Ejercicios Álgebra - Relación 4

Anillos

4.9. Efectuar las siguientes operaciones en el anillo $\mathbb{Z}_5[x]$

a) $(2x^3+x^2+4x+3)+(3x^3+4x^4+4x+3) = 4x^4+x^2+3x+1$

b) $(2x^3+x^2+4x+3)(4x^4+3x^3+4x+3) = 3x^7+x^6+3x^4+x^3+4x^6$
$+3x^5+4x^3+3x^2+x^5+2x^4+x^2+2x+2x^4+4x^3+2x+4 =$
$\boxed{3x^7+4x^5+2x^4+4x^3+4x^2+4x+4}$

c) $(-2x^3+x^2-4x+2)+(-3x^3+4x^2-4x+3) = 2x$

d) $(-2x^3+x^2-4x+2)(-3x^3+4x^2-4x+3) = x^6+2x^5+3x^4+4x^3+2x^5$
$+x^3+3x^2+2x^4+4x^3+x^2+3x+4x^3+3x^2+2x = x^6+4x^5+3x^3+2x^2$

4.8. Encontrar todas las unidades de los anillos $\mathbb{Z}_6$, $\mathbb{Z}_7$ y $\mathbb{Z}_8$.

$\mathbb{Z}_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$ $\quad 1,5 \in U(\mathbb{Z}_6)$

$\mathbb{Z}_7 = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ $\quad 1,2,3,4,5,6 \in U(\mathbb{Z}_7)$

$\mathbb{Z}_8 = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ $\quad 1,3,5,7 \in U(\mathbb{Z}_8)$

4.10. Si $p(x) \in \mathbb{Z}_5[x]$ es cualquiera de los cuatro polinomios obtenidos al realizar el ejercicio 4.9., calcular $p(1)$ y $p(-1)$ en cada caso.

c) $p(1) = 2$ $\quad p(-1) = -2$

a) $p(1) = 9$ $\quad p(-1) = 3$ $\qquad$ d) $p(1) = 10$ $\quad p(-1) = -4$

b) $p(1) = 25$ $\quad p(-1) = -5$

4.5. Efectuar los siguientes cálculos en el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$:

a) $(3+2\sqrt{3})+(4-5\sqrt{3}) = 7-3\sqrt{3}$

b) $(3+2\sqrt{3})(4-5\sqrt{3}) = 12-15\sqrt{3}+8\sqrt{3}-30 = -18-7\sqrt{3}$

c) $(2-\sqrt{3})^3 = (2-\sqrt{3})^2(2-\sqrt{3}) = (4-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}+3)(2-\sqrt{3}) =$
$(7-4\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 14-7\sqrt{3}-8\sqrt{3}+12 = 26-15\sqrt{3}$

4.4. Escribir las tablas de sumar y multiplicar de los anillos $\mathbb{Z}_5$ y $\mathbb{Z}_6$.

$\mathbb{Z}_5$

Suma

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Multiplicación

·	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

$\mathbb{Z}_6$

Suma

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

Multiplicación

·	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

4.3. En $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ definamos las operaciones

$$(a,a')+(b,b')=(a+b,a'+b')$$
$$(a,a')\cdot(b,b')=(ab,ab'+a'b)$$

¿Es $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ un anillo conmutativo?

1º) Conmutatividad producto

¿$(a,a')(b,b')=(b,b')(a,a')$?

Por la conmutatividad de la suma y el producto en $\mathbb{R}$ ✓

$(a,a')(b,b')=(ab,ab'+a'b)$

$(b,b')(a,a')=(ba,ba'+b'a)=(ab,ab'+a'b)$

2º) ¿Existencia del 0?

Se utiliza la definición de la suma para averiguarlo:

$$(a,a')+(x,y)=(a,a')\left\{\begin{matrix}a+x=a\\a'+y=a'\end{matrix}\right\}x=0\quad y=0$$

El 0 en $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ es $(0,0)$.

3º) ¿Existencia de opuestos?

$$(a,a')+(x,y)=(0,0)\left\{\begin{matrix}a+x=0\Rightarrow x=-a\\a'+y=0\Rightarrow y=-a'\end{matrix}\right.$$

En $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, el opuesto de cada elemento será de la forma $(-a,-a'$

4º) ¿Existencia del 1?

$(a,a')\cdot(x,y)=(a,a')$

Por la definición del producto:

$(a,a')\cdot(x,y)=(ax, ay+a'x)$ $\begin{cases} ax=a \Rightarrow x=1 \\ ay+a'x=a' \Rightarrow ay+a'=a' \end{cases}$

$\Downarrow$ $ay=0$ $\Downarrow$ $y=0$

En $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ el 1 es $(1,0)$.

5º) Asociatividad de la suma

¿$(a,a')+[(b,b')+(c,c')]=[(a,a')+(b,b')]+(c,c')$?

$(a,a')+[(b,b')+(c,c')]=(a,a')+(b+c,b'+c')=(a+b+c,a'+b'+c')$

$[(a,a')+(b,b')]+(c,c')=(a+b,a'+b')+(c,c')=(a+b+c,a'+b'+c')$

6º) Asociatividad del producto

¿$\underbrace{[(a,a')(b,b')]}(c,c')=(a,a')\underbrace{[(b,b')(c,c')]}$?

$(ab,ab'+a'b)(c,c')=(abc,abc'+ab'c+a'bc)$ ✓

$(a,a')(bc,bc'+b'c)=(abc,abc'+ab'c+a'bc)$

7º) Conmutatividad de la suma

¿$(a,a')+(b,b')=(b,b')+(a,a')$? ✓

$(a,a')+(b,b')=(a+b,a'+b')$

$(b,b')+(a,a')=(b+a,b'+a')=(a+b,a'+b')$

8º) Distributividad del producto respecto a la suma

¿$\underbrace{(a,a')[(b,b')+(c,c')]}=\underbrace{(a,a')(b,b')+(a,a')(c,c')}$?

$(a,a')(b+c,b'+c')=(ab+ac,ab'+ac'+a'b+a'c)$ ✓

$(ab,ab'+a'b)+(ac,ac'+a'c)=(ab+ac,ab'+a'b+ac'+a'c)$

4.7. Determinar las unidades del anillo definido por el conjunto $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, con las operaciones $(a,a')+(b,b')=(a+b,a'+b')$ y $(a,a')\cdot(b,b')=(ab,ab'+a'b)$.

Las unidades del anillo serán aquellos elementos para los cuales existen sus inversos, es decir, $(a,a')(x,y)=(1,0)$, siendo (x,y) el inverso de (a,a'):

$(a,a')(x,y)=(1,0) \Rightarrow \begin{cases} ax=1 \Rightarrow x=a^{-1} \\ a'y=0 \Rightarrow y=0 \end{cases}$

Las unidades del anillo son todos aquellos elementos cuya primera componente tiene inverso en $\mathbb{Z}$. Como en $\mathbb{Z}$ sólo tienen inverso el 1 y -1, las unidades en $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ serán todos aquellos elementos de la forma $(-1,a')$ y $(1,a')$.

4.2. En el conjunto $\mathbb{Z}$ definimos las operaciones de suma $\oplus$ y producto $\otimes$ por

$$a\oplus b = a+b-1$$
$$a\otimes b = a+b-ab$$

Así, por ejemplo, $2\oplus 3=4$ y $2\otimes 3=-1$. ¿Es $\mathbb{Z}$ un anillo conmutativo con estas operaciones?

1º) Conmutatividad de la suma

¿$a\oplus b = b\oplus a$? ✓

$a\oplus b = a+b-1$

$b\oplus a = b+a-1 = a+b-1$

2º) Asociatividad de la suma

¿$(a\oplus b)\oplus c = a\oplus(b\oplus c)$?

$(a\oplus b)\oplus c = (a+b-1)\oplus c = a+b-1+c-1 = a+b+c-2$ ✓

$a\oplus(b\oplus c) = a\oplus(b+c-1) = a+b+c-1-1 = a+b+c-2$

3º) ¿Existencia del 0?

¿$a\oplus x = a$?

$a\oplus x = a+x-1 \Rightarrow a+x-1=a \Rightarrow \boxed{x=1}$

El 0 en este anillo es el 1 en $\mathbb{Z}$.

4º) ¿Existencia del 1?

¿$a\otimes y = a$?

$a\otimes y = a+y-ay \Rightarrow a+y-ay=a \Rightarrow y-ay=0 \Rightarrow (1-a)y=0 \Rightarrow y=0$

El 1 en este anillo es el 0 en $\mathbb{Z}$.

5º) ¿Existencia de opuestos?

¿$a\oplus z = 0$?

$a\oplus z = a+z-1 \Rightarrow a+z-1=0 \Rightarrow z=1-a$

Los opuestos de este anillo son de la forma "$1-a$" para cada elemento a.

6°) Asociatividad del producto

¿$(a\otimes b)\otimes c = a\otimes(b\otimes c)$?

$(a+b-ab)\otimes c = (a+b-ab+c-(a+b-ab)c) = (a+b+c-ab-ac-bc+abc)$

$a\otimes(b+c-bc) = (a+b+c-bc-a(b+c-bc)) = (a+b+c-ab-ac-bc+abc)$ ✓

7°) Conmutatividad del producto

¿$a\otimes b = b\otimes a$?

$a\otimes b = a+b-ab$ ✓

$b\otimes a = b+a-ba = a+b-ab$

8°) Distributividad del producto respecto a la suma ✓

¿$a\otimes(b\oplus c) = (a\otimes b)\oplus(a\otimes c)$?

$a\otimes(b\oplus c) = a\otimes(b+c-1) = a+b+c-1-ab-ac+a = 2a+b+c-1-ab-ac$

$(a\otimes b)\oplus(a\otimes c) = (a+b-ab)\oplus(a+c-ac) = 2a+b+c-ab-ac-1$

Es un anillo conmutativo.

4.1. Si A y B son anillos conmutativos, probar que el conjunto producto cartesiano $A\times B$, con las operaciones

$(a,a')+(b,b') = (a+b, a'+b')$ $\quad a,b\in A$

$(a,a')(b,b') = (ab, a'b')$ $\quad a',b'\in B$

es efectivamente un anillo conmutativo. Se llama el "anillo producto cartesiano" de A y B. Escribir las tablas de sumar y multiplicar del anillo producto $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$

1°) Conmutatividad de la suma

¿$(a,a')+(b,b') = (b,b')+(a,a')$?

$(a,a')+(b,b') = (a+b, a'+b')$ ← Conm. suma en A y B ✓

$(b,b')+(a,a') = (b+a, b'+a') = (a+b, a'+b')$

2°) Asociatividad de la suma

¿$(a,a')+((b,b')+(c,c')) = ((a,a')+(b,b'))+(c,c')$?

$(a,a')+((b,b')+(c,c')) = (a,a')+(b+c, b'+c') = (a+b+c, a'+b'+c')$ ✓

$((a,a')+(b,b'))+(c,c') = (a+b, a'+b')+(c,c') = (a+b+c, a'+b'+c')$

3°) ¿Existencia del 0?

¿$(a,a')+(x,y) = (a,a')$?

$(a,a')+(x,y) = (a+x, a'+y) = (a,a')$

$\begin{cases} a+x=a \Rightarrow x=0 \\ a'+y=a' \Rightarrow y=0 \end{cases}$ El 0 en $A\times B$ es $(0,0)$

4°) ¿Existencia del 1?

$¿(a,a')\cdot(x,y)=(a,a')?$

$(a,a')\cdot(x,y)=(ax,a'y) \Rightarrow (ax,a'y)=(a,a') \Rightarrow x=1 \quad y=1$

El 1 en $A\times B$ es $(1,1)$

5°) ¿Existencia de opuestos?

$¿(a,a')+(x,y)=(0,0)?$

$(a,a')+(x,y)=(a+x,a'+y) \begin{cases} a+x=0 \Rightarrow x=-a \\ a'+y=0 \Rightarrow y=-a' \end{cases}$

Los opuestos en $A\times B$ son de la forma $(-a,-a')$ para cada elemento (a,a').

6°) Asociatividad del producto

$¿\underbrace{(a,a')\cdot((b,b')\cdot(c,c'))}=\underbrace{((a,a')\cdot(b,b'))\cdot(c,c')}?$

$(a,a')\cdot(bc,b'c')=(abc,a'b'c')$ ✓

$(ab,a'b')\cdot(c,c')=(abc,a'b'c')$

7°) Conmutatividad del producto

$¿(a,a')\cdot(b,b')=(b,b')\cdot(a,a')?$ ✓

$(a,a')\cdot(b,b')=(ab,a'b')$

$(b,b')\cdot(a,a')=(ba,b'a')=(ab,a'b')$

8°) Distributividad del producto respecto a la suma

$¿\underbrace{(a,a')\cdot((b,b')+(c,c'))}=\underbrace{(a,a')(b,b')+(a,a')(c,c')}?$

$(a,a')\cdot(b+c,b'+c')=(ab+ac,a'b'+a'c')$ ✓

$(ab,a'b')+(ac,a'c')=(ab+ac,a'b'+a'c')$

Es un anillo conmutativo.

$\mathbb{Z}_2=\{0,1\}$ $\quad \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$

Suma

	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
(0,0)	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
(0,1)	(0,1)	(0,0)	(1,1)	(1,0)
(1,0)	(1,0)	(1,1)	(0,0)	(0,1)
(1,1)	(1,1)	(1,0)	(0,1)	(0,0)

Multiplicación

	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)
(0,1)	(0,0)	(0,1)	(0,0)	(0,1)
(1,0)	(0,0)	(0,0)	(1,0)	(1,0)
(1,1)	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)

4.6. ¿Cuáles de los siguientes son subanillos de los anillos indicados?

i) $\underbrace{\{a \in \mathbb{Q} \mid 3a \in \mathbb{Z}\}}_{A} \subseteq \mathbb{Q}$

Será un anillo sí y solamente si $\forall s,t \in A$, $s+t$ y $s \cdot t$ están en A.

Si $0, 1 \in A$

Si $\forall t \in A, -t \in A$

Veamos que $s \in \mathbb{Q}, t \in \mathbb{Q}$, $s+t \in \mathbb{Q} \Rightarrow 3s \in \mathbb{Z} + 3t \in \mathbb{Z} \Rightarrow$
$3(s+t) \in \mathbb{Z} \Rightarrow s+t \in A$

$0 \in \mathbb{Q} \Rightarrow 3 \cdot 0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 0 \in A$

$1 \in \mathbb{Q} \Rightarrow 3 \cdot 1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 1 \in A$

Veamos que $s \in \mathbb{Q}, t \in \mathbb{Q}, s \cdot t \in \mathbb{Q} \Rightarrow 3s \in \mathbb{Z}, 3t \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3(3(st)) \in \mathbb{Z}$
$st \in A$

Sea $a \in \mathbb{Q} \Rightarrow 3a \in \mathbb{Z}$, $-a \in \mathbb{Q} \Rightarrow -3a \in \mathbb{Z} \Rightarrow -a \in A$

Es subanillo.

ii) $\underbrace{\{m + 2n\sqrt{3} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}}_{A} \subseteq \mathbb{R}$

Será un anillo sí y solamente si $\forall a, b \in A$, $a+b$ y $a \cdot b$ están en A.

Si $0, 1 \in A$

Si $\forall a \in A, -a \in A$

$A \subseteq B \Rightarrow$ Cerrado para la suma
Cerrado para el producto
$1_B \in A$

De estas se deduce que $0_B \in A$

4.12.

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{f} R$$

$$f(1_{\mathbb{Z}}) = 1_R$$

$$f(2) = f(1+1) = f(1) + f(1) = 1_R + 1_R$$

4.13. Demostrar que si A es un anillo de característica n, entonces existe, entonces existe un único homomorfismo de anillos $\mathbb{Z}_n$ en A que es inyectivo.

$$\mathbb{Z}_n \xrightarrow{f} A$$

$$\bar{k} = \bar{r} \to f(\bar{k}) = f(\bar{r})$$

$$f(\bar{1}) = 1_A$$

$$f(\bar{2}) = 1_A + 1_A$$

$$f(\overline{n-1}) = \underbrace{1_A + \dots + 1_A}_{n-1}$$

$$\mathbb{Z}_5 \to A$$

$$f(\bar{6}) = f(\bar{1}) = 1_A$$

$$\| $$

$$1_A + \text{———} + 1_A$$

$$\bar{k} = \bar{r} \overset{?}{\Longrightarrow} 1_A + \overset{k}{\text{———}} + 1_A = 1_A + \overset{r}{\text{———}} 1_A$$

$\Downarrow$

k-r es múltiplo de n $\to 1_A + \overset{k-n}{\text{———}} + 1_A$

$\|$

4.16. Razonar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

iii) De $\mathbb{Z}_7$ en $\mathbb{Z}_{14}$ hay exactamente 7 homomorfismos de anillos.

$$\mathbb{Z}_n \to A$$

- Si car(A) es divisor de n $\to$ Hay 1
- Si car(A) no es divisor de n $\to$ No hay

- car(A) = k, k x n $\to$ k = nq + r, r ≠ 0

$$1_A + \overset{n}{\text{———}} + 1_A = 1_A + \underset{\neq 0}{\overset{r}{\text{———}}} + 1_A$$

ii) $\mathbb{Z}_{1457}$ es un cuerpo.

No lo es porque 1457 no es primo

i) Existe un único homomorfismo de anillos de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_7$ que es sobreyectivo.

Sí existe, por el ejercicio 12.

Para lo de sobreyectivo es necesario el teorema chino del resto