Ejercicio 1.3: Estudiar la derivabilidad de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

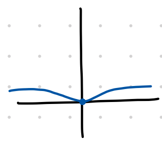
y determinar su imagen.

Puntos candidatos a generar discontinuidades:

- $x=0$ (función a trozos)
- Ambos trozos de la función son funciones elementales de las que conocemos su continuidad

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua en $x=0 \iff \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$

$$\begin{cases} f(0)=0 \\ \lim_{x\to 0^-} f(x) = e^{-1/0^+} = e^{-\infty} = 0 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = e^{-1/0^+} = e^{-\infty} = 0 \end{cases}$$



La función es continua en $x=0$.
Pasamos ahora a estudiar la función derivada

Por lo ya demostrado, sólo nos queda probar $f'(0^-)=f'(0^+)$ para poder afirmar que la función f es derivable en todo su dominio, $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} f'(0^-) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(0^-+h)-f(0^-)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{e^{-1/h^2}-0}{h} = \dfrac{0}{0} = \text{indet} = \lim_{h\to 0} \dfrac{1/h}{e^{1/h^2}} = \dfrac{\infty}{\infty} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{h\to 0} 2\,\dfrac{1/h^2}{\frac{3}{h^3}\cdot e^{1/h^2}} = \lim_{h\to 0} 2\cdot \dfrac{h}{e^{1/h^2}} = \dfrac{0}{\infty} = 0 \\ f'(0^+) = \text{SE CALCULA ANÁLOGAMENTE Y NOS DA EL MISMO RESULTADO} \end{cases}$$

Como f es continua en $x=0$ y $f'(0^-)=f'(0^+)$, podemos afirmar que f es derivable en $x=0$. De hecho, al ser $f'(0)=0$, en este punto encontramos un posible máximo o mínimo

En $\mathbb{R}-\{0\}$, f es una función elemental continua y derivable. Ergo, juntando estos dos últimos resultados, podemos concluir que f es continua y derivable en todo su dominio, $\mathbb{R}$.

Por otro lado, para calcular la imagen de $f(x)$ estudiamos su monotonía. Sabemos que $\operatorname{Im}(e^{-1/x^2}) \subseteq \mathbb{R}^+$ por ser exponencial, y como $f(0)=0 \notin \mathbb{R}^+$, deducimos que en $x=0$ hay un mínimo no relativo, sino absoluto. Podemos centrarnos ahora en la otra parte de la función, estudiando su monotonía a través de su función derivada:

$$f'(x) = \frac{2e^{-1/x^2}}{x^3} \to f'(x)=0 \iff e^{-1/x^2}=0 \quad !!! \quad \nexists\, x\in\mathbb{R}$$ que verifique tal condición, por lo que no encontramos más extremos relativos.

Deducimos, pues, que en $]-\infty,0[$ $f(x)$ es decreciente y en $]0,+\infty[$ es creciente. Para hallar $\operatorname{Im}(f)$ ya sólo nos queda calcular los límites en el infinito (que van a coincidir al estar la variable x elevada al cuadrado):

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-1/x^2} = \lim_{x\to-\infty} e^{-1/x^2} = e^{-1/\infty} = e^0 = 1$$

Concluimos que $\operatorname{Im}(f) = [0,1[$.