Procesos de desintegración, semivida y vida media.

Sea x_n = porcentaje de un compuesto desde el estado inicial. Sea ν = probabilidad de que una particula se desintegre en un ciclo y α = probabilidad de que sobreviva un ciclo mas. Se tiene que

$$\alpha + \nu = 1$$

y

$$x_{n+1} = \alpha x_n, \quad x_0 = 1.$$

Portanto $x_n = \alpha^n$.

Se llama semivida al tiempo promedio de ciclos en donde el compuesto se reduce a la mitad.

Si n_k es el primer ciclo donde el compuesto tiene porcentaje menor o igual que $\frac{1}{2^k}$ se obtiene que

$$\alpha^{n_k} \leq \frac{1}{2^k}$$

y n_k es el menor entero verificando esto.

obtenemos que

$$n_k = \text{ceil}\left[-\frac{\ln(2)}{\ln(\alpha)}\right],$$

donde $\text{Ceil}[x]$ = menor entero $\geq x$. (Función techo)

y el tiempo promedio se obtiene como

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{n_k}{k} = -\frac{\ln(2)}{\ln(\alpha)}.$$

Esta expresión se obtiene al imponer

$$\alpha^n = \frac{1}{2}$$

y despejar n sin tener en cuenta que n es un entero.

Por otro lado se habla de vida media al valor

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\left(x_n - x_{n+1}\right).$$

observar que $x_n - x_{n+1}$ es la cantidad de compuesto que se destruye en el periodo $n+1$.

usando $x_n = \alpha^n$ queda

$$(1-\alpha)\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\,\alpha^n.$$

Vamos a sumar la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\,\alpha^n = \frac{1}{(1-\alpha)^2}$

y obtenemos que la vida media es

$$(1-\alpha)\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\,\alpha^n = \frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{\mu}$$

lo cual es intuitivo.

Suma de la serie.

Sea

$$y_n = (n+1)\alpha^n = n\alpha^n + \alpha^n$$

$$z_n = \sum_{k=0}^{n-1} y_k$$

entonces

$$y_{n+2} - 2\alpha y_{n+1} + \alpha^2 y_n = 0, \quad \left[(\lambda-\alpha)^2 = \lambda^2 - 2\alpha\lambda + \alpha^2\right]$$

$$z_{n+1} - z_n = y_n .$$

Uso sustitución quedando

$$z_{n+3} - z_{n+2} - 2\alpha\left[z_{n+2} - z_{n+1}\right] + \alpha^2\left[z_{n+1} - z_n\right] = 0,$$

$$z_{n+3} - (2\alpha+1) z_{n+2} + (2\alpha + \alpha^2) z_{n+1} - \alpha^2 z_n = 0.$$

El polinomio $\lambda^3 - (2\alpha+1)\lambda^2 + (2\alpha+\alpha^2)\lambda - \alpha^2$ tiene por raíces $\lambda = 1$, $\lambda = \alpha$ doble y por tanto

$$z_n = c_1 + c_2\alpha^n + c_3 n\alpha^n$$

y además $Z_0 = 0,$

$$Z_1 = Y_0 = 1,$$

$$Z_2 = Y_0 + Y_1 = 1 + 2\alpha.$$

obtenemos

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0, \\ c_1 + \alpha c_2 + \alpha c_3 &= 1 \\ c_1 + \alpha^2 c_2 + 2\alpha^2 c_3 &= 1 + 2\alpha \end{aligned}$$

Para calcular $\lim_{n\to+\infty} Z_n = c_1$ luego sólo

este número es importante.

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & \alpha \\ 1+2\alpha & \alpha^2 & 2\alpha^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & \alpha \\ 1 & \alpha^2 & 2\alpha^2 \end{vmatrix}} = \frac{\alpha}{\alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha} = \frac{1}{(1-\alpha)^2}$$

Hay pequeños desajustes dado que suponemos que todas las partículas $\cdot X_n - X_{n+1}$ se descomponen al final del periodo. Si suponemos que lo hacen al principio del periodo tenemos un ciclo de diferencia

Si suponemos que el tiempo es continuo la vida media sale $\frac{1}{-\ln(\alpha)}$, se tiene obviamente

$$\frac{1}{\mu} - 1 \leq \frac{1}{-\ln(\alpha)} \leq \frac{1}{\mu}.$$