# Cálculo I
# Conjuntos finitos y Numerables
# Principio de los Intervalos Encajados
# $\mathbb{R}$ No es Numerable

Universidad de Granada
Departamento de Análisis Matemático

Un conjunto $A$ se dice que es *equipotente* a otro $B$, y escribimos $A \sim B$, si existe una aplicación biyectiva de $A$ sobre $B$. Esta relación es una relación de equivalencia entre conjuntos pues tiene las propiedades reflexiva ($A \sim A$), simétrica (si $A \sim B$ entonces también $B \sim A$) y transitiva (si $A \sim B$ y $B \sim C$ entonces $A \sim C$).

Un conjunto $A$ se dice que es *equipotente* a otro $B$, y escribimos $A \sim B$, si existe una aplicación biyectiva de $A$ sobre $B$. Esta relación es una relación de equivalencia entre conjuntos pues tiene las propiedades reflexiva ($A \sim A$), simétrica (si $A \sim B$ entonces también $B \sim A$) y transitiva (si $A \sim B$ y $B \sim C$ entonces $A \sim C$).

Dado $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $S(n) = \{k \in \mathbb{N} : k \leqslant n\}$ se llama *segmento de orden n*.

Un conjunto $A$ se dice que es *equipotente* a otro $B$, y escribimos $A \sim B$, si existe una aplicación biyectiva de $A$ sobre $B$. Esta relación es una relación de equivalencia entre conjuntos pues tiene las propiedades reflexiva ($A \sim A$), simétrica (si $A \sim B$ entonces también $B \sim A$) y transitiva (si $A \sim B$ y $B \sim C$ entonces $A \sim C$).

Dado $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $S(n) = \{k \in \mathbb{N} : k \leqslant n\}$ se llama *segmento de orden n*.

Un conjunto $A$ se llama *finito* si es vacío o si existe un número natural $n \in \mathbb{N}$ tal que $A$ es equipotente a $S(n)$.

Un conjunto $A$ se dice que es *equipotente* a otro $B$, y escribimos $A \sim B$, si existe una aplicación biyectiva de $A$ sobre $B$. Esta relación es una relación de equivalencia entre conjuntos pues tiene las propiedades reflexiva ($A \sim A$), simétrica (si $A \sim B$ entonces también $B \sim A$) y transitiva (si $A \sim B$ y $B \sim C$ entonces $A \sim C$).

Dado $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $S(n) = \{k \in \mathbb{N} : k \leqslant n\}$ se llama *segmento de orden n*.

Un conjunto $A$ se llama *finito* si es vacío o si existe un número natural $n \in \mathbb{N}$ tal que $A$ es equipotente a $S(n)$.

Sean $n$ y $m$ números naturales y supongamos que $S(n)$ y $S(m)$ son equipotentes. Entonces $n = m$.

Un conjunto $A$ se dice que es *equipotente* a otro $B$, y escribimos $A \sim B$, si existe una aplicación biyectiva de $A$ sobre $B$. Esta relación es una relación de equivalencia entre conjuntos pues tiene las propiedades reflexiva ($A \sim A$), simétrica (si $A \sim B$ entonces también $B \sim A$) y transitiva (si $A \sim B$ y $B \sim C$ entonces $A \sim C$).

Dado $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $S(n) = \{k \in \mathbb{N} : k \leqslant n\}$ se llama *segmento de orden* $n$.

Un conjunto $A$ se llama *finito* si es vacío o si existe un número natural $n \in \mathbb{N}$ tal que $A$ es equipotente a $S(n)$.

Sean $n$ y $m$ números naturales y supongamos que $S(n)$ y $S(m)$ son equipotentes. Entonces $n = m$.

si $A$ es un conjunto finito y no vacío hay un *único* $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \sim S(n)$, dicho número $n$ se llama *número de elementos* de $A$ y escribimos $\sharp(A) = n$. Por convenio, se acepta que $\sharp(\emptyset) = 0$

# Propiedades de los conjuntos finitos

- Todo subconjunto de un conjunto finito es finito. Dicho de otra forma, si $B$ es un conjunto finito y $f : A \to B$ es una aplicación inyectiva entonces $A$ es finito.

# Propiedades de los conjuntos finitos

- Todo subconjunto de un conjunto finito es finito. Dicho de otra forma, si $B$ es un conjunto finito y $f : A \to B$ es una aplicación inyectiva entonces $A$ es finito.
- La imagen de un conjunto finito por una aplicación es un conjunto finito. Dicho de otra forma, si $A$ es finito y $f : A \to B$ es una aplicación sobreyectiva, entonces $B$ es finito.

# Propiedades de los conjuntos finitos

- Todo subconjunto de un conjunto finito es finito. Dicho de otra forma, si $B$ es un conjunto finito y $f : A \to B$ es una aplicación inyectiva entonces $A$ es finito.
- La imagen de un conjunto finito por una aplicación es un conjunto finito. Dicho de otra forma, si $A$ es finito y $f : A \to B$ es una aplicación sobreyectiva, entonces $B$ es finito.
- Todo conjunto finito no vacío de números reales tiene máximo y mínimo.

Un conjunto que no es finito se llama *infinito*.

Un conjunto que no es finito se llama *infinito*.

Como $\mathbb{N}$ no tiene máximo deducimos que $\mathbb{N}$ es un conjunto infinito.

Un conjunto que no es finito se llama *infinito*.

Como $\mathbb{N}$ no tiene máximo deducimos que $\mathbb{N}$ es un conjunto infinito.

Por tanto, todo conjunto que contenga a $\mathbb{N}$ es infinito.

Un conjunto que no es finito se llama *infinito*.

Como $\mathbb{N}$ no tiene máximo deducimos que $\mathbb{N}$ es un conjunto infinito.

Por tanto, todo conjunto que contenga a $\mathbb{N}$ es infinito.

También es claro que hay subconjuntos de $\mathbb{N}$ que son infinitos.

Un conjunto que no es finito se llama *infinito*.

Como $\mathbb{N}$ no tiene máximo deducimos que $\mathbb{N}$ es un conjunto infinito.

Por tanto, todo conjunto que contenga a $\mathbb{N}$ es infinito.

También es claro que hay subconjuntos de $\mathbb{N}$ que son infinitos.

Probaremos que $\mathbb{N}$ es el “más pequeño” conjunto infinito, pues cualquier subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ es equipotente a $\mathbb{N}$.

Sea $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una aplicación tal que $\varphi(n) < \varphi(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se verifica entonces que $\varphi$ es estrictamente creciente, es decir, si $n, m$ son números naturales tales que $n < m$ entonces $\varphi(n) < \varphi(m)$. En particular, $\varphi$ es inyectiva.

Sea $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una aplicación tal que $\varphi(n) < \varphi(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se verifica entonces que $\varphi$ es estrictamente creciente, es decir, si $n, m$ son números naturales tales que $n < m$ entonces $\varphi(n) < \varphi(m)$. En particular, $\varphi$ es inyectiva.

Si además se supone que $\varphi$ toma valores en $\mathbb{N}$, esto es, $\varphi(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$, entonces:

Sea $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una aplicación tal que $\varphi(n) < \varphi(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se verifica entonces que $\varphi$ es estrictamente creciente, es decir, si $n, m$ son números naturales tales que $n < m$ entonces $\varphi(n) < \varphi(m)$. En particular, $\varphi$ es inyectiva.

Si además se supone que $\varphi$ toma valores en $\mathbb{N}$, esto es, $\varphi(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$, entonces:

i) $\varphi(n) \geqslant n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una aplicación tal que $\varphi(n) < \varphi(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se verifica entonces que $\varphi$ es estrictamente creciente, es decir, si $n, m$ son números naturales tales que $n < m$ entonces $\varphi(n) < \varphi(m)$. En particular, $\varphi$ es inyectiva.

Si además se supone que $\varphi$ toma valores en $\mathbb{N}$, esto es, $\varphi(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$, entonces:

i) $\varphi(n) \geqslant n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

ii) Si $\varphi(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\varphi$ es la identidad, es decir, $\varphi(n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una aplicación tal que $\varphi(n) < \varphi(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se verifica entonces que $\varphi$ es estrictamente creciente, es decir, si $n, m$ son números naturales tales que $n < m$ entonces $\varphi(n) < \varphi(m)$. En particular, $\varphi$ es inyectiva.

Si además se supone que $\varphi$ toma valores en $\mathbb{N}$, esto es, $\varphi(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$, entonces:

i) $\varphi(n) \geqslant n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

ii) Si $\varphi(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\varphi$ es la identidad, es decir, $\varphi(n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una aplicación tal que $\varphi(n) < \varphi(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se verifica entonces que $\varphi$ es estrictamente creciente, es decir, si $n, m$ son números naturales tales que $n < m$ entonces $\varphi(n) < \varphi(m)$. En particular, $\varphi$ es inyectiva.

Si además se supone que $\varphi$ toma valores en $\mathbb{N}$, esto es, $\varphi(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$, entonces:

i) $\varphi(n) \geqslant n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
ii) Si $\varphi(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $\varphi$ es la identidad, es decir, $\varphi(n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea $A$ un conjunto infinito de números naturales. Entonces existe una única biyección creciente de $\mathbb{N}$ sobre $A$.

Un conjunto $A$ se llama *numerable* si es vacío o si existe alguna aplicación inyectiva de $A$ en $\mathbb{N}$.

Un conjunto $A$ se llama *numerable* si es vacío o si existe alguna aplicación inyectiva de $A$ en $\mathbb{N}$.

Un conjunto es numerable si, y sólo si, es finito o es equipotente a $\mathbb{N}$.

Un conjunto $A$ se llama *numerable* si es vacío o si existe alguna aplicación inyectiva de $A$ en $\mathbb{N}$.

Un conjunto es numerable si, y sólo si, es finito o es equipotente a $\mathbb{N}$.

Un conjunto no vacío $A$ es numerable si, y sólo si, hay una aplicación sobreyectiva de $\mathbb{N}$ sobre $A$.

Un conjunto $A$ se llama *numerable* si es vacío o si existe alguna aplicación inyectiva de $A$ en $\mathbb{N}$.

Un conjunto es numerable si, y sólo si, es finito o es equipotente a $\mathbb{N}$.

Un conjunto no vacío $A$ es numerable si, y sólo si, hay una aplicación sobreyectiva de $\mathbb{N}$ sobre $A$.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es equipotente a $\mathbb{N}$.

Un conjunto $A$ se llama *numerable* si es vacío o si existe alguna aplicación inyectiva de $A$ en $\mathbb{N}$.

Un conjunto es numerable si, y sólo si, es finito o es equipotente a $\mathbb{N}$.

Un conjunto no vacío $A$ es numerable si, y sólo si, hay una aplicación sobreyectiva de $\mathbb{N}$ sobre $A$.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es equipotente a $\mathbb{N}$.

Sea $B$ un conjunto numerable no vacío. Supongamos que para cada $x \in B$ tenemos un conjunto numerable no vacío $A_x$. Se verifica entonces que el conjunto $\mathcal{A} = \bigcup_{x \in B} A_x$ es numerable.

Un conjunto $A$ se llama *numerable* si es vacío o si existe alguna aplicación inyectiva de $A$ en $\mathbb{N}$.

Un conjunto es numerable si, y sólo si, es finito o es equipotente a $\mathbb{N}$.

Un conjunto no vacío $A$ es numerable si, y sólo si, hay una aplicación sobreyectiva de $\mathbb{N}$ sobre $A$.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es equipotente a $\mathbb{N}$.

Sea $B$ un conjunto numerable no vacío. Supongamos que para cada $x \in B$ tenemos un conjunto numerable no vacío $A_x$. Se verifica entonces que el conjunto $\mathcal{A} = \bigcup_{x \in B} A_x$ es numerable.

El conjunto de los números racionales es numerable.

**Principio de los intervalos encajados.** Para cada número natural $n$ sea $I_n = [a_n, b_n]$ un intervalo cerrado no vacío y supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $I_{n+1} \subseteq I_n$ . Se verifica entonces que:

**Principio de los intervalos encajados.** Para cada número natural $n$ sea $I_n = [a_n, b_n]$ un intervalo cerrado no vacío y supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $I_{n+1} \subseteq I_n$ . Se verifica entonces que:

i) $\alpha = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \leqslant \beta = \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$,

**Principio de los intervalos encajados.** Para cada número natural $n$ sea $I_n = [a_n, b_n]$ un intervalo cerrado no vacío y supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $I_{n+1} \subseteq I_n$ . Se verifica entonces que:

i) $\alpha = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \leqslant \beta = \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$,

ii) $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = [\alpha, \beta]$.

**Principio de los intervalos encajados.** Para cada número natural $n$ sea $I_n = [a_n, b_n]$ un intervalo cerrado no vacío y supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $I_{n+1} \subseteq I_n$ . Se verifica entonces que:

i) $\alpha = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \leqslant \beta = \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$,

ii) $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = [\alpha, \beta]$.

**Principio de los intervalos encajados.** Para cada número natural $n$ sea $I_n = [a_n, b_n]$ un intervalo cerrado no vacío y supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $I_{n+1} \subseteq I_n$ . Se verifica entonces que:

i) $\alpha = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \leqslant \beta = \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$,

ii) $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = [\alpha, \beta]$.

En particular, el conjunto $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ no es vacío.

**Principio de los intervalos encajados.** Para cada número natural $n$ sea $I_n = [a_n, b_n]$ un intervalo cerrado no vacío y supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $I_{n+1} \subseteq I_n$ . Se verifica entonces que:

i) $\alpha = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \leqslant \beta = \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$,

ii) $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = [\alpha, \beta]$.

En particular, el conjunto $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ no es vacío.

Dados dos números reales $a < b$ se verifica que el intervalo $[a, b]$ no es numerable.

**Principio de los intervalos encajados.** Para cada número natural $n$ sea $I_n = [a_n, b_n]$ un intervalo cerrado no vacío y supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $I_{n+1} \subseteq I_n$ . Se verifica entonces que:

i) $\alpha = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \leqslant \beta = \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$,

ii) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = [\alpha, \beta]$.

En particular, el conjunto $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ no es vacío.

Dados dos números reales $a < b$ se verifica que el intervalo $[a, b]$ no es numerable.

$\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ son conjuntos no numerables.