Examen final
Geometría III – Grado en Matemáticas
5 de febrero de 2016
Universidad de Granada

1.– Sean A un espacio afín y dos subespacios afines $S, T \subset A$ tales que $\vec{S} \oplus \vec{T} = \vec{A}$.

(i) Definir la proyección π sobre S paralela a T y demostrar $\pi \circ \pi = \pi$. Dado $p \in A$, demostrar que $\pi(p)$ es el único punto de S tal que el vector que une p con $\pi(p)$ pertenece a $\vec{T}$.

(ii) Enunciar y demostrar el Teorema de Tales.

2.– Estudiar para qué valores reales a y b la aplicación afín $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 1-a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

es una isometría. Cuando lo sea, clasificarla y describirla geométricamente.

Solución: En primer lugar, la aplicación afín f será un movimiento rígido si, y sólo si, la matriz de la aplicación lineal asociada es ortogonal. Es decir, si, y sólo si,

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1.$$

Asumamos, pues,

$$a^2 + b^2 = 1. \tag{1}$$

En segundo lugar,

$$\det\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & -a \end{pmatrix} = -a^2 - b^2 = -1.$$

Por ser f una isometría inversa con matriz diagonalizable (ya que su matriz es simétrica), ha de ser una simetría respecto de un plano o una simetría deslizante. Para distinguir, estudiemos el conjunto de puntos fijos de f, que denotamos $P_f = \{w \in \mathbb{R}^3 : f(w) = w\}$. Una cuenta fácil da que este conjunto es el mismo que el de las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones

$$(a-1)x + bz = -b, \quad bx - (a+1)y = a-1.$$

Escrito en forma matricial, queda

$$M = \begin{pmatrix} a-1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & -a-1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -b \\ 0 \\ a-1 \end{pmatrix}, \; \tilde{M} = (M|B).$$

Por el Teorema de Rouché-Frobenius, el sistema es compatible si, y sólo si, $rango(\tilde{M}) = rango(M)$. Ahora bien, como

$$\det\begin{pmatrix} a-1 & b \\ b & -a-1 \end{pmatrix} = -a^2 + 1 - b^2 = 0,$$

entonces $rango(M) = 1$. Los otros dos menores de la matriz ampliada quedan

$$\det\begin{pmatrix} a-1 & -b \\ b & a-1 \end{pmatrix} = a^2 - 2a + 1 + b^2 = 2 - 2a, \quad \det\begin{pmatrix} b & -b \\ -a-1 & a-1 \end{pmatrix} = -2b.$$

Se tiene que el rango de la matriz ampliada es uno si, y sólo si, ambos determinantes valen cero, es decir, $a = 1$ y $b = 0$ simultáneamente. Resumiendo, f es una simetría respecto de un plano cuando $a = 1$ y $b = 0$, y en cualquier otro caso de a, b, es una simetría deslizante.

Para describir f geométricamente, hemos de distinguir dos casos:

$\underline{a = 1, b = 0}$: Sustituyendo en la expresión de f obtenemos

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

que trivialmente es la simetría respecto del plano $\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$.

$\underline{a \neq 0}$: Sabemos que f es una simetría con deslizamiento. Para calcular el vector de deslizamiento, sabemos que $2v = \overrightarrow{pf(f(p))}$. Para ello, escogemos un punto fácil, por ejemplo $p = (0, 0, -1)$ y entonces $f(f(p)) = f(0, 0, 1) = (2b, 0, 1 - 2a)$. Por tanto, $v = \frac{1}{2}\overrightarrow{(0, 0, -1)(2b, 0, 1 - 2a)} = (b, 0, 1 - a)$. Por otro lado, sea π el plano invariante. Por ejemplo, se sabe $\vec{\pi} = V_{+1}(\vec{f})$, es decir, el plano de direcciones de π es el subespacio propio asociado al $+1$ de $\vec{f}$. Así, un cálculo sencillo da

$$\vec{\pi} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (a - 1)x + bz = 0\}.$$

Si tomamos un punto p, calculamos $f(p)$ porque el punto medio de p y $f(p)$ pertenece a π. Por ejemplo, si $p = (0, 0, -1)$, entonces $f(p) = (0, 0, 1)$. El punto medio $m = (0, 0, 0)$. Por tanto, el plano invariante es

$$\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (a - 1)x + bz = 0\}.$$

□

3.–

(i) Clasificar la cuádrica de $\mathbb{R}^3$ de ecuación:

$$x^2 + y^2 - 2xz + 2x - 2y + 1 = 0.$$

(ii) Calcular y clasificar una cónica que pase por los puntos distintos $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$ y (a, b) de $\mathbb{R}^2$ en función de los distintos valores de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Solución: *Apartado (i)* La matriz asociada a la cuádrica es de la forma

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{M} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Por un lado,

$$\det(\tilde{M}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -(-1)(-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Esto implica $R = 3$. Cálculos sencillos también dan $\det(M) = -1$, luego y $r = 3$. Además, el polinomio característico de M es $p(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - 1$. Usando la Regla de Descartes,

M admite un valor propio negativo y dos positivos. Por teoría, sabemos entonces que la cuádrica admite un cambio de coordenadas tal que la matriz asociada es

$$\tilde{M} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Esto implica que la ecuación reducida es $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Por tanto, la cuádrica es un cono.

Apartado (ii) En general, una cónica de $\mathbb{R}^2$ tiene de ecuación general

$$0 = Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

donde $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$ no todos nulos. Imponemos ahora que los puntos $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ y $(1,1)$ pertenecen a la cónica. Esto implica que han de cumplir la ecuación, por lo que sustituyendo se obtiene un sistema de ecuaciones. Así, de $(0,0)$ se obtiene $F = 0$. Con los otros tres puntos sale el sistema

$$0 = A + 2C, \; 0 = B + 2E, \; 0 = A + B + 2C + 2D + 2E.$$

Resolviendo el sistema obtenemos $A = -2C$, $B = -2E$, $D = 0$, luego la ecuación de la cónica se reduce a

$$0 = C(x^2 - x) + E(y^2 - y).$$

La hipótesis de que el quinto punto (a,b) sea un punto arbitrario de $\mathbb{R}^2$ distinto de los otros cuatro, significa que hemos de clasificar la cónica según los valores que puedan tomar C y E. Aparecen tres casos:

Caso $E = 0$: Como $C \neq 0$, entonces el punto (a,b) pertenece a la cónica formada por el par de rectas paralelas de ecuaciones $x = 0$, $x = 1$.

Caso $C = 0$: Como $E \neq 0$, el punto (a,b) pertenece a la cónica formada por el par de rectas paralelas de ecuaciones $y = 0$, $y = 1$.

Caso $EC \neq 0$: La matriz de la cónica queda

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} 0 & -C/2 & -E/2 \\ -C/2 & C & 0 \\ -E/2 & 0 & E \end{pmatrix}.$$

Como $EC \neq 0$, es claro que $r = 2$. Es más, los valores propios de la matriz M son C y E, que podemos suponer que son o bien los dos positivos o bien uno positivo y otro negativo. Si ambos son positivos, será una elipse o el vacío. Si tienen distinto signo, una hipérbola o un par de rectas secantes. Calculamos $\det \tilde{M} = -EC(E + C)/2$.

Si $E + C = 0$: Entonces $E = -C$, $R = 2$, y la cónica es un par de rectas secantes. De hecho, $0 = x^2 - y^2 - x + y = (x - y)(x + y - 1)$, que son las diagonales del cuadrado que forman los cuatro puntos.

Si $E + C \neq 0$: Entonces $R = 3$. Si $EC > 0$, como podemos suponer que E y C son positivos, entonces $\det \tilde{M} < 0$, luego la cónica será una elipse. Si $EC < 0$, será una hipérbola.

□

4.– Calcular una proyectividad $f : \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^3$ distinta de la identidad que deje invariante al plano H de ecuación $x_0 - x_1 + x_2 - x_3 = 0$.

Solución: *(Elegante)* Mirando la ecuacióndel plano, se ve que se pueden intercambiar x_0 y x_2 por un lado, y x_1 y x_3 por otro. Por tanto, una proyectividad que soluciona el problema es $f : \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^3$, $f(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) = (x_2 : x_3 : x_0 : x_1)$.

(Mecánica) El objetivo es construir una aplicación lineal inyectiva $\hat{f} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\hat{f}(\hat{H}) = \hat{H}$. En tal caso, la proyectividad buscada será la única aplicación $f : \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^3$ tal que $f \circ \pi = \pi \circ \hat{f}$, donde $\pi : \mathbb{R}^4 \backslash \{0\} \to \mathbb{P}^3$ es la proyección natural. Como sabemos, $\hat{H} = \pi^{-1}(H) \cup \{0\}$ ha de ser el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ de ecuación $x_0 - x_1 + x_2 - x_3 = 0$. Sea $B_u = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base usual de $\mathbb{R}^4$. Como queremos que $\hat{f}(\hat{H}) = \hat{H}$, la imagen por $\hat{f}$ de una base de $\hat{H}$ ha de ser otra base de $\hat{H}$. Calculamos una base de $\hat{H}$ y la ampliamos a una base de $\mathbb{R}^4$, por ejemplo $B = (v_1 = (1, 1, 0, 0), v_2 = (1, 0, 0, 1), v_3 = (0, 1, 1, 0), v_4 = e_1)$. Ahora, imponemos condiciones sobre estos vectores para que $\hat{f}(\hat{H}) = \hat{H}$ y $f \neq Id$. Por ejemplo,

$$\hat{f}(v_i) = v_i,\ i = 1, 2, 3, \quad \hat{f}(v_4) = 2v_4.$$

Las tres primera condiciones nos van a asegurar que

$$\hat{f}(\hat{H}) = \hat{f}(L\{v_1, v_2, v_3\}) = L\{\hat{f}(v_1), \hat{f}(v_2), \hat{f}(v_3)\} = L\{v_1, v_2, v_3\} = \hat{H}.$$

La última condición nos va a asegurar que $\hat{f}$ no sea proporcional a la identidad, luego la proyectividad f será distinta de la identidad. Las condiciones anteriores se transforman en

$$\hat{f}(e_1) + \hat{f}(e_2) = e_1 + e_2,\ \hat{f}(e_1) + \hat{f}(e_4) = e_1 + e_4,\ \hat{f}(e_2) + \hat{f}(e_3) = e_2 + e_3,\ \hat{f}(e_1) = 2e_1.$$

Despejando, queda

$$\hat{f}(e_1) = 2e_1,\ \hat{f}(e_2) = -e_1 + e_2,\ \hat{f}(e_3) = e_1 + e_3, \hat{f}(e_4) = -e_1 + e_4.$$

La matriz de la aplicación lineal queda

$$M(\hat{f}, B_u) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como el rango de esta matriz es máximo, entonces $\hat{f}$ es inyectiva. □

5.– Definir el embebimiento canónico $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{P}^n$ del espacio afín en el espacio proyectivo y demostrar las siguientes propiedades:

(i) f es inyectiva.

(ii) El complemento de la imagen de f en $\mathbb{P}^n$ es el hiperplano proyectivo H_∞ de ecuación $x_{n+1} = 0$ (las coordenadas homogéneas son $(x_1 : \ldots : x_{n+1})$).

(iii) La imagen de un subespacio afín $S \subset \mathbb{R}^n$ por f es una variedad proyectiva X menos $X \cap H_\infty$. Además $\dim(S) = \dim(X)$.