EXAMEN DE LMD

25 de junio de 2015

APELLIDOS, NOMBRE: ....

DNI: .... GRUPO:

1. a) Determina un número natural n sabiendo que el conjunto $\mathrm{D}(n)$ de los divisores positivos de n es un álgebra de Boole con las operaciones usuales, y que 105 y 42 son dos coátomos. Obtén además todos los elementos $x \in \mathrm{D}(n)$ tales que $\overline{105} \vee x = 42$.

   b) Representa la función booleana

$$f(x, y, z, t) = \overline{x}\, y\, z\, \overline{t} + y\, z\, \overline{t} + x \cdot (z \oplus t) + \overline{\overline{x} + y + z} + y\, z\, t,$$

   como suma de mintérminos, y halla una expresión mínima como suma de productos de literales.

Solución:

a) Para que el conjunto $\mathrm{D}(n)$ sea un álgebra de Boole es necesario que el número n sea libre de cuadrados. Es decir, en su descomposición como producto de factores primos no puede aparecer ningún número primo elevado a un exponente mayor que uno. Además, si x e y son coátomos, entonces $x \vee y = n$ (de la misma forma que si x e y son átomos, $x \wedge y = 1$). Entonces:

$$n = 105 \vee 42 = \mathrm{mcm}(105, 42) = \mathrm{mcm}(3 \cdot 5 \cdot 7,\ 2 \cdot 3 \cdot 7) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$$

Y ahora $\overline{105} \vee x = \frac{210}{105} \vee x = 2 \vee x = \mathrm{mcm}(2, x) = 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$. Es decir, tenemos que encontrar todos los números x tales que $\mathrm{mcm}(2, x) = 2 \cdot 3 \cdot 7$. Por tanto, en la descomposición de x como producto de primos deben aparecer el 3 y el 7. El 2 puede estar o no. Las únicas posibilidades son entonces $x = 21$ y $x = 42$.

b) Escribimos la tabla de la función f.

x	y	z	t	a $\overline{x}yz\overline{t}$	b $yz\overline{t}$	$z \oplus t$	c $x \cdot (z \oplus t)$	$\overline{x} + y + z$	d $\overline{\overline{x} + y + z}$	e yzt	$f = a + b + c + d + e$
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1
1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1
1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1

Y vemos que $f = m_6 + m_7 + m_8 + m_9 + m_{10} + m_{13} + m_{14} + m_{15}$. Y esta es la forma canónica disyuntiva. O si preferimos:

$$f(x,y,z,t) = \overline{x}\,y\,z\,\overline{t} + \overline{x}\,y\,z\,t + x\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{t} + x\,\overline{y}\,\overline{z}\,t + x\,\overline{y}\,z\,\overline{t} + x\,y\,\overline{z}\,t + x\,y\,z\,\overline{t} + x\,y\,z\,t$$

También podíamos haber llegado a esta expresión de f como sigue:

- $\overline{x}\,y\,z\,\overline{t} = m_6$.
- $y\,z\,\overline{t} = \overline{x}\,y\,z\,\overline{t} + x\,y\,z\,\overline{t} = m_6 + m_{14}$.
- $x \cdot (z \oplus t) = x\,(\overline{z}\,t + z\,\overline{t}) = x\,\overline{z}\,t + x\,z\,\overline{t} = x\,\overline{y}\,\overline{z}\,t + x\,y\,\overline{z}\,t + x\,\overline{y}\,z\,\overline{t} + x\,y\,z\,\overline{t} =$ $= m_9 + m_{13} + m_{10} + m_{14}$.
- $\overline{\overline{x} + y + z} = \overline{\overline{x}}\,\overline{y}\,\overline{z} = x\,\overline{y}\,\overline{z} = x\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{t} + x\,\overline{y}\,\overline{z}\,t = m_8 + m_9$.
- $y\,z\,t = \overline{x}\,y\,z\,t + x\,y\,z\,t = m_7 + m_{15}$.

Luego $f = m_6 + m_6 + m_{14} + m_9 + m_{13} + m_{10} + m_{14} + m_8 + m_9 + m_7 + m_{15} = m_6 + m_7 + m_8 + m_9 + m_{10} + m_{13} + m_{14} + m_{15}$.

Una vez calculada la forma canónica disyuntiva de f simplificamos esta expresión, y para eso nos valemos de los diagramas de Karnaugh.

	$\overline{x}\,\overline{y}$	$\overline{x}\,y$	$x\,y$	$x\,\overline{y}$
$\overline{z}\,\overline{t}$				1
$\overline{z}\,t$			1	1
$z\,t$		1	1	
$z\,\overline{t}$		1	1	1

	$\overline{x}\,\overline{y}$	$\overline{x}\,y$	$x\,y$	$x\,\overline{y}$
$\overline{z}\,\overline{t}$				1
$\overline{z}\,t$			1	1
$z\,t$		1	1	
$z\,\overline{t}$		1	1	1

Y nos queda la siguiente expresión de f:

$$f(x,y,z,t) = y\,z + x\,\overline{z}\,t + x\,\overline{y}\,\overline{t}$$

que es la expresión reducida como suma de producto de literales.

2. Clasifica la proposición lógica siguiente:

$$\Big(\big(t \vee p\big) \wedge \neg q \to r\Big) \wedge \Big(\neg r \wedge \big(p \vee t\big)\Big) \to q \vee s.$$

Solución:

Vamos a llamar α a esta proposición lógica. Tenemos que decidir si α es tautología, satisfacible y refutable o contradicción.

Fácilmente vemos que α no es contradicción pues para una interpretación I en la que $I(q) = 1$ (o $I(s) = 1$) se tiene que $I(\alpha) = 1$.

Por tanto tenemos que decidir entre si α es tautología o α es refutable. Dicho de otra forma, tenemos que ver si $\vDash \alpha$ (α es tautología) ó $\nvDash \alpha$ (α es refutable).

Por el teorema de la deducción sabemos que $\vDash \alpha$ es equivalente a

$$\Big(\big(t \vee p\big) \wedge \neg q \to r\Big) \wedge \Big(\neg r \wedge \big(p \vee t\big)\Big) \vDash q \vee s$$

Y esto último es equivalente a que el siguiente conjunto de fórmulas

$$\{((t \vee p) \wedge \neg q \to r) \wedge (\neg r \wedge (p \vee t)),\ \neg(q \vee s)\}$$

sea insatisfacible.

Calculamos la forma clausular de cada una de estas fórmulas.

- $$\begin{aligned} & ((t \vee p) \wedge \neg q \to r) \wedge (\neg r \wedge (p \vee t)) \\ \equiv\ & (\neg((t \vee p) \wedge \neg q) \vee r) \wedge (\neg r \wedge (p \vee t)) \\ \equiv\ & ((\neg(t \vee p) \vee \neg\neg q) \vee r) \wedge (\neg r \wedge (p \vee t)) \\ \equiv\ & (\neg(t \vee p) \vee \neg\neg q \vee r) \wedge (\neg r \wedge (p \vee t)) \\ \equiv\ & ((\neg t \wedge \neg p) \vee q \vee r) \wedge (\neg r \wedge (p \vee t)) \\ \equiv\ & ((\neg t \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r)) \wedge (\neg r \wedge (p \vee t)) \\ \equiv\ & (\neg t \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge \neg r \wedge (p \vee t) \end{aligned}$$

- $\neg(q \vee s) \equiv \neg q \wedge \neg s$

Luego hemos de comprobar si el conjunto de cláusulas

$$\{\neg t \vee q \vee r;\ \neg p \vee q \vee r;\ \neg r;\ p \vee t;\ \neg q;\ \neg s\}$$

es o no insatisfacible. Para ello, nos valemos del algoritmo de Davis-Putnam o del método de resolución.

$$\begin{array}{c} \{\neg t \vee q \vee r;\ \neg p \vee q \vee r;\ \neg r;\ p \vee t;\ \neg q;\ \neg s\} \\ \big|\ \lambda = \neg r \\ \{\neg t \vee q;\ \neg p \vee q;\ p \vee t;\ \neg q;\ \neg s\} \\ \big|\ \lambda = \neg q \\ \{\neg t;\ \neg p;\ p \vee t;\ \neg s\} \\ \big|\ \lambda = \neg t \\ \{\neg p;\ p;\ \neg s\} \\ \big|\ \lambda = \neg p \\ \{\square;\ \neg s\} \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} \neg p \vee q \vee r \arrow[d, no head] & p \vee t \arrow[dl, no head] \\ t \vee q \vee r \arrow[d, no head] & \neg t \vee q \vee r \arrow[dl, no head] \\ q \vee r \arrow[d, no head] & \neg q \arrow[dl, no head] \\ r \arrow[d, no head] & \neg r \arrow[dl, no head] \\ \square & \end{tikzcd}$$

Y al llegar a la cláusula vacía, el conjunto de cláusulas es insatisfacible, luego α es una tautología.

También podíamos haber llegado a esta conclusión calculando la tabla de verdad de α.

Llamemos α_1 a la fórmula $(t \vee p) \wedge \neg q \to r$, α_2 a la fórmula $\neg r \wedge (p \vee t)$ y β a la fórmula $q \vee s$. Entonces $\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \to \beta$.

p	q	r	s	t	$t \vee p$	$(t \vee p) \wedge \neg q$	α_1 $(t \vee p) \wedge \neg q \to r$	α_2 $\neg r \wedge (p \vee t)$	$\alpha_1 \wedge \alpha_2$	β $q \vee s$	α
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1
0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1
0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1
1	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1
1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1

Y vemos que α es tautología.

También podríamos haber razonado como sigue:

Imaginemos que hay una interpretación para la que $I(\alpha) = 0$. Entonces $I(q \vee s) = 0$ e $I((t \vee p) \wedge \neg q \to r) \wedge (\neg r \wedge (p \vee t)) = 1$.

- $I(q \vee s) = 0$ significa que $I(q) = 0$ e $I(s) = 0$.
- Si $I((t \vee p) \wedge \neg q \to r) \wedge (\neg r \wedge (p \vee t)) = 1$ entonces:
  - $I((t \vee p) \wedge \neg q \to r) = 1$.
  - $I(\neg r) = 1$, es decir, $I(r) = 0$.
  - $I(p \vee t) = 1$.

Puesto que $I(p \vee t) = 1$ e $I(\neg q) = 1$ se tiene que $I((p \vee t) \wedge \neg q) = 1$, con lo que $I((t \vee p) \wedge \neg q \to r) = 0$, pero acabamos de ver que el valor de verdad de esa fórmula debía ser 1. Por tanto, no existe esa interpretación para la que $I(\alpha) = 0$.

3. *a*) Sea α la siguiente fórmula:

$$\alpha = \forall y\Big(P(a,y) \to \forall y \exists x P(x,y)\Big)$$

Calcula el valor de verdad de α en cada una de las estructuras siguientes:

- Estructura $\mathcal{E}_1$.
  - Dominio: $\mathbb{N}$.
  - Asignación de constantes: $a = 0$.
  - Asignación de predicados: $P(x,y) \equiv y = x+1$.
- Estructura $\mathcal{E}_2$.
  - Dominio: $\mathbb{Z}_9$.
  - Asignación de constantes: $a = 0$.
  - Asignación de predicados: $P(x,y) \equiv y = x+1$.

b) Traduce a un lenguaje de primer orden la frase

"*Todo grupo de la asignatura LMD tiene más de un alumno*"

usando los símbolos de predicado G^1, A^1, E^2, P^2 con los significados siguientes:

$G(x)$	:	x es un grupo de la asignatura LMD;
$A(x)$	:	x es un alumno;
$E(x,y)$	:	el objeto x es igual al objeto y;
$P(x,y)$	:	x pertenece a y.

Solución:

a) Calculamos el valor de verdad de α en ambas estructuras.

- En la estructura $\mathcal{E}_1$ la fórmula $\forall y \exists x P(x,y)$ nos dice que en el conjunto de los números naturales, $\forall y \exists x (y = x+1)$. Esta afirmación es falsa, pues cuando $y = 0$ no podemos encontrar ningún número natural x tal que $x + 1 = y$.
  Sin embargo, la fórmula $P(a,y)$ se interpreta como verdadera para $y = 1$. Por tanto, cuando $y = 1$ el valor de verdad de $P(a,y) \to \forall y \exists x P(x,y)$ es cero. Entonces, el valor de verdad de α es cero.
  Puede ser que cree un poco de confusión el hecho de que se haya tomado el valor de $y = 1$ para que la fórmula $P(a,y)$ sea verdadera, mientras que para probar que $\forall y \exists x P(x,y)$ es falsa hayamos tomado otro valor de la variable y (concretamente $y = 0$). Para evitar esta confusión podemos ver que la fórmula α es equivalente a $\forall y(P(a,y) \to \forall z \exists x P(x,z))$.
- En la estructura $\mathcal{E}_2$, la fórmula $\forall y \exists x P(x,y)$ se interpreta como verdadera, pues para cualquier $y \in \mathbb{Z}_9$ podemos encontrar $x \in \mathbb{Z}_9$ (concretamente $x = y - 1 = y + 8$) tal que $x + 1 = y$.
  En tal caso es fácil comprobar que el valor de verdad de α es uno.

b) Vamos a escribir la frase e ir transformándola hasta que quede expresada en un lenguaje de primer orden:

Todo grupo de la asignatura LMD tiene más de un alumno
Si x es un grupo de la asignatura LMD entonces x tiene más de un alumno
Si x es un grupo de la asignatura LMD entonces x tiene al menos dos alumnos
Si x es un grupo de la asignatura LMD entonces existen y, z, que son alumnos del grupo x y son distintos
Para cualquier x, si x es un grupo de LMD entonces existen y, z, que son alumnos, que son distintos y que pertenecen al grupo x.
$\forall x$ (x grupo de LMD) $\to$ $\exists y \exists z$ (y, z alumnos; $y \neq z$; y, z pertenecen a x)
$\forall x(G(x) \to \exists y \exists z(A(y) \wedge A(z) \wedge P(y,x) \wedge P(z,x) \wedge \neg E(y,z)))$

4. Consideramos las fórmulas siguientes de un lenguaje de primer orden:

$$\alpha_1 = \forall x\Big(\exists y Q(y,x) \rightarrow \neg P(x)\Big),$$
$$\alpha_2 = \forall x\Big(Q(x, f(x)) \wedge \forall y Q(y, g(y))\Big),$$
$$\alpha_3 = \forall x\Big(P(x) \rightarrow P(f(x)) \vee P(g(x))\Big),$$
$$\beta = \forall x \neg P(x).$$

Estudia si β es o no consecuencia lógica del conjunto $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$.

Solución:

Vamos a ver si el conjunto $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \neg\beta\}$ es o no insatisfacible. Para ello, calculamos la forma clausular de estas fórmulas y tratamos de deducir por resolución la cláusula vacía.

- Cálculo de la forma clausular de cada fórmula.

$$\begin{array}{lcl}
\alpha_1 & = & \forall x(\exists y Q(y,x) \rightarrow \neg P(x)) \\
 & \equiv & \forall x(\neg\exists y Q(y,x) \vee \neg P(x)) \\
 & \equiv & \forall x(\forall y \neg Q(y,x) \vee \neg P(x)) \\
 & \equiv & \forall x \forall y(\neg Q(y,x) \vee \neg P(x))
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
\alpha_2 & = & \forall x(Q(x, f(x)) \wedge \forall y Q(y, g(y))) \\
 & \equiv & \forall x \forall y(Q(x, f(x)) \wedge Q(y, g(y)))
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
\alpha_3 & = & \forall x(P(x) \rightarrow P(f(x)) \vee P(g(x))) \\
 & \equiv & \forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)) \vee P(g(x)))
\end{array}$$

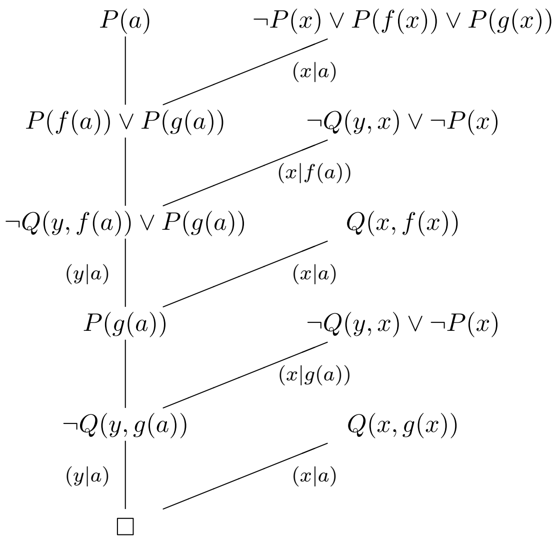
$$\begin{array}{lcl}
\neg\beta & = & \neg\forall x \neg P(x) \\
 & \equiv & \exists x \neg\neg P(x) \\
 & \equiv & \exists x P(x) \\
 & & P(a)
\end{array}$$

- Deducción de la cláusula vacía.

A partir del conjunto de cláusulas:

$$\{\neg Q(y,x) \vee \neg P(x);\ Q(x, f(x));\ Q(y, g(y));\ \neg P(x) \vee P(f(x)) \vee P(g(x));\ P(a)\}$$

vamos a encontrar una deducción de la cláusula vacía.



Al obtener la cláusula vacía concluimos que β es consecuencia lógica del conjunto de fórmulas $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$.

Notemos que si hubiéramos empezado como sigue:

$$\begin{tikzcd} P(a) \arrow[d, dash] & \neg Q(y,x) \vee \neg P(x) \arrow[dl, dash, "(x|a)"] \\ \neg Q(y,a) & \end{tikzcd}$$

Llegamos a una cláusula de la que no podemos obtener ninguna resolvente. Pero eso no significa que el conjunto de cláusulas sea satisfacible.

5. Sea la sucesión de números enteros definida para $n \geq 0$ mediante la recurrencia

$$\begin{cases} x_0 = 4, \ x_1 = 14, \\ x_n = 6x_{n-1} - 9x_{n-2} + 2^n \quad \text{para } n \geq 2. \end{cases}$$

a) Basándose en la recurrencia anterior, demuestra por inducción que para cualquier $n \geq 0$, x_n es un número par.

b) Encuentra una expresión no recurrente para el término x_n.

Solución:

a) Vamos a utilizar el segundo principio de inducción para demostrar que x_n es par para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

- Casos base: $x_0 = 4$, que es par y $x_1 = 14$ que también es par. Luego el resultado es cierto para $n = 0$ y $n = 1$.
- Hipótesis de inducción: Si $n \geq 2$ entonces para $k < n$ se tiene que x_k es par. En particular, x_{n-1} y x_{n-2} son números pares.
- Paso inductivo: Sea $n \geq 2$. Probemos que el término x_n es par.
  Esto último es fácil de probar, pues $x_n = 6x_{n-1} - 9x_{n-2} + 2^n$, y tanto $6x_{n-1}$ es par (esto lo sabemos, bien por la hipótesis de inducción, bien porque es múltiplo de 6) como $-9x_{n-2}$ (por la hipótesis de inducción) como también 2^n (pues es múltiplo de 2). Como la suma de números pares es un número par concluimos que x_n es un número par.

Con esto hemos demostrado que para cualquier $n \in \mathbb{N}$, x_n es par.

b) Vemos que la sucesión x_n satisface una relación de recurrencia lineal no homogénea con coeficientes constantes. La relación de recurrencia linael homogénea asociada es $x_n = 6x_{n-1} - 9x_{n-2}$ cuya ecuación característica es $x^2 - 6x + 9 = 0$, mientras que el término no homogéneo es 2^n.

De aquí sacamos que la sucesión x_n satisface una relación de recurrencia lineal homogénea de grado 3 y cuya ecuación característica es $(x^2 - 6x + 9)(x - 2) = 0$. Esta ecuación tiene como raíces $\alpha_1 = 2$ (simple) y $\alpha_2 = 3$ (doble) pues $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$.

Una vez calculadas estas raíces sabemos que el término x_n puede escribirse de la forma $x_n = a \cdot 2^n + b \cdot 3^n + c \cdot n \cdot 3^n$. Puesto que tenemos 3 incógnitas necesitamos tres términos de la sucesión. Conocemos los dos primeros, así que calculamos el tercero: $x_2 = 6x_1 - 9x_0 + 2^2 = 6 \cdot 14 - 9 \cdot 4 + 4 = 84 - 36 + 4 = 52$.

El sistema que tenemos que resolver es:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} n = 0 & a & + & b & & & = & 4 \\ n = 1 & 2a & + & 3b & + & 3c & = & 14 \\ n = 2 & 4a & + & 9b & + & 18c & = & 52 \end{array}$$

Calculamos la forma normal de Hermite de la matriz ampliada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 14 \\ 4 & 9 & 18 & 52 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 5 & 18 & 36 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Luego la solución del sistema es $a = 4$, $b = 0$, $c = 2$. Entonces, el término general de la sucesión x_n es:

$$x_n = 4 \cdot 2^n + 2n \cdot 3^n = 2^{n+2} + 2n \cdot 3^n$$

6. Sea G el grafo cuyo conjunto de vértices es $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ y cuya matriz de adyacencia es

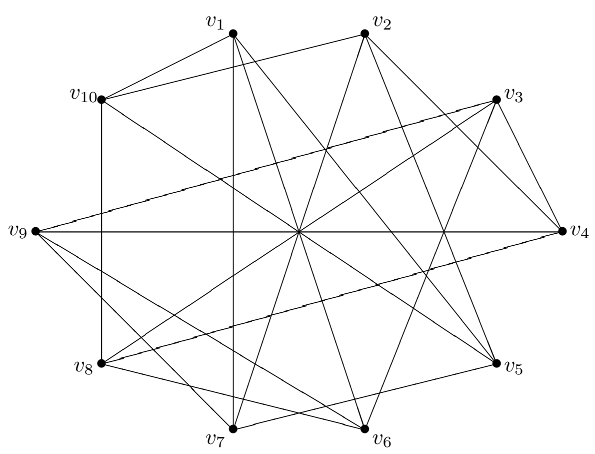
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) ¿Hay algún camino o circuito de Euler en G? Si la respuesta es afirmativa, muestra uno.
b) ¿Hay algún ciclo de Hamilton en G? Si la respuesta es afirmativa, muestra uno.
c) ¿Es G un grafo plano? Si la respuesta es afirmativa, obtén una representación plana de G.
d) Calcula el número cromático de G. ¿Es G un grafo bipartido?

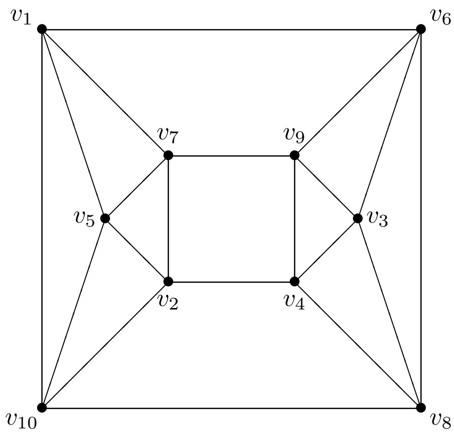
Solución:

La matriz de adyacencia nos indica los vértices que están unidos por un lado de la siguiente forma: si $a_{ij} = 1$ significa que hay un lado que une el vértice i con el vértice j. Si $a_{ij} = 0$ ese lado no existe.

Basándonos en esto vamos en primer lugar a dibujar el grafo. Para esto, vamos a llamar a los vértices v_i, y los colocamos como los vértices de un polígono de 10 lados. Dibujamos los lados entre estos vértices:



Vamos a cambiar la distribución de los vértices para que se vea más claro:



Y ahora respondemos a las cuestiones.

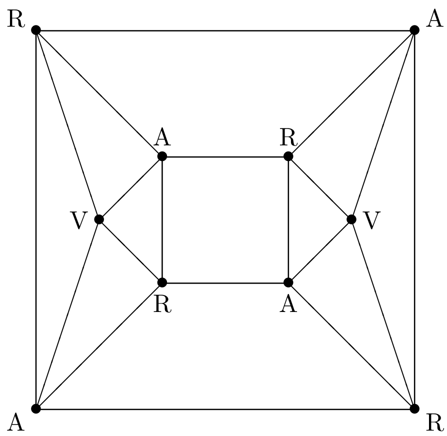
1. Puesto que el grafo es conexo y todos los vértices tienen grado par (el grado de cada vértice es 4), el grafo es tiene un circuito de Euler. Un ejemplo de uno:

$$v_1\ v_6\ v_8\ v_{10}\ v_5\ v_2\ v_4\ v_8\ v_3\ v_4\ v_9\ v_6\ v_3\ v_9\ v_7\ v_2\ v_{10}\ v_1\ v_5\ v_7\ v_1$$

2. El grafo también tiene un ciclo de Hamilton:

$$v_1\ v_6\ v_8\ v_{10}\ v_2\ v_4\ v_3\ v_9\ v_7\ v_5\ v_1$$

3. La segunda representación que hemos hecho es una representación plana. Por tanto el grafo es un grafo plano.
4. Vemos como en el grafo hay ciclos de longitud 3 ($v_2\ v_5\ v_7\ v_2$). Eso nos dice, por una parte, que el grafo no es bipartido, y por otra, que el número cromático es al menos 3 (pues esos tres vértices deben tener colores diferentes). Al ser plano, el número cromático no puede ser mayor que 4. Nos quedan dos posibilidades: que valga 3 o que valga 4. Vamos a ver que es igual a 3 dando una 3-coloración.



Bien porque el número cromático no es 2, bien porque hay ciclos de longitud impar, vemos que el grafo no es bipartido.