Análisis Matemático I

20 de noviembre de 2015

1. Estudiar la continuidad de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida, para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, de la siguiente forma:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{(x+y)^2}\,\operatorname{sen}(x+y) & \text{si} \quad x+y \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x+y=0 \end{cases}$$

Solución

(a) Comprobamos primeramente que f es continua en todo punto de $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus A$, donde $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y=0\}$. La restricción de f a Ω es el producto de una función racional por la función $(x,y) \mapsto \operatorname{sen}(x+y)$, que es composición de una función polinómica con la función seno. Por tanto $f\big|_\Omega$ es continua como producto de dos funciones continuas. Además A es cerrado por ser la imagen inversa de $\{0\}$ por la función continua $(x,y) \mapsto x+y$ de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$. Por tanto, Ω es abierto y podemos aplicar el carácter local de la continuidad para concluir que f es continua en Ω.

(b) Consideremos ahora un punto $(a,b) \in A$ que no sea el origen, $(a,b) \neq (0,0)$. Tomemos una sucesión $\{(x_n, y_n)\}$ de puntos de Ω, tal que $\{x_n\} \to a$ e $\{y_n\} \to b$. Por ejemplo, puede ser $x_n = a + (1/n)$ e $y_n = b + (1/n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tenemos entonces

$$f(x_n, y_n) = \frac{x_n^2 + y_n^2}{x_n + y_n}\,\frac{\operatorname{sen}(x_n+y_n)}{x_n+y_n} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Por ser $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$, tenemos $\left\{\dfrac{\operatorname{sen}(x_n+y_n)}{x_n+y_n}\right\} \to 1$, ya que $\{x_n + y_n\} \to a+b=0$. Por otra parte $\{x_n^2 + y_n^2\} \to a^2+b^2 \neq 0$, luego $\left\{\dfrac{x_n^2+y_n^2}{x_n+y_n}\right\} \to \infty$ y deducimos que $\{f(x_n,y_n)\} \to \infty$. Por tanto f no tiene límite, y en particular no es continua, en el punto (a,b).

(c) Veamos finalmente el comportamiento de f en el origen. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$x_n = \frac{1}{n} \qquad \text{e} \qquad y_n = -\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}$$

con lo que $\{(x_n, y_n)\} \to (0,0)$ y $x_n + y_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$f(x_n,y_n) = n^3\left(\frac{2}{n^2} - \frac{2}{n^4} + \frac{1}{n^6}\right)\frac{\operatorname{sen}(x_n+y_n)}{x_n+y_n} = \left(2n - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3}\right)\frac{\operatorname{sen}(x_n+y_n)}{x_n+y_n}$$

Como $\left\{\dfrac{\operatorname{sen}(x_n+y_n)}{x_n+y_n}\right\} \to 1$ igual que antes, y $\left\{2n - \dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n^3}\right\} \ +\infty$, deducimos que $\{f(x_n,y_n)\} \to +\infty$. Por tanto f no tiene límite, luego no es continua, en el origen.

En resumen, f es continua en un punto $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ si, y sólo si, $a+b \neq 0$.

2. Sea X un espacio normado de dimensión mayor que 1. Probar que $X \setminus \{0\}$ es conexo y que la función $f : X \setminus \{0\} \to X$ definida por

$$f(x) = \frac{x}{\| x \|} \qquad \forall\, x \in X$$

es continua, pero no es uniformemente continua. Deducir que la esfera unidad $S = \{x \in X \,:\, \| x \| = 1\}$ es un subconjunto conexo de X.

Solución

(a) Para probar que $X \setminus \{0\}$ es conexo, dados $x, y \in X \setminus \{0\}$, bastará encontrar un conjunto conexo $C \subset X \setminus \{0\}$ que los contenga. Es natural pensar en el segmento que los une,

$$[x, y] = \{(1 - t)x + ty \,:\, t \in [0, 1]\}$$

que es conexo, al ser la imagen por la función continua $t \mapsto (1 - t)x + ty$ del intervalo $[0, 1]$. Como este segmento puede contener al origen, debemos distinguir dos casos:

Si x e y son linealmente independientes, tendremos $[x, y] \subset X \setminus \{0\}$ y podemos tomar $C = [x, y]$, que es un subconjunto conexo de $X \setminus \{0\}$ tal que $x, y \in C$.

En otro caso, como X tiene dimensión mayor que 1, existirá un $z \in X$ linealmente independiente de x e y, con lo que los segmentos $[x, z]$ y $[z, y]$ están contenidos en $X \setminus \{0\}$. Basta entonces tomar $C = [x, z] \cup [z, y]$ que es conexo, por ser la unión de dos conjuntos conexos cuya intersección no es vacía, ya que $z \in [x, z] \cap [z, y]$. También es claro que $x, y \in C \subset X \setminus \{0\}$.

(b) Veamos ahora la continuidad de f. En cualquier espacio normado, la norma es una función continua, luego la función $x \mapsto 1 / \| x \|$, de $X \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ es continua. Así pues f es continua, por ser el producto de una función continua con valores escalares, por la restricción a $X \setminus \{0\}$ de la función identidad en X, que obviamente es continua.

(c) Para probar que f no es uniformemente continua, basta encontrar una sucesión de Cauchy $\{x_n\}$ de puntos de $X \setminus \{0\}$ tal que $\{f(x_n)\}$ no sea una sucesión de Cauchy. Fijado $u \in S$, basta tomar $x_n = (-1)^n\, u/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\| x_n \| = 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $\{x_n\} \to 0$ y en particular $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy. Sin embargo la sucesión $\{f(x_n)\} = \{(-1)^n\, u\}$ no es de Cauchy. Si lo fuese, existiría un $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $p, q \geq m$ se tendría $\| f(x_p) - f(x_q) \| < 2$ lo cual es falso puesto que $\| f(x_m) - f(x_{m+1}) \| = \| \pm 2u \| = 2$.

(d) Finalmente la esfera unidad $S = f(X \setminus \{0\})$ es un conjunto conexo, ya que es la imagen del conexo $X \setminus \{0\}$ por la función continua f.

3. Sea E un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^N$. Supongamos que, para toda función continua $f : E \to \mathbb{R}$, el conjunto $f(E)$ tiene mínimo. Probar que E es compacto.

Solución

Empezamos probando que E es cerrado. Dado $z \in \overline{E}$, consideramos la función $f : E \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \| x - z \| \qquad \forall x \in E$$

usando, por ejemplo, la norma euclídea en $\mathbb{R}^N$. Entonces f es una función continua, de hecho no expansiva, puesto que

$$| f(u) - f(v) | = \big| \| u - z \| - \| v - z \| \big| \leq \| u - v \| \qquad \forall u, v \in E$$

Por hipótesis, f tiene un mínimo en un punto $x_0 \in E$. Dado $\varepsilon > 0$, por ser $z \in \overline{E}$, existe $x_\varepsilon \in E$ tal que $\| z - x_\varepsilon \| < \varepsilon$, de donde deducimos que

$$\| x_0 - z \| = f(x_0) \leq f(x_\varepsilon) = \| x_\varepsilon - z \| < \varepsilon$$

Como esto es cierto para todo $\varepsilon > 0$, deducimos que $\| x_0 - z \| = 0$, luego $z = x_0 \in E$ y esto prueba que E es cerrado.

Vemos ahora que E está acotado, para lo cual basta considerar la función continua $g : E \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = -\| x \| \qquad \forall x \in E$$

Por hipótesis g tiene un mínimo en un punto $x_1 \in E$. Esto significa que, para todo $x \in E$ se tiene $-\| x \| \geq -\| x_1 \|$, es decir, $\| x \| \leq \| x_1 \|$. Así pues, E está acotado.

Por la caracterización de los subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^N$, tenemos que E es compacto, por ser cerrado y acotado.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{(x+y)^2}\,\mathrm{sen}\,(x+y) & \text{si} \quad x+y \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x+y = 0 \end{cases}$$

$A = \{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \mid x+y=0\}$. A es imagen inversa de $\{0\}$ por una función polinómica (continua), luego A es cerrado. $U = \mathbb{R}^2 \setminus A$ abto., $f_{|U}$ es producto de una racional y composición del seno con una función polinómica, luego $f_{|U}$ es continua $\Rightarrow$ Por el carácter local de la continuidad, f es continua en U. Veamos qué ocurre con los puntos de A, que son de la forma $\underbrace{(a,-a),(-a,a)}_{a\neq 0}$ y $(0,0)$:

$\boxed{(a,-a)}$ $\lim_{x\to a} f(x,-a) = \lim_{x\to a} \dfrac{x^2+a^2}{(x-a)^2}\cdot \mathrm{sen}(x-a) =$

$= \underbrace{\lim_{x\to a} \dfrac{x^2+a^2}{x-a}}_{\text{No existe}} \cdot \underbrace{\lim_{x\to a} \dfrac{\mathrm{sen}(x-a)}{x-a}}_{1} = \nexists$

$\boxed{(-a,a)}$ $\lim_{x\to -a} f(x,a) = \lim_{x\to -a} \dfrac{x^2+a^2}{(x+a)^2}\,\mathrm{sen}(x+a) = \underbrace{\lim_{x\to a} \dfrac{x^2+a^2}{x+a}}_{\text{No existe}} \cdot \underbrace{\lim_{x\to a} \dfrac{\mathrm{sen}(x+a)}{x+a}}_{1}$

$\boxed{(0,0)}$ $\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x^2}\cdot \mathrm{sen}(x) = 0$

$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \dfrac{y^2}{y^2}\cdot \mathrm{sen}(y) = 0$

$\Bigg\}$ Único límite posible $L=0$

$\varphi(t) = (t^2, t+t^2)$

$\lim_{t\to 0} f(\varphi(t)) = \lim_{t\to 0} \dfrac{t^4+t^2+t^4+2t^3}{(2t^2+t)^2} = \lim_{t\to 0} \dfrac{2t^4+2t^3+t^2}{4t^4+t^2+4t^3} = \lim_{t\to 0} \dfrac{1+2t+2t^2}{1+4t+4t^2} =$

$= 1$