Ejercicios MNI

TEMA 4

1. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$f(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_2x_3) + 7x_1 - x_2 + x_3$$

Comprobar que alcanza su valor mínimo en un único punto y calcularlo.

Necesitamos expresar f de la forma de una función en la que se pueda aplicar el principio del mínimo:

$$\underbrace{x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_2x_3}_{} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Por Sylvester sabemos que es definida positiva}$$

$x = (x_1, x_2, x_3)_{B_u}$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T A x - b^T x \Rightarrow \text{Siendo } b = (7, -1, 1)$$

Alcanzará su valor mínimo en la solución de este sistema:

$$Ax = b$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases} x_1 = 7 \\ x_2 + x_3 = -1 \\ x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases} \quad -2x_3 = -2 \Rightarrow x_3 = 1, \quad x_2 = -2$$

Sol.: $(7, -2, 1)$

2. $b = (1, 2, -1, 3.4)$

$S = \{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,\ 2x_1 - x_3 + 5.4x_4 = 0\}$

Hallar proyección ortogonal de b sobre S

Primero hallemos una base de S:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_3 + 5.4x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -2x_2 - 3x_3 + \frac{17}{5}x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -10x_2 - 15x_3 - 17x_4 = 0 \end{cases}$$

$$x_2 = \frac{17x_4 - 15x_3}{10} \Rightarrow x_1 + \frac{27x_4 - 5x_3}{10} = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{5x_3 - 27x_4}{10}$$

Si $x_3 = 2$ $x_4 = 0 \Rightarrow (1, -3, 2, 0)$

Si $x_3 = 0$ $x_4 = 10 \Rightarrow (-27, 17, 0, 10)$

Y calculamos A^TA, siendo $A = \begin{bmatrix} 1 & -27 \\ -3 & 17 \\ 2 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ -27 & 17 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -27 \\ -3 & 17 \\ 2 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -78 \\ -78 & 1118 \end{bmatrix}$$

$$A^Tb = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ -27 & 17 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 17/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 41 \end{bmatrix}$$

Resolvemos el sistema $A^TAx = A^Tb$

$$\begin{bmatrix} 14 & -78 \\ -78 & 1118 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 41 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 14x_1 - 78x_2 = -7 \\ \frac{4784}{7} x_2 = 2 \Rightarrow x_2 = \frac{7}{2392} \Rightarrow x_1 = -\frac{89}{184} \end{cases}$$

Y la proyección de b sobre S será:

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & -27 \\ -3 & 17 \\ 2 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -89/184 \\ 7/2392 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{673}{1196} \\ \frac{1795}{1196} \\ -\frac{89}{92} \\ \frac{35}{1196} \end{bmatrix}$$

3. $(1,2), (2.17,2), (1,3.7), (3,1/2), (0.56,-1) \in \mathbb{R}^2$

$y = mx + n \quad y = ax^2 + bx + c \quad y = \alpha\sqrt{x} + \beta \Rightarrow$ Determinar las que mejor aproximan los datos

$\boxed{y = mx + n}$

$$\underbrace{m \begin{bmatrix} 1 \\ 2.17 \\ 1 \\ 3 \\ 0.56 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3.7 \\ 0.5 \\ -1 \end{bmatrix} = b$$

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2.17 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0.56 & 1 \end{bmatrix}$, esto es un vector de la forma

Ax que pertenece $S = \mathcal{L}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2.17 \\ 1 \\ 3 \\ 0.56 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. Por lo tanto, se nos pide la proyección ortogonal de b sobre S

Usamos Máxima para resolver el sistema $A^TAx = A^Tb$:

$$x = \left(-\frac{1890}{50899}, \frac{152433}{101798}\right)$$

Y entonces $m = -\frac{1890}{50899}$ y $n = \frac{152433}{101798}$

$$\boxed{y = -\frac{1890}{50899}x + \frac{152433}{101798}}$$

$$\boxed{y = ax^2 + bx + c}$$

Mismo razonamiento que antes:

$$a\begin{bmatrix} 1 \\ 4.7089 \\ 1 \\ 9 \\ 0.3136 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 \\ 2.17 \\ 1 \\ 3 \\ 0.56 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3.7 \\ 0.5 \\ -1 \end{bmatrix} = b$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4.7089 & 2.17 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 0.3136 & 0.56 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{Resolvemos } A^TAx = A^Tb$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{y = -2.282339x^2 + 8.1592407x - 3.86043007}$$

$$\boxed{y = \alpha\sqrt{x} + \beta}$$

Mismo razonamiento que antes:

$$\alpha\begin{bmatrix} 1 \\ 1.473092 \\ 1 \\ \sqrt{3} \\ \sqrt{0.56} \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3.7 \\ 0.5 \\ -1 \end{bmatrix} \Longrightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1.473092 & 1 \\ 1 & 1 \\ \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{0.56} & 1 \end{bmatrix}$$

ó

Resolvemos $A^TAx = A^Tb \Longrightarrow y = 0.8976706\sqrt{x} + 1.0855652$

5. $f(x) = x + 2x^2$ $(x \in [0,\pi])$

S subespacio de $C([0,\pi])$ con $S = \mathcal{L}\{x, \cos x, 1, e^{x/\pi}\}$

Usaremos la norma de las funciones continuas para hallar la matriz A:

$$A = \left[\int_0^{\pi} f(x)g(x)\,dx\right]$$ siendo f y g las funciones de la base de S

(Usamos Máxima)

$b = \int_0^{\pi} (x+2x^2)\,\varphi_i(x)$ siendo cada $\varphi_i(x)$ una función de la base:

(Usamos Máxima)

Se resuelve el sistema $Ax=b$
y x serán las coordenadas en la base
de S de la proyección

$\Downarrow$

$Ax = -1.455349\cos x + 23.52103729\, e^{x/\pi}$
$-6.49861623 - 22.05723588$

6.
$P = \{0 = x_0 < x_1 = 0.3 < x_2 = 0.9 < x_3 = 1.1 < x_4 = 1.5\}$
$f : [0, 1.5] \longrightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$ $(0 \leq x \leq 1.5)$
Determinar la mejor aproximación de f en $S_1^0(P)$ de $C([0,1.5])$

Está hecho en Máxima

4. $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ espacio euclídeo

$\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle}$

Probar que es norma. Probar previamente la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$x,y \in E \Rightarrow \langle x,y\rangle^2 \leq \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$$

Dado $u \in E$, $0 \leq \langle u,u\rangle$ por ser producto escalar.
Más en concreto, $0 \leq \left\langle x - \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle} y,\ x - \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle} y\right\rangle$

$\Updownarrow$

$$0 \leq \langle x,x\rangle + \left\langle x, -\frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle} y\right\rangle + \left\langle -\frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle} y, x\right\rangle + \left\langle \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle} y, \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle} y\right\rangle$$

$\Updownarrow$

$$0 \leq \langle x,x\rangle - \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}\langle x,y\rangle + \left\langle x, -\frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle} y\right\rangle + \frac{\langle x,y\rangle^2}{\langle y,y\rangle^2}\langle y,y\rangle$$

$\Updownarrow$

$$0 \leq \langle x,x\rangle - \frac{\langle x,y\rangle^2}{\langle y,y\rangle} - \frac{\langle x,y\rangle^2}{\langle y,y\rangle} + \frac{\langle x,y\rangle^2}{\langle y,y\rangle}$$

$\Updownarrow$

$$0 \leq \langle x,x\rangle - \frac{\langle x,y\rangle^2}{\langle y,y\rangle} \Leftrightarrow \langle x,y\rangle^2 \leq \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$$

Y como hemos demostrado $\forall x,y \in E \Rightarrow \langle x,y\rangle^2 \leq \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$

$$\Downarrow \text{(Tomando raíces)}$$

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$$

Y ya podemos demostrar que es norma:

¿(n1) $x \in E$, $\|x\| \geq 0$ y "=" $\Leftrightarrow x = 0$?

Sale de las propiedades del producto escalar de forma inmediata: $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle} \geq 0 \Rightarrow$ Claramente

Y además $\|x\| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\langle x,x\rangle} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

¿(n2) $x,y \in E \Rightarrow \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$?

Lo demostraremos usando la expresión al cuadrado:

$$\|x+y\|^2 \leq (\|x\|+\|y\|)^2$$

$$\Updownarrow$$

$$\langle x+y, x+y\rangle \leq \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle + 2\sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle}$$

$$\Updownarrow$$

$$\langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle + 2\langle x,y\rangle \leq \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle + 2\sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle}$$

$$\Updownarrow$$

$$2\langle x,y\rangle \leq 2\sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{\langle x,y\rangle \leq \|x\|\|y\|}_{\text{Es la desigualdad de Cauchy-Schwarz}}$$

Quedа probado.

¿(n3) $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in E \Rightarrow \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$?

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x,x\rangle} = |\lambda|\sqrt{\langle x,x\rangle} = |\lambda| \cdot \|x\| \checkmark$$

Por lo tanto, concluimos que es norma.