TOPOLOGÍA. Examen del Tema 3
- Licenciatura de Matemáticas. GRUPO 2^0 B -
Curso 2007/08
Profesor: Rafael López Camino

Nombre:

1. Sean dos espacios topológicos (X_1, τ_1) y (X_2, τ_2) y $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$. Probad que $\mathcal{U}^1_{x_1} \times \mathcal{U}^2_{x_2}$ es base de entornos del punto (x_1, x_2) en la topología $\tau_1 \times \tau_2$.

2. Sean dos conjuntos X e Y y $p \in X$ y $q \in Y$. Consideramos las topologías del punto incluído τ_p y τ_q en X e Y respectivamente. Denotamos por τ la topología del punto incluído en $X \times Y$ para el punto (p, q). Comparad las topologías τ y $\tau_p \times \tau_q$.

3. Denotamos por τ_S la topología de Sorgenfrey en $\mathbb{R}$. Tomamos en $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ la topología $\tau_S \times \tau_S$. Sea $A = \{(x, -x); x \in \mathbb{R}\}$. Probad que la topología inducida en A es la topología discreta.

4. Sean (X, τ), (Y, τ') dos espacios topológicos y $A \subset X \times Y$. Para cada $x \in X$ se define $A_x = \{y \in Y; (x, y) \in A\}$. Probad que si A es abierto, entonces A_x es un abierto de Y. Dad un ejemplo en $\mathbb{R}^2$ de un subconjunto suyo A que no sea abierto pero que A_x sí lo sea para cada $x \in \mathbb{R}$.

TOPOLOGÍA. Examen del Tema 2
- Licenciatura de Matemáticas. GRUPO 2^0 B -
Curso 2007/08
Profesor: Rafael López Camino

1. Sean dos espacios topológicos (X_1, τ_1) y (X_2, τ_2) y $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$. Probad que $\mathcal{U}^1_{x_1} \times \mathcal{U}^2_{x_2}$ es base de entornos del punto (x_1, x_2) en la topología $\tau_1 \times \tau_2$.

Solución: Consideramos $\mathcal{U}^1_{x_1} \times \mathcal{U}^2_{x_2} = \{U_1 \times U_2; U_1 \in \mathcal{U}^1_{x_1}, U_2 \in \mathcal{U}^2_{x_2}\}$. Probamos primero que $U_1 \times U_2$ es un entorno de (x_1, x_2). Para ello probamos que existe un abierto $G \in \tau_1 \times \tau_2$ tal que $(x_1, x_2) \in G \subset U_1 \times U_2$. Como U_i es entorno de x_i, existe $O_i \in \tau_i$ tal que $x_i \in O_i \subset U_i$. Tomamos $G = O_1 \times O_2$.

Sea ahora un entorno U de (x_1, x_2). Veamos que existe $U_i \in \mathcal{U}^i_{x_i}$ tal que $(x_1, x_2) \in U_1 \times U_2 \subset U$. Como U es entorno de (x_1, x_2), existe $O_i \in \tau_i$ tal que $(x_1, x_2) \in O_1 \times O_2 \subset U$. Tomamos $U_i = O_i$.

2. Sean dos conjuntos X e Y y $p \in X$ y $q \in Y$. Consideramos las topologías del punto incluído τ_p y τ_q en X e Y respectivamente. Denotamos por τ la topología del punto incluído en $X \times Y$ para el punto (p, q). Comparad las topologías τ y $\tau_p \times \tau_q$.

Solución: Si $O \in \tau_p$ y $O' \in \tau_q$, entonces el conjunto $O \times O'$ contiene al punto (p, q). En particular, $O \times O' \in \tau$. Esto prueba que $\tau_p \times \tau_q \subset \tau$. La inclusión $\tau \subset \tau_p \times \tau_q$ no es cierta. Basta con tomar $X = \{a, p\}$, $Y = X$ y $q = p$. Entonces

$$\tau = \{\emptyset, X \times X, \{(p, p)\}, \{(p, p), (a, p)\}, \{(p, p), (p, a)\}, \{(p, p), (a, a)\}, \{(p, p), (a, p), (p, a)\}\}.$$

$$\tau_p \times \tau_p = \{\emptyset, X \times X, \{(p, p)\}\}.$$

Otro ejemplo: Sea $X = Y = \mathbb{R}$, $p = 0$. Sea $G = \{(0, 0), (1, 1)\} \in \tau$. Si fuera un abierto en la topología producto, habría $O \times O'$ tal que $(1, 1) \subset O \times O' \subset G$. Como $0, 1 \in O$ y $0, 1 \in O'$, entonces $O \times O'$ tiene al menos cuatro puntos, en contradicción con que G tiene sólo dos.

3. Denotamos por τ_S la topología de Sorgenfrey en $\mathbb{R}$. Tomamos en $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ la topología $\tau_S \times \tau_S$. Sea $A = \{(x, -x); x \in \mathbb{R}\}$. Probad que la topología inducida en A es la topología discreta.

Solución: Una base de entornos de x es $\beta_x = \{[x, y), y > x\}$. Una base de entornos de $(x, -x)$ en la topología producto es $\beta_x \times \beta_{-x} = \{[x, y) \times [-x, z); y > x, z > -x\}$. Una base de entornos de $(x, -x)$ en la topología inducida es $\beta_{(x,-x)} = \{\big([x, y) \times [-x, z)\big) \cap A; y > x, z > -x\}$. Pero es evidente que

$$\big([x, y) \times [-x, z)\big) \cap A = \{(x, -x)\}.$$

Si la base de entornos de $(x, -x)$ es el conjunto formado por dicho punto, entonces la topología es la discreta.

4. Sean (X, τ), (Y, τ') dos espacios topológicos y $A \subset X \times Y$. Para cada $x \in X$ se define $A_x = \{y \in Y; (x, y) \in A\}$. Probad que si A es abierto, entonces A_x es un abierto de Y. Dad un ejemplo en $\mathbb{R}^2$ de un subconjunto suyo A que no sea abierto pero que A_x sí lo sea para cada $x \in \mathbb{R}$.

Solución: La aplicación $f : Y \to X \times Y$ dada por $f(y) = (x, y)$ es continua: $p_1 \circ f$ es constante y $p_2 \circ f$ es la identidad. Es evidente que $A_x = f^{-1}(A)$, luego es un conjunto abierto.

Para el contraejemplo: Sea $A = \{0\} \times \mathbb{R}$, que no es abierto. Entonces $A_x = \emptyset$ si $x \neq 0$ y $A_0 = \mathbb{R}$, en ambos casos, conjuntos abiertos.

TOPOLOGÍA. Examen del Tema 3
- Licenciatura de Matemáticas. GRUPO 2^0 B -
Curso 2008/09
Profesor: Rafael López Camino

Nombre:

1. Sea $\beta = \{[a,\infty); a \in \mathbb{R}\}$ y τ la topología que genera en $\mathbb{R}$. Calcular el interior del conjunto $A = \{(x,0) \in \mathbb{R};\} \cup \{(0,x); x \in \mathbb{R}\}$ en $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \tau_u \times \tau)$.
2. Sea $X = \{a,b\}$ y $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$. Hallar la adherencia del conjunto $A = \{(a,a),(b,b)\}$ en $(X \times X, \tau \times \tau)$.
3. Estudiar la continuidad de las aplicaciones $f, g : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \tau_{Sor} \times \tau_u) \to (\mathbb{R}, \tau_u)$ dadas por $f(x,y) = x$ y $g(x,y) = x + y$.

Soluciones.

1. Una base de entornos de un punto (x, y) es
$$\beta_{(x,y)} = \{(x - r, x + r) \times [y, \infty); r >\}.$$
Veamos que $int(A) = \emptyset$. Sea $(x, 0) \in A$, $x \neq 0$. Si fuera interior, existiría $r > 0$ tal que $(x - r, x + r) \times [0, \infty) \subset A$, lo cual es falso pues $(x, 1)$ está en el primer conjunto y no en el segundo.

   Sea ahora $(0, x) \in A$, con $x \neq 0$. Si fuera interior, existiría $r > 0$ tal que $(-r, r) \times [x, \infty) \subset A$, lo cual es falso también ya que $(r/2, x)$ pertenece al primer conjunto y no está en A.

   Para $(0, 0)$, y para todo $r > 0$, $(-r, r) \times [0, \infty) \subset A$, pues $(r/2, r/2)$ no está en A.

2. Una base de la topología producto es
$$\tau \times \tau = \{\emptyset, X \times X, \{a\} \times X, X \times \{a\}.$$
Una base de entornos de (a, b) es $\{X \times X, \{a\} \times X\}$. Cada uno de estos entornos interseca a $X \times X - A$ (el propio punto (a, b)) y también a A (el punto (a, a)).

   Una base de entornos de (b, a) es $\{X \times X, X \times \{a\}\}$. Cada uno de estos entornos interseca a $X \times X - A$ (el propio punto (b, a))) y también a A (el punto (a, a)).

   Por tanto, los dos puntos anteriores son adherentes, que junto con los de A da $\overline{A} = X \times X$.

   Otra forma:
$$\begin{aligned} \overline{A} &= \overline{\{(a, a)\} \cup \{(b, b)\}} = \overline{\{(a, a)\}} \cup \overline{\{(b, b)\}} \\ &= \left(\overline{\{a\}} \times \overline{\{a\}}\right) \cup \overline{\{(b, b)\}} = (X \times X) \cup \overline{\{(b, b)\}} = X \times X. \end{aligned}$$

3. La aplicación f es continua: dada la base $\beta = \{(a, b); a < b\}$,
$$f^{-1}((a, b)) = (a, b) \times \mathbb{R} \subset \tau_{Sor} \times \tau_u,$$
ya que $\tau_u \subset \tau_{Sor}$.

   Por otro lado, $g = f + p_2$, con $p_2 : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \tau_{Sor} \times \tau_u) \to (\mathbb{R}, \tau_u)$ la segunda proyección. Por el álgebra de las funciones continuas que tienen por codominio $(\mathbb{R}, \tau_u)$, g es continua.

TOPOLOGÍA. Examen del Tema 3
- Licenciatura de Matemáticas. GRUPO 2^0 A -
Curso 2010/11
Profesor: Rafael López Camino

Nombre:

Razonar las respuestas

1. Sean en $\mathbb{R}$ las topologías τ_1 y τ_2 del punto excluido para $p = 1$ y $q = 2$, respec. En $(\mathbb{R}^2, \tau_1 \times \tau_2)$, hallar el interior y la adherencia de la diagonal principal.

2. Se considera en $\mathbb{R}$ la topología τ_S que tiene por base $\beta_S = \{[a, b); a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$ y τ_d la de base $\beta_d = \{[a, \infty); a \in \mathbb{R}\}$. En el producto $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \tau_S \times \tau_d)$ probar que el conjunto $D = \{(x, x); x \in \mathbb{R}\}$ es homeomorfo a $(\mathbb{R}, \tau_S)$ y $A = \{(x, -x); x \in \mathbb{R}\}$ tiene la topología discreta.

3. Estudiar la continuidad de $f : (\mathbb{R}, \tau_S) \to (\mathbb{R}^2, \tau_u \times \tau_S)$, $f(x) = (x, x + 1)$.

1. Sean en $\mathbb{R}$ las topologías τ_1 y τ_2 del punto excluido para $p = 1$ y $q = 2$, respec. En $(\mathbb{R}^2, \tau_1 \times \tau_2)$, hallar el interior y la adherencia de la diagonal principal.

   Solución. Sea $D = \{(x, x); x \in \mathbb{R}\}$ la diagonal principal. Una base de entornos en la topología $\tau_1 \times \tau_2$ de (x, y) es

   $$\beta_{(x,y)} = \{\{x, 1\} \times \{y, 2\}\} = \{(x, y), (x, 2), (1, y), (1, 2)\}.$$

   Por tanto, una base de entornos de (x, x) es

   $$\beta_{(x,x)} = \{\{x, 1\} \times \{x, 2\}\} = \{(x, x), (x, 2), (1, x), (1, 2)\},$$

   que al menos tiene al punto $(1, 2)$ que no está en la diagonal principal. Esto quiere decir que $\{(x, x), (x, 2), (1, x), (1, 2)\} \not\subset D$ y por tanto, el interior es el vacío.

   Si (x, y) no está en la diagonal principal, entonces $x \neq y$, y por tanto, el conjunto $\{(x, y), (x, 2), (1, y), (1, 2)\}$ intersecará a D si $x = 2$ o $y = 1$. Por tanto,

   $$\overline{D} = \{(2, y); y \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, 1); x \in \mathbb{R}\}.$$

2. Se considera en $\mathbb{R}$ la topología τ_S que tiene por base $\beta_S = \{[a, b); a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$ y τ_d la de base $\beta_d = \{[a, \infty); a \in \mathbb{R}\}$. En el producto $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \tau_S \times \tau_d)$ probar que el conjunto $D = \{(x, x); x \in \mathbb{R}\}$ es homeomorfo a $(\mathbb{R}, \tau_S)$ y $A = \{(x, -x); x \in \mathbb{R}\}$ tiene la topología discreta.

   Solución.

   (a) Se define $f : D \to (\mathbb{R}, \tau_S)$ mediante $f(x, x) = x$, cuya inversa es $g : (\mathbb{R}, \tau_S) \to D$, $g(x) = (x, x)$. La aplicación g es continua, ya que al componer con la proyecciones tenemos $p \circ g = 1_R$ en $(\mathbb{R}, \tau_S)$ y $p' \circ g : (\mathbb{R}, \tau_S) \to (\mathbb{R}, \tau_d)$ es continua, pues $(p' \circ g)^{-1}([a, \infty) = [a, \infty) \in \tau_S$.
   Por otro lado, la aplicación f es continua, ya que

   $$f^{-1}([a, b)) = \{(x, x); x \in [a, b)\} = ([a, b) \times [a, \infty)) \cap D \in (\tau_S \times \tau_d)_{|D}.$$

   (b) Para $(x, -x)$ una base de entornos en A es

   $$\{([x, y) \times [-x, \infty)) \cap A; y > x\} = \{(x, -x\}.$$

3. Estudiar la continuidad de $f : (\mathbb{R}, \tau_S) \to (\mathbb{R}^2, \tau_u \times \tau_S)$, $f(x) = (x, x+1)$.

   Solución. Al componer con la primera proyección, tenemos la aplicación identidad $1_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}, \tau_S) \to (\mathbb{R}, \tau_u)$ que es continua, pues $1_{\mathbb{R}}^{-1}((a,b)) = (a,b) \in \tau_S$. Con la segunda, $(p' \circ f)^{-1}([a,b)) = [a-1, b-1)$, que está en τ_S.

TOPOLOGÍA I. Examen del Tema 3
– Grado en Matemáticas –
Curso 2011/12

Nombre:

Razonar todas las respuestas

1. Estudiar si las siguientes afirmaciones son ciertas.
   (a) $(\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$.
   (b) En un espacio (X, τ), si $A \subset X$ es conexo, también lo es $\overset{\circ}{A}$.
2. En la recta de Sorgenfrey $(\mathbb{R}, \tau_S)$, estudiar si $[0, 1]$ es conexo y si es compacto.
3. Sea $(\mathbb{N}, \tau = \{A_n; n \in \mathbb{N}\}) \cup \{\emptyset, \mathbb{N}\}$, con $A_n = \{1, \ldots, n\}$. Estudiar qué subconjuntos son conexos y cuáles son compactos.
4. Sea $O = (0, 0)$, $p_n = (1, \frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}$ y $X = \{(1, 0)\} \cup_{n=1}^{\infty} [O, p_n]$. Estudiar si es conexo y si es compacto.

Soluciones

1. (a) No son homeomorfos. Supongamos que f es un homeomorfismo entre $X = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$ e $Y = \mathbb{R}^2$. Entonces $f : X - \{(0,0)\} \to Y - \{f(0,0)\}$ es un homeomorfismo. Sin embargo el dominio no es conexo pues

$$\{(X-\{(0,0)\})\cap\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x+y > 0\}, (X-\{(0,0)\})\cap\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x+y < 0\}\}$$

es una partición no trivial del espacio. Por otro lado, $Y - \{f(0,0)\}$ es conexo (es homeomorfo a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, que lo es).

(b) No es cierto. En $\mathbb{R}^2$ consideramos $A = \overline{B_1(-1,0)} \cup \overline{B_1(1,0)}$. Este conjunto es conexo pues $B_1(\pm 1,0)$ es un convexo, su adherencia es conexa y $\overline{B_1(-1,0)} \cap \overline{B_1(1,0)} = \{(0,0\}$. Sin embargo $\overset{\circ}{A}= B_1(-1,0) \cup B_1(1,0)$, que no es conexo pues

$$\overset{\circ}{A}= (\overset{\circ}{A} \cap\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x > 0\}) \cup (\overset{\circ}{A} \cap\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x < 0\})$$

es una partición por abiertos no trivial.

2. El conjunto $[0,1]$ no es conexo, pues $[0,1] = [0,1/2) \cup [1/2,1]$ es una partición no trivial por abiertos (el conjunto $[1/2,1]$ es abierto en $[0,1]$ pues $[1/2,1] = [1/2,\infty)\cap [0,1]$).

El conjunto $[0,1]$ no es compacto, pues

$$[0,1] \subset \cup_{n\in\mathbb{N}}[0,1-\frac{1}{n}) \cup [1,2)$$

y si hubiera un subrecubrimiento finito (en el cual necesariamente estaría a $[1,2)$ pues es el único abierto que contiene a $x = 1$), se tendría

$$[0,1] \subset \cup_{i=1}^m[0,1-\frac{1}{n_i}) \cup [1,2) = [0,1-\frac{1}{k}) \cup [1,2) \quad k = \max\{n_i; 1 \leq i \leq m\}$$

lo cual no es posible.

3. Todo subconjunto B de $\mathbb{N}$ es conexo. Sea $m = \min(B)$ (que siempre existe). Como $A_n \cap B$ es vacío o contiene a m, entonces dos abiertos relativos de B y no triviales siempre se intersecan, probando que B es conexo.

Tomamos $B \subset \cup_n A_n$. Si el espacio es compacto, existe un subrecubrimiento finito: $B \subset A_{n_1} \cup \ldots \cup A_{n_m}$, pero la unión de la izquierda es A_k, con $k = \max\{n_i; 1 \leq i \leq m\}$. En particular, B es finito. Y como todo conjunto finito es compacto, se tiene que los únicos compactos de $\mathbb{N}$ son los conjuntos finitos.

4. Cada segmento es conexo y la intersección de todos es O. Por tanto $\cup_{n=1}^{\infty}[O,p_n]$ es conexo. Por otro lado, $(1,0) \in \overline{\cup_{n=1}^{\infty}[O,p_n]}$ pues $p_n \to (1,0)$. Como al añadir puntos adherentes a un conjunto conexo sigue siendo conexo, nuestro espacio es conexo.

   El conjunto no es cerrado, luego no es compacto (es evidente que el espacio está acotado: $|p| \leq 2$, para todo $p \in X$). Concretamente, $\overline{X} = X \cup ([O,(1,0)]$. Ya que sólo hay que probar que no es cerrado, observemos que $(\frac{1}{2},0)$ es adherente ya que si llamamos $q_n = (\frac{1}{2},\frac{1}{2n}) \in [O,p_n]$, entonces $q_n \to (\frac{1}{2},0)$ y $(\frac{1}{2},0) \notin X$.

TOPOLOGÍA I. Examen del Tema 3
– Grado en Matemáticas. Curso 2^0-B –
Curso 2012/13

<u>**Nombre**</u>**:**

Razonar todas las respuestas

1. Estudiar la compacidad del espacio $([-1,1],\tau)$, donde $\tau = \{O \subset [-1,1] : 0 \notin O\} \cup \{O \subset [-1,1] : (-1,1) \subset O\}$. Estudiar qué subconjuntos son compactos.

2. Probar que no son homeomorfos los siguientes pares de espacios topológicos:

   (a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ y $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

   (b) $A = (0,1)$ y $B = \{(x,x) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x,-x) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$.

   (c) $A = \mathbb{S}^1$ y $B = \mathbb{S}^1(-1,0) \cup \mathbb{S}^1(1,0)$.

3. (a) Probar que $B = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R}) - \{(0,0)\}$ tiene exactamente cuatro componentes conexas.

   (b) En un espacio (X,τ), sea $\{x_n\} \to x$. Probar que $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ es compacto.

1. El espacio es compacto. Sea $[-1,1]=\cup_{i\in I}O_i$, $O_i\in\tau$. Tomamos $i_0\in I$ tal que $0\in O_{i_0}$. Por tanto dicho abierto es del segundo tipo, es decir, $(-1,1)\subset O_{i_0}$. Sean ahora O_{i_1} y O_{i_2} los abiertos que contienen respectivamente a $x=1$ y a $x=-1$. Entonces $X=O_{i_0}\cup O_{i_1}\cup O_{i_2}$.

   Sea $A\subset[-1,1]$ y sea $A\subset\cup_{i\in I}O_i$, $O_i\in\tau$. Distinguimos casos dependiendo si $0\in A$ o $0\notin A$. En el primer caso, sea $i_0\in I$ tal que $0\in O_{i_0}$. Por tanto dicho abierto es del segundo tipo, es decir, $(-1,1)\subset O_{i_0}$. Si $A\subset(-1,1)$, dicho abierto ya recubre A, y si A tiene más puntos, son a lo más, $x=1$ o $x=-1$ (o $A=[-1,1]$ que es compacto). Sea ahora el abierto que contenga a $x=1$ o a $x=-1$, que junto a O_{i_0} recubriría, en un número finito (dos) de abiertos, el conjunto A. Esto prueba que A es compacto.

   Si $0\notin A$, sabemos de clase que $\tau_{|A}$ es la topología discreta. Por tanto, A es compacto si y sólo si A es finito.

2. (a) El conjunto A es un abierto porque es una bola. El conjunto B es cerrado porque es la adherencia de (la bola) A. Además, B es acotado (por ejemplo, por la bola de radio 2 centrada en el origen). Esto prueba que B es compacto, pero A no lo es, ya que es abierto y $\mathbb{R}^2$ es conexo.

   (b) Supongamos que existe $f:B\to A$ un homeomorfismo. Sea $O=(0,0)$. Entonces $f:B-\{O\}\to A-\{f(O)\}$ es también un homeomorfismo. El segundo conjunto no es conexo, ya que no es un intervalo de $\mathbb{R}$, concretamente: $A=(0,f(O))\cup(f(O),1)$. Pero esto es una partición por abiertos (son intervalos abiertos) y conexos (por ser intervalos). Esto prueba que $A-\{f(O)\}$ tiene exactamente dos componentes conexas.

   Veamos que $B-\{O\}$ tiene cuatros componentes conexas. Dicho conjunto se puede escribir como

   $$B-\{O\}=\{(x,x):x>0\}\cup\{(x,x):x<0\}\cup\{(x,-x):x>0\}\cup\{(x,-x):x<0\}.$$

   Cada uno de dichos subconjuntos es conexo y es un abierto en $B-\{O\}$, y tendríamos una partición del espacio por abiertos y conexos, luego serían las componentes conexas. Ya que hay cuatro, no podría ser homeomorfo al otro conjunto. El razonamiento se hace para el primer conjunto: para los otros es análogo, o si se quiere, mediante giros de 90, 180 y 270 grados de $\mathbb{R}^2$, se llevaría el primer trozo en cada uno de los otros).

Sea $C = \{(x,x) : x > 0\}$. Este conjunto es homeomorfo a $(0,\infty)$ ya que C es el grafo de la función $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$ y el dominio de esta función es $(0,\infty)$. Esto prueba que C es conexo. Para probar que es abierto en el espacio, basta darse cuenta que

$$C = ((B - \{O\}) \cap (\{(x,y) : x > 0\})) \cup ((B - \{O\}) \cap (\{(x,y) : y > 0\}))\,.$$

(c) Sea $f : B \to \mathbb{S}^1$ un homeomorfismo y $O = (0,0)$. Entonces $f : B - \{O\} \to \mathbb{S}^1 - \{f(O)\}$. El segundo espacio es homeomorfo a $\mathbb{R}$, que es conexo. El primer espacio no es conexo. Para ello basta darse cuenta de la partición por abiertos:

$$B - \{O\} = ((B - \{O\}) \cap \{(x,y) : x > 0\}) \cup ((B - \{O\}) \cap \{(x,-x) : x < 0\})\,.$$

3. (a) El razonamiento es parecido al hecho en el ejercicio 2, b). Primero escribimos:

$$B = \{(x,0) : x > 0\} \cup \{(x,0) : x < 0\} \cup \{(0,x) : x > 0\} \cup \{(0,x) : x < 0\}.$$

Cada uno de dichos subconjuntos son conexos y abiertos en B, luego son las componentes conexas. El razonamiento se hace para el primero. Sea $A = \{(x,0) : x > 0\}$. Entonces $A = (0,\infty) \times \{0\} \cong (0,\infty)$, luego es conexo. Además

$$A = (B \cap \{(x,y) : y < x\}) \cup (B \cap \{(x,y) : y > -x\}),$$

que es unión de dos abiertos de B, luego abierto en B.

(b) Sea $A \subset \cup_{i \in I} O_i$, $O_i \in \tau$. Tomamos $i_0 \in I$ tal que $x \in O_{i_0}$. Tomando este entorno de x y por la definición de convergencia de sucesiones, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in O_{i_0}$ para $n \geq m$. Para los primeros elementos de la sucesión, tomamos el abierto que contenga a cada uno de dichos elementos:

$$x_n \in O_{i_n}, n = 1, \ldots, m-1.$$

Por tanto $A \subset O_{i_0} \cup O_{i_1} \cup \ldots \cup O_{i_{m-1}}$.

TOPOLOGÍA I. Examen del Tema 3

– Grado en Matemáticas. Curso 2013/14 –

<u>**Nombre**</u>**:**

1. Probar que cada pareja de conjuntos no son homeomorfos:
   (a) $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{RP}^2$.
   (b) $A = \{(x, y) : y = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), x > 0\}$ y $B = A \cup \{(0, 0)\}$.
   (c) $A = (\{0\} \times (-1, 1]) \cup ([0, 1] \times \{0\})$ y $B = (\{0\} \times (-1, 1)) \cup ([0, 1] \times \{0\})$.
   (d) $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ y $\mathbb{S}^1 \times (0, 1)$.
2. Componentes conexas de $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ y $\mathbb{R}^2 - \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \{-1, 1\}\}$.
3. Estudiar la compacidad de $(\mathbb{R}, \tau_d)$. Caracterizar los subconjuntos compactos.
4. Sea $p \notin \mathbb{R}$. En $X = \mathbb{R} \cup \{p\}$ se considera la topología τ que tiene por base $\beta = \beta_u \cup \{(-\infty, a) \cup (b, \infty) \cup \{p\} : a < b\}$. Estudiar la conexión y compacidad de (X, τ).

`Razonar todas las respuestas`

SOLUCIONES

1. (a) $\mathbb{R}^2$ no es compacto pues no es acotado. El plano proyectivo $\mathbb{RP}^2$ es compacto al ser cociente de $\mathbb{S}^2$, que es compacto.

   (b) Si fueran homeomorfos, al quitar de B el punto $(0,0)$, se tendría que $B - \{(0,0)\} = A$ es homeomorfo a A menos un punto. El conjunto A es grafo de una función, luego homeomorfo al dominio, a saber, $(0,\infty)$, que es conexo. Si le quitamos un punto, nos queda intervalo, luego no es conexo, pero sí lo es $B - \{(0,0)\} = A$.

   (c) Supongamos que A es homeomorfo a B. Le quitamos a A dos puntos, a saber, $(0,1)$ y $(1,0)$. El conjunto que queda es conexo, pues

   $$A - \{(0,1),(1,0)\} = (\{0\} \times (-1,1)) \cup ([0,1) \times \{0\})$$

   que es unión de conexos (ambos son productos de conexos de $\mathbb{R}$) y su intersección no es vacía, pues contiene a $(0,0)$.

   Por otro lado, si a B le quitamos dos puntos, nos queda no conexo, probando que no son homeomorfos. El único punto de B que al quitarlo queda conexo es $(1,0)$. Si le quitamos otro, queda no conexo.

   (d) El espacio $\mathbb{S}^1 \times [0,1]$ es compacto al ser producto de compactos, pero si $\mathbb{S}^1 \times (0,1)$ fuera compacto, cada uno de los factores también lo sería, llegando a una contradicción pues $(0,1)$ no lo es (no es cerrado).

2. (a) Los conexos de $\mathbb{R}$ son los intervalos, luego los conexos de $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ son los intervalos incluidos en A. Pero los únicos posibles son los puntos $\{1/n\}$. Por tanto las componentes conexas son los puntos.

   (b) Sea $B = \mathbb{R}^2 - \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \{-1,1\}\}$. Se tiene que

   $$B = (\mathbb{R} \times (-\infty,-1)) \cup (\mathbb{R} \times (-1,1) \cup (\mathbb{R} \times (1,\infty)).$$

   Cada uno de los conjuntos de estas uniones es conexo porque es producto de conexos. También es abierto, al ser producto de abiertos. Hemos conseguido una partición por abiertos conexos, luego dicha partición es la de las componentes conexas.

3. El espacio no es compacto: si tomamos $\mathbb{R} = \cup_{a\in\mathbb{R}}[a,\infty)$, y si fuera compacto, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbb{R} = [a_{i_1},\infty) \cup \ldots \cup [a_{i_n},\infty)$. Pero esta unión es un intervalo de la forma $[a,\infty)$, que no es $\mathbb{R}$.

Sea $A \subset \mathbb{R}$. Tomando el mismo recubrimiento que antes, si A es compacto, se tendría

$$A \subset [a_{i_1}, \infty) \cup \ldots \cup [a_{i_n}, \infty) = [a_m, \infty), \quad m = \min\{a_{i_1}, \ldots, i_n\}.$$

Esto prueba que A está acotado inferiormente. Veamos que

$$A \text{ es compacto si y sólo si } A \text{ tiene mínimo.}$$

($\Rightarrow$) Ya sabemos que tiene ínfimo. Si dicho ínfimo α no es mínimo, consideramos

$$A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [\alpha + \frac{1}{n}, \infty).$$

Si fuera compacto, A estaría incluido en un intervalo de la forma $[\alpha + \frac{1}{m}, \infty)$ obteniendo que $\alpha + 1/n(> \alpha)$ es una cota inferior: contradicción

($\Leftarrow$) Supongamos que A está recubierto por intervalos de la base. Uno de ellos contendrá al mínimo α pues $\alpha \in A$. Esto quiere decir que $\alpha \subset [a_{i_0}, \infty)$. Como α es el mínimo, de esta inclusión se prueba que $A \subset [a_{i_0}, \infty)$, obteniendo el recubrimiento finito.

Supongamos que A está acotado inferiormente por α: $\alpha \leq a, \ \forall a \in A$.

4. Primero observemos que la topología inducida en $\mathbb{R}$ es la usual. Para ello, una base de $\tau_{|\mathbb{R}}$ es la intersección de β con $\mathbb{R}$, obteniendo: $\beta_u \cup \{(-\infty, a) \cup (b, \infty) : a < b\}$. Ya que los conjuntos $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$ son abiertos en τ_u, entonces tenemos β_u junto con abiertos de τ_u. Por tanto, la topología que genera esta familia de subconjuntos es τ_u.

   Sabemos que $(\mathbb{R}, \tau_{|\mathbb{R}}) = (\mathbb{R}, \tau_u)$ es conexo. Por otro lado, $p \in \overline{\mathbb{R}}$: basta darse cuenta de que todo elemento de la base β que contiene a p, a saber, $(-\infty, a) \cup (b, \infty) \cup \{p\}$, interseca a $\mathbb{R}$, ya que esta intersección es justamente $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$. Como p es adherente, entonces $\mathbb{R} \cup \{p\} = X$ es conexo.

   El espacio es compacto. Sea $X = \cup_{i \in I} B_i$ un recubrimiento por abiertos de β. Sea $i_0 \in I$ tal que $p \in B_{i_0}$. Por tanto, B_{i_0} es de la forma $(-\infty, a) \cup (b, \infty) \cup \{p\}$. Entonces $X - B_{i_0} = [a, b]$, que es un compacto porque la topología inducida de X es la misma que la de $\mathbb{R}$, que es la usual. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $[a, b] \subset B_{i_1} \cup \ldots \cup B_{i_n}$. Esto prueba que $X = B_{i_0} \cup B_{i_1} \cup \ldots \cup B_{i_n}$, obteniendo el recubrimiento por abiertos buscado.