# Relación de ejercicios 1

**Ejercicio 1.16**: Estudiar el comportamiento de la función $f: A \to \mathbb{R}$ en el punto $\alpha$, en cada uno de los siguientes casos:

a) $A = ]2,+\infty[$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-4}}$ $(x \in A)$, $\alpha = 2$.

En $\alpha = 2$ la función no está definida ya que $2 \notin A$, pero podemos estudiar el límite por la derecha cuando $x$ tiende a $2$:

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-4}} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{es una indeterminación.}$$

Aplicamos L'hôpital:

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \underset{\text{derivo}}{=} \lim_{x\to 2^+} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} - 0 + \frac{1}{2\sqrt{x-2}}}{\frac{2x}{\cancel{2}\sqrt{x^2-4}}} \overset{\text{simplifico}}{=} \lim_{x\to 2^+} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x-2}}}{\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}} \overset{\text{denominador común}}{=}$$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{\frac{2\sqrt{x-2}+2\sqrt{x}}{(2\sqrt{x})(2\sqrt{x-2})}}{\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}} \underset{\substack{\text{factor común}\\ 2 \text{ y simplifico}}}{=} \lim_{x\to 2^+} \frac{\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}}{2\sqrt{x^2-2x}}}{\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}} =$$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{(\sqrt{x-2}+\sqrt{x})(\sqrt{x^2-4})}{2x\sqrt{x^2-2x}} \underset{\text{desarrollo}}{=} \lim_{x\to 2^+} \frac{(\sqrt{x-2}+\sqrt{x})(\sqrt{x+2})(\cancel{\sqrt{x-2}})}{2\cdot x\cdot \cancel{\sqrt{x-2}}\cdot\sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{(\sqrt{x-2}+\sqrt{x})(\sqrt{x+2})}{2x\sqrt{x}} = \lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{x^2-4}+\sqrt{x^2+2x}}{2x\sqrt{x}} \underset{\alpha=2}{=} \frac{0+2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Por tanto podemos concluir:

(No ha lugar a estudiar el límite por la izquierda ya que no está definida)

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-4}} = \frac{1}{2}$$

La función tiende a $\frac{1}{2}$ por la derecha de 2.

b) $A = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ , $f(x) = \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}$ $(x \in A)$ , $\alpha = 1$

La función en $\alpha = 1$ no está definida ya que $1 \notin A$ pero podemos estudiar el límite de la función por la derecha y por la izquierda cuando $x$ tiende a $1$:

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0} - \frac{1}{0} = \infty - \infty$$

Vamos a poner denominador común para poder aplicar L'hôpital:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1-\ln x}{(\ln x)(x-1)} = \frac{0}{0}$$ → una indeterminación. Aplicamos L'hôpital:

$$\lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{x-1}{x}+\ln x} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{x-1}{\cancel{x}}}{\frac{x-1+x\ln x}{\cancel{x}}} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x-1+x\ln x} = \frac{0}{0}$$

Nos vuelve a salir otra indeterminación, volvemos a aplicar L'hôpital:

$$\lim_{x\to 1} \frac{h'(x)}{j'(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\ln x + 2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Podemos concluir:

$$\boxed{\lim_{x\to 1} \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{2}}$$

La función en $1$ no está definida, pero cuando $x \to 1^-$ y $x \to 1^+$, el límite es $\frac{1}{2}$.