GEOMETRÍA I. Examen del Tema 1
– Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas –
Curso 2012/13

<u>**Nombre**</u>**:**

Razonar todas las respuestas

1. En cada caso, probar la afirmación o dar un ejemplo de que es falsa
   (a) Si una matriz A satisface $A = 2A^t$, entonces $A = 0$.
   (b) Si $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ tiene todos los menores de orden 2 nulos, entonces $|A| = 0$.
   (c) Sea A una matriz tal que existen matrices regulares P y Q y PAQ es una matriz escalonada reducida por filas y columnas. Entonces $PA = H_f(A)$

2. Según el valor de a, hallar las formas de Hermite por filas y por columnas de
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ a & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$
y en el caso de que sea regular, hallar la matriz inversa usando el método de Hermite (o Gauss).

3. Hallar el determinante de la primera matriz y el rango de la segunda
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & 0 & b & a \\ 0 & 0 & c & c \\ 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Discutir y resolver en su caso, y según los valores de a y b, los siguientes sistemas (el primero por Gauss, el segundo por determinantes/Cramer)
$$\left\{ \begin{array}{ccc} 2x + y & = & 0 \\ 4x + ay + z & = & 2 \\ y - z & = & b \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{ccc} ax + y & = & a \\ x + by & = & b \\ x + y & = & a \end{array} \right.$$

Soluciones:

1. (a) Verdadero. Haciendo 'traspuesta' en $A = 2A^t$, tenemos $A^t = 2(A^t)^t = 2A$. Por tanto, $A = 2A^t = 2(2A) = 4A$, luego $3A = 0$, es decir, $A = 0$.

   (b) Verdadero. (Primera forma) Como todos los menores de orden 2 son nulos, el rango de A es menor o igual que 1, en particular, no es 4. Esto quiere decir que la matriz no es regular, y así, $|A| = 0$.

   (Segunda forma). Desarrollando A por una fila, aparecen sumandos que son producto de números por menores de orden 3. Desarrollando cada menor de orden 3 por una fila, aparecen sumando que son producto de números por menores de orden 2. Cómo éstos son 0, entonces todos los menores de orden 3 son también nulos, y de aquí, que también lo será el determinante de A.

   (c) Falso. Basta tomar $P = I_n$, A una matriz cualquiera regular y que no sea reducida por filas y $Q = A^{-1}$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \ Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

2. Hacemos primero la forma de Hermite por filas. Distinguimos si a es 0 o no. Si $a \neq 0$,

$$A \ \rightarrow \ \overset{F_{12}}{\rightarrow} \begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \overset{F_{32}(1)}{\rightarrow} \begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{F_1(1/a),F_2(1/2),F_3(-1)}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{a} & \frac{2}{a} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{F_{12}(-2/a),F_{13}(-2/a)}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $H_f(A) = I_3$, entonces A es regular, luego su forma de Hermite por columnas también es I_3.

Si $a = 0$,

$$A \overset{F_{21}(-1),F_{31}(1)}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{F_1(1/2),F_2(1/2)}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{F_{32}(1)}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para la forma de Hermite por columnas, pasamos la primera columna a la tercera y empezamos con la transformación $C_1(1/2)$:

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{C_2(1/2)}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{-1}{2} & 0 \end{pmatrix} \stackrel{C_{12}(-1)}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Para hallar la inversa, sólo se hace para $a \neq 0$, haciendo las mismas transformaciones (por filas o por columnas) a la matriz identidad. Tomando las transformaciones por filas, tenemos:

$$I_3 \quad \stackrel{F_{12}}{\to} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{F_{32}(1)}{\to} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{F_1(1/a),F_2(1/2),F_3(-1)}{\to} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{F_{12}(-2/a),F_{13}(-2/a)}{\to} \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{a} & \frac{2}{a} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

que es la matriz inversa

(a) (Primera forma) Llamando A_n a la matriz, donde n es el orden de la misma, y desarrollando por la primera fila, se tiene $|A_n| = 2|A_{n-1}| - |A_{n-2}|$. Esta formula nos permite calcular $|A_n|$ sin más que calcular los primeros dos valores: $|A_1| = 2$ y $|A_2| = 3$. Por tanto, $|A_3| = 2 \cdot 3 - 2 = 5$, y así sucesivamente, $|A_n| = n + 1$.

(Segunda forma) Hacemos $F_{21}(-1/2)$, el determinante no cambia, obteniendo

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 2 \end{vmatrix}.$$

Ahora hacemos $F_{32}(-3/2)$, consiguiendo

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 2 \end{vmatrix}.$$

Siguiendo con el proceso,

$$|A| = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \frac{n+1}{n} \end{pmatrix}.$$

Como la matriz es triangular superior, el determinante es el producto de los elementos de la diagonal principal, es decir,

$$|A| = 2\frac{3}{2}\frac{4}{3}\cdots\frac{n+1}{n} = n+1.$$

(b) Ya que la segunda columna y última fila son de ceros, se pueden quitar y el rango no cambia:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & a \\ 0 & c & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

Si todos los elementos son 0, el rango es 0. Supongamos a partir de ahora que alguno no es cero. Haciendo $C_{31}(-1)$ y luego $C_{32}(-1)$ conseguimos

$$B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

y $r(A) = r(B)$. El determinante es acd (también es escalonada), luego si no es cero, el rango es 3. Por tanto, los casos que tenemos son:

i. Si $a, c, d \neq 0$, $r(A) = 3$.

ii. Supongamos $a = 0$. Entonces si $c, d \neq 0$, el rango es 2 por que es escalonada con 2 pivotes.

   A. Si $c = 0$, entonces $r(A) = 2$ si $b, d \neq 0$ por tener 2 pivotes. Si $b = 0$ y $d \neq 0$, $r(A) = 1$ por tener un único pivote (el d), y lo mismo pasa si $b \neq 0$, $d = 0$.

   B. Si $c \neq 0$, el rango es 2 si $d \neq 0$ por tener 2 pivotes, c y d; y si $d = 0$, el rango es 1 por tener dos filas proporcionales.

iii. Supongamos $c = 0$. Si $a, d \neq 0$, el rango es 2 por tener dos pivotes. Si $d = 0$, sólo hay un pivote (b o a) y el rango es 1

iv. Supongamos $d = 0$. El caso que queda es $c, d \neq 0$. Entonces el rango es 2 por tener dos pivotes, c y d.

3. (a)

$$A|b = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & a & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 4 & a & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & a-2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & 0 & a-1 & 2-b(a-2) \end{pmatrix}.$$

i. Si $a - 1 \neq 0$, $r(A) = r(A|b) = 3$ y el sistema es compatible. Las soluciones son:

$$z = \frac{2 - b(a-2)}{a-1}, \; y = b + z = \frac{b+2}{a-1}, x = -\frac{b+2}{2(a-1)}.$$

ii. Si $a - 1 = 0$ ($a = 1$) y $b + 2 \neq 0$, el término $(3, 4)$ no es 0, luego $r(A) = 2$, $r(A|b) = 3$ y el sistema es incompatible.

iii. Si $a - 1 = 0$ ($a = 1$) y $b + 2 = 0$, $r(A) = r(A|b) = 2$ y el sistema es indeterminado con dimensión de las soluciones 1. Ya que los pivotes eran los elemenos $(1, 1)$ y $(2, 2)$, se toma z como parámetro, obteniendo

$$z = \lambda \in \mathbb{R}, y = 2 + \lambda, x = \frac{2+\lambda}{2}.$$

(b) Aquí
$$A|b=\begin{pmatrix} a & 1 & a \\ 1 & b & b \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$
Empezamos por el menor $(3,1)$, que es 1. Ampliamos con la primera y segunda fila y segunda columna:
$$\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=a-1,\begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1-b$$

i. Si $a-1\neq 0$, entonces $r(A)=2$. Calculamos el determinante de $A|b$, que es $b(a-1)^2=0$, luego

   A. $b=0$. Entonces $r(A|b)=2$. El sistema es compatible determinado. Las soluciones son
$$x=\frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}=0, y=\frac{\begin{vmatrix} a & a \\ 1 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}=a.$$

   B. $b\neq 0$. Entonces $r(A|b)=3$ y el sistema es incompatible.

ii. Supongamos $a=1$. Tenemos dos casos:

   A. Caso $b\neq 1$. Entonces $r(A)=2$ y $r(A|b)=b(a-1)^2=0$. El sistema es compatible y se escribe como $x+by=b$, $x+y=a$. La solución es
$$x=\frac{\begin{vmatrix} b & b \\ a & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}=0, y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}=1.$$

   B. Caso $b=1$. Entonces $r(A)=1$ y $r(A|b)=1$. Sistema indeterminado con $y=\lambda\in\mathbb{R}$ y $x=|1-\lambda|/|1|=1-\lambda$.

GEOMETRÍA I. Examen del Tema 1

– Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas –

Curso 2013/14

<u>Nombre</u>:

1. En cada caso, probar la afirmación o dar un ejemplo de que es falsa

   (a) Si $A, B \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$, entonces $r(A+B) = r(A) + r(B)$.

   (b) Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tales que $AB = A$, entonces B es la matriz identidad.

   (c) Si el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ es compatible determinado, entonces también lo es $2Ax = 3b$.

2. Según el valor de a y b, hallar la forma de Hermite por filas de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & b \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

   y deducir de dichos cálculos el rango de la matriz.

3. Consideramos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -a & a-1 \\ 2a-1 & a & a-1 \\ 1-2a & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Discutir para qué valores del parámetro a la matriz A es regular. Estudiar para qué valores de a existe una matriz $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tal que $AX = B$.

4. Discutir y resolver los siguientes sistemas de en función del parámetro a:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} ax + y + az & = & 2 \\ x + ay + z & = & 3 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} ax - y + 2az & = & 2a \\ -x - y + (a-1)z & = & 0 \\ -2ax + (1-a)y - 2az & = & -2 \end{array} \right.$$

GEOMETRÍA I. Examen del Tema 2
– Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas –
Curso 2011/12

<u>**Nombre**</u>**:**

Razonar todas las respuestas

1. (a) Si una matriz $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tiene rango 3, ¿cuál es el rango de AA? ¿y de AAA ?

   (b) Si dos matrices del mismo orden son regulares ¿es regular la suma de ambas matrices?

   (c) ¿Es posible encontrar un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas que tenga solución única? ¿y de tres ecuaciones con dos incógnitas?

2. Según el valor de a, hallar el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & a & -1 \\ 3 & a & 0 \end{pmatrix}$$

   y en el caso de que sea regular, hallar la matriz inversa.

3. Discutir y resolver en su caso, los siguientes sistemas

$$\left\{ \begin{array}{ccc} ax - ay & = & -1 \\ (a+1)x + y + z & = & 0 \\ x + z & = & 1 \end{array} \right.$$

4. Usando matrices, hallar el valor de a para que el subespacio de $\mathbb{R}^4$ dado por $U =< (4,3,2,1), (a,1,2,3), (1,2,3,4) >$ tenga dimensión 2 y en tal caso, hallar las ecuaciones cartesianas de U.

Soluciones (puede haber diferentes maneras correctas de responder a las preguntas)

1. (a) En ambos casos el rango es 3, porque al ser A una matriz regular, su determinante no es cero. Por otro lado, $det(AA) = det(A)^2 \neq 0$ y $det(AAA) = (det(A))^3 \neq 0$ y al ser no nulos, son matrices regulares.

   (b) En general no es cierto. Tomamos $A = I_n$ y $B = -I_n$. El determinante de A es 1 y el de B, $(-1)^n$. Como ambos no son cero, las matrices son regulares. Sin embargo, $A + B = 0$, que no es regular ya que su determinante es cero.

   (c) (1) No. Si tiene solución única, entonces

   $$r(A) = r(A|b) = \text{número de incógnitas} = 3,$$

   pero $r(A) \leq 2$ ya que A tiene 2 filas.

   (2) Sí, basta con que $r(A) = r(A|b) = 2$, por ejemplo:

   $$\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{array} \right.$$

2. Hallamos el rango usando determinantes y empezando por el lugar $(3, 1)$. Como $a_{31} = 3$, entonces $r(A) \geq 1$. Añadimos la segunda fila y tercera columna, y la matriz $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ tiene determinante 3, que no es cero. Por tanto, $r(A) \geq 2$. Finalmente calculamos el determinante de la matriz A, que resulta ser, $a^2 - a - 3$. Igualando a cero, tenemos $a = (1 \pm \sqrt{13}))/2$. Por tanto, para estos valores de a, el determinante de A es cero y el rango de A es 2; en otro caso, el rango es 3.

   La matriz inversa es

   $$\frac{1}{a^2 - a - 3} \begin{pmatrix} a & a & -1-a \\ -3 & -3 & a+2 \\ -a & 3-a^2 & a^2-2 \end{pmatrix}.$$

3. Si A es la matriz de los coeficientes de la incógnitas, hallamos su determinante: $det(A) = a^2 + a$. Por tanto, si $a^2 + a \neq 0$, es decir, si $a \neq 0$ y $a \neq -1$, el rango de A es 3, y como la matriz ampliada es 3×4 y contiene a A, entonces su rango también es 3. En este caso el sistema es compatible determinado (hay 3 incógnitas). Las soluciones son

$$x = -1/a, y = 0, z = (a+1)/a.$$

Consideramos el caso $a = 0$. En tal caso, la primera ecuación se convierte en $0 = 1$, lo cual no es posible, y por tanto, el sistema es incompatible.

Caso $a = -1$. Al sustituir en A, tenemos

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La submatriz $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ tiene determinante -1, luego el rango de A es 2. En la matriz ampliada, añadimos a esta submatriz la cuarta columna y la tercera fila, quedando $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ cuyo determinante es 0. Por tanto el rango de la matriz ampliada es 2, quedando un sistema compatible indeterminado. Tomando las incógnitas x e y, pasamos z a la derecha y resolvemos, obteniendo

$$x = 1 - z, y = -z, z \in \mathbb{R}.$$

4. La dimensión de U es el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ a & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Empezamos por la submatriz $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, que tiene determinante -1 y por tanto, el rango de A es al menos 2. El rango de A se halla calculando los determinantes 3×3 que resultan de añadir filas y columnas a esta submatriz. Sólo hay dos:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ a & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -5a.$$

Por tanto, si $a = 0$, el rango de A es 2 y si $a \neq 0$, el rango es 3. Como conclusión, la dimensión de U es 2 si $a = 0$. Para calcular las ecuaciones cartesianas, cogemos las dos filas que contienen a la submatriz con determinante no nulo, es decir, la segunda y tercera fila, y (para $a = 0$) tenemos $(x, y, z, t) \in U$ si y sólamente si

$$rg \begin{pmatrix} x & y & z & t \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 2.$$

Y esto sucede si y sólamente si

$$\begin{vmatrix} x & z & t \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} y & z & t \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

es decir,

$$\begin{cases} -x + 3z - 2t = 0 \\ -y + 2z - t = 0. \end{cases}$$

GEOMETRÍA I. Examen del Tema 2
– Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas –
Curso 2013/14

Nombre:

1. En cada caso, probar la afirmación o dar un ejemplo de que es falsa.
   (a) Sean $U, W \subset V$ dos subespacios vectoriales. Si B es base de U y B' es base de W, entonces $B \cup B'$ es base de $U + W$.
   (b) Si $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ es base de V, entonces $\{e_1, e_1 - e_2, \ldots, e_1 - e_n\}$ es base de V.
   (c) Si $U, W \subset \mathbb{R}^7$ son subespacios vectoriales de dimensiones 3 y 4 respectivamente, entonces $\mathbb{R}^7 = U \oplus W$.

2. En $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, se considera los vectores $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. Probar que son linealmente independientes y extender a una base B del espacio. Respecto de dicha base, hallar las ecuaciones cartesianas (o implícitas) del subespacio
$$U = \{A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : a_{12} - a_{21} = 0, a_{11} - a_{22} = 0\}.$$

3. En $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios vectoriales:
$$U = \{(x, y, z, t) \ : \ x + t = 0, y + z = 0\} \quad W =< (1, 1, 1, 1), (0, k, 0, 1) >,$$
donde k es un parámetro real.
   (a) Determinar para que valores de k se tiene $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.
   (b) Para $k = 1$, determinar una base y unas ecuaciones cartesianas de $U + W$ y $U \cap W$.

4. En $\mathbb{R}_2[x]$, se considera los vectores
$$u_1 = 1 - x + x^2, \ u_2 = 1 + x^2, \ u_3 = 1 + x.$$
Probar que $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ es base de $\mathbb{R}_2[x]$ y encontrar la matriz del cambio de base de la base usual B_u a B. Hallar las coordenadas de $u = 1 - 2x + 2x^2$ en la base B.

1. (a) <u>Falso</u>. En general, $B \cup B'$ es un sistema de generadores. Así, en $\mathbb{R}^3$, $U =< (1,0,0),(0,1,0) >$, $W =< (0,1,0),(0,0,1) >$, $B \cup B'$ es un sistema de generadores, pero al contener a la base usual, $U + W = \mathbb{R}^3$. Sin embargo, $B \cup B'$ tiene 4 elementos, luego no puede ser base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) <u>Verdadero</u>. Escribiendo los vectores en coordenadas respecto de B, aquéllos se escriben como $\{(1,0,\ldots,0),(1,-1,0,\ldots,0),\ldots,(1,0,\ldots,0,-1)\}$, que al colocarlos en una matriz, ésta tiene rango n.

   (c) <u>Falso</u>. Sea U cualquier subespacio de dimensión 3, y una base suya $B = \{e_1, e_2, e_3\}$, y la ampliamos a 4 vectores linealmente independientes: $B' = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Entonces $W =< B' >$ tiene dimensión 4, y como $U \subset W$, $U + W = W$, que no es $\mathbb{R}^7$. (O usando que $B \cup B'$ es un sistema de generadores de $U + W$, como $B \subset B'$, $B \cup B' = B'$, luego $U + W = W$.)

2. (a) Fijamos la base usual de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Entonces las coordenadas de los vectores son $\{(1,1,1,1),(0,1,1,0)\}$ que son linealmente independientes ya que al colocarlos en las filas de una matriz, la matriz es reducida con dos pivotes, luego su rango es 2. Para ampliarlos, tomamos dos vectores más que al ponerlos en una matriz, ésta sea de rango 4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Luego la base es $\underline{B = \{(1,1,1,1),(0,1,1,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}}$.

   (b) Hallamos una base de U, resolviendo el sistema. Las incógnitas son $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$. Tomando como parámetros $a_{21} = \lambda$ y $a_{22} = \mu$, tenemos $a_{11} = \mu$, $a_{12} = \lambda$. Luego $A \in U$ si

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} \mu & \lambda \\ \lambda & \mu \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

   Por tanto $U =< (0,1,1,0),(1,0,0,1) >$. Trivialmente, las coordenadas estos vectores respecto de la base B son $\{(0,1,0,0),(1,-1,0,0)\}$. Respecto de B, $(x,y,z,t) \in U$ si

$$rango \begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ 1 & -1 & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} = 2.$$

   Tomando como menor de orden 2 no nulo el de la esquina arriba izquierda, y ampliando con la tercera y luego con la cuarta fila, tenemos que las ecuaciones cartesianas son $\underline{z = 0,\ t = 0}$.

3. (a) Hallamos una base de U resolviendo el sistema de las ecuaciones cartesianas. Hacemos $z = \lambda$ y $t = \mu$. Entonces $x + \mu = 0$, $y + \lambda = 0$. Así,

$$(x,y,z,t) = (-\mu,-\lambda,\lambda,\mu) = \lambda(-1,0,0,1) + \mu(0,-1,1,0) \in < (-1,0,0,1),(0,-1,1,0) > .$$

   Por tanto, $U =< (-1,0,0,1),(0,-1,1,0) >$. Observemos que el sistema de generadores de U es base, al no ser los vectores proporcionales. Entonces $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$ si

$\{(-1,0,0,1),(0,-1,1,0),(1,1,1,1),(0,k,0,1)\}$ son linealmente independientes, es decir, al colocarlos en una matriz, su determinante no es cero. Hallando ese determinante, tenemos $2-2k$. Luego el rango es 4 si y sólamente si $\underline{k \neq 1}$.

(b) Hacemos $k=1$. Entonces $\{(-1,0,0,1),(0,-1,1,0),(1,1,1,1),(0,1,0,1)\}$ son linealmente dependientes. Como los tres primeros son independientes (al colocarlos en una matriz, el rango es 3), una base de $U+W$ es $\{(-1,0,0,1),(0,-1,1,0),(1,1,1,1)\}$. Para las ecuaciones cartesianas (sólo 1), se tiene $(x,y,z,t) \in U+W$ si y sólamente si

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & x \\ 0 & -1 & 1 & y \\ 0 & 1 & 1 & z \\ 1 & 0 & 1 & t \end{vmatrix} = 0.$$

Entonces $\underline{x-y-z+t=0}$.

Para la intersección, hallamos las ecuaciones cartesianas de W: $(x,y,z,t) \in W$ si

$$rango\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix} = 2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ 1 & 1 & t \end{vmatrix} = 0.$$

Por tanto, $x-z=0$, $y-t=0$.

Finalmente, las ecuaciones cartesianas de $U \cap W$ se obtienen de sacar las que son linealmente independientes de:

$$x+t=0$$
$$y+z=0$$
$$x-z=0$$
$$y-t=0$$

Por la fórmula de la dimensión de la suma de subespacios vectoriales, se sabe que $dim(U \cap W)=1$, luego las ecuaciones cartesianas son tres. Ya que el rango de los coeficientes de las tres primeras es 3,

$$rango\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 3,$$

las ecuacione cartersianas de $U \cap W$ son: <u>x+t=0 y+z=0 x-z=0</u>. Para la base, resolvemos el sistemas tomando como parámetro $t=\lambda$:

$$x=-\lambda, y=\lambda, z=-\lambda, t=\lambda \in \mathbb{R},$$

luego $U=\{\lambda(-1,1,-1,1) : \lambda \in \mathbb{R}\} =< (-1,1,-1,1) >$ y la base es $\underline{\{(-1,1,-1,1)\}}$.

4. (a) Escribiendo las coordenadas de los vectores respecto de B_u y colocándolos en una matriz, tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

que tiene rango 3, pues su determinante es -1.

Para calcular la matriz de cambio de base, hallamos las coordenadas de los vectores de la base usual respecto de B, y la colocamos como columnas de la matriz:

$$1 = \lambda(1 - x - x^2) + \mu(1 + x^2) + \delta(1 + x) \Rightarrow \left.\begin{array}{lcl} \lambda + \mu + \delta & = & 1 \\ -\lambda + \delta & = & 0 \\ \lambda + \mu & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = -\mu = \delta = 1$$

$$x = \lambda(1 - x - x^2) + \mu(1 + x^2) + \delta(1 + x) \Rightarrow \left.\begin{array}{lcl} \lambda + \mu + \delta & = & 0 \\ -\lambda + \delta & = & 1 \\ \lambda + \mu & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = -\mu = -1, \delta = 0.$$

$$x^2 = \lambda(1 - x - x^2) + \mu(1 + x^2) + \delta(1 + x) \Rightarrow \left.\begin{array}{lcl} \lambda + \mu + \delta & = & 0 \\ -\lambda + \delta & = & 0 \\ \lambda + \mu & = & 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = \delta = -1, \mu = 2.$$

La matriz pedida es

$$\underline{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.}$$

(b) Para el cálculo de las coordenadas (a, b, c) del polinomio u, o usamos la definición

$$u = a(1 - x + x^2) + b(1 + x^2) + c(1 + x)$$

y resolvemos, o usamos la matriz anterior (y sabiendo que las coordenadas de u respecto de $B - u$ son $(1, -2, 2)$)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

es decir, $\underline{(1, 1, -1).}$