Relación Ejercicios 5

Javier Gómez López

2020/2021

Ejercicio 2. Demostrar que la función $f(x) = \frac{e^x \sin x}{x}$ es integrable en [0,1] verificándose que $0 \leq \int_0^1 f(x)dx \leq e - 1$.

Lo primero de todo, hay que destacar que una función es integrable en un intervalo usando el criterio de la continuidad:

- Toda función continua en un intervalo cerrado es integrable en ese intervalo.
- Si una función es continua en un intervalo cerrado salvo en un número finito de puntos de discontinuidad y es acotada en ese intervalom entonces es integrable en él.

Así, nuestra función es continua en (0,1], puesto que el único punto donde se anula el denominador es $x = 0$.

Sin embargo, nuestra función está acotada pues:

$$\sin(x) \leq x \quad x \in [0, 1]$$

$$0 \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$$

$$\frac{e^x \sin(x)}{x} \leq e^x \quad x \in (0, 1] \Longrightarrow \frac{e \cdot \sin(1)}{1} \leq e$$

Queda demostrado que la f es integrable en [0,1].

Ahora demostremos que $0 \leq \int_0^1 f(x)dx \leq e - 1$:

$$\int_0^1 0dx = 0 \qquad \int_0^1 e^x dx = e^x]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$$

Por tanto:

$$\int_0^1 0dx \leq \int_0^1 f(x)dx \leq \int_0^1 e^x dx$$

$$0 \leq \int_0^1 f(x)dx \leq e - 1$$