

Apellidos

Firma

Nombre

D.N.I o pasaporte

Grupo

Modelos matemáticos I 18/19
Grado en Matemáticas 2º B
Prueba Temas 3 y 4

1 Responda de forma razonada a las siguientes cuestiones breves:

a) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

¿Cuánto vale $\rho(A)$? ¿Es $\lambda = \rho(A)$ el valor propio dominante?

b) Dibuje un ejemplo de grafo asociado una matriz 4×4 que sea irreducible.

c) Enuncie el Teorema de Perron–Frobenius.

d) Utilice el Teorema de Cayley–Hamilton para probar que las potencias de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

satisfacen una ecuación en diferencias de orden 3. Determine dicha ecuación.

2 Se considera la matriz de Leslie

$$L = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix},$$

donde $\alpha \geq 0$.

a) Describa la población que sigue el modelo de Leslie dado por la matriz L .

b) Encontrar el valor de α para que en cada censo la población aumente en un 50 %.

c) Describa la pirámide de edad a largo plazo correspondiente al valor de α obtenido en el apartado anterior.

d) Dado el vector inicial $X_0 = (3, 2, 1)^t$, estudie el comportamiento asintótico de la población cuando $\alpha = 0$.

3 En lo más profundo del Bosque Negro cuatro pequeños gnomos (Tuli, Xuli, Yuli y Zuli) caminan arrastrando una pesada hacha. Cuando entraron en el bosque Tuli llevaba el hacha y habían acordado que el hacha cambiaría de manos cada media hora. Pero, como buenos gnomos, eran incapaces de seguir un orden predeterminado. Cuando Tuli dejaba el hacha, la recogía Xuli la mitad de las veces, y el resto de las veces era su hermenio gemelo Yuli quién recogía el hacha. Cuando Xuli dejaba el hacha, una de cada cuatro veces era Tuli quién volvía a recogerla y el resto de las veces Zuli se hacía con ella. Yuli se comportaba exactamente igual que su hermano gemelo Xuli. Y finalmente, cuando Zuli recogía el hacha ya no la soltaba, no sin murmurar entre dientes sobre lo vagos que eran sus hermanos.

a) Describa con un grafo el intercambio del hacha entre los gnomos.

- b) Formule el problema en términos de un sistema de ecuaciones en diferencias.
- c) Estudie las propiedades principales de la matriz de transición del sistema de ecuaciones en diferencias dado en el apartado anterior.
- d) Cuando salgan del enorme Bosque Negro ¿quién llevará el hacha?. Justifique su respuesta.

Nota: para resolver el problema no es imprescindible dibujar a los gnomos con el hacha.

Granada, a 21 de diciembre de 2018