

GEOMETRÍA I. DGIIM

APLICACIONES LINEALES

Relación de problemas

1. Estudiar si las siguientes aplicaciones son lineales o no:

a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y) = (x - y, x + 3y, 2y).$

b) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (2x - 3y, z^2 - x + 2, 3y - z - x).$

c) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_2[u], f(x, y, z) = (2x + z)u^2 + (y - z)u + 2y.$

d) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow M_2[\mathbb{R}], f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y - z & x + 2z \\ y - 3z & 2x + y + z \end{pmatrix}.$

Para las aplicaciones que sean lineales, calcular su núcleo e imagen, y comprobar la fórmula de las dimensiones.

2. Calcular una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ cuyo núcleo esté generado por $\{(1, 0, -1), (2, 0, 1)\}$ y cuya imagen esté generada por $(1, -2).$
3. Encontrar un automorfismo f de $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ (esto es, f es un isomorfismo de $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ en sí mismo) de manera que $f(U) = U'$ donde

$$U = \{(a, b, 0) \in \mathbb{R}^3 : a, b \in \mathbb{R}\}, \quad U' = \{(c, c + d, d) \in \mathbb{R}^3 : c, d \in \mathbb{R}\}.$$

4. Sea $f : V \rightarrow V'$ una aplicación entre dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K . Demostrar que f es lineal si y sólo si el grafo de f , es decir, el conjunto:

$$G(f) = \{(v, v') \in V \times V' / v' = f(v)\}$$

es un subespacio vectorial de $V \times V'$. Calcular también la dimensión de este subespacio cuando V y V' son espacios finitamente generados.

5. Sean V_1 y V_2 espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K . Consideremos el espacio vectorial producto $V_1 \times V_2$ definido en el ejercicio 3 de la relación de problemas anterior.

- a) Demostrar que la *proyección i -ésima* $\pi_i : V_1 \times V_2 \rightarrow V_i$ dada por $\pi_i(v_1, v_2) = v_i$ es un epimorfismo para cada $i = 1, 2$.

b) Demostrar que las inclusiones $i_1 : V_1 \rightarrow V_1 \times V_2$ e $i_2 : V_2 \rightarrow V_1 \times V_2$ dadas por:

$$i_1(v_1) = (v_1, 0), \quad i_2(v_2) = (0, v_2)$$

son monomorfismos.

6. Sea V un espacio vectorial sobre K y $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo de forma que $f \circ f = f$. Demostrar que $V = \text{Nuc}(f) \oplus \text{Im}(f)$.

7. Sea V un espacio vectorial sobre $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ y $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo de forma que $f \circ f = \text{Id}_V$. Demostrar que f es un automorfismo y que $V = U \oplus W$, donde:

$$U = \{v \in V : f(v) = v\}, \quad W = \{v \in V : f(v) = -v\}.$$

8. En el espacio $M_2(\mathbb{C})$ de las matrices cuadradas de orden dos con coeficientes complejos se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & i \end{pmatrix}.$$

Definimos la aplicación $R : M_2(\mathbb{C}) \rightarrow M_2(\mathbb{C})$ dada por $R(X) = X \cdot A$. Demostrar que R es un automorfismo y calcular su expresión matricial con respecto a una base B de $M_2(\mathbb{C})$. ¿Cuál es la matriz $M(R^{-1}, B)$?

9. Sea $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal dada por:

$$f(x, y, z, t) = (x + z - t, y + t, x + y + z).$$

Se pide lo siguiente:

- Calcular bases del núcleo y de la imagen de f . ¿Es f un monomorfismo o un epimorfismo?
 - Sean $U = L((1, 2, 1, 2), (0, -1, 2, 3))$ y $U' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y = 0\}$. Calcular $f(U)$ y $f^{-1}(U')$.
 - Encontrar bases B de \mathbb{R}^4 y B' de \mathbb{R}^3 tales que $M(f, B' \leftarrow B)$ sólo tenga unos y ceros.
10. Sean V y V' dos espacios vectoriales reales con bases $B = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ y $B' = (v'_1, v'_2, v'_3)$, respectivamente. Si $f : V \rightarrow V'$ es la aplicación lineal definida por:

$$f(v_1) = v'_1 + v'_2 - 4v'_3, \quad f(v_2) = 2v'_1 + v'_2 - 2v'_3, \quad f(v_3) = 3v'_1 + v'_2, \quad f(v_4) = v'_1 + 2v'_3,$$

calcular la matriz $M(f, B' \leftarrow B)$. Calcular bases de $\text{Nuc}(f)$ y de $\text{Im}(f)$.

11. Sea f un endomorfismo de \mathbb{R}^3 que verifica las propiedades:

$$f(1, 0, 1) = (-1, 2, 0), \quad f(1, -1, 0) = (1, 2, 1), \quad \text{Nuc}(f) = L((0, 3, 7)).$$

Obtener la expresión matricial de f con respecto a la base usual de \mathbb{R}^3 . Calcular la matriz de f con respecto a la base de \mathbb{R}^3 dada por $B = ((-1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1))$.

12. Determinar un endomorfismo f de \mathbb{R}^3 con núcleo $\text{Nuc}(f) = L((1, 1, 0))$ e imagen dada por $\text{Im}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x - 3y = 0\}$. ¿Es f único en estas condiciones? Analizar si es posible encontrar bases B y B' de \mathbb{R}^3 de forma que:

$$M(f, B' \leftarrow B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

¿Es posible de modo que esta última matriz sea $M(f, B)$?

13. Una aplicación lineal $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ tiene por matriz asociada

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

respecto de las bases $B = ((1, 0, 1), (1, 1, 1), (2, 1, 0))$ y $B' = (1, 1 + 2x, -x^2)$, respectivamente. Calcular la matriz que representa a f respecto de la base usual de \mathbb{R}^3 y la base $B_3 = (1, x, x^2)$ de $\mathbb{R}_2[x]$. Calcular también bases del núcleo y de la imagen de f .

14. Calcular:

a) Una base B de \mathbb{R}^3 tal que $M(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, B_u \leftarrow B)$ sea la matriz dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Una base B' de \mathbb{R}^3 tal que $M(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, B' \leftarrow B_u)$ sea la matriz A anterior.

15. Sean $f: V \rightarrow V'$ y $g: V' \rightarrow V''$ dos aplicaciones lineales. Supongamos que B es una base de V , $B' = (v'_1, v'_2, v'_3)$ es una base de V' , B'' es una base de V'' , y:

$$M(f, B' \leftarrow B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad M(g, B'' \leftarrow B') = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

donde $\bar{B}' = (2v'_2 - v'_3, v'_2 - v'_3, 3v'_1 + v'_2 - v'_3)$. Calcular $M(g \circ f, B'' \leftarrow B)$.

16. Se consideran dos aplicaciones lineales entre espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $f : V \rightarrow V', g : V' \rightarrow V''$. Demuéstrese:
 $g \circ f$ es la aplicación nula si y sólo si $\text{Im}(f) \subset \text{Nuc}(g)$.
17. Sea $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo de un e.v tal que $f \circ f = 0$. Demuéstrese:
 (a) Si $v_1, \dots, v_r \in V$ verifican que $(f(v_1), \dots, f(v_r))$ es linealmente independiente entonces $(v_1, \dots, v_r, f(v_1), \dots, f(v_r))$ es linealmente independiente.
 (b) Si $\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}$, existe una base B de V tal que, escribiendo la matriz por cajas:

$$M(f, B) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_r \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right),$$

donde I_r es la matriz identidad de orden $r \leq n/2$.

18. Sea $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ un endomorfismo del que se sabe que:

$$f(1, 1, 0, 0) = (0, 1, 0, -1) \quad \text{y} \quad f(1, 0, 1, 0) = (1, 1, 1, 0).$$

Calcular la matriz de f respecto de la base usual en cada uno de los siguientes casos:

- a) $\text{Nuc}(f) = \text{Im}(f)$.
 b) $f \circ f = f$.
 c) $f \circ f = \text{Id}_{\mathbb{R}^4}$.

¿Cuál es, en cada caso, la imagen del vector $(1, 3, 7, 1)$?

19. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & a \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & -4 \end{pmatrix},$$

- a) Calcular los valores de a para los que A y A' son equivalentes.
 b) Para dichos valores de a encontrar matrices $P \in GL(4, \mathbb{R})$ y $Q \in GL(3, \mathbb{R})$ tales que $A' = Q^{-1} \cdot A \cdot P$.
 c) Para los valores de a calculados en el primer apartado se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuya matriz con respecto a las bases usuales es A . Calcular una base B de \mathbb{R}^4 y una base B' de \mathbb{R}^3 de forma que $M(f, B' \leftarrow B) = A'$.

20. Decidir razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

- a) Existe un endomorfismo f de \mathbb{R}^3 tal que $f(1, 0, 0) = (2, 0, 1)$, $f(0, 1, 0) = (0, 0, 0)$ y $f(1, 1, 0) = (2, -1, 7)$.

- b) Existe una aplicación lineal $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ distinta de la aplicación lineal cero y con núcleo distinto de $\{0\}$.
- c) Si $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ y $B \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ cumplen que $A \cdot B = I_m$ y $B \cdot A = I_n$ entonces $m = n$.
- d) Existe un isomorfismo $f : \mathbb{C}_5[x] \rightarrow M_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^2$.
- e) Si $n, m \in \mathbb{N}$ y $m \geq n$ entonces existe un epimorfismo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.
- f) Si $n, m \in \mathbb{N}$ y $m \geq n$ entonces existe un monomorfismo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.
- g) Para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$ se cumple que $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ es isomorfo a \mathbb{R}^{n+m} .
- h) Si un sistema de ecuaciones lineales tiene menos ecuaciones que incógnitas entonces el sistema no puede ser compatible determinado.
- i) Existe un automorfismo f de \mathbb{R}^3 de forma que:

$$f(\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = 0\}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 0\}.$$

- j) Para cada $r \in \mathbb{R}$ la aplicación $f_r : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ dada por:

$$f_r(ax^2 + bx + c) = rax^2 + bx + c$$

es un automorfismo.

21. (La traza de un endomorfismo) Sea $n \in \mathbb{N}$ y $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$. Se define la *traza* de A como el escalar de K dado por:

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Se pide lo siguiente:

- a) Demostrar que la aplicación $\text{tr} : M_n(K) \rightarrow K$ que asocia a cada matriz cuadrada su traza es lineal.
- b) Probar que $\text{tr}(A \cdot B) = \text{tr}(B \cdot A)$ para cualesquiera $A, B \in M_n(K)$. Deducir que dos matrices semejantes tienen la misma traza.
- c) Utilizar el apartado anterior para definir la traza de un endomorfismo de un espacio vectorial V sobre K .
- d) Encontrar dos matrices con el mismo rango y la misma traza que no sean semejantes.