Tema 3

2.1 Definición. Sea A un conjunto no vacío. Una sucesión de elementos de A es una **aplicación** del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales en A. En particular, una sucesión de números reales es una **aplicación** del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales.

Por ejemplo, en el *principio de los intervalos encajados* se consideró, sin nombrarla, una sucesión de intervalos (en este caso el conjunto A de la definición anterior sería el conjunto de todos los intervalos de $\mathbb{R}$). *En todo lo que sigue solamente consideraremos sucesiones de números reales por lo que, a veces, nos referiremos a ellas simplemente como "sucesiones".*

Dada una sucesión $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ suele emplearse una notación especial para representarla. Para $n \in \mathbb{N}$ suele notarse el número real $\varphi(n)$ en la forma $x_n = \varphi(n)$ (naturalmente la letra "x" nada tiene de especial y puede sustituirse por cualquier otra). La sucesión misma se representa por $\varphi = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, es decir, el símbolo $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ debe interpretarse como la **aplicación** que a cada $n \in \mathbb{N}$ hace corresponder el número real x_n. Cuando no hay posibilidad de confusión escribimos simplemente $\{x_n\}$ en vez de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. El número x_n se llama *término n-ésimo* de la sucesión; para $n = 1, 2, 3$ se habla respectivamente de primero, segundo, tercer término de la sucesión.

Dos sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son iguales cuando para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $x_n = y_n$.

No hay que confundir la sucesión $\{x_n\}$, que es una aplicación, con su *conjunto imagen*, que es el subconjunto de $\mathbb{R}$ formado por todos los números x_n, el cual se representa por $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Por ejemplo, $\{(-1)^n\}$ y $\{(-1)^{n+1}\}$ son sucesiones distintas con el mismo conjunto imagen: $\{(-1)^n : n \in \mathbb{N}\} = \left\{(-1)^{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\} = \{-1, 1\}$.

Si α es un número real, la sucesión constante cuyos términos son todos iguales a α se representa por $\{\alpha\}_{n\in\mathbb{N}}$.

En todo lo que sigue las letras m, n, p, q, con o sin subíndices, representarán números naturales.

2.2 Definición. Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ **converge a un número real** x si, dado cualquier número real $\varepsilon > 0$, existe un número natural m_ε tal que si n es cualquier número natural mayor o igual que m_ε se cumple que $|x_n - x| < \varepsilon$.

Se dice también que el número x es **límite** de la sucesión $\{x_n\}$ y se escribe $\lim\limits_{n\to\infty} \{x_n\} = x$ o, simplemente, $\lim\{x_n\} = x$ e incluso, si no hay posibilidad de confusión, $\{x_n\} \to x$.

Teniendo en cuenta que

$$|x_n - x| < \varepsilon \Longleftrightarrow x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon \Longleftrightarrow x_n \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$$

resulta que $\{x_n\}$ converge a x si dado cualquier número $\varepsilon > 0$ se verifica que *todos los términos de la sucesión a partir de uno en adelante* están en el intervalo $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$.

También podemos reformular la definición dada considerando para cada $\varepsilon > 0$ el conjunto de números naturales $A_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N} : |x_n - x| \geqslant \varepsilon\}$. Tenemos entonces que:

$$\boxed{\lim\{x_n\} = x \iff \left[\forall \varepsilon > 0 \ \text{ el conjunto } A_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N} : |x_n - x| \geqslant \varepsilon\} \text{ es finito}\right]} \tag{2.1}$$

Esta forma de expresar la convergencia puede ser útil para probar que una sucesión dada, $\{x_n\}$ no converge a x. Para ello basta encontrar un número $\varepsilon > 0$ tal que el conjunto A_ε sea infinito.

La definición 2.2 es típica del Análisis pues en ella se está definiendo *una igualdad*, $\lim\{x_n\} = x$, en términos de *desigualdades*: $|x_n - x| < \varepsilon$ siempre que $n \geqslant m_\varepsilon$.

El número natural m_ε, cuya existencia se afirma en la definición anterior, cabe esperar que dependa del número $\varepsilon > 0$, lo que explica la notación empleada. Lo usual es que m_ε tenga que ser tanto más grande cuanto más pequeño sea el número $\varepsilon > 0$. Conviene observar que si p es un número natural tal que $p > m_\varepsilon$ entonces para p, al igual que para m_ε, se verifica que si n es cualquier número natural mayor o igual que p se cumple que $|x_n - x| < \varepsilon$. Es decir, si $\{x_n\}$ converge a x, entonces para cada $\varepsilon > 0$ dado hay, de hecho, *infinitos* números naturales m_ε para los que se satisface lo dicho en la defición anterior.

2.6 Proposición. *Una sucesión convergente tiene un único límite.*

Demostración. Sea $\{x_n\} \to x$ e $y \neq x$. Tomemos $\varepsilon > 0$ tal que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap]y-\varepsilon, y+\varepsilon[=\emptyset$. Puesto que $\{x_n\} \to x$ el conjunto $A_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N} : |x - x_n| \geqslant \varepsilon\}$ es finito. Puesto que si $|x - x_n| < \varepsilon$ entonces $|y - x_n| \geqslant \varepsilon$, tenemos que $B_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N} : |y - x_n| \geqslant \varepsilon\} \supset \mathbb{N} \backslash A_\varepsilon$ y, por tanto, B_ε es infinito, lo que prueba que $\{x_n\}$ no converge a y. $\square$

2.7 Proposición. *Supongamos que* $\lim\{x_n\} = x$*,* $\lim\{y_n\} = y$ *y que el conjunto de números naturales* $A = \{n \in \mathbb{N} : x_n \leqslant y_n\}$ *es infinito. Entonces se verifica que* $x \leqslant y$*.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Bastará probar que $x < y + \varepsilon$. Por hipótesis existen m_1, m_2 tales que

$$x - \varepsilon/2 < x_p < x + \varepsilon/2 \quad \text{y} \quad y - \varepsilon/2 < y_q < y + \varepsilon/2 \tag{2.2}$$

para todo $p \geqslant m_1$ y todo $q \geqslant m_2$. Puesto que el conjunto A del enunciado es un conjunto infinito de números naturales podemos asegurar que hay algún $m \in A$ tal que $m \geqslant \max\{m_1, m_2\}$. Por tanto las desigualdades 2.2 se cumplen para $p = q = m$, además como $m \in A$ se tiene que $x_m \leqslant y_m$. Deducimos que $x - \varepsilon/2 < x_m \leqslant y_m < y + \varepsilon/2$ y, por tanto, $x < y + \varepsilon$. $\square$

2.8 Proposición (Principio de las sucesiones encajadas). *Supongamos que* $\{x_n\}$*,* $\{y_n\}$*,* $\{z_n\}$ *son sucesiones tales que* $\lim\{x_n\} = \lim\{z_n\} = \alpha$ *y existe un número natural* m_0 *tal que para todo* $n \geqslant m_0$ *se verifica que* $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$*, entonces la sucesión* $\{y_n\}$ *es convergente y* $\lim\{y_n\} = \alpha$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Por hipótesis existen m_1, m_2 tales que

$$\alpha - \varepsilon < x_p < \alpha + \varepsilon \quad \text{y} \quad \alpha - \varepsilon < z_q < \alpha + \varepsilon \tag{2.3}$$

para todo $p \geqslant m_1$ y todo $q \geqslant m_2$. Sea $m_3 = \text{máx}\{m_0, m_1, m_2\}$. Para todo $n \geqslant m_3$ las desigualdades 2.3 se cumplen para $p = q = n$, además como $n \geqslant m_0$ se tiene que $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$. Deducimos que, para todo $n \geqslant m_3$, se verifica que

$$\alpha - \varepsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < \alpha + \varepsilon$$

y, por tanto, $\alpha - \varepsilon < y_n < \alpha + \varepsilon$, es decir, $\lim\{y_n\} = \alpha$. $\square$

Una consecuencia inmediata de la proposición 2.8 es que **si cambiamos arbitrariamente un número finito de términos de una sucesión, la nueva sucesión así obtenida es convergente si lo era la de partida y con su mismo límite**. Esto es lo que dice el siguiente resultado.

2.10 Corolario. *Sean* $\{x_n\}$ *e* $\{y_n\}$ *sucesiones cuyos términos son iguales a partir de uno en adelante, es decir, hay un número natural* m_0 *tal que para todo* $n \geqslant m_0$ *es* $x_n = y_n$*. Entonces* $\{x_n\}$ *converge si, y sólo si,* $\{y_n\}$ *converge en cuyo caso las dos sucesiones tienen igual límite.*

2.11 Definición. Una sucesión $\{x_n\}$ se dice que es:

- Mayorada o acotada superiormente si su conjunto imagen está mayorado, es decir, si hay un número $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leqslant \mu$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- Minorada o acotada inferiormente si su conjunto imagen está minorado, es decir, si hay un número $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda \leqslant x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- Acotada si su conjunto imagen está acotado, equivalentemente, si hay un número $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|x_n| \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- Creciente si $x_n \leqslant x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- Estrictamente creciente si $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- Decreciente si $x_n \geqslant x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- Estrictamente decreciente si $x_n > x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- Monótona si es creciente o decreciente.

- Estrictamente monótona si es estrictamente creciente o decreciente.

Nótese que si una sucesión $\{x_n\}$ es creciente (resp. decreciente) entonces se verifica que $x_m \leqslant x_n$ (resp. $x_m \geqslant x_n$) siempre que $m \leqslant n$.

2.12 Proposición. *Toda sucesión convergente está acotada.*

Demostración. Supongamos que $\lim\{x_n\} = x$. Todos los términos de $\{x_n\}$ a partir de uno en adelante estarán en el intervalo $]x-1, x+1[$, es decir, hay un número $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant m$ se verifica que $|x_n - x| < 1$, lo que implica que

$$|x_n| \leqslant |x_n - x| + |x| < 1 + |x| \quad \text{para todo } n \geqslant m.$$

Tomando $M = \max\{1+|x|, |x_1|, \dots, |x_m|\}$, máximo cuya existencia está garantizada por ser un conjunto finito, tenemos que $|x_n| \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. □

La proposición anterior es útil a veces para probar que una sucesión *no* es convergente: para ello basta probar que no está acotada.

2.14 Teorema. *Toda sucesión monótona y acotada es convergente. Más concretamente, si una sucesión* $\{x_n\}$ *es:*

i) creciente y mayorada, entonces $\lim\{x_n\} = \beta$ *donde* $\beta = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. *Además se verifica que* $x_n < \beta$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*, o bien que todos los términos a partir de uno en adelante son iguales a* β.

ii) decreciente y minorada, entonces $\lim\{x_n\} = \alpha$ *donde* $\alpha = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. *Además se verifica que* $\alpha < x_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*, o bien que todos los términos a partir de uno en adelante son iguales a* α.

Demostración. Probaremos $i)$ quedando la demostración de $ii)$ como ejercicio. La hipótesis de que $\{x_n\}$ es mayorada garantiza, por el principio del supremo, la existencia del número real $\beta = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Dado $\varepsilon > 0$, como $\beta - \varepsilon < \beta$, tiene que haber algún término x_m de la sucesión tal que $\beta - \varepsilon < x_m$. Puesto que la sucesión es creciente para todo $n \geqslant m$ se verificará que $x_m \leqslant x_n$ y, por tanto $\beta - \varepsilon < x_n$. En consecuencia $\beta - \varepsilon < x_n < \beta + \varepsilon$ para todo $n \geqslant m$. Hemos probado así que $\lim\{x_n\} = \beta$. Finalmente, si hay algún término igual a β, $x_{m_0} = \beta$, entonces para todo $n \geqslant m_0$ tenemos que $\beta = x_{m_0} \leqslant x_n \leqslant \beta$ por lo que $x_n = \beta$. □