Relación 1, Cálculo II, 5e, 5f.

5e) $f(x) = \dfrac{2x}{1+|x|}$, $\forall\ x \in [-1, 1]$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Si} & x \geq 0 & f(x) = \dfrac{2x}{1+x} \\ \text{Si} & x < 0 & f(x) = \dfrac{2x}{1-x} \end{array}\right\}$$ Estudiamos su derivabilidad.

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Si} & x \geq 0 & f'(x) = \dfrac{2+2x-2x}{(x+1)^2} = \dfrac{2}{(x+1)^2} \\ \text{Si} & x < 0 & f'(x) = \dfrac{2-2x+2x}{(x-1)^2} = \dfrac{2}{(x-1)^2} \end{array}\right\}$$

Hipótesis de una función derivable: (en el cambio de función)

$\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x)$;

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} d\left(\dfrac{2x}{1+x}\right) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2}{(x+1)^2} = \dfrac{2}{1} \\ \lim\limits_{x \to 0^-} d\left(\dfrac{2x}{1-x}\right) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{2}{(-x+1)^2} = \dfrac{2}{1} \end{array}\right\}$$ la función f es derivable.

Por lo tanto es continua. Según el teorema de Weierstrass, una función continua en un intervalo debe tener una imagen en un intervalo.

Calculamos los posibles extremos de dicho intervalo:

- El cambio de funcion ($x=0$).
- $x \,/\, f'(x) = 0$.
- Extremos del dominio dado -1 y 1.

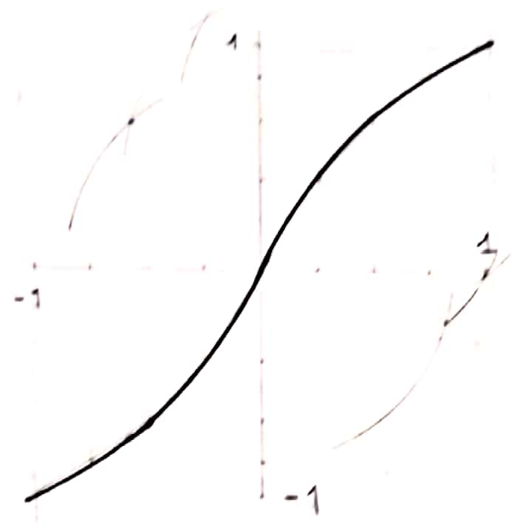
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 = 0 \Rightarrow$ No existen puntos de pendiente nula.

$f(-1) = -1$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.

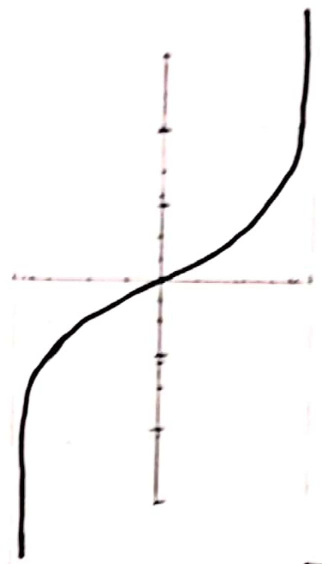
$f(-1) < f(0) < f(1) \Rightarrow$ El mínimo del intervalo es -1 y el máximo 1.

$\text{Im}(f) = [-1, 1]$

5 e)



5 f)



5 f) $f:]-1, 1[\to \mathbb{R}$, $f(x) = x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$\forall x \in]-1, 1[$

Un cociente entre polinomios como $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ no incluye en su dominio x tal que el denominador sea 0, en este caso $\sqrt{1-x^2} = 0 \to x = \pm 1$, el resto es trivialmente continuo en la función. En este caso, en el intervalo $]-1, 1[$ la función es continua.

Como es continua, y tambien inyectiva (fácilmente demostrable por su simetría impar) podemos concluir con que es monótona (Teorema - pág. 23). (estrictamente)

Entonces estudiaremos el límite en sus extremos para ver si es creciente ~~monótona~~ o decreciente (estricta).
estricta

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{0} \to \infty \\ \lim_{x \to -1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-1}{0} \to -\infty \end{array}\right\}$$

Es una función creciente cuya imagen es todo $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.