Ejercicios Exámenes MNI

1. a) Demuestra que toda función de clase C^1 es estable.

Sea f una función de clase C^1, es decir, derivable y con su derivada continua en el intervalo en el que esté definida. Que f sea estable en $x_0 \in I$ se traduce en que $\exists \delta, M \in \mathbb{R}$ con $\delta > 0$, $M > 0$ y $\forall x \in I$ tq $|x-x_0| < \delta$ se cumple $\frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|} < M \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| < M|x-x_0|$. Usando el TVM (estamos en condiciones ya que $f \in C_1$),

$$f:[a,b] \to \mathbb{R}$$

$$\exists c \in (a,b): f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Leftrightarrow \underbrace{f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)}_{\text{Ahora lo aplicamos a } x \text{ y } x_0}$$

$$f(x)-f(x_0) = f'(c)(x-x_0) \quad \text{con } c \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$$

Tomamos valores absolutos:

$$|f(x)-f(x_0)| = |f'(c)||x-x_0|$$

Como f' es continua y está definida en un intervalo alcanza un máximo y un mínimo por el teorema de Weierstrass:

$$\max_{x_0-\delta < x < x_0+\delta} |f'(x)| = M$$

$$f'(c) \leq \max_{x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]} |f'(x)|$$

Si tomamos $M' = M+1$, es evidente que $|f(x)-f(x_0)| = |f'(c)||x-x_0| < M'|x-x_0| \Rightarrow \underbrace{|f(x)-f(x_0)| < M'|x-x_0|}_{\text{Es estable}}$

b) $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ $f(x) := -\sqrt{x}$

Demostrar que no es estable en cero.

Que sea estable en 0 significa que $\sup_{0<|x-0|<\delta} \frac{|f(x)-f(0)|}{|x-0|} < M$, sin embargo, $\lim_{x \to 0^+} \frac{|f(x)|}{|x|} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty \Rightarrow$ No existe un M superior a $+\infty$.

Concluimos que no es estable.

2. a) ¿Es toda función estable de clase C^1?

No tiene por qué. Veamos $f(x) = |x|$. Es claro que no es derivable en $x=0$ pues $f(x) := \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ y $f'(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ (sus derivadas laterales no coinciden) y por lo tanto no es de clase C^1. Veamos que es estable en todo su dominio. Sea $x_0 \in Dom(|x|)$ un punto cualquiera de su dominio:

$$\sup_{0<|x-x_0|<\delta} \frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|} = \sup_{0<|x-x_0|<\delta} \frac{||x|-|x_0||}{|x-x_0|} \leq \sup_{0<|x-x_0|<\delta} \frac{|x-x_0|}{|x-x_0|} = 1$$ Tomamos M como 1 y ya se cumple la estabilidad

b) $f(x) = 2\log x, \ (x>0)$

Calculemos su condicionamiento relativo:

$$C(f,x_0) = \frac{|f'(x_0)x_0|}{|f(x_0)|} = \frac{|\frac{2}{x_0}\cdot x_0|}{|2\log x|} = \frac{2}{|2\log x|}$$ $2\log x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{2}{|2\log x|} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2}{|2\log x|} = +\infty \Rightarrow$$ Mal condicionamiento en las inmediaciones de $x=1$

Si $x=1$, hemos de hallar el condicionamiento absoluto:

$$C(f,x_0) = |f'(x_0)| = \left|\frac{2}{x}\right| \Rightarrow$$ En $x=1$ el condicionamiento será igual a 2, por lo que hay buen condicionamiento.

3. a) Comprobar que $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ con $f(x) := 3\sqrt{x}$ no es estable en cero.

$x_0 = 0$. Sea $x \in \mathbb{R}_+$ tq $0<|x-x_0|<\delta$ con $\delta>0$. Por la definición de estabilidad, f será estable en $x_0=0$ si $\sup_{0<|x-x_0|<\delta} \frac{|f(x)-f(0)|}{|x-0|} < M$ con $M>0$. Sin embargo:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|3\sqrt{x}|}{|x|} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3}{\sqrt{x}} = +\infty \Rightarrow$$ No existe un M que satisfaga la definición.

b) $f(x) = 4\log x \ (x>0)$,

Condicionamiento relativo:

$$C(f,x_0) = \frac{|f'(x_0)x_0|}{|f(x_0)|} = \frac{|\frac{4}{x_0}\cdot x_0|}{|4\log x_0|} = \frac{4}{|4\log x_0|} = \frac{1}{|\log x_0|}$$

$$\log x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{|\log x_0|} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{|\log x_0|} = +\infty \Rightarrow$$ Mal condicionamiento en las inmediaciones de $x=1$

Para $x=1$, condicionamiento absoluto:

$$C(f,x_0) = |f'(x_0)| = \left|\frac{4}{x_0}\right| \Rightarrow$$ En $x=1$ el condicionamiento será bueno ya que valdrá 4 y se puede acotar

4. Demuestra que:

i) $|x - tr(x)| \leq b^{e-t}$

ii) $\frac{|x-tr(x)|}{|x|} \leq \varepsilon_M$

$x = (-1)^s b^e \sum_{n=1}^{\infty} a_n b^{-n} \in \mathbb{R}$

$\mathbb{F}(b,t,L,U)$, $L \leq e \leq U$

Recordemos que $tr(x) = (-1)^s \cdot b^e \cdot (0.a_1 \ldots a_t)$. Entonces:

$$|x - tr(x)| = |(-1)^s \cdot b^e \cdot (0.0\ldots 0a_{t+1}\ldots)| = b^e \cdot (0.0\ldots 0a_{t+1}\ldots) =$$

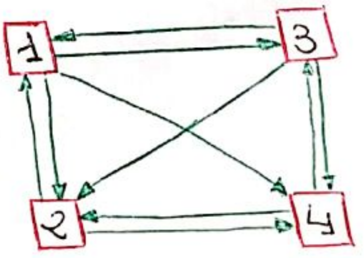
$$b^e \cdot \sum_{n=t+1}^{\infty} a_n b^{-n} \leq b^e \cdot (b-1) \sum_{n=t+1}^{\infty} \left(\frac{1}{b}\right)^n = b^e \cdot (b-1) \cdot \frac{\frac{1}{b^{t+1}}}{1-\frac{1}{b}} = b^e \cdot \frac{b}{b^{t+1}} = b^{e-t}$$

ii) $\frac{|x-tr(x)|}{|x|} \underset{\uparrow}{\leq} \frac{6^{e-t}}{6^{e}\sum_{n=1}^{\infty} a_n 6^{-n}} \underset{\uparrow}{\leq} \frac{6^{e-t}}{6^{e}\cdot\frac{1}{6}} = \frac{6^{e-t}}{6^{e-1}} = 6^{1-t} = \varepsilon_M$

Usamos el resultado anterior

Acotamos superiormente reduciendo el denominador

5.



Modelizar matemáticamente

Mediremos la relevancia de cada página que denotaremos como x_i, la cual será igual a la suma de las relavancias de las páginas que conectan con ella. Además, cada x_i deberá ir dividida por el número de enlaces que salen de la página i:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} \\ x_2 = \frac{x_1}{3} + \frac{x_3}{3} + \frac{x_4}{2} \\ x_3 = \frac{x_1}{3} + \frac{x_4}{2} \\ x_4 = \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 6x - 3y - 2z = 0 \\ 2x - 6y + 2z + 3t = 0 \\ 2x - 6z + 3t = 0 \\ 2x + 3y + 2z - 6t = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 2x + 3y + 2z - 6t = 0 \\ -3y - 8z + 9t = 0 \\ -9y + 9t = 0 \\ -12y - 8z + 18t = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{l} 2x + 3y + 2z - 6t = 0 \\ y - t = 0 \Longrightarrow y = t \\ \left.\begin{array}{l} -8z + 6t = 0 \\ -8z + 6t = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow z = \frac{6}{8}t \end{array} \quad x = \frac{6}{8}t$$

$$x_1 = \frac{6}{8}x_4 \quad x_2 = x_4 \quad x_3 = \frac{6}{8}x_4 \quad x_4 = x_4$$

Las más relevantes serán x_2 y x_4, y las que menos x_1 y x_3.

6. $\{x_n\}_{n\geq 0}$ $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ $x_n := \int_0^1 \frac{x^n}{x+5}\,dx$

Justificar que verifica la recurrencia

$x_0 = \log(6/5)$ y $n \geq 1 \Longrightarrow x_n = \frac{1}{n} - 5x_{n-1}$

(Usar $\frac{x}{x+5} = 1 - \frac{5}{x+5}$ multiplicando por x^{n-1} e integrando)

$$\frac{x}{x+5} = 1 - \frac{5}{x+5} \underset{\text{Multiplicamos por } x^{n-1}}{\Longleftrightarrow} \frac{x^n}{x+5} = x^{n-1} - \frac{5x^{n-1}}{x+5}$$

$$\underset{\text{Integramos}}{\Longleftrightarrow} \underbrace{\int_0^1 \frac{x^n}{x+5}}_{x_n} = \underbrace{\int_0^1 x^{n-1}}_{\left[\frac{x^n}{n}\right]_0^1 = \frac{1}{n}} - 5\underbrace{\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{x+5}}_{x_{n-1}} \Longleftrightarrow \boxed{x_n = \frac{1}{n} - 5x_{n-1}}$$

Recurrencia demostrada

$$x_0 = \int_0^1 \frac{1}{x+5}\,dx = \left[\ln|x+5|\right]_0^1 = \ln 6 - \ln 5 = \ln(6/5)$$

$$x_1 = \frac{1}{n} - 5x_0$$

$$x_2 = \frac{1}{n} - 5\left(\frac{1}{n} - 5x_0\right) = -\frac{4}{n} + 25x_0$$

$$x_3 = \frac{1}{n} - 5\left(-\frac{4}{n} + 25x_0\right) = \frac{21}{n} - 125x_0$$

$$f_n(x_0) = (-1)^{s+1}\left(\frac{\alpha_n}{n} - 5^n x_0\right)$$

(✱)

$$c(f_n, x_0) = \left|\frac{f_n'(x_0)\,x_0}{f_n(x_0)}\right| = \left|\frac{5^n x_0}{x_n}\right|$$

$$\underbrace{\frac{x^{n-1}}{x+5} \geq \frac{x^n}{x+5}}_{\text{La integral conserva el orden}} \quad \text{pues } \frac{1}{x+5} = \frac{1}{x+5} \text{ y } x^{n-1} \geq x^n \text{ ya que } x \in [0,1]$$

$$\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{x+5} \geq \int_0^1 \frac{x^n}{x+5} \Leftrightarrow x_{n-1} \geq x_n \text{ Es decreciente}$$

Además, es de términos positivos ya que $f(x) = \frac{x^n}{x+5}$ es positiva en $x \in [0,1]$, por lo que $\{x_n\}$ está minorada por el 0 y al ser decreciente, es convergente.

$$\cancel{x_n = \frac{1}{n} - 5x_{n-1} \Leftrightarrow x_{n-1} = \frac{1}{5n} - \frac{x_n}{5} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ pues}}$$

Retomamos (✱): $\left|\frac{-5^n x_0}{x_n}\right| \underset{\uparrow}{\geq} \left|\frac{-5^n x_0}{x_0}\right| = 5^n \Rightarrow$ Diverge para $n \to \infty$, condicionamiento muy malo

Aplicamos que $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es decreciente, $x_0 \geq x_n$

---

7. Lo mismo pero con $x_n := \int_0^1 \frac{x^n}{x+4}\,dx$ con $x_0 = \log(5/4)$ y $n \geq 1 \Rightarrow x_n = \frac{1}{n} - 4x_{n-1}$

(Usar $\frac{x}{x+4} = 1 - \frac{4}{x+4}$, multiplicar por x_{n-1} e integrar)

$$x_0 := \int_0^1 \frac{1}{x+4}\,dx = \left[\ln|x+4|\right]_0^1 = \ln 5 - \ln 4 = \ln(5/4) \quad \text{Se verifica}$$

$$\frac{x}{x+4} = 1 - \frac{4}{x+4} \Leftrightarrow \frac{x^n}{x+4} = x^{n-1} - \frac{4x^{n-1}}{x+4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\int_0^1 \frac{x^n}{x+4}\,dx}_{x_n} = \underbrace{\int_0^1 x^{n-1}\,dx}_{\left[\frac{x^n}{n}\right]_0^1 = \frac{1}{n}} - 4\underbrace{\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{x+4}}_{x_{n-1}} \Leftrightarrow \boxed{x_n = \frac{1}{n} - 4x_{n-1}}$$

Se verifica la recurrencia

Veamos que $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es decreciente:

$$\underbrace{\frac{x^n}{x+4} \leq \frac{x^{n-1}}{x+4}}_{\text{La integral conserva el orden}} \Rightarrow \text{Es cierto ya que } \frac{1}{x+4} = \frac{1}{x+4} \text{ y } x^n \leq x^{n-1} \text{ con } x \in [0,1]$$

$$\Downarrow$$

$$\int_0^1 \frac{x^n}{x+4}\,dx \leq \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{x+4}\,dx \Leftrightarrow x_n \leq x_{n-1}$$

Ahora buscamos $f_n(x_0) = x_n$:

$$x_0 = \ln(5/4)$$

$$x_1 = \frac{1}{n} - 4x_0$$

$$x_2 = \frac{1}{n} - 4\left(\frac{1}{n} - 4x_0\right) = -\frac{3}{n} + 16x_0$$

$$x_3 = \frac{1}{n} - 4\left(-\frac{3}{n} + 16x_0\right) = \frac{13}{n} - 64x_0$$

$$\boxed{f_n(x_0) = (-1)^{s+1}\left(\frac{\alpha_n}{n} - 4^n x_0\right)}$$ α_n es irrelevante

Estudiamos su condicionamiento:

$$c(f_n, x_0) = \frac{|f_n'(x_0)x_0|}{|f_n(x_0)|} = \frac{|-4^n x_0|}{|x_n|} \underset{\uparrow}{\geq} \frac{|-4^n x_0|}{|x_0|} = 4^n \Rightarrow \text{Diverge cuando } n \to \infty$$

(Mal condicionamiento)

Aplicamos que $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es decreciente y por lo tanto, $|x_0| \geq |x_n|$

8. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37/\pi \\ 24.67 \\ 0 \end{bmatrix} = b$ Jacobi $\begin{cases} x_0 \text{ dado} \\ n \geq 1 \Rightarrow x_n = M^{-1}N x_{n-1} + M^{-1} b \end{cases}$

a) ¿$\|M^{-1}N\|_1$?

$Ax=b \Rightarrow$ Este es el sistema. Comprobemos que A es regular: $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 36+2+3-8 \neq 0 \Rightarrow$ A es regular, el SEL es comp. det. y podemos aplicar Jacobi. Necesitamos hallar M y N con M regular tales que $A=M-N$.

En el método de Jacobi $M=D$ y $N=E+F$:

$$M=D=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad N=\begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D^{-1}=M^{-1}=\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$M^{-1}N = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\|M^{-1}N\|_1 = \max_{j=1,\dots,N} \sum_{i=1}^{N} |a_{ij}| = \left|-\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3} = 0.\hat{6}$$

b) Deduce que $\rho(M^{-1}N)<1$.

$\cancel{x_n = Bx_{n-1} + c}$

$\cancel{x_n - x = Bx_{n-1} + (I-B)x - x}$

Por un corolario del tema 1 sabemos que si $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $\|\cdot\|$ es norma inducida y $\|A\|<1$, entonces $\rho(A)<1$.

En este caso, $\|M^{-1}N\|_1 < 1$, por lo que se deduce fácilmente que $\rho(M^{-1}N)<1$.

c) ¿Es diag. estr. dominante A? ¿Contradice este hecho el resultado anterior?

Que A sea diag. estr. dominante significa que $\sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{N} |a_{ij}| < |a_{ii}|$ $\forall i \in \{1,\dots,N\}$. En este caso A no lo es debido a su primera fila. Por una proposición del tema 2 sabemos que si A es ~~est~~. diag. estr. dom., entonces tanto Jacobi como Gauss-Seidel convergen a la solución del sistema para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}^N$, pero del recíproco no se sabe nada por lo que lo obtenido no es contradictorio.

9. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = b$ Gauss-Seidel

$$\left| \begin{array}{l} x_0 \text{ dado} \\ n \geq 1 \Rightarrow x_n = M^{-1} N x_{n-1} + M^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

a) Probar que el método es consistente con el sistema.
Hemos de recordar que en Gauss-Seidel, buscamos que A (matriz regular) se escribe como $A = M - N$ con M regular y N no nula. $M = D - E$ y $N = F$. Es evidente que M es regular ya que $\det(M) \neq 0$. Para que el método sea consistente, hemos de probar que

$c = (I - B) A^{-1} b$:

$$c = (I - M^{-1}N) A^{-1} b = (M^{-1}M - M^{-1}N) A^{-1} b = M^{-1}(M-N)A^{-1}b =$$

$= M^{-1} A A^{-1} b = M^{-1} b \Rightarrow$ Que justo es c ✓

b) Calcula $\rho(M^{-1}N)$

$M = D - E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ $N = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$|M| = 4$ $M^{-1} = \frac{1}{|M|} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}$

$M^{-1}N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -3/2 \end{pmatrix}$

$\det(M^{-1}N - \lambda I_2) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & -2 \\ 0 & -\frac{3}{2} - \lambda \end{bmatrix} = \lambda \left(\frac{3}{2} + \lambda \right)$ $\to \lambda = 0$, $\to \lambda = -\frac{3}{2}$ Valores propios

$\rho(M^{-1}N) = 1.5$

c) ¿Qué ocurre con la convergencia del método?
Por una proposición vista en clase, los métodos iterativos de esta forma (que son consistentes con el sistema) solo son convergentes a la solución del sistema $\forall x_0 \in \mathbb{R}^N$ estimación inicial sí y solo si $\rho(M^{-1}N) < 1$, lo cual no ocurre en este caso y por ello podemos concluir que no hay convergencia con este método.

10. $\begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\pi} \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ Jacobi $\left| \begin{array}{l} x_0 \text{ dado} \\ n \geq 1 \Rightarrow x_n = M^{-1}Nx_{n-1} + M^{-1}\begin{bmatrix} \pi \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{array} \right.$

a) Calcula $\|M^{-1}N\|_1$.

Jacobi: $M = D \quad N = E+F$

$M = D = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \quad M^{-1} = \begin{bmatrix} -1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$M^{-1}N = \begin{bmatrix} -1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & -1/3 \\ 1/4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\|M^{-1}N\|_1 = \left|\frac{1}{2}\right| + \left|-\frac{1}{3}\right| = 0.8\widehat{3}$

b) Deduce que $\rho(M^{-1}N) < 1$

Por un corolario del tema 1, $\forall A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ con $\|A\| < 1$ siendo $\|\cdot\|$ norma inducida se verifica que $\rho(A) < 1$.

En este caso se tiene que $\|M^{-1}N\|_1 = 0.8\widehat{3} < 1$, por lo que concluimos que $\rho(M^{-1}N) < 1$.

c) ¿Es A diag. estr. dom? ¿Contradice esto el resultado anterior?

$A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ diag. estr. dom. $\Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, N\} \sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{N} |a_{ij}| < |a_{ii}|$

La primera fila no satisface esto, por lo que A no es diag. estr. dom. ~~E~~ La diag. estr. dom. $\Rightarrow$ convergencia $\forall x_0 \in \mathbb{R}^N$ de los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel, pero del recíproco no se sabe nada (no es cierto) así que no es contradictorio.

11. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ Gauss-Seidel $\left| \begin{array}{l} x_0 \text{ dado} \\ n \geq 1 \Rightarrow x_n = M^{-1}Nx_{n-1} + M^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \end{array} \right.$

a) Probar la consistencia del método con el sistema.

Para que sea consistente con el sistema, debe cumplirse que $c = M^{-1}b = (I-B)A^{-1}b$. Veamos que es cierto:

$B = M^{-1}N$ con $M = D - E = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ +2 & 2 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$|M| = 4 \quad M^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

$c = M^{-1}b = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad |A| = -2 \quad A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3/2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$(I-B)A^{-1}b = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -3/2 \\ 0 & +3/2 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) Calcula $\rho(M^{-1}N)$.

$$M^{-1}N = \begin{pmatrix} 0 & -3/2 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix} \quad \det(M^{-1}N - \lambda I_2) = \det\begin{bmatrix} -\lambda & -3/2 \\ 0 & 3/2-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda\left(\frac{3}{2}-\lambda\right)$$

$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = \frac{3}{2}$

$$\rho(M^{-1}N) = \frac{3}{2} = 1.5$$

c) ¿Qué ocurre con la convergencia de este método?

Como este método ya es consistente de partida, que sea convergente equivale a que $\rho(M^{-1}N) < 1$, lo cual no ocurre, por lo que este método no converge a la solución del sistema $\forall x_0 \in \mathbb{R}^N$.

12. $A = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 & 5 \\ \sqrt{2} & 5 & 18 \end{bmatrix}$ ¿es o no definida positiva? Aplica tu argumento para resolver ~~[illegible]~~ $Ax = b$ con $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 6+\sqrt{2} \\ 26+\sqrt{2} \end{bmatrix}$

Si admite una factorización de tipo Cholesky será definida positiva ya que:

$$A = U^T U \qquad A^T = U^T (U^T)^T = U^T U = A \Rightarrow A \text{ es simétrica}$$

$x \in \mathbb{R}^N$ cualquiera $\quad x^T A x = x^T U^T U x = (Ux)^T Ux = \|Ux\|_2^2 \geq 0$

Si $x^T A x = 0$, entonces $x = 0$ ya que U es regular con coeficientes positivos en su diagonal y no puede ser la matriz nula. Entonces, $x^T A x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ y entonces A sería definida positiva. Veamos si admite dicha factorización:

$$\begin{bmatrix} u_{11} & 0 & 0 \\ u_{21} & u_{22} & 0 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{21} & u_{31} \\ 0 & u_{22} & u_{32} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 & 5 \\ \sqrt{2} & 5 & 18 \end{bmatrix}$$

$u_{11}^2 = 2 \Rightarrow \boxed{u_{11} = \sqrt{2}}$ $\qquad u_{21}^2 + u_{22}^2 = 2 \Rightarrow \boxed{u_{22} = 1}$

$u_{11}u_{21} = \sqrt{2} \Rightarrow \boxed{u_{21} = 1}$ $\qquad u_{21}u_{31} + u_{22}u_{32} = 5 \Rightarrow \boxed{u_{32} = 4}$

$u_{11}u_{31} = \sqrt{2} \Rightarrow \boxed{u_{31} = 1}$ $\qquad u_{31}^2 + u_{32}^2 + u_{33}^2 = 18 \Rightarrow \boxed{u_{33} = 1}$

$$U = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad L = U^T \quad U = U$$

$Ax = b$
$LUx = b$
$Ly = b$

$\sqrt{2}x = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$
$x + y = 6 + \sqrt{2} \Rightarrow y = 6$
$x + 4y + z = 26 + \sqrt{2} \Rightarrow z = 2$

$y = [\sqrt{2}, 6, 2]$

$\sqrt{2}x + y + z = \sqrt{2} \Rightarrow \boxed{x = 1}$
$y + 4z = 6 \Rightarrow \boxed{y = -2}$
$\boxed{z = 2}$

$\boxed{\text{Sol.}: (1, -2, 2)}$

13. $N\geq 1$, $A,B\in\mathbb{R}^{N\times N}$ con A regular, B triangular, $x_0,b,c\in\mathbb{R}^N$ y el método iterativo consiste con el sistema unisolvente $Ax=b$ $\left(\begin{cases} x_0 \text{ dado} \\ n\geq 1 \Rightarrow x_n=Bx_{n-1}+c\end{cases}\right)$. Justificar razonadamente que el método iterativo converge a la solución del sistema $\forall x_0\in\mathbb{R}^N \Leftrightarrow \max\limits_{i=1,\dots,N}|b_{ii}|<1$

$\boxed{\Rightarrow}$ Si es convergente, esto quiere decir que para el método iterativo dado se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$. Desarrollamos lo siguiente:

$$x_n=Bx_{n-1}+c$$
$$x_n-x=Bx_{n-1}+c-x$$
$$x_n-x=Bx_{n-1}+(I-B)x-x$$
$$x_n-x=B(x_{n-1}-x)$$

Recursivamente n veces

$$\Rightarrow x_n-x=B^n(x_0-x)$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n-x)=0=\lim_{n\to\infty}B^n\underbrace{(x_0-x)}_{\text{Al ser un vector fijo no influye}}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}B^n=0\Rightarrow\rho(B)<1$$

Como B es triangular inferior:

$$\det(B-\lambda I_N)=\det\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN}-\lambda\end{bmatrix}=(a_{11}-\lambda)\cdots(a_{NN}-\lambda)$$

Sus valores propios son justo los elementos de la diagonal, por lo que $\max\limits_{i=1,\dots,N}|b_{ii}|<1$ es equivalente a que $\rho(B)<1$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Si $\rho(B)<1$, $\lim\limits_{n\to\infty}B^n=0$ y por la relación de recurrencia demostrada antes: $\|x_n-x\|=\|B^n(x_0-x)\|\leq\|B^n\|\|x_0-x\|$

$$\|B^n\|=\sup\frac{\|B^n(x_0-x)\|}{\|x_0-x\|}\Leftrightarrow\|B^n\|\|x_0-x\|\geq\|B^n(x_0-x)\|$$

y tomando límites en el infinito: $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x\|\leq\lim\limits_{n\to\infty}\|B^n\|\|x_0-x\|=0$ pues $\lim\limits_{n\to\infty}B^n=0$

y como $\|\cdot\|\geq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x)=0\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$

14. $\begin{bmatrix}10^{-5} & -1 \\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}$, $x_1=\frac{200000}{100001}$ $x_2=\frac{100003}{100001}$ Es convergente

$\mathbb{F}(10,5,-4,6)$

a) Resolver mediante Gauss. (y redondeo)

~~$10^{-5}=0.00001$~~ $10^{-5}=(0.00001)\cdot 10^0$

$$\begin{rcases}10^{-5}x-y=-1\\ x+y=3\end{rcases}\Rightarrow \begin{matrix}10^{-5}x-y=-1\\ (1+10^5)y=3+10^5\end{matrix}$$

$1+10^5 = 100001 = (0.100001)\cdot 10^6 = (0.1)\cdot 10^6 = 10^5$

$3+10^5 = 100003 = (0.100003)\cdot 10^6 = (0.1)\cdot 10^6 = 10^5$

$$\boxed{y=1} \Rightarrow 10^{-5}x - y = -1 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

b) Gauss con pivotaje más redondeo.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -10^{-5} & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \left.\begin{array}{l} x+y=3 \\ -10^{-5}x - y = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x+y=3 \\ -(1+10^{-5})y = -1-3\cdot 10^{-5} \end{array}$$

$1+10^{-5} = 1.00001 = (0.100001)\cdot 10 = (0.1)\cdot 10 = 1$

$-1-3\cdot 10^{-5} = -1.00003 = -(0.100003)\cdot 10 = -(0.1)\cdot 10 = -1$

$$-(0.1)\cdot 10 y = -(0.1)\cdot 10 \Rightarrow \boxed{y=1}$$

$$x+y=3 \Rightarrow \boxed{x=2}$$

c) ¿A qué se debe el mejor comportamiento del segundo método frente a los errores de redondeo?

Se debe a que en el primero, para eliminar x de la segunda ecuación ha sido necesario dividir por coeficientes relativamente pequeños, lo cual conduce a errores de redondeo considerables que afectan a la solución. Sin embargo, al intercambiar las filas en el segundo, se evita dividir por coeficientes muy pequeños al eliminar x de la segunda ecuación.

15.
$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{Jacobi} \quad \left| \begin{array}{l} x_0 \text{ dado} \\ n\geq 1 \Rightarrow x_n = M^{-1}N x_{n-1} + M^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}\right.$$

a) Calcula alguna norma matricial de $M^{-1}N$ y deduce que $\rho(M^{-1}N)<1$.

$$M=D \qquad N=E+F \qquad M=D=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad M^{-1}=\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$N=\begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M^{-1}N=\begin{bmatrix} 0 & -2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 0 & 1/4 \\ 1/3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\|M^{-1}N\|_1 = \max_{j=1,\dots,N}\sum_{i=1}^{N}|a_{ij}| = \frac{2}{3} = 0.\hat{6}$$

$\|M^{-1}N\|_1 = 0.\hat{6} < 1 \Leftrightarrow \rho(M^{-1}N) < 1$ ~~con $M^{-1}N$ regular~~

b) ¿Es A diag. estric. dom? ¿Contradice esto el resultado anterior?

A diag. estric. dom $\Leftrightarrow \forall i\in\{1,\dots,N\} \quad \sum_{\substack{i\neq j \\ j=1}}^{N}|a_{ij}|<|a_{ii}| \Rightarrow$ La primera fila no lo cumple.

A d.e.dom. $\Rightarrow$ Gauss-S y Jacobi convergen a la solución $\forall x_0\in\mathbb{R}^N$

Pero el recíproco no se tiene por qué cumplir, así que no es contradictorio.

c) Partiendo de $x_0 = [0,0,0]^T$, calcular dos iteraciones de Gauss-Seidel.

$x_1 = [0, 1/3, 0]$ ← Tras la primera iteración

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 \Rightarrow x_{10} = 0 \\ x_2 = -\frac{0}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x_3 \Rightarrow x_{20} = \frac{1}{3} \\ x_3 = \frac{x_1}{4} \Rightarrow x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{x_1 = -\frac{2}{9} \quad x_2 = \frac{2}{27} + \frac{1}{3} = \frac{11}{27} \quad x_3 = -\frac{2}{36}}$$

d) ¿Admite A factorización LU? Si la admite, ¿puede ser de tipo Cholesky?

A admitirá dicha factorización si sus 3 submatrices principales son regulares (esto se debe a un teorema de clase): $A_1 = 3$ $A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ $|A_2| = 7 \neq 0$

$A_3 = A$ $|A| = 36 + 2 + 3 - 8 \neq 0 \Rightarrow$ Todas son regulares y por lo tanto es posible una factorización LU.

No puede ser de tipo Cholesky ya que para ello A debería ser definida positiva y en concreto, simétrica ya por Cholesky $A = U^T U$, $A^T = U^T (U^T)^T = U^T U = A$, pero A es claramente no simétrica.

16. $\begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ Jacobi $\left| \begin{array}{l} x_0 \text{ dado} \\ N \geq 1 \Rightarrow x_n = M^{-1}Nx_{n-1} + M^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right.$

a) Calcular alguna norma matricial de $M^{-1}N$ y deducir $\rho(M^{-1}N) < 1$.

$M = D$ $N = E + F$ $M = D = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ $N = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$M^{-1}N = \begin{bmatrix} -1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & -1/3 \\ 1/4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\|M^{-1}N\|_1 = \max_{j=1,\dots,N} \sum_{i=1}^{N} |a_{ij}| = 0.8\widehat{3}$$

Y por un corolario del tema 1, $M^{-1}N \in \mathbb{R}^{3\times3}$ y $\|M^{-1}N\|_1 < 1$, entonces $\rho(M^{-1}N) < 1$.

b) ¿Es A diag. estr. dom? ¿Contradice esto el resultado obtenido?

$A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ diag. estr. dom. $\Leftrightarrow \forall i \in \{1,\dots,N\}$ $\sum_{\substack{i\neq j\\ j=1}}^{N} |a_{ij}| < |a_{ii}|$. La primera fila de A no cumple esto así que A no lo es. Sabemos que si A es diag. estr. dom., Jacobi converge a la solución del sistema $\forall x_0 \in \mathbb{R}^N$, pero el recíproco no siempre es cierto, como es este caso, por lo que no es contradictorio.

c) Partiendo de $x_0 = [0,0,0]^T$, calcular dos iteraciones de Gauss-Seidel.

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3 \\ x_3 = \frac{x_1}{4} \end{cases}$$

Primera iteración: $\left[-\frac{1}{4}, -\frac{1}{12}, -\frac{1}{16}\right]^T$

Segunda iteración: $\left[-\frac{31}{96}, -\frac{25}{288}, -\frac{31}{384}\right]^T$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{16} = \frac{9}{96} + \frac{1}{12} = \frac{27}{48} + \frac{4}{48} = \frac{31}{48}$$

$$\frac{1}{144} - \frac{1}{24} = -\frac{5}{144}$$

$$-\frac{1}{4} - \frac{1}{24} - \frac{1}{32} = -\frac{7}{24} - \frac{1}{32} = \frac{-28-3}{96} = \frac{-31}{96}$$

$96 \cdot 3 = 270 + 18 = 288$ $\qquad$ $96 \times 4 = 360 + 24 = 384$

$$-\frac{31}{288} + \frac{1}{48} = -\frac{25}{288}$$

d) ¿Admite A una factorización tipo LU? Si lo hace, ¿puede ser de tipo Cholesky?

Razonamos de igual forma que en el ejercicio anterior.

$A_1 = -4$, $A_2 = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ con $|A_2| = -10 \neq 0$ y $A_3 = A$, $|A| = 48 + 2 + 8 - 6 - 8 + 4 = 48 \neq 0$

Todas sus submatrices principales son regulares por lo que sí admite una factorización tipo LU. No podría ser de tipo Cholesky ya que A no es simétrica, y esta es una condición necesaria para que admita una factorización de dicho tipo.

17. a) Radio espectral de $A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 0 \end{bmatrix}$

$$\det(A - \lambda I_3) = \det \begin{bmatrix} 1/2-\lambda & 1/2 \\ 1/4 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{8}$$

$$\det(A-\lambda I_3) = 0 \iff 8\lambda^2 - 4\lambda - 1 = 0$$

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16+32}}{16} = \frac{4\pm\sqrt{48}}{16} = \frac{4 \pm 4\sqrt{3}}{16} \begin{cases} \to \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{3} \\ \to \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

$$\boxed{\rho(A) = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}}$$

Como $\rho(A) < 1$, $\lim_{n\to\infty} \|A^n\| = 0 \implies \lim_{n\to\infty} A^n = 0$ La sucesión es convergente con límite 0.

b) $N \geq 1$, $A, B \in \mathbb{R}^{N\times N}$, A regular y

$$B = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & \cdots & \cdots & 1/2 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & \cdots & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/4 & \cdots & 1/4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1/(N+1) \end{bmatrix}$$

$b, c \in \mathbb{R}^N$ $\quad Ax = b$

Método iterativo

$$\left| \begin{array}{l} x_0 \text{ dado} \\ n \geq 1 \implies x_n = Bx_{n-1} + c \end{array} \right.$$

¿Converge dicho método a la solución del sistema?

¿Habría que exigir alguna hipótesis adicional?

Por un teorema de clase, dado un método consistente con el sistema unisolvente $Ax=b$, este converge a la solución del sistema $\forall x_0 \in \mathbb{R}^N$ sí y solo si $\rho(B) < 1$.

En este caso:

$$\det(B - \lambda I_n) = \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)\left(\frac{1}{3}-\lambda\right)\cdot \ldots \cdot \left(\frac{1}{(N+1)} - \lambda\right)$$

$\implies$ De donde se deduce que los valores propios de B son de la forma $\frac{1}{N+1}$ con $N \geq 1$, por lo que $\rho(B) < 1$ claramente

Nos faltaría exigir la hipótesis de consistencia.

$2 \quad 3 \quad 4 \quad 8 \quad 8] [x_1] \quad [1/2]$