DERIVACIÓN

La necesidad de resolver diversos problemas de la Física, la Astronomía y otras disciplinas condijo al desarrollo del Cálculo Infinitesimal, que tras un largo proceso de gestación se consolida con los trabajos de Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).

Descansa el Cálculo Infinitesimal sobre dos operaciones fundamentales relacionadas entre sí: la derivación y la integración. Con ellas se resuelve el problema del cálculo de tangentes y de cuadraturas.

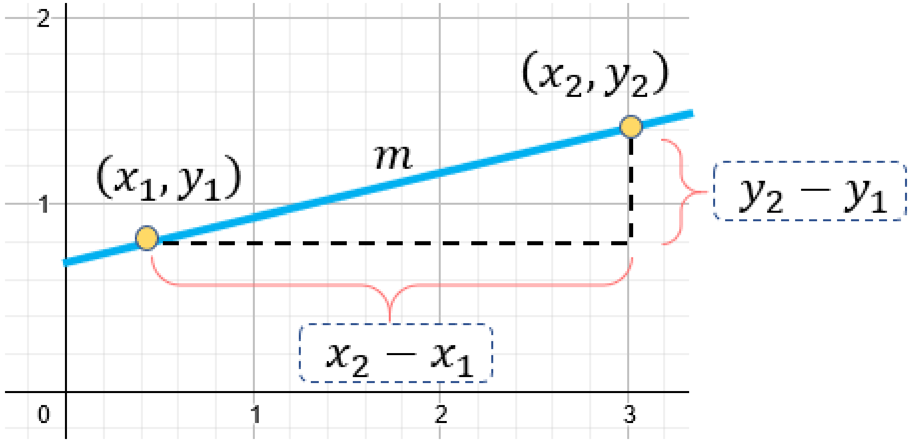
Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Isaac Newton (1642-1727)

DERIVACIÓN: Concepto de derivada

La pendiente de esta rampa es el cociente incremental o la razón de cambio. La calculamos así:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



Si hacemos $y = f(x)$, donde $f(x)$ es la altura correspondiente a la distancia x, entonces tenemos que

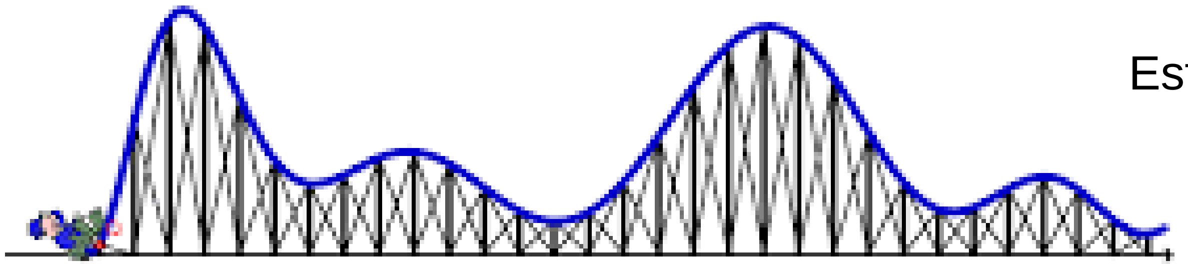
$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Geométricamente es la pendiente de la recta que pasa por $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$.

Definición. Dada una función $f : A \to \mathbb{R}$ y dado $a \in I$, definimos el cociente incremental de f respecto del punto a como la función $f_a : A \backslash \{a\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

DERIVACIÓN: Concepto de derivada



En esta situación, hemos de refinar el planteamiento anterior.

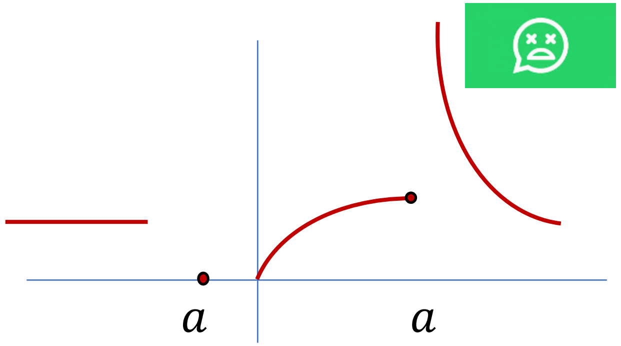
Una idea más acertada de la pendiente en un punto concreto en un punto $(a, f(a))$ nos la daría el tomar puntos $(x, f(x))$ cercanos al punto dado, calcular la pendiente del tramo de extremos $(x, f(x))$ y $(a, f(a))$ y posteriormente tomar límite de las pendientes obtenidas cuando $x \to a$.

Estamos pues interesados en el siguiente límite:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Esto es el límite del cociente Incremental $f_a(x)$ en el punto $x = a$

Observación. Si, de nuevo $f(x)$ denota la altura de la montaña, entonces su gráfica vendría dada por la curva que describe la silueta de la montaña. Obsérvese que dicha función es continua y que esto es un dato relevante. Igualmente lo es el hecho de que el punto a sea un punto de acumulación del dominio de f.



Observación. Nótese que el límite que nos interesa, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, presenta sus problemas incluso en una situación ideal de una función continua f definida en un intervalo I que contiene al punto a (si se quiere en su interior). De hecho, resulta que

$$\lim_{x\to a} f(x)-f(a) = \lim_{x\to a} x-a = 0\,.$$

Por descontado, la existencia de tal límite tampoco está asegurada.

Notación. Dado un conjunto no vacío $A \subseteq \mathbb{R}$, denotamos por A' el conjunto de puntos de acumulación de A. Por tanto,

$$A' = \{b \in \mathbb{R} : \exists\ x_n \text{ en } A\setminus\{b\} \text{ tal que } x_n \to b\}.$$

Recordamos que para hablar de límite en f cuando $x \to a$ se requiere, por definición de límite, que a sea un punto de acumulación del dominio de f.

Definición. Sea $f : A \to \mathbb{R}$ y sea $a \in A \cap A'$. Decimos que f es derivable en a si existe $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, en cuyo caso decimos que su valor es la derivada de f en el punto a y escribimos

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$ (Notación de Lagrange)

Nota. Por definición de límite se tiene que $f´(a)$ es un número real con la propiedad de que para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ (que depende ε) tal que, si $0 < |x - a| < \delta$, entonces

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\right| < \varepsilon.$$

(La existencia de tales x queda garantizada por el hecho de que a sea punto de acumulación de A).

De forma equivalente, $f´(a)$ es un número real tal que para cada sucesión x_n de $A\setminus\{a\}$ que verifique que $x_n \longrightarrow a$ (cuando $n \to \infty$) se tiene que $\dfrac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \longrightarrow f'(a)$.

(La existencia de tales sucesiones queda garantizada por el hecho de que a sea punto de acumulación de A).

Observación. El límite $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ se puede escribir también de la forma $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Para ello, basta observar que si escribimos $h = x - a$ entonces $x \to a$ si, y solo si, $h \to 0$.

En consecuencia

$$f´(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Haremos uso de una u otra expresión, a discreción.

Nota: Cuando se diga que una función $f\colon A \to \mathbb{R}$ es derivable (sin especificar dónde) vamos a entender que $A \cap A' = A$ y que f derivable en cada uno de los puntos de A.

Un intervalo es un conjunto I con la propiedad de que si $x, y \in I$ y $u \in \mathbb{R}$ es tal que $x \leq u \leq y$ entonces $u \in I$ (coloquialmente hablando, esto es un conjunto sin "agujeros").
Si I es un intervalo no trivial (esto es que contenga más de un punto) entonces ninguno de los puntos de I puede ser aislado (de lo contrario tendría agujeros), de donde $I \subseteq I'$ y así $I \cap I' = I$.

Por tanto, si el dominio de f es un intervalo, decir que f es derivable significa que f es derivable en todos y cada uno de los puntos de su dominio. Considerar funciones definidas en intervalos será lo más habitual para nosotros.

Definición. Sea D el conjunto de puntos $A \cap A'$ en los que la función $f\colon A \to \mathbb{R}$ es derivable. Si $D \neq \emptyset$ entonces definimos la función derivada de f como la función $f' : D \to \mathbb{R}$ tal que $a \in D \to f'(a) \in \mathbb{R}$.

Ejemplos.
(i) Sea $f(x) = kx$ para cada $x \in \mathbb{R}$ ($k \in \mathbb{R}$ constante). Entonces $f'(x) = k$. De hecho, para cada $x \in \mathbb{R}$, tenemos

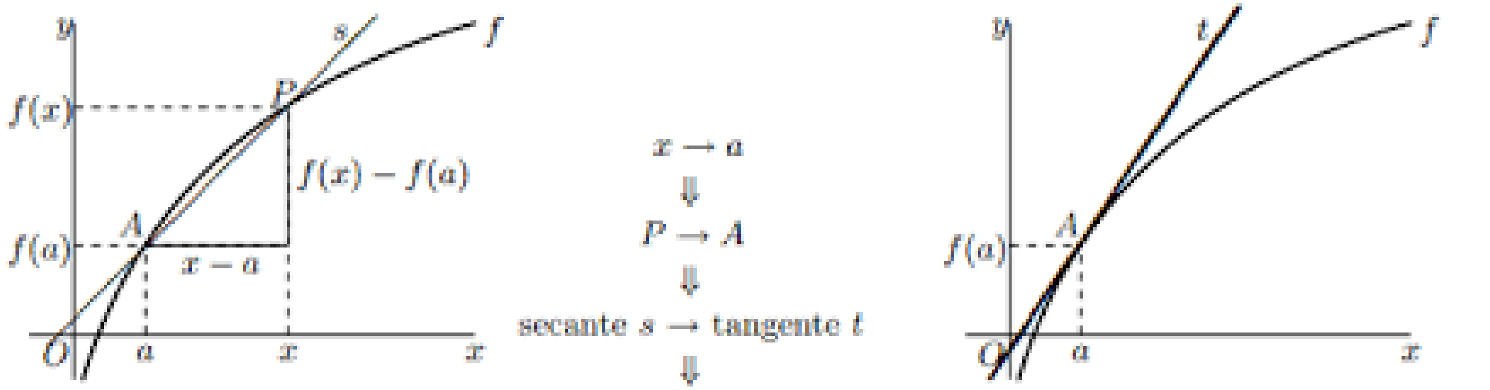
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k(x+h)-kx}{h} = k.$$

(ii) Sea $f(x) = x^2$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Entonces $f'(x) = 2x$, para cada $x \in \mathbb{R}$ pues

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh+h^2}{h} = 2x.$$

DERIVACIÓN: Concepto de derivada

Interpretación geométrica de la derivada. La derivada de la función f en el punto $x = a$, esto es $f'(a)$, es el límite de la pendiente de la recta secante de que pasa por $(a, f(a))$ y $(x, f(x))$ cuando $x \to a$.



$m_s = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ (pendiente de s) $\longrightarrow f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ (pendiente de t)

Definición. Si $f\colon A \to \mathbb{R}$ es derivable en $a \in A \cap A'$, entonces se define la recta tangente de la función f en el punto $x = a$ como la recta de ecuación

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Esta es la recta que pasa por $(a, f(a))$ y tiene como pendiente $f'(a)$.

Observación. Esta es la única recta $r(x)$ que pasa por $(a, f(a))$ y tiene la propiedad de que $\lim_{x\to a} \frac{f(x)- r(x)}{x-a} = 0$.

Demuéstrese.

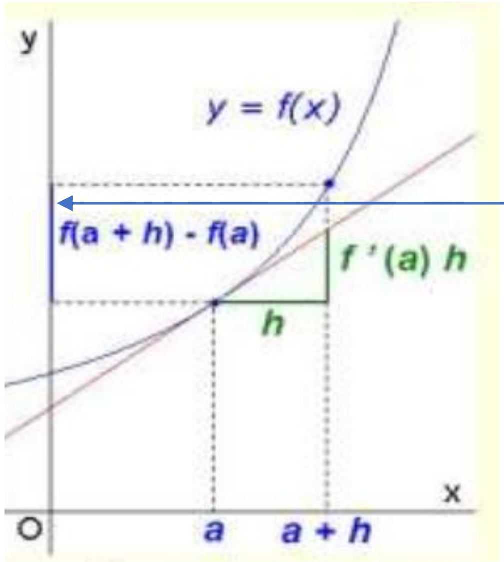
DERIVACIÓN: Concepto de derivada

Incremento y diferencial. Si $f\colon A \to \mathbb{R}$ es derivable en $a \in A \cap A'$ entonces es claro que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)-f'(a)h}{h} = 0.$$

De aquí se deduce que

$$\underbrace{f(a+h)-f(a)}_{\text{Incremento de } f \text{ de } a \text{ hasta } a+h} = \underbrace{f'(a)h}_{\text{Diferencial de } f \text{ en } a \text{ con incremento } h} + \theta(h), \qquad \text{donde } \lim_{h\to 0}\frac{\theta(h)}{h} = 0.$$



La aplicación diferencial en a, $h \longrightarrow f'(a)h$ es una aplicación lineal (en h) que, para valores pequeños de h nos proporciona una buena aproximación del incremento $f(a+h)-f(a)$.

La aproximación $f(a+h) \cong f(a) + f'(a)h$ es útil (y lo fue aun más en su contexto histórico).

Ejemplos

(i) $31^2 \cong 960 = f(a) + f'(a)h = a^2 + 2ah$ con $a = 30$, $h = 1$ (en realidad $31^2 = 961$)

(ii) $\sqrt{104} \cong \sqrt{a} + \frac{1}{2\sqrt{a}}h$ con $a = 100$ y $h = 4$, de donde $\sqrt{104} \cong 10 + \frac{4}{20} = 10{,}2.$

Interpretación física de la derivada. Desde un punto de vista físico, la derivada representa la variación instantánea de una magnitud dependiente $y = f(x)$, con respecto la magnitud independiente x que la define. La tasa (o razón) de cambio promedio de la magnitud y en el intervalo de extremos a y x se define como

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

La tasa (o razón) de cambio puntual se obtiene de considerar la razón de cambio promedio en intervalos cada vez más pequeños que se obtienen de hacer que $x \longrightarrow a$. Por tanto se define como

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

En particular, a esta interpretación responden los siguientes conceptos: Si un móvil se desplaza a lo largo de una recta, en la que se ha elegido un origen, y la función $s(t)$ determina la distancia recorrida por el móvil en el instante de tiempo t, entonces la velocidad media entre los instantes de tiempo t_0 y t viene dada por

$$\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}.$$

La velocidad instantánea del móvil en el instante t_0 viene dada por

$$\lim_{t\to t_0} \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}.$$

La velocidad instantánea es una abstracción física del movimiento, más que una magnitud que podamos observar directamente.

DERIVACIÓN: Continuidad

Observación. Cuando hemos establecido el concepto de derivada de una función $f: A \to \mathbb{R}$ en un punto $a \in A \cap A'$ no hemos pedido que la función f tenga bondad alguna. En particular, no hemos supuesto que f sea continua en a. Sin embargo, si no lo es, no tendrá posibilidades de ser derivable como vemos a continuación.

Teorema. Sea $f: A \to \mathbb{R}$ y sea $a \in A \cap A'$. Si f es derivable en a entonces f es continua en a.

Dem. $f(x) - f(a) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a) \to 0.$ ■

Nota. Por el contrarrecíproco del teorema anterior, si una función no es continua en un punto, tampoco podrá ser derivable en él. Sin embargo, la continuidad en un punto de la función dada no garantiza la derivabilidad de la función en dicho punto.

Ejemplos.

(i) La función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$ es continua en todo $\mathbb{R}$, y en particular en $x = 0$, pero no es derivable en $x = 0$. De hecho, $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1 \neq -1 = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$.

(ii) La función $f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$ es continua en $x = 0$, pero no es derivable en $x = 0$. De hecho, $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$.

DERIVACIÓN: Derivada lateral

Nota: La derivada, no deja de ser un límite. Por tanto, lo que sabemos sobre límites laterales puede aplicarse a este límite en particular. Esto motiva la definición de derivada lateral.

Recordamos previamente que $a \in \mathbb{R}$ es un punto de acumulación por la derecha de un conjunto no vacío $A \subseteq \mathbb{R}$ si a es un punto de acumulación de $A \cap]a, +\infty[$. Denotamos por A'_+ al conjunto de puntos de acumulación por la derecha del conjunto A.

Análogamente se definen los puntos de acumulación por la izquierda del conjunto A como los puntos $a \in \mathbb{R}$ que son puntos de acumulación de $A \cap]-\infty, a[$. Denotamos por A'_- al conjunto de todos ellos. Obviamente,

$$A' = A'_+ \cup A'_-$$

Definición (derivada lateral). Sea $f: A \to \mathbb{R}$ y sea $a \in A \cap A'$.

(i) Si $a \in A'_-$ se dice que f es derivable por la izquierda en a si existe $f'_-(a) := \lim\limits_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

(ii) Si $a \in A'_+$ se dice que f es derivable por la derecha en a si existe $f'_+(a) := \lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

De las conocidas propiedades de los límites obtenemos el siguiente resultado.

Proposición. Sea $f: A \to \mathbb{R}$ y sea $a \in A \cap A'$.

(i) Si $a \notin A'_-$ entonces f es derivable en a si, y solo si, lo es por la derecha, en cuyo caso $f'(a) = f'_+(a)$.

(ii) Si $a \notin A'_+$ entonces f es derivable en a si, y solo si, lo es por la izquierda, en cuyo caso $f'(a) = f'_-(a)$.

(iii) Si $a \in A'_- \cap A'_+$ entonces f es derivable en a si, y solo si, lo es por la derecha y por la izquierda y además ambas derivadas laterales coinciden, en cuyo caso $f'(a) = f'_-(a) = f'_+(a)$.

De la definición de límite obtenemos sin dificultad el siguiente resultado.

Proposición (Carácter local de la derivabilidad). Sea $f: A \to \mathbb{R}$ una función derivable en $a \in A \cap A'$ y sea $B \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto tal que $]a-r, a+r[\subseteq B \subseteq A$ para cierto $r > 0$. Entonces se tiene que $a \in B \cap B'$ y f es derivable en a si, y solo si, $f_{/B} : B \to \mathbb{R}$ es derivable en a en cuyo caso $f'(a) = (f_{/B})'(a)$.

Corolario. Si $f: A \to \mathbb{R}$ una función derivable y B es un intervalo abierto tal que $]a-r, a+r[\subseteq B \subseteq A$ entonces, $f_{/B} : B \to \mathbb{R}$ es derivable y $(f_{/B})'(a) = f'(a)$, para cada $a \in B$.

Ejemplo. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función

$$f(x) = \begin{cases} 5x & \text{si} \quad x < 4 \\ 25 & \text{si} \quad 4 \leq x < 5 \\ x^2 & \text{si} \quad 5 \leq x \end{cases}$$

Por el carácter local de la derivabilidad y la derivabilidad de las funciones $g_1(x) = 5x, g_2(x) = 25$ y $g_3(x) = x^2$ (en todo $\mathbb{R}$ y en particular en cualquier intervalo suyo) obtenemos la derivabilidad de f en el conjunto $\mathbb{R}\backslash\{4,5\}$.

Nótese que el carácter local de la derivabilidad no aporta nada al estudio de la función en los puntos $x = 4$ y $x = 5$. De hecho, cualquier restricción de f a un subconjunto B que contenga un intervalo abierto centrado en dichos puntos sigue siendo una función de llaves, con puntos de tránsito en los puntos dados.

DERIVACIÓN: Derivadas básicas

Sabemos que $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ y que la continuidad de f en a es necesaria si aspiramos a que el límite anterior exista. Si bien esto nos conduce a la situación $[\frac{0}{0}]$, resulta que vamos a poder solventar esta situación en muchísimas situaciones como mostramos a continuación.

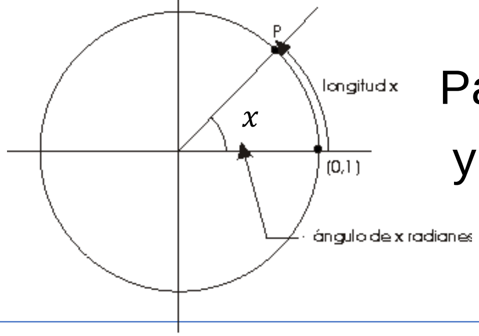
Ejemplos:

(i) **Si $\boldsymbol{f(x) = k}$ (constante) entonces $\boldsymbol{f'(x) = 0}$.** En efecto: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{k-k}{h} = 0.$

(ii) **Si $\boldsymbol{f(x) = x}$ entonces $\boldsymbol{f'(x) = 1}$.** En efecto: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1.$

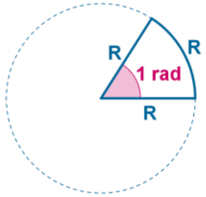
(iii) **Si $\boldsymbol{f(x) = x^2}$ entonces $\boldsymbol{f'(x) = 2x}$.** En efecto: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = 2x.$

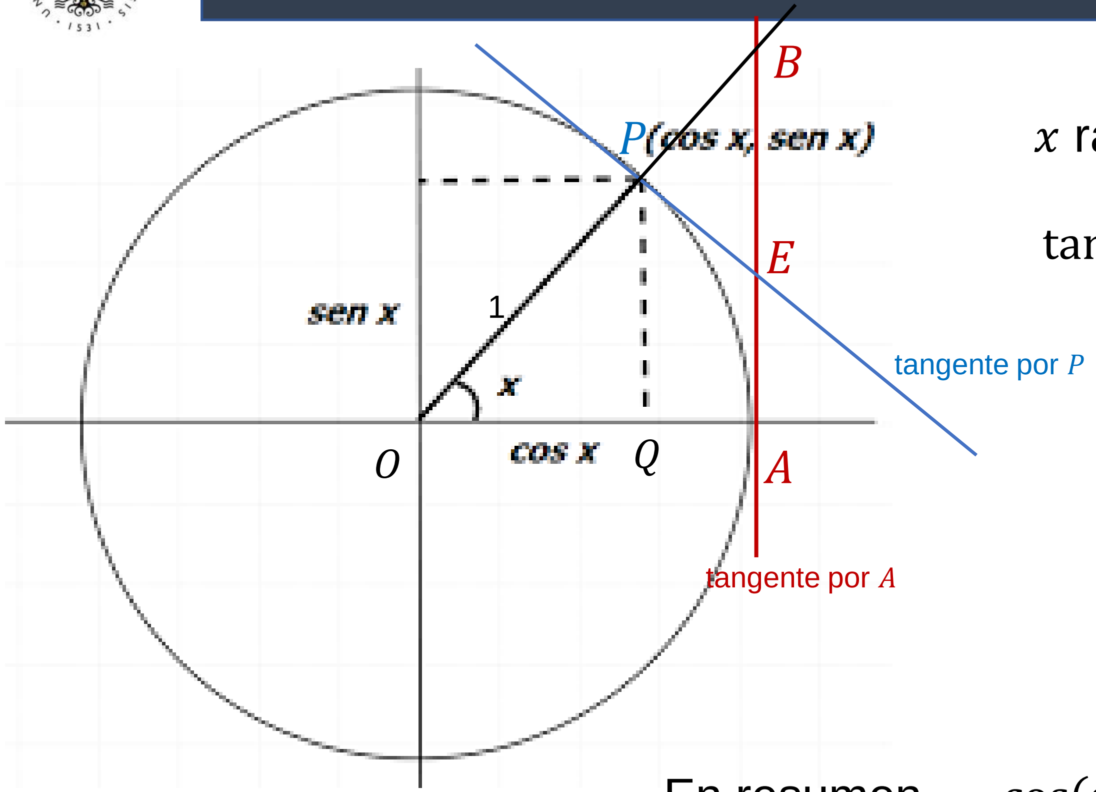
(iv) **Si $\boldsymbol{f(x) = \mathrm{sen}(x)}$ entonces $\boldsymbol{f'(0) = 1}$.**



Para cada $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tomamos el ángulo de x radianes y consideramos los siguientes segmentos:

Nota:





x radianes = longitud arco $AP \leq |AE| + |EP| \leq |AE| + |EB| = |AB|$

↑ Cateto ↑ hipotenusa

$$\tan(x) = \frac{|PQ|}{|OQ|} = \frac{|AB|}{|OA|} = |AB|$$

En consecuencia, $x \leq |AB| = \tan(x)$, de donde $x \leq \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}$.

Esto es, $\cos(x) \leq \frac{\text{sen}(x)}{x}$.

De otra parte, $\text{sen}(x) \leq$ longitud arco $AP = x$. ($|PQ| \leq arco\ AP$)

Por tanto, $\frac{\text{sen}(x)}{x} \leq 1$

En resumen, $\cos(x) \leq \frac{\text{sen}(x)}{x} \leq 1.$

Por la Regla del sándwich, y de la paridad de la función concluimos que:
Esto significa que si $f(x) = \text{sen}(x)$ entonces $f'(0) = 1$.

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1}$$

(v) **Si $f(x) = \cos(x)$ entonces $f'(0) = 0$.** En efecto:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\cos(x)-1)(\cos(x)+1)}{x(\cos(x)+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2(x)-1}{x(\cos(x)+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\text{sen}^2(x)}{x(\cos(x)+1)} = -\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}^2(x)}{x^2} \lim_{x\to 0} \frac{x}{(\cos(x)+1)} = 0.$$

(vi) **Si** $\boldsymbol{f(x) = \mathbf{sen}(x)}$ **entonces** $\boldsymbol{f'(x) = cos(x)},$ **para cada** $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$**.**

En efecto,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{sen}(x+h)-\mathrm{sen}(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{sen}(x)\cos(h)+\cos(x)\mathrm{sen}(h)-\mathrm{sen}(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{sen}(x)(\cos(h)-1)+\cos(x)\mathrm{sen}(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \mathrm{sen}(x)\frac{\cos(h)-1}{h} + \lim_{h\to 0} \cos(x)\frac{sen(h)}{h} = \mathrm{sen}(x)0 + \cos(x)\,1 = \cos(x)\,.$$

(vii) **Si** $\boldsymbol{f(x) = \mathbf{cos}(x)}$ **entonces** $\boldsymbol{f'(x) = -\mathbf{sen}(x)},$ **para cada** $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$**.**

En efecto,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)\cos(h)-\mathrm{sen}(x)\mathrm{sen}(h)-\cos(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \cos(x)\frac{\cos(h)-1}{h} - \lim_{h\to 0} \mathrm{sen}(x)\frac{sen(h)}{h} = \cos(x)0 - \mathrm{sen}(x)\,1 = -\mathrm{sen}(x)\,.$$

(viii) **Si** $\boldsymbol{f(x) = e^x}$ **entonces** $\boldsymbol{f'(0) = 1}$.

En efecto, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ ya que $\displaystyle\lim_{x\to 0}(e^x)^{\frac{1}{x}} = e\,.$

Recordamos que si $x_n \to 1,\ y_n \to \infty$ y $L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ entonces,

$$\lim_{n\to\infty} {x_n}^{y_n} = e^L \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} y_n(x_n - 1) = L$$

(ix) **Si** $\boldsymbol{f(x) = e^x}$ **entonces** $\boldsymbol{f'(x) = e^x}$.

En efecto,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x\frac{e^h-1}{h} = e^x f'(0) = e^x.$$

De la definición de límite obtenemos sin dificultad el siguiente resultado.

Proposición. Sean $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ funciones derivables en $a \in A \cap A'$.

(i) La función **suma,** dada por $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ para cada $x \in A$, es derivable en a y se verifica que

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

(ii) La función **producto,** dada por $(fg)(x) = f(x)g(x)$ para cada $x \in A$, es derivable en a y se verifica que

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + g'(a)f(a).$$

(iii) Si $g(x) \neq 0$ para cada $x \in A$ entonces la función **cociente,** dada por $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ para cada $x \in A$, es derivable en a siendo

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{[g(a)]^2}$$

Dem. (i) Trivial: $\lim_{x\to a} \frac{(f+g)(x)-(f+g)(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$, puesto que límites de la derecha existen.

(ii) Dado que

$$\frac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a} = \frac{(fg)(x)-f(x)g(a)+f(x)g(a)-(fg)(a)}{x-a} = \frac{f(x)[g(x)-g(a)]+[f(x)-f(a)]g(a)}{x-a} = f(x)\,\frac{g(x)-g(a)}{x-a} + \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\,g(a)$$

tomando límites cuando $x \to a$ y usando la continuidad de f en a se obtiene lo deseado.

DERIVACIÓN: Reglas básicas

(iii) Finalmente,

$$\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x)-\left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x-a} = \frac{f(x)g(a)-g(x)f(a)}{(x-a)g(x)g(a)} = \frac{f(x)g(a)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-g(x)f(a)}{(x-a)g(x)g(a)} = f(x)\frac{g(a)-g(x)}{(x-a)g(x)g(a)} + g(x)\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)g(x)g(a)} =$$

$$\frac{1}{g(a)}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)} - \frac{f(x)}{g(x)g(a)}\frac{g(x)-g(a)}{(x-a)}.$$

Por tanto,

$$\lim_{x\to a}\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x)-\left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\left(\frac{1}{g(a)}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)} - \frac{f(x)}{g(x)g(a)}\frac{g(x)-g(a)}{(x-a)}\right) = \frac{f'(a)}{g(a)} - \frac{f(a)g'(a)}{[g(a)]^2} = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{[g(a)]^2}.$$

■

Observación. Del resultado anterior y del hecho de que las funciones constantes son derivables, con derivada cero, deducimos que si $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ son funciones derivables en $a \in A \cap A'$ entonces para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se verifica que la función $\alpha f + \beta g$ es derivable en a siendo

$$(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a).$$

Corolario. La derivada de una función polinómica $f\colon\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n$ es la función dada por $f'(x) = \alpha_1 + 2\alpha_2 x + \ldots + n\alpha_n x^{n-1}$.

Nota. Recordamos que si $f\colon A\to\mathbb{R}$ y $g\colon B\to\mathbb{R}$ son funciones tales que $f(A)\subseteq B$, la función compuesta de f y g es la función $g\circ f\colon A\to\mathbb{R}$ dada por $(g\circ f)(x)=g\big(f(x)\big)$, para cada $x\in A$.

Teorema (Regla de la cadena). Sean $f\colon A\to\mathbb{R}$ y $g\colon B\to\mathbb{R}$ son funciones tales que $f(A)\subseteq B$. Si f es derivable en $a\in A\cap A'$ y g es derivable en $f(a)\in B\cap B'$ entonces la función compuesta $g\circ f\colon A\to\mathbb{R}$ es derivable en a siendo

$$(g\circ f)'(a)=g'\big(f(a)\big)f'(a).$$

Dem. Sea $\phi : B\to\mathbb{R}$ la función auxiliar definida, para cada $y\in B$, como

$$\phi(y)=\begin{cases}\dfrac{g(y)-g(f(a))}{y-f(a)} & \text{si} \quad y\neq f(a)\\[2ex] g'\big(f(a)\big) & \text{si} \quad y=f(a)\end{cases}$$

La derivabilidad de g en $f(a)$ es la continuidad $\phi(y)$ en $y=f(a)$. Además, tanto si es $y=f(x)\neq f(a)$ (en cuyo caso $x\neq a$) como si es $y=f(x)=f(a)$, se verifica la siguiente igualdad

$$\frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a}=\phi(f(x))\,\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Por tanto,

$$(g\circ f)'(a)=\lim_{x\to a}\frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a}=\lim_{x\to a}\phi(f(x))\,\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\phi(f(x))\,\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\phi(f(a))\,f'(a)=g'\big(f(a)\big)f'(a).$$

DERIVACIÓN: Reglas básicas

El nombre de Regla de la cadena se justifica con el siguiente corolario.

Corolario. Sean $f: A \to \mathbb{R}$, $g: B \to \mathbb{R}$ y $h : C \to \mathbb{R}$ funciones tales que $f(A) \subseteq B$ y $g(B) \subseteq C$. Si f es derivable en $a \in A \cap A'$, g es derivable en $f(a) \in B \cap B'$ y h es derivable en $g(f(a)) \in C \cap C'$ entonces la función compuesta $(h \circ g \circ f): A \to \mathbb{R}$ es derivable en a siendo

$$(h \circ g \circ f)'(a) = h'(g(f(a))g'\big(f(a)\big)f'(a).$$

Dem. Por la Regla de la cadena $(h \circ g \circ f)'(a) = h'((g \circ f)(a))(g \circ f)'(a) = h'\Big(g\big(f(a)\big)\Big)\, g\big(f'(a)\big)f'(a)$. ■

Ejemplo.

(i) Si $f(x) = \cos^3\big(\sqrt{x^2+5}\,\big)$ entonces, $f'(x) = -3\cos^2\big(\sqrt{x^2+5}\,\big)\operatorname{sen}(\sqrt{x^2+5})\frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$, para cada $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Si $f(x) = \mathrm{e}^{\operatorname{sen}(x^2)\cos(\sqrt{x+2})}$ entonces, $f'(x) = \mathrm{e}^{\operatorname{sen}(x^2)\cos(\sqrt{x+2})}[2x\cos(x^2)\cos\big(\sqrt{x+2}\big) - \operatorname{sen}(x^2)\frac{\operatorname{sen}(\sqrt{x+2})}{2\sqrt{x+2}}]$, para cada $x \in \mathbb{R}$.

Nota. Recordamos que si una $f: A \to B$ es biyectiva, la función inversa es la única función $f^{-1}: B \to A$ con la propiedad de que $f^{-1} \circ f = I_A$ y $f \circ f^{-1} = I_B$, donde I_A e I_B denotan la aplicación identidad en A y en B respectivamente. Así, para $a \in A$ y $b \in B$ se tiene que

$$f^{-1}(b) = a \iff f(a) = b.$$

Si $f: A \to \mathbb{R}$ es inyectiva entonces podemos definir $f^{-1}: f(A) \to \mathbb{R}$ (puesto que $f: A \to f(A)$ es una biyección).

DERIVACIÓN: Reglas básicas

El siguiente resultado nos permitirá obtener la derivada de las función inversa de muchas funciones elementales

Teorema (Derivación de la función inversa). Sea $f: A \to \mathbb{R}$ una función inyectiva, y sea $f^{-1}: f(A) \to \mathbb{R}$ su inversa. Si f es derivable en $a \in A \cap A'$, entonces $f(a) \in f(A) \cap [f(A)]'$ y se verifica que f^{-1} es derivable en $f(a)$ si, y solo si, $f'(a) \neq 0$, y f^{-1} es continua en $f(a)$, en cuyo caso

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Dem. Si f es derivable en $a \in A \cap A'$, como $a \in A'$, existe a_n sucesión de $A/\{a\}$ tal que $a_n \to a$ y por la continuidad de f en a se tiene que $f(a_n) \to f(a)$. Además la inyectividad de f garantiza que $f(a_n) \neq f(a)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, por lo que $f(a) \in f(A) \cap [f(A)]'$.

Supongamos ahora que f^{-1} es derivable en $f(a)$. Entonces f^{-1} es continua en $f(a)$. Por otra parte, puesto que $f^{-1} \circ f = I_A$ y la derivada de la función identidad es la función constantemente igual a 1, por la Regla de la cadena, $(f^{-1})'\big(f(a)\big)f'(a) = 1$, de donde $f'(a) \neq 0$ y

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Recíprocamente, si $f'(a) \neq 0$, y f^{-1} es continua en $f(a)$ entonces $\lim_{y \to f(a)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}{y - f(a)} = \frac{1}{f'(a)}$. De hecho, si y_n sucesión de $f(A) \backslash f(a)$ tal que $y_n \to f(a)$ entonces $x_n = f^{-1}(y_n) \to a$ (por ser f^{-1} continua en $f(a)$), de donde

$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(f(a))}{y_n - f(a)} = \frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)} = \frac{1}{\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}} \to \frac{1}{f'(a)}. \quad \blacksquare$$

DERIVACIÓN: Reglas básicas

Objetivo:

Si reemplazamos A por un intervalo I

Teorema (Derivación de la función inversa). Sea $f: A \to \mathbb{R}$ una función inyectiva, y sea $f^{-1}: f(A) \to \mathbb{R}$ su inversa. Si f es derivable en $a \in A \cap A'$, entonces $f(a) \in f(A) \cap [f(A)]'$ y se verifica que

$$f^{-1} \text{ es derivable en } f(a) \iff \begin{cases} f'(a) \neq 0 \\ f^{-1} \text{ es continua en } f(a), \end{cases}$$

podemos eliminar esto

en cuyo caso

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Nos proponemos probar *que si $f: I \to \mathbb{R}$ es una función continua e inyectiva, entonces f^{-1} es continua.*

Itinerario:

$f: I \to \mathbb{R}$ continua + inyectiva $\Rightarrow$ f estrictamente monótona $\Rightarrow f^{-1}: f(I) \to I$ estrictamente monótona
Im f^{-1} intervalo
$\Rightarrow f^{-1}$ continua

En relación con el teorema anterior, la condición $f'(a) \neq 0$ es fácil de comprobar y es un cálculo ineludible para calcular $(f^{-1})'(f(a))$. La continuidad de f^{-1} en $f(a)$ es una condición obviamente necesaria, que sin embargo es más difícil de comprobar. Afortunadamente, no tendremos necesidad de hacerlo cuando estemos tratando con una función $f: I \to \mathbb{R}$ que sea continua e inyectiva en el intervalo I, como mostramos a continuación.

Nota: De ahora en adelante, si $f: I \to \mathbb{R}$ entenderemos que I es un intervalo I, de cualquier tipo si no se especifica otra cosa. De otra parte, $[a, b]$ denotará siempre un intervalo cerrado y acotado no trivial (esto es que $a, b \in \mathbb{R}$ siendo $a < b$).

Teorema. Sea $f:[a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua e inyectiva. Entonces f es estrictamente monótona.

Dem. Supongamos que $f(a) < f(b)$. Por ser f continua, tenemos que $[f(a), f(b)] \subseteq f([a, b])$.
Veamos que $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$. En efecto, si existe u tal que $a < u < b$ siendo $f(u) < f(a) < f(b)$ entonces, por ser f continua ha de existir $v \in]u, b[$ tal que $f(v) = f(a)$, lo que contradice la inyectividad de f. Análogamente si es $f(a) < f(b) < f(u)$. Por tanto, $f([a, b]) \subseteq [f(a), f(b)]$ y así $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$.
Que f es estrictamente creciente se deduce del hecho de que si $a < u < v < b$ entonces $f(u) < f(v)$. Esto se debe a que si $f(u) \geq f(v)$ entonces ha de ser $f(u) > f(v)$ (por la inyectividad) de donde $f(v) < f(u) < f(b)$, y (por la continuidad) existe $w \in]v, b[$ con $f(w) = f(u)$, otra contradicción que prueba que $f(u) < f(v)$.
Finalmente, si $f(a) > f(b)$, entonces un argumento análogo (o la consideración de $-f$) nos permite probar que f es estrictamente decreciente siendo $f([a, b]) = [f(b), f(a)]$. ■

DERIVACIÓN: Reglas básicas

Teorema. Si $f: I \to \mathbb{R}$ una función continua e inyectiva, entonces f es estrictamente monótona.

Dem. Supongamos que $x, y, u, v \in I$, son tales que $x < y$ siendo $f(x) < f(y)$ y que $u < v$ siendo $f(u) > f(v)$. Sea $a \coloneqq \min\{x, u\}$ y $b := \max\{y, v\}$. Se tiene entonces que la restricción $f_{/[a,b]}$ es continua e inyectiva (por serlo f) y sin embargo no es estrictamente monótona, lo que contradice el teorema anterior. ■

Recordamos también el siguiente resultado de continuidad.

Teorema. Si $f: A \to \mathbb{R}$ es una función monótona tal que $f(A)$ es un intervalo entonces f es continua.

Dem. Supongamos que f es creciente. Sea $a \in A$ y sea x_n una sucesión monótona (esto no es restrictivo) de puntos de A tal que $x_n \to a$. Veamos que $f(x_n) \to f(a)$ (lo que prueba la continuidad de f en a).
Si x_n es creciente entonces $x_n \leq a$. Además $f(x_n)$ es una sucesión creciente y acotada por $f(a)$ de donde $f(x_n)$ es convergente (al supremo de todos los $f(x_n)$) y $L := \lim_{n\to\infty} f(x_n) \leq f(a)$.
Si fuese $L < f(a)$ podríamos tomar $L < y < f(a)$ de donde $y \in f(A)$ y así $f(x) = y$ para cierto $x \in A$. Para n suficientemente grande, $f(x_n) \leq f(x) < f(a)$. En consecuencia, $x_n \leq x$ de donde $a \leq x$ (de hecho $a = \sup x_n$). Esto contradice que f sea estrictamente creciente. En consecuencia $L \geq f(a)$ y así $L := \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.
Si fuese x_n decreciente, un argumento similar probaría que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$. Esto prueba la continuidad de f en $a \in A$, que es arbitrario, y por tanto en A. Finalmente si f fuese decreciente haríamos uso de $-f$. ■

Corolario. Si $f: I \to \mathbb{R}$ una función continua e inyectiva entonces f^{-1} es continua.

Dem. Bajo estas hipótesis, sabemos que f ha de ser estrictamente monótona y también que $f(I)$ es un intervalo (esto último por un argumento de continuidad derivado del teorema de los ceros de Bolzano). En consecuencia $f^{-1}: f(I) \to I$ es una función estrictamente monótona cuya imagen es un intervalo y, así, el teorema anterior nos garantiza su continuidad. ■

Corolario. Sea $f: I \to \mathbb{R}$ una función continua e inyectiva. Si f es derivable en $a \in I \cap I'$, entonces se verifica que $f(a) \in f(I) \cap [f(I)]'$ y f^{-1} es derivable en $f(a)$ si, y solo si, $f'(a) \neq 0$ en cuyo caso

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Dem. El resultado se obtiene trivialmente del teorema de la derivada de la función inversa teniendo en presente el corolario anterior. ■

Ejemplos.

(i) La función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ exponencial, esto es $f(x) = e^x$. Es claro que esta función es inyectiva cuya imagen es $\mathbb{R}^+$ y que su derivada (que es ella misma) no se anula. Por tanto, la función inversa $f^{-1}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ que es la función logaritmo neperiano, dada por $f^{-1}(y) = \ln(y)$ es derivable siendo $(f^{-1})'(e^x) = \frac{1}{e^x}$ para cada $x \in \mathbb{R}$ y de ahí que $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{y}$ para cada $y \in \mathbb{R}^+$.

DERIVACIÓN: Reglas básicas

(ii) La función $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ dada por $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ es una biyección estrictamente creciente y derivable. Además $f'(x) = \cos(x) \neq 0,$ para cada $x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,$ por lo que la función inversa, que es la función arco-seno $f^{-1} : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ es derivable en $]-1,1[$ siendo $(f^{-1})'(\operatorname{sen}(x)) = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(x)}}$ $\forall\, x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[.$

En consecuencia, $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}},$ para cada $y \in]-1,1[.$

(iii) La función $f: [0,\pi] \to [-1,1]$ dada por $f(x) = \cos(x)$ es una biyección estrictamente decreciente y derivable. Además $f'(x) = \operatorname{sen}(x) \neq 0,$ para cada $x \in]0,\pi[$ por lo que la función inversa, esto es la función arco-coseno $f^{-1} : [-1,1] \to [0,\pi]$es derivable en $]-1,1[$ siendo $(f^{-1})'(\cos(x)) = -\frac{1}{\operatorname{sen}(x)} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(x)}},$ para cada $x \in]0,\pi[.$

En consecuencia, $(f^{-1})'(\mathrm{y}) = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}},$ para cada $y \in]-1,1[.$

(iv) La función $f: \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \tan(x)$ es una biyección estrictamente creciente y derivable. Además $f'(x) = 1 + \tan^2(x) \neq 0,$ para cada $x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,$ por lo que la función arco-tangente, esto es la función inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ es derivable siendo $(f^{-1})'(\tan(x)) = \frac{1}{1+\tan^2(x)}$ para cada $x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[.$

En consecuencia, $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{1+y^2}$ para cada $y \in \mathbb{R}.$

Todos estos resultados conducen a la siguiente tabla de derivadas inmediatas (o conocidas).

DERIVACIÓN: Derivadas inmediatas

TABLA DE DERIVADAS

Funciones elementales		Funciones compuestas	
Función $f(x)$	Derivada $f'(x)$	Función $f(\mathrm{u})$ con $\mathrm{u}=\mathrm{u}(x)$	Derivada $f'(x)=f'(\mathrm{u}).\mathrm{u}'(x)$
$f(x)=\mathrm{k}$	$f'(x)=0$		
$f(x)=x$	$f'(x)=1$		
$f(x)=x^p \quad p\in\mathrm{R}$	$f'(x)=px^{p-1}$	$f(u)=u^p \quad p\in\mathrm{R}$	$f'(u)=pu^{p-1}u'$
$f(x)=\ln x$	$f'(x)=\frac{1}{x}$	$f(x)=\ln u$	$f'(x)=\frac{u'}{u}$
$f(x)=\log_a x$	$f'(x)=\frac{1}{x\ln a}$	$f(x)=\log_a u$	$f'(x)=\frac{u'}{u\ln a}$
$f(x)=e^x$	$f(x)=e^x$	$f(u)=e^u$	$f'(u)=e^u u'$
$f(x)=a^x$	$f(x)=a^x \ln a$	$f(u)=a^u$	$f'(u)=a^u \ln a\, u'$
$f(x)=g(x)^{h(x)}$	$f(x)=h(x)\,g(x)^{h(x)-1}\,g'(x)+g(x)^{h(x)}\ln g(x)\,h'(x)$		
$f(x)=\operatorname{sen} x$	$f'(x)=\cos x$	$f(x)=\operatorname{sen} u$	$f'(x)=\cos u\, u'$
$f(x)=\cos x$	$f'(x)=-\operatorname{sen} x$	$f(x)=\cos u$	$f'(x)=-\operatorname{sen} u\, u'$
$f(x)=\operatorname{tg} x$	$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}= =1+\operatorname{tg}^2 x$	$f(x)=\operatorname{tg} u$	$f'(x)=\frac{u'}{\cos^2 u}= =(1+\operatorname{tg}^2 u)\,u'$
$f(x)=\operatorname{arcsen} x$	$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$f(x)=\operatorname{arcsen} u$	$f'(x)=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$f(x)=\arccos x$	$f'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$f(x)=\arccos u$	$f'(x)=\frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$f(x)=\operatorname{arctg} x$	$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$	$f(x)=\operatorname{arctg} u$	$f'(x)=\frac{u'}{1+u^2}$
$f(x)=\operatorname{sh} x$	$f'(x)=\operatorname{ch} x$	$f(x)=\operatorname{sh} u$	$f'(x)=\operatorname{ch} u\, u'$
$f(x)=\operatorname{ch} x$	$f'(x)=\operatorname{sh} x$	$f(x)=\operatorname{ch} u$	$f'(x)=\operatorname{sh} u\, u'$
$f(x)=\operatorname{th} x$	$f'(x)=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}= =1-\operatorname{th}^2 x$	$f(x)=\operatorname{th} u$	$f'(x)=\frac{u'}{\operatorname{ch}^2 u}= =(1-\operatorname{th}^2 u)\,u'$
$f(x)=\operatorname{arg\,sh} x$	$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$f(x)=\operatorname{arg\,sh} u$	$f'(x)=\frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$
$f(x)=\operatorname{arg\,ch} x$	$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$f(x)=\operatorname{arg\,ch} u$	$f'(x)=\frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$
$f(x)=\operatorname{arg\,th} x$	$f'(x)=\frac{1}{1-x^2}$	$f(x)=\operatorname{arg\,th} u$	$f'(x)=\frac{u'}{1-u^2}$

DERIVACIÓN: Teoremas esenciales del Cálculo Diferencial

Al igual que las funciones continuas en un intervalo tienen propiedades especiales, las funciones derivables en un intervalo también las tienen. Codificamos estos resultados en una serie de teoremas que serán el germen de todo el Cálculo Diferencial, como veremos más adelante.

Introducimos a continuación la noción de extremo relativo. Recordamos previamente que una función $f\colon A \to \mathbb{R}$ tiene un máximo (o un máximo absoluto) en $a \in A$ cuando $f(x) \leq f(a),$ para cada $x \in A$. Análogamente, f tiene un mínimo (o un mínimo absoluto) en a cuando $f(a) \leq f(x),$ para cada $x \in A$. Un extremo absoluto es un punto en el que f presenta un máximo o un mínimo absoluto.

Definición. Se dice que una función $f\colon A \to \mathbb{R}$ tiene un máximo relativo en $a \in A$ y se verifica que existe $r > 0$ tal que $]a-r, a+r[\subseteq A$ y se verifica que $f(x) \leq f(a),$ para cada $x \in]a-r, a+r[$ (esto es que la restricción de f al intervalo $]a-r, a+r[$ tiene un máximo absoluto en $x = a$).
En caso de que sea $f(a) \leq f(x),$ para cada $x \in]a-r, a+r[\subseteq A$, decimos que f tiene un mínimo relativo en el punto $x = a$.

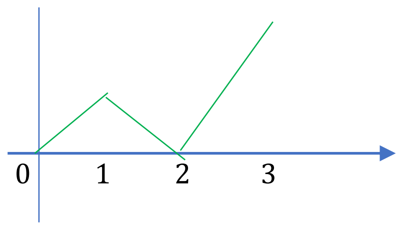
Nota. Estas definiciones pueden ser controvertidas, pues no en todos los textos se presentan de la misma manera.

E. Beltrán, J. F. Ruiz-Hidalgo & M. V. Velasco. Comparando Textos de Cálculo: El caso de la derivada, PNA, 11(4) (2017), 280-306.

E. Celorrio & M. V. Velasco, Estudio comparativo de resultados de Cálculo Diferencial en libros de texto italianos, franceses y españoles AIRES 7 (2017), 33 pp.

Ejemplo. Sea $f\colon [0,3] \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \le x < 1 \\ 2 - x & \text{si} \quad 1 \le x < 2 \\ 2x - 4 & \text{si} \quad 2 \le x \le 3 \end{cases}$$



Esta función presenta en $x = 0$ un mínimo absoluto que no es relativo, en $x = 1$ un máximo relativo que no es absoluto, en $x = 2$ un mínimo relativo y absoluto, y en $x = 3$ un máximo absoluto que no es relativo.

Nota. La condición de que exista $r > 0$ tal que $]a - r, a + r[\subseteq A$ es lo que se denomina que a sea un punto interior del conjunto A. En lo que sigue, el conjunto de tales puntos se denotará por A^0.

Ejemplo. $[a, b]^0 = \ ]a, b[^0 = [a, b[^0 = \ ]a, b]^0 =]a, b[$.

Por tanto, para nosotros, para que un punto $a \in A$ sea un extremo relativo de $f\colon A \to \mathbb{R}$ (esto es un máximo relativo o un mínimo relativo) es un requerimiento que a sea un punto interior al conjunto A.

El siguiente resultado nos proporciona una condición necesaria de extremo relativo en presencia de derivabilidad. Nótese que $A^0 \subseteq A \cap A'$ trivialmente.

Lema. Si una función de $f\colon A \to \mathbb{R}$ presenta un extremo relativo en $a \in A$ y f es derivable en a entonces $f'(a) = 0$.

Dem. Supongamos que f tiene un mínimo relativo en $x = a$. Entonces existe $r > 0$ tal que $]a-r, a+r[\subseteq A$ siendo $f(a) \leq f(x)$, para cada $x \in]a-r, a+r[\subseteq A$. Por tanto $f_a(x) := \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$, si $x \in]a, a+r[$ mientras que $f_a(x) \leq 0$, si $x \in]a-r, a[$. Si f es derivable en $x = a$ se tiene que $f'(a) = \lim_{x \to a^+} f_a(x) = f'_+(x)$, de donde $f'(a) = f'_+(x) \geq 0$. Análogamente $f'(a) = \lim_{x \to a^-} f_a(x) = f'_-(x) \leq 0$. En consecuencia, $f'(a) = 0$. ■

Observación. Si f presenta un extremo relativo en en $a \in A$, entonces o bien f no es derivable en $x = a$ o bien sí lo es, en cuyo caso $f'(a) = 0$. Un punto con estas propiedades recibe el nombre de punto crítico.

El siguiente resultado puede considerarse la piedra angular del Cálculo Diferencial. Sin embargo, se atribuye a un detractor declarado del Cálculo: Michel Rolle. Este matemático era un algebrista interesado en determinar ceros de funciones polinómicas. El teorema de Rolle muta así del Álgebra al Análisis Matemático.

Michel Rolle
1652-1719

C. Suso & M. V. Velasco, Sobre la génesis y evolución del Teorema de Rolle. *Épsilon* **83** (2013), 49-66.

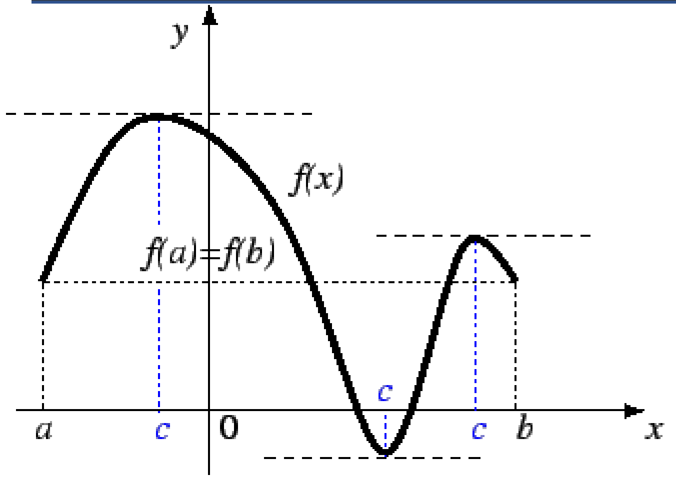
Teorema de Rolle (1691). Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$, derivable en $]a,b[$ y tal que $f(a) = f(b)$. Entonces existe $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = 0$.

Dem. Si f es constante, es claro que f es derivable siendo $f' = 0$, y por lo que no hay nada que probar.
Si f no es constante, al ser continua en $[a,b]$ tenemos por el Teorema de Bolzano-Weierstrass que existen $m, M \in \mathbb{R}$ con $m < M$ siendo $f([a,b]) = [m,M]$. Sean $c_1, c_2 \in [a,b]$ tales que $f(c_1)= m$, y $f(c_2)= M$.
Caso 1: $m \neq (f(a) = f(b))$. Por tanto, $c_1 \in]a,b[$ y es un mínimo relativo y, por el lema anterior, $f'(c_1) = 0$.
Caso 2: $M \neq (f(a) = f(b))$. Por tanto, $c_2 \in]a,b[$ y es un máximo relativo y, por el lema anterior, $f'(c_2) = 0$.
Puesto que $m \neq M$ o bien se da el Caso 1, o bien el Caso 2 (si no se dan ambos), por lo que concluimos que sea cual sea la situación, existe $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = 0$. ■

Observaciones.
(i) El teorema afirma que existe (al menos un) $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = 0$, pero pudiera haber más de uno.

(ii) Hay muchas funciones $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ que son continuas en $[a,b]$ y derivables en $]a,b[$ por lo que si pedimos en el teorema anterior que f sea derivable en $[a,b]$ obtendríamos un resultado mucho más restrictivo.
Este es el caso, por ejemplo de la función $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, para cada $x \in [-1,1]$.

(iii) Sin la continuidad en $[a,b]$, la hipótesis $f(a) = f(b)$ se vuelve irrelevante y no se verifica el resultado.
Por ejemplo, la función $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$ si $x \in]-1,1[$ y $f(-1) = f(1) = 4$, es derivable en $]-1,1[$ y verifica que $f(-1) = f(1)$, pero no existe $c \in]-1,1[$ tal que $f'(c) = 0$.



Interpretación geométrica del teorema de Rolle: Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$, derivable en $]a,b[$ y tal que $f(a)=f(b)$. Entonces existe (al menos un) $c \in]a,b[$ cuya tangente es horizontal.

Corolario. Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ es una función continua en I y derivable en I^0 tal que $f'(x) \neq 0$, para cada $x \in I^0$. Entonces f es inyectiva. En consecuencia f^{-1} es derivable en $f(I^0)$ siendo, para cada $x \in I^0$,

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Dem. No pueden existir $a, b \in I$ tales que $f(a)=f(b)$ porque entonces por el teorema de Rolle, la derivada de f se anularía en algún punto comprendo entre a y b, cosa que no es posible. El resto está ya probado. ■

Observación. El descubrimiento de Rolle, fue percatarse (en un contexto algebraico, tratando con polinomios) de que, a la hora de determinar las soluciones de la ecuación $f(x)=0$, para una función $f\colon I \to \mathbb{R}$ continua en I y derivable en I^0, por cada dos soluciones de f (esto es $a, b \in I$ tales que $f(a)=f(b)=0$) ha de haber una solución de la ecuación $f'(x)=0$ en el interior del intervalo de extremos a y b. De hecho, como consecuencia del Teorema de Rolle podemos probar lo siguiente:

Corolario. Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ es una función continua en I y derivable en I^0. Entonces, por cada n soluciones distintas que tenga la ecuación $f(x) = 0$ en el intervalo I, la ecuación $f'(x) = 0$ ha de tener al menos $n-1$ soluciones distintas en dicho intervalo.

Dem. Si $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ son tales que $f(x_k) = 0$, por el Teorema de Rolle aplicado a $f_{/[x_k, x_{k+1}]}$ obtenemos la existencia de c_k tal que $x_k < c_k < x_{k+1}$ (con $k = 1, \dots, n-1$) tal que $f'(c_k) = 0$. ■

Corolario. Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ es una función continua en I y derivable en I^0. Si $f'(x) \neq 0$ para cada $x \in I^0$, entonces la ecuación $f(x) = 0$, puede tener a lo sumo una solución (y nunca tendrá dos o más soluciones distintas).

Observación. Las funciones $f\colon I \to \mathbb{R}$ derivables en todo I están de manera obvia en las hipótesis de los teoremas anteriores (esto es que son continuas en I y derivables en I^0).

Ejemplo. Determinar el número de soluciones de la ecuación $x + \ln(x) + \operatorname{arctg}(x) = 0$.

Obviamente, la ecuación está definida únicamente para valores de $\mathbb{R}^+$. Como la función $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x + \ln(x) + \operatorname{arctg}(x)$ es tal que $f'(x) \neq 0$ para cada $x \in \mathbb{R}^+$, concluimos que la ecuación dada tiene a lo sumo una solución. Como $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$, concluimos que la ecuación dada posee una única solución.

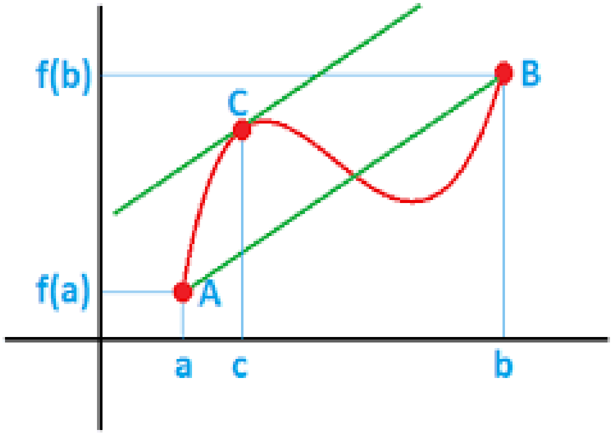
Nos preguntamos ahora qué podríamos decir cuando no exigimos que en el Teorema de Rolle sea $f(a) = f(b)$.

Teorema del valor medio (Lagrange, 1798). Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en $]a,b[$. Entonces existe $c \in]a,b[$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

Dem. Sea $r(x)$ la recta que pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Esto es $r(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. La función $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = f(x) - r(x)$ verifica las hipótesis del Teorema de Rolle. En consecuencia existe $c \in]a,b[$ tal que $h'(c) = 0$. Pero $h'(c) = f'(c) - r'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. ■

Interpretación geométrica. Hay (al menos) un punto $c \in]a,b[$ en el que la recta tangente a la gráfica de f por dicho punto es paralela (esto es que tiene la misma pendiente) que la recta que pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.



Joseph-Louis Lagrange
1736-1813

Observación. Si bien hemos obtenido el Teorema del valor medio a partir del Teorema de Rolle, nótese que a su vez, el Teorema de Rolle también se obtiene trivialmente a partir del Teorema del valor medio. Por tanto estamos ante dos resultados equivalentes.

Nota. Los siguientes conceptos no están exentos de cierta controversia como se muestra en artículos ya citados en estas notas de clase.

Definición Sea $f: A \to \mathbb{R}$. Se dice que:
(i) f es creciente en A cuando para cada $x, y \in A$ tales que $x \leq y$ se verifica $f(x) \leq f(y)$.
(ii) f es estrictamente creciente en A cuando para cada $x, y \in A$ tales que $x < y$ se verifica $f(x) < f(y)$.
(iii) f es decreciente en A si para cada $x, y \in A$ tales que $x \leq y$ se verifica $f(x) \geq f(y)$.
(iv) f es estrictamente decreciente si para cada $x, y \in A$ tales que $x < y$ se verifica $f(x) > f(y)$.

Una función monótona (respectivamente estrictamente monótona) será aquella que o bien es creciente o bien es decreciente (respectivamente estrictamente creciente o estrictamente decreciente).

Observación. Las únicas funciones que son crecientes y decrecientes a la vez son las funciones constantes.

Nota. En algunos textos se definen las funciones $f: A \to \mathbb{R}$ monótonas en un punto $a \in A$ (respectivamente estrictamente monótonas en un punto $a \in A$) como aquellas en las que existe $r > 0$ tal que $]a-r, a+r[\subseteq A$ siendo la restricción $f_{/]a-r,a+r[}$ monótona (resp. estrictamente monótona) en $]a-r, a+r[$.

Gracias al Teorema del valor medio vamos a caracterizar la monotonía de las funciones derivables en un intervalo I (recordamos que I^0 se obtiene a partir de I eliminando el máximo y/o el mínimo de I si lo hubiere).

Teorema. Sea $f: I \to \mathbb{R}$ es una función continua en I y derivable en I^0. Entonces:
(i) f es creciente en $I \Leftrightarrow f'(x) \geq 0$, para cada $x \in I^0$.
(ii) f es decreciente en $I \Leftrightarrow f'(x) \leq 0$, para cada $x \in I^0$.
(iii) f es constante en $I \Leftrightarrow f'(x) = 0$, para cada $x \in I^0$.

Dem. (i) $\Rightarrow$] Para cada $x \in I^0$ resulta que $f'(x) = f'_+(x) = f'_-(x)$, y en particular $f'(x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$, puesto que $f(x+h) - f(x) \geq 0$ al ser $h \geq 0$ y f creciente.
$\Leftarrow$] Sean $a, b \in I$ con $a < b$. Por el Teorema del valor medio aplicado a $f_{/[a,b]}$ existe $c \in]a, b[$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Puesto que $f'(c) \geq 0$, se sigue que $f(b) - f(a) \geq 0$ y de ahí se concluye que f es creciente en I.
(ii) Análoga. También puede aplicarse (i) a la función $-f$.
(iii) Obvia. $\blacksquare$

Ejemplo: Veamos que $e^{x+y} = e^x e^y$, para cada $x, y \in \mathbb{R}$.
Fijamos $a \in \mathbb{R}$ y definimos $f(x) := e^{a+x} e^{-x}$, para cada $x \in \mathbb{R}$. Como $f'(x) = e^{a+x} e^{-x} - e^{a+x} e^{-x} = 0$, obtenemos que f es constante en $\mathbb{R}$. Como $f(0) = e^a$, concluimos que $f(x) = e^a$ para cada $x \in \mathbb{R}$. De ahí que $e^{x+a} = e^x e^a$ y por cambio de nombre de la variable $e^{x+y} = e^x e^y$, para cada $x, y \in \mathbb{R}$.

Nota: No es cierto que f es estrictamente creciente en $I \Leftrightarrow f'(x) > 0$, para cada $x \in I^0$.
Si bien la parte ($\Leftarrow$) sí es cierta (como acabamos de probar) la parte ($\Rightarrow$) no lo es.
Por ejemplo: La función $f(x) = x^3$ es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$ y sin embargo $f'(0) = 0$.
Sin embargo, podemos demostrar lo siguiente:

Corolario. Si $f: I \to \mathbb{R}$ es continua en I, derivable en I^0 y verifica que $f'(x) \neq 0$, para cada $x \in I^0$, entonces:
(i) O bien $f'(x) > 0$, para cada $x \in I^0$, en cuyo caso f es estrictamente creciente en I,
(ii) O bien $f'(x) < 0$, para cada $x \in I^0$, en cuyo caso f es estrictamente decreciente en I.

Dem. (i) Si $f'(x) \neq 0$, para cada $x \in I^0$ entonces, f es inyectiva (por del Teorema de Rolle). Por tanto, f es continua e inyectiva y está definida en un intervalo I, por lo que f es estrictamente monótona en I.
Si f es estrictamente creciente, por el teorema anterior, $f'(x) \geq 0$, para cada $x \in I^0$ y por ser $f'(x) \neq 0$ para cada $x \in I^0$ se concluye que $f'(x) > 0$, para cada $x \in I^0$.
Análogamente, si f es estrictamente decreciente entonces $f'(x) < 0$, para cada $x \in I^0$. ■

Observación. Los resultados anteriores dejan de ser ciertos si la función f no está definida en un intervalo.
Sea $f: [0,1] \cup [2,3] \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = 1$ si $x \in [0,1]$ y $f(x) = -1$ si $x \in [2,3]$. La función f es derivable y su derivada es nula. Sin embargo dicha función no es constante.
Redefiniendo $f(x) = x$ si $x \in [0,1]$ y $f(x) = x - 2$ si $x \in [2,3]$, obtenemos una función con derivada positiva que no es monótona.

Corolario (Teorema del valor intermedio para las derivadas). Sea $f: I \to \mathbb{R}$ un función derivable en I. Entonces el conjunto $f'(I) = \{f'(x) : x \in I\}$ es un intervalo.

Dem. Si $f'(I)$ se reduce a un punto entonces $f'(I)$ es un intervalo trivial. De lo contrario, sean $k_1, k_2 \in f'(I)$ tales que $k_1 \neq k_2$. Si existiese $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $k_1 < \lambda < k_2$ tal que $\lambda \notin f'(I)$ entonces la función $g: I \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) := f(x) - \lambda x$ para cada $x \in I$ sería tal que $g'(x) \neq 0$, para cada $x \in I$ y sin embargo en algunos puntos de I el valor de g' sería negativo (puesto que $k_1 - \lambda < 0$) y en otros sería positivo (pues $k_2 - \lambda > 0$) lo que contradice el resultado anterior. Concluimos así que $[k_1, k_2] \subseteq f'(I)$ lo que prueba que $f'(I)$ es un intervalo. ■

Observaciones.

(i) El resultado anterior nos dice que las funciones que estando definidas en un intervalo no son continuas en él, como por ejemplo la función parte entera, no pueden ser la derivada de ninguna función definida en dicho intervalo.

(ii) Más adelante veremos que el resultado anterior, junto con el Teorema Fundamental del Cálculo, nos permitirán probar que la imagen de un intervalo por una función continua es un intervalo (resultado que ya hemos demostrado como consecuencia del Teorema de los ceros de Bolzano).

Presentamos ahora un criterio muy útil para determinar extremos absolutos y relativos de funciones derivables en intervalos: El Criterio de la derivada primera.

DERIVACIÓN: Teoremas esenciales del Cálculo Diferencial

Corolario (Criterio de la derivada primera). Sea $f: I \to \mathbb{R}$ y sea $a \in I^0$. Supongamos que f es continua en I y derivable en $I\backslash\{a\}$.

(i) Si $f'(x) \leq 0$, para cada $x \in I \cap]-\infty, a[$ y si $f'(x) \geq 0$, para cada $x \in I \cap]a, +\infty[$ entonces f alcanza un mínimo absoluto en $x = a$. Por tanto, cualquier extensión de f alcanza un mínimo relativo en $x = a$.

(ii) Si $f'(x) \geq 0$, para cada $x \in I \cap]-\infty, a[$, y si $f'(x) \leq 0$, para cada $x \in I \cap]a, +\infty[$ entonces f alcanza un máximo absoluto en $x = a$. Por tanto, cualquier extensión de f alcanza un máximo relativo en $x = a$.

Dem. (i) Sea $x \in I \cap]-\infty, a[$. Aplicando el Teorema del valor medio a $f_{/[x,a]}$ obtenemos $c \in]x, a[\subseteq I$ tal que $f(a) - f(x) = f'(c)(a - x) \leq 0$, por lo que $f(a) \leq f(x)$. Análogamente, se prueba que si $x \in I \cap]a, +\infty[$ entonces $f(a) \leq f(x)$. En consecuencia, $f(a) \leq f(x)$ para cada $x \in I$, por lo que f presenta un mínimo absoluto en $x = a$.
(ii) Análoga (o bien aplicando (i) a la función $-f$). ■

Observaciones.

(i) La hipótesis de la derivabilidad de en $I\backslash\{a\}$ hay que entenderla como que si $x \in I\backslash\{a\}$ entonces ha de existir $f'(x)$, pero nada se afirma o se pide en relación con la derivabilidad de f en el punto $x = a$.
Análogo comentario puede hacerse sobre la derivabilidad de f en I^0 (en relación con la derivabilidad de f e I).

(ii) Este resultado suele aplicarse a funciones $f: A \to \mathbb{R}$ en un punto $a \in A$ del que sabemos que para cierto $r > 0$ se tiene que $]a - r, a + r[\subseteq A$, siendo f derivable en $]a - r, a + r[$. Si $f_{/]a-r,a+r[}$ está en las condiciones del resultado anterior concluimos que f tiene un extremo relativo en $x = a$ (que es extremo absoluto de $f_{/]a-r,a+r[}$).

Teorema del valor medio generalizado (Cauchy 1821). Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en $]a, b[$. Entonces existe $c \in]a, b[$ tal que

$$\big(f(b) - f(a)\big)g'(c) = \big(g(b) - g(a)\big)f'(c).$$

Dem. Sea $h(x)\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$h(x) := \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ f(a) & f(b) & f(x) \\ g(a) & g(b) & g(x) \end{vmatrix} = f(b)g(x) + g(a)f(x) - f(a)g(x) - g(b)f(x) + f(a)g(b) - g(a)f(b),$$

para cada $x \in [a, b]$. Es claro que h es continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$, siendo $h(a) = h(b) = 0$ (puesto que dos de las columnas se hacen iguales). Por el teorema de Rolle existe $c \in [a, b]$ tal que $h'(c) = 0$ y este es el elemento buscado, como se comprueba sin dificultad. ■

Observación. Hemos visto que el teorema anterior se obtiene como consecuencia del Teorema de Rolle, pero a su vez el Teorema de Rolle se obtiene del teorema anterior sin más que considerar la función $g(x) = x$, para $x \in]a, b[$. Por tanto el Teorema de Rolle, el teorema del valor medio y el Teorema del valor medio generalizado son principios equivalentes.

Augustin
Louis Cauchy
(1789-1857)

DERIVACIÓN: Teoremas esenciales del Cálculo Diferencial

Los siguientes resultados probablemente sean la herramienta más potente de la que disponemos para el cálculo de límites indeterminados.

Primera Regla de L'Hôpital ($\left[\frac{0}{0}\right]$). Sea I un intervalo y sea $a \in I$. Supongamos que $f, g : I \backslash \{a\} \to \mathbb{R}$ son funciones tales que:

(i) f y g son derivables en $I \backslash \{a\}$,

(ii) $g'(x) \neq 0$, para cada $x \in I \backslash \{a\}$,

(iii) $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$.

Entonces, $g(x) \neq 0$ para cada $x \in I \backslash \{a\}$ y, si $L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, se tiene que se verifica que

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Dem. Definiendo (o redefiniendo si $f(a)$ y $g(a)$ están definidas de otra manera) $f(a) = g(a) = 0$, lo cual no es restrictivo, resulta que $f, g: I \to \mathbb{R}$ y son funciones continuas.
Supongamos que $J = I \cap [a, +\infty[$ es un intervalo no trivial. Entonces como $g'(x) \neq 0$, para cada $x \in J^0$ siendo g es continua se tiene que g es estrictamente monótona en J y puesto que $g(a) = 0$ deducimos que $g(x) \neq 0$ para cada $x \in J \backslash \{a\}$. Sea x_n una sucesión de $J \backslash \{a\}$ tal que $x_n \to a$. Aplicando el teorema del valor medio generalizado a las restricciones de f y g al intervalo $[a, x_n]$ encontramos $c_n \in]a, x_n[$ tal que

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n) - f(a)}{g(x_n) - g(a)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}.$$

En consecuencia, si $\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, puesto que $c_n \to a$ (con $c_n \neq a$) concluimos que $\frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} \to L$.
Así, $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to L$ (puesto que $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}$). Esto prueba que para $L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L \Rightarrow \lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Un razonamiento análogo, ahora sobre el intervalo $\hat{J} = [-\infty, a[\cap I$ (caso de que no sea no trivial) nos permite probar que, para $L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$,

$$\lim_{x\to a^-}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L \Rightarrow \lim_{x\to a^-}\frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Nótese que J y $\hat{J}$ no pueden ser triviales a la vez. Además si alguno de ellos fuese trivial, el límite buscado sería en realidad un límite lateral. En cualquier caso, concluimos que

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

■

Nota. Obviamente el resultado anterior vale para límites laterales (como ya hemos visto). Por tanto bajo las correspondientes hipótesis concluimos que, para $L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$,

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L \Rightarrow \lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = L$$
$$\lim_{x\to a^-}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L \Rightarrow \lim_{x\to a^-}\frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Ejemplo. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] "=" \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \left[\frac{0}{0}\right] "=" \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}.$

Nótese que hemos aplicado la Primera Regla de L'Hôpital dos veces consecutivas (tras comprobar que se dan las hipótesis). Cuando escribimos "=“ queremos dejar constancia (de una forma no convencional) de que la Regla de L'Hôpital nos proporciona una condición suficiente que no tiene por qué ser necesaria.

Ejemplo. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x + e^x - 1} = \left[\frac{0}{0}\right] "=" \lim\limits_{x \to 0} \frac{2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{1 + e^x}.$

(Nótese que las hipótesis de la Primera Regla de L'Hôpital se verifican). El límite de la derecha no existe, y en consecuencia no podemos concluir nada sobre el límite original por este método.

Sin embargo resulta que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x + e^x - 1} = 0$ puesto que $\lim\limits_{x \to 0} \left(x \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0$ mientras que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{x + e^x - 1} = \frac{1}{2}.$

Nota. El siguiente resultado puede ser muy útil para estudiar la derivabilidad de una función en definida en un intervalo, en un punto dado.

Corolario. Sea I un intervalo y sea $a \in I$. Supongamos que $f: I \to \mathbb{R}$ es continua en I y derivable $I \setminus \{a\}$.

(i) Si $\lim_{x \to a} f'(x) = L \in \mathbb{R}$ entonces f es derivable en a y $f'(a) = L$.

(ii) Si $\lim_{x \to a^+} f'(x) = \pm\infty$ o $\lim_{x \to a^-} f'(x) = \pm\infty$ entonces f no es derivable en a.

(iii) Si $a \in I^0$ y si $\lim_{x \longrightarrow a^+} f'(x) \neq \lim_{x \longrightarrow a^-} f'(x)$ entonces f no es derivable en a.

En consecuencia si f es derivable en el intervalo I entonces f' no puede tener discontinuidades evitables ni de salto en ningún punto de I.

Dem. Sean $h, g: I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ las funciones dadas por $h(x) = f(x) - f(a)$ y $g(x) = x - a$. Nótese que estas funciones verifican las hipótesis de la Primera Regla de L'Hôpital. En consecuencia

$$\lim_{x \to a^\pm} \frac{h'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a^\pm} f'(x) = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \Rightarrow \lim_{x \to a^\pm} \frac{h(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^\pm} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

Lo que se afirma se deduce de este hecho. ■

Ejemplo. La función $f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$ no es derivable en $x = 0$, puesto que $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = +\infty$.

Observación. El hecho de que f' no puede tener discontinuidades evitables ni de salto en ningún punto de I no nos permite concluir que f' es continua.

Ejemplo. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Esta función es derivable en $\mathbb{R}$. De hecho se comprueba sin dificultad que

$$f'(x) := \begin{cases} 2x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = 0.$$

Sin embargo, la función f' presenta una discontinuidad esencial en $x = 0$.
Este ejemplo también pone de manifiesto que el resultado anterior no permite concluir nada cuando el $\lim_{x\to a} f'(x)$ no existe (sin que sea $\lim_{x\to a} f'(x) = \pm\infty$).

Observación. La Primera Regla de L'Hôpital sigue siendo válida cuando I es un intervalo no acotado y tomamos límites en el infinito, como vemos a continuación.

Lema. Sea $b > 0$ y sea $f : [b, +\infty[\to \mathbb{R}$. Entonces, si $L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ se tiene que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = L.$$

Dem. Sea $g :]0, \frac{1}{b}] \to \mathbb{R}$, la función $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$, para $0 < x \leq \frac{1}{b}$. Puesto que

$$x_n \longrightarrow +\infty \text{ con } x_n \in [b, +\infty[\Leftrightarrow y_n = \frac{1}{x_n} \longrightarrow 0 \text{ con } y_n \in]0, \tfrac{1}{b}]$$

siendo además $f(x_n) = g(y_n)$, se obtiene que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to 0^+} g(x) = L$. ■

Corolario. Sea I es un intervalo no mayorado y $f, g : I \to \mathbb{R}$ funciones tales que:

(i) f y g son derivables en I,

(ii) $g'(x) \neq 0$, para cada $x \in I$,

(iii) $\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow+\infty} g(x) = 0$.

Entonces, existe $b > 0$, tal que $[b, +\infty[\subseteq I$ y $g(x) \neq 0$ para cada $x > b$. Además, si $L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ se tiene que,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Un resultado análogo al anterior puede establecerse para funciones en dominios no minorados y límites en $-\infty$). Resultado que puede probarse sin dificultad mediante las funciones auxiliares $\tilde{f}(x) = f(-x)$ y $\tilde{g}(x) = g(-x)$, a las que se el aplica el corolario anterior.

Dem. Como g es inyectiva en I (por ser $g' \neq 0$ en I) existe $b \in I$ tal que $b > 0$ siendo $g(x) \neq 0$ en $[b,\infty[$.
Como I no está mayorado, las funciones $\tilde{f}, \tilde{g} :]0, \frac{1}{b}] \to \mathbb{R}$, dadas por $\tilde{f}(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ y $\tilde{g}(x) = g\left(\frac{1}{x}\right)$, para cada $x \in]0, \frac{1}{b}]$ están bien definidas. Además:

(i) $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$ son funciones derivables en $]0, \frac{1}{b}]$ siendo $\widetilde{f}'(x) = -f'\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2}$ y $\widetilde{g}'(x) = -g'\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2}$, para cada $x \in]0, \frac{1}{b}]$.

(ii) $\widetilde{g}'(x) \neq 0$, para cada $x \in]0, \frac{1}{b}]$.

(iii) $\lim\limits_{x\to 0^+} \tilde{f}(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \tilde{g}(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

En consecuencia, por la Primera Regla de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\widetilde{f}'(x)}{\widetilde{g}'(x)} = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)} = L.$$

Pero

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\widetilde{f}'(x)}{\widetilde{g}'(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f'\left(\frac{1}{x}\right)}{g'\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

mientras que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{g\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Por tanto,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

La Segunda Regla de L'Hôpital nos permitirá tratar las indeterminaciones del tipo $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Su dificultad reside en el hecho de que si $\lim_{x\longrightarrow a} f(x) = \lim_{x\longrightarrow a} g(x) = \infty$, entoces no podemos decir que f y g son funciones continuas en $[a,x]$ o en $[x,a]$ para aplicar el Teorema del valor medio generalizado. Veamos cómo "solucionarlo".

Lema. Sean $a,b,u,v,L \in \mathbb{R}$ tales que $b \neq 0$ y $b-v \neq 0.$ Entonces, las siguientes igualdades se verifican:

$$\frac{a}{b} = \frac{a-u}{b-v}\left(1-\frac{v}{b}\right)+\frac{u}{b}$$

$$\frac{a}{b} - L = \left(\frac{a-u}{b-v}-L\right)\left(1-\frac{v}{b}\right)+\frac{u-vL}{b}.$$

Dem. (i) se obtiene sin dificultad.

$$\frac{a-u}{b-v}\left(1-\frac{v}{b}\right)+\frac{u}{b} = \frac{a-u}{b-v}+\frac{1}{b}\left(u-v\,\frac{a-u}{b-v}\right) = \frac{a-u}{b-v}+\frac{1}{b}\,\frac{ub-uv-va+vu}{b-v} = \frac{a-u}{b-v}+\frac{1}{b}\,\frac{ub-va}{b-v} =$$

$$\frac{1}{b-v}\left(a-u+\frac{ub-va}{b}\right) = \frac{(b-v)a}{b(b-v)} = \frac{a}{b}.$$

(ii) También es trivial:

$$\frac{a}{b} - L = \text{(i)} = \frac{a-u}{b-v}\left(1-\frac{v}{b}\right)+\frac{u}{b} - L = \frac{a-u}{b-v}\left(1-\frac{v}{b}\right)+\frac{u}{b} - L + L\left(1-\frac{v}{b}\right) - L\left(1-\frac{v}{b}\right) =$$

$$\left(\frac{a-u}{b-v}-L\right)\left(1-\frac{v}{b}\right)+\frac{u}{b} - L + L\left(1-\frac{v}{b}\right) = \left(\frac{a-u}{b-v}-L\right)\left(1-\frac{v}{b}\right)+\frac{u-vL}{b}. \quad \blacksquare$$

Segunda Regla de L'Hôpital ($\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$). Sea I un intervalo y sea $a \in I$. Supongamos que $f, g : I \backslash \{a\} \to \mathbb{R}$ son funciones tales que:
(i) f y g son derivables en $I \backslash \{a\}$,
(ii) $g'(x) \neq 0$, para cada $x \in I \backslash \{a\}$,
(iii) $\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = \lim_{x \longrightarrow a} g(x) = \pm\infty$.

Entonces, existe $r > 0$ tal que $g(x) \neq 0$ para cada $x \in I \cap]a-r, a+r[\backslash \{a\}$ y, si $L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, se verifica que

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Dem. De la condición $\lim_{x \longrightarrow a} g(x) = \pm\infty$ se obtiene la existencia de $r > 0$ tal que para cada $x \in I \cap]a-r, a+r[\backslash \{a\}$ Se verifica que $g(x) \neq 0$.

Caso I: Supongamos que $a \in I'_+$ y que $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}$. Veamos que $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

En esta situación, dado $\varepsilon > 0$, existe $c \in I$ con $c > a$ tal que $\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - L\right| < \frac{\varepsilon}{4}$, para cada $x \in]a, c] \subseteq I \backslash \{a\}$.

Como $\lim_{x \longrightarrow a^+} |g(x)| = +\infty$ también existe $\delta > 0$ tal que $a + \delta < c$ y $|g(x)| > \max\{|g(c)|, |f(c) - g(c)L|\}\frac{2}{\varepsilon}$ para cada $x \in I \cap]a, a+\delta[\subseteq]a, c[$. Por tanto, para tales x,

$$\left|\frac{g(c)}{g(x)}\right| < 1 \text{ y } \left|\frac{f(c)-g(c)L}{g(x)}\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\overbrace{\underbrace{a < x < a+\delta}_{} < c}^{}$$

Sea $x \in]a, a+\delta[\subseteq]a, c[$. Aplicando el Teorema del valor medio generalizado a las funciones $f_{[x,c]}$ y $g_{[x,c]}$ existe $u_x \in]x, c[$ tal que

$$\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)} = \frac{f\prime(u_x)}{g\prime(u_x)}.$$

Por el lema anterior $(a = f(x), b = g(x),\ u = f(c),\ v = g(c))$ tenemos que

$$\frac{f(x)}{g(x)} - L = \left(\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)} - L\right)\left(1 - \frac{f(c)}{g(x)}\right) + \frac{f(c)-g(c)L}{g(x)}$$

Así, $x \in]a, a+\delta[\subseteq]a, c[$,

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| = \left|\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)} - L\right|\left|1 - \frac{f(c)}{g(x)}\right| + \left|\frac{f(c)-g(c)L}{g(x)}\right| =$$

$$\left|\frac{f\prime(u_x)}{g\prime(u_x)} - L\right|\left|1 - \frac{f(c)}{g(x)}\right| + \left|\frac{f(c)-g(c)L}{g(x)}\right| \leq \left|\frac{f\prime(u_x)}{g\prime(u_x)} - L\right|\left(1 + \left|\frac{f(c)}{g(x)}\right|\right) + \left|\frac{f(c)-g(c)L}{g(x)}\right| \leq \frac{\varepsilon}{4}2 + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Esto prueba que $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Caso II: Supongamos que $a \in I'_-$ y que $\lim\limits_{x\to a^-} \frac{f\prime(x)}{g\prime(x)} = L \in \mathbb{R}$. Análogamente, se prueba que $\lim\limits_{x\to a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

De los dos casos anteriores se sigue que

$$\lim_{x\to a} \frac{f\prime(x)}{g\prime(x)} = L \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Caso III: Supongamos que $a \in I'_+$ y que $\lim_{x\to a^+} \frac{f\prime(x)}{g\prime(x)} = +\infty.$ Veamos que $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty.$

Razonando análogamente, dado $M > 0$, existe $c \in I$ con $c > a$ tal que $\left|\frac{f\prime(x)}{g\prime(x)}\right| > M,$ para cada $x \in]a, c] \subseteq I$.

Además, como $\lim_{x\longrightarrow a^+} |g(x)| = +\infty$ también existe $\delta > 0$ tal que $a + \delta < c$ y se verifica que

$$|g(x)| > \max\{2|g(c)|, 2|f(c)|\} \qquad \forall x \in]a, a+\delta[.$$

$$\overbrace{\underbrace{a < x < a+\delta}_{} < c}^{}$$

Así, $\left|\frac{g(c)}{g(x)}\right| < \frac{1}{2}$ y $\left|\frac{f(c)}{g(x)}\right| < \frac{1}{2}$ si $x \in]a, a+\delta[$

Por tanto, si $x \in]a, a+\delta[,$ por el lema anterior $(a = f(x), b = g(x), \ u = f(c), \ v = g(c))$ tenemos que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)}\left(1 - \frac{f(c)}{g(x)}\right) + \frac{f(c)}{g(x)}.$$

En consecuencia, si $x \in]a, a+\delta[\subseteq I$ entonces por el TVM generalizado en $[x, c]$ existe u_x entre x y c siendo

$$\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)} = \frac{f'(u_x)}{g'(u_x)}.$$

Así, $$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \geq \left|\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)}\left(1 - \frac{f(c)}{g(x)}\right)\right| - \left|\frac{f(c)}{g(x)}\right| = \left|\frac{f'(u_x)}{g'(u_x)}\right| \left|1 - \left|\frac{f(c)}{g(x)}\right|\right| - \left|\frac{f(c)}{g(x)}\right| \geq \frac{M}{2} - \frac{1}{2},$$ de donde $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty.$

Caso IV: Supongamos que $a \in I'_-$ y que $\lim_{x\to a^-} \frac{f\prime(x)}{g\prime(x)} = \pm\infty.$ De forma análoga se prueba que $\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty.$

De los casos III y IV (sustituyendo f por $-f$ si fuese necesario) permiten concluir lo siguiente:

$$\lim_{x\to a} \frac{f\prime(x)}{g\prime(x)} = \pm\infty \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty. \qquad \blacksquare$$

Corolario. Sea I es un intervalo no mayorado y sean $f, g : I \to \mathbb{R}$ funciones tales que:
(i) f y g son derivables en I,
(ii) $g'(x) \neq 0$, para cada $x \in I$,
(iii) $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = \pm\infty$.

Entonces, existe $b > 0$, tal que $[b, +\infty[\subseteq I$ y $g(x) \neq 0$ para cada $x > b$. Además si $L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ se tiene que,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Dem. Como g es inyectiva en I (por ser $g' \neq 0$) existe $b \in I$ tal que $b > 0$ siendo $g(x) \neq 0$ en $[b, \infty[$.
Como I no está mayorado, las funciones $\tilde{f}, \tilde{g} :]0, \frac{1}{b}] \to \mathbb{R}$, dadas por $\tilde{f}(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ y $\tilde{g}(x) = g\left(\frac{1}{x}\right)$, para cada $x \in]0, \frac{1}{b}]$ están bien definidas. Además, $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$ son funciones derivables en $]0, \frac{1}{b}]$ siendo $\lim_{x \to 0^+} \frac{\widetilde{f'}(x)}{\tilde{g}'(x)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{f'\left(\frac{1}{x}\right)}{g'\left(\frac{1}{x}\right)}$ y ya hemos visto que $\lim_{x \to 0^+} \frac{f'\left(\frac{1}{x}\right)}{g'\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ y que $\lim_{x \to 0^+} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{g\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$.
En consecuencia, por la Segunda Regla de L'Hôpital concluimos que si $L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ entonces

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\widetilde{f'}(x)}{\tilde{g}'(x)} = L \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)} = L.$$

En consecuencia, $\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$ ■

Observación. Un resultado análogo puede establecerse para funciones $f, g : I \to \mathbb{R}$ definidas en un intervalo I no minorado y límites en $-\infty$. Para la prueba bastaría considerar el intervalo $-I := \{x \in \mathbb{R} : -x \in I\}$ y las funciones las funciones auxiliares dadas por $\tilde{f}(x) = f(-x)$ y $\tilde{g}(x) = g(-x)$, para cada $x \in -I$. En concreto obtendríamos el siguiente resultado.

Corolario. Sea I es un intervalo no minorado y sean $f, g : I \to \mathbb{R}$ funciones tales que:

(i) f y g son derivables en I,

(ii) $g'(x) \neq 0$, para cada $x \in I$,

(iii) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} g(x) = \pm\infty$.

Entonces, existe $b > 0$, tal que $]-\infty, b] \subseteq I$ y $g(x) \neq 0$ para cada $x < b$. Además si $L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ se tiene que,

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$