Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Cálculo I – Evaluación 3 – Soluciones

Ejercicio 1. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función estrictamente creciente verificando que $a < f(x) \leqslant b$ para todo $x \in [a, b]$. Definamos $x_1 = a$, y $x_{n+1} = f(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

a) Prueba que $\{x_n\}$ converge a un número $\beta \in]a, b]$.

b) Sea $C = \{f(x) \colon x \in [a, b], x < \beta\}$. Prueba que $\beta = \sup(C)$ y $\beta \leqslant f(\beta)$.

c) Si la imagen de f es un intervalo prueba que $\beta = f(\beta)$.

Solución. a) Sea $A = \{n \in \mathbb{N} : x_n < x_{n+1}\}$. Como $x_1 = a < f(a) = x_2$ tenemos que $1 \in A$. Supuesto que $n \in A$ tenemos que $x_n < x_{n+1}$ y, como f es estrictamente creciente $x_{n+1} = f(x_n) < f(x_{n+1}) = x_{n+2}$, luego $n + 1 \in A$. Hemos probado así que A es un conjunto inductivo de números naturales por lo que $A = \mathbb{N}$ y por tanto la sucesión $\{x_n\}$ es estrictamente creciente. Como por hipótesis $f([a, b]) \subset]a, b]$, deducimos que b es un mayorante de la sucesión, por lo que dicha sucesión es convergente y sabemos que $\beta = \lim\{x_n\} = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, por lo que $a < \beta \leqslant b$.

b) Observa que $C = \{f(x) \colon x \in [a, \beta[\}$. Como $\{x_n\}$ es estrictamente creciente, para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $x_n < \beta$. Deducimos que $\{x_{n+1} : n \in \mathbb{N}\} \subset C$. Puesto que todo mayorante de C también es mayorante del conjunto $\{x_{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$ deducimos que ningún número menor que β puede ser mayorante de C. Por tanto, si probamos que β es mayorante de C tendremos que $\beta = \sup(C)$. Sea, pues $a \leqslant x < \beta$. Por definición de supremo, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $x < x_p$, por lo que $f(x) < f(x_p) = x_{p+1} < \beta$, por tanto $f(x) < \beta$, lo que prueba que β es un mayorante de C. Por otra parte, para todo $x \in [a, \beta[$ se tiene que $f(x) < f(\beta)$, luego, $f(\beta)$ es un mayorante de C por lo que $\beta \leqslant f(\beta)$.

c) Veamos que suponer que $\beta < f(\beta)$ lleva a una contradicción. En efecto, supuesto que la imagen de f es un intervalo, deberá ser $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$. Ahora, si $\beta < f(\beta)$, entonces como $]\beta, f(\beta)[\subset [f(a), f(b)] = f([a, b])$ tiene que haber algún $t \in [a, b]$ tal que $\beta < f(t) < f(\beta)$. Como f es estrictamente creciente ha de ser $t < \beta$, pero entonces $f(t) \in C$ por lo que $f(t) \leqslant \beta$ y así llegamos a que $\beta < f(t) \leqslant \beta$ que es claramente contradictorio. ☺

Comentarios. Casi todos hacéis bien el punto a), pocos hacen bien los puntos b) y c). Algunas expresiones que me han llamado la atención son *"conjunto estrictamente creciente"*, *"la función es convergente"*, *"la sucesión será convergente si y sólo si es monótona y acotada"*. Quienes afirman esto último deben pensar que solamente hay sucesiones monótonas. En lo referente a los puntos b) y c) algunos razonan a *mocosuena* y afirman haber probado lo que se pide cuando en realidad no han probado nada. Un ejemplo de esto es ponerse de partida en situación imposible, como suponer que $f(\beta) > x_n > \beta$, para llegar a una contradicción. No se puede suponer que se cumple algo que ya se sabe que no se cumple. Son bastantes quienes no entienden la definición del conjunto C. Algunos, pocos, menos mal, afirman que $C = \{x_{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$. Está claro que en C hay puntos que no son valores de la sucesión $\{x_n\}$. Por ejemplo, considera cualquier punto u tal que $a = x_1 < u < x_2 = f(a)$ y define $u_1 = u$, $u_{n+1} = f(u_n)$. La sucesión $\{u_n\}$ así definida no tienen ningún valor en común con la $\{x_n\}$. Lo que es peor, si f es continua se verifica que $C = f([a, \beta[) = [f(a), f(\beta)[$ es un intervalo, por lo que no es un conjunto numerable y no se pueden expresar sus puntos como una sucesión. Algunos usan en su razonamiento, sin probarlo porque les parece evidente, que para todo $x \in C$ se verifica que $x < f(x)$. Y eso es cierto pero me parece más difícil probarlo que lo que se pide en el ejercicio. Veámoslo:

> Supongamos $x \in [a, \beta[$. Si existe algún $n \in \mathbb{N}$ tal que $x = x_n$ entonces es claro que $x = x_n < x_{n+1} = f(x_n) = f(x)$, es decir, $x < f(x)$. Si para todo $n \in \mathbb{N}$ es $x \neq x_n$, definamos $q = \min\{n \in \mathbb{N} : x < x_n\}$ (ese conjunto de números naturales no es vacío). Observa que $q \geqslant 2$. Tenemos que $x_{q-1} < x < x_q$ por lo que $x < x_q = f(x_{q-1}) < f(x)$, luego $x < f(x)$.

Por supuesto, la desigualdad $x < f(x)$ no tiene por qué ser cierta si $\beta < x \leqslant b$, es fácil verlo con una gráfica apropiada.

En los dos ejercicios se repite una confusión frecuente que consiste en *olvidar* que un conjunto del tipo $A = \{n\in\mathbb{N} : x_n < x_{n+1}\}$ está formado por números naturales y escribir cosas que no tienen sentido, como $x_n \in A$ porque x_n puede ser cualquier número real. Creo que he insistido mucho en que tenéis que leer bien los conjuntos para evitar ese tipo de confusiones.

En el punto c) algunos usan un teorema sobre funciones monótonas y propiedad del valor intermedio que asegura la continuidad de la función f en las hipótesis hechas en dicho punto. Si lo hacen correctamente lo he considerado bien aunque la idea de este ejercicio no era usar la continuidad.

Ejercicio 2. Sea $\{x_n\}$ la sucesisón definida por

$$x_1 = 2, \qquad x_{n+1} = \frac{4x_n + a}{x_n + 4} \quad (4 < a < 16)$$

a) Estudia la convergencia de dicha sucesión.

b) Prueba que $0 < \sqrt{a} - x_{n+1} < \dfrac{1}{3}(\sqrt{a} - x_n)$ y deduce que $0 < \sqrt{a} - x_{n+1} < \dfrac{1}{3^n}(\sqrt{a} - 2)$.

Solución. a) Es claro que todos los términos de la sucesión son positivos. Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \dfrac{4x + a}{x + 4}$ para todo $x > 0$. Tenemos que $f(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ es $x_{n+1} = f(x_n)$. Cualesquiera sean $x, y\in\mathbb{R}^+$ tenemos:

$$f(y) - f(x) = \frac{4y + a}{y + 4} - \frac{4x + a}{x + 4} = \frac{4yx + 16y + ax + 4a - 4xy - 16x - ay - 4a}{(y + 4)(x + 4)} = \frac{(16 - a)}{(y + 4)(x + 4)}(y - x)$$

Como $a < 16$ se verifica que $\frac{(16-a)}{(y+4)(x+4)} > 0$ y deducimos que $x < y \Longleftrightarrow f(x) < f(y)$ por lo que f es estrictamente creciente en $\mathbb{R}^+$. Como $x_2 = \frac{8+a}{6} > \frac{12}{6} = 2 = x_1$, deducimos, al igual que en el ejercicio anterior, o por un resultado conocido que podemos aplicar en esta situación, que $\{x_n\}$ es estrictamente creciente. Además como $f(x) < \frac{4x_n+16}{x_n+4} = 4$ se sigue que $\{x_n\}$ está mayorada por lo que es convergente. Pongamos $\ell = \lim\{x_n\}$. Claro está, $\ell > 0$, y usando los resultados conocidos del álgebra de límites deducimos que debe verificarse la igualdad

$$\ell = \frac{4\ell + a}{\ell + 4} \Longrightarrow \ell^2 = a \Longrightarrow \ell = \sqrt{a}$$

b) Como $\{x_n\}$ es estrictamente creciente, para todo $n\in\mathbb{N}$ se verifica que $x_n < \sqrt{2}$. Tenemos que

$$0 < \sqrt{2} - x_{n+1} = \sqrt{a} - \frac{4x_n + a}{x_n + 4} = \frac{\sqrt{a}x_n + 4\sqrt{a} - 4x_n - a}{x_n + 4} = \frac{(4 - \sqrt{a})(\sqrt{a} - x_n)}{x_n + 4} < \frac{1}{3}(\sqrt{a} - x_n) \quad (1)$$

Donde hemos tenido en cuenta que $4 - \sqrt{a} < 2$ y $x_n + 4 \geqslant 6$. A partir de esta desigualdad se deduce fácilmente por inducción o por aplicación reiterada de la misma que $0 < \sqrt{a} - x_{n+1} < \dfrac{1}{3^n}(\sqrt{a} - 2)$. Para hacerlo por inducción se considera el conjunto

$$A = \left\{ n\in\mathbb{N} : 0 < \sqrt{a} - x_{n+1} < \frac{1}{3^n}(\sqrt{a} - 2) \right\}$$

Como consecuencia de la desigualdad (1) para $n = 1$, se verifica que $1 \in A$. Supuesto que $n \in A$, sustituyendo n por $n + 1$ en la desigualdad (1) se deduce enseguida que $n + 1\in A$, luego $A = \mathbb{N}$. ☺

Comentarios. Este ejercicio lo hacéis bien casi todos. Eso sí, algunos se complican de forma increíble. Hicimos un ejercicio muy parecido en el que la sucesión convergía a $\sqrt{5}$ y siguiendo su modelo podía hacerse este. Tanto es así que algunos sustituyen $\sqrt{a}$ por $\sqrt{5}$ sin darse cuenta del despiste. Quiero insistir en la importancia de usar correctamente la notación matemática. No inventéis símbolos nuevos, como flechas y cosas así, respetad el significado de cada símbolo, no quitéis las llaves $\{\,.\,\}$ a las sucesiones, no es lo mismo una implicación que una equivalencia. Cuando quieres convertir una desigualdad en otra equivalente debes usar símbolos de equivalencia. He comprobado al calificar que este ejercicio se puede hacer casi de cualquier forma, lo hagas como lo hagas, si no cometes errores, llegas a donde tienes que llegar.

Lo que me ha llamado la atención en general, es la poca importancia que muchos dais a explicar correctamente lo que hacéis, parece que os diera pereza escribir unas pocas palabras para despejar posibles ambigüedades, y eso hace que quien evalúa se quede a veces con la duda de si quien se expresa de esa forma tan concisa, sin explicar mínimamente lo que hace o explicándolo de forma confusa, entiende realmente lo que ha escrito. Todo esto tiene que ver con la ingrata tarea de evaluar, a los profesores nos disgusta vernos en la necesidad de tener que interpretar lo que no está claramente escrito porque queda la duda de si lo hacemos correctamente.