Ejercicio 5.23: Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \int_0^{x^3-x^2} e^{-t^2}\, dt$$

Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y determinar los extremos relativos de dicha función. Calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{sen(x^3 - x^2)}$$

Definimos $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función $g(x) = x^3 - x^2$. Al ser g continua y derivable en $\mathbb{R}$ y f continua en $\mathbb{R}^+$, por el Teorema Fundamental del Cálculo y aplicando la regla de la cadena, se tiene que f es derivable en $\mathbb{R}^+$ y además su derivada es:

$$f'(x) = (3x^2 - 2x)e^{(x^3-x^2)^2} = (3x^2 - 2x)e^{-x^6+2x^5-x^4}$$

Estudiamos ahora es signo de la derivada:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (3x^2 - 2x)e^{-x^6+2x^5-x^4} = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

Luego estudiando el signo de la derivada vemos que f es estrictamente decreciente en el intervalo $\left]0, \frac{2}{3}\right[$ y estrictamente creciente en el intervalo $\left]\frac{2}{3}, +\infty\right[$, luego tiene un mínimo absoluto en $x = \frac{2}{3}$.

Calculamos ahora el límite que se nos pide:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{sen(x^3 - x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^3-x^2} e^{-t^2}\, dt}{sen(x^3 - x^2)} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{(3x^2 - 2x)e^{(x^3-x^2)^2}}{(3x^2 - 2x)cos(x^3 - x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{(x^3-x^2)^2}}{cos(x^3 - x^2)} = \frac{1}{1} = 1$$