Análisis Matemático I

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Objetivos de aprendizaje para el tema 3

1. Conocer y comprender las siguientes definiciones, para funciones entre espacios métricos:

a) Continuidad en un punto

b) Límite en un punto

2. Conocer y comprender los siguientes resultados:

a) Caracterizaciones de la continuidad en un punto y de la continuidad global

b) Carácter local de la continuidad

c) Operaciones con funciones continuas

1. Conocer y comprender las siguientes definiciones, para funciones entre espacios métricos:

a) Continuidad en un punto

b) Límite en un punto

a) Decimos que una función $f: E \to F$ es **continua en un punto** $x \in E$ cuando la imagen inversa por f de cada entorno de $f(x)$ en el espacio F es un entorno de x en E:

$$V \in \mathcal{U}(f(x)) \implies f^{-1}(V) \in \mathcal{U}(x)$$

Esta definición se debe al caso concreto en el que $F = \mathbb{R}$ y $\emptyset \neq E \subset \mathbb{R}$:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall y \in E \,/\, |y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon$

Como $\mathbb{R}$ es un e.mét. y $E \subset \mathbb{R}$ también por la distancia inducida, por lo que la definición anterior se puede expresar con nociones topológicas con las que sabemos qué funciones entre espacios métricos son continuas en un punto:

$y \in E \quad |y - x| < \delta \Rightarrow y \in B(x, \delta) \qquad |f(y) - f(x)| < \varepsilon \Rightarrow f(y) \in B(f(x), \varepsilon)$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \varepsilon)$$

Y las bolas abiertas son entornos de su centro, es decir, $B(x, \delta) \in \mathcal{U}(x)$ y $B(f(x), \varepsilon) \in \mathcal{U}(f(x))$, por lo que podemos sustituirlas por los entornos U y V respectivamente: $\forall V \in \mathcal{U}(f(x)) \ \exists U \in \mathcal{U}(x) : f(U) \subset V$

Ahora, si $f(U) \subset V$, $\forall x \in U, f(x) \in V$. ¿Qué pasa con $f^{-1}(V)$?

$f^{-1}(V) = \{x \in E : f(x) \in V\} \Rightarrow$ Claramente, $U \subset f^{-1}(V)$. Finalmente, como $U \in \mathcal{U}(x)$ y $U \subset f^{-1}(V)$, $f^{-1}(V) \in \mathcal{U}(x)$ también. Entonces:

$$\forall V \in \mathcal{U}(f(x)) \quad f^{-1}(V) \in \mathcal{U}(x)$$

b) Se dice que $f : A \to F$ tiene límite L en $\alpha \in A'$ cuando:

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = L \iff \forall V \in \mathcal{U}(L) \ \exists U \in \mathcal{U}(\alpha) : f\big(U \cap (A \setminus \{\alpha\})\big) \subset V$$

Para llegar a esto, partimos de la definición de límite para funciones de variable real:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : x \in A \quad 0 < |x - \alpha| < \delta \overset{*}{\Rightarrow} |f(x) - L| < \varepsilon$

$0 < |x - \alpha| < \delta \Rightarrow x \in B(\alpha, \delta) \qquad |f(x) - L| < \varepsilon \Rightarrow f(x) \in B(L, \varepsilon)$

* Y dicha implicación equivale a: $f(B(\alpha, \delta)) \subset B(L, \varepsilon)$

Y sustituyendo las bolas por entornos de sus centros:

$$\left.\begin{array}{l} B(\alpha, \delta) = U \in \mathcal{U}(\alpha) \\ B(L, \varepsilon) = V \in \mathcal{U}(L) \end{array}\right\} \forall V \in \mathcal{U}(L) \ \exists U \in \mathcal{U}(\alpha) \ f(U \cap (A \setminus \{\alpha\})) \subset V$$

$\hookrightarrow \alpha$ es pto. acumulación

Entonces, queda finalmente: $\forall V \in \mathcal{U}(L)\ \exists U \in \mathcal{U}(\alpha) : f(U \cap (A \setminus \{\alpha\})) \subset V$

Por último, $\alpha \in A'$ no por capricho, sino porque esto nos permite probar la unicidad del límite L:

En efecto, si $L_1, L_2 \in F$ verifican (4), dado $\varepsilon > 0$ podemos claramente encontrar $\delta > 0$ tal que, para $x \in A$ con $0 < d(x,\alpha) < \delta$ se tiene $d\big(f(x), L_1\big) < \varepsilon$ y también $d\big(f(x), L_2\big) < \varepsilon$. Como $\alpha \in A'$, existe efectivamente $x \in A$ con $0 < d(x,\alpha) < \delta$, y usando un tal x, deducimos que $d(L_1, L_2) \leqslant d\big(L_1, f(x)\big) + d\big(f(x), L_2\big) < 2\varepsilon$, desigualdad que es válida para todo $\varepsilon > 0$. Tenemos por tanto $d(L_1, L_2) = 0$, es decir, $L_1 = L_2$. Nótese que la condición $\alpha \in A'$ es la que permite asegurar la unicidad del límite.

2. Conocer y comprender los siguientes resultados:

a) Caracterizaciones de la continuidad en un punto y de la continuidad global

b) Carácter local de la continuidad

c) Operaciones con funciones continuas

a) Continuidad en un punto

- *Para $f : E \to F$ y $x \in E$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

  (*i*) f *es continua en el punto* x

  (*ii*) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \ :\ y \in E,\ d(y,x) < \delta \ \Rightarrow\ d\big(f(y), f(x)\big) < \varepsilon$

  (*iii*) $x_n \in E\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ \{x_n\} \to x \ \Rightarrow\ \{f(x_n)\} \to f(x)$

i) $\Rightarrow$ ii) Fijo $\varepsilon > 0$. $B(f(x), \varepsilon)$ es un entorno de $f(x)$, y como f es continua, $\exists \delta > 0 : B(x, \delta) \subset f^{-1}[B(f(x), \varepsilon)]$. Si $y \in B(x, \delta)$, $d(y,x) < \delta$, y por la inclusión anterior, $f(y) \in B(f(x), \varepsilon) \Rightarrow d(f(y), f(x)) < \varepsilon$

ii) $\Rightarrow$ iii) Fijo $\varepsilon > 0$, tenemos $\delta > 0$ por ii). Como $\{x_n\} \to x$, $\exists m \in \mathbb{N} : \forall n \geq m$, $d(x_n, x) < \delta$. Usando ii), equivale a $d(f(x_n), f(x)) < \varepsilon \Rightarrow \{f(x_n)\} \to f(x)$

iii) $\Rightarrow$ i) Razonamos por el contrarrecíproco suponiendo que f no es continua. Como f no es continua, $\exists V \in \mathcal{U}(f(x)) \ /\ f^{-1}(V) \notin \mathcal{U}(x)$. Como $\{x_n\} \to x$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n \in B(x, \frac{1}{n})$, pero $f(x_n) \notin V$ ya que $f^{-1}(V) \notin \mathcal{U}(x) \Rightarrow B(x, \frac{1}{n}) \not\subset f^{-1}(V)$. Uniendo esto a que $f^{-1}(V) \in \mathcal{U}(f(x))$, concluimos que $\{f(x_n)\} \not\to f(x)$.

Continuidad global

- *Para cualquier función $f : E \to F$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

  (*i*) f *es continua*

  (*ii*) *Para todo abierto $V \subset F$, se tiene que $f^{-1}(V)$ es un abierto de E*

  (*iii*) *Para todo cerrado $C \subset F$, se tiene que $f^{-1}(C)$ es un cerrado de E*

  (*iv*) *f preserva la convergencia de sucesiones: para toda sucesión convergente $\{x_n\}$ de puntos de E, la sucesión $\{f(x_n)\}$ es convergente.*

i) $\Rightarrow$ ii) Sea V abierto y $x \in f^{-1}(V)$. Como $x \in f^{-1}(V)$, $f(x) \in V$, y como V es abierto, $V \in \mathcal{U}(f(x))$. Por ser f continua, $V \in \mathcal{U}(f(x)) \Rightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{U}(x) \Rightarrow f^{-1}(V)$ es entorno de todos sus puntos, luego es abierto.

ii) $\Rightarrow$ i) Sea $x \in E$ y $W \in \mathcal{U}(f(x))$. Queremos llegar a que $f^{-1}(W) \in \mathcal{U}(x)$. Como $W \in \mathcal{U}(f(x))$, $\exists V$ abierto tal que $f(x) \in V \subset W$. Por ii), $f^{-1}(V)$ es abierto y $x \in f^{-1}(V) \subset f^{-1}(W)$. Como $x \in f^{-1}(V)$ y $f^{-1}(V)$ es abierto, $f^{-1}(V) \in \mathcal{U}(x)$, y como $f^{-1}(V) \subset f^{-1}(W)$, $f^{-1}(W) \in \mathcal{U}(x)$.

ii) $\Rightarrow$ iii) Sea C cerrado. Por definición, $F \setminus C$ es abierto, y por ii), $f^{-1}(F \setminus C)$ es abierto. $f^{-1}(F\setminus C) = \{x \in E \,/\, f(x) \in F \setminus C\} = E \cap \{x \in E \,/\, f(x) \notin C\} = E \setminus f^{-1}(C)$. Como $f^{-1}(F \setminus C) = E \setminus f^{-1}(C)$ es abierto, $f^{-1}(C)$ es cerrado.

iii) $\Rightarrow$ ii) Sea V abierto. Por definición, $F \setminus V$ es cerrado. Usando iii), $f^{-1}(F \setminus V)$ es cerrado y $f^{-1}(F \setminus V) = \{x \in E \,/\, f(x) \in F \setminus V\} = E \cap \{x \in E \,/\, f(x) \notin V\} = E \setminus f^{-1}(V)$. $E \setminus f^{-1}(V)$ cerrado $\Rightarrow f^{-1}(V)$ es abierto.

i) $\Rightarrow$ iv) Usando iii) de la continuidad en un punto en todos los puntos del dominio de f, es evidente.

iv) $\Rightarrow$ i) Sea $x \in E$ y $\{x_n\} \to x$. $\{f(x_n)\}$ converge pero por iii) de la continuidad en un punto, necesitamos que $\{f(x_n)\} \to f(x)$. Por ello, definimos y_n como $y_{2n} = x$ y $y_{2n-1} = x_n$. Como las dos parciales convergen a x, $\{y_n\} \to x$, y por hipótesis, $\{f(y_n)\}$ converge. Finalmente,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \underset{x_n = y_{2n-1}}{=} \lim_{n\to\infty} f(y_{2n-1}) \underset{\substack{\text{Coinciden porque}\\ \text{sabemos que } \{f(y_n)\}\\ \text{converge}}}{=} \lim_{n\to\infty} f(y_{2n}) \underset{y_{2n} = x}{=}$$

$$= \lim_{n\to\infty} f(x) = f(x)$$

b) Carácter local de la continuidad

- *Sea $f: E \to F$ una función y sea A un subconjunto no vacío de E, que consideramos como espacio métrico con la distancia inducida. Para $x \in A$ se tiene:*
  - *(i) Si f es continua en x, entonces $f|_A$ es continua en x.*
  - *(ii) Si $f|_A$ es continua en x y A es entorno de x en E, entonces f es continua en x.*

i) $V \in \mathcal{U}(f(x)) \xRightarrow{f \text{ continua}} f^{-1}(V) \in \mathcal{U}(x)$. $(f_{|A}^{-1})(V) = \{x \in A \,/\, f(x) \in V\} = A \cap \{x \in E \,/\, f(x) \in V\} =$ $A \cap f^{-1}(V)$. Por la definición de entornos en un subconjunto $A \subset E$, está claro que $(f_{|A}^{-1})(V) \in \mathcal{U}(x)$ pues $\mathcal{T}_A = \{U \cap A \,/\, U \in \mathcal{T}\}$, y $(f_{|A}^{-1})(V) = f^{-1}(V) \cap A$.

ii) $V \in \mathcal{U}(f(x)) \underset{f_{|A} \text{ continua en } x}{\Longrightarrow} (f_{|A}^{-1})(V) \in \mathcal{U}(x)$. $(f_{|A}^{-1})(V) = f^{-1}(V) \cap A$. Como $(f_{|A}^{-1})(V) \in \mathcal{U}(x)$ y por la definición de $\mathcal{T}_A$, se deduce que $\exists U \in \mathcal{U}(x) \,/\, U \subset (f_{|A}^{-1})(V) \Rightarrow (f_{|A}^{-1})(V) \cap A \supset U \cap A$

Finalmente, como $U, A \in \mathcal{U}(x)$, $U \cap A \in \mathcal{U}(x)$, y como $U \cap A \subset (f^{-1})(V)$, $f^{-1}(V) \in \mathcal{U}(x)$.

En resumen, para saber si f es continua en un punto, basta con conocerla en un entorno de dicho punto. De ahí que se diga que la continuidad tiene un carácter local.

c) Operaciones con funciones continuas

Ver los otros apuntes