Ejercicio 5.5 Sea $f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable. Demostrar que si para cada $c,d\in[a,b]$ tales que $a<c<d<b$ existe $x\in\,]c,d[$ verificando que $f(x)=0$ entonces $\int_a^b f(x)\,dx=0$.

Al ser f integrable en el intervalo $[a,b]$ entonces $\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sigma(f,P_n)$ donde P_n es cualquier sucesión de particiones en $[a,b]$ cuyo diámetro tiende a cero.

Ahora, por definición, sabemos que $\sigma(f,P)=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$, donde $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$, para $k=1,\dots,n$. Tomando $x_{k-1}=c$, $x_k=d$ y $\xi_k=x$ resulta que $\sigma(f,P)=\sum_{k=1}^{n} f(x)(d-c)$ y como $f(x)=0$, por hipótesis concluimos que

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sigma(f,P_n)=0$$

■