GEOMETRÍA I. Examen del Tema 3
– Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas –
Curso 2013/14

<u>Nombre</u>:

1. Probar que la aplicación $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(A) = A + A^t$ es lineal y hallar una base del núcleo. Hallar una base de la imagen.

2. Hallar un isomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to P_2[x]$ tal que $f(U) = W$, donde $U = \{(x, y, z) : x - 2y = 0\}$ y $W = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 : a_0 + a_1 + 2a_2 = 0\}$. Hallar la imagen de $(4, 2, -3)$.

3. Hallar la base dual de $B = \{(0, 1, 1), (0, 1, 2), (1, -1, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$. Respecto de dicha base, hallar las coordenadas de una base de $\mathrm{an}(U)$ donde $U = \{(x, y, z) : x - y = 0\}$.

4. Sea $f : V \to V$ una aplicación lineal tal que $f \circ f = f$. Probar que $V = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$. Hallar un endomorfismo no trivial de $\mathbb{R}^2$ con la anterior propiedad.

`Razonar todas las respuestas`

SOLUCIONES

1. (a) Sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, y $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Usamos que la traspuesta de la suma de matrices es la suma de las traspuestas y que la traspuesta de un escalar por una matriz es el escalar por la traspuesta de la matriz. Por tanto

$$\begin{aligned} f(\lambda A + \mu B) &= (\lambda A + \mu B) + (\lambda A + \mu B)^t = \lambda A + \mu B + \lambda A^t + \mu B^t \\ &= \lambda(A + A^t) + \mu(B + B^t) = \lambda f(A) + \mu f(B). \end{aligned}$$

Sea $A \in Ker(f)$. Entonces $f(A) = A + A^t = 0$, es decir, $A^t = -A$. Por tanto, el núcleo de f es el subespacio de las matrices antisimétricas, cuya base es $\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\}$.

(b) Un sistema de generadores de la imagen es la imagen de una base. Tomando la base usual $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, tenemos

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ f(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ f(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, f(e_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Escribiendo en coordenadas respecto de la base usual, tenemos

$$\{(2,0,0,0), (0,1,1,0), (0,1,1,0), (0,0,0,2)\}.$$

Evidentemente el tercer vector está repetido, luego se quita. Y como sabemos que $r(f) = 4 - n(f) = 4 - 1 = 3$, entonces los que quedan son linealmente independientes. Por tanto, una base de la imagen es $\{f(e_1), f(e_2), f(e_4)\}$.

2. (a) Para que sea isomorfismo, basta con llevar una base en otra base. Damos el isomorfismo mediante la imagen de una base. Calculamos bases de U y W sin más que resolver el sistema de ecuaciones. Para el primero, tenemos $U =< (2,1,0), (0,0,1) >$ y $W =< 1 - x, 2 - x^2 >$. Ampliamos la base de U a una de $\mathbb{R}^3$, y del mismo modo, hacemos con la de W: $B = \{(2,1,0), (0,0,1), (0,1,0)\}$ y $B' = \{1 - x, 2 - x^2, 1\}$. Definimos f mediante

$$f(2,1,0) = 1 - x,\ f(0,0,1) = 2 - x^2,\ f(0,1,0) = 1,$$

probando que es un isomorfismo. Para probar que $f(U) = W$, basta con darse cuenta de

$$f(U) = f(< (2,1,0), (0,0,1) >) =< f(2,1,0), f(0,0,1) >=< 1-x, 2-x^2 >= W.$$

(b) Para hallar $f(4,2,-3)$, hallamos las coordenadas de $(4,2,-3)$ respecto de B: $(4,2,-3) = 2(2,1,0) - 3(0,0,1) + 0(0,1,0)$. Por tanto,

$$f(4,2,-3) = 2f(2,1,0) - 3f(0,0,1) + 0f(0,1,0) = -4 - 2x + 3x^2.$$

3. (a) Sea $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ base dual pedida. Sabemos que $\alpha_1(x, y, z) = ax + by + cz$ con $\alpha_1(e_i) = \delta_{1i}$. Sustituyendo por la base de la cual es dual, tenemos que resolver el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{r} b + c = 1 \\ b + 2c = 0 \\ a - b + c = 0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow a = 3, b = 2, c = -1.$$

Y así hacemos para α_2 y α_3, obteniendo

$$\alpha_1(x, y, z) = 3x + 2y - z, \;\; \alpha_2(x, y, z) = -2x - y + z, \;\; \alpha_3(x, y, z) = x.$$

(b) Sabemos por teoría que las coordenadas respecto de una base B^* de una base del anulador de U es tomar los coeficientes de las ecuaciones cartesianas de U, cuando éstas son respecto de B. Tomamos la base usual de $\mathbb{R}^3$. Entonces $an(U) =< (1, -1, 0) >=< \omega_1 - \omega_2 >$, donde $B_u^* = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Por tanto, lo que se pregunta son las coordenadas de $\omega_1 - \omega_2$ respecto de la base dual calculada anteriormente. Si escribimos todo respecto de B_u^*, el sistema que hay que resolver es

$$(1, -1, 0) = \lambda(3, 2, -1) + \mu(-2, -1, 1) + \delta(1, 0, 0),$$

obteniendo $(-1, -1, 2)$.

4. (¡Hecho en clase!) Para ver que está en suma directa es suficiente con que $Ker(f) \cap Im(f) = \{0\}$ y que $dim(Ker(f)) + dim(Im(f)) = dim(V)$. Esto último viene asegurado por la fórmula de las dimensiones. Para la intersección, sea $v \in Ker(f) \cap Im(f)$. Ya que $v \in Im(f)$, existe $u \in V$ tal que $f(u) = v$. Por tanto,

$$0 = f(v) = f(f(u)) = (f \circ f)/u) = f(u) = v,$$

donde la primera igualdad se debe a que $v \in Ker(f)$ y la última, a que $f(u) = v$.

5. Sea $B = \{e_1, e_2\}$ una base de $\mathbb{R}^2$. Definimos $f(e_1) = 0$ y $f(e_2) = e_2$. Entonces

$$(f \circ f)(e_1) = f(f(e_1)) = f(0) = 0 = f(e_1), \quad (f \circ f)(e_2) = f(f(e_2)) = f(e_2).$$

Por tanto, $f \circ f = f$ para una base, luego también para cualquier vector por linealidad.

Si tomamos B la base usual, entonces en el caso anterior tenemos: $f(x, y) = f(xe_1 + ye_2) = x(0, 0) + ye_2 = (0, y)$.

GEOMETRÍA I. Examen del Tema 3
– Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas –
Curso 2011/12

Nombre:

Razonar todas las respuestas

1. (a) Si $f \in L(V, V')$, B es base de V y $f(B)$ es un conjunto de vectores linealmente independiente, ¿f es inyectiva?
   (b) Si $f \in \mathrm{End}(V)$ con $M(f, B, B') = I$, ¿es cierto que $f = \mathrm{Id}$?
   (c) Si $f \in L(V, V')$, probar que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{an}(\mathrm{Im}(f^t))$.
2. En $\mathbb{R}^3$ se considera $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x + y = 0\}$. Hallar un endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ tal que $\mathrm{Ker}(f) = U$. Hallar una base de $\mathrm{Im}(f)$. Hallar $M(f, B_u)$.
3. Sea $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + y - z = 0\}$. Hallar una base de $an(U)$. Ampliar a una base B' de $\mathbb{R}^{4*}$. Hallar la base B de $\mathbb{R}^4$ tal que $B^* = B'$ (todo lo anterior en términos de B_u^*).
4. Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y, z) = (x + y, y + z)$ y $\varphi \in \mathbb{R}^{2*}$ dada por $\varphi(x, y) = x - 2y$. Hallar una base de $\mathrm{Ker}(f)$. Calcula las coordenadas de $f^t(\varphi)$ respecto de la base usual de $\mathbb{R}^{3*}$.

Soluciones (puede haber diferentes maneras correctas de responder a las preguntas)

1. (a) Sí. La aplicación será inyectiva si $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$. Sea $v \in \mathrm{Ker}(f)$. Sean $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tal que $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$. Entonces $0 = f(v) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i)$. Como $f(B)$ es un conjunto de vectores linealmente independiente, entonces $\lambda_i = 0$, para todo i y por tanto, $v = 0$.

   (b) No. Sea V un espacio vectorial cualquiera, B y B' bases (distintas) de V y f el endomorfismo definido por $f(e_i) = e'_i$, $1 \leq i \leq n$. Entonces $f \neq \mathrm{Id}$ pues $B \neq B'$ pero $M(f, B, B') = I$.

   (c) Primero se prueba que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{an}(\mathrm{Im}(f^t))$ y luego que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathrm{an}(\mathrm{Im}(f^t)))$ (usaremos $V^{**} = V$). Sea $v \in \mathrm{Ker(f)}$. Tomamos $\varphi \in Im(f^t)$ y hay que probar que $v(\varphi) = 0$, es decir, $\varphi(v) = 0$. Como $\varphi \in Im(f^t)$, existe $\varphi' \in V'^*$ tal que $f^t(\varphi') = \varphi$. Por tanto,

$$\varphi(v) = f^t(\varphi')(v) = \varphi'(f(v)) \overset{(1)}{=} \varphi'(0) = 0,$$

   donde en (1) se ha usado que $v \in \mathrm{Ker}(f)$.
   Por otro lado, si $n = dim(V) = dim(V^*)$, se tiene

$$\dim(\mathrm{an}(\mathrm{Im}(f^t))) = n - \dim(Im(f^t)) \overset{(1)}{=} n - \dim(Im(f)) \overset{(2)}{=} \dim(\mathrm{Ker(f)}),$$

   donde en (1) se usa que $r(f) = r(f^t)$ y en (2) que $n = \dim(\mathrm{Ker(f)}) + r(f)$.

2. Como sólo hay una ecuación cartesiana de U, entonces $\dim(U) = 2$ y una base de U es $\{(-1, 2, 0), (0, 0, 1)\}$. Ampliamos a una base de $\mathbb{R}^3$: $B = \{(-1, 2, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0)\}$, pues al poner los tres vectores en una matriz, su determinante no es cero (es justamente 1). Se define f mediante

$$f(-1, 2, 0) = f(0, 0, 1) = (0, 0, 0), f(0, 1, 0) = (1, 0, 0).$$

   Entonces

$$(-1, 2, 0), (0, 0, 1) \in \mathrm{Ker}(f) \Rightarrow U =< (-1, 2, 0), (0, 0, 1) >\subset \mathrm{Ker}(f)$$

   y $\dim(\mathrm{Ker}(f)) \geq 2$. Por otro lado,

$$(1, 0, 0) = f(0, 1, 0) \in \mathrm{Im}(f) \Rightarrow< (1, 0, 0) >\subset Im(f)$$

   y así $\dim(\mathrm{Im}(f)) \geq 1$. Como $\dim(\mathbb{R}^3) = 3 = n(f) + r(f)$, entonces $n(f) = 2$, $r(f) = 1$ y tenemos igualdades en todas las inclusiones anteriores. De paso, una base de $\mathrm{Im}(f)$ es $\{(1, 0, 0)\}$.

Para hallar la matriz, sólo hay que calcular $f(1,0,0)$. Hallando las coordenadas de este vector respecto de B, obtenemos que son: $(-1/2, 0, 1/2)$, luego

$$f(1,0,0) = -\frac{1}{2}f(-1,2,0) + \frac{1}{2}f(0,1,0) = (\frac{1}{2}, 0, 0).$$

Por tanto,

$$M(f, B_u) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Si $B_u^* = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, y como la ecuación cartesiana de U respecto de B_u es $x + y - z = 0$, entonces una base de $an(U)$ es $\{(1, 1, -1, 0)\}$, escrito el vector en coordenadas respecto de B_u^*, es decir, $\{\omega_1 + \omega_2 - \omega_3\}$.

   Si escribimos este vector en coordenadas respecto de B_u^* y ampliamos hasta una base de $\mathbb{R}^4$, obtenemos las coordenadas de vectores de $\mathbb{R}^{4^*}$ respecto de B_u^* que forman una base de $\mathbb{R}^{4^*}$. Basta con tomar: $\{(1, 1, -1, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$, es decir, $B' = \{\omega_1 + \omega_2 - \omega_3, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$.

   Sea $B' = B^* = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ y $B' = \{e_1', e_2', e_3', e_4'\}$. Escribimos $e_1' = (a, b, c, d)$ y aplicamos a e_1' los elementos de B':

$$a + b - c = 1, b = 0, c = 0, d = 0.$$

   Resolviendo, queda $e_1' = (1, 0, 0, 0)$. Del mismo modo se hace para los demás vectores, obteniendo: $e_2' = (-1, 1, 0, 0)$, $e_3' = (1, 0, 1, 0)$ y $e_4' = (0, 0, 0, 1)$.

4. Se tiene $\text{Ker}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y = 0, y + z = 0\}$. Como las dos ecuaciones son linealmente independientes, entonces $\dim(\text{Ker}(f)) = 3 - 2 = 1$. Dando valores a z, obtenemos un vector del núcleo, que constituirá, por tanto, una base del mismo: $\text{Ker}(f) =< (1, -1, 1) >$.

   Hallamos $f^t(\varphi)$.

$$f^t(\varphi)(x, y, z) = \varphi(f(x, y, z)) = \varphi(x + y, y + z) = x + y - 2(y + z) = x - y - 2z.$$

   Por tanto, si $B_u = \{e_1, e_2, e_3\}$ y $B_u^* = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, las coordenadas de $f^t(\varphi)$ son $(1, -1, -2)$.

———————-

Observaciones:

En el ejercicio 1. (a), como $f(B)$ es un sistema de generadores de $Im(f)$, entonces $f(B)$ es una base de $Im(f)$. Esto prueba que $\dim(V) = \dim(Im(f))$. Por la fórmula de las dimensiones, se tiene $\dim(Ker(f)) = 0$, es decir, f es inyectiva.

En el ejercicio 4, segundo apartado, podemos escribir $f^t(\varphi) = a\omega_1 + b\omega_2 + c\omega_3$. Aplicando a ambos lados la base B_u, se tiene

$$a = f^t(\varphi)(e_1), b = f^t(\varphi)(e_2), c = f^t(\varphi)(e_3).$$

Por la definición de f^t, f y φ, se concluye

$$a = f^t(\varphi)(e_1) = \varphi(f(e_1)) = \varphi(1, 0) = 1$$

$$b = f^t(\varphi)(e_2) = \varphi(f(e_2)) = \varphi(1, 1) = -1$$

$$c = f^t(\varphi)(e_3) = \varphi(f(e_3)) = \varphi(0, 1) = -2$$

y las coordenadas son $(1, -1, -2)$, es decir, $f^t(\varphi) = \omega_1 - \omega_2 - 2\omega_3$.

Geometría I

Grado en Matemáticas. Grupo A

Segunda prueba intermedia

22 de enero de 2015

Ejercicio 1.- Contesta razonadamente a las siguientes cuestiones:

(a) **[0.5 puntos]** Sea V un espacio vectorial sobre K con $\dim_K(V) = 1$ ¿Es cierto que para cada $f \in \mathrm{End}_K(V)$ existe un único $a \in K$ de manera que $f(v) = a\,v$, para todo $v \in V$?

(b) **[0.5 puntos]** Para $g \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ se sabe que $g(1,3) = (0,2)$ y $g(4,2) = (1,1)$ ¿Puede ocurrir que $g(2,5) = g(1,2)$?

(c) Se sabe que $h \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ tiene $\mathrm{rango}(h) = 1$.

[1 punto] ¿Es posible encontrar bases ordenadas B y B' de $\mathbb{R}^2$ de manera que

$$M(h, B, B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}?$$

[1 punto] ¿Es posible encontrar siempre una base ordenada $\widetilde{B}$ de manera que

$$M(h, \widetilde{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}?$$

(d) **[1 punto]** Considera dos formas lineales $\alpha, \beta \in (\mathbb{R}^2)^*$, ambas no nulas y tales que $\mathrm{Ker}(\alpha) = \mathrm{Ker}(\beta)$ ¿Existe $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, tal que $\beta = c\,\alpha$?

Ejercicio 2.- **[3 puntos]** Considera los subespacios $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + 2y - z = 0\}$ y $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x - 3y + 2z = 0,\ x + y + z = 0\}$ de $\mathbb{R}^3$. Construye, si es posible, un endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ que cumpla $\mathrm{Im}(f) = U$ y $\mathrm{Ker}(f) = W$, dando su matriz respecto de la base ordenada usual de $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 3.- Sea $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices antisimétricas reales de orden 3. Considera la forma lineal $\varphi \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})^*$ dada por $\varphi(A) = b - c$, para cada

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix},\ a, b, c \in \mathbb{R}.$$

(a) **[1 punto]** Encuentra una base $\widetilde{\mathcal{B}}$ de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})^*$ que contenga a φ.

(b) **[1 punto]** Calcula la base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ cuya dual es $\widetilde{\mathcal{B}}$.

(c) **[1 punto]** En una base ordenada $\widetilde{B}$ obtenida de $\widetilde{\mathcal{B}}$, calcula las coordenadas de la forma lineal ψ, dada por $\psi(A) = 2a + 3c$.

Duración: 2 horas.

Una resolución

1(a) Como $\dim_K V = 1$, tomo $\mathcal{B} = \{v_1\}$ base de V. Existe $a \in K$ de manera que $f(v_1) = a v_1$. Dado $v \in V$ cualquiera escribimos $v = b v_1 \Rightarrow f(v) = b\, f(v_1) = b(a v_1) = (ba) v_1 = (ab) v_1 = a(b v_1) = a v$ (donde $ab = ba$ pues K es conmutativo).

1(b) Como $\{(1,3),(4,2)\}$ son independientes (compruébese) entonces forman una base de $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$. Como $\{(0,2),(1,1)\}$ también es base (compruébese) g lleva base en base. Por tanto g es biyectiva. Si ocurriera $g(2,5) = g(1,2)$ ya no sería inyectiva.

1(c) Primera parte: Como $\text{rango}(f) = 1 \Rightarrow \text{nulidad}(f) = 2 - 1 = 1$. Tomo $\{v_2\}$ base de $\text{Ker}(f)$. Amplío a una base $B = (v_1, v_2)$ de $\mathbb{R}^2$. Como $f(v_1) \neq 0$, llamo $v_1' = f(v_1)$ y amplío $\{v_1'\}$ a una base $B' = (v_1', v_2')$ de $\mathbb{R}^2$.

1(c) Segunda parte: Si fuese $M(f,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ entonces

$$M(f \circ f, B) = M(f,B) . M(f,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = M(f,B)$$

$\Rightarrow f \circ f = f$. Luego la respuesta es NO y un contraejemplo es $f \in \text{End}_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2$ dado por $M(f, B_u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donde $B_u = (e_1, e_2)$ es la base usual.

1(d) Se cumple $2 = \text{nulidad}(\alpha) + \text{rango}(\alpha)$ con $\text{rango}(\alpha) \leq 1$. Como α no es la forma lineal nula $\Rightarrow \text{rango}(\alpha) = 1$. Así, tanto $\text{rango}(\alpha)$ como $\text{nulidad}(\alpha)$ son iguals a 1. Lo mismo para β.

Como suponemos $\text{Ker}(\alpha) = \text{Ker}(\beta)$ tomamos una base suya $\{w_1\}$. Ampliamos a una base de $\mathbb{R}^2$, $\{w_1, w_2\}$. Necesariamente $\alpha(w_2) \neq 0$ y $\beta(w_2) \neq 0$. Se cumple $\beta(w_2) = a\, \alpha(w_2)$ siendo $a = \frac{\beta(w_2)}{\alpha(w_2)}$. Como esta misma igualdad se cumple para w_1, tenemos que $\beta(v) = a\, \alpha(v)$ para todo $v \in \mathbb{R}^2$.

2.- Consideramos bases de U y de W, respectivamente $\{v'_1 = (1,0,1), v'_2 = (0,1,2)\}$ y $\{v_3 = (-5,1,4)\}$ (compruébese). Amplío a una base de $\mathbb{R}^3$ la base de W:

$$v_1 = (1,0,0), \quad v_2 = (0,1,0), \quad v_3 = (-5,1,4)$$

Construyo f como el único endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ que cumple (según el teorema de existencia y unicidad conocidas las imágenes de los vectores de una base)

$$f(v_1) = v'_1$$

$$f(v_2) = v'_2$$

$$f(v_3) = 0'$$

es decir $f(\underbrace{a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3}_{\text{vector cualquiera de } \mathbb{R}^3}) = a_1 v'_1 + a_2 v'_2$

Sabemos $\dim_{\mathbb{R}} U = 2$ y está claro que $\text{rango}(f) = 2$. Pero $\text{Im}(f)$ que está generada por v'_1, v'_2 coincide con U. $\text{Ker}(f)$ con dimensión 1 contiene a W, que también tiene dimensión 1, así $\text{Ker}(f) = W$.

Tengo que calcular $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ expresados en función de e_1, e_2, e_3. $e_1 = v_1 \Rightarrow f(e_1) = f(v_1) = v'_1 = e_1 + e_3$.

$e_2 = v_2 \Rightarrow f(e_2) = f(v_2) = v'_2 = e_2 + 2e_3$

$e_3 = \frac{5}{4} v_1 + \left(-\frac{1}{4}\right) v_2 + \frac{1}{4} v_3 \Rightarrow f(e_3) = \frac{5}{4} f(v_1) - \frac{1}{4} f(v_2) + \frac{1}{4} f(v_3)$

$\Rightarrow f(e_3) = \frac{5}{4}(e_1 + e_3) - \frac{1}{4}(e_2 + 2e_3) =$

$= \frac{5}{4} e_1 - \frac{1}{4} e_2 + \frac{3}{4} e_3$. De manera que

$$M(f, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5/4 \\ 0 & 1 & -1/4 \\ 1 & 2 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

3(a) Llamamos $\varphi_3=\varphi$ y tomamos $\varphi_1,\varphi_2\in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})^*$ definidas por $\varphi_1(A)=a$, $\varphi_2(A)=b$. Veamos que $\{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\}$ es indep.
Si $a_1\varphi_1+a_2\varphi_2+a_3\varphi_3=\varphi_0$ (la forma lineal nula sobre $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$) tenemos $(a_1\varphi_1+a_2\varphi_2+a_3\varphi_3)(A)=0$, $\forall A\in\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$; es decir $a_1a+a_2b+a_3(b-c)=0$ para cualesquiera $a,b,c\in\mathbb{R}$. Tomando $a=1$, $b=c=0$ resulta $\boxed{a_1=0}$.
Así, $a_2b+a_3(b-c)=0$, $\forall b,c\in\mathbb{R}$. Tomando $b=c=1$ resulta $\boxed{a_2=0}$ y para $b=1$, $c=0$, resulta $\boxed{a_3=0}$. Como $\dim_{\mathbb{R}}\mathcal{A}_3(\mathbb{R})^*=3$, tenemos que $\{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\}$ es una base de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})^*$.

3(b) Ponemos $A_1=\begin{pmatrix}0&a_1&b_1\\-a_1&0&c_1\\-b_1&-c_1&0\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}0&a_2&b_2\\-a_2&0&c_2\\-b_2&-c_2&0\end{pmatrix}$; $A_3=\begin{pmatrix}0&a_3&b_3\\-a_3&0&c_3\\-b_3&-c_3&0\end{pmatrix}$

$1=\varphi_1(A_1)=a_1$
$0=\varphi_2(A_1)=b_1$
$0=\varphi_3(A_1)=b_1-c_1$
por tanto $a_1=1$, $b_1=c_1=0$

$0=\varphi_1(A_2)=a_2$
$1=\varphi_2(A_2)=b_2$
$0=\varphi_3(A_2)=b_2-c_2$
por tanto $a_2=0$, $b_2=c_2=1$

$0=\varphi_1(A_3)=a_3$
$0=\varphi_2(A_3)=b_3$
$1=\varphi_3(A_3)=b_3-c_3$
por tanto $a_3=b_3=0$, $c_3=-1$

$\mathcal{B}=\{A_1,A_2,A_3\}$ base de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ y $\mathcal{B}^*=\{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\}$.

3(c) Ponemos $B=(A_1,A_2,A_3)$ y $B^*=(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)(=\tilde{B})$
$\psi=c_1\varphi_1+c_2\varphi_2+c_3\varphi_3$ donde $c_1=\psi(A_1)=2$, $c_2=\psi(A_2)=3$ y $c_3=\psi(A_3)=-3$. Las coordenadas pedidas son $(2,3,-3)$.