UNIVERSIDAD DE GRANADA

Departamento de Geometría y Topología

Geometría II – Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Convocatoria extraordinaria - 5 de julio de 2021

1. (4 PUNTOS) Sean $a, b \in \mathbb{R}$ dos números reales y se considera $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ un endomorfismo cuya matriz asociada respecto de la base usual B_u es

$$M(f, B_u) = \begin{pmatrix} 3 & a & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & b^2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Estudiar, en función de a y b, si f es diagonalizable por semejanza sobre $\mathbb{R}$.

(b) Hallar los valores de a y b para los que f sea autoadjunto respecto de la métrica euclídea usual de $\mathbb{R}^3$ y obtener, en uno de los casos posibles, una base ortonormal formada por vectores propios.

2. (3 PUNTOS) Sea $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ definida positiva y $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Probar que:

(a) Si $\det P \neq 0$, entonces $P^t A P$ es definida positiva.

(b) Si $\det P = 0$, entonces $P^t A P$ es semidefinida positiva y calcular su radical.

3. (3 PUNTOS) Consideremos (V, g) un espacio vectorial métrico euclídeo con $\dim(V) \geqslant 2$ y u un vector unitario. Sea $f : V \longrightarrow V$ el endomorfismo de V dado por

$$f(x) = x - 2g(x, u)u\,.$$

(a) Prueba que f es un endomorfismo autoadjunto de (V, g).

(b) Prueba que f es una isometría de (V, g).

(c) ¿Qué tipo de isometría es f? Descríbela.