1. Toda sucesión estrictamente creciente verifica la condición de Cauchy.
FALSO. Para que cumpla la condición de Cauchy, solo tiene que ser convergente. Por ejemplo, la sucesión de los naturales es estrictamente creciente y no verifica la condición de Cauchy ya que no es convergente.

2. Toda serie convergente es una sucesión acotada.
VERDADERO. Una serie es una sucesión, y como se vio en teoría, toda sucesión convergente está acotada (plasmar demostración del tema 3).

3. Si f y g son discontinuas en a entonces fg es discontinua en a.
FALSO. Por ejemplo, si f y g son funciones tales que $f(x)=g(x)=1$ cuando x es racional y $f(x)=g(x)=-1$ cuando x es irracional, se tiene que fg es la función constantemente 1, la cual es claramente continua no solo en a, sino en todo R.

4. Toda serie mayorada es convergente.
FALSO. La serie dada por la sucesión $\{-n\}$ está mayorada por -1 pero diverge. Esta afirmación sería cierta si la serie fuese creciente, pues toda sucesión creciente y mayorada es convergente.

5. Una sucesión no acotada no puede tener una sucesión parcial convergente.
FALSO. Definamos una sucesión tal que para los naturales pares sus términos sean iguales a 1 y para los naturales impares sea igual a la sucesión de los naturales. Está claro que la sucesión no está acotada pero tiene una sucesión parcial convergente (la de los naturales pares).

6. Toda función polinómica no constante o se anula en algún punto o alcanza un máximo o un mínimo absolutos en en R.
VERDADERO. Los polinomios de grado impar son funciones continuas que siempre se anulan en algún punto (corolario de los ceros de los polinomios de grado impar) y los polinomios de grado par, dependiendo del signo de su coeficiente líder, o bien alcanzan un mínimo o un máximo absoluto en R (eso se demuestra apoyándose en el Teorema de Weierstrass).

7. Si f es una función estrictamente monótona y definida en un intervalo, entonces su función inversa es continua.
VERDADERO. Al ser f estrictamente monótona, se verifica que su inversa también lo será. Además, como f^-1(J) = I siendo J = f(I), y por hipótesis sabemos que I es un intervalo, la inversa de f es estrictamente monótona cuya imagen es un intervalo, por lo tanto es continua por un teorema del tema 14.

8. Una función f es continua en a si, y sólo si, |f| es continua en a.
FALSO. Sea f la función definida en R que a cada real le hace corresponder 1 si es racional y -1 si es irracional. Esta función es discontinua en todo punto mientras que |f| es la función constantamente 1 y, evidentemente, es continua en todo punto.

9. Hay una función f:[0,1] --> R que es continua y verifica que f([0,1]) = [2,3[.
FALSO. Por el Teorema de Weierstrass, toda función definida y continua en un intervalo cerrado y acotado alcanza en dicho intercalo un mínimo y un máximo absolutos en dicho intervalo. Por ello, la imagen debería ser un intervalo cerrado.

10. Si un conjunto no vacío de números reales no tiene supremo tampoco tiene máximo.
VERDADERO. Si dicho conjunto tuviese máximo, ese sería su supremo.

11. Toda función continua en un intervalo alcanza en algún punto de dicho intervalo un valor mínimo.
FALSO. Definamos la función $f:]0,1[\to R$ con $f(x) = x$. Esta función es continua en $]0,1[$ pero no alcanza un mínimo en dicho intervalo.

12. Toda función definida en un intervalo cuya imagen es un intervalo es continua.
FALSO. Definamos la función f tal que f vale 1 si $x = 0$ y $f(x)=x$ para todo $0 < x < 1$. Esta función está definida en el intervalo $[0,1[$, su imagen es el intervalo $]0,1]$ y, sin embargo, es discontinua en $x = 0$.

13. Sea A un conjunto de números reales no vacío y mayorado y b = sup(A). Dado e > 0, existe algún a de A tal que b – e < a < b.
FALSO. Si consideramos al conjunto $A = \{1, 2, 4\}$ y $e = 1$, sabemos que sup(A) y, sin embargo, $\sup(A) - 1 = 3$, y en A no hay un elemento que sea simultáneamente mayor que 3 y menor que 4.

14. Existe una sucesión acotada de números reales que verifica que $|x_n - x_m| >= 10^{(-10)}$ siempre que n no sea igual a m.
FALSO. Toda sucesión acotada tiene, por el Teorema de Bolzano-Weierstrass, ua sucesión parcial convergente y que, por lo tanto, verifica la condición de Cauchy. Dado $e = 10^{(-10)}$, sabemos que existe un natural m tal que para todo n mayor o igual que este se va a verificar que $|x_n - x_m| < 10^{(-10)}$. Hemos llegado así a una contradicción.

15. Si f es continua en a y g es discontinua en a entonces f + g puede ser continua o discontinua.
FALSO. Por un teorema del tema 12, si la suma de dos funciones es continua y una de ellas es continua, entonces la otra debe ser continua. Por ello, si f + g es continua y f también, g debe ser continua, llegando a una contradicción.

16. Toda sucesión tiene una sucesión parcial convergente o una sucesión parcial divergente.
VERDADERO. Si la sucesión está acotada, por el Teorema de Bolzano-Weierstrass, tendrá una parcial convergente. Si no está acotada podrá construirse una sucesión parcial divergente.

17. Una sucesión que no tiene ninguna sucesión parcial convergente tampoco tiene ninguna sucesión parcial acotada.
VERDADERO. Sea una sucesión que no tiene ninguna sucesión parcial convergente. Si la sucesión tuviese alguna sucesión parcial acotada, por el Teorema de Bolzano-Weierstrass, dicha parcial tendría una parcial convergente, y sabemos que una parcial de una parcial también es una parcial de la de partida, pero entonces tendríamos una contradicción ya que habríamos encontrado una parcial convergente de la de partida.

18. Una sucesión no está mayorada si, y sólo si, tiene alguna sucesión parcial positivamente divergente.
VERDADERO. Implicación de derecha a izquierda: Si una sucesión tiene una parcial positivamente divergente, entonces para cada natural va a existir un k natural tal que $x_{\sigma(k)} > n$, por lo que la sucesión no puede estar mayorada.
Implicación de izquierda a derecha: Si una sucesión no está mayorada, podemos definir una aplicación de N en N así: $\sigma(1) = \min\{n \text{ en } N: x_{(n)} >= 1\}$ y $\sigma(n+1) = \{p \text{ en } N: x_{(n+1)} >= n+1, p > \sigma(n)\}$. Tenemos que la aplicación sigma es estrictamente creciente y que la parcial que define es positivamente divergente.

19. Si la serie definida por $|a_{(n+1)} - a_{(n)}|$ es convergente, entonces la definida por $a_{(n)}$ es

convergente.
VERDADERO. Si la serie definida por |a_(n+1) – a_(n)| es convergente, eso significa que la serie definida por {a_(n+1) – a_(n)} es absolutamente convergente y, por lo tanto, convergente. Esa serie es igual a la sucesión {a_(n+1) – a_(n)}, que al ser convergente, implica que a_(n+1) lo es y, por lo tanto, a_(n) también.

20. Hay un conjunto A de números reales que no es vacío y cuyo conjunto de minorantes es un intervalo del tipo]-inf,a[.
FALSO. Por el principio del ínfimo, para todo conjunto no vacío de números reales y minorado se verifica que el conjunto de sus minorantes tiene máximo, por lo que el intervalo debería estar cerrado por la derecha (es decir, a debería estar incluido).

21. Si {x_(n)} es una sucesión acotada de números reales, entonces {x_(n)} tiene la siguiente propiedad: para cada d(delta) > 0, pueden encontrarse m,n naturales, con n y m distintos, tales que |x_(n) – x_(m)| < d.
VERDADERO. Sea una sucesión acotada de números reales. Por el Teorema de Bolzano-Weierstrass sabemos que debe tener alguna sucesión parcial convergente. Dicha parcial convergente cumple la condición de Cauchy por ser convergente, por lo que dado cualquier delta positivo, existirá un número natural "w" tal que para cualquier par de naturales n y m mayores o iguales que él se verificará que |x_(n) – x_(m)| < d.

22. Si {x_(n)} es una sucesión estrictamente creciente tal que {x_(n+1) – x_(n)} --> 0, entonces {x_(n)} es convergente.
FALSO. Si consideramos la sucesión dada por la raíz de n, la cual es estrictamente creciente y positivamente divergente, vemos que x_(n+1) – x_(n) es igual a 1/(raíz(n+1) + raíz(n)), la cual claramente converge a 0.

23. Si f:[0,1] ---> R es continua y f(x) > 0 para todo x en [0,1] entonces existe a(alfa) > 0 tal que f(x) > a para todo x en [0,1].
VERDADERO. Como f es continua y está definida en un intervalo cerrado y acotado, entonces su imagen debe ser también un intervalo cerrado y acotada de la forma [b,c]. Entonces, como f(x) > 0 para todo x en [0,1], b debe ser un real positivo, así que podemos tomar el a cuya existencia se afirma como a = (b/2), para el cual se verifica que 0 < a < f(x) para todo x en [0,1].

24. Toda función f: A ---> R, inyectiva en A y cuya imagen es un intervalo, es continua.
FALSO. Definamos la función f tal que f vale 1 si x = 0 y f(x)=x para todo 0 < x < 1. Esta función está definida en el intervalo [0,1[, su imagen es el intervalo]0,1] y, sin embargo, es discontinua en x = 0.

25. Si una función f está definida en un intervalo [a, b] y toma todos los valores comprendidos entre f(a) y f(b), entonces es continua en [a, b].
FALSO. Podemos definir una función f en el intervalo [0,1] tal que f(x) = x para 0 <= x < 1 y f(x) = 0 para x = 1. Esta función está definida en el intervalo [0,1] y toma todos los valores comprendidos entre f(0) y f(1) y, sin embargo, es discontinua en x = 1.

26. Si f : I → R es una función inyectiva, I es un intervalo y J = f(I) es un intervalo entonces su función inversa es continua en J.
FALSO. Definamos la función tal que f(0) = 1 y f(x) = x para todo 0 < x < 1. Esta función es inyectiva, está definida en un intervalo [0,1[y su imagen es el intervalo]0,1]. Mientras tanto, se tiene que su inversa g cumple que g(x) = x para 0 < x < 1 y g(1) = 0. Dicha inversa no es continua en [0,1[ya que es discontinua en x = 1.
27. Si f, g : R → R son funciones continuas tales que f(x) = g(x) para todo x ∈ Q, entonces f(x)

= g(x) para todo x∈R.
VERDADERO. Para ello consideremos un irracional "y" y, por la densidad de Q en R podemos construir una sucesión de puntos racionales que converge a y, es decir, {x_(n)} con x_(n) racional. Por la continuidad de f y g en R, para todo sucesión de números reales {x_(n)} ---> y se va a tener que {f(x_(n)} ---> f(y) y que {g(x_(n)} ---> g(y). Como {x_(n)} es una sucesión de números racionales y f(x) = g(x) para todo x racional, se tiene que {f(x_(n)} = {g(x_(n)} y, por la unicidad del límite, tenemos también que f(y) = g(y). Así, hemos obtenido también que f(x) = g(x) para todo x irracional, y, por lo tanto, f(x) = g(x) para todo número real.

28. Si x_(n) <= y_(n) para todo n∈N y la serie definida por y_(n) es convergente, entonces la serie definida por x_(n) también es convergente.

FALSO. Sea {x_(n)} = {-n} y {y_(n)} = {1/n^2}. Está claro que -n < 1/n^2 para todo natural y, sin embargo, la sucesión definida por {y_(n)} es convergente (serie de Riemann de exponente 2) mientras que la definida por {x_(n)} no, ya que es negativamente divergente.

29. Si f : R → R es continua y verifica que f(R) ⊂ Q entonces f es constante.

VERDADERO. Por el Teorema del Valor Intermedio, al ser f continua y estar definida en un intervalo, su imagen debe ser un intervalo. Si f no fuese constante y tomara dos valores x e y racionales distintos entre sí, también debería toma todos los valores que hay en]x,y[. Sin embargo, por la densidad de los irracionales en R, en]x,y[habría número irracionales, por lo que habríamos llegado a una contradicción ya que teníamos que f(R)⊂ Q. Por ello, f debe ser constante a un número racional en concreto.