Ejercicio extra número 2

José Alberto Hoces Castro

24 de abril 2022

Ejercicio 1. Versión final Sea n un número natural mayor que 1. Considere la suma de los números combinatorios siguiente: S $= \sum_{i=1}^{16} C(n+i,2)$. Demuestre que la suma S se puede expresar como una suma de cuadrados distintos de números naturales para todo número natural $n > 1$. Es decir, $S = a^2+b^2+c^2+...$, donde $a, b, c, ...$ son números naturales distintos entre sí.

Antes de enunciar lo que queremos demostrar, probando combinaciones de cuadrados de naturales, para $n = 2$ vemos que:

$$\sum_{i=1}^{16} \binom{2+i}{2} = 968 = 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 + 11^2 + 13^2 + 15^2$$

Por lo tanto, vamos a suponer cierto que dicha sumatoria se puede expresar como la suma de 8 naturales al cuadrado consecutivos dos a dos, consiguiendo que sean naturales distintos, como se nos pide. Por ello, nos interesa enunciar $P(n)$ de la siguiente forma: "el número natural n verifica que $\sum_{i=1}^{16} \binom{n+i}{2}$ se puede expresar como suma de naturales distintos entre sí al cuadrado, concretamente $(n+1)^2+(n+3)^2+(n+5)^2+(n+7)^2+(n+9)^2+(n+11)^2+(n+13)^2+(n+15)^2$". Empezamos con el caso base, es decir, el $n = 2$, el cual ya se ha visto antes:

$$P(2) = \sum_{i=1}^{16} \binom{2+i}{2} = 968 = 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 + 11^2 + 13^2 + 15^2$$

Vemos que el enunciado es cierto para $n = 2$, que es nuestro caso base. A continuación, suponemos que $P(n)$ es cierto (hipótesis de inducción) y veremos que suponer esto implica que $P(n+1)$ es cierto. Veamos la expresión de la sumatoria para $n + 1$:

$$\sum_{i=1}^{16} \binom{n+1+i}{2} = \sum_{i=2}^{17} \binom{n+i}{2} = \sum_{i=1}^{16} \binom{n+i}{2} + \binom{n+17}{2} - \binom{n+1}{2}$$

Por lo tanto, sabemos que $\sum_{i=1}^{16} \binom{n+1+i}{2} - \sum_{i=1}^{16} \binom{n+i}{2} = \binom{n+17}{2} - \binom{n+1}{2}$. Por nuestra hipótesis de inducción, sabemos que $\sum_{i=1}^{16} \binom{n+i}{2}$ se puede expresar como suma de naturales consecutivos dos a dos al cuadrado. Por ello, debemos ver si al sustituir dicha expresión por esa suma y sumarle $\binom{n+17}{2} - \binom{n+1}{2}$, obtenemos la expresión $(n+2)^2 + (n+4)^2 + (n+6)^2 + (n+8)^2 + (n+10)^2 + (n+12)^2 + (n+14)^2 + (n+16)^2$. Esto equivale a ver que $(n+2)^2 + (n+4)^2 + (n+6)^2 + (n+8)^2 + (n+10)^2 + (n+12)^2 + (n+14)^2 + (n+16)^2 - ((n+1)^2 + (n+3)^2 + (n+5)^2 + (n+7)^2 + (n+9)^2 + (n+11)^2 + (n+13)^2 + (n+15)^2) = \binom{n+17}{2} - \binom{n+1}{2}$:

$$(n+2)^2 + (n+4)^2 + (n+6)^2 + (n+8)^2 + (n+10)^2 + (n+12)^2 + (n+14)^2 + (n+16)^2$$
$$-((n+1)^2 + (n+3)^2 + (n+5)^2 + (n+7)^2 + (n+9)^2 + (n+11)^2 + (n+13)^2 + (n+15)^2) =$$

$$= 8n^2 + 144n + 816 - (8n^2 + 128n + 680) = 16n + 136$$

Y si desarrollamos $\binom{n+17}{2} - \binom{n+1}{2}$:

$$\binom{n+17}{2} - \binom{n+1}{2} = \frac{(n+17)!}{2!(n+15)!} + \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} = \frac{n^2+33n+272}{2} - \frac{n^2+n}{2} = 16n+136$$

Por lo tanto, concluimos que $P(n+1)$ es cierto, luego hemos probado lo que queríamos.

A continuación, me ha parecido interesante dejar también escrito mi primer intento, el cual tenía mal un pequeño detalle, y es que no demostraba que la suma de los naturales al cuadrado fuese de naturales **distintos**, de ahí que en la versión final, el enunciado a demostrar incluya que esa suma sea de la forma $(n+1)^2+(n+3)^2+(n+5)^2+(n+7)^2+(n+9)^2+(n+11)^2+(n+13)^2+(n+15)^2$, pues de esa forma nos aseguramos de que son distintos.

Ejercicio 1. Versión antigua Sea n un número natural mayor que 1. Considere la suma de los números combinatorios siguiente: S $= \sum_{i=1}^{16} C(n+i, 2)$. Demuestre que la suma S se puede expresar como una suma de cuadrados distintos de números naturales para todo número natural $n > 1$. Es decir, $S = a^2 + b^2 + c^2 + ...$, donde $a, b, c, ...$ son números naturales distintos entre sí.

Sea $P(n)$ el enunciado del tenor "el número natural n verifica que $\sum_{i=1}^{16} \binom{n+i}{2}$ se puede expresar como suma de naturales distintos entre sí al cuadrado". Empezamos con el caso base, es decir, el $n = 2$:

$$P(2) = \sum_{i=1}^{16} \binom{2+i}{2} = 968 = 2^2 + 8^2 + 30^2$$

Vemos que el enunciado es cierto para $n = 2$, que es nuestro caso base. A continuación, suponemos que $P(n)$ es cierto (hipótesis de inducción) y veremos que suponer esto implica que $P(n+1)$ es cierto. Veamos la expresión de la sumatoria para $n+1$:

$$\sum_{i=1}^{16} \binom{n+1+i}{2} = \sum_{i=2}^{17} \binom{n+i}{2} = \sum_{i=1}^{16} \binom{n+i}{2} + \binom{n+17}{2} - \binom{n+1}{2}$$

Por nuestra hipótesis de inducción, sabemos que $\sum_{i=1}^{16} \binom{n+i}{2}$ se puede expresar como suma de números naturales distintos al cuadrado. Por lo tanto, nuestro problema se reduce a demostrar que $\binom{n+17}{2} - \binom{n+1}{2}$ se puede expresar como suma de naturales distintos al cuadrado. Esto da lugar a un segundo problema de inducción.

Sea $P'(n)$ el enunciado del tenor "el número natural n verifica que $\binom{n+17}{2} - \binom{n+1}{2}$ se puede expresar como suma de naturales distintos entre sí al cuadrado". Empezamos con el caso base, es decir, el $n = 2$:

$$P(2) = 171 - 3 = 168 = 2^2 + 8^2 + 10^2$$

Vemos que el enunciado para $n = 2$ es cierto. Ahora, suponemos cierto $P'(n)$ (hipótesis de inducción) y vemos que esto implica que $P'(n+1)$ es cierto. Comenzamos desarrollando la expresión $\binom{n+17}{2} - \binom{n+1}{2}$ para n y saber qué es lo que estamos suponiendo cierto:

$$\binom{n+17}{2}-\binom{n+1}{2}=\frac{(n+17)!}{2!(n+15)!}-\frac{(n+1)!}{2!(n-1)!}=\frac{n^2+33n+272}{2}-\frac{n^2+n}{2}=16n+136$$

Análogamente, desarrollamos la expresión para $n+1$:

$$\binom{n+18}{2}-\binom{n+2}{2}=\frac{(n+18)!}{2!(n+16)!}-\frac{(n+2)!}{2!n!}=\frac{n^2+35n+306}{2}-\frac{n^2+3n+2}{2}=16n+152$$

Sin embargo, $16n+152$ se puede expresar como $(16n+136)+16$, donde sabemos que $16n+136$ se puede expresar como suma de naturales distintos al cuadrado por nuestra hipótesis de inducción y $16=4^2$, por lo que concluimos que $P'(n+1)$ es cierto y, por lo tanto, $P(n+1)$, como se quería demostrar.