Ejercicio 3.12: Probar que $ln(x)$ es cóncava hacia abajo. Deducir la desigualdad de Young: si $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ siendo $p>1$, entonces $ab \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$, para cada $a,b \in \mathbb{R}^+$.

Corolario: Si $f: I \to \mathbb{R}$ es continua en I y dos veces derivable en I^0 entonces f es cóncava hacia abajo en I si, y sólo si, $f''(x) \leq 0$, para cada $x \in I^0$.

En nuestro caso, $f(x)=ln(x)$, que es continua en $I=(0,+\infty)$. Calculamos la segunda derivada:
$f'(x)=\frac{1}{x}$
$f''(x)=-\frac{1}{x^2}$

Calculamos la segunda derivada para un valor $x \in I^0$.
$f''(1)=-\frac{1}{1}=-1<0$. Por lo tanto, $f(x)=ln(x)$ es cóncava hacia abajo en I.

Desigualdad de Young: Sean $p,q>1$ tal que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ y $a,b \geq 0 \to ab \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$.

Teorema de la concavidad hacia arriba de la función exponencial:
Sea $f(x)=e^x$. Tenemos que $f''(x)=e^x>0\ \forall x \in \mathbb{R} \to f(x)$ es cóncava hacia arriba en $\mathbb{R}$.
$\forall x,y \in \mathbb{R}$ y $\forall \alpha \geq 0, \beta \geq 0$ con $\alpha+\beta=1$ tenemos que $e^{\alpha x+\beta y} \leq \alpha e^x+\beta e^y$.

Si a=0 o b=0 es trivial que nos da $0 \leq$ un número no negativo.
Si $a>0$ y $b>0$: $\alpha=\frac{1}{p}$, $\frac{1}{q}$, $x=pln(a)$, $y=qln(b) \to e^{lna+lnb}=e^{lna}e^{lnb}=ab$
$\to \frac{1}{p}e^{plna}+\frac{1}{q}e^{qlnb}=\frac{1}{p}e^{lna^p}+\frac{1}{q}e^{lnb^q}=\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$

Probando así que $ab \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$