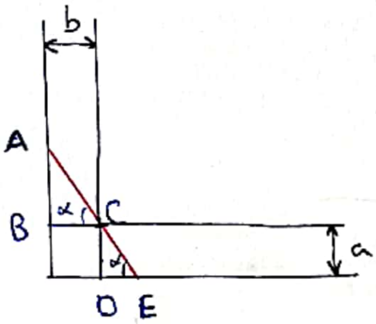
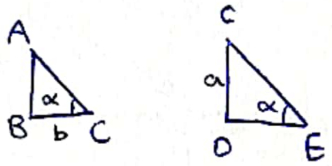
2.13 ¿Cuál es la longitud de la barra más larga que puede hacerse pasar horizontalmente a través de la esquina en ángulo recto, que forman dos corredores de anchuras respectivas a y b?





$\cos\alpha = \frac{b}{\overline{AC}}$ $\quad \overline{AC} = \frac{b}{\cos\alpha}$

$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{\overline{CE}}$ $\quad \overline{CE} = \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}$

$$L = \overline{AC} + \overline{CE}$$

$$L(\alpha) = \frac{b}{\cos\alpha} + \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} \quad (0 < \alpha < \pi/2)$$

$$L'(\alpha) = \frac{-b(-\operatorname{sen}\alpha)}{\cos^2\alpha} + \frac{-a\cos\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} = 0$$

$$\frac{b\operatorname{sen}\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{a\cos\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}$$

$$\frac{\operatorname{sen}^3\alpha}{\cos^3\alpha} = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{tg}^3\alpha = \frac{a}{b} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$$

- Obtenemos así que $L'(\alpha)$ se anula en un único punto $\alpha \in]0, \pi/2[$ que viene dado por la condición $\operatorname{tg}(\alpha) = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$

- Como $L'(\alpha)$ es continua y no se anula en los intervalos $]0, \alpha[$ y $]\alpha, \pi/2[$ y como $\lim_{x\to 0} L'(\alpha) = -\infty$ y $\lim_{x\to\pi/2} L'(\alpha) = +\infty$ sabemos que L debe tener un mínimo absoluto.

***no es necesario calcular los limites

$$\alpha \in]0, \alpha_0[\rightarrow L'(\alpha) < 0$$

$$\alpha \in]\alpha_0, \pi/2[\rightarrow L'(\alpha) > 0 \quad \text{por tanto,}$$

L es estrictamente decreciente en $]0, \alpha_0[$ y estrictamente creciente en $]\alpha_0, \pi/2[$ lo que implica que $L(\alpha_0) \leq L(\alpha)$ para todo $\alpha \in]0, \pi/2[$.

- Calcularemos la longitud mínima $L(\alpha)$

$$1 + tg^2(\alpha_0) = \frac{1}{\cos^2(\alpha_0)} = 1 + \sqrt[3]{\left(\frac{a}{b}\right)^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{a^{2/3} + b^{2/3}}{b^{2/3}} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$a^{2/3} + b^{2/3} = \frac{(b^{1/3})^2}{(\cos(\alpha_0))^2}$$

$$\left(\sqrt{a^{2/3} + b^{2/3}}\right)^{\cancel{2}} = \frac{(b^{1/3})^{\cancel{2}}}{(\cos(\alpha_0))^{\cancel{2}}}$$

$$\left(a^{2/3} + b^{2/3}\right)^{1/2} = \frac{\cancel{b}^{2/3} \cdot b^{1/3}}{\cancel{b}^{2/3} \cos(\alpha_0)}$$

$$\frac{b}{\cos(\alpha_0)} = b^{2/3}\left(a^{2/3} + b^{2/3}\right)^{1/2}$$

se obtiene igual:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}(\alpha_0)} = a^{2/3}\left(a^{2/3} + b^{2/3}\right)^{1/2}$$

con lo que la longitud máxima de la barra viene dada por

$$\boxed{L(\alpha_0) = \left(a^{2/3} + b^{2/3}\right)^{3/2}}$$