CÁLCULO II

Doble Grado en Informática y Matemáticas

1. (2 puntos). Justificar de forma razonada si las siguientes funciones son, o no, uniformemente continuas y/o lipschitzianas.

   (i) $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x\ln(x)$, para cada $x \in]0,1[$.

   (ii) $F : [1,3] \to \mathbb{R}$ tal que $F(x) = \int_1^x g(t)dt$, donde $g : [1,3] \to \mathbb{R}$ es una función monotona.

2. (1 punto).Calcular $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}((\frac{n+1}{n})^2 + (\frac{n+2}{n})^2 + ... + (\frac{n+n}{n})^2)$.

3. (2 puntos). Determinar para qué valores de $a > 0$, el área de la región acotada limitada por la gráfica de la función $f(x) = \ln(x)$, el eje de abcisas y las rectas $x = 1$ y $x = a$, es igual a 1.

4. (2 puntos). Calcular al longitud de la elipse $x^2 + \frac{y^2}{2^2} = 1$.

5. (2 puntos). Sea $F : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ la función dada por $F(x) := \int_0^x e^{t^2}dt$. Estudiar su monotonía, y determinar su imagen. Calcular

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)^2 + \int_0^x e^{2t^2}dt}{\int_0^{\sqrt{x}} te^{2t^4}dt}.$$

6. (1 punto). Demostrar que $0 \leq \int_2^\infty \frac{1}{x^2(1+e^x)}dx \leq \frac{1}{2}$

El ejercicio 4 no lo hizo nadie y la profesora se dio cuenta de que no se podía hacer con lo que sabíamos, así que se dio por nulo