1. $\mathbb{B} = \{[a,b) : a<b,\ a,b\in\mathbb{Q}\}$

Demostrar que es base de una topología

¿ $\forall x\in\mathbb{R}, \exists B\in\mathbb{B} \mid x\in B$?

Si $x\in\mathbb{Q}$, $[x,x+1)$. Si $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $x\in[a,b)$ con $a,b\in\mathbb{Q} / a<x<b$

¿ $B_1, B_2\in\mathbb{B}$, $\forall x\in B_1\cap B_2$ $\exists B_3\in\mathbb{B} \mid x\in B_3\subset B_1\cap B_2$?

$B_1=[a,b)$ $B_2=[c,d)$. $B_3=B_1\cap B_2=[\max\{a,c\},\min\{b,d\})$

Por lo tanto, es base de una topología.

2. ¿Son los puntos cerrados para la topología generada por $\mathbb{B}$?

Sea $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. $\{x\}\in C_T \Leftrightarrow \mathbb{R}\setminus\{x\}\in T$. $\mathbb{R}\setminus\{x\}=(-\infty,x)\cup(x,+\infty)$ ¿$\in T$?

Si $(-\infty,x)\in T$, $(-\infty,x)=\bigcup_{i\in I}\underbrace{[a_i,b_i)}_{\in\mathbb{B}}$, entonces $\exists i_0\in\mathbb{N} / b_{i_0}=x \Rightarrow$ Pero $[a_{i_0},x)\notin T$ ya que $x\notin\mathbb{Q}$. Por lo tanto la suposición era incorrecta y $\mathbb{R}\setminus\{x\}\notin T \Rightarrow \{x\}\notin C_T$. Concluimos que los puntos no son cerrados para T (en general, ya que si $x\in\mathbb{Q}$, entonces $\mathbb{R}\setminus\{x\}$ sería $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[-n,x)\cup\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[x+\frac{1}{n},n)$)

3. Sea $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, ¿$\operatorname{int}[x,x+1)$?

$\operatorname{int}[x',x'+1)\subset[x,x+1)$. Sea $B_x=\{B\in\mathbb{B}\mid x\in B\}$ base de entornos.

$x\in\operatorname{int}[x',x'+1)$ si $\exists B\in B_x / B\subset[x',x'+1)$. Si $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, B tendrá que ser de la forma $[a,b)$ con $a,b\in\mathbb{Q}$ y $a<x<b$ y si $x\in\mathbb{Q}$, puede ser $[x,x+\varepsilon)$ con $\varepsilon>0$ y $\varepsilon\in\mathbb{Q}$. Entonces, $x'\in(a,b)$ con $a<x'<b$, $(a,b)\not\subset[x',x'+1)$, y como $\forall U\in N_x$ $\exists\{B_i\}_{i\in I}$ de esa forma, nunca podrá ser $U\subset[x',x'+1)$. Para el resto de puntos en $[x',x'+1)$, si $x\in\mathbb{Q}$, $[x,x+\varepsilon)$ con $\varepsilon>0/ x+\varepsilon<x'+1$, $[x,x+\varepsilon)\subset[x',x'+1)$, luego $x\in\operatorname{int}[x',x'+1)$, y si $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $\exists a,b\in\mathbb{Q} / x'<a<x<b<x'+1$ (por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, luego $x\in\operatorname{int}[x',x'+1)$.

Conclusión: $\operatorname{int}[x',x'+1)=(x',x'+1)$

4. Comparar T con la topología de Sorgenfrey cuya base es:

$$\mathbb{B}_s=\{[a,b) : a,b\in\mathbb{R}\ a<b\}$$

¿$T\subset T_s$? $\Leftrightarrow$ ¿$\forall B\in T$, $\forall x\in B$ $\exists B'\in\mathbb{B}_s / x\in B'\subset B$?

$(c,d)\not\subset[a,b)$

$T_s\not\subset T$

$B=[a,b)$ con $a<b$ y $a,b\in\mathbb{Q}$, pero $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$, luego $B'=[a,b)\Rightarrow T\subset T_s$

¿$T_s\subset T$? $\Leftrightarrow$ ¿$\forall B\in T_s$, $\forall x\in B$ $\exists B'\in\mathbb{B} / x\in B'\subset B$?

Sea $[a,b)$ con $a<b$, $a,b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Para que $a\in B'$, $B'=(c,d)$ con $c,d\in\mathbb{Q}$ $c<a<d$.