Soluciones del Examen de Geometría III
Grado en Matemáticas, septiembre de 2016
Universidad de Granada

1.– Para cada $t \in \mathbb{R}$, se considera la cuádrica de ecuación:

$$2xz + ty^2 + 2ty + 2z + 1 = 0.$$

Clasificarla en función del valor del parámetro t.
Solución: En primer lugar, escribimos las matrices asociadas a la ecuación:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & t & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{M} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & t & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ t & 0 & t & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Calculamos el polinomio característico de M:

$$P_M(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & t-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (t-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (t-\lambda)(\lambda^2-1).$$

Por tanto, los valores propios de M son

$$\lambda_1 = +1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = t.$$

Calculamos el determinante de $\tilde{M}$,

$$\det \tilde{M} = t^2 - t.$$

Como las raíces son $t = 0$ y $t = 1$, hay que estudiar estos dos casos y los 3 intervalos en los que queda dividida $\mathbb{R}$.

Caso $t < 0$. M tiene dos valores propios negativos y uno positivo; $\det \tilde{M} > 0$. Como $0 < \det \tilde{M}$ es igual al producto de sus cuatro valores propios y ya sabemos el signo de 3 de ellos (los de M), entonces el cuarto valor propio es positivo. Así,

$$\tilde{M} \sim \left(\begin{array}{c|ccc} + & & & \\ \hline & + & & \\ & & - & \\ & & & - \end{array}\right)$$

La ecuación reducida queda $1 + x^2 - y^2 - z^2 = 0$. Cambiando el signo y permutando variables, queda $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$, que es equivalente a $z^2 = x^2 + y^2 - 1$. Esto es un hiperboloide de 1 hoja.

Caso $t = 0$ Ya sabemos que $\det \tilde{M} = 0$ y que un valor propio de M es cero, así que no tenemos información del signo del cuarto valor propio. Por tanto, calculamos el polinomio característico de $\tilde{M}$:

$$P_{\tilde{M}}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(-\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda - 1).$$

Como $\det \tilde{M} = 0$, $\lambda = 0$ ha de ser valor propio, como así sale del polinomio característico. Los otros tres valores propios vienen del segundo factor, $-\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda - 1$, que tiene 2 valores propios positivos por la Regla de Descartes. Por tanto, el último valor propio es negativo. Así,

$$\tilde{M} \sim \left(\begin{array}{c|ccc} + & & & \\ \hline & + & & \\ & & - & \\ & & & 0 \end{array}\right)$$

La ecuación reducida queda $x^2 - y^2 + 1 = 0$. Es un cilindro hiperbólico.

<u>Caso $0 < t < 1$</u>. Ahora $\det \tilde{M} = t^2 - t < 0$ y M tiene dos valores propios positivos y uno negativo. El cuarto valor propio ha de ser positivo. Así,

$$\tilde{M} \sim \left(\begin{array}{c|ccc} + & & & \\ \hline & + & & \\ & & + & \\ & & & - \end{array}\right)$$

La ecuación reducida queda $x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$, que equivale a $z = \pm\sqrt{x^2 + y^2 + 1}$. Es un hiperboloide de 2 hojas.

<u>Caso $t = 1$</u> M tiene ahora dos valores propios positivos y uno negativo. Como $\det \tilde{M} = 0$, ahora el cuarto valor propio de $\tilde{M}$ es cero.

$$\tilde{M} \sim \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \hline & + & & \\ & & + & \\ & & & - \end{array}\right)$$

La ecuación reducida queda $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Es un cono.

<u>Caso $t > 1$</u> M tiene ahora dos valores propios positivos y uno negativo, y $\det \tilde{M} = t^2 - t > 0$. Ahora el cuarto valor propio de $\tilde{M}$ es negativo.

$$\tilde{M} \sim \left(\begin{array}{c|ccc} - & & & \\ \hline & + & & \\ & & + & \\ & & & - \end{array}\right)$$

La ecuación reducida queda $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$. Es un hiperboloide de 1 hoja. □

2.– Sea $\mathcal{A}$ un plano afín Euclídeo, y sea $T = \{a, b, c\}$ un triángulo equilátero en A. Probar que el grupo de movimientos rígidos de A que deja invariante el triángulo T consta de seis elementos. Describir dicho grupo.

Solución: Este problema consta de dos partes: existencia y unicidad.

Para ver la existencia, vamos a construir 6 movimientos rígidos que dejen el triángulo T invariante:

1. La identidad en $\mathcal{A}$.
2. Dado un lado del triángulo, sea m su punto medio. Sea R la recta perpendicular a dicho lado que pasa por m. El vértice opuesto pertenece a R por ser el triángulo equilátero. Sea $f_R : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ la simetría de eje la recta R. Claramente, f_R deja fijo el vértice opuesto e intercambia los vértices del segmento. Por tanto, f_R es un movimiento rígido que deja invariante a T. Como hay tres lados, tenemos tres simetrías de este tipo.
3. Consideremos O el ortocentro del triángulo T. Por ser equilátero, coincide con el circuncentro. Sea $g_1 : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ el giro de ángulo 120 y centro O. Claramente,

este giro lleva cada vértice en otro vértice, luego deja invariante el triángulo T. Igualmente, el giro de 240 y centro O deja invariante el triángulo T.

Para ver la unicidad, hemos de comprobar que no existen más movimientos rígidos que dejen invariante a T. Así, todo movimiento rígido de $\mathcal{A}$ que deje invariante T se puede restringir a los vértices, obteniendo una aplicación biyectiva de un conjunto de tres elementos en sí mismo. Ahora bien, el conjunto

$$G = \{f : T \to T \,/\, f \text{ biyectiva}\}$$

es biyectivo al conjunto de las permutaciones de orden 3. Como existen exactamente $3! = 6$ permutaciones, habrá 6 elementos en G. Así, dado un movimiento rígido g de $\mathcal{A}$ que deje invariante T, su restricción $g|_T$ será uno de los 6 elementos de G. Por tanto, $g|_T$ coincide con la restricción de uno los 6 movimientos ya descritos en la parte de existencia. Pero recordemos que si dos aplicaciones afines coinciden en un sistema de referencia afín, entoces son iguales en todo $\mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}$ es un plano, el triángulo T se puede ver como un sistema de referencia afín. Por tanto, g será igual a uno de los 6 movimientos ya descritos en la parte de existencia. □

3.– Encontrar una proyectividad en $\mathbb{P}^3$ distinta de la identidad que deje invariante el hiperplano proyectivo de ecuación homogénea $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

Solución: Sea $H = \{p = (x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}^3 : x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$. Consideramos su levantamiento usando la proyección $\pi : \mathbb{R}^4 \backslash \{0\} \to \mathbb{P}^3$, que es $\hat{H} = \pi^{-1}(H) \cup \{0\} = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4 : x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

Primera forma: Sea $\hat{f} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la simetría ortogonal respecto de $\hat{H}$. Como $\hat{f}$ es biyectiva y lineal, existe una única proyectividad $f : \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^3$ tal que $f \circ \pi = \pi \circ \hat{f}$. Como $\hat{f}$ deja invariante $\hat{H}$, entonces f deja invariante H. Y además, f ha de ser distinta de la identidad porque en ese caso, $\hat{f}$ sería proporcional a la identidad y no es el caso.

Segunda forma: Consideramos una base de $\hat{H}$, por ejemplo

$$B_{\hat{H}} = \{u_1 = (1, -1, 0, 0), u_2 = (1, 0, -1, 0), u_3 = (1, 0, 0, -1)\}.$$

La ampliamos a una base de $\mathbb{R}^4$, por ejemplo

$$B = \{u_1 = (1, -1, 0, 0), u_2 = (1, 0, -1, 0), u_3 = (1, 0, 0, -1), u_4 = (0, 0, 0, 1)\}.$$

Definimos el isomorfismo lineal mediante las siguientes condiciones (u otras parecidas):

$$\hat{f} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \quad f(u_i) = u_i,\ i = 1, 2, 3; \quad \hat{f}(u_4) = (0, 0, 1, 0).$$

Las tres primeras condiciones nos aseguran que $\hat{f}(\hat{H}) = \hat{H}$. La cuarta nos asegura que $\hat{f} \neq Id$. Comprobamos que $\hat{f}$ es un isomorfismo: Si B_u es la base usual de $\mathbb{R}^4$, entonces

$$\det\left(M_{B,B_u}(\hat{f})\right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

Como $\hat{f}$ es biyectiva y lineal, existe una única proyectividad $f : \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^3$ tal que $f \circ \pi = \pi \circ \hat{f}$. Como $\hat{f}$ deja invariante $\hat{H}$, entonces f deja invariante H. Y además, f ha de ser distinta de la identidad porque en ese caso, $\hat{f}$ sería proporcional a la identidad y no es el caso. □