Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Cálculo I – Examen Convocatoria Ordinaria - Enero 2021

1. (1,5 puntos) Sean A y B conjuntos no vacíos de números reales positivos; se supone que A está mayorado y $\alpha = \sup(A) < \beta = \inf(B)$. Definamos:

$$C = \left\{ \frac{c}{b-a} : a \in A, c \in A, b \in B \right\}$$

Prueba que $\sup(C) = \dfrac{\alpha}{\beta - \alpha}$.

2. a) (1 punto) Calcula el límite de la sucesión:

$$x_n = \frac{\frac{1}{2\log 2} + \frac{1}{3\log 3} + \cdots + \frac{1}{n \log n}}{\log(\log(n+1))}$$

b) (1 punto) Estudia la convergencia de la serie:

$$a) \sum_{n \geqslant 1} \frac{5^n n!}{\sqrt[4]{n}\, 9 \cdot 14 \cdot 19 \cdots (4+5n)}$$

3. (1 punto) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y creciente. Prueba que para todo conjunto $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y mayorado se verifica que $\sup(f(A)) = f(\sup(A))$.

   Debes hacer este ejercicio de dos formas: una usando sucesiones, y otra usando la definición $\varepsilon - \delta$ de continuidad.

4. Explica si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas. Cuando sean ciertas indica el resultado de teoría que lo justifica o proporciona una prueba y, cuando sean falsas indica un contraejemplo.

   a) (0,5 puntos) Una sucesión no acotada no puede tener una sucesión parcial convergente.

   b) (0,5 puntos) Toda sucesión tiene una sucesión parcial convergente o una sucesión parcial divergente.

   c) (0,5 puntos) Si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función inyectiva, I es un intervalo y $J = f(I)$ es un intervalo entonces su función inversa f^{-1} es continua en J.

   d) (0,5 puntos) Si $f : A \to \mathbb{R}$ es una función inyectiva, $f(A)$ es un intervalo, y f^{-1} es continua, entonces f es continua.

5. (3,5 puntos) Escribir sobre uno de los siguientes temas:

   a) Teorema de complitud de $\mathbb{R}$. Límites superior e inferior.

   b) Series absolutamente convergentes y series conmutativamente o incondicionalmente convergentes. Series alternadas. Criterio de Leibniz.

   c) Continuidad y monotonía.