Análisis Matemático I

Tema 5: Complitud y continuidad uniforme

Sucesiones de Cauchy

Sucesiones de Cauchy

E espacio métrico con distancia d, $x_n \in E \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy cuando:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists\, m \in \mathbb{N} \;:\; p,q \geqslant m \quad \Longrightarrow \quad d(x_p, x_q) < \varepsilon$$

Toda sucesión convergente es una sucesión de Cauchy
En general, el recíproco es falso

No es una propiedad topológica

$$\rho(x,y) = |e^x - e^y| \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$$

- ρ es una distancia en $\mathbb{R}$, equivalente a la usual
- Hay sucesiones de Cauchy para ρ que no lo son para la distancia usual
- Hay sucesiones de Cauchy para ρ que no son convergentes

Complitud

Espacios métricos completos

Un espacio métrico E es completo, o su distancia d es completa, cuando toda sucesión de Cauchy de elementos de E es convergente

Espacios de Banach y espacios de Hilbert

espacio de Banach $=$ espacio normado completo (S. Banach, 1892-1945)

espacio de Hilbert $=$ espacio pre-hilbertiano completo (D.Hilbert, 1862-1943)

Complitud y normas equivalentes

Dos normas equivalentes en un mismo espacio vectorial dan lugar a las mismas sucesiones de Cauchy

Toda norma equivalente a una norma completa es completa

Subconjuntos completos de $\mathbb{R}^N$

Complitud de $\mathbb{R}^N$

- Todo espacio normado de dimensión finita es un espacio de Banach
- El espacio euclídeo N-dimensional es un espacio de Hilbert

Subespacios métricos completos

E espacio métrico, A subespacio métrico de E

- Si A es completo, entonces A es cerrado en E
- Si E es completo y A es cerrado en E, entonces A es completo
- Si E es completo, los subconjuntos completos de E son los cerrados
- Un subconjunto de $\mathbb{R}^N$ es completo si, y sólo si, es cerrado

Continuidad uniforme

Funciones uniformemente continuas

E, F espacios métricos, $f : E \to F$ es continua cuando

$$\forall x \in E, \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \, \delta > 0 \ : \ y \in E, \ d(x,y) < \delta \ \Rightarrow \ d\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon$$

Se dice que f es uniformemente continua cuando

$$\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \, \delta > 0 \ : \ x,y \in E, \ d(x,y) < \delta \ \Rightarrow \ d\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon$$

Caracterización

- Si f es uniformemente continua, entonces:

$$x_n, y_n \in E \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \ \{d(x_n, y_n)\} \to 0 \quad \Longrightarrow \quad \Big\{d\big(f(x_n), f(y_n)\big)\Big\} \to 0$$

- Si f no es uniformemente continua, existen sucesiones $\{x_n\}, \{y_n\}$ en E y $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tales que:

$$d(x_n, y_n) < 1/n \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{pero} \quad d\big(f(x_n), f(y_n)\big) \geqslant \varepsilon \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Versión general del teorema de Heine

Sean E, F espacios métricos y $f : E \to F$ una función continua

Si E es compacto, entonces f es uniformemente continua

Observaciones sobre la continuidad uniforme

Observaciones

- La continuidad uniforme no es una propiedad local
- Tampoco es una propiedad topológica
- Pero se conserva en espacios normados al cambiar sus normas por otras equivalentes
- Para campos escalares o vectoriales hablamos sin ambigüedad de continuidad uniforme

Funciones lipschitzianas

E, F espacios métricos

Una función $f : E \to F$ es lipschitziana, cuando existe $M \in \mathbb{R}_0^+$ tal que:

$$d\big(f(x), f(y)\big) \leqslant M\, d(x,y) \qquad \forall x, y \in E$$

Se dice entonces que f es lipschitziana con constante M

Toda función lipschitziana es uniformemente continua

El recíproco es falso, incluso en el caso $E = F = \mathbb{R}$

Teorema del punto fijo de Banach

Funciones contractivas

$E\,, F$ espacios métricos, $f : E \to F$ lipschitziana.

constante de Lipschitz de f:

$$M_0 = \sup \left\{ \frac{d\big(f(x), f(y)\big)}{d(x,y)} \ : \ x, y \in E\,, \quad x \neq y \right\}$$

f no expansiva $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ f lipschitziana con constante 1 $\Longleftrightarrow$ $M_0 \leqslant 1$

f contractiva $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ f lipschitziana con constante $M < 1$ $\Longleftrightarrow$ $M_0 < 1$

Teorema del punto fijo

Sea E un espacio métrico completo y $f : E \to E$ una función contractiva.

Entonces f tiene un único punto fijo, es decir,

existe un único $x \in E$ tal que $f(x) = x$.

Continuidad de una aplicación lineal

Caracterización de la continuidad

$X\,,Y$ espacios normados, $T: X \to Y$ lineal. Son equivalentes:

- T es continua
- $\exists\, M \in \mathbb{R}_0^+ \;:\; \|T(x)\| \leqslant M\,\|x\| \quad \forall\, x \in X$

Observaciones

- Si T es continua en un punto $x_0 \in X$, entonces T es continua
- T continua $\iff$ T uniformemente continua $\iff$ T lipschitziana

Corolario al teorema de Hausdorff

X espacio normado de dimensión finita, Y espacio normado

$$T: X \to Y \text{ lineal} \implies T \text{ continua}$$

Norma de una aplicación lineal continua

Espacio de aplicaciones lineales continuas

En lo que sigue, X e Y son espacios normados

$L(X,Y)$ conjunto de todas las aplicaciones lineales y continuas de X en Y

$L(X,Y)$ es subespacio vectorial de $\mathcal{C}(X,Y)$, es decir,

$$T+S\,,\,\lambda T \in L(X,Y) \quad \forall T,S \in L(X,Y)\,, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Norma de un aplicación lineal continua

Para $T \in L(X,Y)$, se define $\|T\|$ como la constante de Lipschitz de T

El espacio normado $L(X,Y)$

$$\|T\| = \min \left\{ M \in \mathbb{R}_0^+ \;:\; \|T(x)\| \leqslant M\,\|x\| \;\; \forall x \in X \right\} \quad \forall T \in L(X,Y)$$

$$\|T\| = \sup \left\{ \|T(u)\| \;:\; u \in X\,, \;\; \|u\| = 1 \right\} \quad \forall T \in L(X,Y)$$

La aplicación $T \mapsto \|T\|$ es una norma en $L(X,Y)$

Consideramos siempre a $L(X,Y)$ como espacio normado, con esta norma