Examen Final Geometría I

Alumno: José Alberto Hoces Castro

1. $\mathbb{R}^3[x]$

$U = \{a_0 + a_3x^3 : a_0, a_3 \in \mathbb{R}\}$

$W = \{a_1x + a_2x^2 : a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$

a) Calcular un endomorfismo $f: \mathbb{R}^3[x] \to \mathbb{R}^3[x]$ que verifique $f(U) = W$ y $f \circ f = f$

$U = \mathcal{L}\{1, x^3\}$ pues $U = \{a_0 \cdot (1) + a_3(x^3) : a_0, a_3 \in \mathbb{R}\}$

$W = \mathcal{L}\{x, x^2\}$ pues $W = \{a_1(x) + a_2(x^2) : a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$

Para que se cumpla que $f(U) = W$, debemos aplicar cada uno de los vectores de la base del subespacio U en los de la base del subespacio W:

$$\begin{matrix} f(1) = x \\ f(x^3) = x^2 \end{matrix} \Rightarrow f(U) = W$$

Ahora necesitamos saber la imagen de otros dos polinomios L.I. con 1 y x^3 para poder tener dicha aplicación totalmente definida. Para ello, emplearemos que $f \circ f = f$ sobre los dos polinomios cuya imagen ya está definida:

$$\boxed{f \circ f(1) = f(1)} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} f \circ f(1) = f(f(1)) = f(x) = x \\ f(1) = x \end{matrix}\right\} f(x) = x$$

$\boxed{f\circ f(x^3) = f(x^3)} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f\circ f(x_3) = f(f(x_3)) = f(x^2) = x^2 \\ f(x_3) = x^2 \end{array} \right\} f(x^3) = x^2$

$\boxed{f\circ f(x^2) = f(x^2)}$ Como ya tenemos definida la imagen de $f(x^2)$, lo comprobamos:

$f(x^2) = x^2 \quad f\circ f(x^2) = f(f(x^2)) = f(x^2) = x^2$

Igual se hace con $f(x) = x$:

$\boxed{f\circ f(x) = f(x)}$

$f(x) = x \quad f\circ f(x) = f(f(x)) = f(x) = x$

Se verifican las 2 condiciones, por lo que el endomorfismo pedido es el siguiente:

$$\boxed{\begin{array}{ll} f(1) = x & f(x^2) = x^2 \\ f(x) = x & f(x^3) = x^2 \end{array}} \qquad B_u = \{1, x, x^2, x^3\}$$

$$M(f; B_u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6) Base de la imagen por la aplicación traspuesta f^t del anulador de U.

Primero hallemos el an(U):

Como U tiene dimensión 2 y estamos en $\mathbb{R}_3[x]$, su anulador tendrá dimensión 2 también. Hallemos las dos formas lineales que lo generan calculando sus coordenadas respecto de la base usual dual de $\mathbb{R}_3[x]^*$.

$B_u^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ $\quad \psi = a\varphi_1 + b\varphi_2 + c\varphi_3 + d\varphi_4$

$$\left.\begin{array}{l} \psi(1) = 0 \Rightarrow (a\varphi_1 + b\varphi_2 + c\varphi_3 + d\varphi_4)(1) = 0 \Rightarrow a = 0 \\ \psi(x^3) = 0 \Rightarrow (a\varphi_1 + b\varphi_2 + c\varphi_3 + d\varphi_4)(x^3) = 0 \Rightarrow c = 0 \end{array}\right\} \text{b y d pueden tomar cualquier valor.}$$

Sol.: $(0, b, 0, d)$

$$an(U) = \mathcal{L}\{\underbrace{\varphi_2}_{\boxed{b=1,\ d=0}}, \underbrace{\varphi_2 + \varphi_4}_{\boxed{b=1,\ d=1}}\}$$

Ahora consideramos la matriz asociada a f^t respecto de la base usual dual que, como se vio en teoría, es la traspuesta de $M(f; B_u)$ que habíamos hallado en el apartado anterior.

$$M(f; B_u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow M(f^t; B_u^*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora podemos hallar $f^t(an(U))$, para ello hallaremos la imagen de cada forma lineal que genera al $an(U)$:

$\boxed{\varphi_2}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f^t(\varphi_2) = \varphi_1 + \varphi_2$$

$\varphi_2 = (0, 1, 0, 0)_{B_u^*}$

$\boxed{\varphi_2+\varphi_4}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f^t(\varphi_2+\varphi_4) = \varphi_1+\varphi_2$$

$$\varphi_2+\varphi_4 = (0,1,0,1)_{B_4^*}$$

Como para ambas formas lineales hemos obtenido la misma imagen, $f^t(an(V)) = \mathcal{L}\{\varphi_1+\varphi_2\}$

Alumno: José Alberto Hoces Castro

2. $f_\mu: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} -5 & \mu+2 & -2\mu-1 \\ -4 & 0 & 0 \\ -1 & \mu & -1 \end{pmatrix} \quad \mu \in \mathbb{R}$$

a) Para cada μ, hallar $\operatorname{Im}(f_\mu)$ y $\operatorname{Ker}(f_\mu)$. Determinar los valores para los que f_μ es un isomorfismo.

Hemos de empezar estudiando el rango de la matriz asociada a f respecto de las bases usuales:

$$\begin{vmatrix} -5 & \mu+2 & -2\mu-1 \\ -4 & 0 & 0 \\ -1 & \mu & -1 \end{vmatrix} = 8\mu^2+4\mu-4\mu-8 = 8\mu^2-8$$

$$8\mu^2-8=0 \Rightarrow \mu = \pm 1$$

Isomorfismo

Si $\mu \neq \pm 1$, el rango de la matriz es 3, lo que significa que $\operatorname{Im}(f_\mu)$ tendrá dimensión 3 y, por lo tanto, $\operatorname{Im}(f_\mu) = \mathcal{L}\{(-5,-4,-1),(\mu+2,0,\mu),(-2\mu-1,0,-1)\}$.
Como $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Ker}(f_\mu) + \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im}(f_\mu) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$, sabemos que $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Ker}(f_\mu) = 0$ y $\operatorname{Ker}(f_\mu) = \{0\}$.

$\boxed{\mu=-1} \Rightarrow$ La matriz tendrá rango 2 y $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im}(f_\mu) = 2$. $\operatorname{Im}(f_\mu)$ estará generada por 2 vectores L.I. que se obtienen de las columnas de la matriz:

$$\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{Im}(f_\mu) = \mathcal{L}\{(-5,-4,-1),(1,0,-1)\}$$

—

Ahora hallaremos el $Ker(f_\mu)$:

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -5x+y+z=0 \\ -4x=0 \Rightarrow x=0 \\ -x-y-z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y+z=0 \\ -y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} y=-z \\ y=-z \end{matrix} \qquad \text{Sol.: } (0,-z,z)$$

$$Ker(f_\mu) = \mathcal{L}\{(0,-1,1)\}$$

$\boxed{\mu=1} \Rightarrow$ Al igual que antes, la matriz tiene rango 2 y por lo tanto, $\dim_{\mathbb{R}} Im(f_\mu)=2$. Tomamos 2 columnas L.I. de dicha matriz:

$$\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 12 \neq 0 \Rightarrow \text{L.I. } 1^a \text{ y } 2^a \text{ columnas}$$

$$Im(f_\mu) = \mathcal{L}\{(-5,-4,-1),(3,0,1)\}$$

No es isomorfismo

Ahora hallaremos el $Ker(f_\mu)$:

$$\begin{pmatrix} -5 & 3 & -3 \\ -4 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -5x+3y-3z=0 \\ -4x=0 \Rightarrow x=0 \\ -x+y-z=0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{cases} 3y-3z=0 \\ y-z=0 \end{cases}\right\} y=z \Rightarrow \text{Sol.: } (0,z,z)$$

$$Ker(f_\mu) = \mathcal{L}\{(0,1,1)\}$$

No es isomorfismo

b) Hallar $\text{Im}(f_\mu) \cap \text{Ker}(f_\mu)$ y $\text{Im}(f_\mu) + \text{Ker}(f_\mu)$

El caso más sencillo es para $\mu \neq \pm 1$, pues $\dim_{\mathbb{R}} \text{Im}(f_\mu) = 3$ y $\dim_{\mathbb{R}} \text{Ker}(f_\mu) = 0$, por lo que

$$\left.\begin{array}{l} \text{Im}(f_\mu) \cap \text{Ker}(f_\mu) = \{0\} \\ \text{Im}(f_\mu) + \text{Ker}(f_\mu) = \mathbb{R}^3 \end{array}\right\} \text{Se cumple que son suma directa}$$

$\boxed{\mu = -1}$

$\boxed{\text{Ker}(f_\mu) + \text{Im}(f_\mu)}$

$\text{Ker}(f_\mu) = \mathcal{L}\{(0,-1,1)\}$

$\text{Im}(f_\mu) = \mathcal{L}\{(-5,-4,-1),(1,0,-1)\}$

$$\begin{vmatrix} 0 & -5 & 1 \\ -1 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 4 + 5 = 10 \neq 0 \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}(\text{Ker}(f_\mu) + \text{Im}(f_\mu)) = 3$$

$\text{Ker}(f_\mu) + \text{Im}(f_\mu) = \mathcal{L}\{(0,-1,1),(-5,-4,-1),(1,0,-1)\}$

$$\underset{1}{\underset{\parallel}{\dim_{\mathbb{R}} \text{Ker}(f_\mu)}} + \underset{2}{\underset{\parallel}{\dim_{\mathbb{R}} \text{Im}(f_\mu)}} = \dim_{\mathbb{R}}(\text{Ker}(f_\mu) \cap \text{Im}(f_\mu)) + \underset{3}{\underset{\parallel}{\dim_{\mathbb{R}}(\text{Ker}(f_\mu) + \text{Im}(f_\mu))}}$$

De aquí se deduce que:

$\text{Ker}(f_\mu) \cap \text{Im}(f_\mu) = \{0\}$ <u>Es suma directa</u>

$\boxed{\mu = 1}$ $\boxed{\text{Ker}(f_\mu) + \text{Im}(f_\mu)}$

$\text{Ker}(f_\mu) = \mathcal{L}\{(0,1,1)\}$

$\text{Im}(f_\mu) = \mathcal{L}\{(-5,-4,1),(3,0,1)\}$

$$\begin{vmatrix} 0 & -5 & 3 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & -11 & 1 \end{vmatrix} = -3+12+5 = 14 \neq 0 \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}(Ker(f_u)+Im(f_u)) = 3$$

$Ker(f_u)+Im(f_u) = \mathcal{L}\{(0,1,1),(-5,-4,1),(3,0,1)\}$

Como $\dim_{\mathbb{R}} Ker(f_u)=1$, $\dim_{\mathbb{R}} Im(f_u)=2$ y $\dim_{\mathbb{R}}(Ker(f_u)+Im(f_u))=3$, $\dim_{\mathbb{R}}(Ker(f_u)\cap Im(f_u))=0$ y $Ker(f_u)\cap Im(f_u)=\{0\}$. Por lo tanto, también es suma directa.

c) Base de $Im(f_u^t)$ y $Ker(f_u^t)$ donde f_u^t es la traspuesta de f_u.

$\boxed{u=1}$

$$M(f; B_u) = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -3 \\ -4 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B_u^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$$

$$M(f^t; B_u^*) = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$ Rango 2 por lo que se ha visto antes

Tomamos 2 columnas L.I.:

$Im(f_u^t) = \mathcal{L}\{-4\varphi_1, -\varphi_1+\varphi_2-\varphi_3\}$

Para el $Ker(f_u^t)$:

$$y = \frac{5x+z}{-4} = \frac{-\frac{2z}{3}}{-4}$$

$$\begin{pmatrix} -5 & -4 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -5x-4y-z=0 \\ 3x+z=0 \\ -3x-z=0 \end{cases}$$

Sol.: $\left(-\frac{z}{3}, \frac{z}{6}, z\right) \Rightarrow Ker(f_u^t) = \mathcal{L}\{-2\varphi_1+\varphi_2+6\varphi_3\}$

Para $\mu \neq \pm 1$:

$$\mathcal{M}(f_\mu ; B_\mu) = \begin{pmatrix} -5 & \mu+2 & -2\mu-1 \\ -4 & 0 & 0 \\ -1 & \mu & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rango 3 por lo visto antes}$$

$$\mathcal{M}(f_\mu^t : B_\mu^*) = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -1 \\ \mu+2 & 0 & \mu \\ -2\mu-1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rango 3 también}$$

$\mathrm{Ker}(f_\mu) = \{\varphi_0\}$ $\cancel{\mathrm{Im}(f_\mu) = \mathcal{L}\{-5\varphi_1 + (\mu+2)\varphi_2 + (-2\mu-1)\varphi_3, \varphi_3\}}$

Forma lineal nula

$$\mathrm{Im}(f_\mu) = \mathcal{L}\{-5\varphi_1 + (\mu+2)\varphi_2 + (-2\mu-1)\varphi_3, -4\varphi_1, -\varphi_1 + \mu\varphi_2 - \varphi_3\}$$

El caso para $\mu = -1$ se haría de forma análoga al de $\mu = 1$, pero no me da tiempo.