbf{A}} = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(7,7),(1,7),(7,1),(2,6),(6,2),(3,5),(5,3)\}$

      2) **B** definida por:
         - $B = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
         - $(f)^{\mathbf{B}}(x,y) = xy$
         - $(e)^{\mathbf{B}} = \Delta(B)$

      3) **C** definida por:
         - $C = \mathbb{Z}$
         - $(f)^{\mathbf{C}}(x,y) = xy$
         - $(e)^{\mathbf{C}} = \Delta(C)$

   b) $\forall x e(f(x,a), f(a,x))$

      1) **A** definida por:
         - $A = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
         - $(a)^{\mathbf{A}} = I_3$
         - $(f)^{\mathbf{A}}(x,y) = xy$
         - $(e)^{\mathbf{A}} = \Delta(A)$

      2) **B** definida por:
         - $B = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
         - $(a)^{\mathbf{B}} = 0_3$
         - $(f)^{\mathbf{B}}(x,y) = xy$
         - $(e)^{\mathbf{B}} = \Delta(B)$

      3) **C** definida por:
         - $C = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
         - $(a)^{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
         - $(f)^{\mathbf{C}}(x,y) = xy$
         - $(e)^{\mathbf{C}} = \Delta(C)$

   c) $\forall x \exists y e(f(x,y), a)$

      1) **A** definida por:
         - $A = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
         - $(a)^{\mathbf{A}} = I_3$

- $(f)^{\mathbf{A}}(x, y) = xy$
- $(e)^{\mathbf{A}} = \Delta(A)$

2) **B** definida por:
- $B = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
- $(a)^{\mathbf{B}} = 0_3$
- $(f)^{\mathbf{B}}(x, y) = xy$
- $(e)^{\mathbf{B}} = \Delta(B)$

3) **C** definida por:
- $C = \mathbb{Z}$
- $(a)^{\mathbf{C}} = 1$
- $(f)^{\mathbf{C}}(x, y) = xy$
- $(e)^{\mathbf{C}} = \Delta(C)$

d) $\forall x(e(f(x, x), a) \to e(x, a))$

1) **A** definida por:
- $A = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
- $(a)^{\mathbf{A}} = I_3$
- $(f)^{\mathbf{A}}(x, y) = xy$
- $(e)^{\mathbf{A}} = \Delta(A)$

2) **B** definida por:
- $B = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
- $(a)^{\mathbf{B}} = 0_3$
- $(f)^{\mathbf{B}}(x, y) = xy$
- $(e)^{\mathbf{B}} = \Delta(B)$

3) **C** definida por:
- $C = \mathbb{Z}$
- $(a)^{\mathbf{C}} = 1$
- $(f)^{\mathbf{C}}(x, y) = xy$
- $(e)^{\mathbf{C}} = \Delta(C)$

4) **D** definida por:
- $D = \mathbb{R}$
- $(a)^{\mathbf{D}} = 1$
- $(f)^{\mathbf{D}}(x, y) = xy$
- $(e)^{\mathbf{D}} = \Delta(D)$

5) **E** definida por:
- $E = \mathbb{R}$
- $(a)^{\mathbf{E}} = 0$
- $(f)^{\mathbf{E}}(x, y) = xy$
- $(e)^{\mathbf{E}} = \Delta(E)$

6) **F** definida por:
- $F = \mathbb{Z}_4$
- $(a)^{\mathbf{F}} = 0$
- $(f)^{\mathbf{F}}(x, y) = xy$
- $(e)^{\mathbf{F}} = \Delta(F)$

4. Determinar el carácter (satisfacible y refutable, universalmente válida o contradicción) de las siguientes fórmulas de primer orden:

   a) $\forall x \forall y (p(x, y) \to p(y, x))$

   b) $(\forall x \exists y (p(x, y) \to p(y, x)) \to (\exists x \exists y (p(x, y) \to p(y, x)))$

   c) $\forall x \forall y (p(x, y) \to \neg p(y, x))$

   d) $\forall x \exists y (p(x, y) \to \neg p(y, x))$

5. Consideramos las siguientes sentencias:

   1) $\forall x (p(x) \to \exists y r(x, y))$
   2) $\forall x (q(x) \to \exists y r(y, x))$
   3) $\exists x (p(x) \wedge q(x))$
   4) $\forall x \exists y r(x, y)$
   5) $\exists x \exists y \neg r(x, y)$

   Encontrar, si existen, estructuras en las que:

   a) Las sentencias 1), 3) y 5) sean verdaderas y las restantes falsas.

   b) Las sentencias 1), 2) y 4) sean verdaderas y las restantes falsas.

   c) Las sentencias 2) y 3) sean verdaderas y las restantes falsas.

   d) Las sentencias 2), 3) y 4) sean verdaderas y las restantes falsas.

   e) Las sentencias 2), 4) y 5) sean verdaderas y las restantes falsas.

   f) Las sentencias 2), 3) y 5) sean verdaderas y las restantes falsas.

   g) Todas las sentencias sean verdaderas.

   h) Todas las sentencias sean falsas.

6. Dadas las siguientes sentencias:

   1) $\forall x (\exists y r(x, y) \to p(x))$
   2) $\forall x (p(x) \to q(x))$
   3) $\exists x (q(x) \wedge \forall y \neg r(x, y))$
   4) $\exists x r(x, x)$
   5) $\exists x \neg r(x, x)$

   Encontrar, si existen, estructuras en las que:

   a) Las sentencias 1), 3) y 5) sean verdaderas y las restantes falsas.

   b) Las sentencias 1), 2) y 4) sean verdaderas y las restantes falsas.

   c) Las sentencias 1), 2) y 4) sean falsas y las restantes verdaderas.

   d) Las sentencias 2) y 3) sean verdaderas y las restantes falsas.

   e) Las sentencias 2), 3) y 4) sean verdaderas y las restantes falsas.

   f) Las sentencias 2), 4) y 5) sean verdaderas y las restantes falsas.

   g) Las sentencias 2), 3) y 5) sean verdaderas y las restantes falsas.

   h) Todas las sentencias sean verdaderas.

   i) Todas las sentencias sean falsas.

7. Estudiar para cada una de las siguientes fórmulas, si es universalmente válida, satisfacible, refutable o contradicción:

   a) $p(x) \to (\forall x \neg p(x) \to \neg p(f(a)))$
   b) $\forall x \exists y r(x,y) \to \exists y \forall x r(x,y)$
   c) $\exists x \forall y r(x,y) \to \forall y \exists x r(x,y)$
   d) $\forall x \forall y (r(x,y) \to r(y,x))$
   e) $\forall x (p(x) \to p(a))$
   f) $\forall x p(x) \to p(a)$

8. Dadas las siguientes fórmulas:

   - $\varphi = \forall x \exists y p(x,y)$
   - $\psi = \exists x \forall y p(x,y)$

   Encuentra una interpretación en la que ambas sean ciertas y otra en la que φ sea cierta y ψ sea falsa. ¿Es cierto $\varphi \vDash \psi$?

9. Consideramos el lenguaje de primer orden **L** dado por lo siguiente:

   - símbolos de constante: a
   - símbolos de función: f, g
   - símbolos de relación: P, Q

   y la **L**-estructura **A** dada por:

   - $A = \mathbb{Z}_{10}$
   - $(a)^{\mathbf{A}} = 4$
   - $(f)^{\mathbf{A}} = +$ (suma en $\mathbb{Z}_{10}$), $(g)^{\mathbf{A}}(x) = x^2$
   - $(p)^{\mathbf{A}} = \{(k,k) \colon k \in A\} = \Delta(A)$, $(q)^{\mathbf{A}} = \{(0,0),(1,9),(2,8),(3,7),(4,6),(5,5),(6,4),(7,3),(8,2),(9,1)\}$

   Interpretar las fórmulas siguientes usando una asignación cualquiera

   $$s \colon Var(\mathbf{L}) \longrightarrow \mathbb{Z}_{10}$$

   a condición de que cumpla $s(x) = 0$ y $s(y) = 4$.

   a) $\forall x (p(g(x),a) \to q(f(y,a),x))$
   b) $\forall x \exists y \exists z p(x, f(g(y), g(z)))$

10. Consideremos el lenguaje de primer orden **L** dado por lo siguiente:

    - símbolos de constante: a, b, c
    - símbolos de función: f, g
    - símbolos de relación: P

    y la **L**-estructura **A** dada por:

    - $A = \mathbb{Z}_6$
    - $(a)^{\mathbf{A}} = 0$, $(b)^{\mathbf{A}} = 1$, $(c)^{\mathbf{A}} = 2$
    - $(f)^{\mathbf{A}} = +$ (suma en $\mathbb{Z}_6$), $(g)^{\mathbf{A}}(x) = \cdot$ (producto en $\mathbb{Z}_6$)

- $(q)^{\mathbf{A}} = \{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$

a) Describir todas las asignaciones s de **L** en **A** para las que la siguiente fórmula se interpreta como verdadera:

$$\neg p(g(x, f(b,b)), a) \to p(f(y,c), g(y,y))$$

b) Interpretar la sentencia $\forall x \exists y p(g(y,c), x)$.

11. Describir todas las estructuras en las que la fórmula siguiente es válida:

$$r(x) \to \forall x r(x)$$

12. Consideramos el lenguaje de primer orden **L** dado por lo siguiente:

- símbolos de constante: a
- símbolos de función: f, g
- símbolos de relación: P

y la **L**-estructura **A** dada por:

- $A = \mathbb{Z}_6$
- $(a)^{\mathbf{A}} = 2$
- $(f)^{\mathbf{A}} = +$ (suma en $\mathbb{Z}_6$), $(g)^{\mathbf{A}}(x) = \cdot$ (producto en $\mathbb{Z}_6$),
- $(p)^{\mathbf{A}} = \{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$

Consideremos una asignación s en **A** tal que $s(x_1) = 2, s(x_2) = 0, s(x_3) = 0, s(x_4) = 3$. Se pide interpretar las siguientes fórmulas:

a) $\neg \exists x_1 \forall x_2 p(f(x_1, x_4), a)$

b) $\forall x_1 (p(x_1, g(x_1, x_1)) \leftrightarrow p(g(a, x_1), f(a, a)))$

13. Sea $(X, \leq)$ un conjunto ordenado. Consideramos un lenguaje de primer orden **L** con un símbolo de predicado binario r.Sea ahora la **L**-estructura **A**, cuyo universo es X, y para la que $(r)^{\mathbf{A}} = \leq$. Se pide escribir una fórmula que signifique exactamente que $(X, \leq)$ es un retículo.

14. Dada la fórmula

$$r(x) \leftrightarrow \exists x r(x)$$

se pide:

a) Probar que **no** es universalmente válida.

b) Encontrar una estructura donde la fórmula no sea válida.

c) ¿Es satisfacible la fórmula en cualquier estructura?

d) ¿Es refutable en toda estructura?

15. Interpretar la fórmula

$$\forall x \forall y (p(x,y) \to \neg p(y,x))$$

en las estructuras que seguidamente se sugieren:

a) $A = \{0,1,2,3\}$
$p^{\mathbf{A}} = \{(0,0),(0,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)\}$

b) $B = \mathbb{R}$
$p^{\mathbf{B}}$ es la relación binaria “x es estrictamente menor que y”

c) $C = \mathbb{N}$
$p^{\mathbf{C}}$ es la relación binaria "x es múltiplo de y"

16. Interpretar la fórmula
$$\forall x \forall y (p(x, y) \to \neg p(y, x))$$
en la estructura **A** con
   - $A = \{0, 1, 2, 3\}$
   - $(p)^{\mathbf{A}} = \{(0, 0), (0, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

17. La hipótesis del *Lema de Coincidencia* es suficiente, pero no necesaria. Para demostrarlo, dar una fórmula φ en un lenguaje **L**, una **L**-estructura **A** y asignaciones s_1 y s_2 de V en **A** tales que si W_φ es el conjunto de símbolos de variable que ocurren libremente en φ, sea $s_1 \upharpoonright W_\varphi \neq s_2 \upharpoonright W_\varphi$ y sin embargo $I_A^{s_1}(\varphi) = I_A^{s_2}(\varphi)$.

18. Considere las fórmulas de primer orden:

   a) $\exists x \exists y (r(x, x) \wedge \neg r(y, y))$
   b) $\neg \exists x p(x) \wedge \neg \forall y (\exists z p(z) \to p(y))$
   c) $\neg \exists p(x) \wedge \exists x q(x) \wedge \forall x (p(x) \to q(x))$
   d) $\exists x p(x) \wedge \neg \exists y q(y) \wedge \forall z (p(z) \to q(z))$
   e) $(\exists x p(x) \wedge \exists x q(x)) \to \exists x (p(x) \wedge q(x))$
   f) $\exists x \forall y r(x, y) \to \forall y \exists x r(x, y)$
   g) $\forall x r(x, f(x)) \wedge \exists x \forall y \neg r(x, y)$
   h) $(\exists x p(x) \wedge \exists x \neg r(x, x)) \to \exists x (p(x) \wedge \neg r(x, x))$
   i) $\forall x \exists y r(x, y) \wedge \forall y \neg r(c, y)$

   y decida en cada caso si la fórmula es universalmente válida, contradicción o contingente (simultáneamente satisfacible y refutable).

5.4. Forma Normal Prenexa

En esta sección se trata de estudiar como proceder cuando la sustitución de un símbolo de variable por un término no es posible y, sin embargo, persiste la necesidad de llevarla a cabo.

Lema 5.4.1. *Sea* **L** *un lenguaje y* $\alpha, \alpha' \in \mathrm{Form}(\mathbf{L})$. *Si* $\alpha = \alpha'$ *entonces* $\neg\alpha = \neg\alpha'$.

Lema 5.4.2. *Sea* **L** *un lenguaje y* $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \mathrm{Form}(\mathbf{L})$. *Entonces:*

1. *Si* $\models \alpha' \to \alpha$ *y* $\models \beta \to \beta'$, *entonces* $\models (\alpha \to \beta) \to (\alpha' \to \beta')$
2. *Si* $\alpha = \alpha'$ *y* $\beta = \beta'$, *entonces* $(\alpha \to \beta) = (\alpha' \to \beta')$

Definición 5.4.1. Sea **L** un lenguaje, x un símbolo de variable, t y u términos y φ una fórmula. Definimos u_t^x como sigue:

$$u_t^x \equiv \begin{cases} a, & \text{si } u \equiv a \\ t, & \text{si } u \equiv x \\ y, & \text{si } u \equiv y \text{ e } y \not\equiv x \\ f((t_1)_t^x, \ldots, (t_n)_t^x), & \text{si } u \equiv f(t_1, \ldots, t_n) \end{cases}$$

Definimos φ_t^x como sigue:

Al transformar ese conjunto en cláusulas (pasando a forma prenexa y luego a forma de Skolem) obtenemos las siguientes:

$$\begin{aligned}
&\neg p(x) \vee p(y) \\
&p(x) \vee q(x) \\
&\neg p(a) \\
&\neg p(b)
\end{aligned}$$

La puesta en forma de Skolem ha introducido dos símbolos de constante: a y b, por ello y por no encontrar en las cláusulas signo de función alguno el universo de Herbrand es el conjunto finito $\{a, b\}$. Así el conjunto de sus instancias básicas tiene ocho elementos (¿cuáles?), pero basta con considerar el siguiente subconjunto suyo:

$$\{p(a) \vee q(a), \neg q(a), \neg p(a) \vee p(b), \neg p(b)\}$$

que por el *método de Davis y Putnam* sabemos que es insatisfacible. Por el Teorema 5.5.1, el Corolario 5.2.2 y el Teorema de Herbrand deducimos que la pregunta inicial tiene respuesta afirmativa.

Ejemplo 5.6.6. Sea el conjunto de cláusulas $\Sigma = \{\neg p(x) \vee q(f(x), x), p(g(b)), \neg q(y, z)\}$. Uno de los conjuntos insatisfacibles de instancias básicas de cláusulas de Σ es

$$\Sigma' = \{\neg p(g(b)) \vee q(f(g(b)), g(b)), p(g(b)), \neg q(f(g(b)), g(b))\}$$

Ejemplo 5.6.7. Sea el conjunto de cláusulas

$$\begin{aligned}
\Sigma = \{&\neg p(x, y, u) \vee \neg p(y, z, v) \vee \neg p(x, v, w) \vee p(u, z, w), \\
&\neg p(x, y, u) \vee \neg p(y, z, v) \vee \neg p(u, z, w) \vee p(x, v, w), \\
&p(g(x, y), x, y), p(x, h(x, y), y), \\
&p(x, y, f(x, y)), \neg p(k(x), x, k(x))\}.
\end{aligned}$$

Uno de los conjuntos insatisfacibles de instancias básicas de cláusulas de Σ es

$$\begin{aligned}
\Sigma' = \{&p\big(a, h(a, a), a\big), \\
&p\big(g(a, k(h(a, a))), a, k(h(a, a))\big), \\
&\neg p\big(k(h(a, a)), h(a, a), k(h(a, a))\big), \\
&\neg p\big(g(a, k(h(a, a))), a, k(h(a, a))\big) \vee \neg p\big(a, h(a, a), a\big) \\
&\vee \neg p\big(g(a, k(h(a, a))), a, k(h(a, a))\big) \vee p\big(k(h(a, a)), h(a, a), k(h(a, a))\big)\}.
\end{aligned}$$

5.7. Ejercicios sobre Forma Prenexa

1. Demuestre el Teorema 5.4.7 y además que:

   a) $\forall x\alpha \wedge \forall x\beta = \forall x(\alpha \wedge \beta)$

   b) $\exists x\alpha \vee \exists x\beta = \exists x(\alpha \vee \beta)$

   c) $\neg\forall x\alpha = \exists x\neg\alpha$

   d) $\neg\exists x\alpha = \forall x\neg\alpha$

   Demuestre también que es imprescindible la condición “x no ocurre libremente en α” en la primera parte del ejercicio.

2. Sea $\mathbf{L}$ un lenguaje, α una fórmula de $\mathbf{L}$ y x un símbolo de variable. Demostrar que si y es un símbolo de variable tal que $y \neq x$ e $y \notin \mathrm{lib}(\alpha)$ entonces:

    a) $\forall x\alpha = \forall y \alpha^x_y$
    b) $\exists x\alpha = \exists y \alpha^x_y$

3. Demostrar que:

    a) $\models (\forall x\alpha \vee \forall x\beta) \to \forall x(\alpha \vee \beta)$
    b) $\models \exists x(\alpha \wedge \beta) \to (\exists x\alpha \wedge \exists x\beta)$

    pero que en general **no** son ciertas las afirmaciones:

    a) $\models \forall x(\alpha \vee \beta) \to (\forall x\alpha \vee \forall x\beta)$
    b) $\models (\exists x\alpha \wedge \exists x\beta) \to \exists x(\alpha \wedge \beta)$

4. Encontrar una fórmula en forma prenexa cuya matriz esté expresada como conjunción de disyunciones de literales y que sea lógicamente equivalente a las siguientes:

    a) $\big(\forall x\exists y p(x,y) \wedge \big(\exists y q(y) \to q(a)\big)\big) \vee \forall y\big(\exists y\forall x p(x,y) \vee \exists z p(y,a)\big)$
    b) $\big(\forall x(r(x) \vee \exists y\forall x p(x,y)) \vee \exists x q(x,y)\big) \wedge \big(\exists z r(z) \to \forall x(r(x) \wedge \forall x p(x,a))\big)$
    c) $\forall x p(x,y) \to \big(\forall y p(y,x) \to \forall x(q(x) \wedge \exists y\forall z r(a,y,z))\big)$
    d) $(\forall x p(a,x) \vee \forall x p(x,a)) \to \big(\forall z p(x,z) \wedge \forall w\forall y(p(a,y) \to \exists z q(z))\big)$
    e) $\forall x\forall z\big((\forall z p(x,z) \wedge \forall x p(x,z)) \to \forall x(\exists y p(x,y) \vee \forall x q(x))\big)$
    f) $\big(\forall w(\forall x r(x,w) \to (\forall x p(x) \to \exists x(q(x) \vee p(w))))\big) \wedge \forall z(p(z) \vee \exists z q(z))$
    g) $\forall x\big(r(x) \wedge \neg\exists x(p(x) \to \exists y q(f(y),x))\big) \wedge \forall w\exists z\big(q(z,a) \vee p(w) \vee (\forall y p(f(y)) \to q(x,z))\big)$
    h) $\big(\forall y p(x,y) \to \exists x r(x)\big) \wedge \neg\exists x\big((\forall y r(y)) \wedge \neg p(x,a)\big) \wedge \forall x\big((\exists y p(x,y)) \vee r(x)\big)$

5. Repetir el ejercicio 4 dando un resultado con el número mínimo de cuantificadores, y ellos óptimamente situados en el preámbulo de la nueva fórmula.

6. Para cada fórmula obtenida en el ejercicio ejercicio 4, encontrar una fórmula de Skolem asociada.

7. Dada una fórmula en forma prenexa y una fórmula de Skolem asociada a ella. ¿Están ambas expresadas en el mismo lenguaje de primer orden? ¿Qué relación existe entre ambas?

8. Dado el conjunto de cláusulas:

    - $\neg p(x) \vee r(f(x))$
    - $\neg p(x) \vee q(x, f(x))$
    - $p(a)$
    - $\neg q(x,y)$

    expresar el universo de Herbrand, la base de Herbrand y el sistema de Herbrand.

9. Sea el conjunto de cláusulas

$$\begin{aligned}\Sigma = \{&\neg p(x,y,u) \vee \neg p(y,z,v) \vee \neg p(x,v,w) \vee p(u,z,w),\\ &\neg p(x,y,u) \vee \neg p(y,z,v) \vee \neg p(u,z,w) \vee p(x,v,w),\\ &p(g(x,y),x,y), p(x,h(x,y),y),\\ &p(x,y,f(x,y)), \neg p(k(x),x,k(x))\}.\end{aligned}$$

    Usar el *Teorema de Herbrand*, combinado con el algoritmo de Davis-Putnam, para demostrar que es insatisfacible.