Análisis Matemático II

Tema 2: Ejercicios resueltos

1. Probar que la serie $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge absoluta y uniformemente en $\mathbb{R}$, siendo

$$f_n(x) = \frac{x}{n\,(1 + n\,x^2)} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Solución

Para cada $n \in \mathbb{N}$, la función f_n es derivable en $\mathbb{R}$ con

$$f_n'(x) = \frac{n\,(1 + n\,x^2) - 2\,n^2 x^2}{n^2\,(1 + n\,x^2)^2} = \frac{n\,(1 - n\,x^2)}{n^2\,(1 + n\,x^2)^2} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Vemos que $f'(x) \leq 0$ si $|\,x\,| \geq 1/\sqrt{n}$, mientras que $f'(x) \geq 0$ si $|\,x\,| \leq 1/\sqrt{n}$. Deducimos claramente que:

- Por una parte, f_n es decreciente en $\left]-\infty\,,\,\frac{-1}{\sqrt{n}}\right]$, con lo cual:

$$0 \geq f_n(x) \geq f_n\left(\frac{-1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{-1}{2\,n\,\sqrt{n}} \qquad \forall\, x \in \left]-\infty\,,\,\frac{-1}{\sqrt{n}}\right]$$

- Análogamente, f_n es decreciente en $\left[\frac{1}{\sqrt{n}}\,,\,+\infty\right[$, de donde:

$$0 \leq f_n(x) \leq f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2\,n\,\sqrt{n}} \qquad \forall\, x \in \left[\frac{1}{\sqrt{n}}\,,\,+\infty\right[$$

- Finalmente, f_n es creciente en $\left[\frac{-1}{\sqrt{n}}\,,\,\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ y obtenemos que

$$\frac{-1}{2\,n\,\sqrt{n}} = f_n\left(\frac{-1}{\sqrt{n}}\right) \leq f_n(x) \leq f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2\,n\sqrt{n}} \quad \forall\, x \in \left[\frac{-1}{\sqrt{n}}\,,\,\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

Observando los tres casos anteriores, concluimos que

$$|\,f_n(x)\,| \leq \frac{1}{2\,n\,\sqrt{n}} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Puesto que la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2\,n\,\sqrt{n}}$ es convergente, el test de Weierstrass nos dice que la serie $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge absoluta y uniformemente en $\mathbb{R}$. ■

2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $g_n : [\,1\,,\,+\infty\,[\to \mathbb{R}$ la función definida por

$$g_n(x) \;=\; \frac{1}{n^{\,x}} \qquad \forall\, x \in [\,1\,,\,+\infty\,[$$

Probar las siguientes afirmaciones:

(a) Para $\rho \in \mathbb{R}$ con $\rho > 1$, la serie $\sum_{n \geq 1} g_n$ converge uniformemente en $[\,\rho\,,\,+\infty\,[$

(b) La sucesión $\{g_n\}$ converge uniformemente a cero en $[\,1\,,\,+\infty\,[$

(c) La serie $\sum_{n \geq 1} g_n$ no converge uniformemente en $]\,1\,,\,+\infty\,[$

Solución

(a) Para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $x \mapsto n^x = e^{x \log n}$ es creciente en $\mathbb{R}$, de donde deducimos que

$$|\,g_n(x)\,| \;=\; \frac{1}{n^{\,x}} \;\leq\; \frac{1}{n^{\,\rho}} \qquad \forall\, x \in [\,\rho\,,\,+\infty\,[\,, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Por ser $\rho > 1$, la serie armónica $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\,\rho}}$ es convergente, luego la desigualdad anterior nos permite usar el test de Weierstrass, para concluir que la serie $\sum_{n \geq 1} g_n$ converge uniformemente en la semirrecta $[\,\rho\,,\,+\infty\,[$.

(b) Usando de nuevo que la función $x \mapsto n^x$ es creciente, tenemos que

$$|\,g_n(x)\,| \;=\; \frac{1}{n^{\,x}} \;\leq\; \frac{1}{n} \qquad \forall\, x \in [\,1\,,+\infty[\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

y como $\{1/n\} \to 0$, deducimos que la sucesión $\{g_n\}$ converge uniformemente a cero en $[\,1\,,\,+\infty\,[$.

(c) Razonando ahora por reducción al absurdo, supongamos que la serie $\sum_{n \geq 1} g_n$ convergiese uniformemente en $]\,1\,,\,+\infty\,[$.

Fijado $\varepsilon > 0$, existiría $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $m \leq p < q$ se tendría

$$\sum_{n=p+1}^{q} \frac{1}{n^{\,x}} \;<\; \varepsilon \qquad \forall\, x \in]\,1\,,\,+\infty\,[$$

Fijados $p, q \in \mathbb{N}$ con $m \leq p < q$, de la desigualdad anterior obtendríamos que

$$\sum_{n=p+1}^{q} \frac{1}{n} \;=\; \lim_{x \to 1} \sum_{n=p+1}^{q} \frac{1}{n^{\,x}} \;\leq\; \varepsilon$$

En resumen, de esta forma habríamos probado que

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists m \in \mathbb{N} \; : \; m \leq p < q \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=p+1}^{q} \frac{1}{n} \leq \varepsilon$$

Si la afirmación anterior fuese cierta, la serie armónica $\sum_{n \geq 1} \dfrac{1}{n}$ sería una sucesión de Cauchy, es decir, dicha serie convergería, lo cual es falso. Esta contradicción prueba que la serie $\sum_{n \geq 1} g_n$ no puede converger uniformemente en $]\,1\,,\,+\infty\,[$. ∎

3. Estudiar la convergencia puntual, absoluta y uniforme de la serie de potencias

$$\sum_{n \geq 0} \frac{n\,!}{(\,n\,+\,1\,)^{\,n}}\, x^{\,n}$$

Solución

Conviene recordar que la sucesión $\left\{ \left(1 + \dfrac{1}{n} \right)^{n} \right\}$ es creciente y converge a e. En particular, anotamos para uso posterior que

$$\left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} \leq e \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

Denotando por $\{c_n\}$ a la sucesión de coeficientes de la serie dada, que son números positivos, para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{(n+1)\,!\; (\,n\,+\,1\,)^{\,n}}{n\,!\; (\,n\,+\,2\,)^{\,n+1}} = \left(\frac{n\,+\,1}{n\,+\,2} \right)^{n+1} = \left[\left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} \right]^{-1} \tag{2}$$

de donde deducimos claramente que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|\,c_{n+1}\,|}{|\,c_n\,|} = \frac{1}{e}$$

Usando ahora el criterio de la raíz para sucesiones, obtenemos que $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|\,c_n\,|} = 1/e$. Por tanto, tenemos una serie de potencias con radio de convergencia e.

Así pues, la serie converge absolutamente en el intervalo abierto $J =]-e\,,\,e\,[$ y uniformemente en cada conjunto compacto contenido en dicho intervalo. También sabemos que la serie no converge en ningún punto de $\mathbb{R} \setminus \overline{J}$.

Para $x = \pm e$, usando primero (2) y después (1), se tiene claramente que

$$\frac{|\, c_{n+1}\, x^{n+1}\,|}{|\, c_n\, x^n\,|} = e \left[\left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} \right]^{-1} \geq 1 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Esto prueba que la sucesión $\{\, |\, c_n\, x^n\,|\,\}$ es creciente, luego no puede converger a cero. Por tanto, la serie $\sum_{n \geq 0} c_n\, x^n$ no converge en los puntos e y $-e$, luego su campo de convergencia puntual es el intervalo abierto J.

Finalmente, estudiamos la convergencia uniforme en J. Razonando por reducción al absurdo, supongamos que el término general de la serie converge uniformemente a cero en J. Entonces existe un $m \in \mathbb{N}$ y una sucesión $\{\rho_n\}$ de números reales positivos, con $\{\rho_n\} \to 0$, tales que, para $n \geq m$ se tiene

$$c_n\, |\, x\,|^n = |\, c_n\, x^n\,| \leq \rho_n \qquad \forall\, x \in J$$

Para $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq m$ obtenemos entonces que

$$c_n\, e^n = \lim_{x \to e} c_n\, |\, x\,|^n \leq \rho_n$$

y como $\{\rho_n\} \to 0$, deducimos que $\{c_n\, e^n\} \to 0$. Esto es una contradicción, pues acabamos de ver que la sucesión $\{c_n\, e^n\}$ es creciente, luego no converge a cero. Así pues, el término general de la serie $\sum_{n \geq 0} c_n\, x^n$ no converge uniformemente a cero en J, luego dicha serie no converge uniformemente en J. ■