Análisis Matemático I

Tema 9: Matriz jacobiana

Matrices

Matrices

$\mathcal{M}_{M\times N}$ matrices $M\times N$ (M filas y N columnas) con coeficientes reales

$$A \in \mathcal{M}_{M\times N}\,, \quad A = \big(\alpha_{jk}\big) \quad \text{donde} \quad \alpha_{jk}\in\mathbb{R} \quad \forall j\in\Delta_M \quad \forall k\in\Delta_N$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1k} & \dots & \alpha_{1N} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2k} & \dots & \alpha_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{j1} & \alpha_{j2} & \dots & \alpha_{jk} & \dots & \alpha_{jN} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{M1} & \alpha_{M2} & \dots & \alpha_{Mk} & \dots & \alpha_{MN} \end{pmatrix}$$

$\mathcal{M}_{M\times N}$ es un espacio vectorial de dimensión MN (isomorfo a $\mathbb{R}^{MN}$)

Producto de matrices: $B\in\mathcal{M}_{P\times M}\,,\ A\in\mathcal{M}_{M\times N} \longrightarrow B\cdot A\in\mathcal{M}_{P\times N}$

$$B = \big(\beta_{ij}\big)\,,\quad A = \big(\alpha_{jk}\big) \quad\Longrightarrow\quad B\cdot A = \big(\gamma_{ik}\big) \quad \text{donde}$$

$$\gamma_{ik} = \sum_{j=1}^{M} \beta_{ij}\alpha_{jk} \quad \forall i\in\Delta_P\,,\ \forall k\in\Delta_N$$

El espacio vectorial $L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$

Matriz de una aplicación lineal

$$T \in L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M) \quad \longleftrightarrow \quad A = \left(\alpha_{jk}\right) \in \mathcal{M}_{M\times N}$$

$$\alpha_{jk} = (\pi_j \circ T)(e_k) \quad \forall j \in \Delta_M\,, \quad \forall k \in \Delta_N$$

$\{e_1, \ldots, e_N\}$ base usual, $\{\pi_1, \ldots, \pi_M\}$ proyecciones coordenadas

$$\mathbb{R}^N \ni x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{N\times 1} \quad \xrightarrow{T} \quad \mathbb{R}^M \ni T(x) = y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_M \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{M\times 1}$$

T aparece como producto de matrices: $T(x) = A \cdot x \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$

A es la matriz que representa a la aplicación lineal T
en las bases usuales de $\mathbb{R}^N$ y $\mathbb{R}^M$,
cuando los vectores de $\mathbb{R}^N$ y $\mathbb{R}^M$ se expresan como matrices columna

Abreviado: A es la matriz de la aplicación lineal T

Matriz jacobiana

Definición de la matriz jacobiana

$$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{R}^N, \quad f = (f_1, f_2, \ldots, f_M) : \Omega \to \mathbb{R}^M$$

Cuando f es diferenciable en $a \in \Omega$, la matriz jacobiana de f en a, es la matriz $Jf(a) \in \mathcal{M}_{M\times N}$ de la aplicación lineal $Df(a) \in L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$

Por tanto: $Df(a)(x) = Jf(a)\cdot x \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$

Cálculo de la matriz jacobiana

$$Jf(a) = \big(\alpha_{jk}\big) \in \mathcal{M}_{M\times N} \quad \text{donde} \quad \alpha_{jk} = \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(a) \quad \forall j \in \Delta_M, \quad \forall k \in \Delta_N$$

$$Jf(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \ldots & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_N}(a) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \ldots & \ldots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_N}(a) \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_M}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_M}{\partial x_2}(a) & \ldots & \ldots & \dfrac{\partial f_M}{\partial x_N}(a) \end{pmatrix}$$

Derivadas parciales de una composición de funciones

Regla de la cadena para las derivadas parciales

$$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{R}^N, \qquad U = U^\circ \subset \mathbb{R}^M$$

$$f : \Omega \to U, \quad g : U \to \mathbb{R}^P, \quad h = g \circ f : \Omega \to \mathbb{R}^P$$

Si f es diferenciable en un punto $a \in \Omega$,
y g es diferenciable en el punto $b = f(a) \in U$, entonces:

$$Jh(a) = Jg(b) \cdot Jf(a)$$

$$f = (f_1, f_2, \ldots, f_M), \quad g = (g_1, g_2, \ldots, g_P), \quad h = (h_1, h_2, \ldots, h_P)$$

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_k}(a) = \sum_{j=1}^{M} \frac{\partial g_i}{\partial y_j}(b) \, \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(a) \quad \forall i \in \Delta_P, \ \forall k \in \Delta_N$$

Cómo se entiende y cómo se recuerda la regla de la cadena

La regla de la cadena vista como cambio de variables

f, g, h describen la relación entre tres variables: $x \in \Omega$, $y \in U$, $z \in \mathbb{R}^P$:

$$y = f(x), \quad z = g(y), \quad z = g\big(f(x)\big) = h(x)$$

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_N), \quad y = (y_1, y_2, \ldots, y_M), \quad z = (z_1, z_2, \ldots, z_P)$$

Para cada $j \in \Delta_M$ y cada $i \in \Delta_P$ se tiene:

$$y_j = f_j(x_1, x_2, \ldots, x_N), \quad z_i = g_i(y_1, y_2, \ldots, y_M), \quad z_i = h_i(x_1, x_2, \ldots, x_N)$$

Notación intuitiva: para $k \in \Delta_N$, $j \in \Delta_M$, $i \in I_P$, escribimos:

$$\frac{\partial y_j}{\partial x_k}(a) = \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(a), \quad \frac{\partial z_i}{\partial y_j}(b) = \frac{\partial g_i}{\partial y_j}(b), \quad \frac{\partial z_i}{\partial x_k}(a)\,\frac{\partial h_i}{\partial x_k}(a)$$

Entonces, la regla de la cadena toma la siguiente forma:

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_k}(a) = \sum_{j=1}^{M} \frac{\partial z_i}{\partial y_j}(b)\,\frac{\partial y_j}{\partial x_k}(a) \qquad \forall k \in \Delta_N, \ \forall i \in \Delta_P$$

Ejemplo

$N = M = 2, \; P = 1$ campo escalar en coordenadas polares

$$\Omega = \mathbb{R}^+ \times]0,\pi[\subset \mathbb{R}^2, \quad f : \Omega \to \mathbb{R}^2, \quad f = (x,y)$$

$$f(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta), \quad x(\rho,\theta) = \rho\cos\theta, \quad y(\rho,\theta) = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \quad \forall (\rho,\theta) \in \Omega$$

f es diferenciable en todo punto $(\rho,\theta) \in \Omega$ con

$$Jf(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho}(\rho,\theta) & \dfrac{\partial x}{\partial \theta}(\rho,\theta) \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho}(\rho,\theta) & \dfrac{\partial y}{\partial \theta}(\rho,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}$$

$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} = f(\Omega), \; g : U \to \mathbb{R}$ diferenciable, $h = g \circ f$

En este caso la notación más intuitiva consiste en escribir:

$$z = g(x,y) = g(\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta) = h(\rho,\theta) \quad \forall (\rho,\theta) \in \Omega$$

- Las variables de partida x_1 y x_2 son ρ y θ
- x e y son funciones de ρ y θ mediante f
- pero también son las variables de las que depende z mediante g
- y como consecuencia, z depende de ρ y θ mediante h

Gradiente en coordenadas polares

Cálculo de las derivadas parciales en el ejemplo anterior

Si para $(\rho,\theta)\in\Omega$ escribimos $(x,y)=(\rho\cos\theta,\rho\operatorname{sen}\theta)\in U$, se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial\rho}(\rho,\theta) &= \frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\ \frac{\partial x}{\partial\rho}(\rho,\theta)+\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\ \frac{\partial y}{\partial\rho}(\rho,\theta)\\ &= \cos\theta\ \frac{\partial z}{\partial x}(x,y)+\operatorname{sen}\theta\ \frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial\theta}(\rho,\theta) &= \frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\ \frac{\partial x}{\partial\theta}(\rho,\theta)+\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\ \frac{\partial y}{\partial\theta}(\rho,\theta)\\ &= -\rho\operatorname{sen}\theta\ \frac{\partial z}{\partial x}(x,y)+\rho\cos\theta\ \frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\end{aligned}$$

$$\cos\theta\ \frac{\partial z}{\partial\rho}(\rho,\theta)\ -\ \frac{\operatorname{sen}\theta}{\rho}\ \frac{\partial z}{\partial\theta}(\rho,\theta)\ =\ \frac{\partial z}{\partial x}(x,y) \qquad \text{y}$$

$$\operatorname{sen}\theta\ \frac{\partial z}{\partial\rho}(\rho,\theta)\ +\ \frac{\cos\theta}{\rho}\ \frac{\partial z}{\partial\theta}(\rho,\theta)\ =\ \frac{\partial z}{\partial y}(x,y)$$

Relación entre rectas tangentes y plano tangente

$N = P = 1\,,\ M = 2$

$$\Omega = \Omega \subset \mathbb{R}^2\,, \quad \Omega \text{ conexo}, \quad f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ continua}, \quad \Sigma = \operatorname{Gr} f$$

$$\Sigma \subset \mathbb{R}^3 \text{ es la superficie explícita de ecuación:} \quad z = f(x,y) \ \ \forall (x,y) \in \Omega$$

f diferenciable en $(x_0, y_0) \in \Omega\,, \quad z_0 = f(x_0,y_0)\,, \quad P_0 = (x_0, y_0, z_0)$

$$\text{Plano tangente } \Pi: \quad z - z_0 = (x - x_0)\,\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (y - y_0)\,\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

C curva paramétrica en $\mathbb{R}^3$, con $P_0 \in C \subset \Sigma$

$C = \gamma(J)\,, \quad J$ intervalo abierto, $\gamma : J \to \Sigma$ continua, $P_0 = \gamma(t_0)\,, \quad t_0 \in J$

Ecuaciones paramétricas de C: $\ x = x(t)\,, \quad y = y(t) \quad z = f\big(x(t), y(t)\big) \quad \forall t \in J$

γ derivable en t_0 con $\gamma'(t_0) \neq 0$ (punto regular)

$$z'(t_0) = x'(t_0)\,\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + y'(t_0)\,\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

Recta tangente R: $\quad x = x_0 + t x'(t_0)\,, \quad y = y_0 + t y'(t_0)$

$$z = z_0 + t\left(x'(t_0)\,\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + y'(t_0)\,\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$$

Se tiene claramente que $R \subset \Pi$

Superficies en forma paramétrica

Definición de superficie paramétrica

$$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{R}^2, \quad \Omega \text{ conexo}, \; \Gamma : \Omega \to \mathbb{R}^3 \text{ continua}$$

$\Sigma = \Gamma(\Omega) = \{\Gamma(t,s) : (t,s) \in \Omega\}$ es una superficie paramétrica en $\mathbb{R}^3$

Si $\Gamma = (x,y,z)$, las ecuaciones paramétricas de Γ son:

$$x = x(t,s), \quad y = y(t,s), \quad z = z(t,s), \quad \forall (t,s) \in \Omega$$

Toda superficie explícita es una superficie paramétrica

$$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{R}^2, \quad \Omega \text{ conexo}, \; f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ continua}$$

$$\operatorname{Gr} f = \Gamma(\Omega) \text{ donde } \Gamma(x,y) = \big(x,y,f(x,y)\big) \;\; \forall (x,y) \in \Omega$$

luego $\operatorname{Gr} f$ es una superficie paramétrica

Análogamente se parametrizan superficies explícitas de los otros dos tipos:

$$\Sigma_1 = \Big\{\big(f(y,z),y,z\big) : (y,z) \in \Omega\Big\} \quad \text{y} \quad \Sigma_2 = \Big\{\big(x,f(x,z),z\big) : (x,z) \in \Omega\Big\}$$

Superficie paramétrica que no es explícita: un cilindro

$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$, superficie paramétrica de ecuaciones:

$$x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t, \quad z = s \quad \forall (t,s) \in \mathbb{R}^2$$

Plano tangente a una superficie paramétrica (I)

Se busca plano tangente

$\Sigma = \Gamma(\Omega)$ superficie paramétrica en $\mathbb{R}^3$

Ω abierto conexo de $\mathbb{R}^2$ y $\Gamma = (x, y, z) : \Omega \to \mathbb{R}^3$ continua

Suponemos que Γ es diferenciable en $(t_0, s_0) \in \Omega$ y sea $P_0 = \Gamma(t_0, s_0) \in \Sigma$

$$J\Gamma(t_0, s_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t}(t_0, s_0) & \frac{\partial x}{\partial s}(t_0, s_0) \\ \frac{\partial y}{\partial t}(t_0, s_0) & \frac{\partial y}{\partial s}(t_0, s_0) \\ \frac{\partial z}{\partial t}(t_0, s_0) & \frac{\partial z}{\partial s}(t_0, s_0) \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial t}(t_0, s_0), \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(t_0, s_0) \right)$$

Suponemos además que $J\Gamma(t_0, s_0)$ tiene rango 2

Sea $\delta > 0$ con $J_1 \times J_2 \subset \Omega$, donde $J_1 =]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$ y $J_2 =]s_0 - \delta, s_0 + \delta[$

Definimos $\gamma_1(t) = \Gamma(t, s_0) \ \ \forall t \in J_1$ y $\gamma_2(s) = \Gamma(t_0, s) \ \ \forall s \in J_2$

$\gamma_1(J_1)$ y $\gamma_2(J_2)$ curvas paramétricas contenidas en Σ, con $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(s_0) = P_0$

$\gamma_1{}'(t_0) = \dfrac{\partial \Gamma}{\partial t}(t_0, s_0)$ y $\gamma_2{}'(s_0) = \dfrac{\partial \Gamma}{\partial s}(t_0, s_0)$ linealmente independientes

Tenemos un único candidato para ser el plano tangente a Σ en P_0

Plano tangente a una superficie paramétrica (II)

Definición del plano tangente

Ω abierto conexo de $\mathbb{R}^2$, $\Gamma = (x, y, z) : \Omega \to \mathbb{R}^3$ continua, $\Sigma = \Gamma(\Omega)$

Si Γ es diferenciable en $(t_0, s_0) \in \Omega$ y $J\Gamma(t_0, s_0)$ tiene rango 2, decimos que $P_0 = \Gamma(t_0, s_0)$ es un punto regular de la superficie $\Sigma = \Gamma(\Omega)$

Entonces, el plano tangente Π a la superficie $\Sigma = \Gamma(\Omega)$ en el punto $P_0 = \Gamma(t_0, s_0) = (x_0, y_0, z_0)$ es el de ecuaciones paramétricas:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + (t - t_0)\, \frac{\partial x}{\partial t}(t_0, s_0) + (s - s_0)\, \frac{\partial x}{\partial s}(t_0, s_0) \\ y &= y_0 + (t - t_0)\, \frac{\partial y}{\partial t}(t_0, s_0) + (s - s_0)\, \frac{\partial y}{\partial s}(t_0, s_0) \\ z &= z_0 + (t - t_0)\, \frac{\partial z}{\partial t}(t_0, s_0) + (s - s_0)\, \frac{\partial z}{\partial s}(t_0, s_0) \end{aligned}$$

que se pueden abreviar en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + J\Gamma(t_0, s_0) \cdot \begin{pmatrix} t - t_0 \\ s - s_0 \end{pmatrix}$$

Observaciones sobre el plano tangente (I)

Justificación analítica

Π es también una superficie paramétrica, $\Pi = P(\mathbb{R}^2)$ donde:

$$P(t,s) = \Gamma(t_0,s_0) + D\Gamma(t_0,s_0)\Big((t,s)-(t_0,s_0)\Big) \quad \forall (t,s)\in\mathbb{R}^2, \text{ luego}$$

$$\lim_{(t,s)\to(t_0,s_0)} \frac{\Big\|\Gamma(t,s)-P(t,s)\Big\|}{\|(t,s)-(t_0,s_0)\|} = 0$$

Plano tangente a un cilindro

$$\Sigma = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2=1\} = \Gamma(\mathbb{R}^2)\subset\mathbb{R}^3, \text{ donde}$$

$$\Gamma(t,s) = (\cos t\,,\, \operatorname{sen} t\,,\, s) \quad \forall (t,s)\in\mathbb{R}^2$$

Γ es diferenciable en todo punto $(t,s)\in\mathbb{R}^2$ con

$$J\Gamma(t,s) = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} t & 0 \\ \cos t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

luego todo punto $(x_0,y_0,z_0)\in\Sigma$ es regular, con plano tangente:

$$x_0\,x + y_0\,y = 1$$

Observaciones sobre el plano tangente (II)

Justificación geométrica

J intervalo abierto en $\mathbb{R}$, $\varphi : J \to \Omega$ continua, $(t_0, s_0) = \varphi(\alpha_0)$ con $\alpha_0 \in J$

$\gamma = \Gamma \circ \varphi$, $\gamma(J)$ curva paramétrica, con $P_0 = \gamma(\alpha_0) \in \gamma(J) \subset \Sigma$

Supongamos que φ es derivable en α_0 con $\varphi'(\alpha_0) \neq 0$

entonces γ también es derivable en α_0 con:

$$\gamma'(\alpha_0) = J\Gamma(t_0, s_0) \cdot \varphi'(\alpha_0) \neq 0$$

luego $P_0 = \gamma(\alpha_0)$ es punto regular de la curva $\gamma(J)$ y

las ecuaciones de la recta tangente R, en forma matricial, son:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + J\Gamma(t_0, s_0) \cdot \varphi'(\alpha_0) \cdot (\alpha - \alpha_0) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Para $(x, y, z) \in R$, basta tomar $(t, s) \in \mathbb{R}^2$ dado por:

$$\begin{pmatrix} t - t_0 \\ s - s_0 \end{pmatrix} = \varphi'(\alpha_0) \cdot (\alpha - \alpha_0)$$

para obtener que $(x, y, z) \in \Pi$. Luego $R \subset \Pi$

Observaciones sobre el plano tangente (III)

Caso particular de una superficie explícita

$f:\Omega\to\mathbb{R}$ continua, $\operatorname{Gr} f=\Gamma(\Omega)$, $\Gamma(x,y)=\big(x,y,f(x,y)\big)$ $\forall\,(x,y)\in\Omega$
Si f es diferenciable en el punto $(x_0,y_0)\in\Omega$, Γ también lo es, con

$$J\Gamma(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

luego $P_0=\Gamma(t_0,s_0)=(x_0,y_0,z_0)$ es un punto regular, con plano tangente:

$$x=x_0+t\,,\quad y=y_0+s\,,\quad z=z_0+t\,\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+s\,\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\quad \forall\,(t,s)\in\mathbb{R}^2$$

que claramente equivale a:

$$z-z_0=(x-x_0)\,\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+(y-y_0)\,\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

De vuelta al gradiente de un campo escalar

Conjuntos de nivel de un campo escalar

$$U = U^\circ \subset \mathbb{R}^N, \quad f : U \to \mathbb{R} \ \text{ diferenciable}, \quad \lambda \in f(\Omega)$$

El conjunto de nivel λ del campo escalar f es:

$$N_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^N : f(x) = \lambda\}$$

Caso $N = 2$: curvas de nivel

Una curva $\gamma(J)$ es una curva de nivel del campo f cuando está contenida, en un conjunto de nivel, es decir, $\gamma(J) \subset U$ y $f \circ \gamma$ es constante

Si $(x_0, y_0) = \gamma(t_0)$ es un punto regular de $\gamma(J)$, se tiene entonces:

$$\big(\nabla f(x_0, y_0) \,\big|\, \gamma'(t_0)\big) = 0$$

Caso $N = 3$: superficies de nivel

Una superficie $\Gamma(\Omega)$ es una superficie de nivel del campo f cuando está contenida en un conjunto de nivel, es decir, $\Gamma(\Omega) \subset U$ y $f \circ \Gamma$ es constante

Si $(x_0, y_0, z_0) = \Gamma(t_0, s_0)$ es un punto regular de $\Gamma(\Omega)$, se tiene entonces:

$$\left(\nabla f(x_0, y_0, z_0) \,\Big|\, \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(t_0, s_0)\right) = \left(\nabla f(x_0, y_0, z_0) \,\Big|\, \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(t_0, s_0)\right) = 0$$

Un ejemplo ilustrativo

¿Regla de la cadena para funciones parcialmente derivables?

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \qquad f(t) = (t,t) \ \ \forall t \in \mathbb{R}, \qquad f'(0) = (1,1)$$

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad g(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^4} \ \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \qquad g(0,0) = 0$$

g es parcialmente derivable en $(0,0) = f(0)$ con $\nabla g(0,0) = (0,0)$

$$h = g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad h(t) = \frac{t}{1+t^2} \ \ \forall t \in \mathbb{R}, \qquad h'(0) = 1 \neq 0$$

En general, la regla de la cadena no es válida

para la composición de dos funciones parcialmente derivables

$\Sigma = \text{Gr}\, g$ es una superficie en forma explícita

$C = \gamma(\mathbb{R})$ con $\gamma(t) = \big(t, t, h(t)\big)$ $\forall t \in \mathbb{R}$ curva paramétrica con $C \subset \Sigma$

La recta tangente a C en el origen tiene vector de dirección $(1,1,1)$,

luego no está contenida en el plano $z = 0$

Por tanto, $z = 0$ no puede ser plano tangente a Σ en el origen