Ejercicio 3.7 Calcular los siguientes límites (utilizando el desarrollo de Taylor):

(vii) $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}}{x^4}$

Podemos aplicar el siguiente corolario del Teorema de la Fórmula Infinitesimal del resto para resolver el límite dado:

Sea $f: I \to \mathbb{R}$ una función n veces derivable en $a \in I$. Entonces:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_{n-1,a}(x)}{(x-a)^n} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = 0$$

Como tenemos que la función $f(x) = e^x$ es n veces derivable en $\underset{\in \mathbb{R}}{a = 0}$, por ser $f(x) = e^x$ una función de clase C^∞ en $\mathbb{R}$, entonces podemos aplicar dicho corolario. En este caso $n = 4$, entonces:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}}{x^4} = \frac{f^{(4)}(x)}{4!} = \frac{1}{24}$$

viii) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \operatorname{sen}(x)}{e^x - 1 - x - x^2}$

$P_{n,0}(x) \Rightarrow e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots$ $\quad P_{n,0}(x) \Rightarrow \operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$

$f(x) = e^x - \operatorname{sen} x \; ; \; g(x) = e^x - 1 - x - x^2$

$$\left.\begin{array}{l} P_{2,0}^{f}(x) = 1 + \frac{x^2}{2} \\ P_{2,0}^{g}(x) = -\frac{x^2}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{P_{2,0}^{f}(x) - R_{2,0}^{f}(x)}{P_{2,0}^{g}(x) - R_{2,0}^{g}(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{P_{2,0}^{f}(x)}{x^2} - \frac{R_{2,0}^{f}(x)}{x^2}}{\frac{P_{2,0}^{g}(x)}{x^2} - \frac{R_{2,0}^{g}(x)}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1+\frac{x^2}{2}}{x^2} + \frac{R_{2,0}^{f}(x)}{x^2}}{-\frac{1}{2} + \frac{R_{2,0}^{g}(x)}{x^2}} = \frac{+\infty + 0}{-\frac{1}{2} + 0} = \boxed{-\infty}$$