LÓGICA Y MÉTODOS DISCRETOS

25 de Junio de 2020

Alumna:______________________________________ **D.N.I.:**______________

Ejercicio 1.

Sea x el número formado por las cuatro últimas cifras de tu DNI. Sea $\cdots a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0$ la expresión de x en binario.

Consideramos las dos funciones booleanas $f, g : \mathbb{B}^3 \to \mathbb{B}$.

x	y	z	f
0	0	0	a_0
0	0	1	a_1
0	1	0	a_2
0	1	1	a_3
1	0	0	a_4
1	0	1	a_5
1	1	0	a_6
1	1	1	a_7

$$g(x, y, z) = \overline{x} \uparrow (y \oplus \overline{z}).$$

Y sea $h : \mathbb{B}^4 \to \mathbb{B}$ la función dada por $h(x, y, z, t) = \begin{cases} f(x, y, z) & \text{si } t = 0 \\ g(x, y, z) & \text{si } t = 1 \end{cases}$

1. *Calcula la forma normal conjuntiva y una expresión reducida de g como producto de sumas de literales.*
2. *Da una expresión booleana para la función g^d (la función dual de g).*
3. *Calcula una expresion de f usando únicamente los operadores Suma y Complemento.*
4. *Calcula los implicantes primos de h y una expresión lo más reducida posible como suma de productos de literales.*

Ejercicio 2.

Estudia si es cierto que:

$$\{d \to c \wedge \neg a,\ \neg a \vee c \to d,\ c \wedge d \to a,\ c \vee (b \wedge (\neg a \vee d \vee e))\} \vDash e.$$

Ejercicio 3.

1. *Sean $\alpha = \forall x(P(x) \to \exists y(Q(f(x), y)))$ y $\beta = \forall x(P(x) \to Q(f(x), g(x)))$. Estudia si cada una de las fórmulas $\alpha \to \beta$ y $\beta \to \alpha$ es universalmente válida, satisfacible y refutable o contradicción.*
2. *En un lenguaje de primer orden con dos símbolos de constante (a, b), dos símbolos de función $(f, g$ ambos binarios), un símbolo de predicado (P, también binario) consideramos la estructura:*
   - **Dominio:** $D = \mathbb{Z}_{12}$.
   - **Asignacion de constantes:** $a = 0$, $b = 1$.
   - **Asignación de funciones:** $f(x, y) = x + y$, $g(x, y) = x \cdot y$.
   - **Asignación de predicados:** $P(x, y) \equiv x = y$

   Calcula el valor de verdad de la fórmula $\forall x \forall y(P(g(x, x), b) \to P(x, b) \vee P(f(x, b), a))$.

Ejercicio 4.

1. *Estudia si los siguientes conjuntos de cláusulas son satisfacibles o insatisfacibles:*
   - $\{P(x, f(x), y);\ \neg P(f(x), y, y) \vee \neg P(z, y, g(z))\}$.
   - $\{P(x, f(x), g(x));\ \neg P(x, f(x), y) \vee \neg P(z, y, g(z))\}$.

2. *En un lenguaje de primer orden con dos símbolos de constante (a, b), dos símbolos de función (f, g ambos binarios), un símbolo de predicado (P, también binario) consideramos la estructura:*

   - **Dominio:** $D = \mathbb{Z}_{12}$.
   - **Asignacion de constantes:** $a = 0$, $b = 1$.
   - **Asignación de funciones:** $f(x, y) = x + y$, $g(x, y) = x \cdot y$.
   - **Asignación de predicados:** $P(x, y) \equiv x = y$

   Expresa en este lenguaje los siguientes enunciados:

   - *La ecuación $2x = 1$ no tiene solución.*
   - *Los únicos números que son iguales a su cuadrado son 0 y 1.*

Ejercicio 5.

Dadas las fórmulas en un lenguaje de primer orden:

- $\alpha_1 = \forall x(R(x) \wedge Q(x) \to \exists y(P(x, y) \wedge S(y)))$.
- $\alpha_2 = \exists x(T(x) \wedge R(x) \wedge \forall y(P(x, y) \to T(y)))$.
- $\alpha_3 = \forall x(T(x) \to Q(x))$.
- $\alpha_4 = \exists x(T(x) \wedge S(x))$.

Demuestra que $\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\} \vDash \alpha_4$.

Ejercicio 6.

Sean x_n e y_n las sucesiones dadas por:

$$\begin{array}{ll} x_0 = 0 & y_0 = 0 \\ x_1 = 2 & \\ x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n;\ n \geq 2. & y_n = y_{n-1} + n \cdot 2^n;\ n \geq 1 \end{array}$$

1. *Calcula los términos* $x_2,\ x_3,\ x_4,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4$.
2. *Demuestra que $x_n = y_n$ para todo $n \geq 0$*[1]
3. *Calcula una expresión no recurrente para el término x_n (o y_n).*
4. *Comprueba que $z_n = x_n + 2^n$ es una solución de la recurrencia $x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n$ (con condiciones iniciales distintas) pero no para $y_n = y_{n-1} + n \cdot 2^n$.*

Ejercicio 7.

En este ejercicio, cuando hablemos de un grafo supondremos que no tiene autolazos ni lados paralelos.

Sea a un número natural mayor que 0. Consideramos un grafo que tiene 7 vértices. De esos hay 1 de grado 5, uno de grado 4, uno de grado 3, dos de grado 2 y los dos restantes de grado a (que puede ser alguno de los números anteriores).

1. *Determina todos los posibles valores de a de forma que nuestro grafo tenga un camino de Euler.*
2. *De entre los valores que has obtenido en el apartado anterior, elige el más grande, y dibuja un grafo con esas características usando el algoritmo de demolición-reconstrucción.*
3. *¿Es dicho grafo plano? Justifica la respuesta.*
4. *¿Tiene el grafo un camino o ciclo de Hamilton?*
5. *¿Cuál es su número cromático?*

[1] No vale hacer el apartado siguiente para las dos sucesiones y comprobar que sale lo mismo.

1)

$g: B^3 \to$

$g(x,y,z) = \bar{x} \uparrow (y \oplus \bar{z})$

a) $\bar{x} \uparrow (y\oplus\bar{z}) = \overline{\bar{x} \cdot (y\oplus\bar{z})} = x + \overline{(y\oplus\bar{z})} = x + \overline{(y\bar{\bar{z}} + \bar{y}\cdot\bar{z})} =$

$= x + \overline{(yz + \bar{y}\bar{z})} = x + \overline{yz}\cdot\overline{\bar{y}\bar{z}} = x + (\bar{y}+\bar{z})(y+z) =$

$\underline{x + \bar{y}z + y\bar{z}}$ *

		$x+y$ / $\bar{x}\bar{y}$	$x+\bar{y}$ / $\bar{x}y$	$\bar{x}+\bar{y}$ / xy	$\bar{x}+y$ / $x\bar{y}$
z	$\bar{z}$	0	1	1	1
$\bar{z}$	z	1	0	1	1

Forma normal conjuntiva

- $g = M_0 \cdot M_3$
- $g(x,y,z) = (x+y+z)\cdot(x+\bar{y}+\bar{z})$

b) Dual, cambiar sumas por productos y viceversa

$g^d(x,y,z) = xyz + x\bar{y}\bar{z}$

* $g^d(x,y,z) = x(\bar{y}+z)\cdot(y+z)$ Otra opción

DNI: $2343)_{10}$;

c)

x y z	f
000	1
001	1
010	1
011	0
100	0
101	1
110	0
111	0

$f = m_0 + m_1 + m_2 + m_5 =$

usando Karnaugh

$f(x,y,z) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}y\bar{z} + x\bar{y}z = \boxed{\bar{x}\bar{z} + \bar{y}z}$

usar suma y complemento (negado)

$f = \overline{\overline{\bar{x}\bar{z}}} + \overline{\overline{\bar{y}z}} = \overline{x+z} + \overline{y+\bar{z}}$

d) $h(x,y,z,t) = \begin{cases} f(x,y,z) & \text{si } t=0 \\ g(x,y,z) & \text{si } t=1 \end{cases}$

4

los * son por

	$\bar{x}\bar{y}$	$\bar{x}y$	xy	$x\bar{y}$
$\bar{z}\bar{t}$	1	1		
$\bar{z}t$		1	1	1
zt	1		1	
$z\bar{t}$	1			1

	f	g	h
0000	1	*	1
0001	*	0	0
0010	1	*	1
0011		1	1
0100	1	*	1
0101	*	1	1
0110	0	*	0
0111	*	0	0
1000	0	*	0
1001	*	1	1
1010	1	*	1
1011	*	1	1
1100	0	*	0
1101	*	1	1
1110	0	*	0
1111	*	1	1

$h(x,y,z,t) = \cancel{xt + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}\bar{t} + \bar{x}\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z}}$

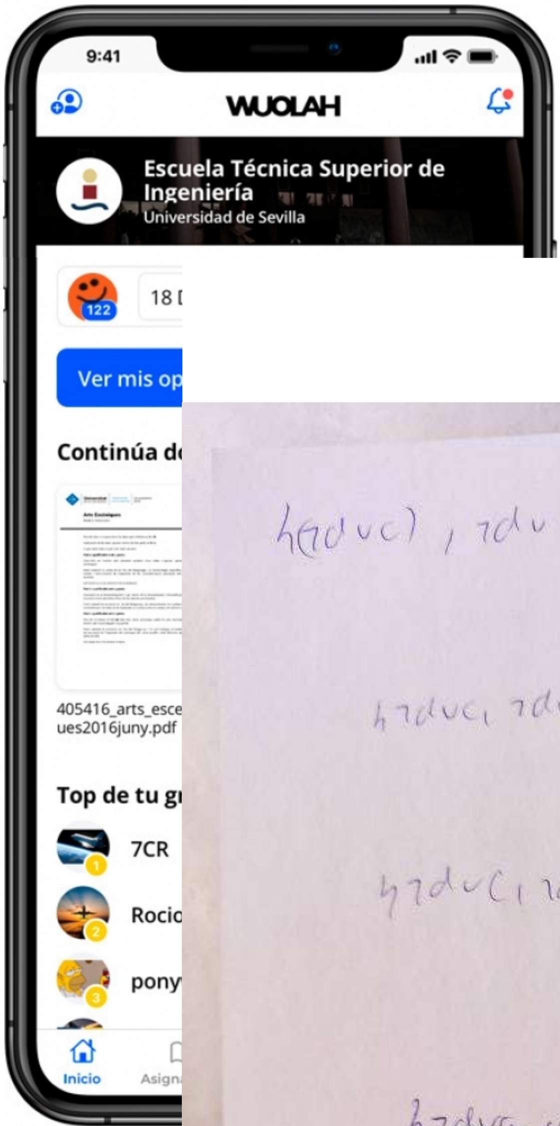
Implicantes primos

$h(x,y,z,t) = \underbrace{x\bar{t} + \bar{y}z + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{z}\bar{t}}_{\text{Implicantes primos}}$

(2)

$\{d \to c \wedge \neg a,\ \neg a \vee c \to d,\ c \wedge d \to a,\ c \vee (b \wedge (\neg a \vee d \vee e))\} \models e$

$\neg d \vee (c \wedge \neg a)$	$\neg(\neg a \vee c) \vee d$	$\neg(c \wedge d) \vee a$	$(c \vee b) \wedge (c \vee \neg a \vee d \vee e)$	$\neg e$
$(\neg d \vee c) \wedge (\neg d \vee \neg a)$	$(a \wedge \neg c) \vee d$	$\neg c \vee \neg d \vee a$		
	$(a \vee d) \wedge (\neg c \vee d)$			



$\{\neg d \lor c,\ \neg d \lor \neg a,\ a \lor d,\ \neg c \lor d,\ \neg c \lor \neg d \lor a,\ c \lor b,\ c \lor \neg a \lor d \lor e,\ \neg e\}$

| $\lambda = \neg e$ literal puro, sólo sale 1 vez

$\{\neg d \lor c,\ \neg d \lor \neg a,\ a \lor d,\ \neg c \lor d,\ \neg c \lor \neg d \lor a,\ c \lor b,\ c \lor \neg a \lor d\}$

| $\lambda = b$ literal puro, sólo sale 1 vez

$\{\neg d \lor c,\ \neg d \lor a,\ a \lor d,\ \neg c \lor d,\ \neg c \lor \neg d \lor a,\ c \lor \neg a \lor d\}$

$\lambda = c$ / \ $\lambda = \neg c$

$\{\neg d \lor a,\ a \lor d,\ d,\ \neg d \lor a\}$ — $\{\neg d,\ \neg d \lor a,\ a \lor d,\ \neg a \lor d\}$

| $\lambda = d$ literal puro — | $\lambda = \neg a$

$\{\neg a, a\}$ — $\{a, \neg a\}$

| $\lambda = a$ — | $\lambda = a$

$\{\square\}$ — $\{\square\}$

Es insatisfacible

Es cierta la pregunta.

2

③ 1. $\alpha = \forall x (P(x) \to \exists y\, Q(f(x), y))$ $\qquad \alpha \to \beta$

$\beta = \forall x (P(x) \to Q(f(x), g(x)))$ $\qquad \beta \to \alpha$

$\alpha \to \beta$ es U. válida?

$\models \alpha \to \beta$

¿ $\{\alpha, \neg\beta\}$ insat?

$\forall x (P(x) \to \exists y\, Q(f(x), y))$

$\forall x (\neg P(x) \vee \exists y\, Q(f(x), y))$

$\forall x \exists y (P(x) \vee Q(f(x), y))$ $\quad \exists y \to y | h(x)$

$\forall x (P(x) \vee Q(f(x), y))$

$\neg \forall x (P(x) \to Q(f(x), g(x)))$

$\exists x \neg (P(x) \to Q(f(x), g(x)))$

$\exists x (P(x) \wedge \neg Q(f(x), g(x)))$ $\quad \exists x \to x | a$

$P(a) \wedge \neg Q(f(a), g(a))$

$\{\neg P(x) \vee Q(f(x), h(x)),\ P(a),\ \neg Q(f(a), g(a))\}$

$\neg P(x) \vee Q(f(x), h(x)) \qquad P(a)$

$x | a$

$Q(f(a), h(a)) \qquad \neg Q(f(a), g(a))$

No se puede unificar por lo que es satisfacible, no es U. válida

¿ $\beta \to \alpha$ es u. válida?

$\beta = \forall x(\neg P(x) \vee Q(f(x), g(x)))$

$\models \beta \to \alpha$

$\neg\alpha = \forall y(P(a) \wedge \neg Q(f(a), y))$

¿ $\beta, \neg\alpha$ inst?

$\{\neg P(x) \vee Q(f(x), g(x)), P(a), \neg Q(f(a), y)\}$

$\neg P(x) \vee Q(f(x), g(x)) \quad P(a)$

$x|a$

$Q(f(a), g(a)) \quad \neg Q(f(a), y)$

$y|g(a)$

$\square$ Insat.

Es u válida

2. $\forall x \forall y (P(g(x,x), b) \to P(x,b) \vee P(f(x,b), a))$

$D = \mathbb{Z}_{12}$

$a = 0, b = 1$

$f(x,y) = x+y$

$g(x,y) = x \cdot y$

$P(x,y) \equiv x = y$

$\forall x(P(x^2, 1) \to (x = 1 \vee x+1 = 0))$

$\forall x(x^2 = 1 \to x = 1 \vee x = -1$

$x = 11 \to x_9$ es $\mathbb{Z}_{12}$

Es falsa

4. a) $\{P(x, f(x), y) \;;\; \neg P(f(x), y, y) \vee \neg P(z, y, g(z))\}$

$P(x, f(x), y)$ $\quad$ ~~$\neg P(f(x), y, y)$~~

$\neg P(f(u), v, v) \vee \neg P(z, v, g(z))$

$x|f(u)$

$y|f(f(u))$ $\quad$ $v|f(f(u))$

~~$x = f(u)$~~
~~$f(x) = v$~~
~~$y = v$~~
~~$x = f(u)$~~
~~$v = f(x)$~~
~~$v = y$~~
~~$x = f(x)$~~

$\neg P(z, f(f(u)), g(z))$ $\quad$ $P(x, f(x), y)$

$z|f(u)$ $\quad$ $x|f(u)$

$\square$ $\quad$ $y|g(f(u))$

Insat.

b) $\{P(x, f(x), g(x)) \;,\; \neg P(x, f(x), y) \vee \neg P(z, y, g(z))$

$P(x, f(x), g(x))$ $\quad$ $\neg P(u, f(u), y) \vee \neg P(z, y, g(z))$

$x|u$ $\quad$ $y|g(u)$

$\neg P(z, g(u), g(z))$ $\quad$ $P(x, f(x), g(x))$

no se puede unificar $g(u)$ y $f(x)$

Es satisf.

2. $\neg \exists x\, (2x = 1) = \neg \exists x\, P(f(x,x), b)$

$\forall x\, (x^2 = x \leftrightarrow x = 0 \text{ ó } x = 1)$

$\forall x\, (P(g(x,x), x) \leftrightarrow P(x,a) \vee P(x,b))$

5. $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \models \alpha_4 \equiv \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \neg \alpha_4\}$ Insat.

$\alpha_1 = \forall x\, (R(x) \wedge Q(x) \rightarrow \exists y\, (P(x,y) \wedge S(y)))$

$\forall x\, ((\neg R(x) \vee \neg Q(x)) \vee \exists y\, P(x,y) \wedge S(y))$

$\forall x\, \exists y\, (\neg R(x) \vee \neg Q(x) \vee (P(x,y) \wedge S(y)))$ Forma prenexa $y / f(x)$

$\forall x\, (\neg R(x) \vee \neg Q(x) \vee (P(x, f(x)) \wedge S(f(x)))$ Forma skolem

$\forall x\, (\neg R(x) \vee \neg Q(x) \vee P(x, f(x)) \wedge \neg R(x) \vee \neg Q(x) \vee S(f(x)))$

$\alpha_2 = \exists x\, (T(x) \wedge R(x) \wedge \forall y\, (P(x,y) \rightarrow T(y)))$

$\exists x\, (T(x) \wedge R(x) \wedge \forall y\, (\neg P(x,y) \vee T(y))$

$\exists x \forall y\, (T(x) \wedge R(x) \wedge (\neg P(x,y), T(y)))$ x / a

$\forall y\, (T(a) \wedge R(a) \wedge (\neg P(a,y) \vee T(y)))$

$\alpha_3 = \forall x\, (T(x) \rightarrow O(x)) = \forall x\, (\neg T(x) \vee O(x))$

$\neg \alpha_4 = \neg \exists x\, (T(x) \wedge S(x)) = \forall x\, \neg (T(x) \wedge S(x)) = \forall x\, (\neg T(x) \vee \neg S(x))$

4

$\{\neg R(x) \vee \neg Q(x) \vee P(x, f(x)),\ \neg R(x) \vee Q(x) \vee S(f(x)),\ T(a),\ R(a),$

$\neg P(a,y) \vee T(y),\ \neg T(x) \vee Q(x),\ \neg T(x) \vee \neg S(x)\}$

$\neg T(x) \vee \neg S(x) \qquad \neg P(a,y) \vee T(y)$

x/y

$\neg S(y) \vee \neg P(a,y) \qquad \neg R(x) \vee \neg Q(x) \vee P(x, f(x))$

$y/f(a) \qquad x/a$

$\neg R(x) \vee \neg Q(x) \vee S(f(x)) \qquad \neg S(f(a)) \vee \neg R(a) \vee \neg Q(a)$

x/a

$\neg R(a) \vee \neg Q(a) \qquad \neg T(x) \vee Q(x)$

x/a

$T(a) \qquad \neg R(a) \vee \neg T(a)$

$\neg R(a) \qquad R(a)$

$\square$ Insat.

Es correcta la pregunta

(6) 1. $x_0=0$ $y_0=0$

$x_1=2$ $y_1=2$

$x_2=10$ $y_2=10$

$x_3=34$ $y_3=34$

$x_4=98$ $y_4=98$

2. ¿$x_n=y_n$ para todo $n\geq 0$? 2º principio Ind.

HI $x_{n-1}=y_{n-1}$, $x_{n-2}=y_{n-2}, \dots,$

Paso inductivo ¿$x_n=y_n$?

$\underline{x_n}=3x_{n-1}-2x_{n-2}+2^n=3y_{n-1}-2y_{n-2}+2^n=$

$=y_{n-1}+2y_{n-1}-2y_{n-2}+2^n=y_{n-1}+2(y_{n-1}-y_{n-2})+2^n=$

$=y_{n-1}+2(n-1)2^{n-1}+2^n=y_{n-1}+2^n(n-1)+2^n=$

$=y_{n-1}+n2^n-2^n+2^n=y_{n-1}+n2^n=\underline{y_n}$

3.

$(x^2-3x+2)(x-2)$

x^2-3x+2 — $x=2$ doble, $x=1$ simple

$x_n=a+b2^n+cn2^n$

$x_0 \to 0=a+b$

$x_1 \to 2=a+2b+2c$

$x_2 \to 10=a+4b+8c$

se resuelve $a=2$, $b=-2$, $c=2$

La fórmula no recurrente es: $x_n=2-2^{n+1}+n\cdot 2^{n+1}$

(5)

4.

7 1. ~~5,4,4,3~~ 5 4 3 2 2 a a

Debe tener 2 vertices de grado impar, "a" puede valer

~~1~~ 2, 4, 6, ... ~~no puede ser~~

1. 6 6 5 4 3 2 2

5 4 3 2 1 1

3 2 1 0 0

1 0 -1

No es gráfica la sucesión

2. 5 4 4 4 3 2 2

3 3 3 2 1 2

3 3 3 2 2 1

2 2 1 2 1

2 2 2 1 1

1 1 1 1

0 1 1

1 1 0

0 0

a=4 es posible

3. ~~5 4 2 2 2~~ 5 4 3 2 2 2 2

3 2 1 1 1 2

3 2 2 1 1 1

1 1 0 1 1

1 1 1 1 0

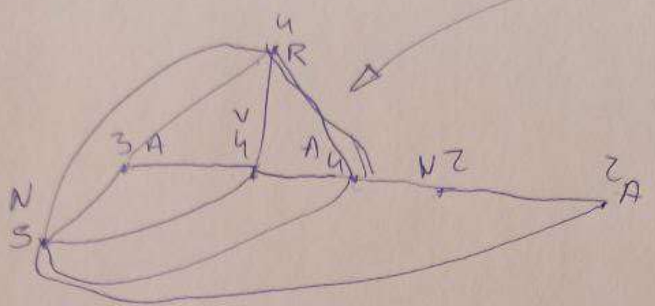
0 1 1 0

1 1 0 0

0 0 0

a=2 es posible

2. Elegimos el valor α=4 usando el (5444322
333211
...



3. No se cortan los lados entre sí

4. Tiene ciclo ya que se recorre todo sin repetir

5. Nº cromático es 4 (cantidades de colores en grafo)