Análisis Matemático I

Práctica 1: Continuidad

Planteamiento del problema

El problema

Nos proponemos estudiar la continuidad de un campo escalar o vectorial

$$f : E \to \mathbb{R}^M \qquad \text{donde} \qquad \emptyset \neq E \subset \mathbb{R}^N$$

- Usando las componentes de un campo vectorial, el problema se reduce al caso $M = 1$
- Trataremos el caso particular $E = \mathbb{R}^N$

Por tanto el problema que vamos a tratar se concreta en:

Estudiar la continuidad de un campo escalar $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$

Prestaremos especial atención al caso $N = 2$

1. La parte rutinaria del problema

1. La rutina

Habitualmente, existe un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^N$ tal que $f\big|_U$ se obtiene mediante operaciones con funciones continuas: suma, producto, cociente y composición

luego es fácil comprobar que $f\big|_U$ es continua y, como U es abierto, el carácter local de la continuidad nos dice que f es continua en todo punto de U

Por tanto, la parte rutinaria del problema consiste en:

1.a Definir el conjunto U y comprobar que U es abierto

1.b Comprobar que $f\big|_U$ es continua

1.c Aplicar el carácter local de la continuidad

Queda estudiar la continuidad de f en cada punto $\alpha \in \mathbb{R}^N \setminus U$, luego estudiamos la existencia de límite de f en α

2. Estudio de los límites parciales

¿Qué son los límites parciales?

Fijamos $\alpha \in \mathbb{R}^N$ para estudiar la existencia de límite de f en α

Suponemos que las reglas de cálculo de límites no resuelven el problema, porque se presenta algún tipo de indeterminación

Sea $\{e_k : k \in \Delta_N\}$ la base usual de $\mathbb{R}^N$ y fijemos $k \in \Delta_N$

El cambio de variable $x = \alpha + te_k \in \mathbb{R}^2$ con $t \in \mathbb{R}$, teniendo en cuenta que $x \to \alpha$ cuando $t \to 0$ y $x \neq \alpha$ para $t \neq 0$, nos dice que

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = L \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{t \to 0} f(\alpha + te_k) = L$$

El límite de la derecha, cuando existe, es el k-ésimo límite parcial de f en α.

Es fácil saber si existe, y en su caso calcularlo

En el caso $N = 2$ con $\alpha = (a,b) \in \mathbb{R}^2$, los límites parciales, si existen, son:

$$\lim_{x \to a} f(x,b) \qquad \text{y} \qquad \lim_{y \to b} f(a,y)$$

¿Para qué sirven los límites parciales?

Conclusiones del estudio de los límites parciales

Si f tiene límite en α, todos sus límites parciales existen y coinciden

Por tanto:

2.a Si no existe uno de los límites parciales, f no tiene limite en α

2.b Igual ocurre si existen dos límites parciales, pero no coinciden

2.c Si todos los límites parciales existen y coinciden, es decir:

$$\lim_{t \to 0} f(\alpha + t e_k) = L \in \mathbb{R} \quad \forall k \in \Delta_N$$

Sabemos que L es el único posible limite de f en α

En lo que sigue suponemos que estamos en el tercer caso, conociendo L

3. Estudio de los límites direccionales

¿Qué son los límites direccionales?

Fijado $u \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, el cambio de variable $x = \alpha + tu$ con $t \in \mathbb{R}$, nos dice que

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = L \quad \Longrightarrow \quad \lim_{t \to 0} f(\alpha + tu) = L$$

Si $v = cu$ con $c \in \mathbb{R}^*$, es claro que:

$$\lim_{s \to 0} f(\alpha + sv) = L \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{t \to 0} f(\alpha + tu) = L$$

luego podemos "normalizar" u, sin perder información

Lo más habitual es suponer $\|u\| = 1$ (norma euclídea en $\mathbb{R}^N$)

Sea pues $S = \{u \in \mathbb{R}^N : \|u\| = 1\}$

Entonces, $\lim_{t \to 0} f(\alpha + tu)$, cuando existe,

es el límite direccional de f en α, según la dirección $u \in S$

Es fácil ver si existen todos los límites direccionales y, en su caso, calcularlos

Los límites parciales son límites direccionales $(u = e_k$ con $k \in \Delta_N)$

¿Para qué sirven los límites direccionales?

Conclusiones del estudio de los límites direccionales

Si f tiene límite en α, todos sus límites direccionales existen y coinciden

Por tanto:

3.a Si no existe uno de los límites direccionales, f no tiene limite en α

3.b Igual ocurre si existen dos límites direccionales que no coinciden

3.c Si todos los límites direccionales existen y coinciden, no tenemos nueva información. Tan sólo tenemos $L \in \mathbb{R}$, que es el único posible límite

Límites radiales

Fijado $u \in \mathbb{R}^N$ con $\|u\| = 1$ el límite radial de f en α según el vector u, caso de que exista, viene dado por:

$$\lim_{t \to 0^+} f(\alpha + tu)$$

El estudio de cada límite direccional equivale al de dos límites radiales:

$$\lim_{t \to 0} f(\alpha + tu) = L \iff \lim_{t \to 0+} f(\alpha + tu) = \lim_{s \to 0^+} f(\alpha - su) = L$$

Estudiar los límites direccionales equivale a estudiar los radiales

Límites radiales en el caso $N = 2$

Coordenadas polares en el plano

$$u \in \mathbb{R}^2, \quad \|u\| = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad u = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \ \text{ con } \ \theta \in \mathbb{R}$$

El límite radial de f en $\alpha = (a,b) \in \mathbb{R}^2$, según $u \in S$, cuando existe, es:

$$\lim_{t \to 0^+} f(\alpha + tu) = \lim_{\rho \to 0} f(a + \rho\cos\theta, b + \rho\operatorname{sen}\theta)$$

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x) = L \quad \Longrightarrow \quad \lim_{\rho \to 0} f(a + \rho\cos\theta, b + \rho\operatorname{sen}\theta) = L \ \ \forall \theta \in \mathbb{R}$$

La afirmación de la derecha sólo significa que

todos los límites radiales existen, y todos valen L

Límites direccionales en el caso $N = 2$

Otra forma de manejarlos en coordenadas cartesianas

Para $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ podemos suponer que $u_1 \neq 0$

pues en otro caso recaemos en uno de los límites parciales

En vez de $\|u\| = 1$, normalizamos tomando $u_1 = 1$ y $u_2 = \lambda \in \mathbb{R}$

El límite direccional según u, cuando existe, toma la forma:

$$\lim_{t \to 0} f(\alpha + tu) = \lim_{t \to 0} f(a + t, b + \lambda t)$$

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x) = L \quad \Longrightarrow \quad \lim_{t \to 0} f(a + t, b + \lambda t) = L \ \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

La afirmación de la derecha sólo significa que
todos los límites direccionales, salvo uno, existen y valen L

En particular, para $\alpha = (0,0)$ tenemos:

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = L \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to 0} f(x, \lambda x) = L \ \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

4. Existencia de límite

¿Cómo probamos que el límite existe?

Sólo podemos probar que $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = L$ usando una acotación de f

Si hallamos $r \in \mathbb{R}^+$ y una función $g : B(0,r) \to \mathbb{R}^+$, con $\lim\limits_{z\to 0} g(z) = 0$, tal que:

$$|f(\alpha + z) - L| \leqslant g(z) \quad \forall z \in B(0,r) \setminus \{0\}$$

Entonces, es evidente que: $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \lim\limits_{z\to 0} f(\alpha + z) = L$

Esto puede hacerse directamente, antes de estudiar todos los límites parciales y direccionales, pero no suele ser fácil

Aprovechemos el estudio de los límites direccionales o radiales

El estudio de los límites direccionales no ha dado resultado, porque

$$\lim_{t\to 0} f(\alpha + tu) - L = 0 \quad \forall u \in S$$

Si hallamos $r \in \mathbb{R}^+$ y una función $h :]0,r[\to \mathbb{R}^+$, con $\lim\limits_{t\to 0} h(t) = 0$ tal que:

$$|f(\alpha + tu) - L| \leqslant h(t) \quad \forall u \in S \quad \forall t \in]0,r[$$

de nuevo es evidente que: $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = L$

Existencia del límite en el caso $N = 2$

Usando coordenadas polares

El estudio de los límites radiales en $\alpha = (a,b)$ no ha dado resultado, porque

$$\lim_{\rho \to 0} f(a+\rho\cos\theta, b+\rho\operatorname{sen}\theta) - L = 0 \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

Si hallamos $r \in \mathbb{R}^+$ y una función $h :]0,r[\to \mathbb{R}^+$, con $\lim_{\rho \to 0} h(\rho) = 0$ tal que:

$$|f(a+\rho\cos\theta, b+\rho\operatorname{sen}\theta) - L| \leqslant h(\rho) \quad \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \forall \rho \in]0,r[$$

de nuevo es evidente que: $\lim_{x \to \alpha} f(x) = L$

Con la otra normalización

El estudio de los límites direccionales no ha dado resultado, porque

$$\lim_{t \to 0} f(a+t, b+\lambda t) - L = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Si hallamos $r \in \mathbb{R}^+$ y una función $h :]0,r[\to \mathbb{R}^+$, con $\lim_{t \to 0} h(t) = 0$ tal que:

$$\big| f(a+t, b+\lambda t) - L \big| \leqslant h(t) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in [-r,r] \setminus \{0\}$$

de nuevo es evidente que: $\lim_{x \to \alpha} f(x) = L$

5. Otros recursos, en el caso $N=2$

¿Qué hacemos si no hemos conseguido la acotación adecuada?

El tipo de acotación intentada equivale a la existencia de límite,

luego debemos sospechar que el límite no existe,

pero ya no hay ningún método general para comprobarlo

Si $L \in \mathbb{R}$ es el único posible límite de f en α

Podemos probar con un cambio de variable $x=\varphi(t)$ con $0<t<r$ tal que

$$\lim_{t\to 0} \varphi(t)=\alpha \quad \text{y} \quad \varphi(t)\neq\alpha \quad \forall t \in]0,r[$$

$$\lim_{x\to\alpha} f(x)=L \quad \Longrightarrow \quad \lim_{t\to 0} f\big(\varphi(t)\big)=L$$

luego buscamos φ de forma que $f\circ\varphi$ no tenga límite L en 0

Ejemplo en el caso $N=2$ con $\alpha=(a,b)$:

$$\varphi_p(t)=(a+t,b+t^p) \quad \text{con} \quad p\in\mathbb{R}^+$$