ÁLGEBRA 1 CURSO 20-21

DOBLE GRADO MATEMÁTICAS INFORMÁTICA **RELACIÓN DE EJERCICIOS 5**

5.1. En el anillo $\mathbb{Z}[x]$ de los polinomios con coeficientes en $\mathbb{Z}$, estudiar si son ideales los subconjuntos:

I formado por todos los polinomios con término independiente cero,
J formado por los polinomios con término independiente par y
K formado por los polinomios que tienen todos sus coeficientes pares.

5.2. Determinar los ideales del cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales.

5.3. Dados I, J ideales de un anillo A tales que $I \subseteq J$, se denota $J/I = \{x + I \in A/I \mid x \in J\}$. Probar que todo ideal de A/I es de la forma J/I para algún ideal J de A tal que $I \subseteq J$.

5.4. Sean I, J ideales de un anillo A tales que $I \subseteq J$. Probar que existe un isomorfismo de anillos:

$$\frac{A/I}{J/I} \cong \frac{A}{I}.$$

5.5. Probar que todos los ideales de $\mathbb{Z}$ son principales. Dar condiciones para que se verifique que $n\mathbb{Z} \subseteq m\mathbb{Z}$.

5.6. Describir los ideales de $\mathbb{Z}_{14}$ enumerando los elementos de cada uno de ellos.

5.7. Estudiar qué ideales de los del ejercicio 5.1 son principales.

5.8. En el anillo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ se considera el subconjunto $I = \{(x, y) \mid x, y \text{ son múltiplos de } 3\}$. Probar que I es un ideal de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. ¿Es principal?

5.9. Sea A un anillo conmutativo no trivial e I un ideal de A, $I \neq A$. Decimos que I es *maximal* si no existe ningún ideal J de A verificando $I \subsetneq J \subsetneq A$. Probar que I es un ideal maximal si, y sólo si, A/I es un cuerpo. Determinar los ideales maximales de $\mathbb{Z}$