LMD (Grupos D y E del GII)

RELACIÓN DE EJERCICIOS DEL TEMA 1

CURSO 2021-2022

1. Recordemos de teoría que un álgebra de Boole es un conjunto $\mathcal{A}$ en el que hay dos elementos distinguidos $\mathbf{0}$ y $\mathbf{1}$, y sobre el cual se han definido dos operaciones binarias denotadas por $\vee$ y $\wedge$ y una operación monaria denotada por $-$ de modo que se verifica el siguiente conjunto de axiomas:
   1. *Leyes conmutativas*: $\forall a,b \in \mathcal{A},\ \ a\vee b = b\vee a,\ \ a\wedge b = b\wedge a.$
   2. *Leyes asociativas*: $\forall a,b,c \in \mathcal{A},\ \ a\vee(b\vee c) = (a\vee b)\vee c,\ \ a\wedge(b\wedge c) = (a\wedge b)\wedge c.$
   3. *Leyes distributivas*: $\forall a,b,c \in \mathcal{A},\ \ a\wedge(b\vee c) = (a\wedge b)\vee(a\wedge c),\ \ a\vee(b\wedge c) = (a\vee b)\wedge(a\vee c).$
   4. *Leyes de los elementos identidad*: $\forall a \in \mathcal{A},\ \ a\vee\mathbf{0} = a,\ \ a\wedge\mathbf{1} = a.$
   5. *Leyes de complementos*: $\forall a \in \mathcal{A},\ \ a\vee\overline{a} = \mathbf{1},\ \ a\wedge\overline{a} = \mathbf{0}.$

   Demuestre que las propiedades siguientes son consecuencia de los axiomas anteriores:

   6. *Propiedades de idempotencia*: $\forall a \in \mathcal{A},\ a\vee a = a,\ a\wedge a = a.$
   7. *Propiedades de los elementos identidad*: $\forall a \in \mathcal{A},\ \ a\vee\mathbf{1} = \mathbf{1},\ \ a\wedge\mathbf{0} = \mathbf{0}.$
   8. *Propiedades de absorción*: $\forall a,b \in \mathcal{A},\ \ a\vee(a\wedge b) = a,\ \ a\wedge(a\vee b) = a.$
   9. *Caracterización del elemento complementario*:

      Si $a,b \in \mathcal{A}$, entonces

$$\left.\begin{array}{l} a\vee b = \mathbf{1} \\ a\wedge b = \mathbf{0} \end{array}\right\} \iff b = \overline{a}.$$

   10. *Propiedad de involución ó de doble complemento*: $\forall a \in \mathcal{A},\ \ \overline{\overline{a}} = a.$
   11. *Propiedades de De Morgan*: $\forall a,b \in \mathcal{A},\ \ \overline{a\vee b} = \overline{a}\wedge\overline{b},\ \ \overline{a\wedge b} = \overline{a}\vee\overline{b}.$

2. Basándose en los axiomas de álgebra de Boole y en sus consecuencias inmediatas, demuestre las siguientes identidades:
   a) $(a \vee \overline{(b \wedge c)}) \wedge \overline{b} = \overline{b}.$
   b) $a \vee b \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c) = a \vee b.$
   c) $a \vee b = a \vee (\overline{a} \wedge b).$
   d) $\overline{(a \wedge (b \vee c)) \vee (\overline{a} \wedge b)} = \overline{b} \wedge (\overline{a} \vee \overline{c}).$
   e) $(a \wedge b) \vee (\overline{a} \wedge c) \vee (b \wedge c) = (a \wedge b) \vee (\overline{a} \wedge c).$
   f) $(a \wedge b) \vee (a \wedge \overline{b}) \vee (\overline{a} \wedge b) \vee (\overline{a} \wedge \overline{b}) = \mathbf{1}.$

3. El orden implícito de un álgebra de Boole $\mathcal{A}$ es la relación binaria R definida sobre $\mathcal{A}$ tal que para cualesquiera dos elementos $a,b \in \mathcal{A}$, aRb si y sólo si $a \vee b = b$ (ó equivalentemente, $a \wedge b = a$). Demuestre que R efectivamente es una relación de orden sobre $\mathcal{A}$.

4. Demuestre que en cualquier álgebra de Boole se verifica que:
   a) $a < b$ si y sólo si $\overline{b} < \overline{a}$.
   b) $a \leq b$ si y sólo si $a \wedge \overline{b} = \mathbf{0}$.
   c) Si $a \leq b$ y $c \leq d$, entonces $a \vee c \leq b \vee d$ y $a \wedge c \leq b \wedge d$.
   d) $a \leq b \ \Rightarrow\ a \vee (c \wedge b) = (a \vee c) \wedge b.$

5. Si $\mathcal{A}$ es un álgebra de Boole y $a \in \mathcal{A}$, demuestre que las afirmaciones siguientes son equivalentes:
   a) a es un átomo.
   b) Para todo $b \in \mathcal{A}$, se verifica que $a \leq b$ ó $a \leq \overline{b}$, pero no ambas desigualdades.
   c) Para todo $b \in \mathcal{A}$, se verifica que $a \wedge b = a$ ó $a \wedge b = \mathbf{0}$, pero no ambas igualdades.

6. Sean $\mathcal{A}$ un álgebra de Boole y $a \in \mathcal{A}$. Justifique que a es un átomo si y sólo si $\overline{a}$ es un coátomo.

7. Si $\mathcal{A}$ es un álgebra de Boole cuyos átomos son $a_1,\ldots,a_n,a_{n+1},\ldots,a_m$, demuestre que

$$\overline{a_1 \vee \cdots \vee a_n} = a_{n+1} \vee \cdots \vee a_m.$$

8. Sean $(\mathcal{A}_1,\vee,\wedge,-),\ldots,(\mathcal{A}_n,\vee,\wedge,-)$ álgebras de Boole. Sobre el conjunto $\mathcal{A}_1\times\cdots\times\mathcal{A}_n$ definimos las siguientes operaciones:

$$(x_1,\ldots,x_n)\vee(y_1,\ldots,y_n)=(x_1\vee y_1,\ldots,x_n\vee y_n),$$
$$(x_1,\ldots,x_n)\wedge(y_1,\ldots,y_n)=(x_1\wedge y_1,\ldots,x_n\wedge y_n),$$
$$\overline{(x_1,\ldots,x_n)}=(\overline{x_1},\ldots,\overline{x_n}).$$

   a) Compruebe que $\mathcal{A}_1\times\cdots\times\mathcal{A}_n$, respecto de las operaciones anteriores, es un álgebra de Boole cuyos elementos cero y uno son, respectivamente, $(\mathbf{0},\ldots,\mathbf{0})$ y $(\mathbf{1},\ldots,\mathbf{1})$. El álgebra de Boole $\mathcal{A}_1\times\cdots\times\mathcal{A}_n$ se denomina el *álgebra de Boole producto cartesiano* de las álgebras de Boole $\mathcal{A}_1,\ldots,\mathcal{A}_n$.
   b) Describa la relación de orden implícito en el álgebra de Boole $\mathcal{A}_1\times\cdots\times\mathcal{A}_n$.
   c) Determine los átomos y los coátomos del álgebra de Boole $\mathcal{A}_1\times\cdots\times\mathcal{A}_n$.

9. Si k es un número entero positivo, denotamos por $\mathrm{D}(k)$ el conjunto de los divisores positivos de k, es decir, $\mathrm{D}(k)=\{d\in\mathbb{N}:d|k\}$. Sean n un entero positivo, $p_1,\ldots,p_n$ números primos distintos y $m=p_1\cdots p_n$. Definimos sobre el conjunto $\mathrm{D}(m)$ las siguientes operaciones:

$$a\vee b=\mathrm{mcm}(a,b),\ \text{ es decir, el mínimo común múltiplo de } a \text{ y } b,$$
$$a\wedge b=\mathrm{mcd}(a,b),\ \text{ es decir, el máximo común divisor de } a \text{ y } b,$$
$$\overline{a}=\tfrac{m}{a}.$$

   Justifique que $\mathrm{D}(m)$ con las operaciones anteriores es un álgebra de Boole. Determine el orden implícito, los átomos y los coátomos.

10. Constate que el conjunto de divisores positivos $\mathrm{D}(210)$ es un álgebra de Boole y evalúe las siguientes expresiones:

$$14\vee(15\wedge10),\quad \overline{14}\wedge21,\quad \overline{(\overline{6}\vee5)}\vee10,\quad \overline{\overline{(3\vee10)}\vee2}.$$

   Represente los elementos 21 y 70 como supremo de átomos y como ínfimo de coátomos.

11. Encuentre un número natural n sabiendo que el conjunto $\mathrm{D}(n)$ de los divisores positivos de n es un álgebra de Boole con las operaciones usuales (véase el Ejercicio 9), y que 462 y 798 son dos coátomos. Además, obtenga todos los $x\in\mathrm{D}(n)$ tales que $\overline{154}\vee x=1254$.

12. En el álgebra de Boole $\mathcal{P}(\{1,2,3,4,5\})$, escriba el elemento $\{1,3,4\}$ como supremo de átomos y como ínfimo de coátomos.

13. Sea $f:\mathcal{A}_1\to\mathcal{A}_2$ un isomorfismo de álgebras de Boole. Demuestre que $f(\mathbf{0})=\mathbf{0}$ y $f(\mathbf{1})=\mathbf{1}$.

14. Supongamos que $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ son álgebras de Boole cada una con n átomos. ¿Cuántos isomorfismos distintos se pueden definir de $\mathcal{A}_1$ en $\mathcal{A}_2$?

15. ¿Para cuántos números naturales n tales que $1\le n\le 10^{1000}$ se verifica que existe algún álgebra de Boole de n elementos?

16. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Boole cuyos átomos son a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 y sea el elemento

$$\alpha=\overline{(\overline{a}_1\wedge(a_2\vee a_5))}\wedge(a_1\vee a_2\vee a_4).$$

   Se pide expresar:
   a) α como supremo de átomos y como ínfimo de coátomos.
   b) $\overline{\alpha}$ como supremo de átomos y como ínfimo de coátomos.

17. Si a y b son dos átomos distintos pertenecientes a un álgebra de Boole $\mathcal{A}$ de cinco átomos, ¿cuántos elementos x pertenecientes a $\mathcal{A}$ existen tales que $a\vee x=b\vee x$?

18. Sea $\mathcal{A}$ el conjunto cuyos elementos son $\mathbb{R}$, $\varnothing$ y los subconjuntos de $\mathbb{R}$ que se obtienen como unión de un número finito de algunos intervalos de la forma siguiente,

$$[a,b)=\{x\in\mathbb{R}:a\le x<b\},\ \ [a,\infty)=\{x\in\mathbb{R}:a\le x\},\ \ (-\infty,b)=\{x\in\mathbb{R}:x<b\},$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$. Justifique que $\mathcal{A}$ es un álgebra de Boole con las operaciones usuales de unión, intersección y complemento respecto de $\mathbb{R}$. Determine, si existen, los átomos y los coátomos de $\mathcal{A}$.

19. Dado un conjunto X, un subconjunto de X se dice que es *cofinito*, si su complementario en X es finito. Si suponemos además que X es no vacío, sea $\mathcal{A}(X)$ la colección formada por los subconjuntos de X que son finitos ó cofinitos.
    a) Demuestre que $\mathcal{A}(X)$ es un álgebra de Boole con las operaciones usuales de unión, intersección y complemento respecto de X.
    b) Determine, si existen, los átomos y los coátomos de $\mathcal{A}(X)$.
    c) ¿A qué se reduce el álgebra de Boole $\mathcal{A}(X)$ cuando el conjunto X utilizado para construirla es finito?

20. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Boole finita.
    a) Supongamos que $x \in \mathcal{A} \setminus \{\mathbf{0}\}$ y que $a_1, \ldots, a_n$ son los átomos de $\mathcal{A}$ menores o iguales que x. Demuestre que $x = a_1 \vee \cdots \vee a_n$. (Sugerencia: Considere el elemento $y = a_1 \vee \cdots \vee a_n$, razone que $y \leq x$, y use el método de demostración por reducción al absurdo para probar que $x \leq y$.)
    b) Si $a, a_1, \ldots, a_n$ son átomos de $\mathcal{A}$, $x = a_1 \vee \cdots \vee a_n$ y $a \leq x$, demuestre que existe algún a_i tal que $a = a_i$.
    c) Deduzca de los dos apartados anteriores que todo elemento $x \in \mathcal{A} \setminus \{\mathbf{0}\}$ se expresa de manera única, salvo el orden de los elementos intervinientes, como $x = a_1 \vee \cdots \vee a_n$, donde $a_1, \ldots, a_n$ son los átomos de $\mathcal{A}$ menores o iguales que x.

21. Denotamos por $\mathcal{F}_n$ el conjunto de las funciones booleanas en n variables, es decir, el conjunto formado por todas las aplicaciones $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$. Sean f_0 y f_1 los elementos de $\mathcal{F}_n$ tales que $f_0(\alpha) = \mathbf{0}$ y $f_1(\alpha) = \mathbf{1}$, para todo $\alpha \in \mathbb{B}^n$. Compruebe que $\mathcal{F}_n$ es un álgebra de Boole con los elementos cero y uno dados por f_0 y f_1, respectivamente, y las operaciones $f \vee g$, $f \wedge g$ y $\overline{f}$, donde
$$(f \vee g)(a_1, \ldots, a_n) = f(a_1, \ldots, a_n) \vee g(a_1, \ldots, a_n),$$
$$(f \wedge g)(a_1, \ldots, a_n) = f(a_1, \ldots, a_n) \wedge g(a_1, \ldots, a_n),$$
y
$$\overline{f}(a_1, \ldots, a_n) = \overline{f(a_1, \ldots, a_n)}$$
para todo $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{B}^n$. Determine el orden implícito en el álgebra de Boole $\mathcal{F}_n$.

22. Escriba la forma normal disyuntiva en términos de variables para cada una de las funciones booleanas siguientes:
    a) $f(x,y,z) = \sum m(2,4,5,6)$.
    b) $f(x,y,z) = (\overline{\overline{x} + yz}) \cdot (xy\overline{z} + x\overline{y})$.
    c) $f(x,y,z) = (x + \overline{y} + z)(\overline{x} + y + z)(x + \overline{y} + \overline{z})$.
    d) $f(x,y,z) = \prod M(0,1,4,5)$.

23. Escriba la forma normal conjuntiva en términos de variables para cada una de las funciones booleanas siguientes:
    a) $f(x,y,z) = \prod M(1,4,7)$.
    b) $f(x,y,z) = (\overline{\overline{xy} + z}) + x\overline{yz}$.
    c) $f(x,y,z) = x\overline{y} + yz + \overline{x}z$.
    d) $f(x,y,z) = \sum m(1,2,6)$.

24. Calcule la forma normal disyuntiva y la forma normal conjuntiva de la función booleana
$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \overline{(x_1 + \overline{x}_2 + x_4)} \cdot (x_2 + \overline{x}_3 \cdot x_5) + x_1.$$

25. Obtenga la forma normal disyuntiva y la forma normal conjuntiva de la función booleana
$$f(x,y,z,t) = \big[(x + t) \downarrow (\overline{y} + z)\big] + \big[z\overline{t} \oplus (y \uparrow x)\big].$$

26. Demuestre que toda función booleana se puede expresar usando (tantas veces como sea necesario) la constante **0** y/o el operador booleano $\rightarrow$ dado por la tabla siguiente:

a	b	$a \rightarrow b$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

A continuación, represente el operador booleano NAND en términos sólo de operadores $\rightarrow$ y/o constantes **0**.

27. ¿Verifica el operador NAND la propiedad asociativa? ¿Y el operador NOR? ¿Y el operador $\rightarrow$?

28. Sea la función booleana $f(x,y,z) = \overline{\overline{x}y+z} + x\overline{z}$.
    a) Exprese f usando sólo operadores del conjunto $\{\rightarrow, \mathbf{0}\}$.
    b) Obtenga el polinomio de Gegalkine de f.

29. Defina cada una de las funciones booleanas siguientes mediante una expresión booleana:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7) = \begin{cases} \overline{x}_1x_3x_6 & \text{si } x_2x_6 = \overline{x}_3 + x_5 \\ x_2x_4\overline{x}_5x_7 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$g(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7) = \begin{cases} \overline{x}_1 + x_4 & \text{si } x_2x_6 \leq \overline{x}_3 + x_5 \\ \overline{x}_2 + x_7 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

30. Obtenga el polinomio de Gegalkine de la función booleana $f(x,y,z,t) = \begin{cases} yt \oplus z & \text{si } x = 0 \\ (y \downarrow \overline{z}) + t & \text{si } x = 1 \end{cases}$

31. Exprese el operador NAND en función del operador NOR, y viceversa.

32. Para la función booleana $f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4 \oplus x_5$, ¿cuántos mintérminos aparecen en su forma normal disyuntiva? ¿Y para la función booleana $g(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4$?

33. Sean $f : \mathbb{B}^4 \rightarrow \mathbb{B}$ y $g : \mathbb{B}^4 \rightarrow \mathbb{B}$ las funciones booleanas definidas por:

$$f(x,y,z,t) = \sum m(0,2,3,6,8,11,14) \quad \text{y} \quad g(x,y,z,t) = \sum m(3,5,6,10,11,13,14).$$

Obtenga la forma normal disyuntiva de cada una de las funciones booleanas siguientes: $f+g$, $f \cdot g$, $\overline{f}$, $\overline{g}$, $f \rightarrow g$, $g \rightarrow f$, $f \leftrightarrow g$, $f \uparrow g$, $f \downarrow g$ y $f \oplus g$.

34. Para cada una de las funciones booleanas siguientes, encuentre una expresión minimal como suma de productos de literales:
    a) $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \sum m(0,4,5,7,8,10,14,15)$.
    b) $f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = \sum m(0,2,4,7,10,12,13,18,23,26,28,29)$.
    c) $f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) = \sum m(0,2,6,7,8,10,12,14,15,41)$.

35. Obtenga una expresión minimal como producto de sumas de literales para la función booleana

$$f(x,y,z,t) = \prod M(0,1,2,3,6,9,14).$$

36. Sea $f : \mathbb{B}^4 \rightarrow \mathbb{B}$ la función booleana tal que $f(a_3,a_2,a_1,a_0) = \mathbf{1}$ si, y sólo si, el número natural escrito en binario como $(a_3a_2a_1a_0)_2$, es múltiplo de 3 ó de 4. Encuentre una expresión minimal de f como suma de productos de literales.

37. Sea $f : \mathbb{B}^4 \rightarrow \mathbb{B}$ la función booleana tal que $f(a_3,a_2,a_1,a_0) = \mathbf{1}$ si, y sólo si, el número natural escrito en binario como $(a_3a_2a_1a_0)_2$, es múltiplo de 3 ó de 5. Encuentre una expresión minimal de f como suma de productos de literales.

38. Consideramos la función booleana $f : \mathbb{B}^5 \rightarrow \mathbb{B}$ tal que $f(a_4,a_3,a_2,a_1,a_0) = \mathbf{1}$ si, y sólo si, el número natural escrito en binario como $(a_4a_3a_2a_1a_0)_2$, es primo. Obtenga una expresión minimal como suma de productos de literales para f.

39. Sea la función booleana $f(x,y,z,t) = \Sigma\, m\Big(0,1,5,8,9,12,13,14\Big)$. De las afirmaciones siguientes, establezca las que son correctas:
   a) f tiene exactamente cuatro implicantes primos, de los cuales sólo dos son esenciales.
   b) La expresión $xy\bar{z}$ es un implicante primo de f, aunque no es esencial.
   c) f tiene exactamente dos expresiones minimales como suma de productos de literales.
   d) f tiene exactamente tres implicantes primos, cada uno de los cuales es esencial.
   e) f tiene sólo una expresión minimal como producto de sumas de literales.

40. Sea la función booleana $f(x,y,z) = (\bar{x}\cdot y) \uparrow \big(x \to (z \downarrow \bar{y})\big)$. De las afirmaciones siguientes, determine las que son correctas:
   a) En el polinomio de Gegalkine de f no aparece la constante **1**.
   b) f tiene una expresión minimal como suma de productos de literales, en la cual no aparece la variable z.
   c) $f(x,y,z) = \overline{(x+\bar{y}+z)\cdot(x+\bar{y}+\bar{z})}$.
   d) En la forma normal disyuntiva de f hay exactamente tres sumandos.
   e) $f(x,y,z) = 1 \oplus yz \oplus xyz$.