Topología I. Convocatoria ordinaria
Grado en Matemáticas y Doble Grado en Física y Matemáticas

24 de enero de 2020

1.- (4 puntos). En $\mathbb{R}$ se considera la topología dada por:

$$T = \{A \cup B \,/\, A \in T_u,\ B \subseteq \mathbb{Q}\}.$$

a) Para cada $x \in \mathbb{R}$ obtener una base de entornos de x en $(\mathbb{R}, T)$.

b) Calcular la clausura y el interior de $[a, b)$ en $(\mathbb{R}, T)$. ¿Es $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ denso en $(\mathbb{R}, T)$?

c) Probar que si $C \subseteq \mathbb{R}$ es compacto en $(\mathbb{R}, T)$ entonces C es compacto en $(\mathbb{R}, T_u)$. ¿Es cierto el enunciado recíproco?

d) Probar que si $C \subseteq \mathbb{R}$ es conexo en $(\mathbb{R}, T)$ entonces $C = \{x\}$ con $x \in \mathbb{R}$.

2.- (3 puntos). Sea $f : (X, T) \to (Y, T')$ una aplicación entre espacios topológicos continua y sobreyectiva. Supongamos que R y R' son relaciones de equivalencia en X y en Y, respectivamente, tales que:

$$x \, R \, y \iff f(x) \, R' \, f(y), \quad \forall x, y \in X.$$

Consideremos la aplicación $\widetilde{f} : (X/R, T/R) \to (Y/R', T'/R')$ dada por:

$$\widetilde{f}([x]) = [f(x)].$$

a) Probar que $\widetilde{f}$ está bien definida, es continua y biyectiva.

b) Demostrar que, si f es una identificación, entonces $\widetilde{f}$ es una identificación. En tal caso, ¿es $\widetilde{f}$ un homeomorfismo?

3.- (3 puntos). Probar de forma razonada los siguientes enunciados:

a) Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x\, y = 0\}$. Entonces, para cada aplicación continua y sobreyectiva $f : (\mathbb{R}, T_u) \to (A, T_{u|A})$ se verifica que $f^{-1}(\{(0, 0)\})$ contiene al menos 3 puntos.

b) Si $f : (X, T) \to (Y, T')$ es una aplicación continua, donde (X, T) es compacto e (Y, T') es de Hausdorff, entonces $f^{-1}(C')$ es compacto en (X, T) para cada C' compacto en (Y, T').

Duración del examen: 3 horas

EJERCICIO 1

$T = \{A \cup B \,/\, A \in T_u,\ B \subseteq \mathbb{Q}\}$ topología en $\mathbb{R}$.

Claramente $T_u \leq T$ y $P(\mathbb{Q}) \subseteq T$.

a) Distinguimos 2 casos:

a1) $x \in \mathbb{Q}$. Definimos $\mathcal{V}_x = \{\{x\}\}$ ¿Base de entornos?

$\mathcal{V}_x \subseteq N_x$ porque $\{x\} \in T$ (ya que $x \in \mathbb{Q}$) y $x \in \{x\}$.

Sea $N \in N_x$. Como $x \in N \Rightarrow \underbrace{\{x\}}_{\in \mathcal{V}_x} \subseteq N$.

a2) $x \in \mathbb{Q}^c$. Definimos $\mathcal{V}_x = \{(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \,/\, \varepsilon > 0\}$.

$\mathcal{V}_x \subseteq N_x$ porque $x \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ y $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \in T_u \leq T$.

Sea $N \in N_x$. Existe $\mathcal{U} \in T$ tal que $x \in \mathcal{U} \subseteq N$.

Como $\mathcal{U} \in T \Rightarrow \mathcal{U} = A \cup B$ con $A \in T_u$ y $B \subseteq \mathbb{Q}$.

Como $x \in \mathcal{U} = A \cup B$ y $x \in \mathbb{Q}^c \Rightarrow x \in A$. Como $A \in T_u$, existe $\varepsilon > 0 /$ $\underbrace{(x-\varepsilon, x+\varepsilon)}_{\in \mathcal{V}_x} \subseteq A \subseteq N$.

---

b) ¿$\overline{[a,b)}$, $[a,b)^\circ$? Vamos a probar que:

$$\overline{[a,b)} = \begin{cases} [a,b) & \text{si } b \in \mathbb{Q}, \\ [a,b] & \text{si } b \in \mathbb{Q}^c \end{cases} \quad \text{y} \quad [a,b)^\circ = \begin{cases} [a,b) & \text{si } a \in \mathbb{Q}, \\ (a,b) & \text{si } a \in \mathbb{Q}^c \end{cases}$$

- $[a,b)^c = (-\infty, a) \cup [b, +\infty) = (-\infty, a) \cup (b, +\infty) \cup \{b\}$.

Así, si $b \in \mathbb{Q} \Rightarrow [a,b)^c \in T \Rightarrow [a,b) \in C_T \Rightarrow \overline{[a,b)} = [a,b)$.

Supongamos $b \in \mathbb{Q}^c$. $[a,b) \subseteq [a,b]$ y $[a,b] \in C_u \subseteq C_T$.

Así $\overline{[a,b)} \subseteq [a,b]$. ¿$[a,b] \subseteq \overline{[a,b)}$? Sabemos $[a,b) \subseteq \overline{[a,b)}$.

¿ $b \in \overline{[a,b)}$? Como, dado $\varepsilon > 0$, se cumple que:

$$(b-\varepsilon, b+\varepsilon) \cap [a,b) \neq \emptyset$$

$\Rightarrow b \in \overline{[a,b)}$.

· $[a,b) = \{a\} \cup (a,b)$. Así, si $a \in \mathbb{Q} \Rightarrow [a,b) \in T$ y, por tanto $[a,b)^\circ = [a,b)$.

Supongamos $a \in \mathbb{Q}^c$. ¿ $[a,b)^\circ = (a,b)$? Nótese que:

$$\left.\begin{array}{l} (a,b) \in T_u \subseteq T \\ (a,b) \subseteq [a,b) \end{array}\right\} \Rightarrow (a,b) \subseteq [a,b)^\circ$$

¿ $[a,b)^\circ \subseteq (a,b)$? Sabemos que $[a,b)^\circ \subseteq [a,b)$. Para probar que $[a,b)^\circ \subseteq (a,b)$, basta ver que $a \notin [a,b)^\circ$.

Si se cumpliera $a \in [a,b)^\circ \Rightarrow \exists V \in \mathcal{V}_x / V \subseteq [a,b)$.

Como $a \in \mathbb{Q}^c \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 / (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subseteq [a,b)$!!!

· ¿ $\mathbb{Q}^c$ denso en $(\mathbb{R}, T)$? Lo será si y sólo si $\overline{\mathbb{Q}^c} = \mathbb{R}$.

¿ $\overline{\mathbb{Q}^c}$? ¿ $\mathbb{Q}^c \in C_T$? $(\mathbb{Q}^c)^c = \mathbb{Q} \in T$. Así $\mathbb{Q}^c \in C_T$ y, por tanto, $\overline{\mathbb{Q}^c} = \mathbb{Q}^c \neq \mathbb{R}$. Luego $\mathbb{Q}^c$ no es denso en $(\mathbb{R}, T)$.

---

c) G compacto en $(\mathbb{R}, T) \Rightarrow G$ compacto en $(\mathbb{R}, T_u)$.

Esto es consecuencia directa de que $T_u \subseteq T$. En efecto, sea $\{U_i\}_{i \in I} \subseteq T_u$ con $G \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$. Como $T_u \subseteq T$ tenemos $\{U_i\}_{i \in I} \subseteq T$ con $G \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$. Y como G es compacto en $(\mathbb{R}, T) \Rightarrow \exists J \subseteq I$ finito tal que $G \subseteq \bigcup_{i \in J} U_i$.

¿ C compacto en $(\mathbb{R}, T_u) \Rightarrow C$ compacto en $(\mathbb{R}, T)$?

Veamos que no con un contraejemplo.

Sea $C=\{\frac{1}{m} / m\in\mathbb{N}\}\cup\{0\}$. ¿Compacto en $(\mathbb{R},T_u)$?

Usaremos el teorema de Heine-Borel.

· $C\in \mathcal{C}_u$ ya que $C^c = \underbrace{(-\infty,0)}_{\in T_u}\cup\underbrace{(1,+\infty)}_{\in T_u}\cup\underbrace{\left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}}\left(\frac{1}{m+1},\frac{1}{m}\right)\right)}_{\in T_u}$

· C acotado ya que $C\subseteq[0,1]\subseteq \overline{B}(0,1)$.

¿C compacto en $(\mathbb{R},T)$? Como $C\subseteq\mathbb{Q}$, entonces:

C compacto en $(\mathbb{R},T) \iff C$ compacto en $(\mathbb{Q},T_{|\mathbb{Q}}) \iff$

C compacto en $(\mathbb{Q},T_D) \iff C$ es finito.

Por tanto, C no es compacto en $(\mathbb{R},T)$ al ser infinito.

---

d) Sea $C\subseteq\mathbb{R}$ conexo en $(\mathbb{R},T)$. ¿$C=\{x\}$ con $x\in\mathbb{R}$?

Supongamos que $\#C\geq 2$ y lleguemos a contradicción.

Claramente $C\subseteq\mathbb{Q}^c$. De lo contrario, existiría $q\in C\cap\mathbb{Q}$.

Así el conjunto $\{q\}$ cumple $\{q\}\in T$ y $\{q\}\in \mathcal{C}_u\subseteq\mathcal{C}_T$.

Como $\{q\}\subseteq C$ deduciríamos que $\{q\}\in T_{|C}$ y $\{q\}\in \mathcal{C}_{|C}$,

lo que contradice que C es conexo y $\#C\geq 2$.

Dado que $C\subseteq\mathbb{Q}^c$, tenemos:

C conexo en $(\mathbb{R},T) \iff C$ conexo en $(\mathbb{Q}^c, T_{|\mathbb{Q}^c}) \iff$ ⊛

C conexo en $(\mathbb{Q}^c, T_{u|\mathbb{Q}^c}) \iff C$ conexo en $(\mathbb{R},T_u) \iff$

C es un intervalo.

Así, tendríamos que C es un intervalo en $\mathbb{R}$ tal que $C\subseteq\mathbb{Q}^c$ y $\#C\geq 2$. Esto es una contradicción por densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$.

⊛ $T_{|\mathbb{Q}^c} = \{U\cap\mathbb{Q}^c / U\in T\} = \{(A\cup B)\cap\mathbb{Q}^c / A\in T_u, B\subseteq\mathbb{Q}\}$
$= \{A\cap\mathbb{Q}^c / A\in T_u\} = T_{u|\mathbb{Q}^c}$.

Forma alternativa de resolver d)

Veamos primero que la relación $\mathcal{T}_u \subseteq \mathcal{T}$ implica que todo conexo C en $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ es conexo en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$. Para ello veamos que $(C, \mathcal{T}_{u|C})$ es conexo suponiendo que $(C, \mathcal{T}_{|C})$ es conexo.

Usamos la definición de espacio conexo.

Sean $A, B \in \mathcal{T}_{u|C}$ tales que $C = A \cup B$ y $A \cap B = \emptyset$.

Existirán $U, V \in \mathcal{T}_u$ tales que $A = U \cap C$ y $B = V \cap C$.

Como $\mathcal{T}_u \subseteq \mathcal{T} \Rightarrow U, V \in \mathcal{T} \Rightarrow A, B \in \mathcal{T}_{|C}$.

Así, tenemos $C = A \cup B$ con $A, B \in \mathcal{T}_{|C}$ y $A \cap B = \emptyset$.

Como $(C, \mathcal{T}_{|C})$ es conexo $\Rightarrow A = \emptyset$ o $B = \emptyset$.

Sea ahora $C \subseteq \mathbb{R}$ conexo en $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$. Hemos probado que C es conexo en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ y, por tanto, es un intervalo. Veamos que $\# C = 1$. De lo contrario, existirían $x, y \in C$ con $x < y$. Como C es un intervalo $\Rightarrow [x, y] \subseteq C$. En particular $\exists q \in \mathbb{Q}$ tal que $q \in C$. Pero entonces, el conjunto $\{q\}$ cumple $\{q\} \in \mathcal{T}$ y $\{q\} \in \mathcal{C}_u \subseteq \mathcal{C}$. Como $\{q\} \subseteq C \Rightarrow \{q\} \in \mathcal{T}_{|C} \cap \mathcal{C}_{|C}$. Como C es conexo en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}) \Rightarrow C = \{q\}$ o $\{q\} = \emptyset$. Ninguna de las opciones es posible porque $\{q\} \neq \emptyset$ y $\# C \geq 2$.

Esta es la contradicción que buscábamos.

Ejercicio 2

$f: (X, T) \to (Y, T')$ continua y sobreyectiva. Suponemos R = rel. equiv. en X, R' = rel. equiv. en Y.

$$x R y \iff f(x) R' f(y) \quad \forall x, y \in X.$$

Consideramos $\tilde{f}: (X/R, T/R) \to (Y/R', T'/R')$ dada por

$\tilde{f}([x]) = [f(x)] \quad \forall x \in X.$

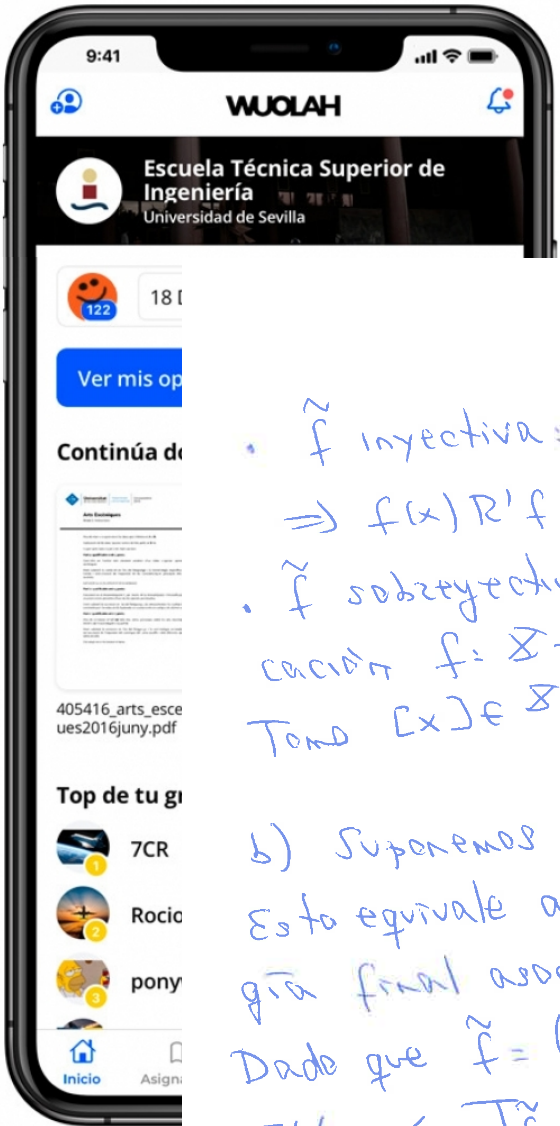
a) ¿$\tilde{f}$ bien definida, continua y biyectiva?

- Si $x \in X \Rightarrow [x] \in X/R$, $f(x) \in Y$ y $[f(x)] \in Y/R'$.
¿Depende la definición de $\tilde{f}$ del representante x? Pero entonces Supongamos $[x] = [y]$, es decir, $x R y$. $[f(x)] = [f(y)]$.
$f(x) R' f(y)$, es decir,
- Consideremos el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd}
(X, T) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "P_X"'] \arrow[dr, phantom, "="] & (Y, T') \arrow[d, "P_Y"] \\
(X/R, T/R) \arrow[r, "\tilde{f}"'] & (Y/R', T'/R')
\end{tikzcd}$$

donde P_X y P_Y son las correspondientes proyecciones.

Por definición de $\tilde{f}$ es obvio que $\tilde{f} \circ P_X = P_Y \circ f$.
Como el dominio de $\tilde{f}$ es un espacio cociente:
$\tilde{f}$ es continua $\iff$ $\tilde{f} \circ P_X$ es continua $\iff$ $P_Y \circ f$ continua.
Y esto último se cumple por ser f y P_Y continuas.
Concluimos que $\tilde{f}$ es continua.



• $\tilde{f}$ inyectiva: si $\tilde{f}([x]) = \tilde{f}([y]) \Rightarrow [f(x)] = [f(y)]$
$\Rightarrow f(x)\, R'\, f(y) \Rightarrow x\, R\, y \Rightarrow [x] = [y]$.

• $\tilde{f}$ sobreyectiva: sea $[z] \in Y/R'$. Como $z \in Y$ y la aplicación $f: X \to Y$ sí es sobreyectiva $\Rightarrow \exists x \in X / f(x) = z$. Tomo $[x] \in X/R$. Se tiene $\tilde{f}([x]) = [f(x)] = [z]$.

b) Suponemos f identificación. Veamos que $\tilde{f}$ es identificación. Esto equivale a que $T_{\tilde{f}} = T'/R'$, donde $T_{\tilde{f}}$ es la topología final asociada a $\tilde{f}: (X/R, T/R) \to Y/R'$.
Dado que $\tilde{f}: (X/R, T/R) \to (Y/R', T'/R')$ es continua, entonces $T_{\tilde{f}} \subseteq T'/R'$. Veamos que $T'/R' \subseteq T_{\tilde{f}}$. Dado un conjunto $\tilde{U}' \subseteq Y/R'$, se tiene que:

$p_X: (X,T) \to (X/R, T/R)$ ident.

$\tilde{U}' \in T_{\tilde{f}} \Rightarrow \tilde{f}^{-1}(\tilde{U}') \in T/R = T_{p_X} \Rightarrow p_X^{-1}(\tilde{f}^{-1}(\tilde{U}')) \in T$
$\Rightarrow (\tilde{f} \circ p_X)^{-1}(\tilde{U}') \in T \Rightarrow (p_Y \circ f)^{-1}(\tilde{U}') \in T$

f ident.

$\Rightarrow f^{-1}(p_Y^{-1}(\tilde{U}')) \in T \Rightarrow p_Y^{-1}(\tilde{U}') \in T_f = T'$
$\Rightarrow \tilde{U}' \in T_{p_Y} = T'/R'$ porque $p_Y: (Y,T') \to (Y/R', T'/R')$ es ident.

• ¿$\tilde{f}$ homeomorfismo? Sí, por ser identificación inyectiva.

EJERCICIO 3

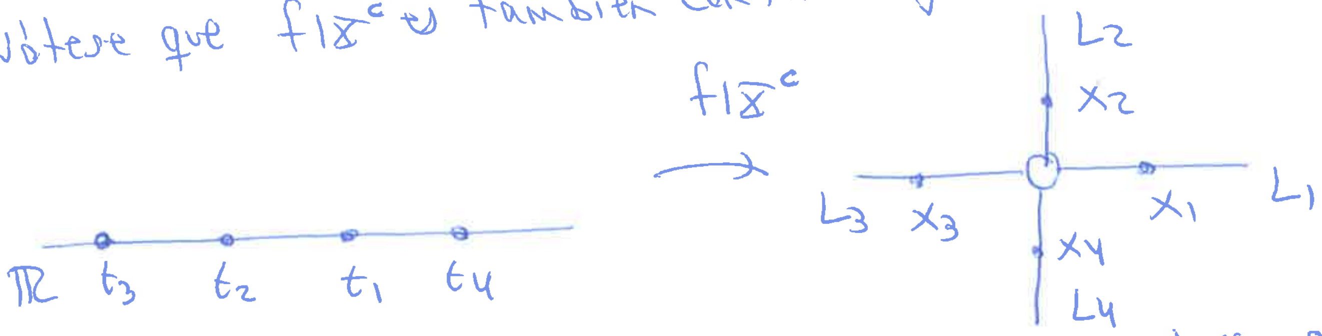
b) $f: (X,T) \to (Y,T')$ continua, donde $\begin{cases} (X,T) = \text{compacto} \\ (Y,T') = \text{Hausdorff.} \end{cases}$

Dado $C' \subseteq Y$ compacto en (Y,T'), se tiene $C' \in C_{T'}$ por ser (Y,T') de Hausdorff. Como $f: (X,T) \to (Y,T')$ es continua $\Rightarrow f^{-1}(C') \in C_T$. Y como (X,T) es compacto, entonces $f^{-1}(C')$ es compacto en (X,T).

a) $f:(\mathbb{R},T_u)\to(A,T_u|_A)$ continua y sobreyectiva, donde $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / xy=0\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x=0 \text{ o } y=0\}$.

¿ $\# f^{-1}(\{(0,0)\})\geq 3$?

Sea $X=f^{-1}(\{(0,0)\})\subseteq\mathbb{R}$. Como f es sobre. $\Rightarrow \# X\geq 1$.
Consideramos la restricción $f|_{X^c}:(X^c,T_u|_{X^c})\to(A_*,T_u|_{A_*})$, donde $A_*=A-\{(0,0)\}$.
Nótese que $f|_{X^c}$ es también continua y sobreyectiva.



Procediendo como en varios ejercicios hechos en clase se prueba que A_* tiene 4 componentes conexas $L_1,\dots,L_4$. Sea $x_i\in L_i$ $\forall i=1,2,3,4$. Como $f|_{X^c}: X\to A_*$ es sobreyectiva $\Rightarrow \exists\, t_i\in X^c / f(t_i)=x_i$ $\forall i=1,2,3,4$. Sea E_i la componente conexa de X^c tal que $t_i\in E_i$. Como f_{X^c} es continua y $f(t_i)=x_i$ $\forall i=1,\dots,4$, deducimos que $f(E_i)\subseteq L_i$ $\forall i=1,\dots,4$. Además $E_i\cap E_j=\emptyset$ si $i\neq j$; de lo contrario $L_i\cap L_j\neq\emptyset$, que es imposible.
Esto prueba que $\#\,\text{comp}\,(X^c,T_u|_{X^c})\geq 4$. De este modo, si $\# X=1$ o $\# X=2$, sabemos que:

$$\text{comp}\,(X^c,T_u|_{X^c})\begin{cases} =\{(-\infty,a),(a,+\infty)\} & \text{si } X=\{a\} \\ =\{(-\infty,a),(a,b),(b,+\infty)\} & \text{si } X=\{a,b\}.\end{cases}$$

con lo que $\text{comp}\,(X^c,T_u|_{X^c})\leq 3$, que es contradicción. De aquí se concluye que $\# X\geq 3$, como se quería.