Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Cálculo I – Evaluación 2 – Soluciones

Ejercicio 1. Prueba, usando el principio de inducción, que para todo $n\in\mathbb{N}$ se verifica la desigualdad:

$$\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{5\cdot 7\cdot 9\cdots(2n+3)} < \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}} \tag{1}$$

Solución.

Sea

$$A=\left\{n\in\mathbb{N} : \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{5\cdot 7\cdot 9\cdots(2n+3)} < \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}}\right\}$$

Se trata de probar que $A=\mathbb{N}$ para lo cual, puesto que $A\subset\mathbb{N}$, probaremos que A es un conjunto inductivo.

Claramente $\frac{2}{5}<\frac{1}{2}$, lo que prueba que $1\in A$.

Supongamos que $n\in A$ y probemos que $n+1\in A$. Puesto que suponemos que $n\in A$, se verifica la desigualdad (1), por lo que

$$\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)(2n+2)}{5\cdot 7\cdot 9\cdots(2n+3)(2n+5)} < \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}}\frac{2n+2}{2n+5} \tag{2}$$

Por tanto, bastará con probar que

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}}\frac{2n+2}{2n+5} \leqslant \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{(n+2)(n+3)(n+4)}} \tag{3}$$

Simplificando, esta desigualdad es lo mismo que

$$\frac{2\sqrt{n+1}}{2n+5} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n+4}}$$

Desigualdad que es equivalente a

$$4(n+1)(n+4)\leqslant(2n+5)^2 \quad\Longleftrightarrow\quad 4n^2+20n+16\leqslant 4n^2+20n+25 \quad\Longleftrightarrow\quad 16\leqslant 25$$

Queda así probada la desigualdad (3) que, junto con la desigualdad (2), prueba que

$$\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)(2n+2)}{5\cdot 7\cdot 9\cdots(2n+3)(2n+5)} < \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{(n+2)(n+3)(n+4)}}$$

Es decir, $n+1\in A$. Hemos probado que A es un conjunto inductivo de números naturales lo que, por el principio de inducción, nos dice que $A=\mathbb{N}$. En consecuencia, la desigualdad (1) es cierta para todo $n\in\mathbb{N}$. ☺

Comentario. En un ejercicio tan sencillo como este debe indicarse explícitamente lo que se va a hacer y su fundamento matemático. No debes dar por supuesto que el profesor ya sabe lo que tú vas a hacer y no explicar nada, cosa que hacéis algunos. En matemáticas, como regla general, siempre hay que simplificar todas las expresiones que encontréis, quien no simplifica correctamente la desigualdad (3) tiene que hacer más cálculos y es más fácil que se equivoque. Casi todos hacéis más o menos bien este ejercicio.

Ejercicio 2. Sea A un conjunto infinito y acotado de números reales. Un número $z \in \mathbb{R}$ se dice que es un *casi-mayorante* de A si el conjunto $\{a \in A : z < a\}$ es finito (puede ser vacío). Sea B el conjunto de todos los casi-mayorantes de A. Prueba que:

a) B no es vacío.

b) B está minorado y $\inf(B) \leqslant \sup(A)$.

c) Si $\inf(B) < \sup(A)$ entonces A tiene máximo.

Solución. a) Si z es un mayorante de A el conjunto $\{a \in A : z < a\}$ es vacío, luego $z \in B$. Así, todo mayorante de A pertenece a B, en particular $\sup(A) \in B$.

b) Si u es un minorante de A, el conjunto $\{a \in A : u \leqslant a\} \supset A$ y, como A es infinito, deducimos que si $b \in B$ necesariamente debe ser $u < b$. Así, todo minorante de A también es minorante de B.

Como B es un conjunto no vacío y minorado, podemos considerar su extremo inferior; y, como $\sup(A) \in B$, se verifica que $\inf(B) \leqslant \sup(A)$.

c) Si $\inf(B) < \sup(A)$ entonces, por la definición de ínfimo, existe algún $b_0 \in B$ tal que $b_0 < \sup(A)$. El conjunto $C = \{a \in A : b_0 < a\}$ es finito (porque $b_0 \in B$) y no es vacío (porque b_0 no es un mayorante de A ya que $b_0 < \sup(A)$). Puesto que C es finito y no vacío, tiene máximo, y es evidente que $\max(C) = \max(A)$, luego A tiene máximo.

Comentario. En este ejercicio hay de todo. Lo considero un ejercicio muy fácil pero debo estar equivocado porque casi nadie lo ha hecho completamente bien. Casi todos hacéis bien el punto a) probando que $\sup(A) \in B$ o también que cualquier mayorante de A pertenece a B.

Para probar que B está minorado, muchos razonáis que si z es un minorante de A entonces $z \notin B$, y de ahí, sin ninguna otra explicación, afirmáis que B está minorado. Eso me da la impresión de que algunos pensáis que si $z \notin B$ entonces z es un minorante de B. En general, si B es un conjunto cualquiera, eso no es correcto, pero en este caso sí lo es. Algunos probáis que si $b \in B$ entonces cualquier número mayor que b también pertenece a B (algo evidente). Eso implica que B es un intervalo, y como no está mayorado tiene que ser una semirrecta hacia la derecha, luego $B =]\inf(B), +\infty[$ o $B = [\inf(B), +\infty[$. Por tanto, si $z \notin B$ entonces z es un minorante de B. También puede deducirse que B está minorado teniendo en cuenta que los minorantes de A son el conjunto $]-\infty, \inf(A)]$, y como ningún minorante de A pertenece a B se sigue que $B \subset]\inf(A), +\infty[$ y, en particular, B está minorado. Por otra parte, del hecho de que si $b \in B$ entonces cualquier número mayor que b también pertenece a B, no se deduce directamente sin más que $B \supset]\inf(B), +\infty[$, para justificar esa inclusión considero que hay que dar alguna explicación adicional (por ejemplo, como arriba, que B es una semirrecta hacia la derecha, o razonando directamente: si $\inf(B) < x$ entonces hay algún $b \in B$ tal que $b < x$ luego $x \in B$).

Pero donde más cosas raras hay en la prueba del punto c). Creo que salvo una única excepción, todos os empeñáis en probarlo por reducción al absurdo, es decir queréis probar que si $\inf(B) < \sup(A)$ entonces la suposición de que A no tiene máximo lleva a contradicción. Para llegar a esa contradicción necesitas probar que si A no tiene máximo entonces para todo $u < \sup(A)$ se verifica que el conjunto $A \cap]u, \sup(A)[$ es infinito, cosa que nadie hace, o al menos dice, de forma explícita. En este punto hay muchos errores.

No tengo nada en contra de las demostraciones por reducción al absurdo, pero, siempre que pueda darse, una demostración directa es preferible. Supongo que, después de leer la solución, estaréis de acuerdo conmigo en que es un ejercicio sencillo.

Ejercicio 3. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ creciente. Para cada $\alpha \in]a, b[$ definamos:

$$\omega(f, \alpha) = \inf\{f(t) : \alpha < t \leqslant b\} - \sup\{f(s) : a \leqslant s < \alpha\}$$

Prueba que:

i) $\omega(f,\alpha) \geqslant 0$ y si $a \leqslant u < \alpha < v \leqslant b$ entonces $\omega(f,\alpha) \leqslant f(v) - f(u)$.

ii) Si $a < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_p < b$, entonces:

$$\omega(f,\alpha_1) + \omega(f,\alpha_2) + \cdots + \omega(f,\alpha_p) \leqslant f(b) - f(a)$$

iii) Para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto $S_n = \{\alpha \in]a,b[: \omega(f,\alpha) \geqslant 1/n\}$ es finito.

iv) El conjunto $S = \{\alpha \in]a,b[: \omega(f,\alpha) > 0\}$ es numerable.

Sugerencias. Para ii) considera puntos

$$a = x_0 < \alpha_1 < x_1 < \alpha_2 < x_2 < \alpha_3 < \cdots < x_{p-1} < \alpha_p < x_p = b$$

Y usa i).

Usando un resultado de teoría, iv) se deduce de iii).

Demostración. i) Pongamos $A = \{f(s) : a \leqslant s < \alpha\}$, $B = \{f(t) : \alpha < t \leqslant b\}$. Como para todos $a \leqslant s < \alpha < t \leqslant b$ se tiene que $f(s) \leqslant f(\alpha) \leqslant f(t)$, deducimos que $f(\alpha)$ es un mayorante de A y un minorante de B. Luego, por las definiciones de supremo e ínfimo, tenemos que $\sup(A) \leqslant f(\alpha) \leqslant \operatorname{ínf}(B)$. Luego $\omega(f,\alpha) = \operatorname{ínf}(B) - \sup(A) \geqslant 0$.

Es claro que si $a \leqslant u < \alpha < v \leqslant b$ entonces $f(u) \in A$ y $f(v) \in B$, por lo que $f(u) \leqslant \sup(A) \leqslant \operatorname{ínf}(B) \leqslant f(v)$ y, por tanto, $\omega(f,\alpha) \leqslant f(v) - f(u)$.

ii) Haciendo uso de la sugerencia y del punto i) tenemos que

$$\sum_{k=1}^{p} \omega(f,\alpha_k) \leqslant \sum_{k=1}^{p} \big(f(x_k) - f(x_{k-1})\big) = f(b) - f(a)$$

iii) Supongamos que $S_n \neq \emptyset$ y sean $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ elementos distintos de S_n. Tenemos entonces que

$$\frac{p}{n} \leqslant \sum_{k=1}^{p} \omega(f\alpha_k) \leqslant f(b) - f(a) \Longrightarrow p \leqslant n(f(a) - f(b))$$

Por tanto en S_n no puede haber más de $n(f(b) - f(a))$ elementos distintos, es decir, S_n es finito.

iv) Es evidente que para todo $n \in \mathbb{N}$ $S_n \subset S$, por lo que $S \supset \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$. Para probar la inclusión contraria, sea $x \in S$, es decir, $\omega(f,x) > 0$ y sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n\omega(f,x) > 1$ (propiedad arquimediana del orden de $\mathbb{R}$). Tenemos que $\omega(x,f) > \frac{1}{n}$, por lo que $x \in S_n$. Hemos probado que $S = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$ y por tanto S es numerable por ser unión numerable de conjuntos numerables (finitos o vacíos). ☺

Comentario. En este ejercicio también hay de todo. Por ejemplo, afirmar que un número está mayorado o minorado. Eso no tiene ningún sentido porque los conceptos de *estar mayorado* o *estar minorado* se refieren a un conjunto, no a un número. Algunos escriben cosas como $\operatorname{ínf}(f(s))$ o $\sup(f(t))$ ¿ínfimo de un número? ¿supremo de un número? Eso no tiene sentido. La notación es importante, debéis ser cuidadosos con la notación. Algunos se complican sin necesidad introduciendo *épsilon* donde para nada son necesarios. Pero donde hay más fallos es en los puntos iii) y iv). En el punto iii) os empeñáis en hacer una demostración por reducción al absurdo y no sabéis expresar bien lo que hacéis. Tenéis la idea clara de lo que pasa pero no sabéis expresarlo bien dando la impresión de que suponéis que S_n es finito que es justo lo que hay que probar. En el punto iv), salvo una excepción, nadie prueba la igualdad $S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$ sino que la dais como evidente, y después para probar que S es numerable hacéis unas distinciones innecesarias. En los apuntes del curso hay un resultado que dice literalmente:

> Sea B un conjunto numerable no vacío. Supongamos que para cada $x \in B$ tenemos un conjunto numerable no vacío A_x. Se verifica entonces que el conjunto $\mathcal{A} = \bigcup_{x \in B} A_x$ es numerable.

Ese enunciado es así porque en la demostración se usan aplicaciones sobreyectivas sobre los conjuntos A_x y, claro está, si A_x es vacío no tiene mucho sentido una aplicación sobreyectiva sobre el conjunto vacío. Por eso se supone que los A_x son no vacíos. Pero debería estar clarísimo que si a una unión numerable de conjuntos numerable no vacíos agregáis cualquier colección de conjuntos vacíos eso no cambia para nada la unión inicial que sigue siendo la misma y por tanto numerable. Así que cuando uséis este resultado olvidaros de la precisión *no vacíos*: la unión numerable de conjuntos numerables (vacíos o no vacíos) es numerable.