1.5

a) $f: [0,1] \to \mathbb{R}$

$f(x) = x + \operatorname{arctg} x \quad \forall x \in [0,1].$

Se trata de una función continua para todo $x \in [0,1]$ ya que x y $\operatorname{arctg} x$ son dos funciones continuas y, por tanto, su suma también es continua.

Vamos a hacer la derivada de $f(x)$ para ver si la función alcanza un máximo o mínimo y ver su crecimiento:

$f'(x) = 1 + \frac{1}{1+x^2}$, igualamos $f'(x)=0$ para ver si se anula en algún punto (donde habría de pendiente 0):

$1 + \frac{1}{1+x^2} = 0;$

$\frac{1}{1+x^2} = -1;$

$1 = -1 - x^2;$

$x^2 = -2;$

$x = \sqrt{-2}$, y como $\sqrt{-2}$ no es un número real, $f'(x)$ no se anula en ningún punto y, por tanto, podemos afirmar que $f(x)$ es monótona.

Como $f'(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ es una función creciente.

Por último, hallaremos $f(0)$ y $f(1)$ para ver los extremos de la imagen:

$f(0) = 0 + \operatorname{arctg} 0 = 0.$

$f(1) = 1 + \operatorname{arctg} 1 = 1 + \frac{1}{4}\pi = 1,79.$

Por lo que, la imagen de f es:

$\operatorname{Im} f = [0, 1,79].$

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x + \operatorname{arctg} x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Se trata de una función continua para todo $x \in \mathbb{R}$ ya que x y $\operatorname{arctg} x$ son dos funciones continuas y, por tanto, su suma también es continua.

Vamos a hacer la derivada de $f(x)$ para ver si la función alcanza un máximo o mínimo y ver así su crecimiento:

$f'(x) = 1 + \frac{1}{1+x^2}$, igualamos a cero $f'(x)$ para ver si se anula en algún punto, o donde la pendiente sería 0:

$f'(x) = 0$;

$1 + \frac{1}{1+x^2} = 0$;

$x = \sqrt{-2}$, al no ser $\sqrt{-2}$ un número real, $f'(x)$ no se anula en ningún punto y, por tanto, podemos afirmar que $f'(x)$ es monótona.

Como $f'(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ es una función creciente.

Para ver los extremos de la imagen, hallaremos el límite de $f(x)$ cuando x tiende a $\pm\infty$:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x + \operatorname{arctg} x = -\infty$.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x + \operatorname{arctg} x = +\infty$.

Por lo que, la imagen de f es:

$\operatorname{Im} f = (-\infty, \infty)$.