Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Modelos matemáticos I (curso 2021/22)

Primer parcial. 19 de abril de 2022

$\boxed{1}$ Estudia puntos fijos y 2 ciclos.

$$x_{n+1} = \sqrt[3]{3 - x_n^3}.$$

Estudia también su estabilidad.

Puntuación: 3 puntos

$\boxed{2}$ Para cada $a > 0$ estudia la estabilidad de los puntos fijos de

$$x_{n+1} = ax_n - x_n \operatorname{sen} x_n.$$

Estudia también los casos donde la primera derivada no da información de la estabilidad.

Puntuación: 3.5 puntos

$\boxed{3}$ Encuentra el valor de a para que $x_n = 3^n$ sea solución de

$$x_{n+3} - x_{n+2} - 7x_{n+1} + ax_n = 0.$$

Encuentra también las soluciones de la ecuación anterior para el parámetro calculado que tienden a cero y además $x_0 = 3$.

Puntuación: 3.5 puntos

① Puntos fijos

$$x = \sqrt[3]{3 - x^3} \qquad x = \sqrt[3]{3/2}$$

2-Ciclos

$$g(x) = f(f(x)) = \sqrt[3]{3 - \left(\sqrt[3]{3-x^3}\right)^3} = x$$

luego todos los números reales son solución de $x = g(x)$. Los ciclos son entonces los pares $(x, f(x))$ con $x \neq \sqrt[3]{3/2}$

Estabilidad

Dado que la estabilidad/Inestabilidad/Estabilidad asintótica de un punto o ciclo es equivalente a la de la iterada se deduce que todos los 2 ciclos así como el punto fijo son estables no asintoticamente estables.

y

9)

2) Puntos fijos

$$\begin{cases} x = 0 \\ 1 = a - \operatorname{sen}(x) \iff \operatorname{sen}(x) = a - 1 \end{cases}$$

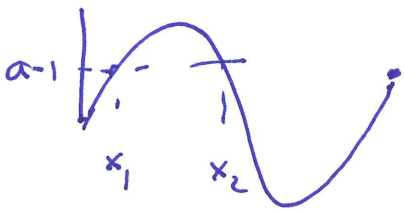
Si $a-1>1 \iff a>2$ $x=0$ es un unico punto fijo.

Si $-1 \leq a-1 \leq 1$ entonces está el punto fijo $x=0$ y las soluciones

$$x_1 + 2k\pi$$

$$x_2 + 2k\pi$$

donde



Estas soluciones son

$$x_1 = \operatorname{arcsen}(a-1)$$

$$x_2 = \pi/2 - \operatorname{arcsen}(a-1)$$

y hay infinitos puntos.

Si $-1 \leq a-1 \leq 1$ es lo mismo que $0 \leq a \leq 2$ por tanto

	$a>2$	$0<a\leq 2$
Puntos Fijos	$x=0$	$x=0$ $x=\arcsin(a-1)+2k\pi$ $x=\frac{\pi}{2}-\arcsin(a-1)+2k\pi$. Infinitos puntos

Estabilidad

Solo se va a estudiar $x=0$.

$$f'(\cancel{x}) = a - \operatorname{sen}(x) - x\cos(x)$$

$$f'(0) = a$$

Si $0<a<1$ asintóticamente estable

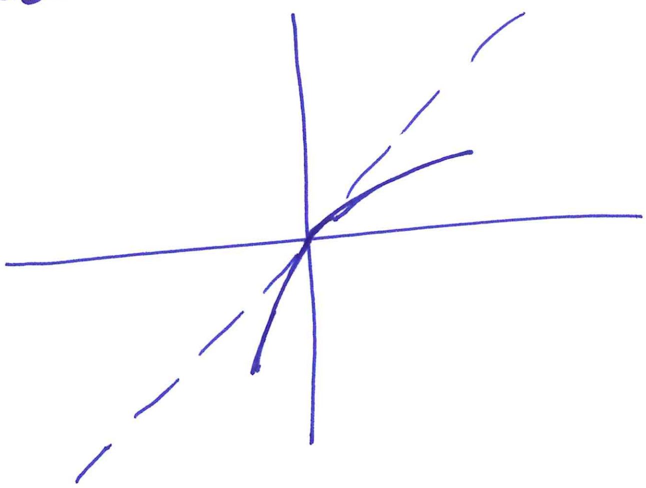
Si $a>1$ inestable

Si $a=1$ $f'(0)=1$ y hay que estudiar la segunda derivada.

$$f''(x) = -2\cos(x) + x\,\mathrm{sen}(x)$$

y portanto $f''(0) = -2$ y la

función es concava cerca de $x=0$



portanto inestable.

3) Para que 3^n sea solución es necesario que $\lambda = 3$ sea solución de

$$\lambda^3 - \lambda^2 - 7\lambda + a = 0$$

de donde

$$27 - 9 - 21 + a = 0$$

y por tanto $a = 3$.

Buscamos las soluciones que tienden a cero con $x_0 = 3$ y son solución de

$$x_{n+3} - x_{n+2} - 7x_{n+1} + 3x_n = 0$$

Buscamos las otras raíces

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & -7 & 3 \\ 3 & & 3 & 6 & -3 \\ \hline & 1 & 2 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = -1 \pm \sqrt{2} \begin{cases} \sqrt{2} - 1 \in (0,1) \\ -(1+\sqrt{2}) < -1. \end{cases}$$

Las soluciones son de la forma

$$x_n = c_1\, 3^n + c_2 \left(\sqrt{2}-1\right)^n + c_3 \left[-(1+\sqrt{2})\right]^n$$

usando que $\sqrt{2}-1$ está entre cero y 1 se obtiene una solucion que tiende a cero y además $x_0 = 3$, Tomo $c_1 = 0$, $c_2 = 3$ $c_3 = 0$ obtiendo

$$x_n = 3\left(\sqrt{2}-1\right)^n.$$

Veamos que ésta es la única viendo que si tenemos una solución que tienda a cero entonces $c_1 = 0$, $c_3 = 0$.

Si $c_1 \neq 0$ entonces x_n no tiende a cero sino

$$x_n = \underbrace{3^n}_{\downarrow\ \infty} \underbrace{\left(c_1 + c_2 \left(\frac{\sqrt{2}-1}{3}\right)^n + c_3 \left(\frac{-1-\sqrt{2}}{3}\right)^n \right)}_{\downarrow\ c_1} = \operatorname{sign} c_1 \cdot \infty.$$

Si $c_1 = 0$ y $c_3 = 0$ entonces

$$x_n = \underbrace{c_2\left(\sqrt{2}-1\right)^n}_{\downarrow\, 0} + c_3\left(-1-\sqrt{2}\right)^n$$

pero $\left(-1-\sqrt{2}\right)^n$ es no acotada, luego x_n no es acotada.