Ejercicios Tema 3. Topología I
Doble grado en ingeniería informática y matemáticas

1.– Sea (X, d) un espacio métrico compacto sin puntos aislados.

1. Dados $U \subset X$ abierto y $x \in X$, probar que existe V abierto tal que $V \subset U$ y $x \notin \overline{V}$.
2. Si $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en X, probar que existe una sucesión de conjuntos abiertos $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $V_{i+1} \subset V_i$ y $x_i \notin \overline{V}_i$. Concluir que $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} \overline{V}_i \neq \emptyset$.
3. Deducir que X es no numerable.

2.– Sea $I_0 = [0, 1] \subset \mathbb{R}$. Se define I_n inductivamente por la igualdad

$$I_n = I_{n-1} \setminus \bigcup_{k=0}^{3^{n-1}-1} \left(\frac{1+3k}{3^n}, \frac{2+3k}{3^n} \right).$$

Probar que la intersección

$$C = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}_+} I_n$$

es no vacía. Al conjunto C se le denomina el *conjunto de Cantor*.

1. Probar que cada conjunto I_n es unión finita de intervalos cerrados de longitud $1/3^n$ y que los extremos de dichos intervalos pertenecen a C.
2. Probar que C es compacto.
3. Probar que C es totalmento disconexo.
4. Probar que C no tiene puntos aislados.
5. Usando el problema anterior, probar que C es no numerable.