SEMINARIO 3

ALGEBRA DE CONMUTACIÓN.
FUNCIONES DE CONMUTACIÓN.

TECNOLOGÍA Y ORGANIZACIÓN DE COMPUTADORES

1º Grado en Ingeniería Informática.

SEMINARIO 3.
ALGEBRA DE CONMUTACIÓN.
FUNCIONES DE CONMUTACIÓN.

Resumen:

– En este seminario se tratarán aspectos relacionados con los fundamentos matemáticos, que son la base del proceso de análisis y diseño, de los sistemas digitales.

Indice:

- 1. Algebra de Boole.
- 2. Funciones de conmutación.
- 3. Representación de Funciones.
- 4. Implementación de Funciones.
- 5. Ejercicios.

- **Bibliografía:**

[HAY96] [LLOR03] [GAJS97] [MAN03] [NEL96] [ROT04][WAK06]

SEMINARIO 3.
ALGEBRA DE CONMUTACIÓN.
FUNCIONES DE CONMUTACIÓN.

Indice:

1. Álgebra de Boole. Postulados.

Un conjunto **B** se dice que tiene estructura de Álgebra de Boole si cumple los siguientes Postulados:

- **Postulado 1. Número de elementos**. El conjunto **B**, debe contener al menos dos elementos distintos entre sí.

$$\exists\, x, y \in B \,/\, x \neq y$$

- **Postulado 2. Leyes de composición interna.** En el conjunto B se definen dos leyes de composición interna denominadas *Suma Lógica* u *Operación OR* (+) y *Producto Lógico* u *Operación AND* (·)

$$\forall\, x, y \in B$$

$$\text{a)}\ \ x + y \in B$$

$$\text{b)}\ \ x \cdot y \in B$$

1. Álgebra de Boole. Postulados.

- **Postulado 3. Existencia de Elementos Neutros**. Existen en **B** el elemento neutro correspondiente a la operación OR, denominado 0 y el elemento neutro correspondiente a la operación AND, denominado 1, diferentes entre sí, únicos y tales que:

$$\text{a) } \exists\, 0 \in B \,/\, \forall\, x \in B,\ x + 0 = 0 + x = x$$

$$\text{b) } \exists\, 1 \in B \,/\, \forall\, x \in B,\ x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$$

$$\text{c) } 0 \neq 1$$

- **Postulado 4. Propiedad Conmutativa**. Para cada x e y elementos de **B**:

$$\text{a) } \forall\, x, y \in B,\ x + y = y + x$$

$$\text{b) } \forall\, x, y \in B,\ x \cdot y = y \cdot x$$

- **Postulado 5. Propiedad Distributiva**. Para cada x, y, z elementos de **B**:

$$\text{a) } \forall\, x, y, z \in B,\ x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$$

$$\text{b) } \forall\, x, y, z \in B,\ x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

1. Álgebra de Boole. Postulados.

- **Postulado 6. Propiedad Asociativa.** Para cada x, y, z elementos de B:

$$a)\ \forall\, x, y, z \in B,\ x + (y + z) = (x + y) + z$$

$$b)\ \forall\, x, y, z \in B,\ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

- **Postulado 7. Existencia de Complementos.** Para cada x en B existe un elemento único denotado por $\overline{x}$, denominado elemento opuesto o complemento de x tal que

$$a)\ \forall\, x \in B, \exists\, \overline{x} \in B \,/\, x + \overline{x} = \overline{x} + x = 1$$

$$b)\ \forall\, x \in B, \exists\, \overline{x} \in B \,/\, x \cdot \overline{x} = \overline{x} \cdot x = 0$$

1. Álgebra de Boole. Postulados.

- Los postulados del Álgebra de Boole tienen dos enunciados paralelos, de manera que se cumple el principio de dualidad:

  Si en una expresión que es cierta se sustituyen 0 por 1, o + por ·, y viceversa, en todos los lugares en que aparezca, se obtiene otra expresión, llamada dual, que también es cierta.

- Cada teorema que se puede demostrar mediante álgebra de Boole, tiene un dual que también es verdad.

1. Álgebra de Boole. Teoremas.

TEOREMA 1: Leyes de Absorción :

a) $x + 1 = 1$ c) $x \cdot x = x$ e) $x + (x \cdot y) = x$

b) $x \cdot 0 = 0$ d) $x + x = x$ f) $x \cdot (x + y) = x$

g) $x + (\overline{x} \cdot y) = x + y$ i) $(x \cdot y) + (\overline{x} \cdot z) + (y \cdot z) = (x \cdot y) + (\overline{x} \cdot z)$

h) $x \cdot (\overline{x} + y) = x \cdot y$ j) $(x+y) \cdot (\overline{x}+z) \cdot (y+z) = (x+y) \cdot (\overline{x}+z)$

TEOREMA 2: Los elementos 0 y 1 son distintos, y complementarios el uno del otro:

$$0 \neq 1 \quad ; \quad \overline{0} = 1 \quad ; \quad \overline{1} = 0$$

1. Álgebra de Boole. Teoremas.

TEOREMA 3: El complemento del complemento de cada elemento es el propio elemento.

$$\overline{\overline{x}} = x$$

TEOREMA 4: Leyes de De Morgan:

$$\overline{A+B+.....+Z} = \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot....\overline{Z} \qquad \overline{A\cdot B\cdot .....Z} = \overline{A}+\overline{B}+....\overline{Z}$$

SEMINARIO 3.
ALGEBRA DE CONMUTACIÓN.
FUNCIONES DE CONMUTACIÓN.

Indice:

2. Funciones de conmutación. Definición.

VARIABLE DE CONMUTACIÓN: Variable que en un determinado instante puede tomar el valor lógico 0 ó 1.

LITERAL: Es una variable o su complemento.

FUNCIÓN DE COMMUTACIÓN: Es una aplicación del conjunto producto cartesiano

$$f : B^n \rightarrow B$$

$$(x_{n-1} , x_{n-2} , ... , x_0) \rightarrow f\,(x_{n-1} , x_{n-2} , ... , x_0) \text{ € } B$$

siendo B = {0 , 1}.

2. Funciones de conmutación.

Representación con Tablas de Verdad.

- **Tablas Verdad:**
  - Para una función de conmutación de n-variables, una Tabla de Verdad es una tabla con 2^n filas (una por cada una de las combinaciones de entradas) en la que se representan TODOS los valores de la función, para todos y cada uno de sus valores de entradas.

- **Ejemplo**:

Tabla verdad

x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

2. Funciones de conmutación de una variable.

- **Función de conmutación de 1 variable:** (n=1): {0,1} → {0,1}

		Asignación de valores			
Variable	**x**	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
Combinaciones	0	0	0	1	1
	1	0	1	0	1

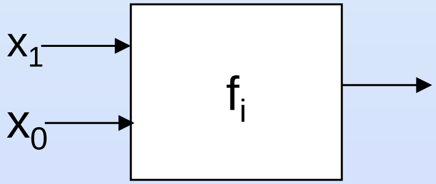
Combinaciones posibles de dos valores

Funciones constantes: $f_0 = 0$; $f_3 = 1$

Funciones de una variable: $f_1 = x$; $f_2 = \overline{x}$

2. Funciones de conmutación de dos variables.

- Función de conmutación de 2 variables ($n=2$, $2^2=4$ combinaciones): {00, 01, 10, 11} → {0,1}



$z = f_i(x_1, x_0)$; $i=0,\ldots,15$

Entradas		**Funciones posibles**															
x_1	x_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

2. Funciones de conmutación de dos variables.

Funciones constantes: $f_0 = 0$; $f_{15} = 1$

Funciones de una variable: $f_5 = x_0$; $f_{10} = \overline{x}_0$; $f_3 = x_1$; $f_{12} = \overline{x}_1$

Funciones de dos variables (OR):

$$f_7 = x_1 + x_0 \; ; \; f_{11} = x_1 + \overline{x}_0$$

$$f_{13} = \overline{x}_1 + x_0 \; ; \; f_{14} = \overline{x}_1 + \overline{x}_0 = \overline{x_1 \cdot x_0}$$

Funciones de dos variables (AND):

$$f_1 = x_1 \cdot x_0 \; ; \; f_2 = x_1 \cdot \overline{x}_0$$

$$f_4 = \overline{x}_1 \cdot x_0 \; ; \; f_8 = \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_0 = \overline{x_1 + x_0}$$

Funciones XOR y XNOR: $f_6 = (\overline{x}_1 \cdot x_0) + (x_1 \cdot \overline{x}_0) = x_1 \oplus x_0$

$$f_9 = (\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_0) + (x_1 \cdot x_0) = \overline{x_1 \oplus x_0}$$

2. Funciones de conmutación de más de dos variables.

- El conjunto de las **funciones de conmutación** se puede considerar como caso particular del álgebra de Boole, en la que se pueden definir las funciones **suma lógica** (OR), el **producto lógico** (AND), y la **negación** o complemento (NOT).

- Esta estructura, recibe el nombre de **Algebra de Conmutación** de las Funciones de n-variables.

- Para implementar funciones de número de variables superior a dos, se pueden utilizar funciones de dos variables y las propiedades del Álgebra de Boole sobre el conjunto de funciones de dos variables.

2. Funciones de conmutación incompletamente especificadas.

- Una función de conmutación de n-variables se dice que es (o que está) incompletamente especificada cuando sobre ella concurren alguna de estas circunstancias:

  - Existen algunos valores de sus variables para los cuales se desconoce el valor que tome la función en esas condiciones
  - Existen algunos valores de sus variables que no se pueden presentar. Por tanto, no importa el valor que pueda tomar la función para dicho valor de entrada.
  - Que aún existiendo todos los valores posibles de sus entradas, sea irrelevante o que no importe el valor que pueda tomar la función para dicho valor de entrada.

2. Funciones de conmutación incompletamente especificadas.

- ***Ejemplo:***

  Obtenga la tabla de verdad de una función de conmutación que detecte los números primos (no considerar el 0) para un dato BCD.

X_3 X_2 X_1 X_0		f
0 0 0 0	*0*	0
0 0 0 1	*1*	1
0 0 1 0	*2*	1
0 0 1 1	*3*	1
0 1 0 0	*4*	0
0 1 0 1	*5*	1
0 1 1 0	*6*	0
0 1 1 1	*7*	1
1 0 0 0	*8*	0
1 0 0 1	*9*	0
1 0 1 0	*10*	-
1 0 1 1	*11*	-
1 1 0 0	*12*	-
1 1 0 1	*13*	-
1 1 1 0	*14*	-
1 1 1 1	*15*	-

SEMINARIO 3.
ALGEBRA DE CONMUTACIÓN.
FUNCIONES DE CONMUTACIÓN.

Indice:

- 1. Algebra de Boole.
- 2. Funciones de conmutación.
- 3. Representación de Funciones.
- 4. Implementación de Funciones.
- 5. Ejercicios.

3. Representación de funciones de conmutación.

Representación con Tablas de Verdad.

- **Tablas Verdad:**
  - Para una función de conmutación de n-variables, una Tabla de Verdad es una tabla con 2^n filas (una por cada una de las combinaciones de entradas) en la que se representan TODOS los valores de la función, para todos y cada uno de sus valores de entradas.

- **Ejemplo**:

Tabla verdad

x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

3. Representación de funciones de conmutación. Expresiones Algebraicas.

- **Expresiones Algebraicas:**
  - Para una función de conmutación de n-variables, una expresión algebraica es una expresión matemática utilizando variables (o sus complementos) y las funciones básicas del Álgebra de Boole (AND , OR, NAND, NOR, XOR y XNOR).
  - Una misma función puede expresarse mediante diferentes expresiones algebraicas equivalentes.

- **Ejemplo**:

$$f(x, y, z) = x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

3. Representación de funciones de conmutación. Expresiones Algebraicas.

- **Variable de Conmutación**: Variable que en un determinado instante puede tomar el valor lógico 0 ó 1.
- **Literal**: una variable de conmutación o su complemento.
- **Término producto**: literales conectados por el operador AND.
- **Término suma**: literales conectados por el operador OR.
- **Término producto normal**: Es un término producto el que no aparece repetido ningún literal.
- **Término suma normal**: Es un término suma en el que no aparece repetido ningún literal.
- **Minterm** (término producto canónico): Para un conjunto de *n* variables es un término producto normal en el que aparecen todos los *n* literales sin estar repetidos, una y sólo una vez.
- **Maxterm** (término suma canónico): Para un conjunto de *n* variables es un término suma normal en el que aparecen todos los *n* literales sin estar repetidos, una y sólo una vez.

3. Representación de funciones de conmutación. Expresiones Algebraicas. Concepto de MINTERM.

Para un Álgebra de Conmutación de 3 variables.

X	Y	Z	MINTERMS	Símbolo	m_0	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7
0	0	0	$\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$	m_0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	$\overline{X}\,\overline{Y}Z$	m_1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	$\overline{X}Y\overline{Z}$	m_2	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	$\overline{X}YZ$	m_3	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	$X\overline{Y}\,\overline{Z}$	m_4	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	$X\overline{Y}Z$	m_5	0	0	0	0	0	1	0	0
1	1	0	$XY\overline{Z}$	m_6	0	0	0	0	0	0	1	0
1	1	1	XYZ	m_7	0	0	0	0	0	0	0	1

Ejemplo de un Minterm:

$$\begin{bmatrix} xyz \\ 001 \end{bmatrix} \Rightarrow m_{1=001} = \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z$$

3. Representación de funciones de conmutación. Expresiones Algebraicas. Concepto de MAXTERM.

Para un Álgebra de Conmutación de 3 variables.

X	Y	Z	MAXTERMS	Símbolo	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7
0	0	0	$X+Y+Z$	M_0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	$X+Y+\overline{Z}$	M_1	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	$X+\overline{Y}+Z$	M_2	1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	$X+\overline{Y}+\overline{Z}$	M_3	1	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	$\overline{X}+Y+Z$	M_4	1	1	1	1	0	1	1	1
1	0	1	$\overline{X}+Y+\overline{Z}$	M_5	1	1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	$\overline{X}+\overline{Y}+Z$	M_6	1	1	1	1	1	1	0	1
1	1	1	$\overline{X}+\overline{Y}+\overline{Z}$	M_7	1	1	1	1	1	1	1	0

Ejemplo de un Maxterm:

$$\begin{bmatrix} xyz \\ 001 \end{bmatrix} \Rightarrow M_{1=001} = (x+y+\overline{z})$$

Obsérvese además que:

$$M_j = \overline{m}_j$$

$$\overline{m}_1 = \overline{\overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z} = x + y + \overline{z} = M_1$$

3. Representación de funciones de conmutación. Expresiones Algebraicas. Teorema de Shannon.

- **Teorema de Shannon**:
  - *Toda función conmutación se puede expresar como una suma única de minterms. Esta forma se denomina "forma canónica" de la función expresada como suma de minterms.*
  - *Toda función conmutación se puede expresar como un producto único de maxterms. Esta forma se denomina "forma canónica" de la función expresada como producto de maxterms.*

3. Representación de funciones de conmutación. Expresiones Algebraicas. Teorema de Shannon.

X,Y,Z	F(X,Y,Z)
0 0 0	d0
0 0 1	d1
0 1 0	d2
0 1 1	d3
1 0 0	d4
1 0 1	d5
1 1 0	d6
1 1 1	d7

Cualquier función de conmutación **<u>F</u>** de **<u>n</u>** variables puede expresarse como una **<u>suma única de minterms</u>**.

$$F(x,y,z) = d_0 m_0 + d_1 m_1 + d_2 m_2 + d_3 m_3 + d_4 m_4 + d_5 m_5 + d_6 m_6 + d_7 m_7$$

$$F(x,y,z) = \sum d_i \cdot m_i$$

<u>Ejemplo</u>

	X,Y,Z	g(X,Y,Z)
(0)	0 0 0	**1 = do**
(1)	0 0 1	0 = d1
(2)	0 1 0	0 = d2
(3)	0 1 1	**1 = d3**
(4)	1 0 0	**1 = d4**
(5)	1 0 1	0 = d5
(6)	1 1 0	0 = d6
(7)	1 1 1	0 = d7

$$g(x,y,z) = m_0 + m_3 + m_4 =$$

$$= \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} + \overline{x} \cdot y \cdot z + x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} =$$

$$= \sum m_i (0,3,4)$$

3. Representación de funciones de conmutación. Expresiones Algebraicas. Teorema de Shannon.

X,Y,Z	F(X,Y,Z)
0 0 0	d0
0 0 1	d1
0 1 0	d2
0 1 1	d3
1 0 0	d4
1 0 1	d5
1 1 0	d6
1 1 1	d7

Cualquier función de conmutación **F** de **n** variables puede expresarse como una **producto único de maxterms**.

$$F(x,y,z) = (d_0 + M_0)\cdot(d_1 + M_1)\cdot(d_2 + M_2)\cdot(d_3 + M_3)\cdot(d_4 + M_4)\cdot(d_5 + M_5)\cdot(d_6 + M_6)\cdot(d_7 + M_7)$$

$$F(x,y,z) = \prod M_i(d_i + M_i)$$

Ejemplo

	X,Y,Z	g(X,Y,Z)
(0)	0 0 0	1 = do
(1)	0 0 1	**0 = d1**
(2)	0 1 0	**0 = d2**
(3)	0 1 1	1 = d3
(4)	1 0 0	1 = d4
(5)	1 0 1	**0 = d5**
(6)	1 1 0	**0 = d6**
(7)	1 1 1	**0 = d7**

$$g(x,y,z) = M_1 \cdot M_2 \cdot M_5 \cdot M_6 \cdot M_7$$

$$= (x+y+\overline{z})\cdot(x+\overline{y}+z)\cdot(\overline{x}+y+\overline{z})\cdot(\overline{x}+\overline{y}+z)\cdot(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z})$$

$$= \prod M_i(1,2,5,6,7)$$

3. Representación de funciones de conmutación. Expresiones Algebraicas.

- Los minterms de una función determinada son los correspondientes a las entradas para las que la función es “1”. Los minterms realizan los “unos” de la función.

- Los maxterms de una función determinada son los correspondientes a las entradas para las que la función es “0”. Los maxterms realizan los “ceros” de la función.

3. Representación de funciones de conmutación. Mapas de Karnaugh.

- **Mapas de Karnaugh:**
  - Para una función de conmutación de n-variables, un mapa de Karnaugh es una tabla con 2^n celdas o casillas, cada una de ellas con la misión de albergar un valor de la función.
  - Cada celda o casilla está unívocamente identificada por n coordenadas.
  - Si la función de conmutación tiene un número de variables par (n = 2k) el mapa estará formado por 2^k filas y 2^k columnas.
  - Si la función de conmutación tiene un número de variables impar (n = 2k+1) el mapa estará formado por $2^{int(k/2)}$ filas y $2^{int(k/2)+1}$ columnas, o viceversa, siendo int(k/2) la parte entera de K/2.

3. Representación de funciones de conmutación. Mapas de Karnaugh.

B \ A	0	1
0	0	2
1	1	3

2 Variables (AB)

C \ AB	00	01	11	10
0	0	2	6	4
1	1	3	7	5

3 Variables (ABC)

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

4 variables (ABCD)

3. Representación de funciones de conmutación. Mapas de Karnaugh.

Mapa de Karnaugh de 5 variables (ABCDE)

B

DE \ BC	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

C D E

B

DE \ BC	00	01	11	10
00	16	20	28	24
01	17	21	29	25
11	19	23	31	27
10	18	22	30	26

C D E

A=1

3. Representación de funciones de conmutación. Mapas de Karnaugh.

Mapa K de 6 variables (ABCDEF)

B=1

A=1

A=0, B=0:

EF \ CD	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

A=0, B=1:

EF \ CD	00	01	11	10
00	16	20	28	24
01	17	21	29	25
11	19	23	31	27
10	18	22	30	26

A=1, B=0:

EF \ CD	00	01	11	10
00	32	36	44	40
01	33	37	45	41
11	35	39	47	43
10	34	38	46	42

A=1, B=1:

EF \ CD	00	01	11	10
00	48	52	60	56
01	49	53	61	57
11	51	55	63	59
10	50	54	62	58

3. Representación de funciones de conmutación. Mapas de Karnaugh.

- Otra forma de representar mapas de Karnaugh.

2 variables

x \ y	0	1
0	0	1
1	2	3

3 variables

x \ yz	00	01	11	10
0	0	1	3	2
1	4	5	7	6

4 variables

xy \ zk	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

5 variables

xy \ zuv	000	001	011	010	110	111	101	100
00	0	1	3	2	6	7	5	4
01	8	9	11	10	14	15	13	12
11	24	25	27	26	30	31	29	28
10	16	17	19	18	22	23	21	20

3. Representación de funciones de conmutación. Mapas de Karnaugh.

Identificación de términos producto y términos suma.

Ejemplo 1:

$$T_p = \overline{A} \cdot C$$

Los <u>términos producto</u> pueden identificarse en el mapa de Karnaugh como las regiones intersección que definen los literales que forman el término producto.

$$\overline{A} \quad \cdot \quad C \quad = \quad \overline{A} \cdot C$$

$\overline{A}$

CD \ AB	00	01	11	10
00	1_{0}	1_{4}	12	8
01	1_{1}	1_{5}	13	9
11	1_{3}	1_{7}	15	11
10	1_{2}	1_{6}	14	10

C

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	1_{3}	1_{7}	1_{15}	1_{11}
10	1_{2}	1_{6}	1_{14}	1_{10}

$\overline{A} \cdot C$

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	1_{3}	1_{7}	15	11
10	1_{2}	1_{6}	14	10

(In each map: A = columns 11, 10; B = columns 01, 11; C = rows 11, 10; D = rows 01, 11.)

3. Representación de funciones de conmutación. Mapas de Karnaugh.

Identificación de términos producto y términos suma.

Ejemplo 2:

$$T_s = (A + \overline{C})$$

Un <u>término suma</u> puede obtenerse como el dual del correspondiente término producto, sustituyendo los literales por sus complementados y el producto por la suma.

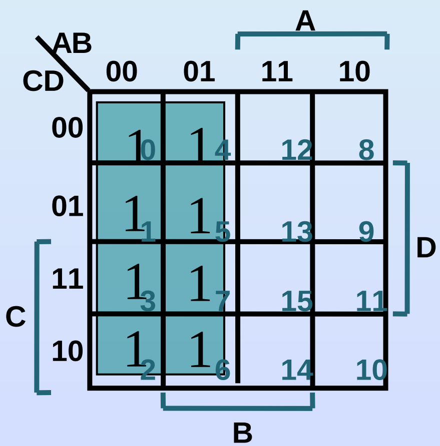
$$A \quad + \quad \overline{C} \quad = \quad (A+\overline{C})$$

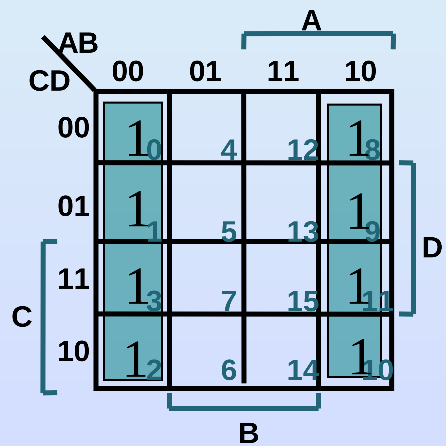
CD \ AB	00	01	11	10
00	0_{0}	0_{4}	1_{12}	1_{8}
01	0_{1}	0_{5}	1_{13}	1_{9}
11	0_{3}	0_{7}	1_{15}	1_{11}
10	0_{2}	0_{6}	1_{14}	1_{10}

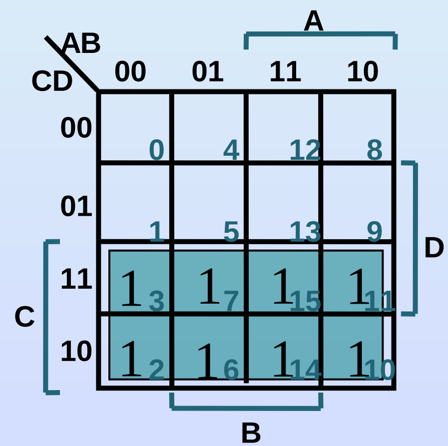
CD \ AB	00	01	11	10
00	1_{0}	1_{4}	1_{12}	1_{8}
01	1_{1}	1_{5}	1_{13}	1_{9}
11	0_{3}	0_{7}	0_{15}	0_{11}
10	0_{2}	0_{6}	0_{14}	0_{10}

CD \ AB	00	01	11	10
00	1_{0}	1_{4}	1_{12}	1_{8}
01	1_{1}	1_{5}	1_{13}	1_{9}
11	0_{3}	0_{7}	1_{15}	1_{11}
10	0_{2}	0_{6}	1_{14}	1_{10}

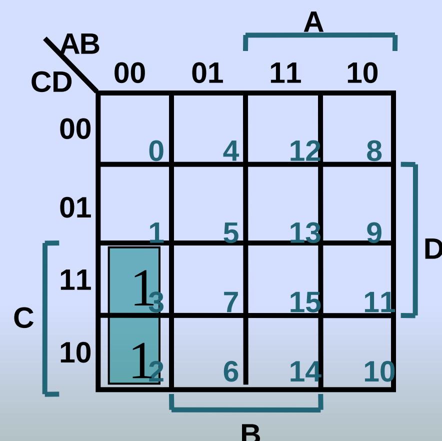
3. Representación de funciones de conmutación. Mapas de Karnaugh.







$$T = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C$$



Las casillas sombreadas indican valor "1" y el resto valor "0"

SEMINARIO 3.
ALGEBRA DE CONMUTACIÓN.
FUNCIONES DE CONMUTACIÓN.

Indice:

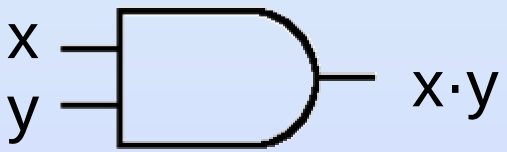
4. Implementación física de funciones de conmutación.

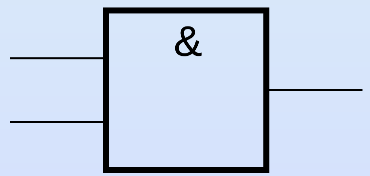
- La implementación del circuito lógico, a partir de una expresión booleana, dependerá de las puertas lógicas disponibles:
  - Con cualquier tipo de puerta lógica
  - A partir de una expresión de suma de productos:
    - puertas AND/OR
    - NAND/NAND
  - A partir de una expresión de producto de sumas:
    - Puertas OR/AND
    - NOR/NOR

4. Implementación de funciones: puertas lógicas.

Símbolo IEEE

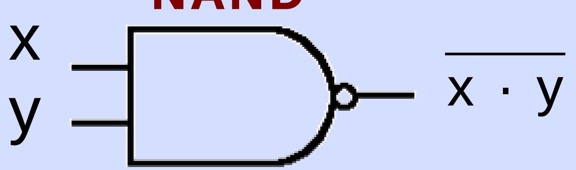
AND

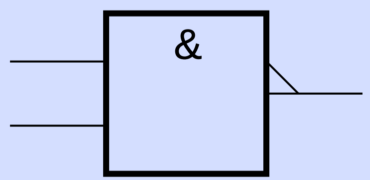




x	y	x · y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

NAND



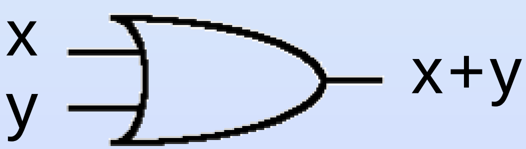


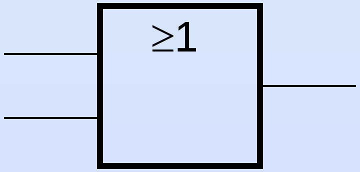
x	y	$\overline{x \cdot y}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

4. Implementación de funciones: puertas lógicas.

Símbolo IEEE

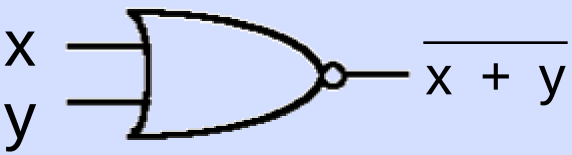
OR

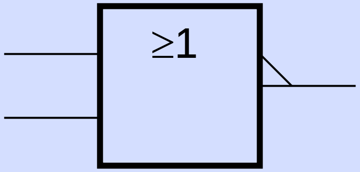




x	y	x+y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

NOR



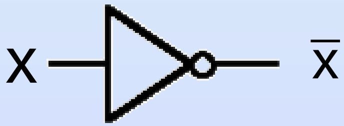


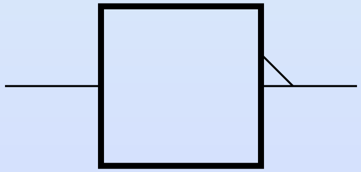
x	y	$\overline{x + y}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

4. Implementación de funciones: puertas lógicas.

Símbolos IEEE

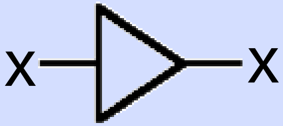
Inversor

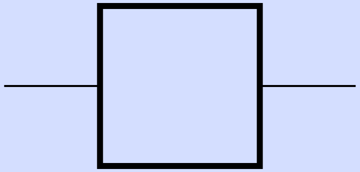




x	$\overline{x}$
0	1
1	0

Buffer



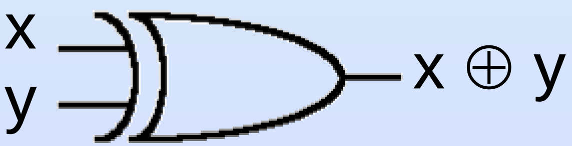


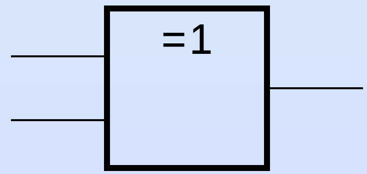
x	x
0	0
1	1

4. Implementación de funciones: puertas lógicas.

Símbolos IEEE

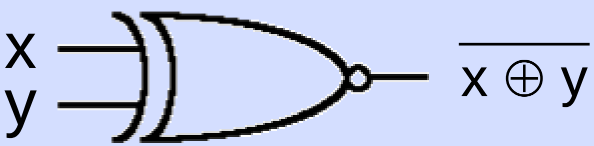
XOR

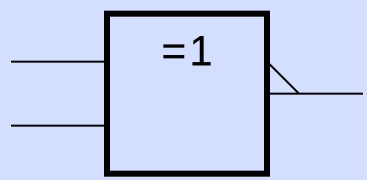




x	y	$x \oplus y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

XNOR





x	y	$\overline{x \oplus y}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

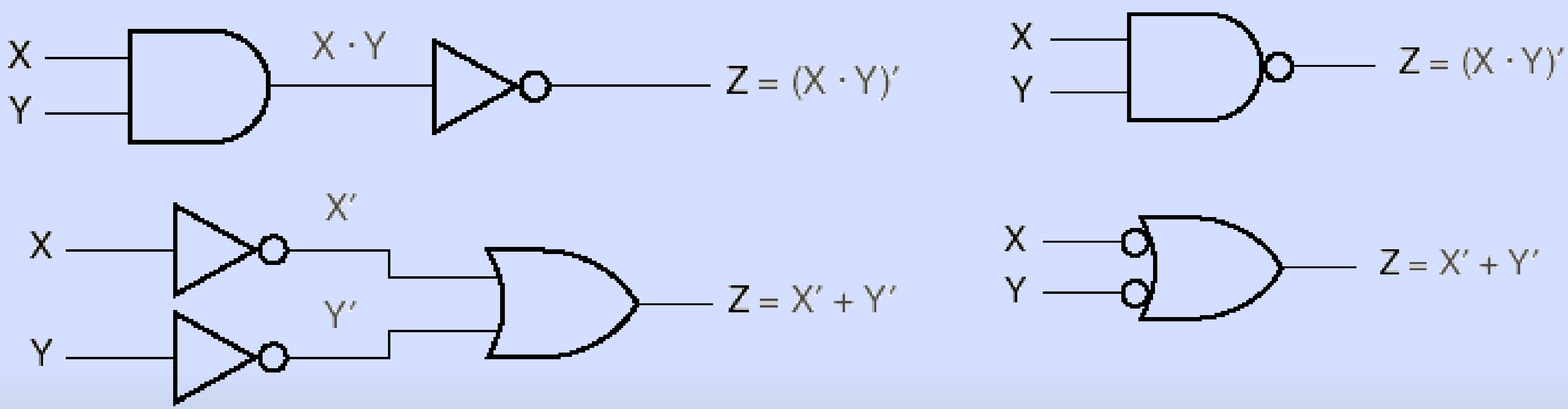
4. Implementación de funciones: puertas lógicas.

- Leyes de De Morgan:

$$\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$$

x	y	$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{x \cdot y}$	$\overline{x} + \overline{y}$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1
1	1	0	0	0	0

- Equivalencia de símbolos de puerta NAND



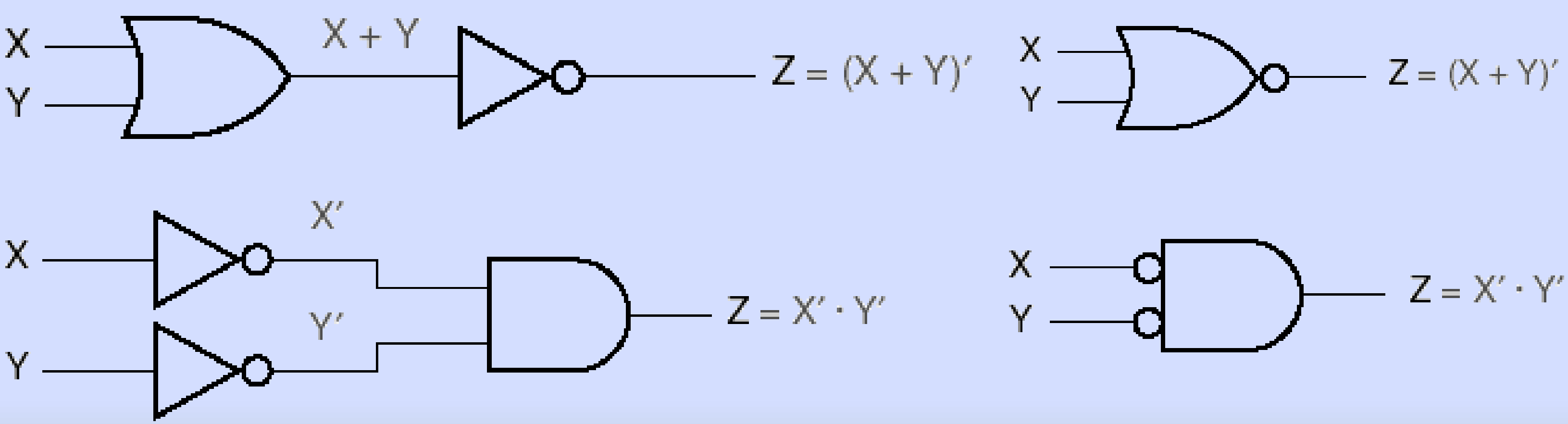
4. Implementación de funciones: puertas lógicas.

- Leyes de De Morgan:

$$\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$$

x	y	$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{x + y}$	$\overline{x} \cdot \overline{y}$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0

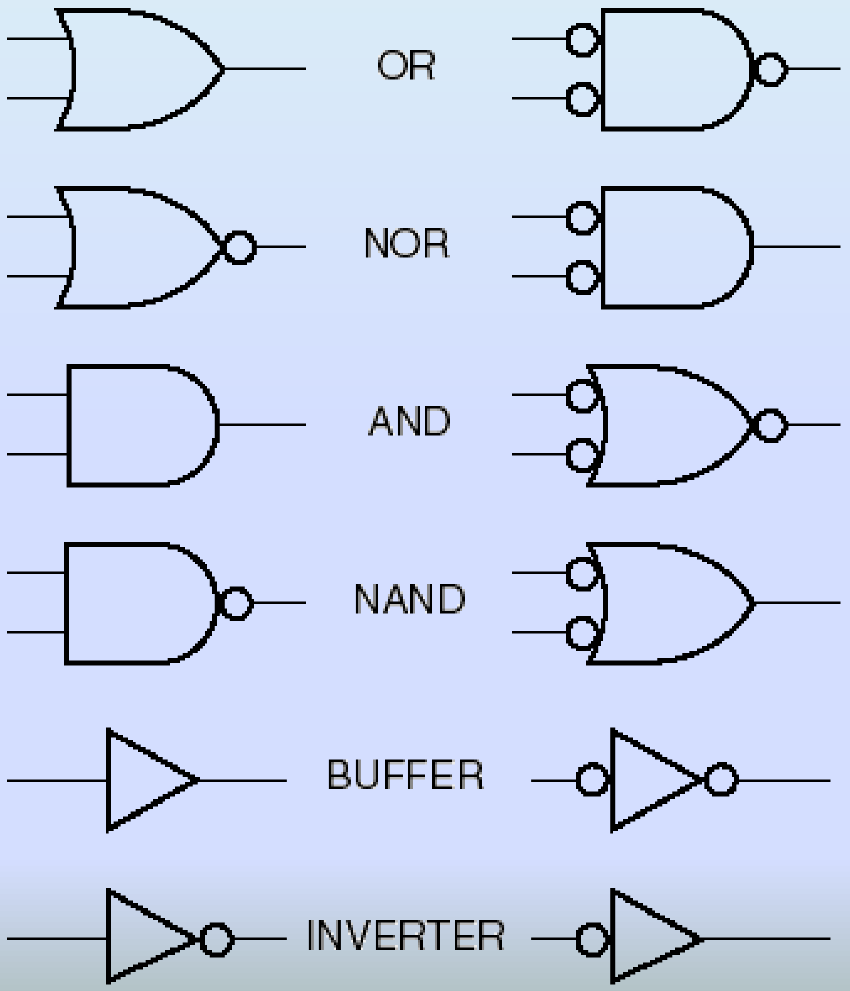
- Equivalencia de símbolos de puerta NOR



4. Implementación de funciones: puertas lógicas.

Símbolos equivalentes:

- La equivalencia de símbolos puede se útil para la transformación de circuitos equivalentes (Bubble-to-bubble)
- Y facilitar la deducción y/o interpretación de un circuito

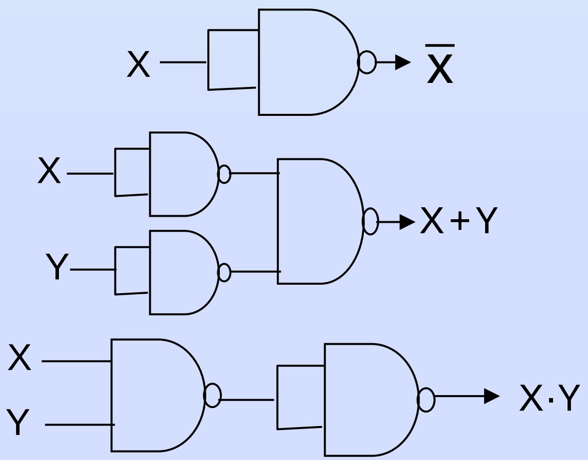


4. Equivalencias de puertas lógicas. Resumen.

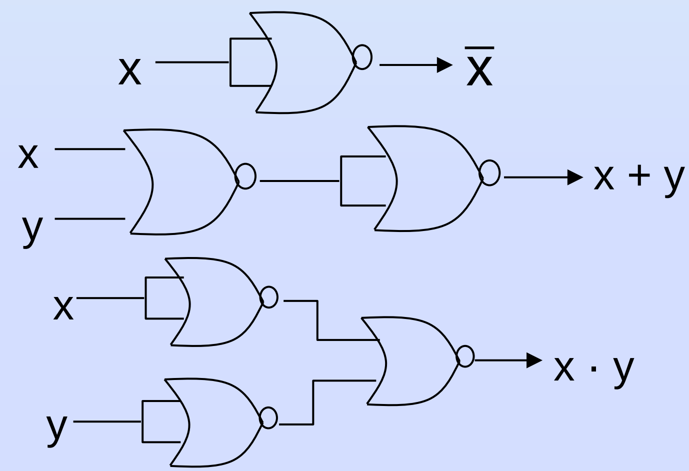
Ley de DeMorgan: $\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$

Ley DeMorgan: $\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$

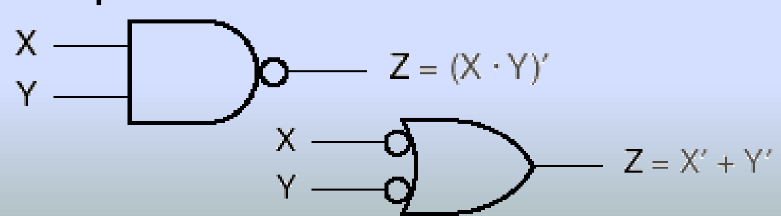
1. Equivalencia funcional:



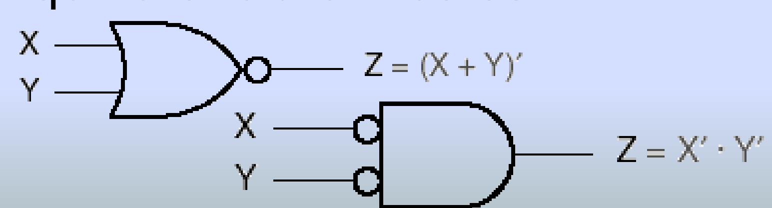
1. Equivalencia funcional:



2. Equivalencia símbolos:



2. Equivalencia símbolos:

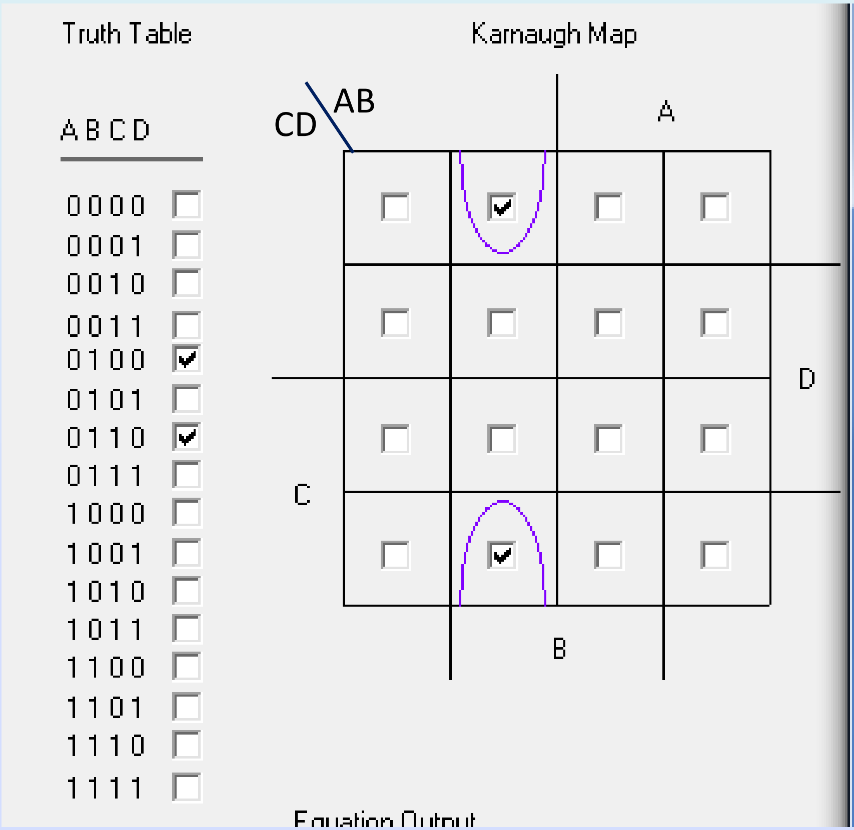


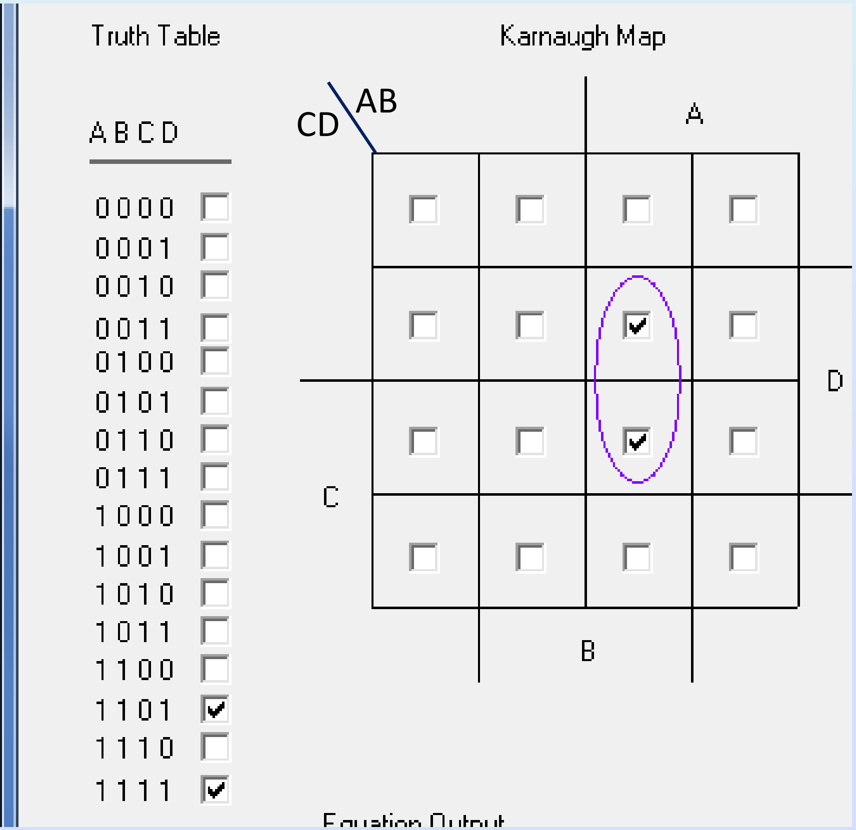
SEMINARIO 3.
ALGEBRA DE CONMUTACIÓN.
FUNCIONES DE CONMUTACIÓN.

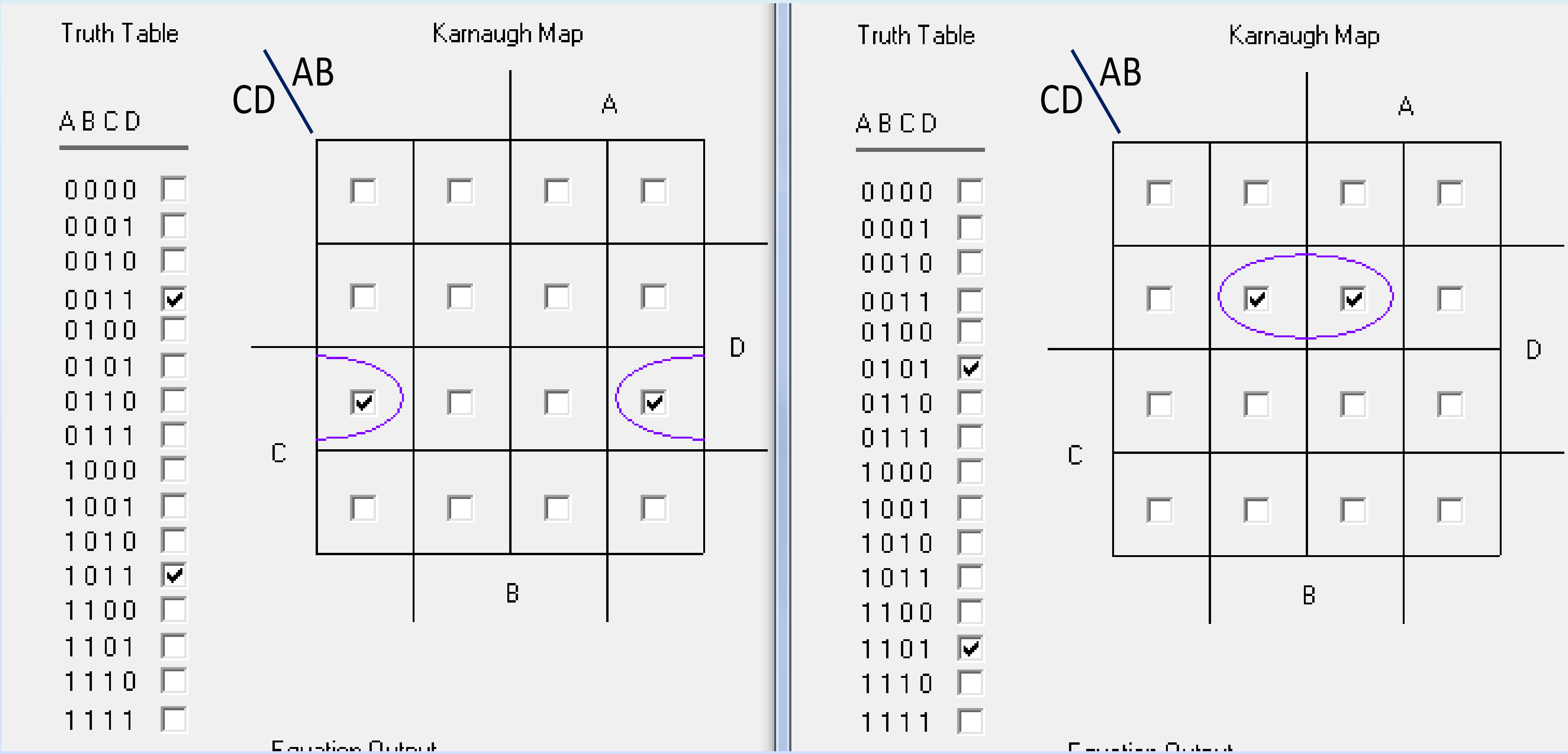
Indice:

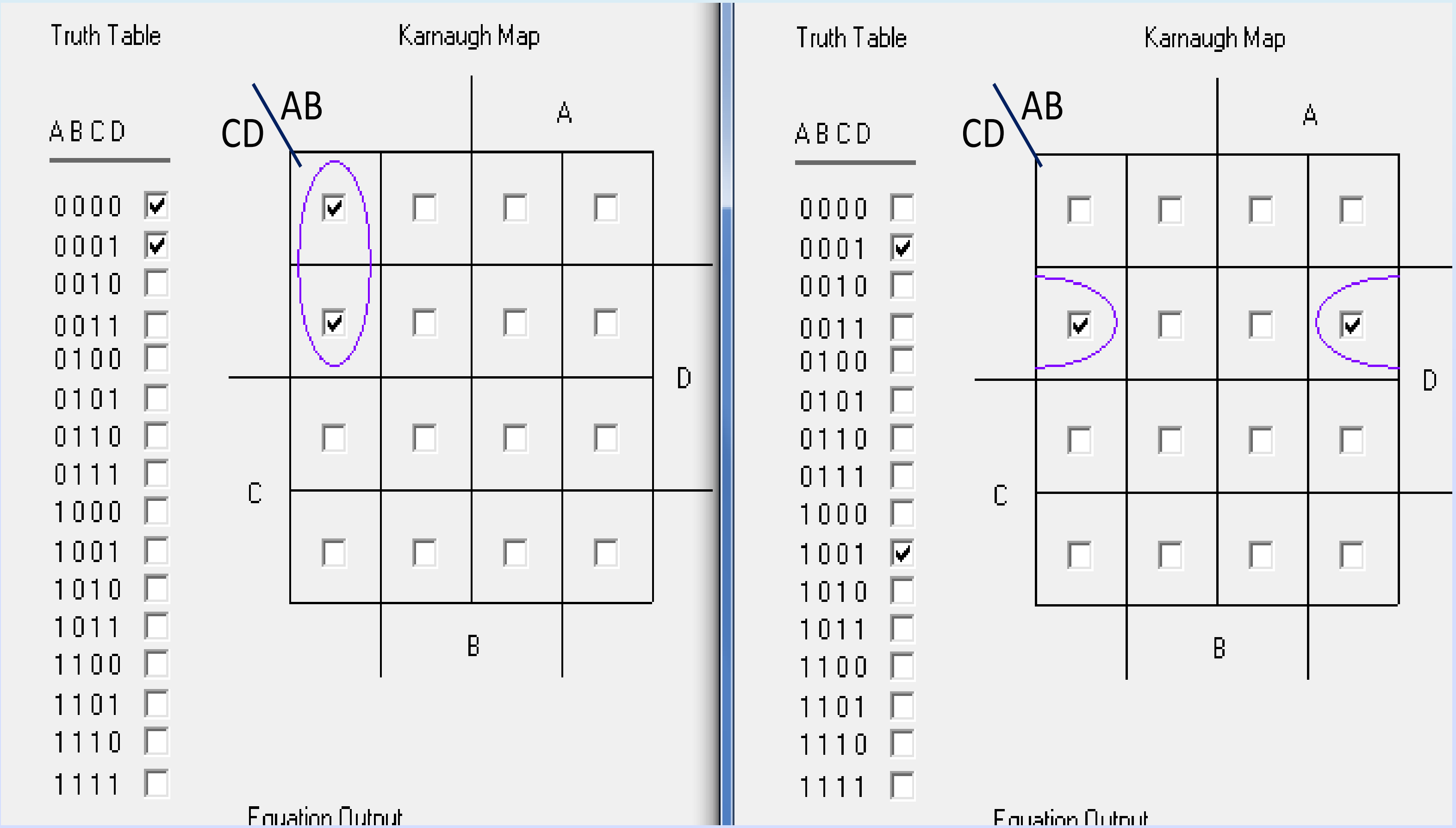
Ejercicios.

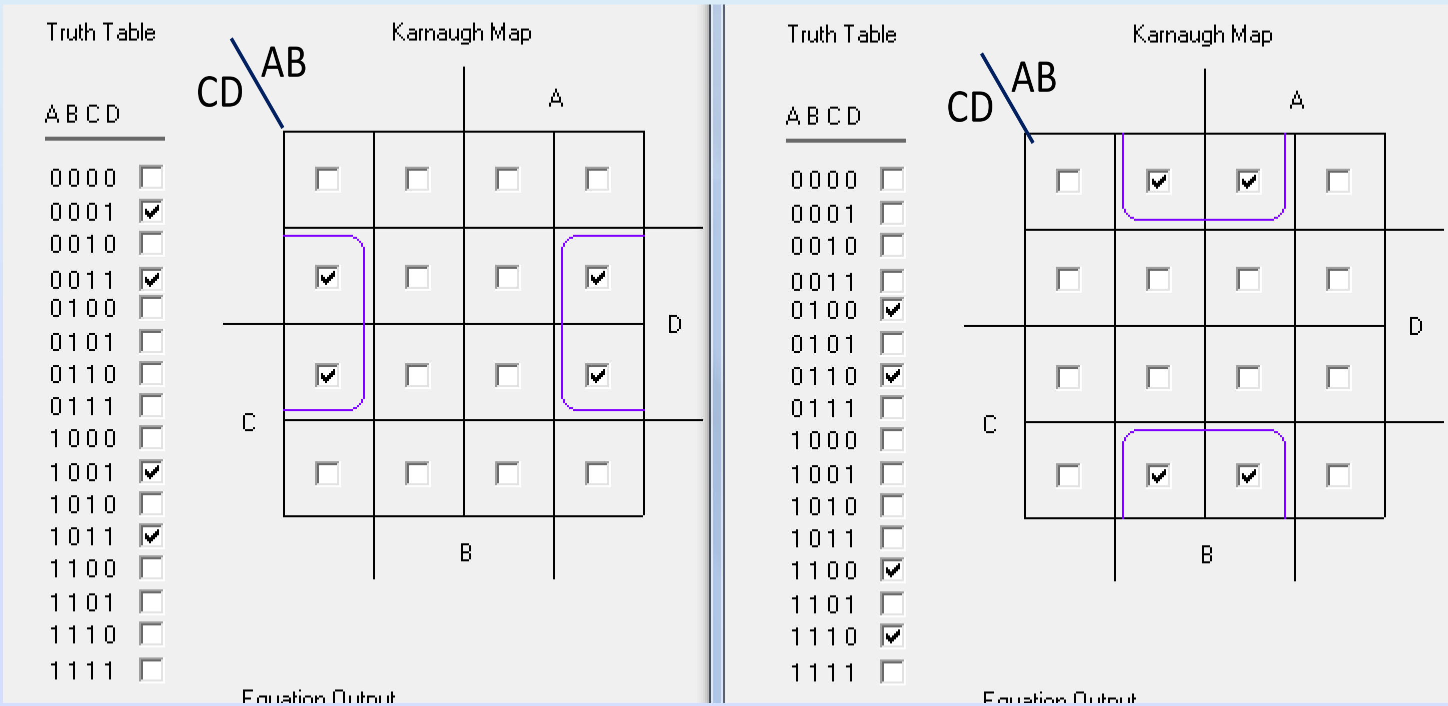
Obtener las expresiones booleanas como términos producto de los cubos que se representan en los mapas de Karnaugh, que se muestran en las siguientes transparencias.

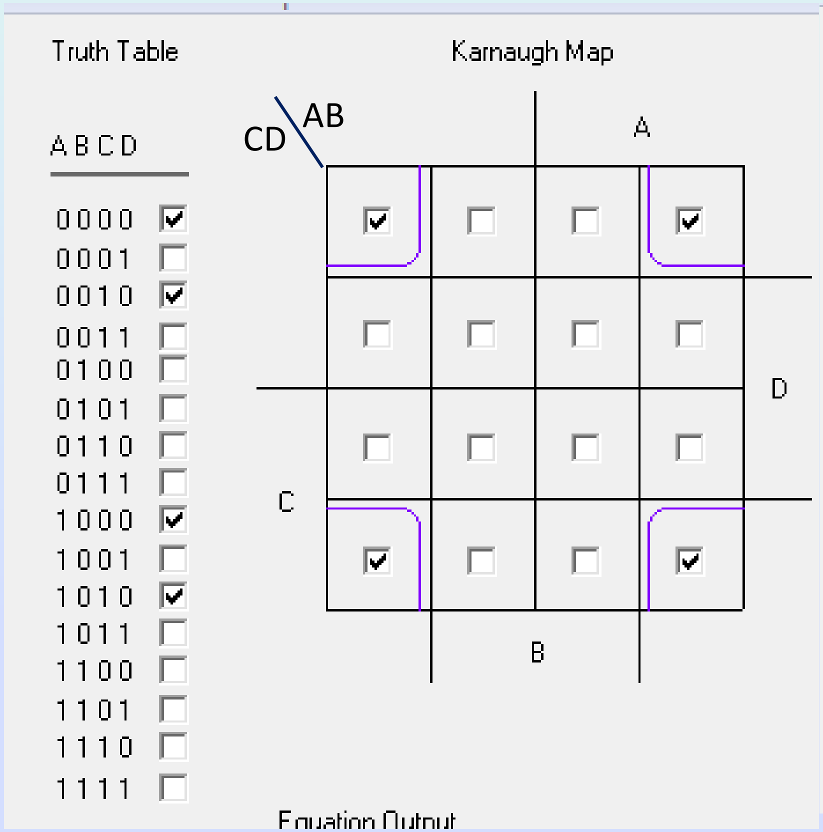

Truth Table
Karnaugh Map
A B C D
0 0 0 0
0 0 0 1
0 0 1 0
0 0 1 1
0 1 0 0
0 1 0 1
0 1 1 0
0 1 1 1
1 0 0 0
1 0 0 1
1 0 1 0
1 0 1 1
1 1 0 0
1 1 0 1
1 1 1 0
1 1 1 1
CD
AB
A
B
C
D
Equation Output

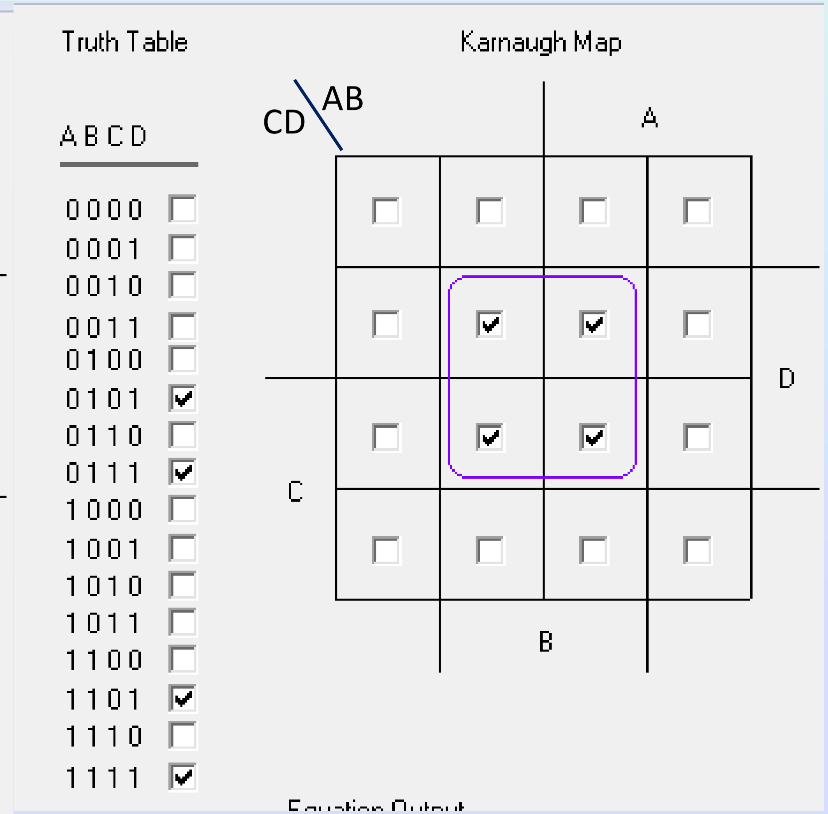

Truth Table
Karnaugh Map
A B C D
0 0 0 0
0 0 0 1
0 0 1 0
0 0 1 1
0 1 0 0
0 1 0 1
0 1 1 0
0 1 1 1
1 0 0 0
1 0 0 1
1 0 1 0
1 0 1 1
1 1 0 0
1 1 0 1
1 1 1 0
1 1 1 1
CD
AB
A
B
C
D
Equation Output

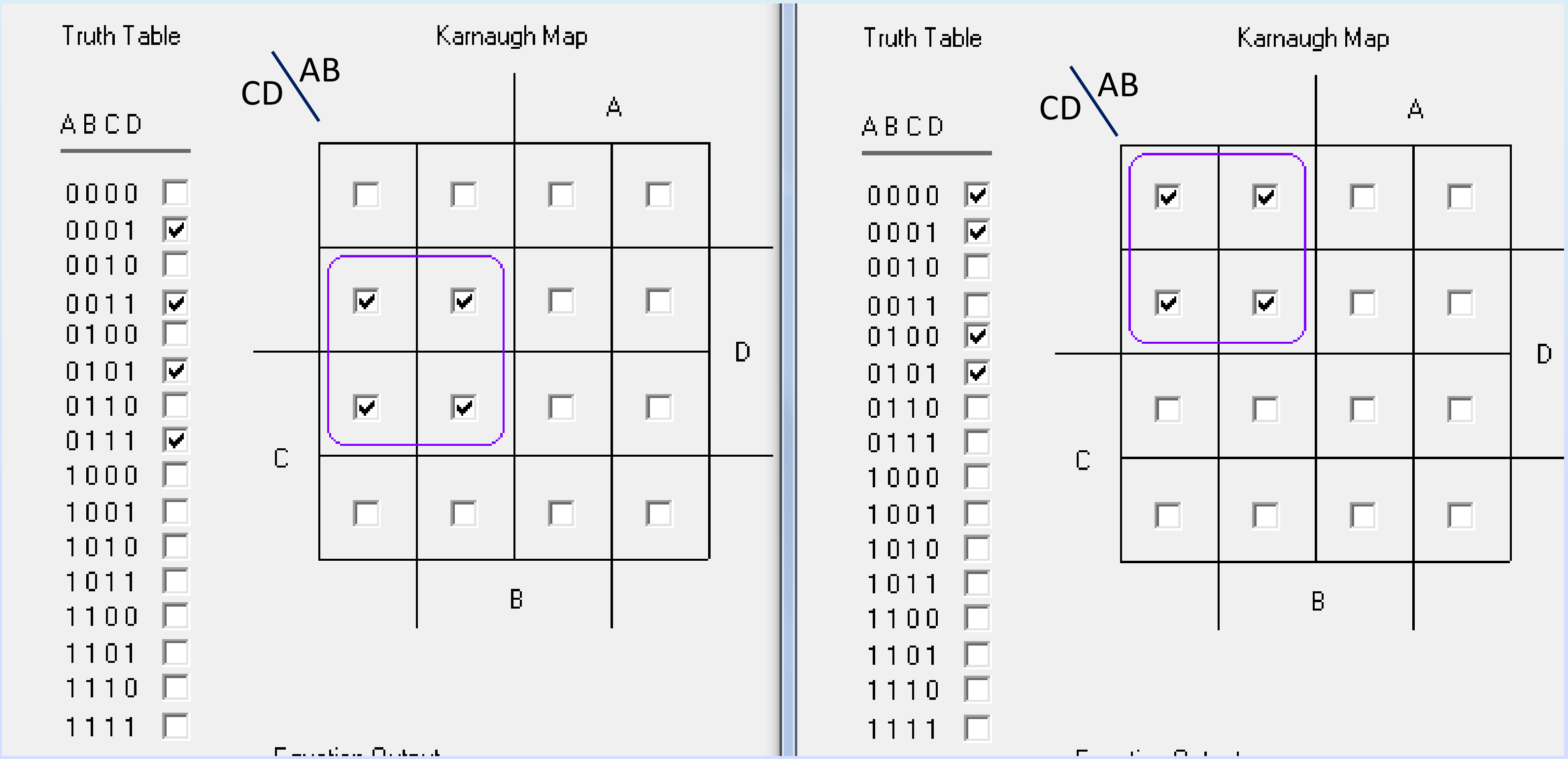

Truth Table
Karnaugh Map
CD
AB
A
ABCD
0000
0001
0010
0011
0100
0101
0110
0111
1000
1001
1010
1011
1100
1101
1110
1111
D
C
B
Truth Table
Karnaugh Map
CD
AB
A
ABCD
0000
0001
0010
0011
0100
0101
0110
0111
1000
1001
1010
1011
1100
1101
1110
1111
D
C
B

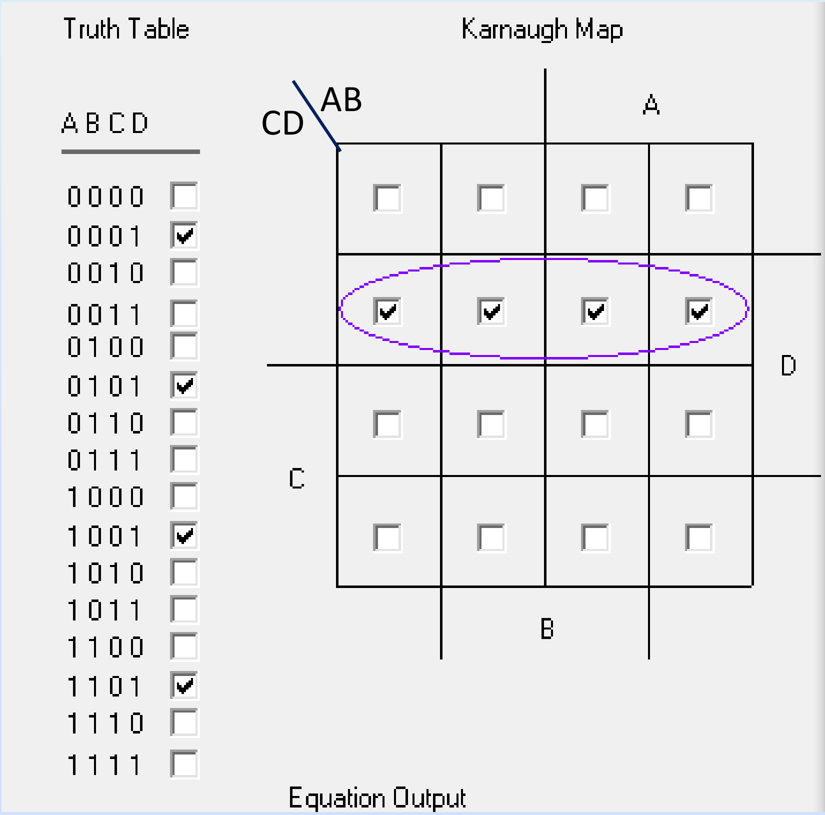

Truth Table
Karnaugh Map
A B C D
0 0 0 0
0 0 0 1
0 0 1 0
0 0 1 1
0 1 0 0
0 1 0 1
0 1 1 0
0 1 1 1
1 0 0 0
1 0 0 1
1 0 1 0
1 0 1 1
1 1 0 0
1 1 0 1
1 1 1 0
1 1 1 1
AB
CD
A
B
C
D
Equation Output
Truth Table
Karnaugh Map
A B C D
0 0 0 0
0 0 0 1
0 0 1 0
0 0 1 1
0 1 0 0
0 1 0 1
0 1 1 0
0 1 1 1
1 0 0 0
1 0 0 1
1 0 1 0
1 0 1 1
1 1 0 0
1 1 0 1
1 1 1 0
1 1 1 1
AB
CD
A
B
C
D
Equation Output

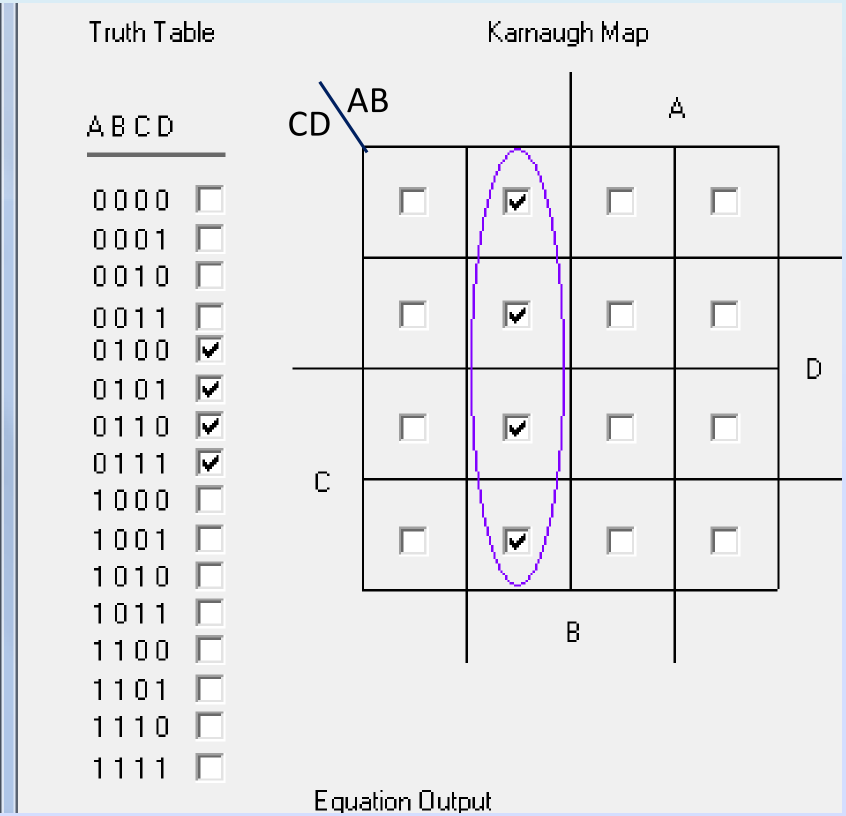

Truth Table
Karnaugh Map
AB
CD
A B C D
0000
0001
0010
0011
0100
0101
0110
0111
1000
1001
1010
1011
1100
1101
1110
1111
A
B
C
D
Equation Output

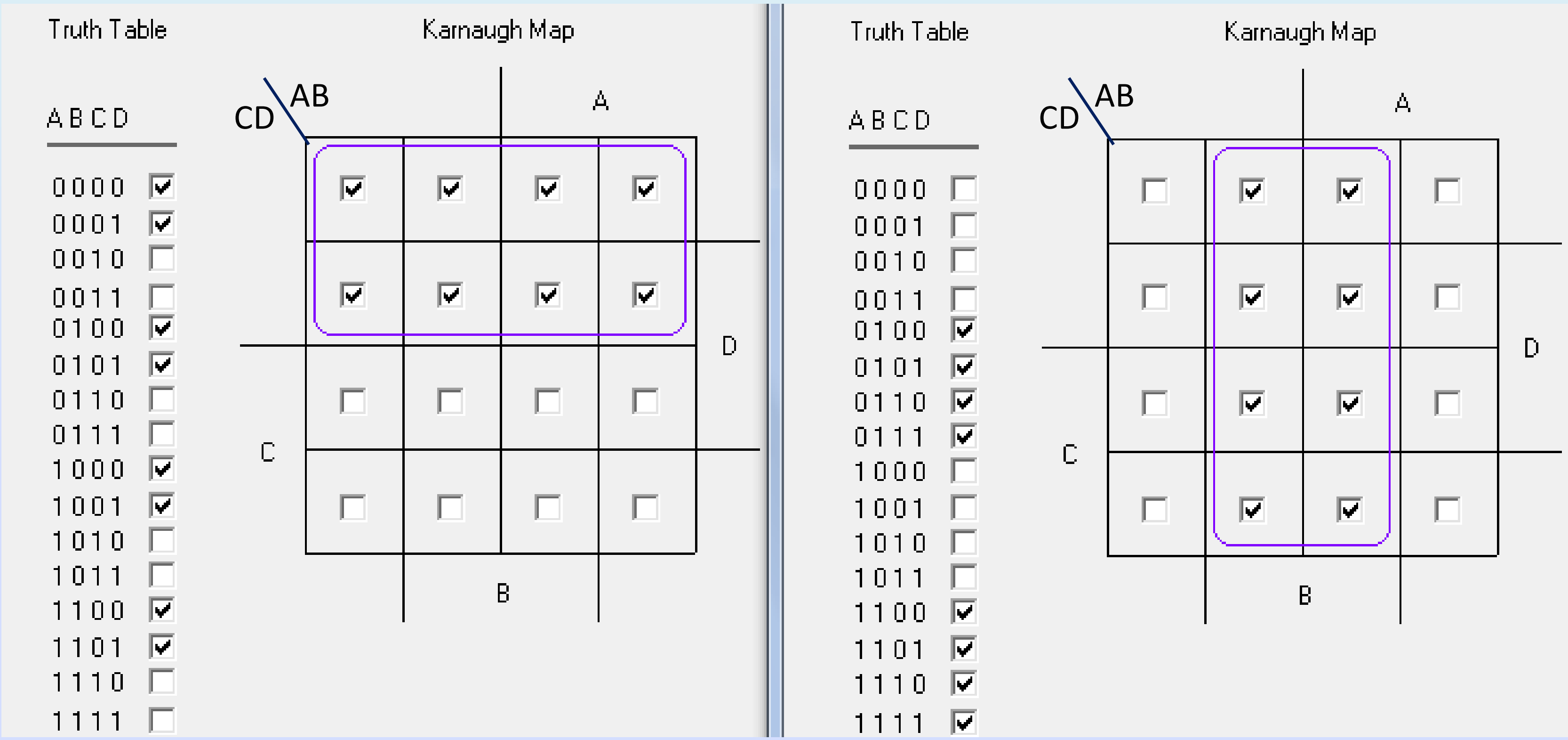

Truth Table
Karnaugh Map
AB
CD
A B C D
0000
0001
0010
0011
0100
0101
0110
0111
1000
1001
1010
1011
1100
1101
1110
1111
A
D
C
B
Equation Output

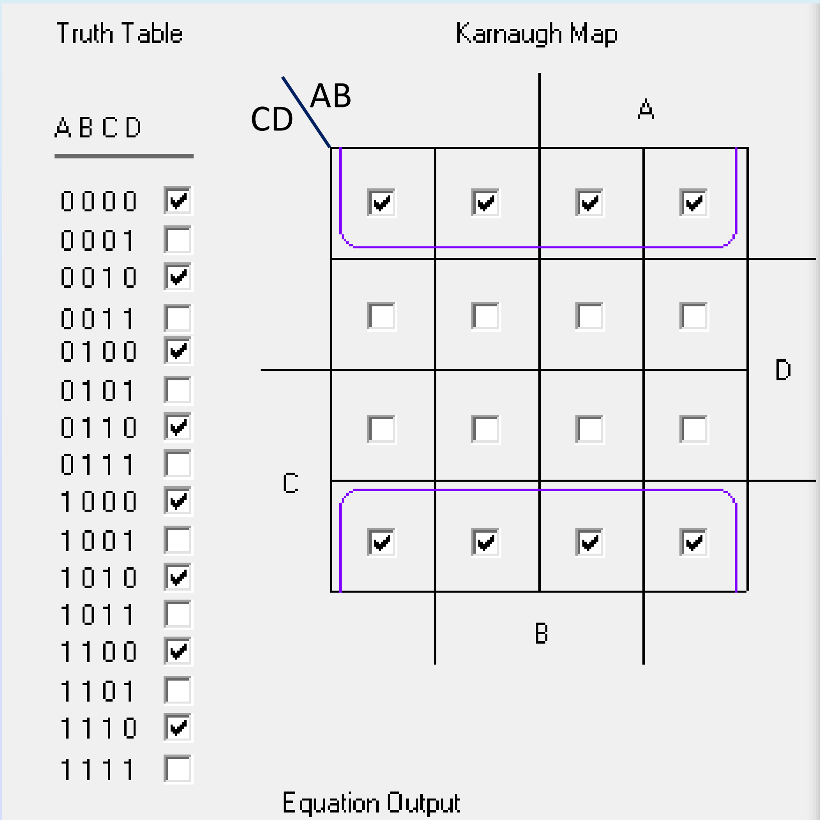

Truth Table
Karnaugh Map
AB
CD
A B C D
0000
0001
0010
0011
0100
0101
0110
0111
1000
1001
1010
1011
1100
1101
1110
1111
A
D
C
B

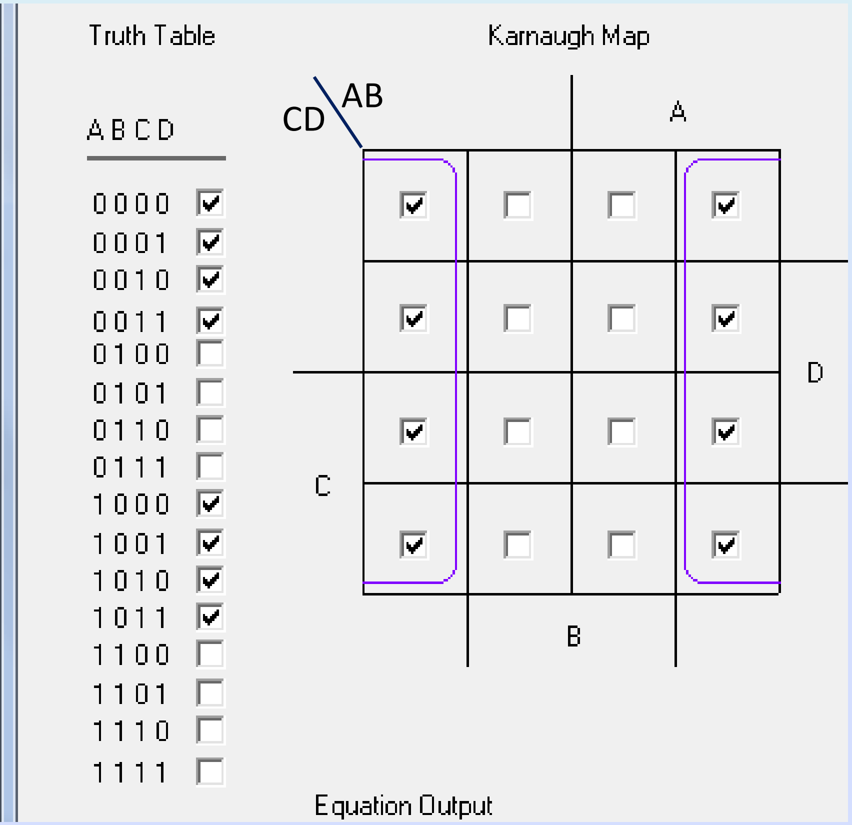

Truth Table
Karnaugh Map
AB
CD
A B C D
0000
0001
0010
0011
0100
0101
0110
0111
1000
1001
1010
1011
1100
1101
1110
1111
A
B
C
D
Truth Table
Karnaugh Map
AB
CD
A B C D
0000
0001
0010
0011
0100
0101
0110
0111
1000
1001
1010
1011
1100
1101
1110
1111
A
B
C
D


Truth Table
Karnaugh Map
ABCD
0000
0001
0010
0011
0100
0101
0110
0111
1000
1001
1010
1011
1100
1101
1110
1111
CD
AB
A
B
C
D
Equation Output


Truth Table
Karnaugh Map
ABCD
0000
0001
0010
0011
0100
0101
0110
0111
1000
1001
1010
1011
1100
1101
1110
1111
CD
AB
A
B
C
D
Equation Output


Truth Table
Karnaugh Map
A B C D
0000
0001
0010
0011
0100
0101
0110
0111
1000
1001
1010
1011
1100
1101
1110
1111
AB
CD
A
B
C
D
Truth Table
Karnaugh Map
A B C D
0000
0001
0010
0011
0100
0101
0110
0111
1000
1001
1010
1011
1100
1101
1110
1111
AB
CD
A
B
C
D


Truth Table
Karnaugh Map
ABCD
0000
0001
0010
0011
0100
0101
0110
0111
1000
1001
1010
1011
1100
1101
1110
1111
AB
CD
A
B
C
D
Equation Output


Truth Table
Karnaugh Map
ABCD
0000
0001
0010
0011
0100
0101
0110
0111
1000
1001
1010
1011
1100
1101
1110
1111
AB
CD
A
B
C
D
Equation Output

SEMINARIO 3

ALGEBRA DE CONMUTACIÓN.
FUNCIONES DE CONMUTACIÓN.

TECNOLOGÍA Y ORGANIZACIÓN DE COMPUTADORES

1º Grado en Ingeniería Informática.