# Algorítmica

## Capítulo 3. Algoritmos Greedy*

### Tema 7. Algoritmos Greedy

- El enfoque greedy
- Repaso de grafo

* Voraz en español

# La filosofía greedy


¡Cómete siempre todo lo que tengas a mano!

El término greedy es sinónimo de voraz, ávido, glotón …

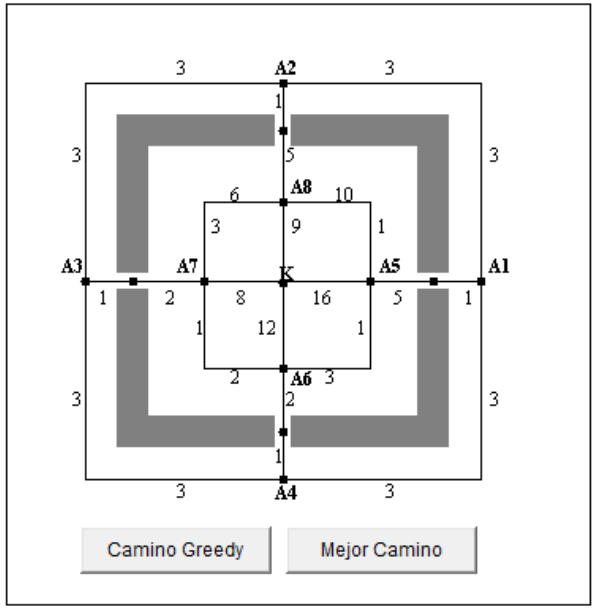
# La filosofía greedy

### Como funciona la técnica Greedy.

Suponemos las murallas de una ciudad, diferentes puntos dentro y fuera de ella y el tiempo necesario para movernos entre cada par de puntos, que suponemos depende de diversas razones (seguridad, distancia, ...).

Queremos encontrar el camino mas corto para llegar desde el punto A(1) hasta K, centro de la ciudad.

El enfoque greedy intentará ir al punto mas cercano al A(1) dentro de la ciudad, que es el A(5), empleando 6 unidades de tiempo, pero despues de eso, ya no hay forma de encontrar el camino de menor costo.

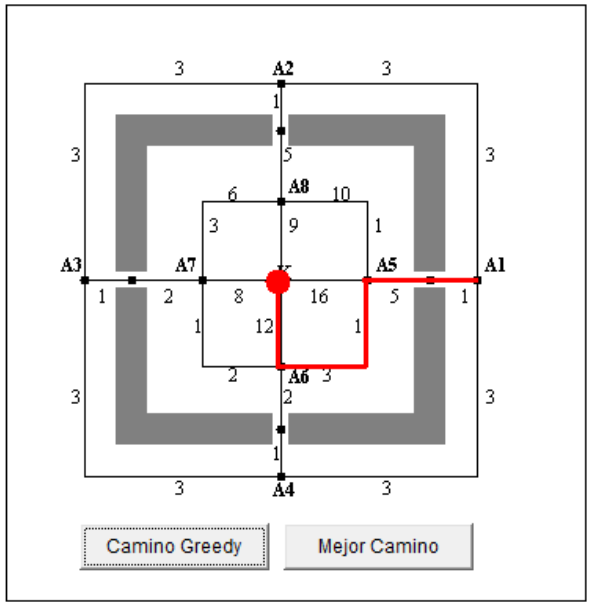



### Como funciona la técnica Greedy.

Suponemos las murallas de una ciudad, diferentes puntos dentro y fuera de ella y el tiempo necesario para movernos entre cada par de puntos, que suponemos depende de diversas razones (seguridad, distancia, ...).

Queremos encontrar el camino mas corto para llegar desde el punto A(1) hasta K, centro de la ciudad.

El enfoque greedy intentará ir al punto mas cercano al A(1) dentro de la ciudad, que es el A(5), empleando 6 unidades de tiempo, pero despues de eso, ya no hay forma de encontrar el camino de menor costo.

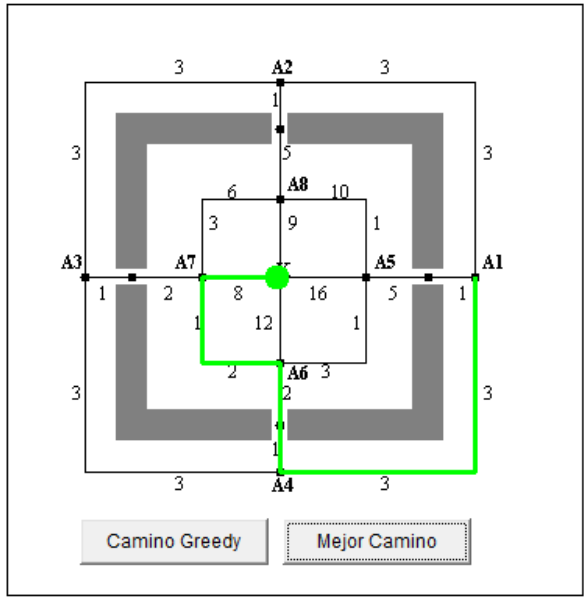



### Como funciona la técnica Greedy.

Suponemos las murallas de una ciudad, diferentes puntos dentro y fuera de ella y el tiempo necesario para movernos entre cada par de puntos, que suponemos depende de diversas razones (seguridad, distancia, ...).

Queremos encontrar el camino mas corto para llegar desde el punto A(1) hasta K, centro de la ciudad.

El enfoque greedy intentará ir al punto mas cercano al A(1) dentro de la ciudad, que es el A(5), empleando 6 unidades de tiempo, pero despues de eso, ya no hay forma de encontrar el camino de menor costo.



# El enfoque greedy

- La idea básica consiste en seleccionar en cada momento lo mejor de entre un conjunto de candidatos, sin tener en cuenta lo ya hecho, hasta obtener una solución para el problema.
- Cuando para resolver un problema se le aplica el **enfoque greedy**, el algoritmo resultante se denomina **Algoritmo Greedy**
- El enfoque greedy solo se puede aplicar a problemas que reúnan un conjunto de características: **Problemas Greedy.**
- Suelen ser problemas de optimización

# Características de un problema greedy

- Para poder resolver un problema con un enfoque greedy, ha de reunir las 6 siguientes características, que no son necesarias, pero si suficientes:
  1. Un **conjunto de candidatos**: Las tareas a ejecutar, los nodos de un grafo, etc.
  2. Una lista de **candidatos ya usados.**
  3. Un criterio (**función) solución** que dice cuándo un conjunto de candidatos forma una solución (no necesariamente óptima).

# Características de un problema greedy

4 Un criterio que dice cuándo un conjunto de candidatos (sin ser necesariamente una solución) es factible, es decir, podrá llegar a ser una solución (no necesariamente optima).

5 Una función de selección que indica en cualquier instante cuál es el candidato más prometedor de los no usados todavía.

6 Una función objetivo que a cada solución le asocia un valor, y que es la función que intentamos optimizar (a veces coincide con la de selección)

# Enfoque greedy

- Un algoritmo Greedy procede siempre de la siguiente manera:
  - Se parte de un conjunto de candidatos a solución vacío: S = ∅
  - De la lista de candidatos que hemos podido identificar, con la función de selección, se coge el mejor candidato posible,
  - Vemos si con ese elemento podríamos llegar a constituir una solución: Si se verifican las condiciones de factibilidad en S
  - Si el candidato anterior no es válido, lo borramos de la lista de candidatos posibles, y nunca mas es considerado
  - Evaluamos la función objetivo. Si no estamos en el optimo
  - Seleccionamos con la función de selección otro candidato y repetimos el proceso anterior hasta alcanzar la solución.
- La primera solución que se consigue suele ser la Solución Óptima del problema

# El enfoque greedy

- FUNCION GREEDY

  $S = \varnothing$

  Mientras S no sea una solución y $C \neq \varnothing$ Hacer:

  X = elemento de C que maximiza SELEC (X)

  $C = C - \{X\}$

  Si ($S \cup \{X\}$ es factible Entonces $S = S \cup \{X\}$

  Si S es una solución entonces devolver S

  caso contrario "NO HAY SOLUCION"

- C es la lista de candidatos.
- El enfoque Greedy suele proporcionar soluciones óptimas, pero no hay garantía de ello. Por tanto, siempre habrá que estudiar la **corrección del algoritmo** para verificar esas soluciones.

# Ejemplo

- Se desea dar cambio usando el menor número posible de monedas de 1, 5, 10 y 25
- ¿Es greedy el problema?:
  - Candidatos: 1, 5, 10, 25 (con una moneda de cada tipo por lo menos).
  - Usados: Podremos definirlo.
  - Solución: Lista de candidatos tal que la suma de los mismos coincida exactamente con el cambio pedido.
  - Criterio de factibilidad: Que no se supere el cambio.
  - Criterio de selección: Se escoge la moneda de mayor valor entre las disponibles.
  - Objetivo: El número de monedas ha de ser mínimo.

# Ejemplo

- Si tenemos, por ejemplo, una moneda de 100 que queremos cambiar y la máquina dispone de 3 monedas de 25, 1 de 10, 2 de 5 y 25 de 1, entonces la primera solución que alcanza el algoritmo greedy directo es justamente la Solución Optima: 3 de 25, 1 de 10, 2 de 5 y 5 de 1.
- Pero si tenemos 10 monedas de 1, 5 de 5, 3 de 10, 3 de 12 y 2 de 25, la solución del algoritmo para una moneda de 100 sería 2 de 25, 3 de 12, 1 de 10 y 4 de 1, en total diez monedas.
- La solución no es óptima, ya que existe otra mejor que utiliza nueve monedas en vez de diez, que es 2 de 25, 3 de 10 y 4 de 5.

# Greedy y Optimalidad

- Los algoritmos greedy no alcanzan soluciones optimales siempre
- Esta desventaja es una ventaja en problemas en los que es imposible (o muy difícil) alcanzar el óptimo: Heurísticas Greedy:
  - Problema del Coloreo de un Grafo,
  - Problema del Viajante de Comercio,
- Pueden alcanzar óptimos locales, pero no los óptimos globales de los problemas.
- Por eso en cada caso habrá que demostrar la corrección del algoritmo

POR EJEMPLO:
"Colorear un mapa político de España"
↳ El color de una ciudad tiene que ser diferente del de las ciudades adyacentes

# Almacenamiento optimal en cintas

- Tenemos n programas que hay que almacenar en una cinta de longitud L.
- Cada programa i tiene una longitud $l_i$ , $1 \leq i \leq n$
- Todos los programas se recuperan del mismo modo, siendo el tiempo medio de recuperación (TMR),

$$(1/n)\sum_{1\leq j\leq n} t_j$$

- Nos piden encontrar una permutación de los n programas tal que cuando esten almacenados en la cinta el TMR sea mínimo.
- Minimizar el TMR es equivalente a minimizar

$$D(I) = \sum_{1\leq j\leq n}\ \sum_{1\leq k\leq j} l_{i_k}$$

# Ejemplo

- El problema reúne todos los ingredientes greedy

- Sea n = 3 y $(l_1,l_2,l_3) = (5,10,3)$

| Orden I | | D(I) |
|---|---|---|
| 1,2,3 | 5 + 5 + 10 + 5 + 10 + 3 | = 38 |
| 1,3,2 | 5 + 5 + 3 + 5 + 3 + 10 | = 31 |
| 2,1,3 | 10 + 10 + 5 + 10 + 5 + 3 | = 43 |
| 2,3,1 | 10 + 10 + 3 + 10 + 3 + 5 | = 41 |
| 3,1,2 | 3 + 3 + 5 + 3 + 5 + 10 | = 29 |
| 3,2,1 | 3 + 3 + 10 + 3 + 10 + 5 | = 34 |

# Solución Greedy

- Partiendo de la cinta vacía

  Para i := 1 to n do

  grabar el siguiente programa mas corto

  ponerlo a continuación en la cinta

- El algoritmo escoge lo mas inmediato y mejor sin tener en cuenta si esa decisión será la mejor a largo plazo.

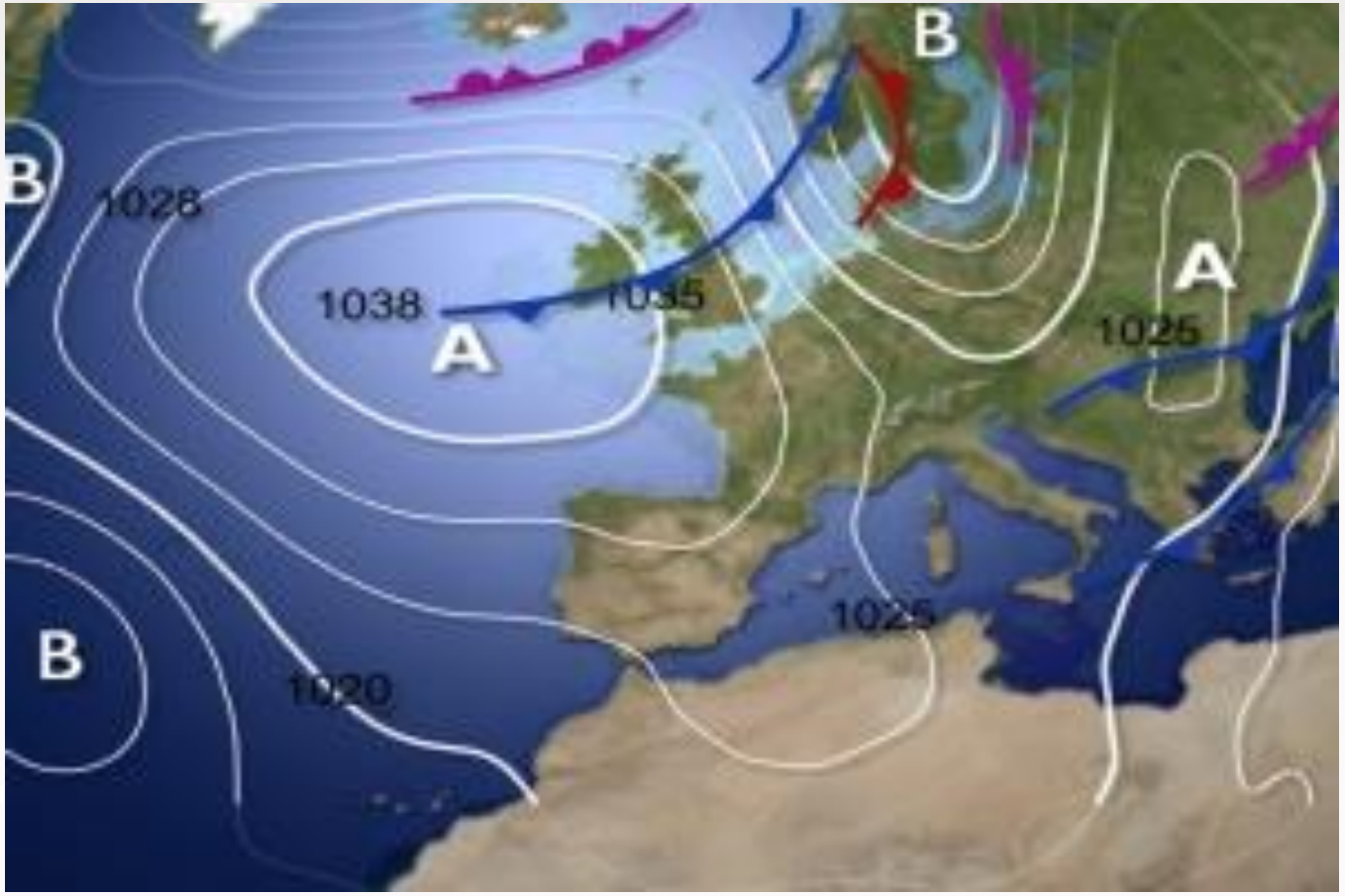
# Almacenamiento optimal en cintas

- Teorema
- Si $l_1 \leq l_2 \leq \ldots \leq l_n$ entonces el orden de colocación $i_j = j$, $1 \leq j \leq n$ minimiza

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} l_{i_j}$$

- Para todas las posibles permutaciones de ij
- Pero ¿siempre podremos considerar un óptimo local como uno global?

# Greedy y Optimalidad



# Greedy y Optimalidad

- Hay casos en los que un óptimo local podrá considerarse como global
- Típico problema de optimización, $f : R^n \rightarrow R$,

$$\text{Min } \{f(x): x \in S\}$$

- A $\{x \in R^n: x \in S\}$ se le llama solución factible del problema.
- Si $x^* \in S : f(x^*) \leq f(x), \forall x \in S$, entonces $x^*$ es un óptimo global.
- Si $x^* \in S$ y existe un entorno $V(x^*)$ tal que

$$f(x^*) \leq f(x), \forall x \in S \cap V(x^*)$$

entonces $x^*$ es un óptimo local.

# Greedy y Optimalidad

- Supongamos que S (el conjunto factible) es un conjunto contenido en $R^n$ ( $S \subseteq R^n$)
- S no vacío y convexo;
- Sea f: S → R y el problema

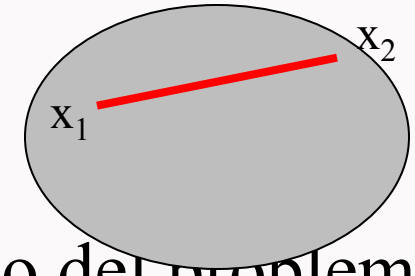
$$\text{Min: } f(x),\ x \in S$$

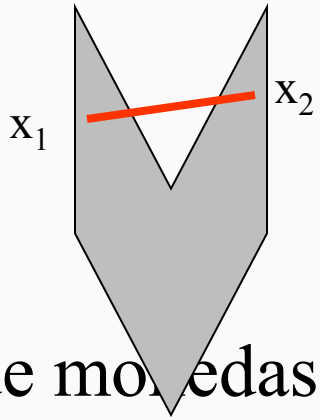
- Si $x^*$ es un óptimo local, entonces si f es una **función convexa**, el óptimo local es un óptimo global.

¿Se verificaba esto en el anterior problema del cambio de monedas?

# Convexidad

- S es un conjunto convexo cuando $\forall\ x_1, x_2 \in S$ y $\forall\ \lambda \in [0,1] \rightarrow \lambda\, x_1 + (1 - \lambda)\, x_2 \in S$, lo que se traduce como: "Dados dos puntos del conjunto S, todo el segmento lineal que los une está en el conjunto".



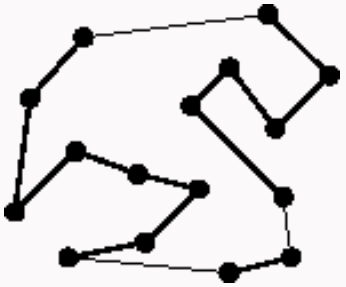

- En el caso del problema del cambio de monedas, el conjunto factible no era convexo

# Algoritmos Greedy para Grafos

- ¿Por que hay que estudiar grafos?
- Podemos abstraer grafos de distintas situaciones físicas del mundo real para:
  - Resolver problemas de recorridos dando servicios eficientes a nuestros clientes o a los usuarios de los sistemas:
  - Por ejemplo el Problema del Viajante de Comercio
  - Diseñar Redes poco costosas de computadores de telefonía, etc.
- Son básicos en Inteligencia Artificial, pero también en Arquitectura y en otras muchas Ingenierías
- Desde luego en Robótica

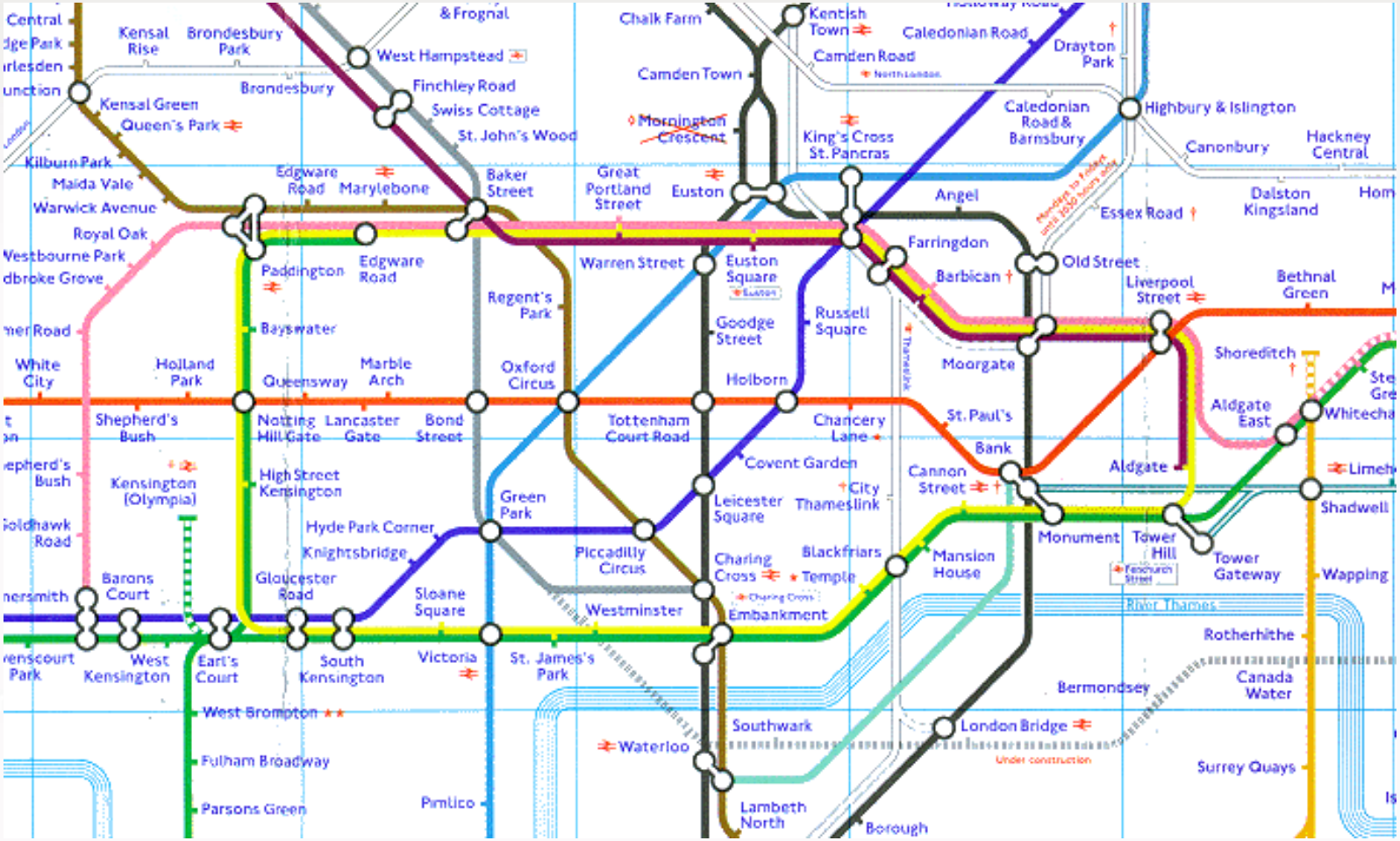
# Algoritmos Greedy para Grafos

- Supongamos que tenemos un robot que maneja un soldador.
- Para que el robot haga las soldaduras que queremos, debemos darle el orden en que debe visitar los puntos de soldadura, de modo que visite (y suelde) el primer punto, luego el segundo, etc., hasta que concluya su tarea
- Como los robots son caros, necesitamos encontrar el orden que minimiza el tiempo (es decir, la distancia recorrida) que tarda en realizar todas las soldaduras del panel

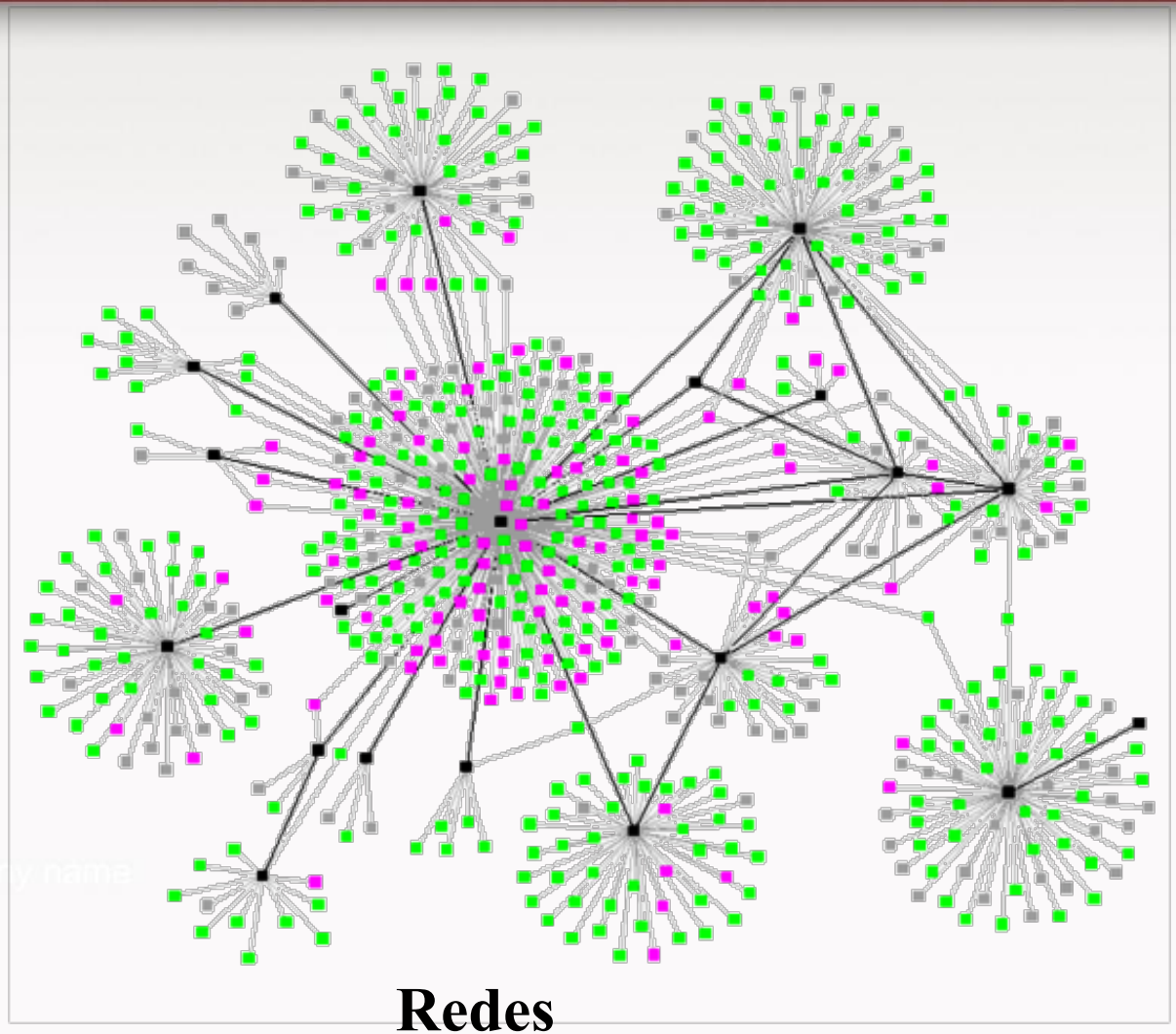


- Pero hay muchos mas…

# Ejemplos de grafos

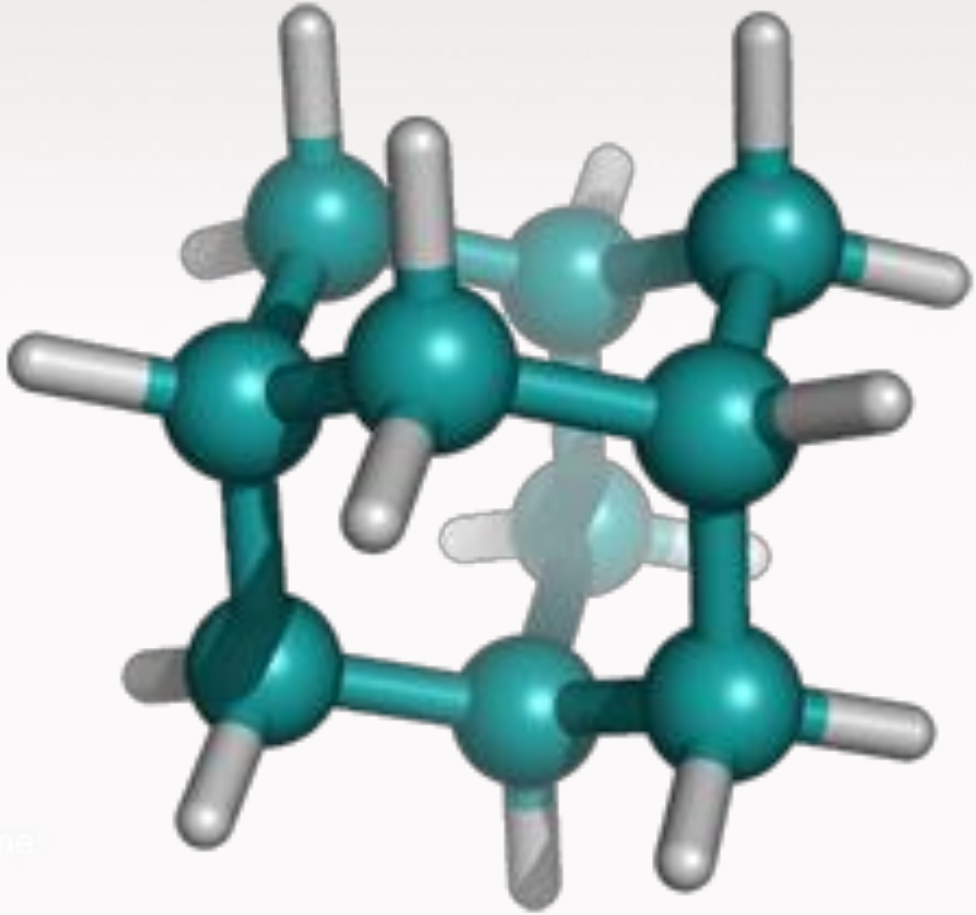


# Ejemplos de grafos



**Redes Sociales**

# Ejemplos de grafos



**Modelos químicos**

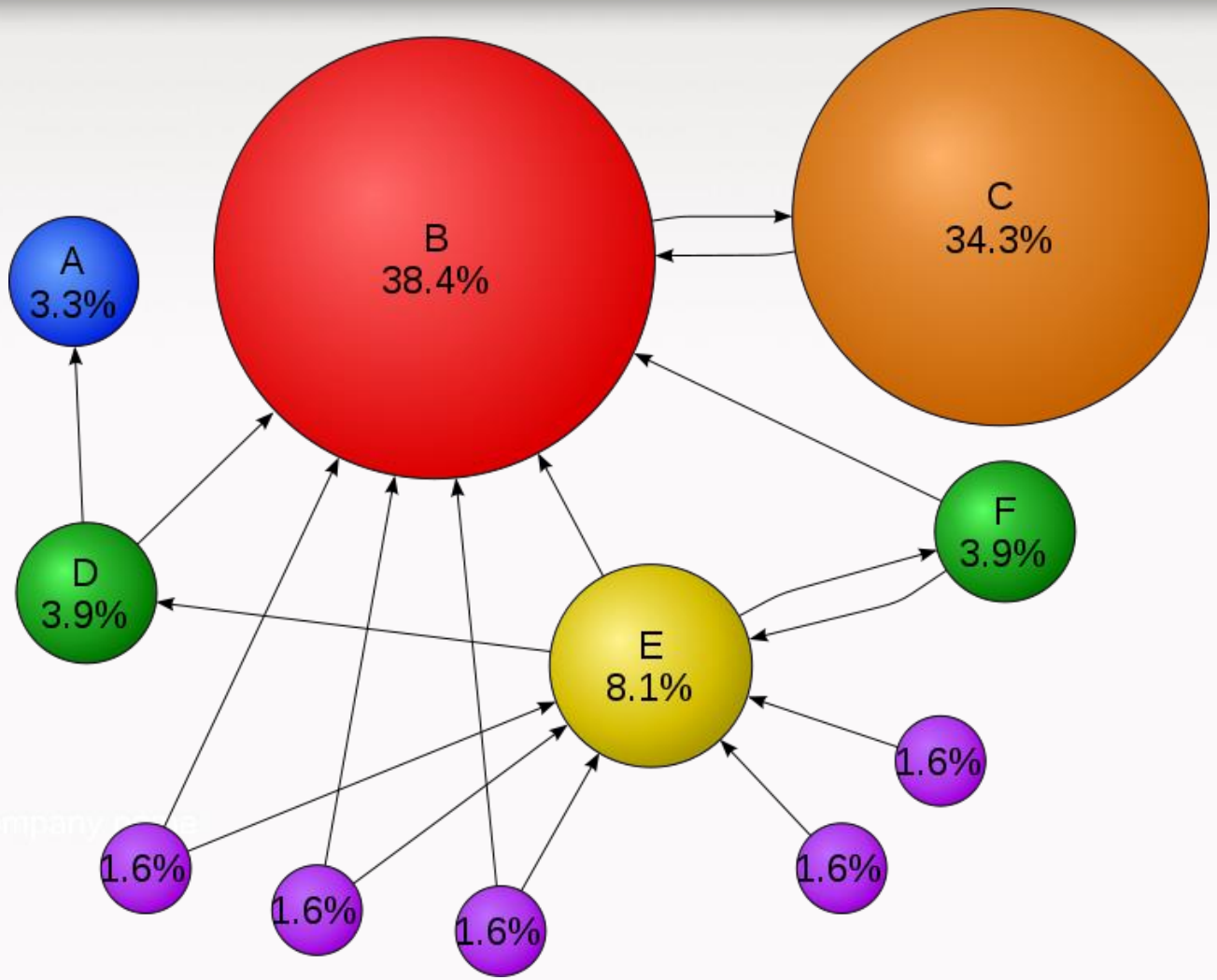
# Grafos, internet y Google

- Google ve iternet como un grafo gigante.
- Cada página web es un nodo, y las páginas están conectadas por aristas si existen links entre ellas.
- Notese que en internet las aristas SI tienen dirección (estrictamente habría que hablar de “arcos”).
- El algoritmo que usa Google para ordenar sus búsquedas se llama **PageRank**.

# ¿Como trabaja PageRank?

- **Idea**: cuantos mas links apúntan a una página, mas importante se supone que es esa página.
- **Segunda idea**: Si una página importante apúnta a tu página, eso es mucho mas importante que si lo hace una página sin importancia
- Por ejemplo, que nos referencie Wikipedia es mucho mas importante que el que lo haga la web de Panadería Pepi.

# Ejemplo



# ¡PageRank se usa para ganar dinero!

- Las personas que saben como se usa PageRank pueden lucrarse a través del uso de ese algoritmo.
- Por ejempo, negocios o personas individuales con altos valores de page rank pueden vender links a aquellos otros que desean elevar su page rank.
- También se usa algoritmos similares para ordenar las universidades en el mercado de trabajo (¡no todos somos iguales!)

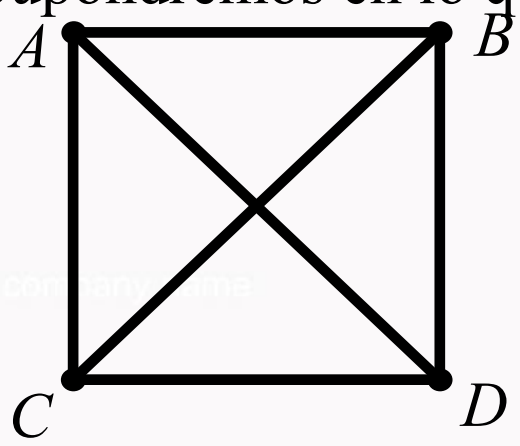
# Complemento: Social networking

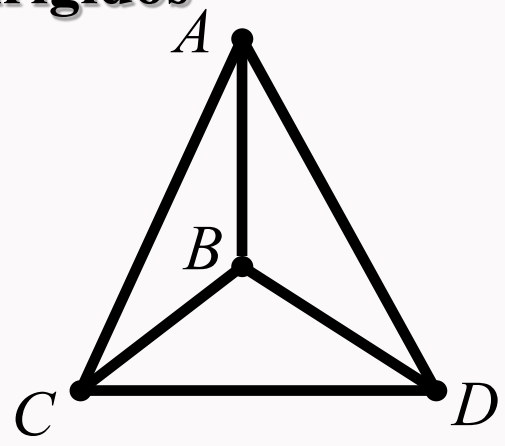
- Los grafos también son importantes para los sitios de “social networking” como Facebook.


- Analizando las preferencias de nuestros amigos y las páginas que visitamos (“like”), Facebook puede dirigir de manera muy acertada su publicidad.

# Nociones básicas de grafos

- Un grafo se define con dos conjuntos:
  - Un conjunto de **vértices** (nodos), y
  - Un conjunto de **aristas**
- Cuando las aristas tienen origen y final (dirección), se habla de **Grafos Dirigidos**, y en lugar de aristas tendremos arcos. Tambien hay **Grafos Ponderados**
- Supondremos en lo que sigue **Grafos no Dirigidos**



# Definición formal

- Sea $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ un conjunto finito, no vacío. Sea $A \subseteq X \times X$ una relación. Al par $G = (X,A)$ se le llama **grafo dirigido.**
- Sea $I_X = \{(x_i, x_i), i = 1, 2, ..., n\}$ y $X^2 = (X \times X) - I_X$ (para eliminar lazos). Definimos en $X^2$ una relación R tal que:

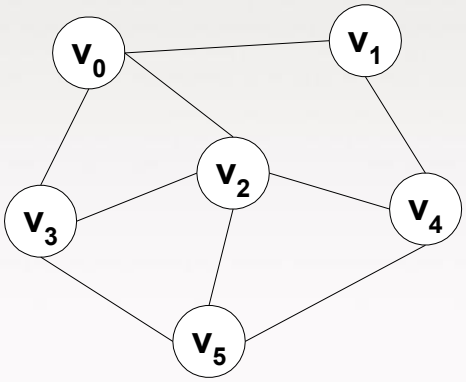
$$(x_i, x_j)R(x_h, x_k) \Leftrightarrow (x_i,x_j) = (x_h,x_k) \text{ ó } (x_i, x_j) = (x_k, x_h)$$ (para quitar la dirección de los puntos)

- R es una relación de equivalencia. Definimos el conjunto cociente $(X^2 / R)$ para esa relación. Al par

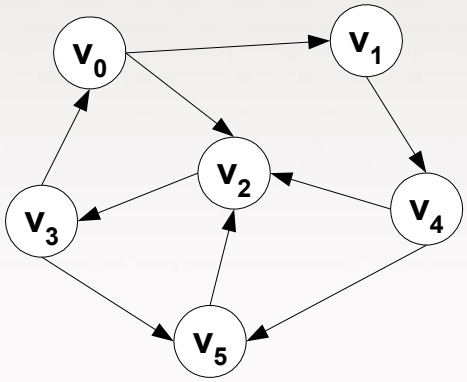
$$G = (X, B), \text{ con } B \subseteq X^2 / R$$

se le llama **grafo no dirigido**

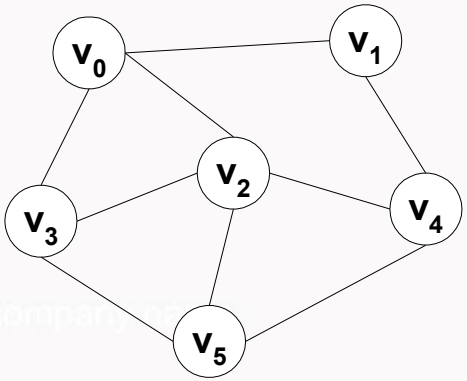
# Ejemplos



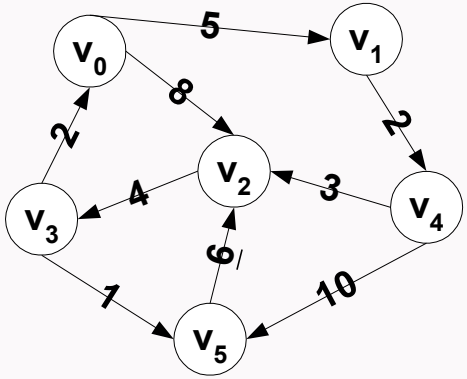

No Dirigido




Dirigido



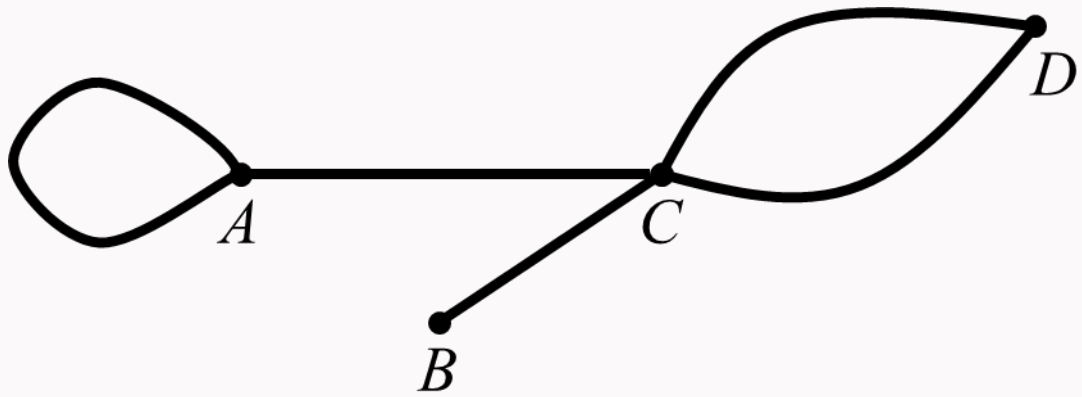

No Ponderado




Ponderado

# Nociones básicas de grafos

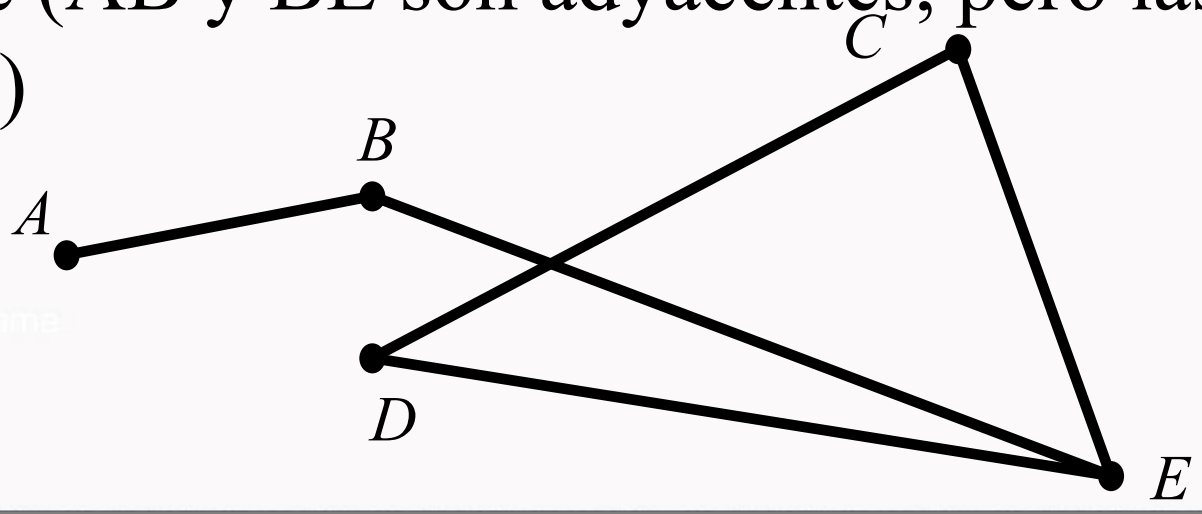
- Podemos unir dos vértices varias veces, obteniendo múltiples aristas
- Podemos unir un vértice a si mismo, para formar un lazo



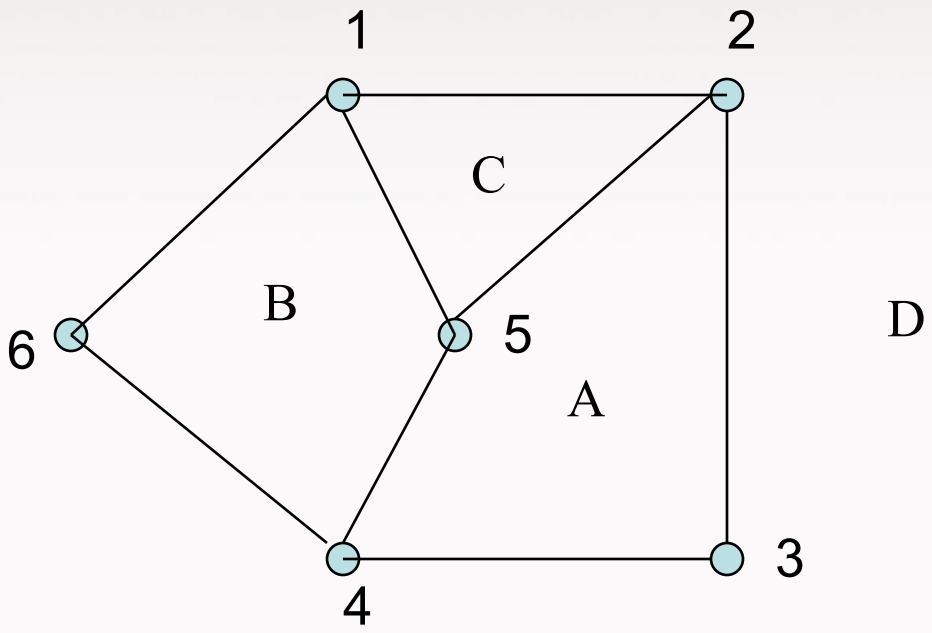

- Un grafo es completo si cualquier par de vértices distintos está unido por una arista

# Nociones básicas de grafos

- Dos vértices son adyacentes si existe una arista que los une (B y E son adyacentes, pero el B y el D no)
- Dos aristas son adyacentes si comparten un vertice (AB y BE son adyacentes, pero las AB *y* CE no)



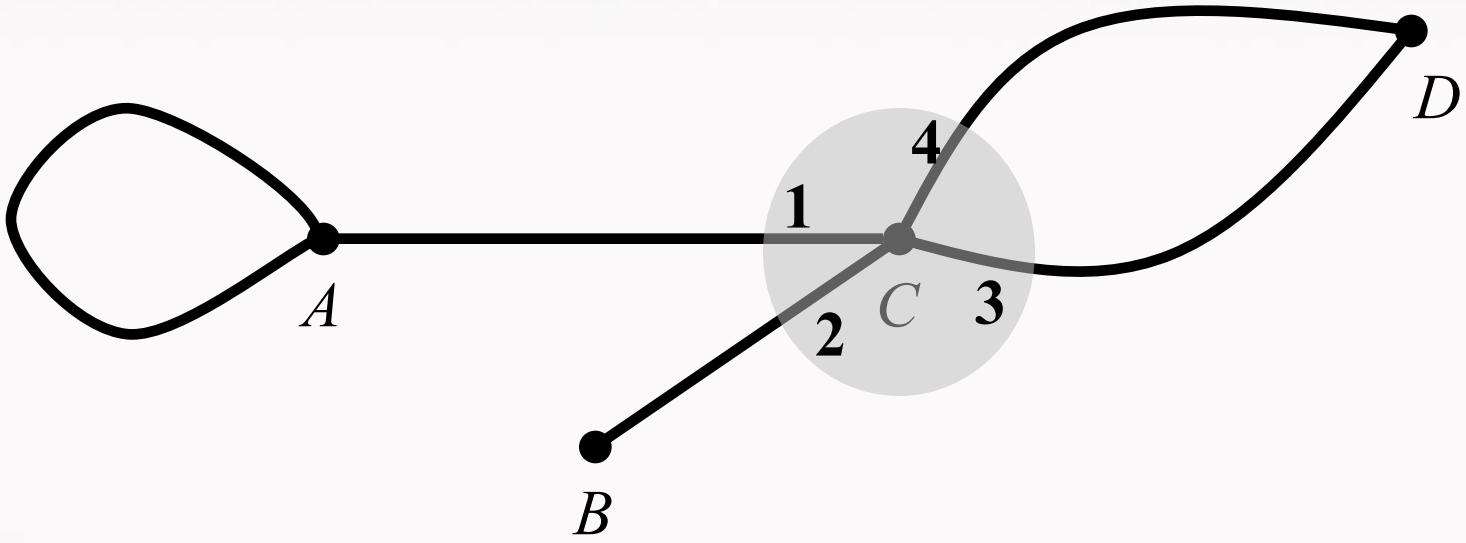
# Nociones básicas de grafos




Un grafo se llama plano si no puede pintarse en el plano (o en una esfera) sin que se crucen sus aristas.

# Nociones básicas de grafos

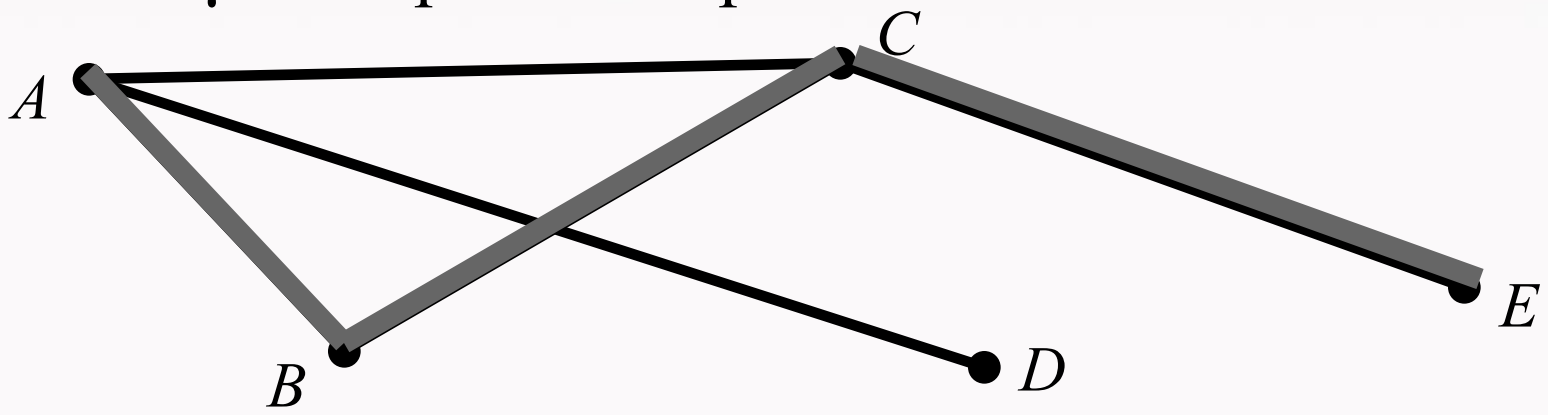
- El grado de un vértice es el número de aristas que pasan por ese vértice.




Gra(C) = 4, Gra(A) = 3, Gra(B) = 1, Gra(D) = 2

# Nociones básicas de grafos

- Un **camino** es una sucesión de aristas distintas adyacentes.
  - ¡No se permite repetir aristas en un camino!



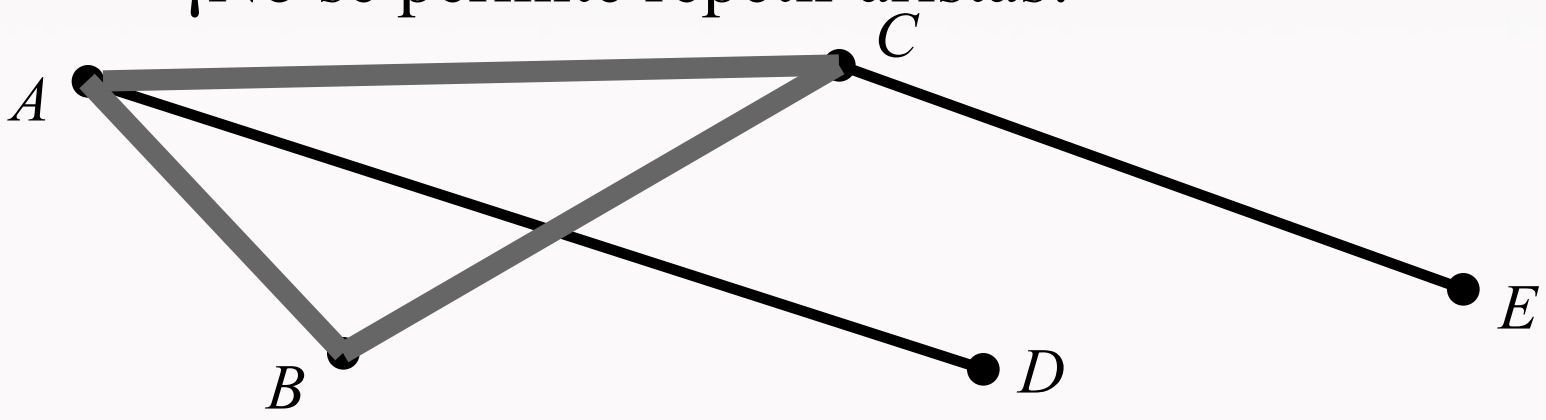

Las aristas AB, BC, y CE forman el camino ***A,B,C,E***



Las aristas AD, DA y AC no forman un camino (repetición)

# Nociones básicas de grafos

- Un **circuito** es un camino que comienza y termina en el mismo vértice.
  - ¡No se permite repetir aristas!

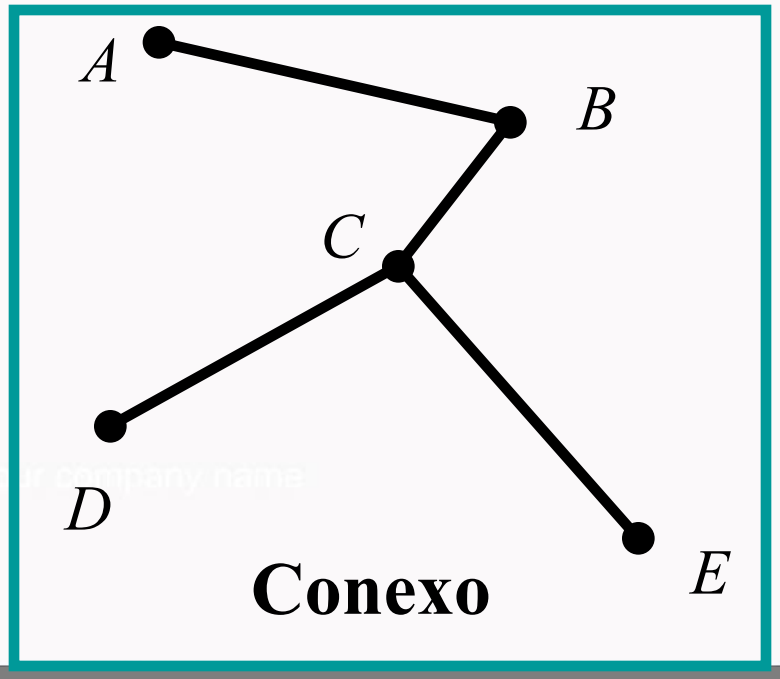


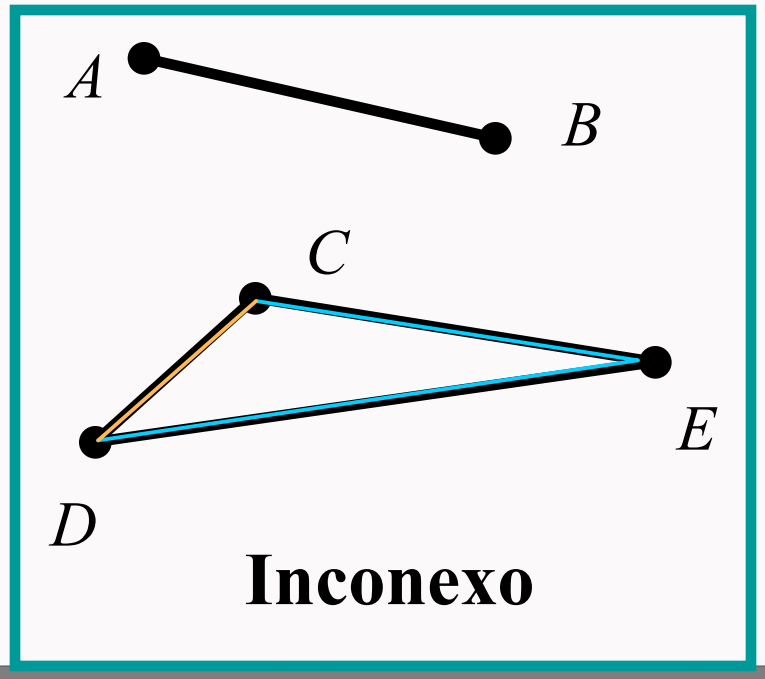

AB, BC, and CA forman el circuito ***A,B,C,A***

Las aristas BA y AD no forman un circuito

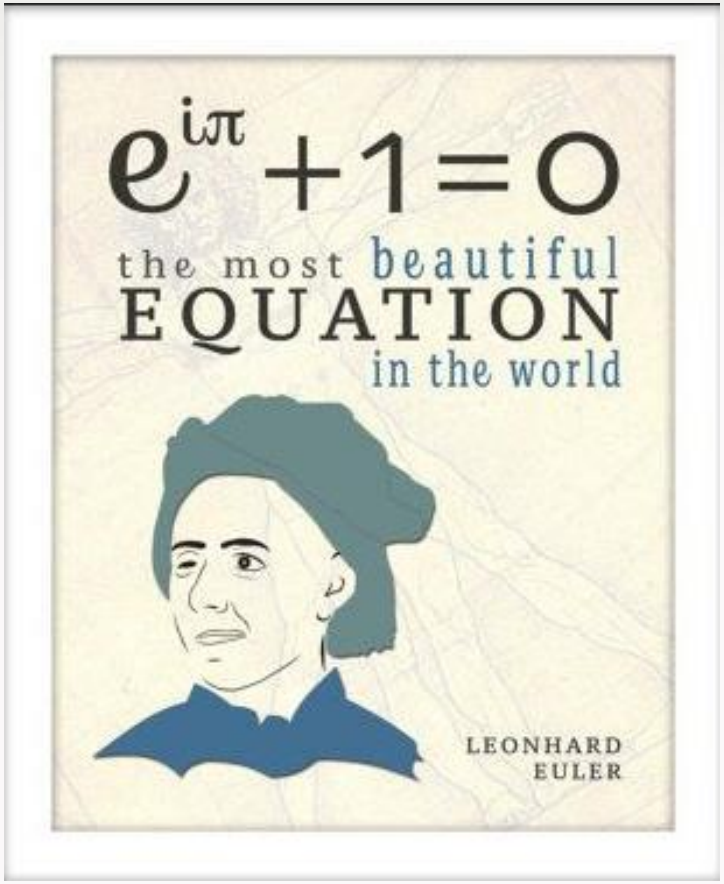
# Nociones básicas de grafos

- Un grafo se dice **conexo** si cualesquiera dos vértices pueden unirse por un camino. Si un grafo no es conexo, se llama **inconexo**



# Nociones básicas de grafos

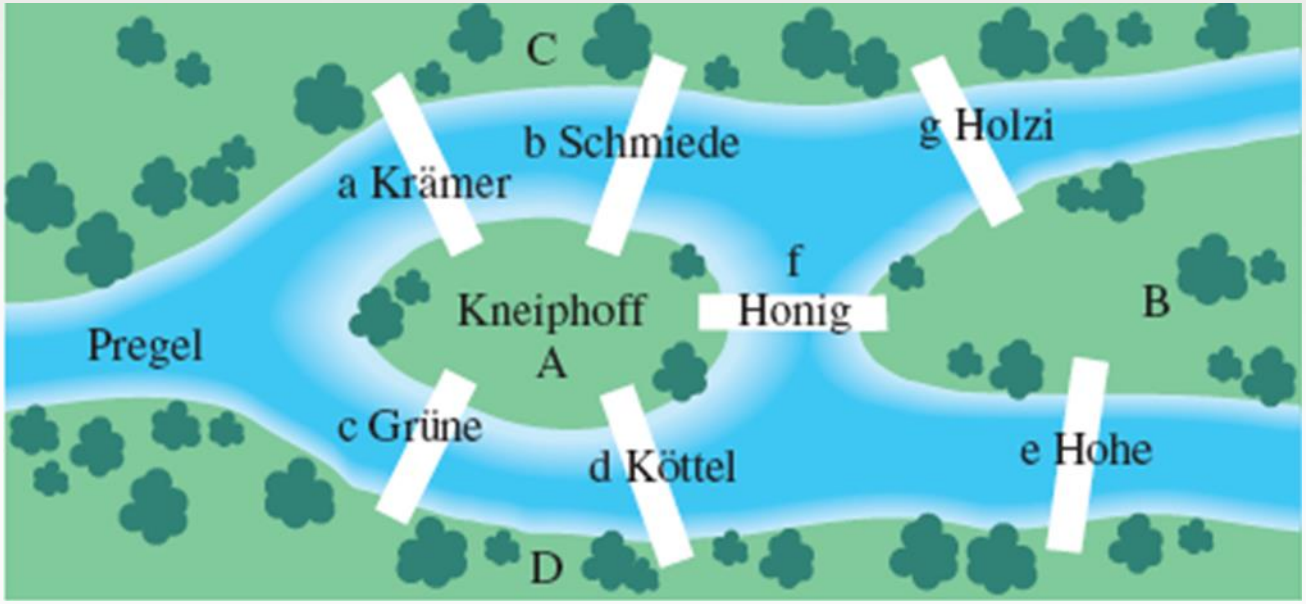



**Leonhard Euler** (1707-1783) ha sido el matemático mas prolífico de todos los tiempos, con contribuciones importantes en Geometría, Cálculo, Física, ... y Grafos.

Aproximadamente la mitad de sus publicaciones las escribió despues de quedar ciego. Cuando perdió la vista comentó: “Así ahora me distraere menos.”

Tuvo por lo menos 13 hijos

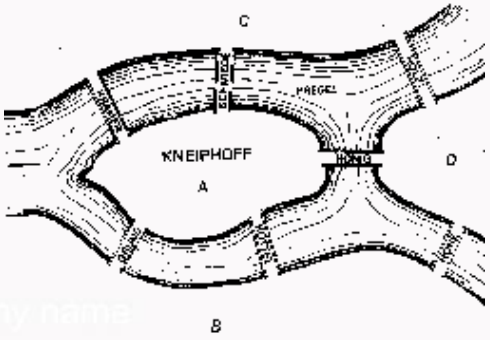
# Nociones básicas de grafos

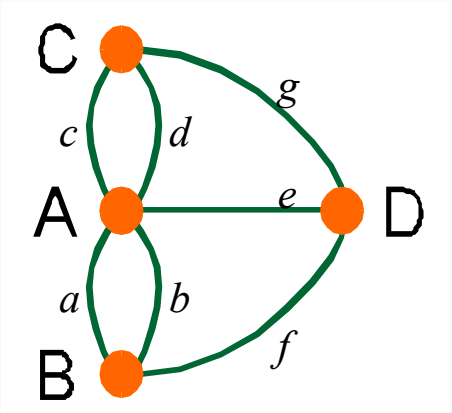



En la ciudad de **Königsberg** en Austria, hay una isla llamada **"Kneiphoff"** bordeada por el rio **Pregel**. Hay **siete puentes** conectando las orillas. El problema es saber si una persona puede recorrer todos estos puentes, pasando por todos y cada uno de ellos solamente una vez, y volviendo a su punto de partida.

# Nociones básicas de grafos

- Cuando Euler llego a Königsberg, habia consenso en la imposibilidad de hacer aquel recorrido, pero nadie lo aseguraba con certeza
- Euler planteó el problema como uno de grafos:
  - Cada parte de tierra supondría un vértice, y
  - Cada puente representaría una arista




Y en 1736 demostró la imposibilidad de dar un paseo como el que se quería dar.

# Nociones básicas de grafos

- Un **Camino Euleriano** es un camino que pasa a través de cada arista del grafo una y solo una vez
- Un **Circuito Euleriano** es un circuito que pasa por cada arista del grafo una y solo una vez
- **Teorema de Euler**
  - Si todos los vértices de un grafo son de grado impar, entonces no existen circuitos eulerianos.
  - Si un grafo es conexo y todos sus vértices son de grado par, existe al menos un circuito euleriano.

# Nociones básicas de grafos

- Un **Circuito Hamiltoniano** es un circuito que pasa a través de cada vértice una y solo una vez, y termina en el mismo vértice en el que comenzó.
- Los **Circuitos Hamiltonianos y los Circuitos Eulerianos** son conceptos distintos y separados: En un grafo podemos tener de unos, y no de otros.
- A diferencia de los Circuitos Eulerianos, no tenemos un resultado simple que nos diga si un grafo tiene o no Circuitos Hamiltonianos.

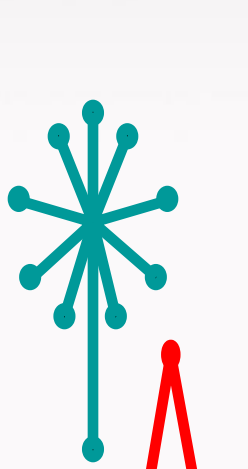
**William R. Hamilton**

# Ejemplos

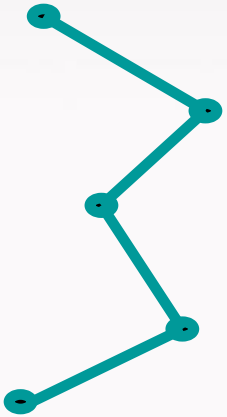
- La determinación de un circuito euleriano minimal es lo que se conoce con el nombre del Problema del Cartero Chino:
  - Encontrar el circuito de longitud minimal que recorre cada arista de un grafo al menos una vez.
- A la búsqueda de un circuito hamiltoniano minimal se la conoce con el nombre de Problema del Viajante de Comercio:
  - Hallar el circuito de longitud mínima que recorre todos los nodos de un grafo una y solo una vez, comenzando y terminando por el mismo vértice

# Nociones básicas de grafos

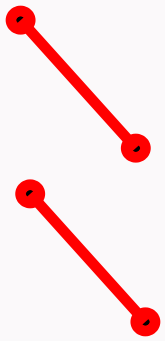
- Un **árbol** es un grafo que no tiene ciclos.
- Un grafo conexo y sin circuitos, se llama un **árbol**



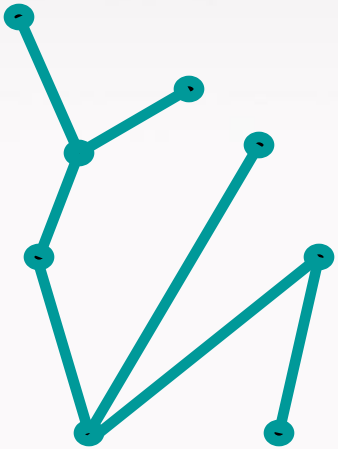
Si



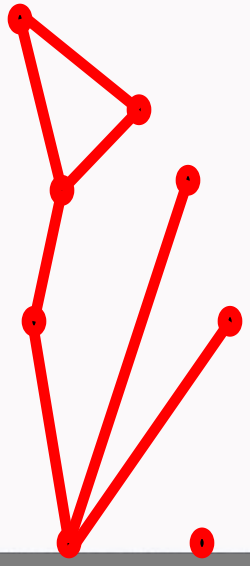
No



Si



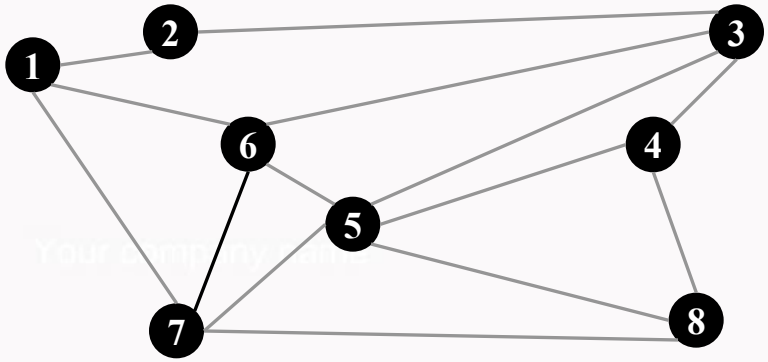
No



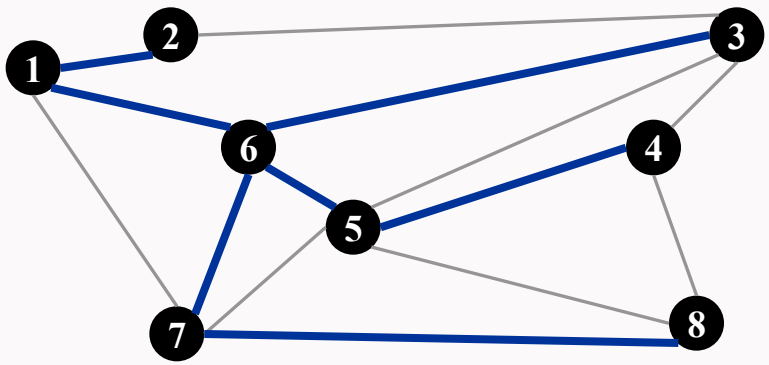
# Árbol Generador de un Grafo

- Sea T = (V, F) un subgrafo de G = (V, E). Las siguientes afirmaciones son equivalentes:
  - T es un arbol generador de G:
  - ⇕
  - T es acíclico y conexo.
  - ⇕
  - T es conexo y tiene |V| - 1 arcos.
  - ⇕
  - T es acíclico y tiene |V| - 1 arcos.

G = (V, E)

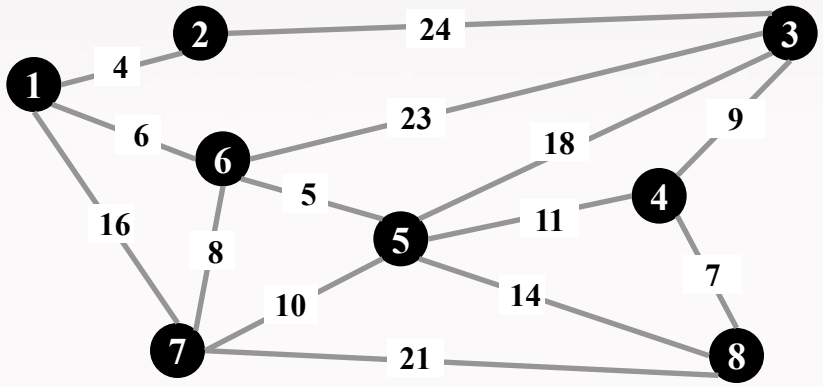



T = (V, F)

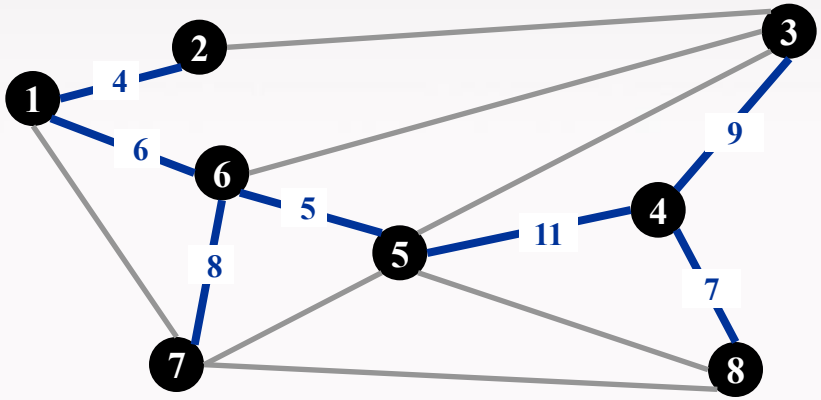


# Arbol Generador Minimal

- Dado un grafo conexo G con pesos en sus arcos $c_e$, un **Árbol Generador Minimal** es un árbol generador de G en el que la suma de los pesos de sus arcos es mínima.




G = (V, E)




T = (V, F) l(T) = 50

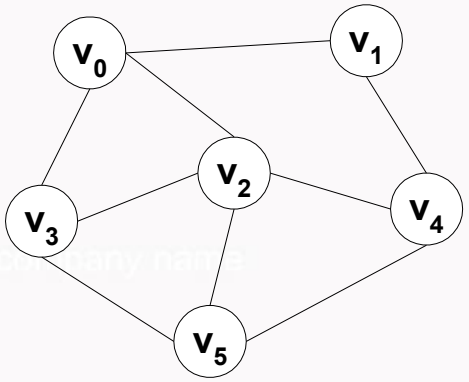
- **Teorema de Cayley** (1889). Hay $n^{n-2}$ arboles generadores de $K_n$ (el grafo completo de n vértices)
  - Por tanto el empleo de la fuerza bruta para encontrar el AGM de un grafo no es un método recomendable

# La matriz de adyacencia

- Si suponemos un grafo G = (X, E) con n vértices, entonces su matriz de adyacencia es:

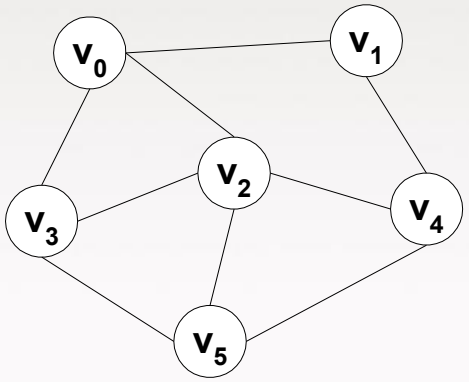
$$A_G(i,j) = \begin{cases} 1 \ldots\ldots si(x_i, x_j) \in E \\ 0 \ldots\ldots si(x_i, x_j) \notin E \end{cases}$$

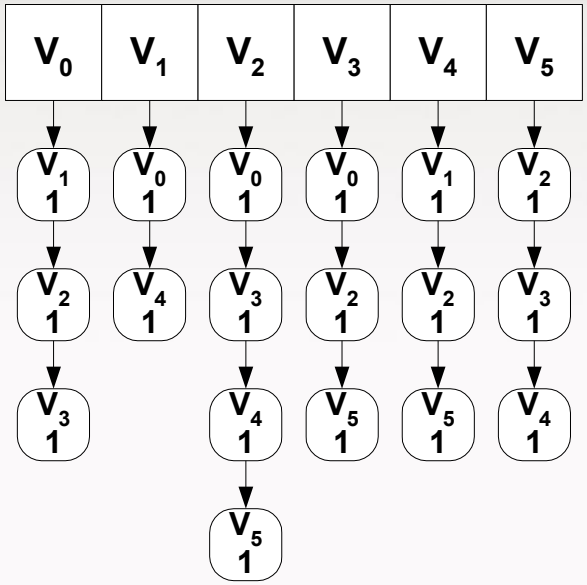
- Cuando el grafo es ponderado, el valor que aparece en cada casilla es el peso de la arista correspondiente

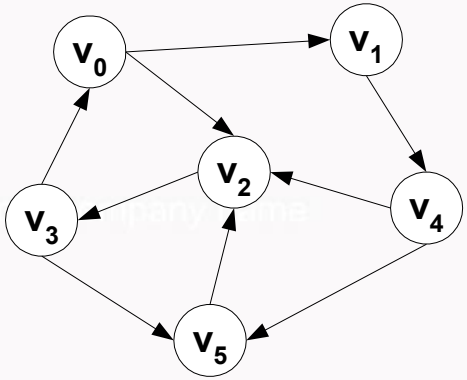


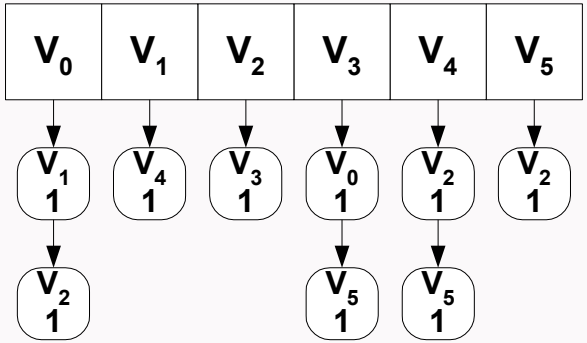

| left → right | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | - | 1 | 1 | 1 | - | - |
| 1 | 1 | - | - | - | 1 | - |
| 2 | 1 | - | - | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 1 | - | 1 | - | - | 1 |
| 4 | - | 1 | 1 | - | - | 1 |
| 5 | - | - | 1 | 1 | 1 | - |

# Representación por listas de adyacencia



# Matriz de Incidencia

- Si se trata de un grafo no dirigido, entonces la matriz es:

$$B_G(i,j) = \begin{cases} 1 \ldots\ldots si \ldots x_i \ldots esta \ldots en \ldots a_j \\ 0 \ldots\ldots en \ldots otro \ldots caso \end{cases}$$

donde $a_j$ es la arista que conecta $x_i$ con $x_j$.

- Si se trata de un grafo dirigido, entonces la matriz es:

$$B(i,j) = \begin{cases} +1 \ldots\ldots si \ldots x_i \ldots es \ldots inicial \ldots en \ldots a_j \\ 0 \ldots\ldots en \ldots otro \ldots caso \ldots (bucle) \\ -1 \ldots\ldots si \ldots x_i \ldots es \ldots final \ldots en \ldots a_j \end{cases}$$

donde $a_j$ es el arco que conecta $x_i$ con $x_j$.