Ejercicio puntuable del Tema 2

Geometría II, Doble Grado en Matemáticas e Ingeniería Informática, Curso 2020/2021

14 de mayo de 2021

Ejercicio 1.- [3 puntos] Dado $a \in \mathbb{R}$ se considera en $\mathbb{R}^3$ la métrica g_a cuya matriz en la base usual es

$$\mathcal{M}(g_a, B_u) = \begin{pmatrix} a-2 & a & 1+a \\ a & 8 & a-2 \\ 1+a & a-2 & a \end{pmatrix}.$$

Clasifica según los valores del parámetro a la métrica g_a diciendo el tipo de métrica que es, dando su rango y su índice.

Ejercicio 2.- [4 puntos] Se considera en $\mathbb{R}^4$ la métrica g cuya matriz en la base usual es

$$\mathcal{M}(g, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) **[1.5 puntos]** Comprueba que el conjunto de vectores

$$B = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (1,-1,1,0), (\frac{3}{4}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4})\}$$

es una base ortonormal para la métrica g y clasifica la métrica g diciendo el tipo de métrica que es, dando su rango y su índice.

(b) **[1.5 puntos]** Utilizando el ejercicio 21 (apartado (c)) de la relación de problemas del Tema 1 encuentra una base B' de $\mathbb{R}^4$ tal que la matriz de la métrica g en dicha base tenga la siguiente expresión:

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) **[1 punto]** ¿ Es posible encontrar una base B'' de $\mathbb{R}^4$ tal que la matriz de la métrica g en dicha base tenga la siguiente expresión:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}?$$

Si tu respuesta es afirmativa tienes que encontrar dicha base. Si tu respuesta es negativa tienes que justificar razonadamente el motivo por el que dicha base no existe.

Ejercicio 3.- [3 puntos] Sea (V, g) un espacio vectorial métrico con $g \neq 0$. Demuestra que

$$\text{rango}(g) = \text{Máximo}\left\{\dim(\mathcal{U}) \,/\, \mathcal{U} \text{ es un subespacio vectorial de } V \text{ con } g_{|\mathcal{U}} \text{ una métrica no degenerada}\right\}.$$