ÁLGEBRA 1 CURSO 20-21

DOBLE GRADO MATEMÁTICAS INFORMÁTICA **RELACIÓN DE EJERCICIOS 7**

7.1. En el anillo $\mathbb{Z}[i]$, calcular cociente y resto de dividir $1 + 15i$ entre $3 + 5i$.

7.2. En el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$, calcular

$$mcd(2 - 3\sqrt{-2}, 1 + \sqrt{-2}), \; mcm(2 - 3\sqrt{-2}, 1 + \sqrt{-2}).$$

7.3. En $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$, calcular $mcd(3 + \sqrt{3}, 2)$ y $mcm(3 + \sqrt{3}, 2)$.

7.4. Determinar, si existe, un polinomio $p(X) \in \mathbb{Z}_3[X]$ tal que

$$(2X^2 + X + 2)p(X) = 2X^7 + X^6 + 2X^4 + 2.$$

7.5. Demostrar las reglas del 2,3,5 y 11 para la división.

7.6. Demuestra que si $3|a^2 + b^2$, entonces $3|a$ y $3|b$.

7.7. Demuestra que para todo $n \in \mathbb{N}$:

a) $3^{2n} - 2^n$ es divisible por 7, b) $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ es divisible por 7,

c) $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ es divisible por 11, d) $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ es divisible por 17.

7.8. Resolver en $\mathbb{Z}$ las ecuaciones

$$60x + 36y = 12, \qquad 35x + 6y = 8, \qquad 12x + 18y = 11.$$

7.9. Calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo, en el anillo $\mathbb{R}[X]$, de los polinomios $X^3 - 2X^2 - 5X + 6$ y $X^3 - 3X^2 - X + 3$. Resolver la siguiente ecuación en el anillo $\mathbb{R}[x]$,

$$(X^3 - 2X^2 - 5X + 6)p(X) + (X^3 - 3X^2 - X + 3)g(X) = X^3 - 6X^2 + 11X - 6.$$

7.10. Calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo, en el anillo $\mathbb{Z}_3[X]$, de los polinomios $X^4 + X^3 - X - 1$ y $X^5 + X^4 - X - 1$. Encontrar todos los polinomios $p(X)$ y $g(X)$ en $\mathbb{Z}_3[X]$, con grado de $g(X)$ igual a 7, tales que

$$(X^4 + X^3 - X - 1)p(X) + (X^5 + X^4 - X - 1)g(X) = X^4 + X^2 + 1.$$

7.11. Resolver la siguiente ecuación en el anillo $\mathbb{Z}[i]$, se verifique la ecuación

$$(-2+3i)x+(1+i)y=1+11i.$$

7.12. Resolver la siguiente ecuación en el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$:

$$(4+\sqrt{2})x+(6+4\sqrt{2})y=\sqrt{2}.$$

7.13. En el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$, resolver la congruencia

$$(1+\sqrt{3})x \equiv 9-4\sqrt{3} \operatorname{mod}(2\sqrt{3})$$

7.14. Determinar todos los polinomios $f(X) \in \mathbb{Z}_5[X]$ tales que

$$(X^4+3X^3+2X^2+3X+1)f(X) \equiv X^4-2X^3-X+2 \mod(X^3+3X^2+4X+2).$$

7.15. Discutir y resolver los sistemas de congruencias:

$$\left\{\begin{array}{rcll} 5x & \equiv & 1 & (\bmod \ 14) \\ 11x & \equiv & 10 & (\bmod \ 16) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcll} 5x & \equiv & 1 & (\bmod \ 14) \\ 11x & \equiv & 13 & (\bmod \ 16) \end{array}\right.$$

7.16. Calcular la menor solución positiva del sistema de congruencias

$$\left\{\begin{array}{rcll} 3x & \equiv & 1 & (\bmod \ 4) \\ 2x & \equiv & 2 & (\bmod \ 5) \\ x & \equiv & -1 & (\bmod \ 3) \end{array}\right.$$

7.17. Una banda de 13 piratas se reparten N monedas de oro, pero le sobran 8. Dos mueren, las vuelven a repartir y sobran 3. Luego 3 se ahogan y sobran 5. ¿Cuál es la mínima cantidad posible N de monedas?

7.18. En el anillo $\mathbb{Z}[i]$, resolver el siguiente sistema de congruencias

$$\left\{\begin{array}{rcll} x & \equiv & i & \operatorname{mod}(3) \\ x & \equiv & 1+i & \operatorname{mod}(3+2i) \\ x & \equiv & 3+2i & \operatorname{mod}(4+i) \end{array}\right.$$

7.19. Determinar los polinomios $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ de grado menor o igual que tres que satisfacen el sistema de congruencias

$$\begin{array}{rcll} f(X) & \equiv & X-1 & \operatorname{mod}(X^2+1) \\ f(X) & \equiv & X+1 & \operatorname{mod}(X^2+X+1) \end{array}$$

7.20. Probar el Teorema de Ruffini: *Si* $f(X) \in A[X]$, *para cualquier* $a \in A$, $f(a)$ *es igual al resto de dividir* $f(X)$ *entre* $(X - a)$.

7.21. Encontrar un polinomio $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ de grado 3 tal que: $f(0) = 6$, $f(1) = 12$ y $f(X) \equiv (3X + 3) \operatorname{mod}(X^2 + X + 1)$.

7.22. Determinar todos los polinomios $f(X) \in \mathbb{Z}_2[X]$ de grado menor o igual que 4, tales que: 1) el resto de dividir $f(X)$ entre $X^2 + 1$ es X, 2) el resto de dividir $Xf(X)$ entre $X^2 + X + 1$ es $X + 1$, y 3) $f(1) = 1$.

7.23. Calcular el resto de dividir 279^{323} entre 17.

7.24. Calcular las dos últimas cifras de $3^{3^{100}}$.

7.25. Resolver, si es posible, la congruencia $43^{51}\, x \equiv 2 \pmod{36}$.

7.26. Estudiar si $[5]^{10077}$ es una unidad de $\mathbb{Z}_{38808}$. Calcular su inverso en caso de que lo tenga.