Ejercicio 5.28 Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a)=0$ y $\int_a^b f(t)\,dt=0$.

Definamos la función $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ como $F(a)=0$ y

$$F(x)=\frac{\int_a^x f(t)\,dt}{x-a} \qquad \text{si } x\neq a$$

Probar que F es continua en $[a,b]$ y derivable en $]a,b]$. Demostrar que si f es derivable en a entonces F es derivable en $[a,b]$ y existe $c\in]a,b[$ tal que $F'(c)=0$.

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_a^x f(t)\,dt}{x-a} & \text{si } x\neq a\\ 0 & \text{si } x=a\end{cases}$$

Para probar que F es continua en $[a,b]$ vemos si $\lim_{x\to a} F(x)=F(a)$, pues $F(x)$ es claramente continua en $]a,b]$.

$$\lim_{x\to a} F(x)=\lim_{x\to a}\frac{\int_a^x f(t)\,dt}{x-a}=\left[\frac{0}{0}\right] \text{ “}=\text{” } \lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

Para derivar el numerador hemos aplicado el corolario del Primer Teorema Fundamental del Cálculo que dice que si $f:[a,b]$ es una función acotada que es Riemann integrable, y $u(x)=x$ y $v(x)=a$ son dos funciones derivables, $\int_a^x f(t)\,dt$ es derivable y su derivada es igual a $f(u(x))\cdot u'(x)-f(v(x))\cdot v'(x)$

Como tenemos que $\lim_{x\to a} F(x)=f(a)=0=F(a)$, $F(x)$ es continua en $[a,b]$.

- Derivabilidad en x $\forall x\in]a,b]$. Sea $G(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, entonces:

$$F'(x)=\frac{G'(x)\cdot(x-a)-G(x)}{(x-a)^2} \quad \forall x\neq a \text{ donde } G'(x)=f(x).$$

luego $F(x)$ es derivable en $]a,b]$.

- Para demostrar que si f es derivable en a, entonces F es derivable en a calculamos $F'(a)$:

$$F'(a) = \lim_{x \to a} \frac{F(x) - F(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{\int_a^x f(t)\,dt}{(x-a)^2} = \left[\frac{0}{0}\right] \text{"="} \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{2(x-a)}$$

$$\underset{f(a)=0}{=} \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{2(x-a)} = \frac{1}{2} f'(a)$$

Como por hipótesis tenemos que f es derivable en a, entonces si $F'(a) = \frac{1}{2} f'(a)$, F será derivable en a.

- Para probar que $\exists c \in]a,b[$ tal que $F'(c) = 0$, aplicamos el teorema de Rolle, sea $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$, derivable en $]a,b[$ y tal que $F(a) = F(b)$ ($F(b)$ es 0 pues

$$F(b) = \frac{\int_a^b f(t)\,dt}{b-a} = 0$$ pues $\int_a^b f(t)\,dt$ es 0 por hipótesis). Entonces existe $c \in]a,b[$

tal que $F'(c) = 0$.