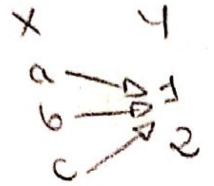
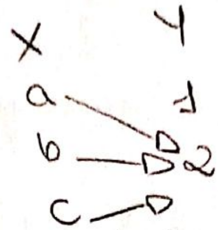
Relación de ejercicios 2 - Aplicaciones

2.1. $X = \{a, b, c\}$ $Y = \{1, 2\}$

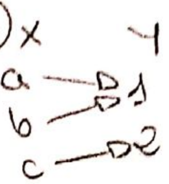
Construir todas las aplicaciones de X en Y y clasificarlas

① 

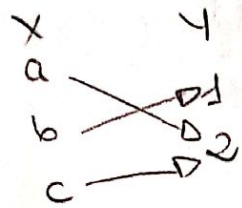
No iny.
No sobr.

② 

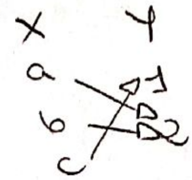
No iny.
No sobr.

③ 

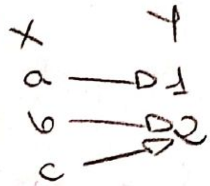
No iny.
Sobreyectiva

④ 

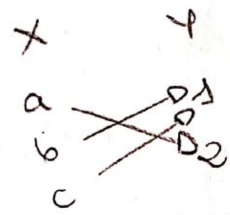
No iny.
Sobreyectiva

⑤ 

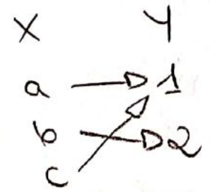
No iny.
Sobreyectiva

⑥ 

No iny.
Sobreyectiva

⑦ 

No iny.
Sobreyectiva

⑧ 

No iny.
Sobreyectiva

2.3. $f: X \to Y$
$A \subseteq X$
$B \subseteq Y$

i) $f_*(f^*(B)) \subseteq B$ y se da la igualdad si f es sobreyectiva.

Definiciones: $\begin{cases} \text{- Imagen directa} \Rightarrow f_*(A) = \{f(a) \mid a \in A\} \\ \text{- Imagen inversa} \Rightarrow f^*(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\} \end{cases}$

$(f_*(f^*(B))) = \{f(x) \mid x \in f^*(B)\}$

$\forall y \in f_* f^*(B)$, $\exists x \in f^*(B)$ tal que $f(x) = y \Rightarrow$ Por la propia definición de inversa, como $f(x) \in B$, entonces $y \in B \Rightarrow f_* f^*(B) \subseteq B$

- Si f es sobreyectiva, $\forall y \in Y$ $\exists x \in X$; $f(x) = y$. Como $B \subseteq Y$, ocurre lo mismo, $\forall y \in (f_*(f^*(B))$ $\exists x \in X$; $f(x) = y \Rightarrow$ Como $f(x) \in B$, podemos asegurar que $f_*(f^*(B)) = B$

ii) $A \subseteq f^*(f_*(A))$ y se da la igualdad si f es inyectiva.

Definiciones: $\begin{cases} \text{Im. directa: } f_*(A) = \{f(a) \mid a \in A\} \\ \text{Im. inversa: } f^*(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\} \end{cases}$

$$f^*(f_*(A)) = \{x \in X, \underbrace{f(x) \in f_*(A)}\}$$

$\Rightarrow$ Por la propia definición de imagen directa, concluimos que $A \subseteq f^*(f_*(A))$

- Si f es inyectiva, $a_1, a_2 \in A \Rightarrow f(a_1), f(a_2) \in A \Rightarrow f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a$
Como esto es cierto también para todo elemento del dominio (es decir, $x, y \in X \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$) y $f^*(f_*(A)) \subseteq X$,
$A = f^*(f_*(A))$

2.5. $f: X \to Y$
$A \subseteq X$
$B \subseteq Y$

Demostrar que $f_*(A \cap f^*(B)) = f_*(A) \cap B$

$\boxed{\subseteq}$ $f_*(A \cap f^*(B)) \subseteq f_*(A) \cap B$

Definiciones: $\begin{cases} \text{Dir.: } f_*(A) = \{f(a) \mid a \in A\} \\ \text{Inv.: } f^*(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\} \end{cases}$

$A \cap f^*(B) = \{x \in A \mid f(x) \in B\}$

$f_*(A \cap f^*(B)) = \{f(x) \mid x \in (A \cap f^*(B))\}$

$\underbrace{\text{Tomo } y \in f_*(A \cap f^*(B)) \Rightarrow \exists x \in (A \cap f^*(B))\ ; f(x) = y}$

$\Rightarrow \begin{cases} x \in A \to \overbrace{f(x)}^{\to y} \in f_*(A) \Rightarrow y \in f_*(A) \\ \quad y \\ x \in f^*(B) \underset{\text{Por definición de } f^*(B)}{\to} \overbrace{f(x)}^{\to y} \in B \Rightarrow y \in B \end{cases}$ $\Big\}$ $y \in f_*(A) \cap B$

$\Rightarrow f_*(A \cap f^*(B)) \subseteq f_*(A) \cap B$ ①

$\boxed{\supseteq}$ $f_*(A) \cap B \subseteq f_*(A \cap f^*(B))$

$\underbrace{y \in (f_*(A) \cap B) \Rightarrow y \in f_*(A) \text{ e } \underbrace{y \in B}}$

$\Rightarrow$ Definiciones: $\begin{cases} f_*(A) = \{f(x) \mid x \in A\} \\ f^*(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\} \Rightarrow y \in B \Rightarrow f(x) \in B \Rightarrow x \in f^*(B) \end{cases}$

$\Rightarrow f_*(f^*(B)) = \{f(x) \mid x \in f^*(B)\} \Rightarrow y \in f_*(f^*(B))$

$y \in f_*(A)$ e $y \in f_*(f^*(B)) \Rightarrow y \in f_*(A \cap f^*(B)) \Rightarrow f_*(A) \cap B \subseteq f_*(A \cap f^*(B))$ ②

Por 1 y 2, $f_*(A \cap f^*(B)) = f_*(A) \cap B$

2.8. $f: X \Rightarrow Y$ Demostrar:

$g: Y \Rightarrow Z$ i) Si h es inyectiva, f es inyectiva

$h = g \circ f$

Tomo $a, b \in X$; $f(a) = f(b)$

$g \circ f := g(f(x)) \Rightarrow \underbrace{g(f(a)) = g(f(b))}$

Como h es inyectiva y $(g \circ f)(a) = (g \circ f)(b)$, $a = b$, luego h es inyectiva

ii) Si h es sobreyectiva entonces g es sobreyectiva.

h sobreyectiva $\Rightarrow \forall z \in Z \ \exists x \in X ; h(x) = z$

$\Rightarrow g \circ f$ sobreyectiva $h(x) = (g \circ f)(x) = \underbrace{g(f(x))} = z$

$\forall z \in Z \ \exists y \in Y ; g(y) = z$, luego g es sobreyectiva

iii) Si h es inyectiva y f sobreyectiva, entonces g es inyectiva.

h inyectiva $\Rightarrow a, b \in X, h(a) = h(b) \Rightarrow a = b$

$g(f(c)) = g(f(d))$

f sobreyectiva $\Rightarrow \forall y \in Y \ \exists! x \in X ; f(x) = y$