Análisis Matemático II

Tema 10: Teorema Fundamental del Cálculo

Notación clásica para la integral de Lebesgue en $\mathbb{R}$

Notación

En lo que sigue fijamos un intervalo no trivial $J \subset \mathbb{R}$. Escribimos:

$\alpha = \inf J$ si J está minorado, y $\alpha = -\infty$ en otro caso.

Análogamente, $\beta = \sup J$ o $\beta = +\infty$, según que J esté mayorado o no.

Para $f \in \mathcal{L}^+(J)$, o bien $f \in \mathcal{L}_1(J)$, escribimos

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_J f$$

Para $f \in \mathcal{L}_1(J)$ también escribimos

$$\int_\beta^\alpha f(x)\,dx = -\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

y finalmente: $$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \qquad \forall\, a \in J$$

Funciones localmente integrables y relación con las integrables

Funciones localmente integrables

Una función medible $f : J \to \mathbb{R}$ es localmente integrable en J,

cuando f es integrable en todo intervalo compacto $K \subset J$,

y denotamos por $\mathcal{L}_1^{\mathrm{loc}}(J)$ al conjunto de tales funciones.

$\mathcal{L}_1^{\mathrm{loc}}(J)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(J)$ que contiene a $\mathcal{L}_1(J)$.

Si K es un intervalo compacto, se tiene obviamente $\mathcal{L}_1^{\mathrm{loc}}(K) = \mathcal{L}_1(K)$

Ejemplos y relación con las integrables

- $f : J \to \mathbb{R}$ medible y acotada $\implies$ $f \in \mathcal{L}_1^{\mathrm{loc}}(J)$
- Tomando $f(x) = 1$ para todo $x \in J$ se tiene $f \in \mathcal{L}_1^{\mathrm{loc}}(J)$,
  pero $f \in \mathcal{L}_1(J) \iff J$ está acotado
- $f : J \to \mathbb{R}$ continua $\implies$ $f \in \mathcal{L}_1^{\mathrm{loc}}(J)$
- Si $J =]0,1]$ y $\varphi(x) = 1/x \ \forall x \in J$, se tiene: $\varphi \in \mathcal{L}_1^{\mathrm{loc}}(J) \setminus \mathcal{L}_1(J)$
  No se puede definir $\varphi(0)$ para tener $\varphi \in \mathcal{L}_1^{\mathrm{loc}}\left(\overline{J}\right)$

La integral indefinida

Integral indefinida de una función localmente integrable

Dada $f \in \mathcal{L}_1^{\text{loc}}(J)$, y fijado un punto $a \in J$,

la **integral indefinida** de f con origen en a

es la función $F : J \to \mathbb{R}$ dada por: $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt \quad \forall x \in J$

Aditividad de la integral indefinida

Si $f \in \mathcal{L}_1^{\text{loc}}(J)$, para cualesquiera $a, b, c \in J$ se tiene:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Por tanto, la diferencia entre dos integrales indefinidas de f es constante

Una propiedad clave de la integral indefinida

Sea $f \in \mathcal{L}_1^{\text{loc}}(J)$ y F una integral indefinida de f.

Si f es continua en un punto $x \in J$, entonces

F es derivable en el punto x, con $F'(x) = f(x)$.

Versión elemental del teorema

Versión elemental del Teorema Fundamental del Cálculo

Sea $f : J \to \mathbb{R}$ una función continua y F una integral indefinida de f.

Entonces F es una función de clase C^1 en J,

con $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in J$.

Derivación e integración como operaciones inversas

Sea $C_a^1(J)$ el espacio vectorial formado por las funciones de J en $\mathbb{R}$, que son de clase C^1 en J y se anulan en un punto fijo $a \in J$,

y $C(J)$ el formado por las funciones continuas de J en $\mathbb{R}$.

La aplicación $\mathcal{D} : C_a^1(J) \to C(J)$ definida por $\mathcal{D}(F) = F' \quad \forall F \in C_a^1(J)$

es un operador lineal inyectivo

El teorema anterior afirma que $\mathcal{D}$ es biyectivo,

y su inverso es el operador lineal $\mathcal{I} : C(J) \to C_a^1(J)$ dado por

$$\mathcal{I}(f)(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad \forall x \in J, \ \forall f \in C(J)$$

Preparativos para la derivación de integrales

Una observación fácil sobre la integral indefinida

Si $g \in \mathcal{L}_1^{\text{loc}}(J)$ no toma valores negativos,

toda integral indefinida de g es una función creciente.

Por tanto, si $f \in \mathcal{L}_1^{\text{loc}}(J)$ y $F : J \to \mathbb{R}$ es una integral indefinida de f,

entonces F se expresa como diferencia de dos funciones crecientes,

luego F tiene variación acotada en cada intervalo compacto $K \subset J$.

Un teorema de Fubini sobre series de funciones

En lo que sigue fijamos un intervalo compacto $K = [a,b] \subset \mathbb{R}$ con $a < b$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : K \to \mathbb{R}$ una función creciente,

supongamos que la serie $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge puntualmente en K,

y denotemos por $f : K \to \mathbb{R}$ a su suma. Se tiene entonces:

$$f\,'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \qquad \text{p.c.t. } x \in K$$

Derivación de integrales

Forma en que se usa el teorema anterior

Sea $\varphi : K \to \mathbb{R}_0^+$ una función integrable

y $\{\varphi_n\}$ una sucesión de funciones medibles positivas,

que converja a φ puntualmente en K. Escribimos:

$$\Phi(x) = \int_a^x \varphi(t)\,dt \quad \text{y} \quad \Phi_n(x) = \int_a^x \varphi_n(t)\,dt \quad \forall x \in K\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Suponiendo que, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene $\Phi_n'(x) = \varphi_n(x)$ p.c.t. $x \in K$,

entonces también se tiene: $\Phi'(x) = \varphi(x)$ p.c.t. $x \in K$.

Teorema de derivación de integrales

Dado un intervalo no trivial $J \subset \mathbb{R}$,

sea $F : J \to \mathbb{R}$ cualquier integral indefinida de una función $f \in \mathcal{L}_1^{\text{loc}}(J)$.

Entonces F es derivable casi por doquier en J con

$F'(x) = f(x)$ p.c.t. $x \in J$.

Una consecuencia de la continuidad absoluta de la integral

Motivación

Si $f \in \mathcal{L}_1(K)$, la integral de f es absolutamente continua:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \; : \; E \in \mathcal{M}, \; E \subset K, \; \lambda(E) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \int_E |f| < \varepsilon$$

Si F es cualquier integral indefinida de f,

vemos que F es (uniformemente) continua en K. Pero más aún:

Si $n \in \mathbb{N}$ y $\big\{]a_k, , b_k[\; : \; k \in \Delta_n \big\}$ es una familia de intervalos abiertos

no vacíos, dos a dos disjuntos, contenidos en K y con $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$,

entonces se tiene: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \Big| F(b_k) - F(a_k) \Big| < \varepsilon$

Funciones absolutamente continuas

Definición

Una función $F : K \to \mathbb{R}$ es absolutamente continua cuando

para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ verificando la siguiente condición:

si $n \in \mathbb{N}$ y $\{]a_k, , b_k[\, : \, k \in \Delta_n \}$ es una familia de intervalos abiertos

no vacíos, dos a dos disjuntos y contenidos en K, se tiene:

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{k=1}^{n} \left| F(b_k) - F(a_k) \right| < \varepsilon$$

Aditividad de la variación total

Para toda partición $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\} \in \Pi(a,b)$

y toda función $F : K \to \mathbb{R}$ se tiene: $V(F;a,b) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} V(F;x_{k-1},x_k)$

Relaciones con otros tipos de funciones

- Toda función absolutamente continua $F : K \to \mathbb{R}$ es de variación acotada
- Toda función lipschitziana $F : K \to \mathbb{R}$ es absolutamente continua

Una aclaración conveniente

Funciones definidas casi por doquier

$$\Omega \in \mathcal{M}, \quad E \subset \Omega, \quad \lambda(\Omega \setminus E) = 0, \quad Y \text{ espacio topológico,}$$

$$f : E \to Y, \quad g : \Omega \to Y \text{ extensión de } f, \quad A \in \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(\Omega).$$

Se dice que f está definida casi por doquier en Ω

- f medible $\iff$ g medible
- Cuando $Y = [0, \infty]$: $\displaystyle\int_{A \cap E} f = \int_A g$
- Cuando $Y = \mathbb{R}$: $f \in \mathcal{L}_1(A \cap E) \iff g \in \mathcal{L}_1(A)$

  en cuyo caso: $\displaystyle\int_{A \cap E} f = \int_A g$

A efectos de integración, podemos sustituir f por cualquier extensión g, olvidar el conjunto E y trabajar con f como si estuviera definida en Ω

Por ejemplo: $f \in \mathcal{L}_1(\Omega) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} g \in \mathcal{L}_1(\Omega)$ en cuyo caso $\displaystyle\int_\Omega f \overset{\text{def}}{=} \int_\Omega g$

Integración de derivadas

Una observación sencilla

Toda función de variación acotada $F : K \to \mathbb{R}$ es medible

Invariancia por traslaciones de la integral

Fijado $c \in \mathbb{R}$, sea $H = K + c$ y $f \in \mathcal{L}_1(H)$.

Consideremos la función $g : K \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = f(x+c) \quad \forall x \in K$.

Entonces, g es integrable en K y su integral coincide con la de f en H:

$$\int_a^b f(x+c)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x)\,dx$$

Teorema de integración de derivadas

Dado un intervalo no trivial $J \subset \mathbb{R}$, supongamos que una función $F : J \to \mathbb{R}$ tiene variación acotada en cada intervalo compacto $K \subset J$.

Entonces F' es localmente integrable en J.

Dos resultados previos y un caso particular

Continuidad creciente de la medida exterior de Lebesgue

Si $\{E_n\}$ es una sucesión de subconjuntos de $\mathbb{R}^N$, entonces

$$\{E_n\} \nearrow E \qquad \Longrightarrow \qquad \big\{ \lambda^*(E_n) \big\} \nearrow \lambda^*(E)$$

Una propiedad clave de las funciones absolutamente continuas

Dado un intervalo compacto $K \subset \mathbb{R}$, sea $F : K \to \mathbb{R}$ absolutamente continua.

$$A \subset K\,, \quad \lambda(A) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda\big(F(A)\big) = 0$$

Un caso particular del teorema

Dado un intervalo compacto $K \subset \mathbb{R}$, sea $F : K \to \mathbb{R}$ absolutamente continua.

Si $F'(x) = 0$ p.c.t. $x \in K$, entonces F es constante

La forma general del teorema

Teorema Fundamental del Cálculo

Dado un intervalo no trivial $J \subset \mathbb{R}$, sea $F : J \to \mathbb{R}$ una función tal que $F\big|_K$ es absolutamente continua, para todo intervalo compacto $K \subset J$.

Entonces F es derivable casi por doquier en J, F' es localmente integrable en J, y se verifica que:

$$\int_a^b F'(t)\,dt = F(b) - F(a) \qquad \forall\, a, b \in J$$

Interpretación análoga a la del teorema elemental

De nuevo: derivación e integración como operaciones inversas

Fijamos un intervalo no trivial $J \subset \mathbb{R}$ y un punto $a \in J$

$AC_a(J)$ espacio vectorial de las funciones de J en $\mathbb{R}$, absolutamente continuas en cada intervalo compacto $K \subset J$, y que se anulan en a.

$\mathcal{N}(J) = \big\{ f : J \to \mathbb{R} \ : f = 0 \ \text{ c.p.d. en } \ J \big\}$ subespacio vectorial de $\mathcal{L}_1^{\text{loc}}(J)$

$L_1^{\text{loc}}(J) = \mathcal{L}_1^{\text{loc}}(J) \,/\, \mathcal{N}(J)$ espacio vectorial cociente

$$F \in AC_a(J) \quad \Longrightarrow \quad F' \in \mathcal{L}_1^{\text{loc}}(J) \quad \Longrightarrow \quad \widetilde{F'} \in L_1^{\text{loc}}(J)$$

$\mathcal{D} : AC_a(J) \to L_1^{\text{loc}}(J)\,, \qquad \mathcal{D}(F) = \widetilde{F'} \quad \forall\, F \in AC_a(J)$ operador lineal

$$\mathcal{I} : L_1^{\text{loc}}(J) \to AC_a(J)\,, \qquad \mathcal{I}\big(\,\widetilde{f}\,\big)(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad \forall\, x \in J\,, \ \ \forall\, f \in \mathcal{L}_1^{\text{loc}}(J)$$

$\mathcal{I}$ está bien definido y es lineal

Cada operador es el inverso del otro: $\mathcal{I} = \mathcal{D}^{-1}$ o bien $\mathcal{D} = \mathcal{I}^{-1}$