19. Estudiar el comportamiento en $+\infty$ de la función $f: A \to \mathbb{R}$

c) $A = \mathbb{R}^+$, $f(x) = x^a \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ $\quad a \in \mathbb{R}$.

Estudio el lim cuando $x \to +\infty$

$$L = \lim_{x \to +\infty} x^a \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = \infty \cdot 0 \text{ IND};$$

$$L = \lim \frac{\operatorname{sen}(1/x)}{\frac{1}{x^a}} = \frac{0}{0} \text{ IND}; \quad (1)$$

Aplico L'hôpital

$$L \overset{RL}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{-\cos(1/x)}{x^2}}{-\frac{a x^{(a-1)}}{x^{a2}}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{\cos(1/x)}{x^2}}{\frac{a}{x^{(a+1)}}} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^{(a-1)} \cos(1/x)}{a}$$

Para $a > 1$; $\boxed{L = +\infty}$

Para $a < 1$;

$$\boxed{L = \lim_{x \to \infty} \frac{x^{(a-1)} \cos(1/x)}{a} = 0}$$

Para $a = 1$; (multiplicamos y dividimos por $\frac{1}{x}$ en (1))

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{\operatorname{sen} 1/x}{1/x}}{\frac{\frac{1}{x^a}}{1/x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\operatorname{sen} 1/x}{1/x} = 1$$

19.d) $f(x) = \dfrac{x^2 \,\text{sen}\,(1/x)}{\log x}$, $a+\infty$.

Estudio el lim cuando $x \to \infty$;

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 \,\text{sen}\,(1/x)}{\log x} = \frac{\infty}{\infty} = \text{IND};$$

Este límite no se puede resolver por L'hôpital pero vemos que.

$$L = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 \,\text{sen}\,(1/x)}{\log x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{\log x} \cdot \lim_{x \to \infty} \frac{\text{sen}\, 1/x}{1/x} = +\infty.$$

porque,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\text{sen}\, 1/x}{1/x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{\text{sen}\, x}{x} = \boxed{1}$$

Por tanto

$$L = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{\log x} \overset{RL}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{1}{1/x} = \lim_{x \to \infty} x = \boxed{+\infty}$$

(no es necesario)

Regla de L'hôpital