TOPOLOGÍA. Examen del Parcial 1
- Licenciatura de Matemáticas. GRUPO 2^0 A -
Curso 2010/11

Nombre:

Razonar las respuestas

1. Sea X un conjunto y $A \subset X$ un subconjunto fijo. Se define $\tau = \{O \subset X; A \subset O\} \cup \{\emptyset\}$. Probar que τ es una topología en X. Para cada $x \in X$, probar que $\beta_x = \{\{x\} \cup A\}$ es una base de entornos de x en (X, τ). Dado $B \subset X$, hallar $\mathrm{int}(B)$ y $\overline{B}$.

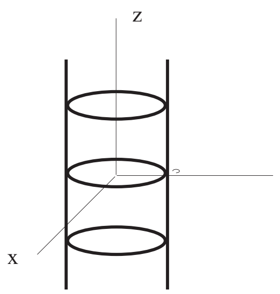
2. En $\mathbb{R}^3$ se considera el cilindro $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1\}$ y el hiperboloide reglado $Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$ (ver figura). Hallar explícitamente un homeomorfismo entre ambos conjuntos.

3. Se considera en $\mathbb{N}$ la topología $\tau = \{A_n; n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset\}$, con $A_n = \{n, n+1, \ldots\}$. Estudiar la continuidad de las aplicaciones $f : (\mathbb{N}, \tau) \to (\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \tau \times \tau)$, $g : (\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \tau \times \tau) \to (\mathbb{N}, \tau)$ dadas por

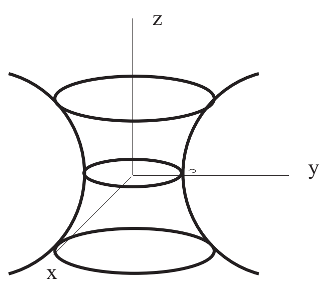
$$f(n) = (n^2, n+1), \qquad g(n, m) = n + m.$$

4. Estudiar conexión, componentes conexas y conexión local del siguiente conjunto de $\mathbb{R}^2$: $X = ([0, 1] \times \{0\}) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(1, \frac{1}{n})\}$.

Todas las preguntas valen lo mismo.



X



Y

1. Sea X un conjunto y $A \subset X$ un subconjunto fijo. Se define $\tau = \{O \subset X; A \subset O\} \cup \{\emptyset\}$. Probar que τ es una topología en X. Para cada $x \in X$, probar que $\beta_x = \{\{x\} \cup A\}$ es una base de entornos de x en (X, τ). Dado $B \subset X$, hallar $\text{int}(B)$ y $\overline{B}$.

   Solución.

   (a) Como $X \supset A$, entonces $X \in \tau$. Por otro lado, si dos conjuntos contienen a A, lo mismo sucede con su intersección; y si una familia de conjuntos contienen a A, su unión también contiene a A. Esto prueba que τ es una topología.

   (b) El conjunto $\{x\} \cup A$ es una abierto (contiene a A), luego es un entorno de x. Si U es un entorno de x, entonces existirá $O \in \tau$ tal que $x \in O \subset U$. Como O es abierto, contiene a A, y como $x \in \emptyset$, entonces $\{x\} \cup A \subset O$.

   (c) El interior de B es el mayor abierto dentro de B. Si $A \not\subset B$, entonces $int(B) = \emptyset$. Si $A \subset B$, entonces B es un abierto y su interior coincide con B.

   Si $A \cap B \neq \emptyset$, entonces todo punto x es adherente a B, ya que $(\{x\} \cup A) \cap B \supset A \cap B \neq \emptyset$. Entonces $\overline{B} = X$. Si $A \cap B = \emptyset$, entonces $\overline{B} = B$, ya que si $x \notin B$, $(\{x\} \cup A) \cap B = \emptyset$.

2. En $\mathbb{R}^3$ se considera el cilindro $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1\}$ y el hiperboloide reglado $Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$ (ver figura). Hallar explícitamente un homeomorfismo entre ambos conjuntos.

   Solución. Se define la aplicación $f : X \to Y$ mediante

$$f(x, y, z) = \left(x\sqrt{1 + z^2}, y\sqrt{1 + z^2}, z\right).$$

   Esta aplicación es biyectiva y su inversa es

$$g(x, y, z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z\right).$$

   Tanto f como g son aplicaciones continuas, sin más que componer con las proyecciones de $\mathbb{R}^3$.

3. Se considera en $\mathbb{N}$ la topología $\tau = \{A_n; n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset\}$, con $A_n = \{n, n + 1, \ldots\}$. Estudiar la continuidad de las aplicaciones $f : (\mathbb{N}, \tau) \to (\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \tau \times \tau)$, $g : (\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \tau \times \tau) \to (\mathbb{N}, \tau)$ dadas por

$$f(n) = (n^2, n + 1), \qquad g(n, m) = n + m.$$

   Solución.

   (a) Como f llega a un espacio producto, componemos con las proyecciones. Con la primera, $p \circ f : (\mathbb{N}, \tau) \to (\mathbb{N}, \tau)$, $f(n) = n^2$. Esta aplicación es continua, pues

$$(p \circ f)^{-1}(A_n) = \{m \in \mathbb{N}; m^2 \geq n\} = \begin{cases} \{m \in \mathbb{N}; m \geq E[\sqrt{n}]\} = A_{E[\sqrt{n}]} & \text{si } \sqrt{n} \in \mathbb{N} \\ \{m \in \mathbb{N}; m \geq E[\sqrt{n}] + 1\} = A_{E[\sqrt{n}]+1} & \text{si } \sqrt{n} \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

   Para la segunda proyección p', $p' \circ f$ es continua, pues

$$(p' \circ f)^{-1}(A_n) = A_{n-1}.$$

(b) La aplicación g es continua. Una base de entornos de n es $\beta_n = \{A_n\}$. Una base de entornos de (n,m) en $\tau \times \tau$ es $A_n \times A_m$. Finalmente, $g(A_n \times A_m) \subset A_{(n+m)}$.

4. Estudiar conexión, componentes conexas y conexión local del siguiente conjunto de $\mathbb{R}^2$: $X = ([0,1] \times \{0\}) \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{(1, \frac{1}{n})\}$.

   Solución. Las componentes conexas de X son $[0,1] \times \{0\}$ y los puntos $(1, \frac{1}{n})$. Para ello, cada uno de los conjuntos son conexo, ya que el primero es convexo (también es homeomorfo a $[0,1]$) y los otros son puntos. Veamos que son los conexos más grandes. Sea $(0,0) \in [0,1] \times \{0\}$ y supongamos que $[0,1] \times \{0\} \subsetneqq C_{(0,0)}$. Entonces existirá $(1, \frac{1}{n}) \in C_{(0,0)} - ([0,1] \times \{0\})$. Sea $y_0 = (\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1})/2$. Se tendría la siguiente descomposición en abiertos de $C_{(0,0)}$:

$$C_{(0,0)} = (C_{(0,0)} \cap \{(x,y); y < y_0\}) \cup (C_{(0,0)} \cap \{(x,y); y > y_0\})$$

   la cual no es trivial, pues en el primer conjunto está $(0,0)$ y en el segundo $(1, 1/n)$. Esta contradicción prueba que $[0,1] \times \{0\}$ es una componente conexa.

   Sea ahora $(1, 1/n)$ y supongamos que $\{(1, 1/n)\} \subsetneqq C_{(1,1/n)}$. Entonces existirá $m \in \mathbb{N}$ tal que $(1, 1/m) \in C_{(1,1/n)}$ (no puede ser de la forma $(x,0)$, ya que $C_{(x,0)} = C_{(0,0)}$). Sin perder generalidad, supongamos que $m > n$. Usando la notación anterior, tendríamos una partición no trivial de $C_{(1,1/n)}$:

$$C_{(1,1/n)} = (C_{(1,1/n)} \cap \{(x,y); y < y_0\}) \cup (C_{(1,1/n)} \cap \{(x,y); y > y_0\}),$$

   lo cual es una contradicción.

   El espacio no es localmente conexo, ya que el punto $p := (1,0)$ no tiene ningún entorno conexo. Sea U tal entorno. Entonces existirá $r > 0$ tal que $B_r(p) \cap X \subset U$. Es evidente que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(1, 1/n) \in B_r(p) \cap X \subset U$. Si U es conexo, entonces

$$U \subset C_p = [0,1] \times \{0\},\ U \subset C_{(1,1/n)} = \{(1, 1/n)\} :$$

   contradicción.