**TOPOLOGÍA. Examen del Tema 4**

**Nombre:**

1. Sea el conjunto $X = \{a, b, c, d, e\}$ y $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$. Estudiad la conexión de $(X, \tau)$ y $A = \{b, d, e\}$.
2. Probad que un subconjunto no vacío, conexo, abierto y cerrado de un espacio topológico es una componente conexa de dicho espacio.
3. Estudiad si $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}) \setminus \{p\}$ es arcoconexo.
4. Estudiad la conexión local de $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$.

1. Sea el conjunto $X = \{a, b, c, d, e\}$ y $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$. Estudiad la conexión de $(X, \tau)$ y $A = \{b, d, e\}$.

   *Solución:* Como $X = \{a\} \cup \{b, c, d, e\}$, $X$ no es conexo. Por otro lado, $\tau_{|A} = \{A, \emptyset, \{d\}, \{d, e\}\}$. Por tanto, dos abiertos no triviales siempre se intersecan, luego $A$ es conexo.

2. Probad que un subconjunto no vacío, conexo, abierto y cerrado de un espacio topológico es una componente conexa de dicho espacio.

   *Solución:* Sea $A$ un conjunto con dichas propiedades y $x \in A$. Probamos que $A = C_x$. Como $A$ es conexo, $A \subset C_x$. Por otro lado, $C_x = (C_x \cap A) \cup (C_x \cap (X \setminus A))$ es una partición por abiertos, luego $C_x \cap A = C_x$ ($\Rightarrow C_x \subset A$, luego $A = C_x$) o $C_x \cap A = \emptyset$ (imposible, ya que $A \subset C_x$).

3. Estudiad si $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}) \setminus \{p\}$ es arcoconexo.

   *Solución:* Después de una afinidad podemos suponer que $X = (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}) \setminus \{(0, 1, 0)\}$. Probamos que todo punto se puede unir por un conjunto arcoconexo $A$ con el punto $q = (0, -1, 0)$. Sea $(x, y, z) \in X$.

   (a) Si $z \neq 0$, se toma $A = (\mathbb{S}^1 \times \{z\}) \cup [q, (0, -1, z)]$.

   (b) Si $z = 0$, se toma $A = (\mathbb{S}^1 \times \{0\}) \setminus \{p\}$.

4. Estudiad la conexión local de $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$.

   *Solución:* El punto 0 no tiene ningún entorno conexo, ya que si $U$ es un entorno conexo de 0, entonces $U$ tiene que ser un intervalo. Como en $X$ los únicos intervalos que existen son los puntos, entonces $U = \{0\}$. Pero $U$ no es un entorno de 0 pues la inclusión $(-r, r) \cap A \subset U = \{0\}$ no es posible, para cada $r > 0$.

**TOPOLOGÍA. Examen del Tema 4**

**Nombre:**

1. Sea el conjunto $X = \{a, b, c, d, e\}$ y $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$. Estudiad la conexión de $(X, \tau)$ y $A = \{b, d, e\}$.
2. Probad que un subconjunto no vacío, conexo, abierto y cerrado de un espacio topológico es una componente conexa de dicho espacio.
3. Estudiad si $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}) \setminus \{p\}$ es arcoconexo.
4. Estudiad la conexión local de $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$.

1. Sea el conjunto $X = \{a, b, c, d, e\}$ y $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$. Estudiad la conexión de $(X, \tau)$ y $A = \{b, d, e\}$.

   *Solución:* Como $X = \{a\} \cup \{b, c, d, e\}$, $X$ no es conexo. Por otro lado, $\tau_{|A} = \{A, \emptyset, \{d\}, \{d, e\}\}$. Por tanto, dos abiertos no triviales siempre se intersecan, luego $A$ es conexo.

2. Probad que un subconjunto no vacío, conexo, abierto y cerrado de un espacio topológico es una componente conexa de dicho espacio.

   *Solución:* Sea $A$ un conjunto con dichas propiedades y $x \in A$. Probamos que $A = C_x$. Como $A$ es conexo, $A \subset C_x$. Por otro lado, $C_x = (C_x \cap A) \cup (C_x \cap (X \setminus A))$ es una partición por abiertos, luego $C_x \cap A = C_x$ ($\Rightarrow C_x \subset A$, luego $A = C_x$) o $C_x \cap A = \emptyset$ (imposible, ya que $A \subset C_x$).

3. Estudiad si $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}) \setminus \{p\}$ es arcoconexo.

   *Solución:* Después de una afinidad podemos suponer que $X = (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}) \setminus \{(0, 1, 0)\}$. Probamos que todo punto se puede unir por un conjunto arcoconexo $A$ con el punto $q = (0, -1, 0)$. Sea $(x, y, z) \in X$.

   (a) Si $z \neq 0$, se toma $A = (\mathbb{S}^1 \times \{z\}) \cup [q, (0, -1, z)]$.

   (b) Si $z = 0$, se toma $A = (\mathbb{S}^1 \times \{0\}) \setminus \{p\}$.

4. Estudiad la conexión local de $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$.

   *Solución:* El punto 0 no tiene ningún entorno conexo, ya que si $U$ es un entorno conexo de 0, entonces $U$ tiene que ser un intervalo. Como en $X$ los únicos intervalos que existen son los puntos, entonces $U = \{0\}$. Pero $U$ no es un entorno de 0 pues la inclusión $(-r, r) \cap A \subset U = \{0\}$ no es posible, para cada $r > 0$.

**TOPOLOGÍA. Examen del Tema 4**
- Licenciatura de Matemáticas. GRUPO $2^0$ A -
Curso 2010/11
Profesor: Rafael López Camino

**Nombre:**

Razonar las respuestas

1. Estudiar si las siguientes parejas de conjuntos son homeomorfos entre sí:
   (a) $B_1((1,0)) \cup B_1((0,-1))$ y $\overline{B_1((1,0)) \cup B_1((-1,0))}$.
   (b) $\mathbb{S}^1((1,0))$ y $\mathbb{S}^1((1,0)) \cup \mathbb{S}^1((-1,0))$.
2. Estudiar las componentes conexas y la conexión local del siguiente conjunto de $\mathbb{R}^2$: $X = ([0,1] \times \{0\}) \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{(1, \frac{1}{n})\}$.
3. Estudiar la conexión local y las componentes conexas del siguiente conjunto de $\mathbb{R}^2$: $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 - y^2 = 1\}$.

1. Estudiar si las siguientes parejas de conjuntos son homeomorfos entre sí:

   (a) $B_1((1,0)) \cup B_1((0,-1))$ y $\overline{B_1((1,0)) \cup B_1((-1,0))}$.

   (b) $\mathbb{S}^1((1,0))$ y $\mathbb{S}^1((1,0)) \cup \mathbb{S}^1((-1,0))$.

   *Solución.*

   (a) El primer espacio $X$ no es conexo pues $X = B_1((1,0)) \cup B_1((0,-1))$ es una partición por abiertos no trivial. El segundo espacio $Y$ es conexo, ya que $\overline{B_1((1,0)) \cup B_1((-1,0))} = \overline{B_1((1,0))} \cup \overline{B_1((-1,0))}$ es unión de dos conexos (son convexos) con intersección no trivial (el punto $(0,0)$).

   (b) Si fueran homeomorfos, sea $f : \mathbb{S}^1((1,0)) \to \mathbb{S}^1((1,0)) \cup \mathbb{S}^1((-1,0))$ un homeomorfismo. Entonces,

   $$f_{|\mathbb{S}^1((1,0))-\{f^{-1}(0,0)\}} : \mathbb{S}^1((1,0))-\{f^{-1}(0,0)\} \to \mathbb{S}^1((1,0))\cup\mathbb{S}^1((-1,0))-\{(0,0)\}$$

   sería también un homeomorfismo. Pero el dominio es homeomorfo a $\mathbb{R}$, por tanto, conexo; pero el codominio no es conexo al tener la siguiente partición no trivial por abiertos:

   $$Z := \mathbb{S}^1((1,0))\cup\mathbb{S}^1((-1,0))-\{(0,0)\} = (Z\cap\{(x,y); x>0\})\cup(Z\cap\{(x,y); x<0\}.$$

2. Estudiar las componentes conexas y la conexión local del siguiente conjunto de $\mathbb{R}^2$: $X = ([0,1] \times \{0\}) \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{(1, \frac{1}{n})\}$.

   *Solución.* Las componentes conexas de $X$ son $[0,1] \times \{0\}$ y los puntos $(1, \frac{1}{n})$. Para ello, cada uno de los conjuntos son conexo, ya que el primero es convexo (también es homeomorfo a $[0,1]$) y los otros son puntos. Veamos que son los conexos más grandes. Sea $(0,0) \in [0,1] \times \{0\}$ y supongamos que $[0,1] \times \{0\} \subsetneq C_{(0,0)}$. Entonces existirá $(1, \frac{1}{n}) \in C_{(0,0)} - ([0,1] \times \{0\})$. Sea $y_0 = (\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1})/2$. Se tendría la siguiente descomposición en abiertos de $C_{(0,0)}$:

   $$C_{(0,0)} = (C_{(0,0)} \cap \{(x,y); y < y_0\}) \cup (C_{(0,0)} \cap \{(x,y); y > y_0\})$$

   la cual no es trivial, pues en el primer conjunto está $(0,0)$ y en el segundo $(1, 1/n)$. Esta contradicción prueba que $[0,1] \times \{0\}$ es una componente conexa.

   Sea ahora $(1, 1/n)$ y supongamos que $\{(1, 1/n)\} \subsetneq C_{(1,1/n)}$. Entonces existirá $m \in \mathbb{N}$ tal que $(1, 1/m) \in C_{(1,1/n)}$ (no puede ser de la forma $(x, 0)$, ya que

$C_{(x,0)} = C_{(0,0)}$). Sin perder generalidad, supongamos que $m > n$. Usando la notación anterior, tendríamos una partición no trivial de $C_{(1,1/n)}$:

$$C_{(1,1/n)} = (C_{(1,1/n)} \cap \{(x,y); y < y_0\}) \cup (C_{(1,1/n)} \cap \{(x,y); y > y_0\}),$$

lo cual es una contradicción.

El espacio no es localmente conexo, ya que el punto $p := (1,0)$ no tiene ningún entorno conexo. Sea $U$ tal entorno. Entonces existirá $r > 0$ tal que $B_r(p) \cap X \subset U$. Es evidente que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(1,1/n) \in B_r(p) \cap X \subset U$. Si $U$ es conexo, entonces

$$U \subset C_p = [0,1] \times \{0\},\ U \subset C_{(1,1/n)} = \{(1,1/n)\} :$$

contradicción.

3. Estudiar la conexión local y las componentes conexas del siguiente conjunto de $\mathbb{R}^2$: $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 - y^2 = 1\}$.

   *Solución.* Se tiene la siguiente partición por abiertos de $X$:

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x < 0\}) \cup (X \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x > 0\}).$$

   Esta partición no es trivial ya que $(-1,0)$ está en el primer abierto y $(1,0)$ en el segundo.