Capítulo 5

Lógica de Primer Orden

5.1. Lenguajes de Primer Orden

Un *lenguaje de primer orden*, **L**, consta de los siguientes símbolos:

- símbolos de variable: $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ y a veces x, y, z, u, v, w (últimas letras minúsculas del alfabeto latino). Todos ellos forman un conjunto infinito numerable representado por V.
- símbolos de constante: $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ y a veces a, b y c (primeras letras minúsculas del alfabeto latino). Todos ellos forman un conjunto representado por C, que podría ser vacío.
- símbolos de función: f_k^n (n y k son números naturales y n es no nulo) y a veces f, g y h. Todos ellos forman un conjunto representado por F.
- símbolos de relación: r_k^n (n y k son números naturales no nulos) y a veces r, s, p y q. El conjunto de todos ellos es representado por el símbolo R.
- símbolos lógicos: $\rightarrow$, $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\leftrightarrow$, $\forall$ y $\exists$
- símbolos auxiliares:), (y el signo ,

y llamamos *expresión* de **L** a cada sucesión finita de sus símbolos. En estas notas supondremos, a menos que digamos lo contrario, que los conjuntos de símbolos de constante, función y relación son todos y cada uno de ellos numerables. Un lenguaje que cumpla esto será denominado *lenguaje numerable*.

El número natural n que aparece como superíndice de los símbolos de función o de predicado indica su "ariedad", mientras que el subíndice es únicamente una marca distintiva de símbolos.

Ejemplo 5.1.1. Representaremos por $\mathbf{L_A}$ al lenguaje para el que $C = \{c\}$, $F = \{f^1, g^2, h^2\}$ y $R = \{r^2\}$ (r^2 está destinada a "encarnar" la igualdad). Para $\mathbf{L_A}$ la sucesión finita de símbolos $axyzfg(r(ah$ es una expresión. Hemos de considerar también como ejemplo a la *expresión vacía*.

Entre las expresiones de **L** destacamos tres géneros: *términos* y *fórmulas atómicas* y *fórmulas*. Los *términos* están definidos por los siguientes items:

1. Son términos los símbolos de constante

2. Son términos los símbolos de variable

3. Si f_k^n es un símbolo de función y $t_1, \ldots, t_n$ son términos, entonces $f_k^n(t_1, \cdots, t_n)$ es un término

4. No hay otros términos aparte de los nombrados en los apartados anteriores.

El conjunto de los términos de **L** es representado por Term(**L**).

Las *fórmulas atómicas* de **L** son las expresiones de la forma $r_k^n(t_1, \cdots, t_n)$, donde r_k^n es un símbolo de predicado y $t_1, \ldots, t_n$ son términos. El conjunto de las fórmulas atómicas de **L** es representado por Atom(**L**).

Las *fórmulas* de **L** son las expresiones defininidas por las siguientes condiciones:

1. Las fórmulas atómicas son fórmulas

2. Si α es una fórmula, entonces $(\neg\alpha)$ es una fórmula

3. Si α y β son fórmulas, entonces $(\alpha \to \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ son fórmulas

4. Si α es una fórmula y x es una variable, entonces $\big((\forall x)\alpha\big)$, $\big((\exists x)\alpha\big)$ es una fórmula

5. No hay otras fórmulas aparte de las antes descritas

El conjunto de las fórmulas de **L** es representado por Form(**L**).

Ejemplo 5.1.2. Para el lenguaje **L** del ejemplo 5.1.1 mostramos a modo de ejemplo los siguientes términos: c, x, $f(x)$, $g(x,c)$, $g\big(f(c),c\big)$ y $h\big(g(x,c), f(f(c))\big)$. Como fórmulas atómicas podemos mostrar: $r(x,c)$, $r(x,y)$, $r\big(g(x,c), h\big(g(x,c), f(f(c))\big)\big)$. Como fórmulas podemos poner de ejemplo a: $(r(x,y) \to r(c, f(c)))$, $\big(\neg r(x,y)\big)$, $\big((\forall x)(r(x,y) \to r(c,f(c)))\big)$, $\big((\forall y)((\forall x)(r(x,c) \to r(y, f(c))))\big)$ y, por qué no, $\big(\neg((\forall x) r(c, f(c)))\big)$.

Se puede demostrar que cualquier fórmula (resp. fórmula atómica, término) no puede ser escrita más que en una forma. Ello nos permitirá realizar razonamientos por *inducción* sobre fórmulas.

En la fórmula $\big((\forall x)\alpha\big)$ (resp. $\big((\exists x)\alpha\big)$), la fórmula α es denominada *radio de acción* o *ámbito* de $\forall x$ (resp. $\exists x$). Una ocurrencia de un símbolo de variable x en la fórmula α es *ligada* si en la escritura de α dicha ocurrencia está inmediatamente precedida de un cuantificador $\forall$ o de un cuantificador $\exists$ o bien la ocurrencia tiene lugar en el radio de acción de un cuantificador "$\forall x$" o "$\exists x$". La ocurrencia del símbolo de variable es *libre* cuando no es ligada. Un símbolo de variable es libre (resp. ligado) en una fórmula α cuando tiene una ocurrencia libre (resp. ligada) en α. Observar que un símbolo de variable dado puede ser simultáneamente libre y ligado en una fórmula. En lo sucesivo, si φ es una fórmula y $v_{i_1}, \ldots, v_{i_k} \in V$, la expresión $\varphi(v_{i_1}, \ldots, v_{i_k})$ es una representación de φ e indicará que algunas de las variables $v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}$ son variables libres en φ. Esto no significa que φ contenga a estas variables como variables libres, ni significa que φ no contenga otras variables libres.

Llamamos *sentencia* a toda aquella fórmula en la que cada ocurrencia de cada una de sus variables es ligada. El conjunto de las sentencias del lenguaje será representado por Sent(**L**).

Ejemplo 5.1.3. Sea φ la fórmula $\forall x\big(r(g(x,a),y)\big) \to r\big(g(x, f(y)), f(g(x,y))\big)$, el radio de acción del único $\forall x$ que aparece es $r(g(x,a),y)$ que llamaremos α. En φ es ligada la única ocurrencia de x que hay en α, y ello por estar en el radio de acción de un cuantificador $\forall x$; sin embargo, la ocurrencia de y en α no es ligada en φ pues aún estando en el radio de acción de un cuantificador no lo está en el radio de acción de un cuantificador $\forall y$. Observar que ninguna ocurrencia de las variables en α son ligadas en α; pues en α no ocurre cuantificador alguno.

Sea ψ la fórmula $r(g(x, f(y)), f(g(x, y)))$. En ella no hay ninguna ocurrencia de variables que sea ligada, dada la ausencia de cuantificadores, y lo mismo podemos decir de las ocurrencias de variables en ψ como subfórmula de φ.

Ejemplo 5.1.4. Sea ϕ la fórmula $\forall y\big(\forall x(r(g(x,a),y)) \to r\big(g(x, f(y)), f(g(x,y))\big)\big)$. En ella no hay ninguna ocurrencia de y que sea libre. ϕ no es una sentencia, aunque sí lo son $\forall x\forall y\big(\forall x(r(g(x,a),y)) \to r\big(g(x, f(y)), f(g(x,y))\big)\big)$, $\forall x(r(g(x,a),x)) \to \forall x\forall y\big(r(g(x, f(y)), f(g(x,y)))\big)$ y $q\big(g(f(a)), f(f(a))\big)$. En esta última fórmula no hay ninguna ocurrencia de variables, lo cual hace que sea sentencia; en las dos anteriores sí las hay, si bien ninguna es libre.

Ejemplo 5.1.5. En la sentencia $\forall x\big(q(x) \vee \neg\exists x r(a,x)\big)$ puede pensarse que la ocurrencia de x en $r(a,x)$ está "dóblemente ligada" cuando realmente no es así. Ha sido convenido, con bastante fundamento, que si una ocurrencia de un símbolo de variable está en el radio de acción de varios cuantificadores que pueden ligarla, es el más interno el que la liga mientras que el resto no tienen sobre ella el más mínimo efecto.

Ejercicio 5.1.1. Entender las siguientes fórmulas y decir de cada ocurrencia de variable, si es libre o ligada:

1. $\forall z\big(\forall x r(x,y) \to r(z,a)\big)$
2. $\forall y r(z,y) \to \forall z r(z,y)$
3. $\forall y \exists x s(x,y,g(x,y)) \vee \neg\forall x r(y, f(x))$

5.2. Interpretaciones, satisfacibilidad y verdad

Sea $\mathbf{L}$ un lenguaje de primer orden. Una *estructura* $\mathbf{A}$ para $\mathbf{L}$ consta de:

1. Un conjunto no vacío A, denominado *dominio* o *universo* de la estructura.
2. Por cada símbolo de constante a_i de $\mathbf{L}$, un elemento fijo $(a_i)^{\mathbf{A}}$ de A.
3. Por cada símbolo de función f_j^n de $\mathbf{L}$, una operación n-aria $(f_j^n)^{\mathbf{A}}$ en A (es decir, una función de A^n en A).
4. Por cada símbolo de predicado r_k^n de $\mathbf{L}$, una relación n-aria $(r_k^n)^{\mathbf{A}}$ en A (es decir, un subconjunto de A^n).

Ejemplo 5.2.1. Consideremos el lenguaje $\mathbf{L_A}$ y para él, a modo de ejemplo, la estructura $\mathbf{N}$ que consta de:

1. como universo de la estructura, los números naturales
2. $(c)^{\mathbf{N}} = 0$
3. $(f)^{\mathbf{N}}$, definida por $(f)^{\mathbf{N}}(m) = m'$
4. $(g)^{\mathbf{N}}$, definida por $(g)^{\mathbf{N}}(m,n) = m + n$
5. $(h)^{\mathbf{N}}$, definida por $(h)^{\mathbf{N}}(m,n) = mn$

6. $(r)^{\mathbf{N}}$, coincidente con la igualdad

Sea $\mathbf{A}$ una estructura para un lenguaje $\mathbf{L}$ y sea A el dominio de $\mathbf{A}$. Una *asignación* (de V en $\mathbf{A}$) es cualquier aplicación $s\colon V \longrightarrow A$. A partir de una asignación s definimos una aplicación $\bar{s}\colon \mathrm{Term}(\mathbf{L}) \longrightarrow A$ como sigue:

1. si $t = a_j$, entonces $\bar{s}(t) = (a_j)^{\mathbf{A}}$
2. si $t = x_j$, entonces $\bar{s}(t) = s(x_j)$
3. si f^n_k es un símbolo de función, $(f^n_j)^{\mathbf{A}}$ es su correspondiente operación en A y $t_1, \ldots, t_n$ son términos, entonces $\bar{s}(f^n_j(t_1, \ldots, t_n)) = (f^n_j)^{\mathbf{A}}(\bar{s}(t_1), \ldots, \bar{s}(t_n))$

Al par formado por una estructura para un lenguaje $\mathbf{L}$ y una asignación de V en $\mathbf{A}$ le llamamos *interpretación* de $\mathbf{L}$.

Definición 5.2.1. Sea $\langle \mathbf{A}, s\rangle$ una interpretación del lenguaje $\mathbf{L}$, definimos $I^s_{\mathbf{A}}$ sobre las fórmulas tomando valores en $\{0, 1\}$ como sigue:

1. Para cualesquiera términos $t_1, \ldots, t_n$ de $\mathbf{L}$ y símbolo de relación r^n_k, $I^s_{\mathbf{A}}(r^n_k(t_1, \ldots, t_n)) = 1$ sii, por definición, $\langle \bar{s}(t_1), \ldots, \bar{s}(t_n)\rangle \in (r^n_k)^{\mathbf{A}}$.
2. Para cualesquiera fórmulas α y β de $\mathbf{L}$,
   a) $I^s_{\mathbf{A}}(\neg\alpha) = I^s_{\mathbf{A}}(\alpha) + 1$
   b) $I^s_{\mathbf{A}}(\alpha \rightarrow \beta) = I^s_{\mathbf{A}}(\alpha)I^s_{\mathbf{A}}(\beta) + I^s_{\mathbf{A}}(\alpha) + 1$
   c) $I^s_{\mathbf{A}}(\alpha \vee \beta) = I^s_{\mathbf{A}}(\alpha)I^s_{\mathbf{A}}(\beta) + I^s_{\mathbf{A}}(\alpha) + I^s_{\mathbf{A}}(\beta)$
   d) $I^s_{\mathbf{A}}(\alpha \wedge \beta) = I^s_{\mathbf{A}}(\alpha)I^s_{\mathbf{A}}(\beta)$
   e) $I^s_{\mathbf{A}}(\alpha \leftrightarrow \beta) = I^s_{\mathbf{A}}(\alpha) + I^s_{\mathbf{A}}(\beta) + 1$
3. Para fórmula α y símbolo de variable x del lenguaje:
   a) $I^s_{\mathbf{A}}(\forall x\alpha) = 1$ sii, por definición, para todo $d \in A$, $I^{s(x|d)}_{\mathbf{A}}(\alpha) = 1$
   b) $I^s_{\mathbf{A}}(\exists x\alpha) = 1$ sii, por definición, existe $d \in A$ tal que $I^{s(x|d)}_{\mathbf{A}}(\alpha) = 1$

   donde
$$s(x|d)(y) = \begin{cases} d, & \text{si } y = x \\ s(y), & \text{si } y \neq x \end{cases}$$

Por supuesto que las operaciones $+$ y $\cdot$ que aparecen en esta definición son las mismas presentadas y usadas en la lógica proposicional, es decir son respectivamente la suma y producto del cuerpo $\mathbb{Z}_2$.

Ejemplo 5.2.2. Sea x, y dos símbolos de variable distintos (al ser letras distintas), α la fórmula $\forall x r(y, x)$ en el lenguaje $\mathbf{L}$ y $\mathbf{A}$ la estructura para $\mathbf{L}$ según lo siguiente:

- Como universo A de $\mathbf{A}$, los números naturales y
- como $(r)^{\mathbf{A}}$ la relación binaria $\leq$.

Sea u una asignación fija entre las que cumplen $u(y) = 0$. Se tiene que:

$$\begin{aligned}
I_{\mathbf{A}}^{u}(\alpha) = 1 &\Leftrightarrow \text{ para todo } n \in \omega, \quad I_{\mathbf{A}}^{u(x|n)}(r(y,x)) = 1\\
&\Leftrightarrow \text{ para todo } n \in \omega, \quad \langle u(x|n)(y), u(x|n)(x)\rangle \in (r)^{\mathbf{A}}\\
&\Leftrightarrow \text{ para todo } n \in \omega, \quad \langle u(y), u(x|n)(x)\rangle \in (r)^{\mathbf{A}}\\
&\Leftrightarrow \text{ para todo } n \in \omega, \quad \langle 0, n\rangle \in \leq\\
&\Leftrightarrow \text{ para todo } n \in \omega, \quad 0 \leq n
\end{aligned}$$

La conocida veracidad de la última afirmación conlleva la veracidad de cualquiera de las más arriba equivalentes por lo que, en particular, $I_{\mathbf{A}}^{u}(\alpha) = 1$.

Ejemplo 5.2.3. Sea x, y dos símbolos de variable distintos (al ser letras distintas), α la fórmula $\forall x r(y, x)$, en el lenguaje $\mathbf{L}$ y sea $\mathbf{A}$ la estructura para $\mathbf{L}$ según lo siguiente:

- Como universo A de $\mathbf{A}$, los números naturales y
- como $(r)^{\mathbf{A}}$ la relación binaria $\leq$.

Sea u una asignación fija entre las que cumplen $u(y) = 1$. Se tiene que:

$$\begin{aligned}
I_{\mathbf{A}}^{u}(\alpha) = 1 &\Leftrightarrow \text{ para todo } n \in \omega, \quad I_{\mathbf{A}}^{u(x|n)}(r(y,x)) = 1\\
&\Leftrightarrow \text{ para todo } n \in \omega, \quad \langle u(x|n)(y), u(x|n)(x)\rangle \in (r)^{\mathbf{A}}\\
&\Leftrightarrow \text{ para todo } n \in \omega, \quad \langle u(y), u(x|n)(x)\rangle \in (r)^{\mathbf{A}}\\
&\Leftrightarrow \text{ para todo } n \in \omega, \quad \langle 1, n\rangle \in \leq\\
&\Leftrightarrow \text{ para todo } n \in \omega, \quad 1 \leq n
\end{aligned}$$

La última afirmación es falsa, pues **0 es un número natural** y es estrictamente menor que 1; por lo que su afirmación equivalente $I_{\mathbf{A}}^{u}(\alpha) = 1$ es falsa también. En conclusión, $I_{\mathbf{A}}^{u}(\alpha) = 0$.

Ejemplo 5.2.4. Sea x, y dos símbolos de variable distintos, α la fórmula $\forall x \exists y r(x, f(y))$ en el lenguaje $\mathbf{L}$ y $\mathbf{A}$ la estructura para $\mathbf{L}$ según lo siguiente:

- Como universo A de $\mathbf{A}$, los números naturales,
- como $(f)^{\mathbf{A}}$ la función siguiente s y
- como $(r)^{\mathbf{A}}$ la relación binaria $\leq$.

Sea u una asignación cualquiera, pero fija. Se tiene que:

$$\begin{aligned}
I_{\mathbf{A}}^{u}(\alpha) = 1 &\Leftrightarrow \text{ para todo } n \in \omega, \quad I_{\mathbf{A}}^{u(x|n)}(\exists y r(x, f(y))) = 1\\
&\Leftrightarrow \text{ para todo } n \in \omega \text{ existe } m \in \omega \text{ tal que }, \quad I_{\mathbf{A}}^{u(x|n,y|m)}(r(x, f(y))) = 1\\
&\Leftrightarrow \text{ para todo } n \in \omega \text{ existe } m \in \omega \text{ tal que }, \quad \langle u(x|n,y|m)(x), u(x|n,y|m)(f(y))\rangle \in (r)^{\mathbf{A}}\\
&\Leftrightarrow \text{ para todo } n \in \omega \text{ existe } m \in \omega \text{ tal que }, \quad \langle u(x|n,y|m)(x), (f)^{\mathbf{A}}(u(x|n,y|m)(y))\rangle \in (r)^{\mathbf{A}}\\
&\Leftrightarrow \text{ para todo } n \in \omega \text{ existe } m \in \omega \text{ tal que }, \quad \langle n, s(m)\rangle \in \leq\\
&\Leftrightarrow \text{ para todo } n \in \omega \text{ existe } m \in \omega \text{ tal que }, \quad n \leq s(m)
\end{aligned}$$

La última afirmación es cierta, pues dado n basta tomar como m el propio n cumpliéndose entonces $n < n + 1$, y en particular, $n \leq n + 1$. En conclusión, $I_{\mathbf{A}}^{u}(\alpha) = 1$.

Ejemplo 5.2.5. Sea x, y dos símbolos de variable distintos, α la fórmula $\forall x \exists y r(x, f(y))$ en el lenguaje $\mathbf{L}$ y $\mathbf{A}$ la estructura para $\mathbf{L}$ según lo siguiente:

- Como universo A de $\mathbf{A}$, los números naturales,
- como $(f)^{\mathbf{A}}$ la función siguiente s y
- como $(r)^{\mathbf{A}}$ la relación binaria $>$.

Sea u una asignación cualquiera, pero fija. Se tiene que:

$$\begin{aligned}
I^u_{\mathbf{A}}(\alpha) = 1 &\Leftrightarrow \text{ para todo } n \in \omega, \quad I^{u(x|n)}_{\mathbf{A}}(\exists y r(x, f(y))) = 1 \\
&\Leftrightarrow \text{ para todo } n \in \omega \text{ existe } m \in \omega \text{ tal que }, \quad I^{u(x|n,y|m)}_{\mathbf{A}}(r(x, f(y))) = 1 \\
&\Leftrightarrow \text{ para todo } n \in \omega \text{ existe } m \in \omega \text{ tal que }, \quad \langle u(x|n, y|m)(x), u(x|n, y|m)(f(y))\rangle \in (r)^{\mathbf{A}} \\
&\Leftrightarrow \text{ para todo } n \in \omega \text{ existe } m \in \omega \text{ tal que }, \quad \langle u(x|n, y|m)(x), (f)^{\mathbf{A}}(u(x|n, y|m)(y))\rangle \in (r)^{\mathbf{A}} \\
&\Leftrightarrow \text{ para todo } n \in \omega \text{ existe } m \in \omega \text{ tal que }, \quad \langle n, s(m)\rangle \in > \\
&\Leftrightarrow \text{ para todo } n \in \omega \text{ existe } m \in \omega \text{ tal que }, \quad n > s(m)
\end{aligned}$$

La última afirmación es falsa. En efecto, sea $n = 0$ y supongamos que existiese un número natural m_0 tal que $s(m_0) < 0$. Como 0 es menor que cualquier número natural no nulo, y en partircular que $s(m_0)$, se tendría $s(m_0) < 0 < s(m_0)$ y así, para el número natural m_0 ocurriría que $s(m_0) \neq s(m_0)$, lo cual es absurdo. Como resultado deducimos que $I^u_{\mathbf{A}}(\alpha)$ debe valer 0, esto es, $I^u_{\mathbf{A}}(\alpha) = 0$.

Definición 5.2.2. Sea $\mathbf{L}$ un lenguaje de primer orden y $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathrm{Form}(\mathbf{L})$. Γ *implica semánticamente* a φ, en símbolos $\Gamma \models \varphi$, sii por definición, para toda interpretación $\langle \mathbf{A}, s\rangle$ de $\mathbf{L}$ se tiene $I^s_{\mathbf{A}}(\varphi) = 1$ siempre que para toda $\gamma \in \Gamma$ ocurra $I^s_{\mathbf{A}}(\gamma) = 1$. En el caso de que $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$, escribimos $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \models \alpha$ en lugar de $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\} \models \alpha$ y si $\Gamma = \emptyset$ escribimos simplemente $\models \alpha$ en lugar de $\emptyset \models \alpha$. Las fórmulas ψ y φ son *lógicamente equivalentes*, en símbolos $\psi = \varphi$ sii, por defnción, $\psi \models \varphi$ y $\varphi \models \psi$ (o dicho de otra forma, si $\models \psi \leftrightarrow \varphi$).

Definición 5.2.3. Sea $\mathbf{L}$ un lenguaje y φ una fórmula de $\mathbf{L}$. La fórmula φ es:

1. *satisfacible* sii, por def., existe una interpretación $\langle \mathbf{A}, s\rangle$ de $\mathbf{L}$ tal que $I^s_{\mathbf{A}}(\varphi) = 1$.
2. *refutable* sii, por def., existe una interpretación $\langle \mathbf{A}, s\rangle$ de $\mathbf{L}$ tal que $I^s_{\mathbf{A}}(\varphi) = 0$.
3. *contingente* sii, por def., es a la vez satisfacible y refutable.
4. *válida* o *universalmente válida* sii, por def., para toda interpretación $\langle \mathbf{A}, s\rangle$ de $\mathbf{L}$, $I^s_{\mathbf{A}}(\varphi) = 1$ (o sea, $\models \varphi$).
5. *insatisfacible* o *contradictoria* si no es satisfacible.

Ejemplo 5.2.6. Consideremos la fórmula φ:

$$\forall x(r(x, f(x)) \to \exists y r(x, y))$$

y decidamos si es válida o contradictoria o contingente. Para toda $\mathbf{L}$-interpretación $\langle \mathbf{A}, u\rangle$:

$$\begin{aligned}
I^u_{\mathbf{A}}(\alpha) = 1 &\Leftrightarrow \text{ para todo } a \in A, \quad I^{u(x|a)}_{\mathbf{A}}(r(x, f(x)) \to \exists y r(x, y)) = 1 \\
&\Leftrightarrow \text{ para todo } a \in A, \quad I^{u(x|a)}_{\mathbf{A}}(r(x, f(x))) = 0 \text{ ó } I^{u(x|a)}_{\mathbf{A}}(\exists y r(x, y))) = 1 \\
&\Leftrightarrow \text{ para todo } a \in A, \quad I^{u(x|a)}_{\mathbf{A}}(r(x, f(x))) = 0 \text{ ó existe } b \in A \text{ tal que } I^{u(x|a,y|b)}_{\mathbf{A}}(r(x, y)) = 1 \\
&\Leftrightarrow \text{ para todo } a \in A, \quad \langle a, f(a)\rangle \notin (r)^{\mathbf{A}} \text{ ó existe } b \in A \text{ tal que } \langle a, b\rangle \in (r)^{\mathbf{A}}
\end{aligned}$$

$$u(x|a)(r(x,f(x)) = 0 \Leftrightarrow \langle \underbrace{u(x|a)(x)}_{a}, \underbrace{u(x|a)(f(x))}_{(f)(u(x|a)(x)) = f(a)} \rangle \notin (r)^A$$

$$\langle u(x|a, y|b)(x), u(x|a, y|b)(y)\rangle \in (r)^A \Rightarrow \langle a,b\rangle \in (r)^A$$

Esta condición es satisfecha siempre ya que si, para cierto $a_0 \in A$ (al menos existe $a \in A$ pues A es por definición **no vacío**), $\langle a_0, f(a_0)\rangle \in (r)^{\mathbf{A}}$ entonces basta tomar como b al propio $f(a_0)$, para el que se cumple $\langle a, b\rangle \in (r)^{\mathbf{A}}$; es decir, queda constatado que existe $b \in A$ tal que $\langle a, b\rangle \in (r)^{\mathbf{A}}$. Así pues, en conclusión, φ es universalmente válida.

Teorema 5.2.1. *Sea* $\mathbf{L}$ *un lenguaje y* $\Gamma \cup \{\psi, \varphi\}$ *un conjunto de fórmulas fórmulas de* $\mathbf{L}$*. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. $\Gamma, \psi \models \varphi$
2. $\Gamma \models \psi \to \varphi$

Corolario 5.2.2. *Sea* $\mathbf{L}$ *un lenguaje y* $\gamma_1, \ldots, \gamma_n, \varphi$ *fórmulas de* $\mathbf{L}$*. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \models \varphi$
2. $\gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \cdots \wedge \gamma_n \models \varphi$
3. $\models \gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \cdots \wedge \gamma_n \to \varphi$

Definición 5.2.4. Sea $\mathbf{L}$ un lenguaje de primer orden y Γ un conjunto de fórmulas fórmulas de $\mathbf{L}$. Γ es *insatisfacible* sii, por def., para toda interpretación $\langle \mathbf{A}, s\rangle$ de $\mathbf{L}$, existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $I^s_{\mathbf{A}}(\gamma) = 0$

Teorema 5.2.3. *Sea* $\mathbf{L}$ *un lenguaje de primer orden y* $\Gamma \cup \{\varphi\}$ *un conjunto de fórmulas fórmulas de* $\mathbf{L}$*. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. $\Gamma \models \varphi$
2. $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ *es insatisfacible*

Corolario 5.2.4. *Para cualesquiera fórmulas* $\gamma_1, \ldots, \gamma_n, \varphi$ *(*$2 \leq n$*) son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \models \varphi$
2. $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \neg\varphi\}$ *es insatisfacible*
3. $\gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \cdots \wedge \gamma_n \wedge \neg\varphi$ *es insatisfacible*

Teorema 5.2.5 (Lema de Coincidencia)**.** *Sea* $\mathbf{L}$ *un lenguaje de primer orden,* φ *una fórmula de* $\mathbf{L}$ *y* W *el conjunto de las variables libres en* φ*. Sea* $\mathbf{A}$ *una estructura algebraica para* $\mathbf{L}$ *y* s_1, s_2 *asignaciones coincidentes en los elementos de* W *(en símbolos,* $s_1 \upharpoonright W = s_2 \upharpoonright W$*). Entonces*

$$I^{s_1}_{\mathbf{A}}(\varphi) = I^{s_2}_{\mathbf{A}}(\varphi)$$

Demostración. Procedemos a hacer la demostración por inducción. Sea pues $\mathbf{A}$ una estructura para $\mathbf{L}$ y φ una fórmula de $\mathbf{L}$. Supongamos que $\varphi \in \mathrm{Atom}(\mathbf{L})$ y que $\varphi = r^n_k(t_1 \cdots t_n)$. Cada ocurrencia en φ de cada variable es una ocurrencia libre. Por tanto, la hipótesis se traduce en que s_1 y s_2 coinciden en las variables de φ. Se deduce que $\bar{s}_1(t_i) = \bar{s}_2(t_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Consecuentemente $\langle \bar{s}_1(t_1), \ldots, \bar{s}_1(t_n)\rangle \in (r^n_k)^{\mathbf{A}}$ si, y sólo si, $\langle \bar{s}_2(t_1), \ldots, \bar{s}_2(t_n)\rangle \in (r^n_k)^{\mathbf{A}}$. Así pues, $I^{s_1}_{\mathbf{A}}(\varphi) = I^{s_2}_{\mathbf{A}}(\varphi)$.

Supongamos que φ no es atómica y que el resultado es cierto para toda fórmula de "complejidad" menor que la de φ. Si φ tiene la forma $(\neg\alpha)$, $(\alpha \to \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \wedge \beta)$ o $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ entonces el resultado es inmediato por el contenido de la Defininición 5.2.1 y la hipótesis de inducción. Si existen una variable x y una fórmula α de $\mathbf{L}$ tales que $\varphi = \forall x\alpha$ (resp. $\varphi = \exists x\alpha$), entonces las variables libres de φ son las de α, salvo eventualmente x, que podría ser libre en α pero no en φ. Así, para todo $a \in A$, $s_1(x|a)$ y $s_2(x|a)$ coinciden en las variables libres de α. Por lo anterior y la hipótesis de inducción tenemos que para todo $a \in A$, $I_{\mathbf{A}}^{s_1(x|a)}(\alpha) = I_{\mathbf{A}}^{s_2(x|a)}(\alpha)$. Es decir, $I_{\mathbf{A}}^{s_1}(\forall x\alpha) = I_{\mathbf{A}}^{s_2}(\forall x\alpha)$ (resp. $I_{\mathbf{A}}^{s_1}(\exists x\alpha) = I_{\mathbf{A}}^{s_2}(\exists x\alpha)$). $\square$

Corolario 5.2.6. *Sea $\mathbf{L}$ un lenguaje, $\mathbf{A}$ una estructura algebraica para $\mathbf{L}$ y σ una sentencia de $\mathbf{L}$, entonces ocurre una, y sólo una, de las siguientes alternativas:*

1. *Para toda asignación s de V en $\mathbf{A}$, $I_{\mathbf{A}}^{s}(\sigma) = 1$.*
2. *Para toda asignación s de V en $\mathbf{A}$, $I_{\mathbf{A}}^{s}(\sigma) = 0$.*

Observación 5.2.1. Observar que no pueden ocurrir simultáneamente las opciones 1) y 2) del Corolario 5.2.6. La razón para ello es que A, por definición, es no vacío en cualquier estructura algebraica $\mathbf{A}$.

Definición 5.2.5. Sea $\mathbf{L}$ un lenguaje, $\mathbf{A}$ una estructura algebraica para $\mathbf{L}$ y φ una fórmula de $\mathbf{L}$. $\mathbf{A}$ es *modelo* de φ sii, por def., para toda asignación s de V en A, $I_{\mathbf{A}}^{s}(\varphi) = 1$. $\mathbf{A}$ es un modelo de un conjunto de fórmulas Γ si es modelo de cada una de sus fórmulas.

Observación 5.2.2.

1. Toda estructura es modelo de $\emptyset$
2. Cuando φ es sentencia, $\mathbf{A}$ es modelo de φ si, y sólo si, existe una asignación s de V en A tal que $I_{\mathbf{A}}^{s}(\varphi) = 1$. (cfr. Teorema 5.2.6.)

Corolario 5.2.7. *Sea $\mathbf{L}$ un lenguaje y $\Gamma \cup \{\tau\}$ un conjunto de sentencias de $\mathbf{L}$. $\Gamma \models \tau$ si, y sólo si, todo modelo de Γ es un modelo de τ.*

Ejemplo 5.2.7. Supongamos que el lenguaje $\mathbf{L}$ consta de los símbolos r^2, f^1 y c. Consideramos la estructura $\mathbf{A} = \langle \omega, \leq, s, 0\rangle$, donde $(r^2)^{\mathbf{A}} =\leq$, $(f^1)^{\mathbf{A}}$ es la función siguiente, $(c)^{\mathbf{A}} = 0$. Sea $s\colon V \longrightarrow \omega$ definida como $s(v_i) = i - 1$. $\bar{s}(f(f(v_3))) = (2')' = 4$, $\bar{s}(f(f(c))) = 2$, $I_{\mathbf{A}}^{s}(r(c, f(v_1))) = 1$, porque $\langle \bar{s}(c), \bar{s}(f(v_1))\rangle = \langle 0, 1\rangle \in\leq$. También se cumple y es fácil verificar que $I_{\mathbf{A}}^{s}(\forall v_1 r(c, v_1)) = 1$. Sin embargo, $I_{\mathbf{A}}^{s}(\forall v_1 r(v_2, v_1)) = 0$, porque existe un natural m tal que $\not\models_{\mathbf{A}} r(v_2, v_1)[s(v_1|m)]$, es decir, $\langle s(v_2), m\rangle \notin\leq$. En efecto, como $s(v_2) = 1$ podemos tomar como m el valor 0.

Teorema 5.2.8. *Sea φ una fórmula y x un símbolo de variable. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. *φ es universalmente válida.*
2. *$\forall x\varphi$ es universalmente válida.*

Teorema 5.2.9. *Sea φ una fórmula y x un símbolo de variable. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. *φ es satisfacible.*
2. *$\exists x\varphi$ es satisfacible.*

Observación 5.2.3. El Teorema 5.2.9 permite reducir el estudio de la satisfacibilidad de conjuntos de fórmulas al estudio de la satisfaciblidad de conjuntos de sentencias. De ahí que al estudiar el problema de satisfacibilidad de conjuntos no haya pérdida alguna de generalidad estudiando la satisfaciblidad de conjuntos de sentecias.

Ejercicio 5.2.1. Demuestre las siguientes aseveraciones:

1. $\forall v_1 q(v_1) \models q(v_2)$
2. $q(v_1) \not\models \forall v_1 q(v_1)$
3. $\forall v_1 q(v_1) \models \exists v_2 q(v_2)$
4. $\exists x \forall y p(x,y) \models \forall y \exists x p(x,y)$
5. $\forall y \exists x p(x,y) \not\models \exists x \forall y p(x,y)$
6. $\models \exists x(q(x) \to \forall x q(x))$

$q(x) \not\models \forall x q(x)$

La solución se tendrá al encontrar $\langle A, s\rangle$ tal que $I_A^s(q(x)) = 1$ pero $I_A^s(\forall x q(x)) = 0$.

Sea A definida por $A = \{0,1\}$ y $(q)^A = \{0\}$ y sea s una asignación de variables tal que $s(x) = 0$.

$I_A^s(q(x)) = 1$ sii $s(x) \in (q)^A$ sii $0 \in (q)^A$ y por tanto,

$I_A^s(q(x)) = 1$

Sin embargo, $I_A^s(\forall x q(x)) = 0$ porque $I_A^{s(x|1)}(q(x)) = 0$, pues

$I_A^{s(x|1)}(q(x)) = 1$ sii $s(x|1)(x) \in (q)^A$ sii $1 \in (q)^A$ (falso)

5.3. Ejercicios sobre Lenguajes e Interpretaciones

1. Para las siguientes fórmulas concluir qué variables son libres y cuáles son ligadas, detallando el carácter de libertad de cada una de sus ocurrencias respectivas:

   a) $\forall z(r(x,z) \to s(y,z))$
   b) $\exists x r(x,y)$
   c) $\exists x r(y,x)$
   d) $\exists z r(y,x)$
   e) $\exists x(r(x,y) \land s(x,y))$
   f) $\exists x r(x,y) \land \forall y s(x,y)$
   g) $\exists x(r(x,y) \land \forall y s(x,y))$
   h) $\exists x(\forall y r(x,y) \land s(x,y))$
   i) $\exists z(r(x,z) \lor p(y))$
   j) $\forall x(p(x) \to r(x,y))$
   k) $\forall x((p(x) \land q(x)) \to \neg r(x,y))$
   l) $\exists x(p(x) \land s(x,y))$
   m) $\exists x(\exists y q(x) \lor r(x,y))$
   n) $\forall x(\exists y r(x,y) \to r(x,z))$
   ñ) $\forall x(r(x,z) \to \exists y r(x,y))$
   o) $\forall x(\forall z r(x,z) \to s(x,z))$
   p) $((p(x) \lor q(y)) \land \forall x \forall y r(x,y))$

2. Consideremos un lenguaje **L** con los siguientes símbolos:

   - símbolos de constante: c, d
   - símbolos de función: no hay
   - símbolos de relación: p^1, q^1, e^2, r^2, s^2

   Sea **A** la estructura algebraica para **L** definida por:

   - $A = \mathbb{Z}_4$

- $(c)^{\mathbf{A}} = 0$, $(d)^{\mathbf{A}} = 1$
- $(p)^{\mathbf{A}} = \{x\colon x \in \mathbf{Z}_4, x^2 = 0\}$
- $(q)^{\mathbf{A}} = \{x\colon x \in \mathbf{Z}_4, x^2 = 2\}$
- $(e)^{\mathbf{A}} = \Delta(\mathbb{Z}_4)$
- $(r)^{\mathbf{A}} = \{(0,1),(0,2),(2,3),(2,2),(1,2),(3,0)\}$
- $(s)^{\mathbf{A}} = \{(0,1),(0,2),(0,3),(2,3),(0,0)\}$

Estudiar cuales de las siguientes sentencias son verdaderas para esta estructura:

1) $p(c)$
2) $\neg p(d)$
3) $p(c) \wedge p(d)$.
4) $p(c) \rightarrow \neg q(d)$
5) $\exists x q(x)$
6) $\neg(\exists x q(x))$
7) $\exists x \neg q(x)$
8) $\exists x(p(x) \wedge q(x))$
9) $\forall x q(x)$
10) $\forall x(p(x) \rightarrow q(x))$
11) $\forall x(q(x) \rightarrow \neg p(x))$
12) $\forall x(q(x) \rightarrow \exists y(p(x) \vee q(y)))$
13) $\forall x r(c,x)$
14) $\forall x s(c,x)$
15) $\forall x(r(c,x) \rightarrow s(c,x))$
16) $\exists y \forall x(r(c,x) \rightarrow s(c,x))$
17) $\forall x \forall y(r(x,y) \rightarrow s(x,y))$
18) $\forall x \forall y(r(x,y) \rightarrow \exists z(s(x,z)))$
19) $\forall x(p(x) \rightarrow \exists y(r(x,y)))$
20) $\forall x(p(x) \rightarrow \exists y(s(x,y) \wedge r(y,x)))$
21) $\forall x \exists y r(x,y)$
22) $\forall x \exists y s(x,y)$
23) $\exists y \forall x r(x,y)$
24) $\exists y \forall x s(x,y)$
25) $\exists y \forall x r(y,x)$
26) $\forall x \forall y \forall z((s(x,y) \wedge s(y,z)) \rightarrow r(x,z))$
27) $\forall x \forall y(r(x,y) \rightarrow \neg r(y,x))$
28) $\forall x \forall y(\neg s(x,y) \rightarrow \neg s(x,y))$
29) $\forall x \forall y(\exists z(r(x,z) \wedge r(z,y)) \rightarrow r(x,y))$
30) $\forall x \forall y(\exists z(r(x,z) \wedge s(z,y)) \rightarrow r(x,y))$
31) $\forall x \forall y(\exists z(s(x,z) \wedge r(z,y)) \rightarrow r(x,y))$
32) $\forall x \forall y(\exists z(r(x,z) \wedge r(z,y)) \rightarrow s(x,y))$

33) $\forall x(p(x) \to \exists y r(y, x))$

34) $\forall x(e(x, c) \to \exists y r(y, x))$

35) $\forall x(\exists y r(y, x) \to p(x))$

36) $\forall x(e(x, d) \leftrightarrow r(c, x))$

3. Calcular la interpretación de las siguientes fórmulas en cada una de las **L**-estructuras que se dan:

   a) $\forall x \forall y e(f(x, y), f(y, x))$ en las **L**-estructuras:

   1) **A** definida por:
      - $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
      - $(f)^{\mathbf{A}}(x, y) = \begin{cases} x + y & , \text{ si } x + y \in A, \\ x & , \text{ en otro caso.} \end{cases}$
      - $(e)^{\mathbf{A}} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7), (1, 7), (7, 1), (2, 6), (6, 2), (3, 5), (5, 3)\}$

   2) **B** definida por:
      - $B = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
      - $(f)^{\mathbf{B}}(x, y) = xy$
      - $(e)^{\mathbf{B}} = \Delta(B)$

   3) **C** definida por:
      - $C = \mathbb{Z}$
      - $(f)^{\mathbf{C}}(x, y) = xy$
      - $(e)^{\mathbf{C}} = \Delta(C)$

   b) $\forall x e(f(x, a), f(a, x))$

   1) **A** definida por:
      - $A = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
      - $(a)^{\mathbf{A}} = I_3$
      - $(f)^{\mathbf{A}}(x, y) = xy$
      - $(e)^{\mathbf{A}} = \Delta(A)$

   2) **B** definida por:
      - $B = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
      - $(a)^{\mathbf{B}} = 0_3$
      - $(f)^{\mathbf{B}}(x, y) = xy$
      - $(e)^{\mathbf{B}} = \Delta(B)$

   3) **C** definida por:
      - $C = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
      - $(a)^{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
      - $(f)^{\mathbf{C}}(x, y) = xy$
      - $(e)^{\mathbf{C}} = \Delta(C)$

   c) $\forall x \exists y e(f(x, y), a)$

   1) **A** definida por:
      - $A = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
      - $(a)^{\mathbf{A}} = I_3$

- $(f)^{\mathbf{A}}(x, y) = xy$
- $(e)^{\mathbf{A}} = \Delta(A)$

2) **B** definida por:
   - $B = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
   - $(a)^{\mathbf{B}} = 0_3$
   - $(f)^{\mathbf{B}}(x, y) = xy$
   - $(e)^{\mathbf{B}} = \Delta(B)$
3) **C** definida por:
   - $C = \mathbb{Z}$
   - $(a)^{\mathbf{C}} = 1$
   - $(f)^{\mathbf{C}}(x, y) = xy$
   - $(e)^{\mathbf{C}} = \Delta(C)$

d) $\forall x(e(f(x, x), a) \to e(x, a))$

1) **A** definida por:
   - $A = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
   - $(a)^{\mathbf{A}} = I_3$
   - $(f)^{\mathbf{A}}(x, y) = xy$
   - $(e)^{\mathbf{A}} = \Delta(A)$
2) **B** definida por:
   - $B = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
   - $(a)^{\mathbf{B}} = 0_3$
   - $(f)^{\mathbf{B}}(x, y) = xy$
   - $(e)^{\mathbf{B}} = \Delta(B)$
3) **C** definida por:
   - $C = \mathbb{Z}$
   - $(a)^{\mathbf{C}} = 1$
   - $(f)^{\mathbf{C}}(x, y) = xy$
   - $(e)^{\mathbf{C}} = \Delta(C)$
4) **D** definida por:
   - $D = \mathbb{R}$
   - $(a)^{\mathbf{D}} = 1$
   - $(f)^{\mathbf{D}}(x, y) = xy$
   - $(e)^{\mathbf{D}} = \Delta(D)$
5) **E** definida por:
   - $E = \mathbb{R}$
   - $(a)^{\mathbf{E}} = 0$
   - $(f)^{\mathbf{E}}(x, y) = xy$
   - $(e)^{\mathbf{E}} = \Delta(E)$
6) **F** definida por:
   - $F = \mathbb{Z}_4$
   - $(a)^{\mathbf{F}} = 0$
   - $(f)^{\mathbf{F}}(x, y) = xy$
   - $(e)^{\mathbf{F}} = \Delta(F)$

4. Determinar el carácter (satisfacible y refutable, universalmente válida o contradicción) de las siguientes fórmulas de primer orden:

   a) $\forall x \forall y(p(x, y) \to p(y, x))$

   b) $(\forall x \exists y(p(x, y) \to p(y, x)) \to (\exists x \exists y(p(x, y) \to p(y, x)))$

   c) $\forall x \forall y(p(x, y) \to \neg p(y, x))$

   d) $\forall x \exists y(p(x, y) \to \neg p(y, x))$

5. Consideramos las siguientes sentencias:

   1) $\forall x(p(x) \to \exists y r(x, y))$
   2) $\forall x(q(x) \to \exists y r(y, x))$
   3) $\exists x(p(x) \wedge q(x))$
   4) $\forall x \exists y r(x, y)$
   5) $\exists x \exists y \neg r(x, y)$

   Encontrar, si existen, estructuras en las que:

   a) Las sentencias 1), 3) y 5) sean verdaderas y las restantes falsas.

   b) Las sentencias 1), 2) y 4) sean verdaderas y las restantes falsas.

   c) Las sentencias 2) y 3) sean verdaderas y las restantes falsas.

   d) Las sentencias 2), 3) y 4) sean verdaderas y las restantes falsas.

   e) Las sentencias 2), 4) y 5) sean verdaderas y las restantes falsas.

   f) Las sentencias 2), 3) y 5) sean verdaderas y las restantes falsas.

   g) Todas las sentencias sean verdaderas.

   h) Todas las sentencias sean falsas.

6. Dadas las siguientes sentencias:

   1) $\forall x(\exists y r(x, y) \to p(x))$
   2) $\forall x(p(x) \to q(x))$
   3) $\exists x(q(x) \wedge \forall y \neg r(x, y))$
   4) $\exists x r(x, x)$
   5) $\exists x \neg r(x, x)$

   Encontrar, si existen, estructuras en las que:

   a) Las sentencias 1), 3) y 5) sean verdaderas y las restantes falsas.

   b) Las sentencias 1), 2) y 4) sean verdaderas y las restantes falsas.

   c) Las sentencias 1), 2) y 4) sean falsas y las restantes verdaderas.

   d) Las sentencias 2) y 3) sean verdaderas y las restantes falsas.

   e) Las sentencias 2), 3) y 4) sean verdaderas y las restantes falsas.

   f) Las sentencias 2), 4) y 5) sean verdaderas y las restantes falsas.

   g) Las sentencias 2), 3) y 5) sean verdaderas y las restantes falsas.

   h) Todas las sentencias sean verdaderas.

   i) Todas las sentencias sean falsas.

7. Estudiar para cada una de las siguientes fórmulas, si es universalmente válida, satisfacible, refutable o contradicción:

   a) $p(x) \to (\forall x \neg p(x) \to \neg p(f(a)))$
   b) $\forall x \exists y r(x, y) \to \exists y \forall x r(x, y)$
   c) $\exists x \forall y r(x, y) \to \forall y \exists x r(x, y)$
   d) $\forall x \forall y (r(x, y) \to r(y, x))$
   e) $\forall x (p(x) \to p(a))$
   f) $\forall x p(x) \to p(a)$

8. Dadas las siguientes fórmulas:

   - $\varphi = \forall x \exists y p(x, y)$
   - $\psi = \exists x \forall y p(x, y)$

   Encuentra una interpretación en la que ambas sean ciertas y otra en la que φ sea cierta y ψ sea falsa. ¿Es cierto $\varphi \vDash \psi$?

9. Consideramos el lenguaje de primer orden $\mathbf{L}$ dado por lo siguiente:

   - símbolos de constante: a
   - símbolos de función: f, g
   - símbolos de relación: P, Q

   y la $\mathbf{L}$-estructura $\mathbf{A}$ dada por:

   - $A = \mathbb{Z}_{10}$
   - $(a)^{\mathbf{A}} = 4$
   - $(f)^{\mathbf{A}} = +$ (suma en $\mathbb{Z}_{10}$), $(g)^{\mathbf{A}}(x) = x^2$
   - $(p)^{\mathbf{A}} = \{(k, k) \colon k \in A\} = \Delta(A)$, $(q)^{\mathbf{A}} = \{(0, 0), (1, 9), (2, 8), (3, 7), (4, 6), (5, 5), (6, 4), (7, 3), (8, 2), (9, 1)\}$

   Interpretar las fórmulas siguientes usando una asignación cualquiera

   $$s \colon Var(\mathbf{L}) \longrightarrow \mathbb{Z}_{10}$$

   a condición de que cumpla $s(x) = 0$ y $s(y) = 4$.

   a) $\forall x (p(g(x), a) \to q(f(y, a), x))$
   b) $\forall x \exists y \exists z p(x, f(g(y), g(z)))$

10. Consideremos el lenguaje de primer orden $\mathbf{L}$ dado por lo siguiente:

    - símbolos de constante: a, b, c
    - símbolos de función: f, g
    - símbolos de relación: P

    y la $\mathbf{L}$-estructura $\mathbf{A}$ dada por:

    - $A = \mathbb{Z}_6$
    - $(a)^{\mathbf{A}} = 0$, $(b)^{\mathbf{A}} = 1$, $(c)^{\mathbf{A}} = 2$
    - $(f)^{\mathbf{A}} = +$ (suma en $\mathbb{Z}_6$), $(g)^{\mathbf{A}}(x) = \cdot$ (producto en $\mathbb{Z}_6$)

- $(q)^{\mathbf{A}} = \{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$

a) Describir todas las asignaciones s de **L** en **A** para las que la siguiente fórmula se interpreta como verdadera:
$$\neg p(g(x, f(b,b)), a) \to p(f(y,c), g(y,y))$$

b) Interpretar la sentencia $\forall x \exists y p(g(y,c), x)$.

11. Describir todas las estructuras en las que la fórmula siguiente es válida:
$$r(x) \to \forall x r(x)$$

12. Consideramos el lenguaje de primer orden **L** dado por lo siguiente:

- símbolos de constante: a
- símbolos de función: f, g
- símbolos de relación: P

y la **L**-estructura **A** dada por:

- $A = \mathbb{Z}_6$
- $(a)^{\mathbf{A}} = 2$
- $(f)^{\mathbf{A}} = +$ (suma en $\mathbb{Z}_6$), $(g)^{\mathbf{A}}(x) = \cdot$ (producto en $\mathbb{Z}_6$),
- $(p)^{\mathbf{A}} = \{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$

Consideremos una asignación s en **A** tal que $s(x_1) = 2, s(x_2) = 0, s(x_3) = 0, s(x_4) = 3$. Se pide interpretar las siguientes fórmulas:

a) $\neg \exists x_1 \forall x_2 p(f(x_1, x_4), a)$

b) $\forall x_1 (p(x_1, g(x_1, x_1)) \leftrightarrow p(g(a, x_1), f(a,a)))$

13. Sea $(X, \leq)$ un conjunto ordenado. Consideramos un lenguaje de primer orden **L** con un símbolo de predicado binario r.Sea ahora la **L**-estructura **A**, cuyo universo es X, y para la que $(r)^{\mathbf{A}} = \leq$. Se pide escribir una fórmula que signifique exactamente que $(X, \leq)$ es un retículo.

14. Dada la fórmula
$$r(x) \leftrightarrow \exists x r(x)$$

se pide:

a) Probar que **no** es universalmente válida.

b) Encontrar una estructura donde la fórmula no sea válida.

c) ¿Es satisfacible la fórmula en cualquier estructura?

d) ¿Es refutable en toda estructura?

15. Interpretar la fórmula
$$\forall x \forall y (p(x,y) \to \neg p(y,x))$$

en las estructuras que seguidamente se sugieren:

a) $A = \{0,1,2,3\}$
$p^{\mathbf{A}} = \{(0,0),(0,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)\}$

b) $B = \mathbb{R}$
$p^{\mathbf{B}}$ es la relación binaria "x es estrictamente menor que y"

   c) $C = \mathbb{N}$
   $p^{\mathbf{C}}$ es la relación binaria "x es múltiplo de y"

16. Interpretar la fórmula

$$\forall x \forall y(p(x,y) \to \neg p(y,x))$$

en la estructura **A** con

- $A = \{0,1,2,3\}$
- $(p)^{\mathbf{A}} = \{(0,0),(0,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)\}$

17. La hipótesis del *Lema de Coincidencia* es suficiente, pero no necesaria. Para demostrarlo, dar una fórmula φ en un lenguaje **L**, una **L**-estructura **A** y asignaciones s_1 y s_2 de V en **A** tales que si W_φ es el conjunto de símbolos de variable que ocurren libremente en φ, sea $s_1 \upharpoonright W_\varphi \neq s_2 \upharpoonright W_\varphi$ y sin embargo $I_A^{s_1}(\varphi) = I_A^{s_2}(\varphi)$.

18. Considere las fórmulas de primer orden:

   a) $\exists x \exists y(r(x,x) \wedge \neg r(y,y))$
   b) $\neg \exists x p(x) \wedge \neg \forall y(\exists z p(z) \to p(y))$
   c) $\neg \exists p(x) \wedge \exists x q(x) \wedge \forall x(p(x) \to q(x))$
   d) $\exists x p(x) \wedge \neg \exists y q(y) \wedge \forall z(p(z) \to q(z))$
   e) $(\exists x p(x) \wedge \exists x q(x)) \to \exists x(p(x) \wedge q(x))$
   f) $\exists x \forall y r(x,y) \to \forall y \exists x r(x,y)$
   g) $\forall x r(x, f(x)) \wedge \exists x \forall y \neg r(x,y)$
   h) $(\exists x p(x) \wedge \exists x \neg r(x,x)) \to \exists x(p(x) \wedge \neg r(x,x))$
   i) $\forall x \exists y r(x,y) \wedge \forall y \neg r(c,y)$

   y decida en cada caso si la fórmula es universalmente válida, contradicción o contingente (simultáneamente satisfacible y refutable).

5.4. Forma Normal Prenexa

En esta sección se trata de estudiar como proceder cuando la sustitución de un símbolo de variable por un término no es posible y, sin embargo, persiste la necesidad de llevarla a cabo.

Lema 5.4.1. *Sea* **L** *un lenguaje y* $\alpha, \alpha' \in \mathrm{Form}(\mathbf{L})$. *Si* $\alpha = \alpha'$ *entonces* $\neg\alpha = \neg\alpha'$.

Lema 5.4.2. *Sea* **L** *un lenguaje y* $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \mathrm{Form}(\mathbf{L})$. *Entonces:*

1. *Si* $\models \alpha' \to \alpha$ *y* $\models \beta \to \beta'$, *entonces* $\models (\alpha \to \beta) \to (\alpha' \to \beta')$
2. *Si* $\alpha = \alpha'$ *y* $\beta = \beta'$, *entonces* $(\alpha \to \beta) = (\alpha' \to \beta')$

Definición 5.4.1. Sea **L** un lenguaje, x un símbolo de variable, t y u términos y φ una fórmula. Definimos u_t^x como sigue:

$$u_t^x \equiv \begin{cases} a, & \text{si } u \equiv a \\ t, & \text{si } u \equiv x \\ y, & \text{si } u \equiv y \text{ e } y \not\equiv x \\ f((t_1)_t^x, \ldots, (t_n)_t^x), & \text{si } u \equiv f(t_1, \ldots, t_n) \end{cases}$$

Definimos φ_t^x como sigue:

1. $(r(t_1,\dots,t_n))^x_t$ es $r((t_1)^x_t,\dots,(t_n)^x_t)$.
2. $(\neg\alpha)^x_t$ es $\neg(\alpha^x_t)$
3. $(\alpha\rightarrow\beta)^x_t$ es $(\alpha^x_t\rightarrow\beta^x_t)$
4. $(\alpha\vee\beta)^x_t$ es $(\alpha^x_t\vee\beta^x_t)$
5. $(\alpha\wedge\beta)^x_t$ es $(\alpha^x_t\wedge\beta^x_t)$
6. $(\alpha\leftrightarrow\beta)^x_t$ es $(\alpha^x_t\leftrightarrow\beta^x_t)$
7. $(\forall y\alpha)^x_t \equiv \begin{cases}\forall y\alpha, & \text{si } x\equiv y,\\ \forall y(\alpha^x_t), & \text{si } x\not\equiv y.\end{cases}$
8. $(\exists y\alpha)^x_t \equiv \begin{cases}\exists y\alpha, & \text{si } x\equiv y,\\ \exists y(\alpha^x_t), & \text{si } x\not\equiv y.\end{cases}$

φ^x_y es la fórmula que se obtiene renombrando por y las ocurrencias libres de x en φ

Ejemplo 5.4.1. Sea $\mathbf{L}$ un lenguaje, $p,q\in R$ y $x,y,z\in V$.

1. Para toda $\varphi\in\mathrm{Form}(\mathbf{L})$, $\varphi^x_x\equiv\varphi$.
2. $(q(x)\rightarrow\forall xp(x))^x_y\equiv(q(y)\rightarrow\forall xp(x))$
3. Si α es la fórmula $\neg\forall y(x\approx y)$, entonces $\forall x\alpha\rightarrow\alpha^x_z$ es

$$\forall x\neg\forall y(x\approx y)\rightarrow\neg\forall y(z\approx y)$$

4. Si α es la fórmula $\neg\forall y(x\approx y)$, entonces $\forall x\alpha\rightarrow\alpha^x_y$ es

$$\forall x\neg\forall y(x\approx y)\rightarrow\neg\forall y(y\approx y)$$

Lema 5.4.3. *Sean* $\mathbf{L}$ *un lenguaje,* φ *una fórmula,* x *e* y *símbolos de variables distintos y* $\langle\mathbf{A},s\rangle$ *una interpretación del lenguaje. Si* y *no ocurre en* φ*, entonces para todo* $a\in A$, $I^{s(x|a)}_{\mathbf{A}}(\varphi)=I^{s(y|a)}_{\mathbf{A}}(\varphi^x_y)$.

Teorema 5.4.4. *Sean* $\mathbf{L}$ *un lenguaje,* φ *una fórmula y símbolos de variable* x *e* y*. Si* y *no ocurre en* $\forall x\varphi$*, entonces la fórmula* $\forall x\varphi$ *es lógicamente equivalente a* $\forall y(\varphi^x_y)$.

Lema 5.4.5. *Sea* $\mathbf{L}$ *un lenguaje,* x *un símbolo de variable y* φ *una fórmula. Si* x *no ocurre libremente en* φ *entonces* φ, $\forall x\varphi$ *y* $\exists x\varphi$ *son fórmulas lógicamente equivalentes dos a dos.*

Lema 5.4.6. *Sea* $\mathbf{L}$ *un lenguaje,* $\alpha\in\mathrm{Form}(\mathbf{L})$ *y* $x\in V$*. Entonces:*

1. $\neg\forall x\alpha=\exists x\neg\alpha$

2. $\neg\exists x\alpha=\forall x\neg\alpha$

Teorema 5.4.7. *Sea* $\mathbf{L}$ *un lenguaje,* $\alpha,\beta\in\mathrm{Form}(\mathbf{L})$ *y* $x\in V$*. Si* x *no ocurre libremente en* α *entonces*

1. $\alpha=\forall x\alpha$

2. $\alpha=\exists x\alpha$

3. $(\alpha\rightarrow\exists x\beta)=\exists x(\alpha\rightarrow\beta)$

4. $(\forall x\beta\rightarrow\alpha)=\exists x(\beta\rightarrow\alpha)$

5. $(\alpha \to \forall x\beta) = \forall x(\alpha \to \beta)$.

6. $(\exists x\beta \to \alpha) = \forall x(\beta \to \alpha)$.

7. $(\forall x\beta \vee \alpha) = \forall x(\beta \vee \alpha)$

8. $(\alpha \vee \forall x\beta) = \forall x(\alpha \vee \beta)$

9. $(\alpha \vee \exists x\beta) = \exists x(\alpha \vee \beta)$

10. $(\exists x\beta \vee \alpha) = \exists x(\beta \vee \alpha)$

11. $(\forall x\beta \wedge \alpha) = \forall x(\beta \wedge \alpha)$

12. $(\alpha \wedge \forall x\beta) = \forall x(\alpha \wedge \beta)$

13. $(\alpha \wedge \exists x\beta) = \exists x(\alpha \wedge \beta)$

14. $(\exists x\beta \wedge \alpha) = \exists x(\beta \wedge \alpha)$

Definición 5.4.2. Un *literal* es cualquier fórmula atómica de **L** o cualquier negación de una fórmula atómica. Un literal es *positivo* cuando, y sólo cuando, es fórmula atómica y es *negativo* si no es positivo. Dado un literal λ, definimos su *literal complementario*, en símbolos, λ^c como sigue:

$$\lambda^c \equiv \begin{cases} \neg r(t_1, \ldots, t_n) & , \textit{ si } \lambda \equiv r(t_1, \ldots, t_n) \\ r(t_1, \ldots, t_n) & , \textit{ si } \lambda \equiv \neg r(t_1, \ldots, t_n) \end{cases}$$

Para cada literal λ, $\mathrm{sgn}(\lambda)$ está definido por la siguiente igualdad:

$$\mathrm{sgn}(\lambda) = \begin{cases} 1 & , \textit{ si } \lambda \equiv r(t_1, \ldots, t_n) \\ 0 & , \textit{ si } \lambda \equiv \neg r(t_1, \ldots, t_n) \end{cases}$$

Para cada literal λ, $\mathrm{abv}(\lambda)$ está definido por la siguiente igualdad:

$$\mathrm{abv}(\lambda) = \begin{cases} r(t_1, \ldots, t_n) & , \textit{ si } \lambda \equiv r(t_1, \ldots, t_n) \\ r(t_1, \ldots, t_n) & , \textit{ si } \lambda \equiv \neg r(t_1, \ldots, t_n) \end{cases}$$

Definición 5.4.3. Sea **L** un lenguaje y φ una fórmula de **L**. φ está en *forma prenexa* sii, por definición, está expresada como:

$$Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n \beta \tag{5.1}$$

donde:

- para todo $1 \leq i \leq n$, $Q_i \in \{\exists, \forall\}$ y
- en la escritura de β no aparece ningún símbolo lógico del conjunto $\{\to, \leftrightarrow, \forall, \exists\}$.

En la expresión (5.1), β es denominada matriz de la fórmula φ y la expresión $Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n$ es denominada *prefijo* de φ. Una fórmula en forma prenexa tal que todos los cuantificadores de su prefijo son $\forall$ (resp. $\exists$) se denomina $\forall$-fórmula (resp. $\exists$-fórmula). Si la fórmula es una sentencia hablaremos, matizando más, de $\forall$-sentencia y $\exists$-sentencia.

Teorema 5.4.8. *Sea* **L** *un lenguaje. Para todo* $\alpha \in \mathrm{Form}(\mathbf{L})$ *existe* $\alpha' \in \mathrm{Form}(\mathbf{L})$ *tal que:*

1. α' *está en forma prenexa*

2. $\alpha = \alpha'$

Observación 5.4.1. Observar que la fórmula en forma prenexa equivalente cuya existencia garantiza el Teorema 5.4.8 puede ser encontrada en forma normal prenexa.

Definición 5.4.4. Sea $\mathbf{L}$ un lenguaje y φ una fórmula de $\mathbf{L}$. φ está en *forma normal prenexa* (resp. *forma normal prenexa perfecta*) sii, por definición:

1. φ está en forma prenexa y
2. la matriz de φ es una fórmula en forma normal conjuntiva (resp. forma normal conjuntiva perfecta) en el lenguaje proposicional cuyas fórmulas atómicas son las fórmulas atómicas de $\mathbf{L}$.

Corolario 5.4.9. *Sea* $\mathbf{L}$ *un lenguaje. Para todo* $\alpha \in \mathrm{Form}(\mathbf{L})$ *existe* $\alpha' \in \mathrm{Form}(\mathbf{L})$ *tal que:*

1. α' *está en forma normal prenexa y*

2. $\alpha = \alpha'$

Definición 5.4.5. Sea $\mathbf{L}$ un lenguaje de primer orden. Llamamos *cláusula* a cualquier fórmula φ del lenguaje satisfaciendo las siguientes condiciones:

1. φ está en forma normal prenexa
2. en su matriz no aparece el símbolo $\wedge$
3. es una $\forall$-sentencia

Convenimos en que la expresión vacía es una cláusula —la *cláusula vacía*, que a tal efecto representamos por el símbolo $\Box$, y que es una cláusula insatisfacible. La cláusula que en su matriz no tiene más que un literal (fórmula atómica o negación de ella) se denomina *cláusula unitaria* o también *cláusula unit.*

Ejemplo 5.4.2.

1. $\forall x(\neg p(x) \vee r(f(x)))$ es una cláusula
2. $\forall x((\neg p(x) \vee r(f(x))) \wedge (\neg p(x) \vee q(x, f(x))))$ no es una cláusula.
3. $\forall x_2 \forall x_4 (p(a, x_2, f_3(x_2), x_4, f_5(x_2, x_4))$ es una cláusula.

Observación 5.4.2. En la práctica las cláusulas vienen representadas por su matriz. Así, eventualmente (y frecuentemente) diremos "la cláusula $\neg p(x) \vee r(f(x))$" en lugar de "la cláusula $\forall x(\neg p(x) \vee r(f(x)))$". Dando un paso más en el abuso del lenguaje, cada cláusula podrá ser respresentada, sin previo aviso, por el conjunto de sus literales. Por ejemplo, la cláusula $\forall x(\neg p(x) \vee r(f(x)))$ figuraría como $\{\neg p(x), r(f(x)))\}$. Como ejemplo añadido, $\Box$ conrresponde con $\varnothing$.

Observación 5.4.3. Supongamos que φ es una $\forall$-sentencia de la forma $\forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_n \beta$. Si β es la fórmula $\alpha \wedge \gamma$, es claro que φ es lógicamente equivalente a la siguiente conjunción:

$$(\forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_n \alpha) \wedge (\forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_n \gamma)$$

Así pues, toda $\forall$-sentencia es lógicamente equivalente a una conjunción de cláusulas; es por ello que al estudiar la sastisfacibilidad de conjuntos de fórmulas podemos sustituir cualquier $\forall$-sentencia φ que aparezca en él por el conjunto de las cláusulas que conjuntadas dan una fórmula lógicamente equivalente a φ. Es decir, $\Gamma \cup \{\varphi\}$ es insatisfacible si, y sólo si, lo es $\Gamma \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, donde las φ_i son cláusulas y la $\forall$-sentencia φ es lógicamente equivalente a $\varphi^{sc} = \bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i$. Así pues, si nos preguntamos por la satisfacibilidad de un conjunto de sentencias Γ, el problema es fácilmente trasladable al estudio de la satisfacibilidad de un conjunto de cláusulas Γ^{sc}; para ello pasaremos de Γ a Γ^{s} y posteriormente a Γ^{sc} cambiando cada φ^{s} de Γ^{s} por los conjuntos de la fórmula φ^{sc}.

Teorema 5.4.10. *Sea* $\mathbf{L}$ *un lenguaje,* $\alpha, \beta \in \mathrm{Form}(\mathbf{L})$ *y* $x \in V$. *Entonces:*

1. $(\forall x\alpha \wedge \forall x\beta) = \forall x(\alpha \wedge \beta)$. $\quad \forall x\alpha \vee \forall x\beta \neq \forall x(\alpha \vee \beta)$
2. $(\exists x\alpha \vee \exists x\beta) = \exists x(\alpha \vee \beta)$. $\quad \forall x(\alpha \vee \beta) \underset{\dashv}{\neq} \forall x\alpha \vee \forall\beta$

Para encontrar una fórmula en forma prenexa que sea lógicamente equivalente a otra dada podemos seguir los siguitentes pasos:

- Usar que

$$\varphi \leftrightarrow \psi = (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi) \tag{5.2}$$
$$\varphi \to \psi = \neg\varphi \vee \psi \tag{5.3}$$

- Usar repetidamente que:

$$\neg\neg\varphi = \varphi \tag{5.4}$$

  las *leyes de De Morgan* que establecen que:

$$\neg(\varphi \vee \psi) = \neg\varphi \wedge \neg\psi \tag{5.5}$$
$$\neg(\varphi \wedge \psi) = \neg\varphi \vee \neg\psi \tag{5.6}$$

  así como que:

$$\neg\forall x\varphi = \exists x\neg\varphi \tag{5.7}$$
$$\neg\exists x\varphi = \forall x\neg\varphi \tag{5.8}$$

  de forma que los símbolos de negación precederán inmediatamente a las fórmulas atómicas.

- Renombrar símbolos de variable cuantificados, si fuera necesario, usando que si y no ocurre en $\forall x\varphi$ entonces:

$$\forall x\varphi = \forall y(\varphi^{x}_{y}) \tag{5.9}$$
$$\exists x\varphi = \exists y(\varphi^{x}_{y}) \tag{5.10}$$

- Usar que:

$$\forall x\varphi \wedge \forall x\psi = \forall x(\varphi \wedge \psi) \tag{5.11}$$
$$\exists x\varphi \vee \exists x\psi = \exists x(\varphi \vee \psi), \tag{5.12}$$

  y que si x no ocurre libremente en ψ

$$\forall x\psi = \psi \tag{5.13}$$
$$\exists x\psi = \psi \tag{5.14}$$
$$\forall x\varphi \vee \psi = \forall x(\varphi \vee \psi) \tag{5.15}$$
$$\forall x\varphi \wedge \psi = \forall x(\varphi \wedge \psi) \tag{5.16}$$
$$\exists x\varphi \vee \psi = \exists x(\varphi \vee \psi) \tag{5.17}$$
$$\exists x\varphi \wedge \psi = \exists x(\varphi \wedge \psi) \tag{5.18}$$

Ejemplo 5.4.3. Encuentre una fórmula en forma prenexa que sea lógicamente equivalente a la siguiente fórmula, que llamamos φ:

$$\exists x(q(x) \wedge \forall x p(a, x)) \to \forall x(q(x) \wedge \exists y \forall z r(a, y, z))$$

Solución.

$$\begin{aligned}
\varphi &= \neg\exists x(q(x) \wedge \forall x p(a, x)) \vee \forall x(q(x) \wedge \exists y \forall z r(a, y, z)) \\
&= \forall x \neg(q(x) \wedge \forall x p(a, x)) \vee \forall x(q(x) \wedge \exists y \forall z r(a, y, z)) \\
&= \forall x(\neg q(x) \vee \neg\forall x p(a, x)) \vee \forall x(q(x) \wedge \exists y \forall z r(a, y, z)) \\
&= (\forall x \neg q(x) \vee \exists x \neg p(a, x)) \vee \forall x(q(x) \wedge \exists y \forall z r(a, y, z)) \\
&= (\forall x \neg q(x) \vee \exists y \neg p(a, y)) \vee \forall x(q(x) \wedge \exists y \forall z r(a, y, z)) \\
&= \exists y(\forall x \neg q(x) \vee \neg p(a, y)) \vee \exists y(\forall z q(z) \wedge \forall z r(a, y, z)) \\
&= \exists y(\forall x(\neg q(x) \vee \neg p(a, y)) \vee \forall z(q(z) \wedge r(a, y, z))) \\
&= \exists y \forall x \forall z(\neg q(x) \vee \neg p(a, y) \vee (q(z) \wedge r(a, y, z))) \\
&= \exists y \forall x \forall z((\neg q(x) \vee \neg p(a, y) \vee q(z)) \wedge (\neg q(x) \vee \neg p(a, y) \vee r(a, y, z)))
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 5.4.4. Encuentre una fórmula en forma prenexa que sea lógicamente equivalente a la siguiente fórmula, que llamamos φ:

$$\forall x(\forall y \exists z(p(y, z) \to q(x)) \to \exists z(\neg p(x, f(x)) \vee q(z)))$$

Solución.

$$\begin{aligned}
\varphi &= \forall x(\neg\forall y \exists z(\neg p(y, z) \vee q(x)) \vee \exists z(\neg p(x, f(x)) \vee q(z))) \\
&= \forall x(\exists y \forall z(p(y, z) \wedge \neg q(x)) \vee \exists z(\neg p(x, f(x)) \vee q(z))) \\
&= \forall x(\exists y \forall z(p(y, z) \wedge \neg q(x)) \vee \exists y(\neg p(x, f(x)) \vee q(y))) \\
&= \forall x \exists y(\forall z(p(y, z) \wedge \neg q(x)) \vee (\neg p(x, f(x)) \vee q(y))) \\
&= \forall x \exists y \forall z((p(y, z) \wedge \neg q(x)) \vee (\neg p(x, f(x)) \vee q(y))) \\
&= \forall x \exists y \forall z((p(y, z) \vee \neg p(x, f(x)) \vee q(y)) \wedge (\neg q(x) \vee \neg p(x, f(x)) \vee q(y)))
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 5.4.5. Encuentre una fórmula en forma prenexa que sea lógicamente equivalente a la siguiente fórmula, que llamamos φ:

$$(\forall x \exists y \neg p(x, y) \to q(z)) \to \forall x \exists z r(x, z)$$

Solución.

$$\begin{aligned}
\varphi &= \neg(\neg\forall x \exists y \neg p(x, y) \vee q(z)) \vee \forall x \exists z r(x, z) \\
&= (\forall x \exists y \neg p(x, y) \wedge \neg q(z)) \vee \forall x \exists z r(x, z) \\
&= \forall x \exists y(\neg p(x, y) \wedge \neg q(z)) \vee \forall x \exists z r(x, z) \\
&= \forall x(\exists y(\neg p(x, y) \wedge \neg q(z)) \vee \forall x \exists z r(x, z)) \\
&= \forall x(\exists y(\neg p(x, y) \wedge \neg q(z)) \vee \forall w \exists y r(w, y)) \\
&= \forall x \forall w(\exists y(\neg p(x, y) \wedge \neg q(z)) \vee \exists y r(w, y)) \\
&= \forall x \forall w \exists y((\neg p(x, y) \wedge \neg q(z)) \vee r(w, y)) \\
&= \forall x \forall w \exists y((\neg p(x, y) \vee r(w, y)) \wedge (\neg q(z) \vee r(w, y)))
\end{aligned}$$

□

5.5. Forma Normal de Skolem

Definición 5.5.1. Sea φ una fórmula del lenguaje de primer orden **L** en forma normal prenexa, esto es, se escribe como:

$$Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n \beta$$

estando β en forma normal conjuntiva. Se denomina *forma de Skolem* de φ, representada φ^s, a la fórmula obtenida suprimiento los cuantificadores existenciales $\exists x_i$ que hubiere en el prefijo de φ y reemplazando en β cada una de las ocurrencias de x_i cuantificada con $\exists$ por $f_i(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{k_i}})$, donde $x_{j_1}, \ldots, x_{j_{k_i}}$ son los símbolos de variable cuantificados con $\forall$ y situados antes de $\exists x_i$ en el prefijo de φ. Los símbolos de función f_i deben ser distintos de todos los que aparezcan en la fórmula φ y reciben el nombre de *funciones de Skolem*.

Observación 5.5.1. Si en la operación descrita en la Defininición 5.5.1 el cuantificador $\exists x_i$ no está precedido de ningún cuantificador $\forall x_j$, el término $f_i(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{k_i}})$ que se introduce es sencillamente un símbolo de constante c_i; pues siempre se ha entendido que un símbolo de constante es un símbolo de función 0-ario.

Ejemplo 5.5.1.

- si φ fuese $\exists x p(x, f(x))$, φ^s sería $p(a, f(a))$
- si φ fuese $\forall x \exists y p(x, f(y))$, φ^s sería $\forall x p(x, f(f_1(x)))$
- si φ fuese $\exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \exists x_4 (\neg p(x_1, x_2) \vee r(x_3, x_4))$, φ^s sería $\forall x_2 (\neg p(a, x_2) \vee r(f_3(x_2), f_4(x_2)))$
- si φ fuese $\exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \forall x_4 \exists x_5 (p(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, φ^s sería $\forall x_2 \forall x_4 (p(a, x_2, f_3(x_2), x_4, f_5(x_2, x_4))$

Observación 5.5.2. Sea Γ un conjunto de sentencias de **L**. Para cada φ de Γ, sea φ^p un fórmula en forma normal prenexa lógicamente equivalente a φ y para cada φ^p, sea φ^s una forma de Skolem de φ^p. Representaremos por Γ^p al conjunto de las sentencias φ^p y por Γ^s al conjunto de las sentencias φ^s.

Teorema 5.5.1. *Sea Γ un conjunto de sentencias de un lenguaje de primer orden* **L**. *Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. *Γ es satisfacible*
2. *Γ^s es satisfacible*

Demostración. La demostración está en la pág. 48 de [6] y mucho mejor en [3], pág. 249. □

El problema general de la *demostración automática de teoremas* es el de saber si $\Gamma \models \varphi$, donde $\Gamma \cup \{\varphi\}$ es un conjunto de sentencias del lenguaje de primer orden **L**; y en los casos prácticos Γ es finito. En virtud del Teorema 5.2.3, sabemos que el problema se reduce a saber si $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ es insatisfacible o no. Lo que aporta el Teorema 5.5.1 es que equivalentemente basta con estudiar la insatisfacibilidad de $\Gamma^s \cup \{(\neg\varphi)^s\}$

Ejemplo 5.5.2. Consideremos la fórmula φ:

$$\forall x (r(x, f(x)) \to \exists y r(x, y))$$

y demostremos que es universalmente válida, o sea, que $\models \varphi$. Para ello basta con demostrar que $\{\neg\varphi\}$ es insatisfacible. Expresaremos φ en forma prenexa:

$$\begin{aligned}\neg\varphi &\equiv \neg\forall x(r(x, f(x)) \rightarrow \exists y r(x, y))\\ &= \neg\forall x(\neg r(x, f(x)) \vee \exists y r(x, y))\\ &= \exists x(r(x, f(x)) \wedge \neg\exists y r(x, y))\\ &= \exists x(r(x, f(x)) \wedge \forall y \neg r(x, y))\\ &= \exists x\forall y(r(x, f(x)) \wedge \neg r(x, y))\end{aligned}$$

Una forma de Skolem asociada a $\exists x\forall y(r(x, f(x)) \wedge \neg r(x, y))$ es $\forall y(r(a, f(a)) \wedge \neg r(a, y))$. Así pues, φ es universalmente válida sii $\{\exists x\forall y(r(x, f(x)) \wedge \neg r(x, y))\}$ es insatisfacible o, equivalentemente, sii $\{\forall y(r(a, f(a))\wedge\neg r(a, y))\}$ es insatisfacible. Sin embargo, $\{\forall y(r(a, f(a))\wedge\neg r(a, y))\}$ es insatisfacible sii lo es $\{r(a, f(a)), \forall y\neg r(a, y)\}$. Supongamos que para la $\mathbf{L}$-interpretación $\langle \mathbf{A}, s\rangle$ se cumpliese $I^s_{\mathbf{A}}(r(a, f(a))) = 1$, es decir, $\langle (a)^{\mathbf{A}}, (f)^{\mathbf{A}}((a)^{\mathbf{A}})\rangle \in (r)^{\mathbf{A}}$. La afirmación $I^s_{\mathbf{A}}(\forall y(\neg r(a, y))) = 1$ equivale a que para todo $b \in A$, $\langle a, b\rangle \notin (r)^{\mathbf{A}}$ y en nuestra situación eso es imposible pues no lo cumple $(f)^{\mathbf{A}}((a)^{\mathbf{A}})$, tomado en el papel de b. Por tanto, $I^s_{\mathbf{A}}(\forall y(\neg r(a, y))) = 0$. Como conclusión, $\{\forall y(r(a, f(a)) \wedge \neg r(a, y))\}$ es insatisfacible y equivalentemente $\models \forall x(r(x, f(x)) \rightarrow \exists y r(x, y))$.

Ejemplo 5.5.3. Nos preguntamos si es cierto o no que $\forall x(p(x) \rightarrow \exists y(r(y)\wedge q(x, y))), \exists x p(x) \models \exists x\exists y q(x, y)$. Para intentar dar una respuesta consideramos las sentencias:

- en cuanto a la fórmula $\forall x(p(x) \rightarrow \exists y(r(y) \wedge q(x, y)))$:
  - $\forall x(p(x) \rightarrow \exists y(r(y) \wedge q(x, y)))$
  - $\forall x(\neg p(x) \vee \exists y(r(y) \wedge q(x, y)))$
  - $\forall x\exists y(\neg p(x) \vee (r(y) \wedge q(x, y)))$
  - $\forall x\exists y((\neg p(x) \vee r(y)) \wedge (\neg p(x) \vee q(x, y)))$
- en cuanto a la fórmula $\exists x p(x)$ no es preciso transformarla.
- en cuanto a la fórmula $\neg\exists x\exists y q(x, y)$ se transforma en $\forall x\forall y\neg q(x, y)$.

Llegamos, pues, a preguntarnos por la satisfacibilidad del conjunto

$$\{\forall x\exists y((\neg p(x) \vee r(y)) \wedge (\neg p(x) \vee q(x, y))), \exists x p(x), \forall x\forall y\neg q(x, y)\}. \tag{5.19}$$

Por el Teorema 5.5.1, la insatisfacibilidad de (5.19) es la de

$$\{\forall x\big((\neg p(x) \vee r(f(x))) \wedge (\neg p(x) \vee q(x, f(x)))\big), p(a), \forall x\forall y\neg q(x, y)\} \tag{5.20}$$

o más esquemáticamente la de

$$\{\neg p(x) \vee r(f(x)), \neg p(x) \vee q(x, f(x)), p(a), \neg q(x, y)\} \tag{5.21}$$

Si el conjunto (5.20), entendido como sugiere (5.21), no tiene modelos, ello significa que $\forall x(p(x) \rightarrow \exists y(r(y) \wedge q(x, y))), \exists x p(x) \models \exists x\exists y q(x, y)$. Es preciso que el conjunto (5.21) sea lo más simple posible, para lo cual usaremos de forma óptima todas las herramientas de que disponemos.

Ejemplo 5.5.4. Considere la fórmula:

$$\varphi \equiv \forall x(\forall y\exists z(p(y, z) \rightarrow q(x)) \rightarrow \exists z(\neg p(w, f(w)) \vee q(z)))$$

- Encuentre una fórmula φ_1 en forma prenexa que siendo lógicamente equivalente a φ, tenga el número mínimo de cuantificadores y los existenciales lo más a la izquierda posible,

- encuentre una sentencia φ_2 que sea satisfacible si, y sólo si, lo es φ y
- escriba una forma de Skolem φ_3 para φ_2 fórmula.
- Encuentre un conjunto de cláusulas que sea insatisfacible sii lo es la forma de φ_3.

Solución. Consideremos la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned}
\varphi &= \forall x(\neg\forall y\exists z(\neg p(y,z) \vee q(x)) \vee \exists z(\neg p(w,f(w)) \vee q(z))) \\
&= \forall x(\exists y\forall z\neg(\neg p(y,z) \vee q(x)) \vee \exists z(\neg p(w,f(w)) \vee q(z))) \\
&= \forall x(\exists y\forall z(p(y,z) \wedge \neg q(x)) \vee \exists z(\neg p(w,f(w)) \vee q(z))) \\
&= (\exists y\forall z p(y,z) \wedge \forall x\neg q(x)) \vee \exists z(\neg p(w,f(w)) \vee q(z)) \\
&= \exists y(\forall z p(y,z) \wedge \forall x\neg q(x)) \vee \exists z(\neg p(w,f(w)) \vee q(z)) \\
&= \exists y((\forall z p(y,z) \wedge \forall x\neg q(x)) \vee (\neg p(w,f(w)) \vee q(y))) \\
&= \exists y((\forall x p(y,x) \wedge \forall x\neg q(x)) \vee (\neg p(w,f(w)) \vee q(y))) \\
&= \exists y\forall x((p(y,x) \wedge \neg q(x)) \vee (\neg p(w,f(w)) \vee q(y))) \\
&= \exists y\forall x((p(y,x) \vee \neg p(w,f(w)) \vee q(y)) \wedge (\neg q(x) \vee \neg p(w,f(w)) \vee q(y)))
\end{aligned}$$

La fórmula solicitada φ_1 es, por ejemplo, la fórmula:

$$\exists y\forall x((p(y,x) \vee \neg p(w,f(w)) \vee q(y)) \wedge (\neg q(x) \vee \neg p(w,f(w)) \vee q(y)))$$

y es lógicamente equivalente a φ. La sentencia φ_2 solicitada es:

$$\exists w\exists y\forall x((p(y,x) \vee \neg p(w,f(w)) \vee q(y)) \wedge (\neg q(x) \vee \neg p(w,f(w)) \vee q(y)))$$

y una forma de Skolem para ella es:

$$\forall x((p(a,x) \vee \neg p(b,f(b)) \vee q(a)) \wedge (\neg q(x) \vee \neg p(b,f(b)) \vee q(a)))$$

A la que llamaremos φ_3. Dicha fórmula es insatisfacible si, y sólo si, lo es el conjunto:

$$\{\forall x(p(a,x) \vee \neg p(b,f(b)) \vee q(a)), \forall x(\neg q(x) \vee \neg p(b,f(b)) \vee q(a))\}$$

□

5.6. Teorema de Herbrand

En esta sección y en las siguientes trataremos de métodos de demostración. Realmente el encontrar un procedimiento general de decisión para verificar la inconsistencia de una fórmula es un deseo muy antiguo. Lo intentó primero Leibniz (1646–1716), lo revivió después Peano a principios del siglo 20 y posteriormente la escuela de Hilbert en la década de 1920; pero no fue hasta 1936 cuando demostraron Church y Turing que ello es imposible. Church y Turing independientemente demostraron que no hay un método general de decisión para decidir la validez de fórmulas en la lógica de primer orden. No obstante, existen métodos de demostración que pueden verificar que una fórmula es válida si ciertamente es válida. Para fórmulas no válidas, esos métodos en general no acaban nunca. A la vista del resultado de Church y Turing, esto es lo mejor que podemos esperar obtener de un método de demostración.

A priori, para saber si un conjunto de sentencias del cálculo de predicados admite un modelo es necesario realizar una infinidad de intentos: intentar encontrar un modelo sobre un universo de un elemento, intentar encontrar un modelo sobre un universo de dos elementos,..., intentar encontrar un modelo sobre un universo infinito. Cada uno de estos intentos se divide a su vez en un gran número de intentos. El interés del *Teorema de Herbrand* que veremos es que nos permite reducir nuestros intentos a uno: para saber si un conjunto de sentencias Γ tiene modelos, basta con saber si tiene un "modelo sintáctico", es decir construído de forma standard a partir del vocabulario utilizado en las fórmulas de Γ. Además, saber si este modelo sintáctico existe se reduce al estudio de conjuntos de fórmulas del cálculo proposicional.

Para ilustrar las definiciones que vienen, retomamos el Ejemplo 5.5.3 que nos proporcionaba el conjunto Σ de cláusulas:

- $\neg p(x) \vee r(f(x))$
- $\neg p(x) \vee q(x, f(x))$
- $p(a)$
- $\neg q(x, y)$

Definición 5.6.1 (Universo de Herbrand)**.** Dado un conjunto de cláusulas Σ en un lenguaje de primer orden $\mathbf{L}$, sea:

1. H_0 el conjunto de los símbolos de constante que aparecen en los elementos de Σ. Si no apareciera ninguno, entonces consideramos como H_0 el simplete de un símbolo de constante nuevo (del lenguaje o no), esto es, $H_0 = \{c\}$.
2. Dado $0 < i$, definimos H_i como la unión de H_{i-1} y el conjunto de todos los térmimos de $\mathbf{L}$ de la forma $f^n(t_1, \ldots, t_n)$, donde f^n es cualquier símbolo de función n-ario que ocurra en Σ y $t_1, \ldots, t_n$ son cualesquiera elementos de H_{i-1}.

El *universo de Herbrand* de Σ, representado U_Σ, es por definición la unión de todos los H_i (es decir, $\bigcup_{i \in \omega} H_i$). Cada H_i, con i natural, se denomima *conjunto escalón i-ésimo de constantes de* Σ.

Observación 5.6.1. El universo de Herbrand de cualquier conjunto de cláusulas Σ es siempre no vacío; es finito si, y sólo si, en Σ no aparecen símbolos de función.

Ejemplo 5.6.1. En nuestro ejemplo tenemos que $H_0 = \{a\}$, $H_1 = \{a, f(a)\}$, $H_2 = \{a, f(a), f(f(a))\}$, etc. De esta forma:

$$U_\Sigma = \{a, f(a), f(f(a)), \ldots, f(f(\cdots a) \cdots)), \ldots\}$$

Definición 5.6.2 (Base de Herbrand)**.** Sea Σ un conjunto de cláusulas en un lenguaje de primer orden $\mathbf{L}$. La *base de Herbrand* de Σ, representada como B_Σ, es el conjunto de fórmulas atómicas $r^n(t_1, \ldots, t_n)$, donde r^n es cualquier símbolo de predicado n-ario que ocurra en Σ y $t_1, \ldots, t_n$ son cualesquiera términos de U_Σ.

Ejemplo 5.6.2. En nuestro ejemplo:

$$\begin{aligned} B_\Sigma = \{&p(a), r(a), q(a, a), p(f(a)), r(f(a)), q(a, f(a)), q(f(a), a), \\ &q(f(a), f(a)), p(f(f(a))), \ldots\} \end{aligned}$$

Definición 5.6.3. Sea Σ un conjunto de cláusulas en un lenguaje de primer orden $\mathbf{L}$ y sea σ una cláusula de Σ. Una *instancia básica* de σ es cualquier cláusula obtenida reemplazando cada símbolo de variable de σ por un elemento de U_Σ.[1]

[1] Se entiende que por cada símbolo de variable de σ seleccionamos un término de U_Σ y procedemos a sustituir cada ocurrencia en σ del símbolo de variable por ese término asociado a ella. Efectuamos esta operación con cada símbolo de variable y su término asociado.

Definición 5.6.4. Sea Σ un conjunto de cláusulas en un lenguaje de primer orden **L**. El *sistema de Herbrand* asociado a Σ, representado por S_Σ es el conjunto de las instancias básicas de las cláusulas de Σ.

Ejemplo 5.6.3. En nuestro ejemplo

$$\begin{aligned}S_\Sigma = \{&\neg p(a) \vee q(a, f(a)), \neg p(a) \vee r(f(a)), p(a)\\ &\neg q(a,a), \neg p(f(a)) \vee q(f(a), f(f(a))), \neg p(f(a)) \vee r(f(f(a))),\\ &\neg q(a, f(a)), \neg q(f(a), a), \neg q(f(a), f(a)), \dots\}\end{aligned}$$

Teorema 5.6.1 (de Herbrand)**.** *Sea Σ un conjunto de cláusulas de un lenguaje de primer orden* **L***. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. *Σ es satisfacible*
2. *Σ tiene un modelo cuyo universo es U_Σ*
3. *Todo subconjunto finito de S_Σ es satisfacible*

Demostración. Tomamos la demostración del teorema 19.11 que hay en la página 254 del [3]. □

Observación 5.6.2. El Teorema 5.6.1 se usa frecuentemente en negativo. Para demostrar que un conjunto de cláusulas Σ es insatisfacible basta con exhibir un subconjunto finito de S_Σ que sea insatisfacible.

Ejemplo 5.6.4. Siguiendo con nuestro ejemplo, el subconjunto $\{p(a), \neg p(a) \vee q(a, f(a)), \neg q(a, f(a))\}$ de S_Σ —que es un subconjunto de cláusulas proposicionales— es insatisfacible. En consecuencia, la pregunta formulada en el Ejemplo 5.5.3 tiene respuesta afirmativa, es decir,

$$\forall x(p(x) \to \exists y(r(y) \wedge q(x, y))), \exists x p(x) \models \exists x \exists y q(x, y)$$

Observación 5.6.3. Para implementar el *teorema de Herbrand* utilizamos el *método de Davis y Putnam*. Dicho algoritmo se desenvuelve en el ámbito del lenguaje proposicional construido tomando como variables proposicionales los elementos de la *base de Herbrand* B_Σ del problema en cuestión. Primero se generan metódicamente todas las fórmulas de B_Σ y después se genera metódicamente el conjunto S_Σ del problema: si S_Σ es finito (debido a que U_Σ y B_Σ lo son) todo acaba estudiando su satisfacibilidad con el método de Davis y Putnam; pero si no lo es, estudiamos —de nuevo con el método de Davis y Putnam— la satisfacibilidad de sus r primeras fórmulas y en función de que lo sean o no repetimos todo con las $r + 1$ primeras o nos detenemos.

Éste es de hecho el primero de los algoritmos practicables sobre demostración automática basados en el teorema de Herbrand. Resulta útil en problemas sencillos. Con la base del teorema de Herbrand le precedieron el método basado en las tablas de verdad y el de Gilmore en 1960, que utilizaba la transformación en forma normal disyuntiva con simplificación.

Cuando se trabaja a mano con base en el teorema de Herbrand algunos utilizan el método de los *árboles semánticos* que dejamos por ahora y que se puede consultar en [7], [6] y [16].

Ejemplo 5.6.5. Nos preguntamos si $\exists x \neg q(x) \to \forall y p(y)$ es consecuencia de las fórmulas $\exists x p(x) \to \forall y p(y)$ y $\forall x(p(x) \vee q(x))$, es decir, nos preguntamos si es cierto:

$$\exists x p(x) \to \forall y p(y), \forall x(p(x) \vee q(x)) \models \exists x \neg q(x) \to \forall y p(y)$$

Todo se reduce a estudiar la insatisfacibilidad del conjunto

$$\{\exists x p(x) \to \forall y p(y), \forall x(p(x) \vee q(x)), \neg(\exists x \neg q(x) \to \forall y p(y))\}$$

Al transformar ese conjunto en cláusulas (pasando a forma prenexa y luego a forma de Skolem) obtenemos las siguientes:

$$\begin{aligned}&\neg p(x) \vee p(y)\\ &p(x) \vee q(x)\\ &\neg p(a)\\ &\neg p(b)\end{aligned}$$

La puesta en forma de Skolem ha introducido dos símbolos de constante: a y b, por ello y por no encontrar en las cláusulas signo de función alguno el universo de Herbrand es el conjunto finito $\{a, b\}$. Así el conjunto de sus instancias básicas tiene ocho elementos (¿cuáles?), pero basta con considerar el siguiente subconjunto suyo:

$$\{p(a) \vee q(a), \neg q(a), \neg p(a) \vee p(b), \neg p(b)\}$$

que por el *método de Davis y Putnam* sabemos que es insatisfacible. Por el Teorema 5.5.1, el Corolario 5.2.2 y el Teorema de Herbrand deducimos que la pregunta inicial tiene respuesta afirmativa.

Ejemplo 5.6.6. Sea el conjunto de cláusulas $\Sigma = \{\neg p(x) \vee q(f(x), x), p(g(b)), \neg q(y, z)\}$. Uno de los conjuntos insatisfacibles de instancias básicas de cláusulas de Σ es

$$\Sigma' = \{\neg p(g(b)) \vee q(f(g(b)), g(b)), p(g(b)), \neg q(f(g(b)), g(b))\}$$

Ejemplo 5.6.7. Sea el conjunto de cláusulas

$$\begin{aligned}\Sigma = \{&\neg p(x, y, u) \vee \neg p(y, z, v) \vee \neg p(x, v, w) \vee p(u, z, w),\\ &\neg p(x, y, u) \vee \neg p(y, z, v) \vee \neg p(u, z, w) \vee p(x, v, w),\\ &p(g(x, y), x, y), p(x, h(x, y), y),\\ &p(x, y, f(x, y)), \neg p(k(x), x, k(x))\}.\end{aligned}$$

Uno de los conjuntos insatisfacibles de instancias básicas de cláusulas de Σ es

$$\begin{aligned}\Sigma' = \{&p\big(a, h(a, a), a\big),\\ &p\big(g(a, k(h(a, a))), a, k(h(a, a))\big),\\ &\neg p\big(k(h(a, a)), h(a, a), k(h(a, a))\big),\\ &\neg p\big(g(a, k(h(a, a))), a, k(h(a, a))\big) \vee \neg p\big(a, h(a, a), a\big)\\ &\vee \neg p\big(g(a, k(h(a, a))), a, k(h(a, a))\big) \vee p\big(k(h(a, a)), h(a, a), k(h(a, a))\big)\}.\end{aligned}$$

5.7. Ejercicios sobre Forma Prenexa

1. Demuestre el Teorema 5.4.7 y además que:

   a) $\forall x\alpha \wedge \forall x\beta = \forall x(\alpha \wedge \beta)$

   b) $\exists x\alpha \vee \exists x\beta = \exists x(\alpha \vee \beta)$

   c) $\neg \forall x\alpha = \exists x \neg \alpha$

   d) $\neg \exists x\alpha = \forall x \neg \alpha$

   Demuestre también que es imprescindible la condición "x no ocurre libremente en α" en la primera parte del ejercicio.

2. Sea $\mathbf{L}$ un lenguaje, α una fórmula de $\mathbf{L}$ y x un símbolo de variable. Demostrar que si y es un símbolo de variable tal que $y \neq x$ e $y \notin \mathrm{lib}(\alpha)$ entonces:

   a) $\forall x\alpha = \forall y\alpha^x_y$

   b) $\exists x\alpha = \exists y\alpha^x_y$

3. Demostrar que:

   a) $\models (\forall x\alpha \vee \forall x\beta) \to \forall x(\alpha \vee \beta)$

   b) $\models \exists x(\alpha \wedge \beta) \to (\exists x\alpha \wedge \exists x\beta)$

   pero que en general **no** son ciertas las afirmaciones:

   a) $\models \forall x(\alpha \vee \beta) \to (\forall x\alpha \vee \forall x\beta)$

   b) $\models (\exists x\alpha \wedge \exists x\beta) \to \exists x(\alpha \wedge \beta)$

4. Encontrar una fórmula en forma prenexa cuya matriz esté expresada como conjunción de disyunciones de literales y que sea lógicamente equivalente a las siguientes:

   a) $\big(\forall x\exists y p(x,y) \wedge \big(\exists y q(y) \to q(a)\big)\big) \vee \forall y\big(\exists y\forall x p(x,y) \vee \exists z p(y,a)\big)$

   b) $\big(\forall x(r(x) \vee \exists y\forall x p(x,y)) \vee \exists x q(x,y)\big) \wedge \big(\exists z r(z) \to \forall x(r(x) \wedge \forall x p(x,a))\big)$

   c) $\forall x p(x,y) \to \big(\forall y p(y,x) \to \forall x(q(x) \wedge \exists y\forall z r(a,y,z))\big)$

   d) $(\forall x p(a,x) \vee \forall x p(x,a)) \to \big(\forall z p(x,z) \wedge \forall w\forall y(p(a,y) \to \exists z q(z))\big)$

   e) $\forall x\forall z\big((\forall z p(x,z) \wedge \forall x p(x,z)) \to \forall x(\exists y p(x,y) \vee \forall x q(x))\big)$

   f) $\big(\forall w(\forall x r(x,w) \to (\forall x p(x) \to \exists x(q(x) \vee p(w))))\big) \wedge \forall z(p(z) \vee \exists z q(z))$

   g) $\forall x\big(r(x) \wedge \neg\exists x(p(x) \to \exists y q(f(y),x))\big) \wedge \forall w\exists z\big(q(z,a) \vee p(w) \vee (\forall y p(f(y)) \to q(x,z))\big)$

   h) $\big(\forall y p(x,y) \to \exists x r(x)\big) \wedge \neg\exists x\big((\forall y r(y)) \wedge \neg p(x,a)\big) \wedge \forall x\big((\exists y p(x,y)) \vee r(x)\big)$

5. Repetir el ejercicio 4 dando un resultado con el número mínimo de cuantificadores, y ellos óptimamente situados en el preámbulo de la nueva fórmula.

6. Para cada fórmula obtenida en el ejercicio ejercicio 4, encontrar una fórmula de Skolem asociada.

7. Dada una fórmula en forma prenexa y una fórmula de Skolem asociada a ella. ¿Están ambas expresadas en el mismo lenguaje de primer orden? ¿Qué relación existe entre ambas?

8. Dado el conjunto de cláusulas:

   - $\neg p(x) \vee r(f(x))$
   - $\neg p(x) \vee q(x, f(x))$
   - $p(a)$
   - $\neg q(x,y)$

   expresar el universo de Herbrand, la base de Herbrand y el sistema de Herbrand.

9. Sea el conjunto de cláusulas

$$\begin{aligned}\Sigma = \{&\neg p(x,y,u) \vee \neg p(y,z,v) \vee \neg p(x,v,w) \vee p(u,z,w),\\ &\neg p(x,y,u) \vee \neg p(y,z,v) \vee \neg p(u,z,w) \vee p(x,v,w),\\ &p(g(x,y),x,y), p(x,h(x,y),y),\\ &p(x,y,f(x,y)), \neg p(k(x),x,k(x))\}.\end{aligned}$$

   Usar el *Teorema de Herbrand*, combinado con el algoritmo de Davis-Putnam, para demostrar que es insatisfacible.

10. Demostrar vía el *Teorema de Herbrand* y el Algoritmo de Davis-Putnam que:

$$\forall x(p(x) \to \exists y(r(y) \wedge q(x,y))), \exists x p(x) \models \exists x \exists y q(x,y)$$

5.8. Algoritmo de Unificación

El método descrito en el capítulo anterior para determinar si una fórmula es consecuencia de un conjunto finito de hipótesis es inutilizable una vez que hemos de manejar una decena de fórmulas. Ello es debido a que se trata de encontrar una contradicción con átomos de Herbrand obtenidos reemplazando variables por términos de forma absolutamente no sistemática.

Esta idea de hacer coincidir átomos los unos con los otros para encontrar más rápidamente contradicciones, es la idea que sustenta la resolución con variables y que estudiaremos después.

El hacer conincidir átomos por medio de una buena elección de términos que sustituyen variables es *la unificación*. Se trata de una idea muy vieja en lógica matemática puesto que aparece en la tesis de Herbrand, en 1930. No obstante su utilización como elemento fundamental de un "algoritmo" de demostración automática de teoremas, y como herramienta privilegiada de la programación lógica es debida a J.A. Robinson en el año 1965.

Definición 5.8.1. Sea **L** un lenguaje de primer orden. Una *sustitución elemental* es cualquier expresión de forma $(x|t)$, donde x es un símbolo de variable y t es término de **L**. Si φ es una fórmula de **L**, $\varphi(x|t)$ representa la fórmula obtenida reemplazando todas las ocurrencias libres de x en φ por t, es decir, $\varphi(x|t)$ representa ahora la fórmula φ_t^x. Una sustitución elemental $(x|t)$ es una *sustitución elemental de renombramiento* si t es un símbolo de variable.

Ejemplo 5.8.1. Sea la sustición elemental $(x|f(y,g(a)))$ y la fórmula $(p(u) \to r(x))$. Entonces $(p(u) \to r(x))(x|f(y,g(a)))$ es la fórmula $(p(u) \to r(f(y,g(a))))$.

Definición 5.8.2. Sea **L** un lenguaje de primer orden. Una *sustitución* Φ es cualquier composición $c_1 \circ \cdots \circ c_n$ de sustituciones elementales en cantidad finita $c_1, \ldots, c_n$. La sucesión finita $c_1, \ldots, c_n$ se denomina *descomposición* de Φ y ello nos lleva a representar a Φ simplemente como $[c_1 \cdots c_n]$. La sustitución identidad será representada como ϵ o simplemente $[\,]$. Una sustitución $[c_1 \cdots c_n]$ es una *sustitución de renombramiento* si para todo $1 \leq i \leq n$, c_i es una sustitución elemental de renombramiento.

Ejemplo 5.8.2. Tomemos $\Phi = [(x|f(a))(y|f(x))]$ como sustitución y $p(x,y)$ como fórmula.

$$\begin{aligned} p(x,y)\Phi &= (p(x,y)(x|f(a)))(y|f(x)) \\ &= p(f(a),y)(y|f(x)) \\ &= p(f(a),f(x)) \end{aligned}$$

Observación 5.8.1.

1. La aplicación sobre fórmulas $[c_1c_2]$ es distinta de la aplicación $[c_2c_1]$, siendo $c_1 = (x|f(a))$ y $c_2 = (y|f(x))$. Para mostrarlo sea, por ejemplo:

$$\begin{aligned} p(x,y)[(x|f(a))(y|f(x))] &= p(f(a),y)(y|f(x)) \\ &= p(f(a),f(x)) \\ &\neq p(f(a),f(f(a))) \\ &= p(x,f(x))(x|f(a)) \\ &= (p(x,y)(y|f(x)))(x|f(a)) \\ &= p(x,y)[(y|f(x))(x|f(a))] \end{aligned}$$

2. La descomposición de una sustitución en sustituciones elementales no es en general única:

   - $[(x|y)(z|y)] = [(z|y)(x|y)]$
   - $[(x|t)(y|t)(z|t)] = [(y|x)(z|x)(x|t)]$

Definición 5.8.3. Sean $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ fórmulas atómicas de un lenguaje de primer orden $\mathbf{L}$. Una sustitución Φ es un *unificador* de $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ si, y sólo si, por definición, se cumple:

$$\varphi_1\Phi = \varphi_2\Phi = \cdots = \varphi_m\Phi$$

Ejemplo 5.8.3. Sea $\varphi_1 = p(x, z)$, $\varphi_2 = p(f(y), g(a))$ y $\varphi_3 = p(f(u), z)$. La sustitución $\Phi_1 = [(x|f(u))(y|u)(z|g(a))]$ es un unificador porque:

$$\varphi_1\Phi_1 = \varphi_2\Phi_1 = \varphi_3\Phi_1 = p(f(u), g(a))$$

La sustitución $\Phi_2 = [(u|f(a))]\Phi_1$ es también un unificador de φ_1, φ_2 y φ_3 porque:

$$\varphi_1\Phi_2 = \varphi_2\Phi_2 = \varphi_3\Phi_2 = p(f(f(a)), g(a))$$

Observación 5.8.2.

1. Es claro que si Φ es un unificador de un conjunto finito de fórmulas atómicas, para cualquier sustitución Ψ se cumple que $\Psi\Phi$ es un unificador de dicho conjunto de fórmulas.

2. Para ciertos conjuntos finitos de fórmulas atómicas no existe unificador. Por ejemplo, para $\varphi_1 = p(x, y)$ y $\varphi_2 = r(f(t), y)$, lo cual resulta evidente dado que los símbolos de predicado son distintos; pero aún evitando esta eventualidad es posible encontrar ejemplos de fórmulas atómicas sin unificador. El siguiente es uno: $\varphi_1 = p(x, f(x))$ y $\varphi_2 = p(f(y), y)$.

Dado un conjunto finito de fórmulas atómicas es posible determinar si son unificables y caso de serlo encontrar un unificador. Seguidamente damos una explicación algorítmica de como llevar a cabo dicha tarea.

Algoritmo de Unificación de *2* fórmulas atómicas

Input: fórmulas atómicas φ_1 y φ_2.
Output: Respuesta a la pregunta de si son unificables φ_1 y φ_2 y un unificador en caso afirmativo.

- $\Phi \leftarrow \epsilon$.-
- mientras que $\varphi_1\Phi \neq \varphi_2\Phi$, hacer
  - determinar el símbolo más a la izquierda de $\varphi_1\Phi$ que es diferente de su homólogo en $\varphi_2\Phi$.-
  - determinar los subtérminos de $\varphi_1\Phi$ y $\varphi_2\Phi$, t_1 y t_2 respectivamente, que comienzan en los símbolos determinados en el paso anterior.-
  - si “ninguno de los términos es una variable” o “uno es una variable que está contenida en el otro”
    - Imprimir “φ_1 y φ_2 no son unificables”; detenerse.-

    en otro caso
    - determinar x un símbolo de variable entre t_1 y t_2.-
    - determinar t entre t_1 y t_2 que no es x.-

- ◦ hacer $\Phi \longleftarrow \Phi(x|t)$.-
- fin–de–si.-

- fin–mientras–que.-
- imprimir "Φ es un unificador de φ_1 y φ_2".-
- concluir.-

Ejemplo 5.8.4.

$\varphi_1\Phi$	$\varphi_2\Phi$	Φ
$\underset{\uparrow}{p}(x, f(x), a)$	$\underset{\uparrow}{p}(u, w, w)$	$\Phi \longleftarrow \epsilon$
$p(\underset{\uparrow}{x}, f(x), a)$	$p(\underset{\uparrow}{u}, w, w)$	$\Phi \longleftarrow [(x\|u)]$
$p(u, \underset{\uparrow}{f}(u), a)$	$p(u, \underset{\uparrow}{w}, w)$	$\Phi \longleftarrow [(x\|u)(w\|f(u))]$
$p(u, f(u), \underset{\uparrow}{a})$	$p(u, f(u), \underset{\uparrow}{f}(u))$	**fallo**

El fallo es debido a que ni a ni $f(u)$ es un signo de variable; $p(x, f(x), a)$ y $p(u, w, w)$ no son unificables.

Ejemplo 5.8.5.

$\varphi_1\Phi$	$\varphi_2\Phi$	Φ
$\underset{\uparrow}{p}(x, f(g(x)), a)$	$\underset{\uparrow}{p}(b, y, z)$	$\Phi \longleftarrow \epsilon$
$p(\underset{\uparrow}{x}, f(g(x)), a)$	$p(\underset{\uparrow}{b}, y, z)$	$\Phi \longleftarrow [(x\|b)]$
$p(b, \underset{\uparrow}{f}(g(b)), a)$	$p(b, \underset{\uparrow}{y}, z)$	$\Phi \longleftarrow [(x\|b)(y\|f(g(b)))]$
$p(b, f(g(b)), \underset{\uparrow}{a})$	$p(b, f(g(b)), \underset{\uparrow}{z})$	$\Phi \longleftarrow [(x\|b)(y\|f(g(b)))(z\|a)]$

Las fórmulas $p(x, f(g(x)), a)$ y $p(b, y, z)$ son unificables y $[(x|b)(y|f(g(b)))(z|a)]$ es un unificador.

Ejemplo 5.8.6.

$\varphi_1\Phi$	$\varphi_2\Phi$	Φ
$\underset{\uparrow}{p}(x, f(x))$	$\underset{\uparrow}{p}(f(y), y)$	$\Phi \longleftarrow \epsilon$
$p(\underset{\uparrow}{x}, f(x))$	$p(\underset{\uparrow}{f}(y), y)$	$\Phi \longleftarrow [(x\|f(y))]$
$p(f(y), \underset{\uparrow}{f}(f(y)))$	$p(f(y), \underset{\uparrow}{y})$	**fallo**

El fallo es debido a que y es un símbolo de variable presente en el término $t = f(f(y))$; así $p(x, f(x))$ y $p(f(y), y)$ no son unificables.

Algoritmo de Unificación de m fórmulas atómicas

Input: fórmulas atómicas $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ $(2 \leq m)$.
Output: Respuesta a la pregunta de si son unificables $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ y un unificador Φ en caso de respuesta afirmativa.-

- Para i desde 1 hasta $m-1$ hacer
  - si $\varphi_i\Phi_1\cdots\Phi_{i-2}\Phi_{i-1}$ y $\varphi_{i+1}\Phi_1\cdots\Phi_{i-2}\Phi_{i-1}$ son unificables
    1. determinar un unificador Φ_i.-
    2. en otro caso imprimir "$\varphi_1,\dots,\varphi_m$ no son unificables"; concluir.-
  - fin–de–si.-
- fin–de–para.-
- $\Phi \leftarrow \Phi_1\cdots\Phi_{m-1}$.-
- imprimir "Φ es un unificador de $\varphi_1,\dots,\varphi_m$".-
- concluir.-

Ejemplo 5.8.7. Sean $m=3$, $\varphi_1=p(x,y)$, $\varphi_2=p(f(z),x)$ y $\varphi_3=p(w,f(x))$:

- $\Phi_1=(x|f(z))(y|f(z))$ es un unificador de $\varphi_1=p(x,y)$, $\varphi_2=p(f(z),x)$
- $p(f(z),x)\Phi_1=p(f(z),f(z))$
  $p(w,f(x))\Phi_1=p(w,f(f(z)))$
- fracaso porque $p(f(z),f(z))$ y $p(w,f(f(z)))$ no son unificables.

Observación 5.8.3. Es preciso prestar atención cuando se unifica por este método, para no olvidarse de aplicar $\Phi_1\cdots\Phi_{i-2}\Phi_{i-1}$ a las fórmulas atómicas no unificadas aún antes de aplicarles el algoritmo de unificación. En el ejemplo precedente, si no hubieramos aplicado Φ_1 a $p(w,f(x))$, la segunda etapa de unificación hubiera sido posible (porque $p(f(z),f(z))$ y $p(w,f(x))$ se unifican en $p(f(z),f(z))$) y hubiésemos concluido, falazmente, que las tres fórmulas son unificables.

Definición 5.8.4. Un unificador Φ de las fórmulas atómicas $\varphi_1,\dots,\varphi_m$ es un *unificador de máxima generalidad* o *unificador principal* para ellas si, y sólo si, por definición, para todo unificador Φ' de las misma existe una sustición Ψ tal que $\Phi'=\Phi\Psi$.

Ejemplo 5.8.8. La sustitución $\Phi_1=[(x|f(u))(y|u)(z|g(a))]$ es un unificador de máxima generalidad de $\varphi_1=p(x,z)$, $\varphi_2=p(f(y),g(a))$ y $\varphi_3=p(f(u),z)$. No es el único,

$$\Phi_3=[(u|v)(x|f(v))(y|v)(z|g(a))]$$

es otro y se tiene

$$\Phi_1=\Phi_3(v|u) \qquad\qquad \Phi_3=\Phi_1(u|v)$$

Observación 5.8.4. Intuitivamente, un unifcador (cuando existe al menos uno) de máxima generalidad es una sustitución tan general (es decir, ordenando tan pocas operaciones) como sea posible a condición de que unifique las fórmulas.

Teorema 5.8.1. *Sea* **L** *un lenguaje de primer orden y $\varphi_1,\dots,\varphi_m$ fórmulas atómicas. Si $\varphi_1,\dots,\varphi_m$ son fórmulas unificables entonces el algoritmo de unificación se detiene aportando Φ, un unificador de máxima generalidad de $\varphi_1,\dots,\varphi_m$.*

Ejemplo 5.8.9. Las fórmulas:

- $\varphi_1\equiv p(g(f(x),u),f(a),g(z,f(y)))$
- $\varphi_2\equiv p(g(f(f(y)),g(v,a)),f(v),g(g(v,b),x))$

son unificables según muestra la tabla de la Figura 5.1 y el unificador de máxima generalidad de ambas es:

$$(x|f(y))(u|g(v,a))(v|a)(z|g(a,b))$$

que simplificado es el unificador:

$$(x|f(y))(u|g(a,a))(v|a)(z|g(a,b))$$

$\varphi_1\Phi$	$\varphi_2\Phi$	Φ
$p(g(f(x),u),f(a),g(z,f(y)))$	$p(g(f(f(y)),g(v,a)),f(v),g(g(v,b),x))$	$\Phi \leftarrow \epsilon$
$p(g(f(x),u),f(a),g(z,f(y)))$	$p(g(f(f(y)),g(v,a)),f(v),g(g(v,b),x))$	$\Phi \leftarrow \Phi \circ (x\|f(y))$
$p(g(f(f(y)),u),f(a),g(z,f(y)))$	$p(g(f(f(y)),g(v,a)),f(v),g(g(v,b),f(y)))$	$\Phi \leftarrow \Phi \circ (u\|g(v,a))$
$p(g(f(f(y)),g(v,a)),f(a),g(z,f(y)))$	$p(g(f(f(y)),g(v,a)),f(v),g(g(v,b),f(y)))$	$\Phi \leftarrow \Phi \circ (v\|a)$
$p(g(f(f(y)),g(a,a)),f(a),g(z,f(y)))$	$p(g(f(f(y)),g(a,a)),f(a),g(g(a,b),f(y)))$	$\Phi \leftarrow \Phi \circ (z\|g(a,b))$
$p(g(f(f(y)),g(a,a)),f(a),g(g(a,b),f(y)))$	$p(g(f(f(y)),g(a,a)),f(a),g(g(a,b),f(y)))$	unificables

Figura 5.1: Unificación de dos fórmulas.

5.9. Resolución

La resolución de Robinson (1965) evita la generación de conjuntos de instancias básicas como exigen los métodos basados en el teorema de Herbrand. Puede ser aplicada directamente al cualquier conjunto Σ de cláusulas para sondear la insatisfacibilidad de Σ. La idea esencial del principio de resolución es indagar si Σ contiene la cláusula vacía $\square$ o no: si Σ contiene $\square$, entonces es insatisfacible. Si Σ no contiene $\square$, la siguiente cosa es saber cuando $\square$ puede ser derivada de Σ. Ciertamente el principio de resolución puede ser entendido como una regla de inferencia para generar nuevas cláusulas a partir de las de Σ y las ya generadas. La clave del asunto está en que el "engrosamiento" de Σ con sus consecuencia trasmite la insatisfacibilidad de Σ; de forma que si llegamos a generar la cláusula vacía por la regla de resolución, Σ será insatisfacible.

Definición 5.9.1. Sea Φ una sustitución y σ una cláusula, entonces $\sigma\Phi$ será la cláusula $\{\lambda\Phi\colon \lambda \in \sigma\}$.

Lema 5.9.1. *Sean* **L** *un lenguaje de primer orden y σ, cualquier cláusulas de* **L** *(vista ahora como conjunto de literales). Si Ψ es una sustitución de renombramiento de variables, entonces σ es lógicamente equivalente a $\sigma\Psi$.*

Observación 5.9.1. En la práctica suelen ser utilizadas las sustituciones de renombramiento para aplicarla a una cláusula dada y conseguir que no tenga símbolos de variable en común con otra, por ejemplo, antes de aplicar la *regla de resolución*.

Definición 5.9.2 (regla de resolución)**.** Sea **L** un lenguaje de primer orden. Sean σ_1 y σ_2 cláusulas de **L**. Supongamos que:

1. λ_1 es un literal positivo tal que $\lambda_1 \in \sigma_1$.
2. λ_2 es un literal negativo tal que $\lambda_2 \in \sigma_2$.
3. Ψ es una sustitución de renombramiento tal que $\sigma_1\Psi$ y σ_2 no tienen símbolos de variable en común.
4. $\lambda_1\Psi$ es unificable con λ_2^c, teniendo a Φ como **unificador de máxima generalidad** o **principal.**

5. σ es la cláusula de la forma:

$$((\sigma_1\Psi)\Phi \setminus \{(\lambda_1\Psi)\Phi\}) \cup (\sigma_2\Phi \setminus \{\lambda_2\Phi\})$$

Entonces σ es, por definición, una resolvente de σ_1 y σ_2, en símbolos $\text{res}_{\text{cv}}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma)$. Los literales λ_1 y λ_2 son denominados los *literales resolutores* de la resolución.

Ejemplo 5.9.1. De aplicación de la regla de resolución:

$$\text{res}_{\text{cv}}\big(p(x,c) \vee r(x), \neg p(c,c) \vee q(x), r(c) \vee q(x)\big)$$

donde:

- σ_1 es $\{p(x,c), r(x)\}$.
- σ_2 es $\{\neg p(c,c), q(x)\}$.
- Ψ es $(x|y)$.
- λ_1 es $p(x,c)$.
- λ_2 es $\neg p(c,c)$, con lo cual λ_2^c es $p(c,c)$ y $\lambda_1\Psi$ es $p(y,c)$.
- $\lambda_1\Psi$, que es $p(y,c)$, es unificable con λ_2^c con unificador de máxima generalidad, Φ, que es $(y|c)$.
- $((\sigma_1\Psi)\Phi \setminus \{(\lambda_1\Psi)\Phi\}) \cup (\sigma_2\Phi \setminus \{\lambda_2\Phi\})$ es, en este caso, $\{r(c), q(x)\}$.

Ejemplo 5.9.2. De aplicación de la regla de resolución:

$$\text{res}_{\text{cv}}\big(p(x,f(x)), \neg p(a,y) \vee r(f(y)), r(f(f(a)))\big)$$

donde:

- σ_1 es $\{p(x,f(x))\}$.
- σ_2 es $\{\neg p(a,y), r(f(y))\}$.
- Ψ es ϵ.
- λ_1 es $p(x,f(x))$.
- λ_2 es $\neg p(a,y)$, con lo cual λ_2^c es $p(a,y)$ y $\lambda_1\Psi$ es $p(x,f(x))$.
- $\lambda_1\Psi$ es unificable con λ_2^c con unificador de máxima generalidad, Φ, que es $(x|a)(y|f(a))$.
- $((\sigma_1\Psi)\Phi \setminus \{(\lambda_1\Psi)\Phi\}) \cup (\sigma_2\Phi \setminus \{\lambda_2\Phi\})$ es, en este caso, $\{r(f(f(a)))\}$.

Ejemplo 5.9.3. De aplicación de la regla de resolución:

$$\text{res}_{\text{cv}}\big(p(x,f(x)), \neg p(a,x), \Box\big)$$

donde:

- σ_1 es $\{p(x,f(x))\}$.
- σ_2 es $\{\neg p(a,x)\}$.
- Ψ es $(x|y)$.

- λ_1 es $p(y, f(y))$.
- λ_2 es $\neg p(a, x)$, con lo cual λ_2^c es $p(a, x)$ y $\lambda_1\Psi$ es $p(y, f(y))$.
- $\lambda_1\Psi$ es unificable con λ_2^c con unificador de máxima generalidad, Φ, que es $(y|a)(x|f(a))$.
- $((\sigma_1\Psi)\Phi \setminus \{(\lambda_1\Psi)\Phi\}) \cup (\sigma_2\Phi \setminus \{\lambda_2\Phi\})$ es, en este caso, $\varnothing$.

Definición 5.9.3. Sea $\mathbf{L}$ un lenguaje de primer orden y supongamos que:

1. σ es una cláusula de $\mathbf{L}$ distinta de $\square$.
2. Existe un conjunto de literales de $\mathbf{L}$, σ_1, tal que:
   - $\sigma_1 \subseteq \sigma$.
   - $2 \leq \operatorname{car} \sigma_1$.
   - Para todo $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma_1$, $\operatorname{sgn}(\lambda_1) = \operatorname{sgn}(\lambda_2)$
   - Existe un unificador de máxima generalidad, Φ, de la cláusula $\{\operatorname{abv}(\lambda_i) \colon \lambda_i \in \sigma_1\}$.
3. θ es la cláusula $\sigma\Phi$.

Entonces θ es, por definición, un *factor* o *disminución* de σ, en símbolos $\operatorname{dis}(\sigma, \theta)$.

Ejemplo 5.9.4. De aplicación de la regla de disminución:

$$\operatorname{dis}\big(p(x, g(y)) \vee p(f(c), z) \vee p(f(c), y) \vee r(x, y, z), p(f(c), g(y)) \vee p(f(c), y) \vee r(f(c), y, g(y))\big)$$

donde:

- σ es $\{p(x, g(y)), p(f(c), z), p(f(c), y), r(x, y, z)\}$
- σ_1 es $\{p(x, g(y)), p(f(c), z)\}$
- $p(x, g(y))$ y $p(f(c), z)$ tienen un unificador de máxima generalidad, a saber, Φ que es $(x|f(c))(z|g(y))$.
- $\sigma\Phi$ es $\{p(f(c), g(y)), p(f(c), y), r(f(c), y, g(y))\}$

Observe que no hubiésemos obtenido factor alguno partiendo de la cláusula $\{p(x, g(y)), p(f(c), z), p(f(c), y)\}$ en el papel de σ_1, pues sus literales no tienen unificador; en particular, la cláusula $p(x, g(y)) \vee p(f(c), y) \vee r(x, y, z)$ no tiene factor alguno, como tampoco lo tiene la cláusula $\neg p(x, g(y)) \vee p(f(c), z) \vee r(x, y, z)$.

Ejemplo 5.9.5. De aplicación de la regla de disminución:

$$\operatorname{dis}\big(\neg p(x, g(y)) \vee \neg p(f(c), z) \vee \neg p(f(c), g(y)) \vee r(x, y, z), \neg p(f(c), g(y)) \vee r(f(c), y, g(y))\big)$$

donde:

- σ es $\{\neg p(x, g(y)), \neg p(f(c), z), \neg p(f(c), g(y)), r(x, y, z)\}$
- σ_1 es $\{\neg p(x, g(y)), \neg p(f(c), z), \neg p(f(c), g(y))\}$
- $p(x, g(y))$, $p(f(c), z)$ y $\neg p(f(c), g(y))$ tienen un unificador de máxima generalidad, a saber, Φ que es $(x|f(c))(z|g(y))$.
- $\sigma\Phi$ es $\{\neg p(f(c), g(y)), r(f(c), y, g(y))\}$

Definición 5.9.4. Sea $\Sigma \cup \{\gamma\}$ un conjunto de cláusulas. γ es consecuencia por resolución de Σ, en símbolos $\Sigma \vdash_{rcv} \gamma$, cuando exista (al menos) una sucesión finita de cláusulas $\gamma_0, \ldots, \gamma_n$ tal que $\gamma_n = \gamma$ y para todo $0 \leq i \leq n$ valga una de las siguientes alternativas:

1. γ_i pertenece a Σ
2. existen $j, k < i$ tales que $\text{res}_{cv}(\alpha_1, \alpha_2, \gamma_i)$, donde:
   - $\alpha_1 = \gamma_j$ ó $\text{dis}(\gamma_j, \alpha_1)$
   - $\alpha_2 = \gamma_k$ ó $\text{dis}(\gamma_k, \alpha_2)$

   En este caso γ_j y γ_k son denominadas *cláusulas padre.*

La sucesión finita $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ antes mencionada recibe el nombre de Σ-*demostración de* γ *por resolución* o sencillamente *demostración por resolución* si no es necesario nombrar el conjunto Σ. Una Σ-demostración por resolución de $\square$ recibe el nombre de *refutación* de Σ.

Teorema 5.9.2. *Sea* **L** *un lenguaje de primer orden y* Σ *un conjunto de cláusulas de* **L**. *Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. Σ *es insatisfacible*
2. $\Sigma \vdash_{rcv} \square$

Demostración. Consultar [7], [6] y [16], por ese orden. $\square$

Ejemplo 5.9.6. Demostremos que el conjunto Σ de cláusulas

$$\{\neg p(x) \vee p(f(x)), p(a), \neg p(f(z))\}$$

es insatisfacible demostrando que $\Sigma \vdash_{rcv} \square$. Para ello basta con la siguiente sucesión finita de cláusulas:

c.1) $\neg p(x) \vee p(f(x))$, hipótesis

c.2) $p(a)$, hipótesis

c.3) $p(f(a))$, por resolución a partir de c.1 y c.2 con $\Phi = (x|a)$

c.4) $\neg p(f(z))$, hipótesis

c.5) $\square$, por resolución a partir de c.3 y c.4 con $\Phi = (z|a)$.

Esta conclusión es a su vez, según sabemos, la evidencia de que:

$$\forall x(p(x) \rightarrow p(f(x))), \exists y p(y) \models \exists z p(f(z))$$

Pero, entendamos que hemos ido haciendo al tiempo que escribíamos la anterior demostración de 5 cláusulas:

- La cláusula hipotética $\neg p(x) \vee p(f(x))$, que debe ser entendida como $\forall x(p(x) \rightarrow p(f(x)))$, da en particular $p(a) \rightarrow p(f(a))$
- Junto a la hipótesis $p(a)$, deducimos $p(f(a))$; pues si vale $p(a) \rightarrow p(f(a))$ y vale $p(a)$, debe valer $p(f(a))$
- La hipótesis $\neg p(f(z))$, que debe entenderse como $\forall z \neg p(f(z))$, da en particular $\neg p(f(a))$ y así se obtiene una contradicción, es decir $\square$.

5.10. Ejemplos

Ejemplo 5.10.1. Tiene que ver con los axiomas de la teoría de grupos. Para evitar usar un símbolo de relación que interprete la igualdad, se introduce $p(x, y, z)$ que se interpreta como $x \cdot y = z$.

φ1) $\forall x \forall y \exists z p(x, y, z)$ (operación interna binaria)

φ2) $\forall x \forall y \forall z \forall u \forall v \forall w \big((p(x, y, u) \wedge p(y, z, v)) \to (p(x, v, w) \leftrightarrow p(u, z, w))\big)$ (asociatividad de la operación interna)

φ3) $\exists x \big(\forall y p(x, y, y) \wedge \forall z \exists u p(u, z, x)\big)$ (existencia de elemento neutro a izquierda y de inverso a derecha)

Planteemos con la fórmula φ la existencia de un inverso a izquierda:

$$\exists x \big(\forall y p(x, y, y) \wedge \forall z \exists u p(z, u, x)\big)$$

La negación de φ es lógicamente equivalente a:

$$\forall x \big(\exists y \neg p(x, y, y) \vee \exists z \forall u \neg p(z, u, x)\big)$$

Consideramos el conjunto de fórmulas $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \neg\varphi\}$ y lo expresamos en forma de cláusulas. Obtenemos:

σ1) $p(x, y, f(x, y))$

σ2) $\neg p(x, y, u) \vee \neg p(y, z, v) \vee \neg p(x, v, w) \vee p(u, z, w)$

σ3) $\neg p(x, y, u) \vee \neg p(y, z, v) \vee \neg p(u, z, w) \vee p(x, v, w)$

σ4) $p(e, y, y)$

σ5) $p(g(z), z, e)$

σ6) $\neg p(x, h(x), h(x)) \vee \neg p(k(x), u, x)$

Deducción de la cláusula vacía:

σ.1) $p(x, y, f(x, y))$, es σ_1

σ.2) $\neg p(x, y, u) \vee \neg p(y, z, v) \vee \neg p(x, v, w) \vee p(u, z, w)$, es σ_2

σ.3) $\neg p(x, y, u) \vee \neg p(y, z, v) \vee \neg p(u, z, w) \vee p(x, v, w)$, es σ_3

σ.4) $p(e, y, y)$, es σ_4

σ.5) $p(g(z), z, e)$, es σ_5

σ.6) $\neg p(x, h(x), h(x)) \vee \neg p(k(x), u, x)$, es σ_6

σ.7) $\neg p(k(e), u, e)$, resolución entre σ.4 y σ.6

σ.8) $\neg p(x, y, k(e)) \vee \neg p(y, z, v) \vee \neg p(x, v, e)$, resolución entre σ.2d y σ.7

σ.9) $\neg p(g(v), y, k(e)) \vee \neg p(y, z, v)$, resolución entre σ.5 y σ.8c

$\sigma.10)$ $\neg p(g(v), e, k(e))$, resolución entre $\sigma.4$ y $\sigma.9b$

$\sigma.11)$ $\neg p(g(v), y, u) \vee \neg p(y, z, e) \vee \neg p(u, z, k(e))$, resolución entre $\sigma.3d$ y $\sigma.10$

$\sigma.12)$ $\neg p(g(v), y, e) \vee \neg p(y, k(e), e)$, resolución entre $\sigma.4$ y $\sigma.11c$

$\sigma.13)$ $\neg p(g(v), g(k(e)), e)$, resolución entre $\sigma.5$ y $\sigma.12b$

$\sigma.14)$ $\square$, resolución entre $\sigma.5$ y $\sigma.13$

Ejemplo 5.10.2. Retomamos el ejemplo 5.5.3 que nos proporcionaba las cláusulas:

$\sigma 1)$ $\neg p(x) \vee q(x, f(x))$

$\sigma 2)$ $\neg p(x) \vee r(f(x))$

$\sigma 3)$ $p(a)$

$\sigma 4)$ $\neg q(x, y)$

Deducción de la cláusula vacía

$\sigma.1)$ $\neg p(x) \vee q(x, f(x))$, es σ_1

$\sigma.2)$ $p(a)$, es σ_2

$\sigma.3)$ $q(a, f(a))$, resolución entre $\sigma.1$ y $\sigma.2$

$\sigma.4)$ $\neg q(x, y)$, es σ_4

$\sigma.5)$ $\square$, resolución entre $\sigma.3$ y $\sigma.4$

Ejemplo 5.10.3. Tomado de [7] para mostrar el progreso que supone la resolución con respecto a los métodos primitivos basados en el Teorema de Herbrand. Consideremos las dos cláusulas siguientes:

- $p(a, x_2, f(x_2), x_4, f(x_4), \ldots, x_{2n}, f(x_{2n}))$
- $\neg p(x_1, f(x_1), x_3, f(x_3), x_5, \ldots, f(x_{2n-1}), x_{2n+1})$

La resolución da la cláusula vacía en una etapa. El método de Herbrand, considerando que las fórmulas son clasificadas primero todas las que usan a, después todas las que utilizan a y $f(a)$, etc. no nos llevaría a la cláusula vacía buscada más que con el conjunto $\{\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$ para $m = 2 \cdot (2n)^{2n}$ al menos. Tomando $n = 20$ se obtiene un valor que sobrepasa todo lo que podemos eperar tratar con máquinas, incluso en un futuro lejano.

Ejemplo 5.10.4. Tomado de [7] para mostrar un ejemplo sencillo de trabajo en base de datos. Se quiere establecer a partir de los enunciados hipotéticos siguientes:

- para todo crimen, hay alguien que lo ha cometido
- sólo la gente deshonesta comete crímenes
- no es detenida más que la gente deshonesta
- la gente deshonesta detenida no comete crímenes

- ocurren crímenes

el enunciado:

- hay gente deshonesta no detenida

como pretendida tesis. A tal efecto introducimos las siguientes abreviaturas:

1. $\mathrm{det}(y)$ por "y está detenido"
2. $\mathrm{des}(y)$ por "y es deshonesta"
3. $\mathrm{com}(y, x)$ por "y comete x"
4. $\mathrm{cri}(x)$ por "x es un crimen"

La traducción de los enunciados hipotéticos y la negación de la pretendida tesis da:

φ1) $\forall x(\mathrm{cri}(x) \to \exists y \mathrm{com}(y, x))$

φ2) $\forall y \forall x((\mathrm{cri}(x) \wedge \mathrm{com}(y, x)) \to \mathrm{des}(y))$

φ3) $\forall y(\mathrm{det}(y) \to \mathrm{des}(y))$

φ4) $\forall y((\mathrm{des}(y) \wedge \mathrm{det}(y)) \to \neg\exists x(\mathrm{cri}(x) \wedge \mathrm{com}(y, x)))$

φ5) $\exists x \mathrm{cri}(x)$

φ6) $\neg\exists y(\mathrm{des}(y) \wedge \neg\mathrm{det}(y))$

que pasamos a cláusulas:

σ1) $\neg\mathrm{cri}(x) \vee \mathrm{com}(f(x), x)$

σ2) $\neg\mathrm{cri}(x) \vee \neg\mathrm{com}(y, x) \vee \mathrm{des}(y)$

σ3) $\neg\mathrm{det}(y) \vee \mathrm{des}(y)$

σ4) $\neg\mathrm{des}(y) \vee \neg\mathrm{det}(y) \vee \neg\mathrm{cri}(x) \vee \neg\mathrm{com}(y, x)$

σ5) $\mathrm{cri}(a)$

σ6) $\neg\mathrm{des}(y) \vee \mathrm{det}(y)$

Para establecer que la pretendida tesis es ciertamente consecuencia de nuestras hipótesis construimos una deducción por resolución con variables:

σ.1) $\neg\mathrm{cri}(x) \vee \mathrm{com}(f(x), x)$

σ.2) $\neg\mathrm{cri}(x) \vee \neg\mathrm{com}(y, x) \vee \mathrm{des}(y)$

σ.3) $\neg\mathrm{det}(y) \vee \mathrm{des}(y)$

$\sigma.4)$ $\neg des(y) \vee \neg det(y) \vee \neg cri(x) \vee \neg com(y, x)$

$\sigma.5)$ $cri(a)$

$\sigma.6)$ $\neg des(y) \vee det(y)$

$\sigma.7)$ $com(f(a), a)$, res. entre $\sigma.5$ y $\sigma.1$, alguien ha cometido el crimen

$\sigma.8)$ $\neg cri(a) \vee des(f(a))$, res. entre $\sigma.7$ y $\sigma.2$

$\sigma.9)$ $des(f(a))$, res. entre $\sigma.8$ y $\sigma.5$, este alguien es deshonesto

$\sigma.10)$ $\neg des(f(a)) \vee \neg det(f(a)) \vee \neg cri(a)$, res. entre $\sigma.7$ y $\sigma.4$

$\sigma.11)$ $\neg des(f(a)) \vee \neg det(f(a))$, res. entre $\sigma.10$ y $\sigma.5$

$\sigma.12)$ $\neg det(f(a))$, res. entre $\sigma.11$ y $\sigma.9$, ese alguien no está detenido

$\sigma.13)$ $\neg des(f(a))$, res. entre $\sigma.12$ y $\sigma.6$, ese alguien no es deshonesto (en contradicción con $\sigma.9$)

$\sigma.14)$ $\square$, res. entre $\sigma.13$ y $\sigma.9$

Ejemplo 5.10.5. Tomado de [7] para ejemplificar el uso de la regla de disminución, la cual es indispensable. Consideremos las cláusulas:

- $p(x) \vee p(y)$
- $\neg p(x) \vee \neg p(y)$

Es imposible deducir la cláusula vacía utilizando solamente la regla de resolución, pues la resolución aplicada a dos cláusulas de dos literales da una cláusula de dos literales. Sin embargo, con la regla de disminución se tiene la deducción siguiente:

$\sigma.1)$ $p(x) \vee p(y)$, hipótesis

$\sigma.2)$ $\neg p(x) \vee \neg p(y)$, hipótesis

$\sigma.3)$ $\neg p(y)$, resolución entre $\sigma.2$ y la disminución $p(x)$ de $\sigma.1$

$\sigma.4)$ $\square$, resolución entre $\sigma.3$ y la disminución $p(x)$ de $\sigma.1$

Ejemplo 5.10.6. La sustitución de renombramiento, Ψ, de la definición de la regla de resolución es imprescindible en determinados casos, aunque éstos no queden detallados en el enunciado de la regla. Considerar el caso del conjunto de cláusulas:

$$\begin{aligned}\Sigma = \{&p(a) \vee q(x, y),\\ &\neg p(a) \vee r(y),\\ &\neg r(f(a)),\\ &\neg q(x, f(b))\}\end{aligned}$$

Si iniciamos el intento de refutación desde la cláusula $p(a) \vee q(x, y)$ y decidimos confrontarla con $\neg p(a) \vee r(y)$, es posible encontrar una refutación que comience en estas dos cláusulas:

- $\gamma_0 \equiv p(a) \vee q(x, y)$; hip.
- $\beta_0 \equiv \neg p(a) \vee r(y)$; hip.

- $\gamma_1 \equiv q(x, y_1) \vee r(y)$; $res_{cv}(\gamma_0, \beta_0, \gamma_1)$, con $\Psi = (y|y_1)$ aplicada a γ_0 y $\Phi = \epsilon$ —la idendtidad— aplicada a $q(x, y_1) \vee r(y)$
- $\beta_1 \equiv \neg q(x, f(b))$; hip.
- $\gamma_2 \equiv r(y)$; $res_{cv}(\gamma_1, \beta_1, \gamma_2)$ con $\Psi = (x|x_1)$ aplicada a $\neg q(x, f(b))$ quedando $(\neg q(x, f(b)))(x|x_1) \equiv \neg q(x_1, f(b))$ y aplicando el unificador principal $\Psi = (x_1|x)(y_1|f(b))$ de $q(x, y_1)$ y $q(x_1, f(b))$ a $r(y)$. Este momento es clave, aquí se puede observar cómo gracias al primer renombramiento $(y|y_1)$, $r(y)$ ha quedado a salvo del unificador recién obtenido; y ello nos da la "flexibilidad" necesaria para poder serguir resolviendo.
- $\beta_2 \equiv \neg r(f(a))$; hip.
- $\Box$ por resolución entre γ_2 y β_2 con $\Psi = \epsilon$ y $\Phi = (y|f(a))$.

Si hubiésemos aplicado errónea y descuidadamente las definiciones, tendríamos el **siguiente razonamiento incorrecto**:

- $\gamma_0 \equiv p(a) \vee q(x, y)$; hip.
- $\beta_0 \equiv \neg p(a) \vee r(y)$; hip.
- $\gamma_1 \equiv q(x, y) \vee r(y)$; **¡incorrecto!** por no renombrar.
- $\beta_1 \equiv \neg q(x, f(b))$; hip.
- $\gamma_2 \equiv r(f(b))$; resolvente entre γ_1 y β_1.
- $\beta_2 \equiv \neg r(f(a))$; hip.
- $\Box$ por resolución entre γ_2 y β_2 con $\Psi = \epsilon$ y $\Phi = (a|b)$. **¡Incorrecto!** pues al no ser a un símbolo de variable, $(a|b)$ no es una sustitución. En realidad, no hay forma de obtener $\Box$ entre γ_2 y β_2

Ejemplo 5.10.7. El conjunto de cláusulas $\Sigma = \{\forall x(p(x) \vee \neg q(x)), \forall x(\neg p(x) \vee q(x))\}$ es satisfacible. En efecto, la $\mathbf{L}$-estructura $\mathbf{A}$ definida por:

- $A = \{0\}$
- $(p)^{\mathbf{A}} = A = (q)^{\mathbf{A}}$

Trivialmente:

$$\begin{aligned} A &= A \cup \emptyset \\ &= A \cup (A \setminus A) \\ &= A \cup (A \setminus (p)^{\mathbf{A}}) \\ &= A \cup (A \setminus (q)^{\mathbf{A}}) \end{aligned}$$

por lo que para todo $a \in A$, $a \in (p)^{\mathbf{A}} \cup (A \setminus (q)^{\mathbf{A}})$ y $a \in (A \setminus (p)^{\mathbf{A}}) \cup (q)^{\mathbf{A}}$. Así pues, sea cual sea la asignación s,

$$I^s_{\mathbf{A}}(\forall x(p(x) \vee \neg q(x))) = 1 = I^s_{\mathbf{A}}(\forall x(\neg p(x) \vee q(x)))$$

Al ser Σ satisfacible, $\Sigma \nvdash_{rcv} \Box$.

Ejercicio 5.10.1. Demuestre que el conjunto formado por las cláusulas:

1. $\neg s(f(x), g(a)) \vee r(f(a), x)$

2. $s(f(y), y) \vee p(y)$

3. $\neg p(g(a)) \vee \neg p(z)$

4. $\neg r(x, y) \vee p(y)$

es insatisfacible.

Solución. Consideremos la siguiente demostración:

1. $\neg s(f(x), g(a)) \vee r(f(a), x)$, hip. 1

2. $s(f(y), y) \vee p(y)$, hip. 2

3. $p(g(a)) \vee r(f(a), g(a))$, resolución entre 1 y 2, $\Phi = (x|g(a))(y|g(a))$

4. $\neg r(x, y) \vee p(y)$, hip. 4

5. $p(g(a)) \vee p(g(a)) = p(g(a))$, resolución entre 3 y 4, $\Phi = (x|f(a))(y|g(a))$

6. $\neg p(g(a))$, factor de hip. 3 con $(z|g(a))$

7. $\square$, resolución entre 5 y 6

$\square$

5.11. Estrategias

La administración de la regla de resolución en los sistemas de demostración automática de teoremas ha sido utilizada con dos técnicas esencialmente:

- la técnica de gestión de conjuntos de cláusulas
- la técnica de exploración del árbol de las deducciones

No obstante, cada una de estas técnicas ha dado lugar a numerosas variantes.

En general, dada una técnica nos interesa de ella su *corrección*, su *completitud* y su *eficiencia*. Una técnica es *correcta* cuando no conduce jamás a considerar como insatisfacible un conjunto de cláusulas que es satisfacible. Una técnica es *completa* cuando termina revelando que es insatisfacible el conjunto que trata, si realmente lo es. La eficiencia es un concepto relativo.

5.12. Gestión por Saturación

De entre las estrategias, la más simple y natural es la *estrategia de saturación*:

- Partimos de un conjunto de cláusulas Σ_0 del cual buscamos conocer si es satisfacible o no.
- Dado $0 < i$, efectuamos todas las resoluciones y todas las disminuciones posibles a partir de las cláusulas de Σ_{i-1}, lo que genera unas nuevas cláusulas que añadimos a Σ_{i-1} para obtener el conjunto Σ_i.
- Se detiene el proceso cuando $\square$ es un elemento de Σ_i o cuando $\Sigma_i = \Sigma_{i+1}$.

La estrategia de gestión por saturación es completa y correcta según el Teorema 5.9.2. Sin embargo, no es eficiente; en realidad, desde el punto de vista teórico no supone mejora alguna respecto al algoritmo primario sugerido en la Observación 5.6.3 y es profuso en la generación y uso de cláusulas de poca utilidad, de hecho los conjuntos Σ_i crecen de forma exponencial. Ejemplo de ineficiciencia es el tratamiento que da al conjunto $\Sigma_0 = \{p \vee q, \neg p \vee q, p \vee \neg q, \neg p \vee \neg q\}$ (desarrollado en [6], pag. 92 y 93). Además, es posible que siendo Σ_0 satisfacible sin embargo sea Σ_i distinto de Σ_{i+1} para todo $0 \leq i$; es el caso de $\Sigma_0 = \{p(a), \neg p(x) \vee p(f(x))\}$.

Ejemplo 5.12.1. Queremos saber si es insatisfacible el conjunto $\{p, \neg p \vee q, \neg q \vee p, \neg q\}$. Entonces generamos:

- $\Sigma_0 = \{p, \neg p \vee q, \neg q \vee p, \neg q\}$
- $\Sigma_1 = \Sigma_0 \cup \{q, \neg q \vee q, \neg p \vee p, \neg p\}$
- $\Sigma_2 = \Sigma_1 \cup \{p, \square, \dots\}$

5.13. Gestión por Saturación con Simplificación

Definición 5.13.1. La cláusula $\lambda_1 \vee \cdots \vee \lambda_k$ (en realidad la sentencia $\forall x_1 \cdots \forall x_n(\lambda_1 \vee \cdots \vee \lambda_k)$, no lo olvidemos) distinta de la vacía es una *cláusula tautológica* cuando existen $1 \leq i \neq j \leq k$ tales que $\lambda_i = \lambda_j^c$.

Ejemplo 5.13.1. La cláusula

$$\forall x\big(p(f(x)) \vee q(x) \vee \neg r(x) \vee \neg p(f(x))\big)$$

es tautológica.

Definición 5.13.2. La cláusula σ *subyace bajo* la cláusula τ (o también τ *generaliza* a σ) si existe una sustitución Φ tal que τ es la cláusula $\xi \vee \Phi\sigma$, para cierta ξ.

Ejemplo 5.13.2.

1. $p(f(a)) \vee q(a)$ generaliza a $p(x)$
2. $p(a) \vee q(a) \vee r(f(x)) \vee r(b)$ generaliza a $p(x) \vee q(a)$
3. $\neg p(x) \vee q(f(x), a)$ subyace bajo $\neg p(h(y)) \vee q(f(h(y)), a) \vee \neg p(z)$, basta con considerar la sustitución $(x|h(y))$

Teorema 5.13.1. *Sea Σ un conjunto de cláusulas y Σ' el conjunto obtenido de Σ suprimiendo en él todas las cláusula tautológicas. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. *Σ es satisfacible*
2. *Σ' es satisfacible*

Teorema 5.13.2. *Sea Σ un conjunto de cláusulas sin cláusulas tautológicas y Σ' el conjunto obtenido de Σ suprimiendo cualquier cláusula que generalize a (bajo la que subyazca) otra cláusula del conjunto. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. *Σ es satisfacible*
2. *Σ' es satisfacible*

Los teoremas 5.13.1 y 5.13.2 sugieren una modificación interesante en la estrategia de gestión por saturación explicado anteriormente (ver sección 5.12), que justamente atenua el efecto de generar cláusulas inútiles. Se procede como se indicó en la estrategia de saturación, pero antes de cada etapa de saturación se suprimen las tautologías y las generalizaciones. Esta nueva *estrategia de saturación con simplificación* es correcta, porque lo era la estrategia de saturación, y completa por los teoremas 5.13.1 y 5.13.2.

Ejemplo 5.13.3. Estudiamos la satisfacibilidad del conjunto $\{r(a) \vee p(a), p(x) \vee \neg r(b), r(b), \neg p(b), r(a) \vee r(c) \vee \neg r(a)\}$ y empleamos la estrategia de saturación con simplificación.

- $\Sigma_0 = \{r(a) \vee p(a), p(x) \vee \neg r(b), r(b), \neg p(b), r(a) \vee r(c) \vee \neg r(a)\}$
- $\Sigma_0' = \{r(a) \vee p(a), p(x) \vee \neg r(b), r(b), \neg p(b)\}$
- $\Sigma_1 = \{r(a) \vee p(a), p(x) \vee \neg r(b), r(b), \neg p(b), p(x), \neg r(b)\}$
- $\Sigma_1' = \{r(b), \neg p(b), p(x), \neg r(b)\}$
- $\Sigma_2 = \{\square, \ldots\}$

Hay otras simplificaciones posibles utilizando los “predicados evaluables”.

5.14. Gestión por Preferencia de Cláusulas Simples

En el método sugerido en la sección 5.12, mejor que construir de una vez todas las cláusulas que pueden ser obtenidas a partir de Σ_i, podemos no construir más que una sola, “bien elegida”, añadirla y después volver a comenzar. No obstante, ¿qué significa “bien elegida”? Es una expresión ambigua que da pie a muchos métodos: se puede proceder al azar; se puede elegir la obtenida en primer lugar, cuando hay un orden establecido entre todas las resolventes y disminuciones posibles (por ejemplo, numerando las cláusalas o los predicados), etc.

Pero entre todas las estrategias, la más natural es sin duda la que para pasar de Σ_i a Σ_{i+1} une la cláusula más corta entre las que se pueden obtener con Σ_i. Esta idea se sustenta en que como queremos obtener la cláusula vacía, alcanzamos nuestro objetivo tanto más rápido como cortas sean las cláusulas que se generan.

Ejemplo 5.14.1.

- $\Sigma_0 = \{r(x) \vee \neg p(x), \neg r(b), \neg r(c) \vee q(x) \vee r(f(a)), p(b)\}$
- $\Sigma_1 = \Sigma_0 \cup \{\neg p(b)\}$
- $\Sigma_2 = \Sigma_1 \cup \{\square\}$

Aunque correcta, esta estrategia usada en toda su pureza no es completa. En efecto, consideremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5.14.2.

- $\Sigma_0 = \{\neg p(x) \vee p(f(x)), p(a), \neg p(a) \vee \neg p(b) \vee \neg p(c), p(b), p(c)\}$
- $\Sigma_1 = \Sigma_0 \cup \{\neg p(f(a))\}$
- $\Sigma_2 = \Sigma_1 \cup \{\neg p(f(f(a)))\}$

Nunca obtenemos la cláusula vacía, salvo que pasemos por la obtención de una cláusula de dos literales, lo cual da la cláusula vacía en tres etapas.

Para hacer esta estratégia completa podemos, por ejemplo, introducir de cuando en cuando una etapa de saturación.

Entre las variantes posibles, destacamos la estrategia de "preferir las cláusulas unitarias" en la que se efectuan prioritariamente todas las resoluciones que hacen intervenir a una cláusula unit. Tal cual esta estrategia no es completa.

5.15. Exploración. Conceptos Generales

Definición 5.15.1. Sea Σ un conjunto de cláusulas de un lenguaje de primer orden. El *árbol de deducciones* de Σ es el árbol etiquetado —en nodos— con raíz (la raíz es un símbolo ajeno al lenguaje, por ejemplo $\bullet$), tal que todo segmento inicial suyo es, en cuanto a la lista ordenada de sus etiquetas excluyendo la raíz, una Σ demostración por resolución. Una *estrategia de exploración* de árboles estará determinada fijando (cfr. [7] para ver ejemplos):

- un subárbol del árbol de las deducciones, normalmente esto se hará imponiendo limitaciones sobre las deducciones que se habrán de tener en cuenta.
- el procedimiento de exploración del subárbol :
  - *primero en profundidad con retroceso* al nodo anterior: ello permite llegar a un nodo profundo más rápidamente, se programa fácilmente y no emplea demasiado espacio de memoria. Si no se fija profundidad, este método de exploración se pierde en la primera rama infinita que alcanza y no permite la exploración entera de un árbol finito. Si en la exploración se fija una profundidad corremos el riesgo de no encontrar un objetivo en una rama por no haber profundizado lo suficiente.
  - *primero en anchura*: ello permite alcanzar cualquier nodo con tal de disponer de tiempo suficiente. La exploración se puede hacer lenta si los nodos tienen en general muchos hijos, con lo cual puede ser muy costoso en tiempo profundizar en el árbol.

Las estrategias generales son análogas a la estrategia de saturación. Consisten simplemente en explorar un árbol en el que han sido incluídas todas las demostraciones por resolución. Si la exploración se hace primero en anchura se obtiene una estrategia correcta y completa. Si se hace primero en profundidad se obtiene una estrategia correcta pero no completa. Estas estrategias son muy ineficaces, más aún que las de saturación, porque consideran diferentes las deducciones que no cambian más que el orden de las fórmulas. Por ello es necesario restringirse en la búsqueda dentro del árbol global a un subárbol suyo en que el aparece la cláusula vacía.

5.16. Estrategias Lineales

Definición 5.16.1. Sea Σ un conjunto de cláusulas, σ_0 un elemento de Σ y γ una cláusula. Una Σ-*demostración lineal* de γ con raíz en σ_0 es una Σ-demostración de γ

$$< \gamma_0, \beta_0, \gamma_1, \beta_1 \ldots, \gamma_{n-1}, \beta_{n-1}, \gamma_n >$$

donde:

- γ_0 es σ_0,
- γ_n es γ
- para todo $0 \leq i \leq n-1$, γ_{i+1} es obtenido por resolución a partir de γ_i (denominada *cláusula central*) y β_i (denominada *cláusula lateral*), o a partir de algún factor de alguna de ellas o de cada una de ellas.
- Cada β_i es un elementos de Σ o existe $j < i$ tal que $\beta_i = \gamma_j$.

Ejemplo 5.16.1. Tomado de [6]. Consideremos el conjunto

$$\begin{aligned}\Sigma = \{&r(a, f(c), f(b)),\\ &p(a),\\ &r(x, x, f(x)),\\ &\neg r(x, y, z) \vee r(y, x, z),\\ &\neg r(x, y, z) \vee q(x, z),\\ &\neg p(w) \vee \neg r(x, y, z) \vee \neg q(w, z) \vee q(w, x) \vee q(w, y),\\ &\neg q(a, b)\}\end{aligned}$$

y sea $\sigma_0 = \neg q(a, b)$. La siguiente es una Σ-demostración lineal con raíz σ_0:

γ_0: $\neg q(a, b)$

β_0: $\neg p(w) \vee \neg r(x, y, z) \vee \neg q(w, z) \vee q(w, x) \vee q(w, y)$

γ_1: $\neg p(a) \vee \neg r(x, b, z) \vee \neg q(a, z) \vee q(a, x)$

β_1: $\neg q(a, b)$

γ_2: $\neg p(a) \vee \neg r(b, b, z) \vee \neg q(a, z)$

β_2: $r(x, x, f(x))$

γ_3: $\neg p(a) \vee \neg q(a, f(b))$

β_3: $p(a)$

γ_4: $\neg q(a, f(b))$

β_4: $\neg r(x, y, z) \vee q(x, z)$

γ_5: $\neg r(a, y, f(b))$

β_5: $r(a.f(c), f(b))$

γ_6: $\square$

Ejemplo 5.16.2. Tomado de [7]. Consideremos el conjunto $\Sigma = \{\neg a \vee \neg b, a \vee \neg c, c, b \vee \neg d, d \vee b\}$ y sea $\sigma_0 = \neg a \vee \neg b$. La siguiente es una Σ-demostración lineal con raíz σ_0:

γ_0: $\neg a \vee \neg b$

β_0: $a \vee \neg c$

γ_1: $\neg b \vee \neg c$

β_1: c

γ_2: $\neg b$

β_2: $b \vee \neg d$

γ_3: $\neg d$

β_3: $d \vee b$

γ_4: b

β_4: $\neg b$

γ_5: $\square$

No obstante, no es ésta la única Σ-demostración lineal con raíz en σ_0, pues también existe la siguiente:

γ_0: $\neg a \vee \neg b$

β_0: $a \vee \neg c$

γ_1: $\neg b \vee \neg c$

β_1: $d \vee b$

γ_2: $\neg c \vee d$

β_2: $b \vee \neg d$

γ_3: $b \vee \neg c$

β_3: c

γ_4: b

β_4: $\neg b \vee \neg c$

γ_5: $\neg c$

β_5: c

γ_5: $\square$

El árbol de todas la Σ-demostraciones lineales con raíz σ_0 es ya demasiado grande, aunque se podría visualizar una parte (cfr. [7], pag. 175)

Se ha establecido (cfr. [6] y [16]) lo siguiente.

Teorema 5.16.1. *Sea Σ un conjunto de cláusulas. Si existe una demostración por resolución de la cláusula vacía a partir de Σ, entonces existe un Σ-demostración lineal de la cláusula vacía.*

Más aún, se cumple el siguiente resultado.

Teorema 5.16.2. *Sea Σ un conjunto de cláusulas. Si $\Sigma = \Sigma' \cup \{\sigma_0\}$ es insatisfacible pero Σ' es satisfacible, entonces existe una Σ-demostración lineal de la cláusula vacía con raíz σ_0.*

Si se utiliza una estrategia de exploración "primero en anchura" y cada nodo es de grado finito, estamos seguros de obtener la cláusula vacía de estar (estrategia completa). Por contra si se utiliza la estrategia de "primero en profundidad con retorno al nodo anterior" podemos hundirnos en una rama infinita y no encontrar la cláusula vacía, aunque esté. El ejemplo más conocido es es siguiente:

Ejemplo 5.16.3. Sea $\Sigma = \{\neg p(x) \vee p(f(x)), \neg p(a), p(x)\}$ y tomemos como ráiz a $\sigma_0 = p(x)$. En el árbol de las Σ-demostraciones lineales con raíz σ_0 se encuentran estas dos:

γ_0: $p(x)$

β_0: $\neg p(a)$

γ_1: $\square$

y "ésta" otra tan larga como se quiera, pero nunca concluyente:

γ_0: $p(x)$

β_0: $\neg p(w) \vee p(f(w))$

γ_1: $p(f(x))$

β_1: $\neg p(w) \vee p(f(w))$

γ_2: $p(f(f(x)))$

β_2: $\cdots$

5.17. Estrategia "Input"

Definición 5.17.1. Sea Σ un conjunto de cláusulas, σ_0 un elemento de Σ y γ una cláusula. Una Σ-*demostración input* de γ con raíz en σ_0 es una Σ-demostración lineal de γ

$$< \gamma_0, \beta_0, \gamma_1, \beta_1 \ldots, \gamma_{n-1}, \beta_{n-1}, \gamma_n >$$

donde para todo $1 \leq i$, γ_i es obtenida por una resolución en la cual al menos una de las cláusulas padre cumple ser elemento de Σ.

Ejemplo 5.17.1. Consideremos el conjunto de cláusulas

$$\begin{aligned}\Sigma = \{&\neg p(x,y,u) \vee \neg p(y,z,v) \vee \neg p(x,v,w) \vee p(u,z,w),\\ &p(g(x,y),x,y),\\ &p(x,h(x,y),y),\\ &\neg p(k(x),x,k(x)\}\end{aligned}$$

Tomando como σ_0 la cláusula $\neg p(x,y,u) \vee \neg p(y,z,v) \vee \neg p(x,v,w) \vee p(u,z,w)$ tenemos la siguiente refutación input de Σ:

γ_0: $\neg p(x,y,u) \vee \neg p(y,z,v) \vee \neg p(x,v,w) \vee p(u,z,w)$

β_0: $p(g(x,y),x,y)$

γ_1: $\neg p(y,z,v) \vee \neg p(g(y,u),v,w) \vee p(u,z,w)$

β_1: $p(g(x,y),x,y)$

γ_2: $\neg p(v,z,v) \vee p(w,z,w)$

β_2: $p(x,h(x,y),y)$

γ_3: $p(w,h(v,v),w)$

β_3: $\neg p(k(x),x,k(x))$

γ_4: $\square$

Ejemplo 5.17.2. Sea $\Sigma = \{\neg a, a \vee \neg b, a \vee \neg c \vee \neg d, c, d \vee \neg c\}$ y $\sigma_0 = \neg a$. La Σ-demostración lineal siguiente es input:

γ_0: $\neg a$

β_0: $a \vee \neg c \vee \neg d$

γ_1: $\neg c \vee \neg d$

β_1: c

γ_2: $\neg d$

β_2: $d \vee \neg c$

γ_3: $\neg c$

β_3: c

γ_4: $\square$

De hecho no hay más Σ-demostraciones input con raíz en σ_0 que la anterior y

γ_0: $\neg a$

β_0: $a \vee \neg b$

γ_1: $\neg b$

El Ejemplo 5.17.2 muestra como, aún en un caso sencillo en el que el árbol resulta finito, no es posible prescidir del “retroceso al nodo anterior” en la estrategia de “primero en profundidad” si se quiere encontrar la cláusula vacía.

Contrariamente al caso general de la estrategia lineal, incluso una estrategia de exploración “primero en anchura” no resulta completa. Es el caso de $\Sigma = \{a \vee b, \neg a \vee b, a \vee \neg b, \neg a \vee \neg b\}$ que el árbol de las deducciones input no tiene a la cláusula vacía mientras que el árbol de todas las deducciones sí la tiene.

Las cláusulas Horn tienen un papel básico en *lógica computacional*. Son importantes en la demostración automática de teoremas por resolución de primer orden, porque la resolvente de dos cláusulas Horn es una cláusula Horn, y la resolvente de una cláusula objetivo y una cláusula definida es una cláusula objetivo. Estas propiedades de las cláusulas de Horn pueden conducir a mayores eficiencias al probar un teorema (representado como la negación de una cláusula de objetivo).

Definición 5.17.2. Una cláusula es una *cláusula de Horn* sii, por definición, tiene a lo sumo un literal positivo. Una cláusula es una *cláusula de Horn dual* sii, por definición, tiene a lo sumo un literal negativo.

Definición 5.17.3. Sea σ una cláusula de Horn. σ se denomina:

1. *cláusula determinada* cuando, y sólo cuando, tiene exáctamente un literal positivo.
2. *hecho* cuando, y sólo cuando, tiene exáctamente un literal positivo y ninguno negativo.
3. *cláusula negativa* o también *cláusula objetivo* cuando, y sólo cuando, no tiene ningún literal positivo.

Observación 5.17.1. Sean tenidas en cuenta las siguientes observaciones:

1. Cualquier cláusula hecho es una cláusula determinada.
2. Supongamos que $\{\lambda_i : 0 \leq i \leq n\} \cup \{\lambda\}$ es un conjunto de fórmulas atómicas. Entonces:
   - si $0 \leq n$, la cláusula $\lambda \vee \neg\lambda_0 \vee \cdots \vee \neg\lambda_n$ es un ejemplo típico de cláusula definida y es lógicamente equivalente al cierre universal de la fórmula $\lambda_0 \wedge \cdots \wedge \lambda_n \to \lambda$. Puede ser interpretada a partir de la idea intuitiva de que en cada caso posible, si valen todos y cada uno de los λ_i entonces vale λ.
   - si $n < 0$, la cláusula λ es un ejemplo típico de cláusula hecho, que cuando lo tomamos por hipótesis suponemos que en cada caso ocurre.
3. Supongamos que n es un número natural y que $\{\lambda_i : 0 \leq i \leq n\}$ es un conjunto de fórmulas atómicas. La cláusula $\neg\lambda_0 \vee \cdots \vee \neg\lambda_n$ es un ejemplo típico de cláusula objetivo y es lógicamente equivalente al cierre universal de la fórmula $\lambda_0 \wedge \cdots \wedge \lambda_n \to (x_0 \wedge \neg x_0)$. Puede ser interpretada a partir de la idea intuitiva de que en cada caso posible, valen todos y cada uno de los λ_i. Si n es entero no natural, estamos ante la clásula vacía, que en nuestra representación sería entonces $x_0 \wedge \neg x_0$ e insatisfacible, por tanto.
4. Supongamos que n es un número natural y que $\{\lambda_i : 0 \leq i \leq n\}$ es un conjunto de fórmulas atómicas. Si n es entero no natural, estamos ante la clásula vacía, que en nuestra representación sería entonces el cierre universal de la fórmula $x_0 \wedge \neg x_0$ e insatisfacible, por tanto.
5. La cláusula vacía es ejemplo de cláusula objetivo, por tanto de cláusula de Horn.

Ejemplo 5.17.3. El siguiente conjunto Σ de cláusulas

$$\begin{aligned}\Sigma = \{ & t(x) \vee \neg q(x) \vee s(x), \\ & p(x) \vee \neg q(x) \vee \neg t(x) \vee r(x), \\ & \neg s(x) \vee \neg o(x), \\ & \neg r(x) \vee \neg o(x), \\ & o(x), \\ & q(a), \\ & \neg p(x) \vee \neg o(x)\}\end{aligned}$$

no es un conjunto de cláusulas de Horn, pero tiene la estructura de un conjunto de cláusulas de Horn. En efecto, sea:

- s' la secuencia $\neg s$
- r' la secuencia $\neg r$

Entonces Σ puede ser reescrito como sigue:

$$\begin{aligned}\Sigma = \{ & t(x) \vee \neg q(x) \vee \neg s'(x), \\ & p(x) \vee \neg q(x) \vee \neg t(x) \vee \neg r'(x), \\ & s'(x) \vee \neg o(x), \\ & r'(x) \vee \neg o(x), \\ & o(x), \\ & q(a), \\ & \neg p(x) \vee \neg o(x)\}\end{aligned}$$

que tiene seis cláusulas de Horn determinadas, unicamente dos de las cuales son hechos, y una cláusula objetivo; es por tanto un conjunto de cláusulas de Horn.

Teorema 5.17.1. *Sea $\Sigma = \Sigma' \cup \{\sigma_0\}$ un conjunto insatisfacible de cláusulas. Si σ_0 es negativa y Σ' es un conjunto de cláusulas de Horn determinadas, entonces existe una Σ-demostración input de $\square$ con raíz σ_0 para la que no se utiliza la regla de disminución.*

Demostración. Consultar [11] $\square$

Definición 5.17.4. Sea Σ un conjunto de cláusulas, σ_0 un elemento de Σ y γ una cláusula. Una Σ-*demostración unit* de γ con raíz en σ_0 es una Σ-demostración lineal de γ

$$< \gamma_0, \beta_0, \gamma_1, \beta_1 \ldots, \gamma_{n-1}, \beta_{n-1}, \gamma_n >$$

donde para todo $1 \leq i$, γ_i se obtiene por resolución a partir de al menos una cláusula padre unit o un factor unit de alguna cláusula padre.

Teorema 5.17.2. *Existe una refutación unit de un conjunto Σ de cláusulas si, y sólo si, existe una refutación input de Σ.*

Demostración. Se puede ver en [6] $\square$

Ejemplo 5.17.4. Se pide demostrar que la fórmula $\exists z r(z)$ es consecuencia de las hipótesis: $\forall x(p(x) \rightarrow p(f(x)))$, $\forall y((p(f(y)) \wedge p(y)) \rightarrow r(y))$ y $p(a)$. En términos de cláusulas, este problema es equivalente a saber si es insatisfacible o no el conjunto $\Sigma = \Sigma' \cup \{\sigma_0\}$, donde:

$$\Sigma' = \{\neg p(x) \vee p(f(x)), \neg p(f(y)) \vee \neg p(y) \vee r(y), p(a)\}$$

y $\sigma_0 = \neg r(z)$. Encontramos la siguiente refutación unit (e input):

γ_0: $\neg r(z)$

β_0: $\neg p(f(y)) \vee \neg p(y) \vee r(y)$

γ_1: $\neg p(f(y)) \vee \neg p(y)$

β_1: $p(a)$

γ_2: $\neg p(f(a))$

β_2: $\neg p(x) \vee p(f(x))$

γ_3: $\neg p(a)$

β_3: $p(a)$

γ_4: $\square$

Observación 5.17.2. La consecuencia esencial del Teorema 5.17.1 es que para la clase de los problemas de la forma $\Sigma = \Sigma' \cup \{\sigma_0\}$, con Σ' un conjunto de cláusulas de Horn definidas y σ_0 una cláusula de Horn negativa, la estrategia de exploración “primero en anchura” del árbol de deducciones input de raíz σ_0 es una estrategia correcta y completa.

La estrategia de exploración “primero en profundidad con retorno al nodo anterior” del mismo árbol es correcta y completa para todos los problemas antes citados que engendren un árbol de deducción input finito (y por tanto, para todos los problemas sin variables), pero no es completo en general.

5.18. Estrategias Ordenadas

Existen numerosas formas de tener en cuenta en las cláusulas el orden de los literales para limitar las demostraciones tomadas en consideración dentro del árbol de las deducciones (cfr. [16] y [6]). Describimos aquí la más simple.

En la *resolución ordenada* las cláusulas son cosideradas como sucesiones finitas de literales (sus literales están ordenados). Para poder llevar a cabo la resolución entre dos cláusulas tienen que concurrir

- todas las circunstancias que requiere la aplicación de la regla de resolución;
- pero además, la resolución tiene que ser practicada con los literales que están en cabeza de las cláusulas.
- Más aún, la resolvente, que debe estar ordenada, debe llevar en las primeras posiciones los literales que resultan de la cláusula resolvente con el literal positivo y después los literales de la otra.

Esto da lugar a una nueva regla de resolución que se denomina *regla resolución ordenada*, en símbolos $\mathrm{res}_{\mathrm{cvo}}(\sigma, \tau; \theta)$. El concepto de factor que debe acompañarla exige la supresión de literales coincidentes tras la unificación, conservando el que los representa más a la izquierda en la lista ordenada de literales. Se denomina *demostración ordenada* a toda demostración en la que siempre que se resuelve se utiliza la resolución ordenada y el subsiguiente concepto de factor.

Ejemplo 5.18.1. Es posible la resolución ordenada entre las cláusulas $p(x) \lor r(x) \lor \neg q(x, y)$ y $\neg p(a) \lor \neg r(f(a))$ y da como resultado $r(a) \lor \neg q(a, y) \lor \neg r(f(a))$. Sin embargo, no es posible la resolución ordenada entre $p(x) \lor r(x) \lor \neg q(x, y)$ y $\neg r(f(a)) \lor \neg p(a)$.

Ejemplo 5.18.2. Sea $\Sigma = \{a \lor b, \neg a \lor c, \neg b \lor d, \neg c, \neg d\}$. La siguiente es una Σ-demostración ordenada de $\square$ con raíz $a \lor b$:

γ_0: $a \lor b$

β_0: $\neg a \lor c$

γ_1: $b \lor c$

β_1: $\neg b \lor d$

γ_2: $c \lor d$

β_2: $\neg c$

γ_3: d

β_3: $\neg d$

γ_4: $\square$

Teorema 5.18.1. *Sea $\Sigma = \Sigma' \cup \{\sigma_0\}$ un conjunto insatisfacible de cláusulas. Si σ_0 es negativa y Σ' es un conjunto de cláusulas de Horn determinadas y ordenadas colocando el literal positivo en cabeza de las cláusulas. Entonces existe una refutación input ordenada de raíz σ_0.*

Demostración. Ver, por ejemplo, [15] o [1]. $\square$

Ejemplo 5.18.3. Sea

$$\Sigma' = \{p(x) \lor \neg r(x), p(x) \lor \neg q(f(x)) \lor \neg q(x), q(f(x)) \lor \neg q(x), q(a)\}$$

y $\sigma_0 = \neg p(a)$. El árbol de las demostraciones input ordenadas de raíz σ_0 no tiene más que dos ramas, una no es una refutación:

γ_0: $\neg p(a)$

β_0: $p(x) \lor \neg r(x)$

γ_1: $\neg r(a)$

y la otra sí lo es:

γ_0: $\neg p(a)$

β_0: $p(x) \lor \neg q(f(x)) \lor \neg q(x)$

γ_1: $\neg q(f(a)) \vee \neg q(a)$

β_1: $q(f(x)) \vee \neg q(x)$

γ_2: $\neg q(a) \vee \neg q(a)$

β_2: $q(a)$

γ_3: $\neg q(a)$

β_3: $q(a)$

γ_4: $\square$

Observación 5.18.1. En resumen, para la clase de problemas de la forma $\Sigma = \Sigma' \cup \{\sigma_0\}$, donde Σ' es un conjunto de cláusulas de Horn y σ_0 es una cláusula negativa, la estrategia de exploración "primero en anchura" del árbol de las deducciones input ordenadas de raíz σ_0 es una estrategia correcta y completa. La estrategia de exploración "primero en profundidad con retorno" del mismo árbol es completa y correcta para todos los problemas antes citados que engendren un árbol de deducciones input ordenadas finito.

Observación 5.18.2. El lenguaje *Prolog* está fundado exactamente en el principio de la Observación 5.18.1: no se pueden escribir más que *cláusulas de Horn* y cuando es propuesta una cuestión, se pone en marcha un algoritmo de exploración "primero en profundidad con retorno" del árbol de deducciones input ordenadas de raíz la negación de la cuestión propuesta. Si el árbol es finito, está asegurada por lo dicho la obtención o bien de la cláusula vacía —es decir, un éxito— si la cuestión propuesta admite una respuesta positiva, o bien un fallo si —cuando todo el árbol es recorrido sin ser encontrada la cláusula vacía— si la cuestión propuesta admite una respuesta negativa. Dicho de otra forma, la estrategia de utilización de la resolución de Prolog es incompleta en general y completa cuando el árbol de deducciones particular engendrado es finito.

Ejemplo 5.18.4. El motivo del Ejemplo 5.10.1 conducía al estudio de la insatisfacibilidad del conjunto Σ de cláusulas que, reordenadas al efecto de llevar a cabo la resolución lineal ordenada, está constituido por las siguientes:

$\sigma 0$) $\neg p(x, h(x), h(x)) \vee \neg p(k(x), u, x)$

$\sigma 1$) $p(x, y, f(x, y))$

$\sigma 2$) $p(u, z, w) \vee \neg p(x, v, w) \vee \neg p(y, z, v) \vee \neg p(x, y, u)$

$\sigma 3$) $p(x, v, w) \vee \neg p(u, z, w) \vee \neg p(y, z, v) \vee \neg p(x, y, u)$

$\sigma 4$) $p(e, y, y)$

$\sigma 5$) $p(g(z), z, e)$

Construiremos una refutación de Σ por medio de la resolución lineal ordenada. En efecto, tomaremos como cabeza σ_0 a $\sigma 0$:

1. $\neg p(x, h(x), h(x)) \vee \neg p(k(x), u, x)$; es $\sigma 0$.
2. $p(e, y, y)$; es $\sigma 4$.
3. $\neg p(k(e), u, e)$; $\Psi = \epsilon$, $\Phi = (x|e)(y|h(e))$
4. $p(u, z, w) \vee \neg p(x, v, w) \vee \neg p(y, z, v) \vee \neg p(x, y, u)$; es $\sigma 2$.

5. $\neg p(x,v,e) \vee \neg p(y,z,v) \vee \neg p(x,y,k(e))$; $\Psi = (u|u_1)$, $\Phi = (u_1|k(e))(u|z)(w|e)$.

6. $p(g(z),z,e)$; es $\sigma 4$.

7. $\neg p(y,z,v) \vee \neg p(g(v),y,k(e))$; $\Psi = (z|z_1)$, $\Phi = (x|g(z_1))(z_1|v) = (x|g(v))(z_1|v)$.

8. $p(e,y,y)$; es $\sigma 4$.

9. $\neg p(g(v),e,k(e)$; $\Psi = (y|y_1)$, $\Phi = (y|e)(y_1|z)(z|v) = (y|e)(y_1|v)(z|v)$.

10. $p(x,v,w) \vee \neg p(u,z,w) \vee \neg p(y,z,v) \vee \neg p(x,y,u)$; es $\sigma 3$.

11. $\neg p(u,z,k(e)) \vee \neg p(y,z,e) \vee \neg p(g(v),y,u)$; $\Psi = (v|v_1)$, $\Phi = (x|g(v))(v_1|e)(w|k(e))$.

12. $p(e,y,y)$; es $\sigma 4$.

13. $\neg p(y,k(e),e) \vee \neg p(g(v),y,e)$; $\Psi = (y|y_1)$, $\Phi = (u|e)(y_1|z)(z|k(e)) = (u|e)(y_1|k(e))(z|k(e))$.

14. $p(g(z),z,e)$; es $\sigma 4$.

15. $\neg p(g(v),g(k(e)),e)$; $\Psi = \epsilon$, $\Phi = (y|g(z))(z|k(e)) = (y|g(k(e)))(z|k(e))$.

16. $p(g(z),z,e)$; es $\sigma 4$.

17. $\square$; $\Psi = \epsilon$, $\Phi = (v|z)(z|g(k(e))) = (v|g(k(e)))(z|g(k(e)))$.

Como puede ser observado, $\sigma 1$ no ha prestado servicio alguno en el razonamiento.

Ejemplo 5.18.5. Sea el conjunto de fórmulas:

$$\begin{aligned}\Gamma = \{&\forall x(\exists y(p(x,y) \wedge r(x,y)) \to b(x)),\\ &\exists x(\neg c(x) \wedge \forall y(\neg q(i) \to r(x,y)),\\ &\forall x(\forall y(q(y) \vee \neg p(x,y)) \to c(x))\}\end{aligned}$$

y sea γ la fórmula

$$\exists x(b(x) \wedge \neg c(x))$$

Demuestre que $\Gamma \models \gamma$.

Solución. Encontraremos para cada una de las hipótesis de este problema una forma prenexa y otra de Skolem:

- $\forall x(\exists y(p(x,y) \wedge r(x,y)) \to b(x))$
  $\forall x \forall y(\neg p(x,y) \vee \neg r(x,y) \vee b(x))$
- $\exists x(\neg c(x) \wedge \forall y(\neg q(y) \to r(x,y))$
  $\exists x \forall y(\neg c(x) \wedge (q(y) \vee r(x,y)))$
  $\forall y(\neg c(a) \wedge (q(y) \vee r(a,y)))$
- $\forall x(\forall y(q(y) \vee \neg p(x,y)) \to c(x))$
  $\forall x \exists y((\neg q(y) \vee c(x)) \wedge (p(x,y) \vee c(x)))$
  $\forall x((\neg q(f(x)) \vee c(x)) \wedge (p(x,f(x)) \vee c(x)))$

y para la negación de la supuesta tesis:

- $\neg\exists x(b(x) \wedge \neg c(x)$
  $\forall x(\neg b(x) \vee c(x))$

Esta situación conduce a refutar el siguiente conjunto de cláusulas (bajo su cierre universal):

$\sigma 0$) $\neg b(x) \vee c(x)$

$\sigma 1$) $b(x) \vee \neg p(x, y) \vee \neg r(x, y)$

$\sigma 2$) $\neg c(a)$

$\sigma 3$) $q(y) \vee r(a, y)$

$\sigma 4$) $\neg q(f(x)) \vee c(x)$

$\sigma 5$) $p(x, f(x)) \vee c(x)$

Si vemos a q como $\neg q_1$ y a c como $\neg c_1$, el conjunto de las anteriores cláusulas, con los predicados renombrados al efecto:

$\sigma 0$) $\neg b(x) \vee \neg c_1(x)$

$\sigma 1$) $b(x) \vee \neg p(x, y) \vee \neg r(x, y)$

$\sigma 2$) $c_1(a)$

$\sigma 3$) $r(a, y) \vee \neg q_1(y)$

$\sigma 4$) $q_1(f(x)) \vee \neg c_1(x)$

$\sigma 5$) $p(x, f(x)) \vee \neg c_1(x)$

es un conjunto de cláusulas de Horn, cada una de las cuales es definida salvo $\sigma 0$. Aplicaremos para la refutación la resolución lineal ordenada a ese conjunto de Horn:

1. $\neg b(x) \vee \neg c_1(x)$; es $\sigma 0$.
2. $b(x) \vee \neg p(x, y) \vee \neg r(x, y)$; es $\sigma 1$.
3. $\neg p(x, y) \vee \neg r(x, y) \vee \neg c_1(x)$; $\Psi = (x|x_1)$, $\Phi = (x_1|x)$.
4. $p(x, f(x)) \vee \neg c_1(x)$; es $\sigma 4$.
5. $\neg c_1(x) \vee \neg r(x, f(x)) \vee \neg c_1(x)$; $\Psi = (x|x_1)$, $\Phi = (x_1|x)(y|f(x))$. Esta fórmula es equivalente, en realidad, a $\neg c_1(x) \vee \neg r(x, f(x))$.
6. $c_1(a)$; es $\sigma 2$.
7. $\neg r(a, f(a))$; $\Psi = \epsilon$, $\Phi = (x|a)$.
8. $r(a, y) \vee \neg q_1(y)$; es $\sigma 3$.
9. $q_1(f(a))$; $\Psi = \epsilon$, $\Phi = (y|f(a))$.
10. $q_1(f(x)) \vee \neg c_1(x)$; es $\sigma 4$.

11. $\neg c_1(a)$; $\Psi = \epsilon$, $\Phi = (x|a)$.
12. $c_1(a)$; es $\sigma 2$.
13. $\square$; $\Psi = \epsilon$, $\Phi = \epsilon$.

$\square$

Ejercicio 5.18.1. Determine si el siguiente conjunto de cláusulas es satisfacible o insatisfacible:

$$\begin{aligned}\Sigma = \{& c(x) \vee d(f(x), x),\\ & c(y) \vee \neg d(x, y) \vee b(x),\\ & \neg a(x) \vee b(x),\\ & \neg b(x) \vee \neg a(x) \vee c(y) \vee \neg d(x, y),\\ & a(x) \vee \neg b(x)\}\end{aligned}$$

Ejercicio 5.18.2. Construya una refutación lineal ordenada del conjunto de cláusulas formado por las siguientes:

$\sigma 0$) $S(x, y, y, x)$

$\sigma 1$) $S(x, y, u, v) \vee \neg S(u, v, x, y)$

$\sigma 2$) $S(v, u, x, y) \vee \neg S(u, v, x, y)$

$\sigma 3$) $T(y, z, x) \vee \neg T(x, y, z)$

$\sigma 4$) $T(x, y, z) \vee \neg T(y, x, z)$

$\sigma 5$) $A(u, v, w, x, y, z) \vee \neg C(u, v, w, x, y, z)$

$\sigma 6$) $A(v, u, w, y, x, z) \vee \neg C(u, v, w, x, y, z)$

$\sigma 7$) $A(u, w, v, x, z, y) \vee \neg C(u, v, w, x, y, z)$

$\sigma 8$) $C(u, v, w, x, y, z) \vee \neg T(u, v, w) \vee \neg T(x, y, z) \vee \neg S(u, v, x, y) \vee \neg S(v, w, y, z) \vee \neg S(u, w, x, z)$

$\sigma 9$) $T(a, b, c)$

$\sigma 10$) $S(a, c, b, c)$

$\sigma 11$) $\neg A(c, a, b, c, b, a)$

5.19. Estrategias Input Ordenadas y Extracción de Respuestas

Consideremos el ejemplo siguiente:

$$\begin{aligned}\Sigma' =& \{p(a), p(b), r(f(x)) \vee \neg p(x), q(y) \vee \neg r(y), q(c)\}\\ \sigma_0 =& \neg q(z)\end{aligned}$$

El árbol de deducciones tiene tres deducciones cada una de las cuales conduce a la cláusula vacía (bibujar el árbol como ejercicio). Una de ellas es la siguiente:

γ_0: $\neg q(z)$

β_0: $q(y) \vee \neg r(y)$ (sutitución: $(y|z)$)

γ_1: $\neg r(z)$

β_1: $r(f(x)) \vee \neg p(x)$ (sutitución: $(z|f(x))$)

γ_2: $\neg p(x)$

β_2: $p(a)$ (sutitución: $(x|a)$)

γ_3: $\square$

En el curso de la demostración por resolución la variable z es reemplazada por $f(x)$ y seguidamente x por a; así pues z es reemplazada por $f(a)$. Por tanto, $\Sigma' \cup \{\neg q(f(a))\}$ conduce a la cláusula vacía por resolución:

γ_0: $\neg q(f(a))$

β_0: $q(y) \vee \neg r(y)$

γ_1: $\neg r(f(a))$

β_1: $r(f(x)) \vee \neg p(x)$

γ_2: $\neg p(a)$

β_2: $p(a)$

γ_3: $\square$

lo que significa que $q(f(a))$ resulta de Σ'. Por la misma razón, pero utilizando las otras refutaciones $q(f(b))$ y $q(c)$ resultan de Σ'. Se constata pues que cuando se consideran cláusulas con variables (como $\neg q(z)$), cada demostración de la cláusula vacía da un objeto t (un elemento del universo de Herbrand) tal que $q(t)$ resulta de Σ'. Esto es general y se tiene el resultado siguiente.

Teorema 5.19.1. *Sea $\Sigma' \cup \{\sigma_0(x_1, \dots, x_n)\}$ un conjunto insatisfacible de cláusulas tal que todas las cláusulas de Σ' son de Horn definidas y ordenadas anteponiendo el literal positivo y*

$$\begin{aligned}\sigma_0(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \neg\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= \neg\lambda_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee \neg\lambda_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee \cdots \neg\lambda_k(x_1, x_2, \dots, x_n)\end{aligned}$$

es negativa. Entonces cada refutación input ordenada en la que las sustituciones son $(x_1|t_1)$, $(x_2|t_2)$,...,$(x_n|t_n)$ define elementos del universo de Herbrand de Σ' tales que:

$$\varphi(t_1, t_2, \dots, t_n) = \lambda_1(t_1, t_2, \dots, t_n) \wedge \lambda_2(t_1, t_2, \dots, t_n) \wedge \cdots \lambda_k(t_1, t_2, \dots, t_n)$$

es consecuencia de Σ'. Recíprocamente para toda n-upla $\langle t_1, t_2, \dots, t_n\rangle$ en el universo de Herbrand de Σ', tal que $\varphi(t_1, t_2, \dots, t_n)$ sea consecuencia de Σ', existe una refutación input ordenada de raíz $\neg\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ donde las sustituciones $(x_1|t'_1)$, $(x_2|t'_2)$,...,$(x_n|t'_n)$ cumplen que $\varphi(t_1, t_2, \dots, t_n)$ es una instanciación de $\varphi(t'_1, t'_2, \dots, t'_n)$.[2]

[2]Es decir es obtenida a partir de $\varphi(t'_1, t'_2, \dots, t'_n)$ reemplazando ciertas variables por términos.

Esto signfica que para saber cuales son los objetos t para los cuales $q(t)$ es consecuencia de Σ' (o lo que es equivalente $q(t)$ es verdadero en todo modelo de Herbrand de Σ'), basta con explorar el árbol de deducciones input ordenadas por una estrategia "primero en profundidad", (o por una estrategia "primero en profundidad con retorno" si se está seguro que el árbol es finito) anotando por cada cláusula vacía que se encuentre el objeto t asociado.

Éste es el principio de los métodos de extracción de respuestas utilizados en numerosos sistemas de demostración automática (cfr. [18]) y en ciertos lenguajes de interrogación de bases de datos. En particular, el lenguaje Prolog está basado en este resultado. Puede decirse que calcula lo que pasa en el más pequeño modelo de Herbrand de Σ', el conjunto de cláusulas que definen el programa (cfr. [15]).

5.20. Ejercicios sobre Resolución

1. Decir si son unificables o no las fórmulas $r(x, f(a), y)$ y $r(f(y), x, b)$. En caso de respuesta afirmativa, dar un unificador principal. Igual pregunta para las fórmulas $r(x, f(a), y)$ y $r(f(y), x, z)$.

2. Dados los literales $p(g(f(x), u), f(a), g(z, f(y)))$ y $p(g(f(f(y)), g(v, a)), f(v), g(g(x, b), x))$, di cuales de las siguientes sustituciones es un unificador de máxima generalidad o principal.

   a) $(v|a)(u|g(v, a))(z|g(a, b))(x|a)$.

   b) $(v|a)(u|g(a, a))(z|g(f(b), b))(y|b)(x|f(b))$.

   c) $(v|a)(u|g(a, a))(z|g(x, b))(x|f(u))$.

   d) $(z|g(f(y), b))(v|a)(u|g(a, a))(x|f(y))$.

3. Decir si son unificables o no las fórmulas atómicas:

   - $\varphi_1 \equiv p(x, y)$
   - $\varphi_2 \equiv p(f(z), x)$
   - $\varphi_3 \equiv p(w, f(x))$

   e igual pregunta para:

   - $\varphi_1 \equiv p(x, z)$
   - $\varphi_2 \equiv p(f(y), g(a))$
   - $\varphi_3 \equiv p(f(u), z)$

4. Comprobar si son unificables los siguientes conjuntos de literales. En caso afirmativo, calcular un unificador de máxima generalidad:

   a) $\{p(g(y), f(x, h(x), y)), p(x, f(g(z), w, z))\}$

   b) $\{p(x, g(f(a)), f(x)), p(f(a), g(y), y), p(y, z, y)\}$

   c) $\{p(x, f(g(y), b)), p(h(a, y), f(g(f_1(x)), b))\}$

   d) $\{p(x, z), p(g(f(z)), g(b)), p(g(f(w)), w)\}$

5. Mediante el "algoritmo de subsumisión", determinar

   a) si la cláusula $p(x, x)$ subsume a (es generalizada por) la cláusula $p(f(x), y) \vee p(y, f(x))$.

   b) si la cláusula $\neg p(x) \vee q(f(x), a)$ subsume a (es generalizada por) la cláusula $\neg p(h(y)) \vee q(f(h(y)), a) \vee \neg p(z)$.

6. Probar que el conjunto formado por las siguientes cláusulas es insatisfacible:
   - $t(x, g(a), z, f(u)) \vee \neg p(g(a)) \vee s(y, z) \vee \neg r(f(y))$
   - $q(x, f(y)) \vee \neg p(g(x))$
   - $\neg s(f(a), f(a)) \vee \neg r(f(f(a))) \vee \neg p(g(x))$
   - $r(f(x))$
   - $p(g(a)) \vee \neg q(g(b), f(x))$
   - $\neg p(x) \vee s(y, z) \vee \neg t(a, x, y, f(z)) \vee \neg q(g(b), z)$
   - $p(g(x))$
7. Encontrar el conjunto apropiado de cláusulas a través del cual estudiar si la fórmula $\exists x p(f(x))$ es consecuencia semántica del conjunto de hipótesis:
   - $\exists x \neg p\big(f(x)\big) \to \forall x q(x)$
   - $\exists y \forall z\big(r(z, y) \wedge r(z, a)\big) \to \forall x p(x)$
   - $\forall x \forall z\big(q(z) \to p(x) \vee q(z, a)\big)$
8. Dar una refutación lineal ordenada del conjunto de las siguientes cláusulas:
   - $\neg r\big(x, f(a), f(g(z))\big) \vee \neg q(a, x)$
   - $\neg p(z, y)$
   - $\neg q(a, x)$
   - $q\big(y, g(x)\big) \vee p(y, z)$
   - $q(x, z) \vee r\big(g(y), f(y), z\big) \vee p(x, z)$
9. Se quiere establecer a partir de los enunciados hipotéticos siguientes:
   - para todo crimen, hay alguien que lo ha cometido
   - sólo la gente deshonesta comete crímenes
   - no es detenida más que la gente deshonesta
   - la gente deshonesta detenida no comete crímenes
   - ocurren crímenes

   el enunciado:
   - hay gente deshonesta no detenida

   como pretendida tesis. Utilizar para ello la resolución en lógica de primer orden.
10. A partir de las fórmulas:

    $\varphi 1)$ $\forall x \forall y \exists z p(x, y, z)$

    $\varphi 2)$ $\forall x \forall y \forall z \forall u \forall v \forall w\big((p(x, y, u) \wedge p(y, z, v)) \to (p(x, v, w) \leftrightarrow p(u, z, w))\big)$

    $\varphi 3)$ $\exists x\big(\forall y p(x, y, y) \wedge \forall z \exists u p(u, z, x)\big)$

    concluir como consecuencia semántica:

    $$\exists x\big(\forall y p(x, y, y) \wedge \forall z \exists u p(z, u, x)\big)$$

    utilizando la resolución. Enunciar un problema de la teoría de grupos que quede demostrado con lo que precede en este ejercicio.

11. Si es posible, extraer la cláusula vacía como resolvente del siguiente conjunto de cláusulas:

   $\sigma 1)$ $\neg p(x) \vee q(x, f(x))$

   $\sigma 2)$ $\neg p(x) \vee r(f(x))$

   $\sigma 3)$ $p(a)$

   $\sigma 4)$ $\neg q(x, y)$

12. Si en el sistema $\vdash_{rcv}$ la regla de resolución no impusiera el renombramiento previo, en una de las cláusulas padre, de las variables comunes ¿sería cierto el resultado de que todo conjunto insatisfacible de cláusulas es refutable? Sustentar la respuesta, según su naturaleza, con una demostración o un ejemplo.

13. Mostrar con un ejemplo que la conocida como *regla de disminución* es indispensable para la deducción semántica en lógica de primer orden utilizando la resolución. Para ello, encontrar un conjunto de cláusulas (de al menos dos) que siendo insatisfacible, sea imposible generar la cláusula vacía a partir de él con el mero y exclusivo uso de la regla de resolución.

14. Demostrar que el conjunto de fórmulas $\{\forall x\big(p(x) \to \forall y(q(x, y) \to r(y))\big),\ \neg\exists z\neg q(f(z), g(z)),\ p(f(a))\}$ implica semánticamente $r(g(a))$.

15. Demuestra, usando resolución, que la fórmula

   $$\forall x\forall y((r(x, y) \vee q(x)) \wedge \neg r(x, g(x)) \wedge \neg q(y))$$

   es insatisfacible.

16. Construir una derivación de la cláusula vacía a partir de las formas clausulares que se obtienen del conjunto de fórmulas $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ donde:

   - $\varphi_1 \equiv \forall x(\exists y p(x, y) \vee \neg q(x))$
   - $\varphi_2 \equiv \forall x(r(x) \to (t(x) \vee q(x)))$
   - $\varphi_3 \equiv \forall y(t(y) \to \exists z p(y, z))$
   - $\varphi_4 \equiv \exists z(\forall y \neg p(z, y) \wedge r(z))$

17. Construir una derivación de la cláusula vacía a partir de las formas clausulares que se obtienen del conjunto de fórmulas $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ donde:

   - $\varphi_1 \equiv m(a)$
   - $\varphi_2 \equiv \forall x(m(x) \to m(f(x)) \vee m(g(x)))$
   - $\varphi_3 \equiv \forall x(q(x, f(x)) \wedge q(x, g(x)))$
   - $\varphi_4 \equiv \forall x(\neg m(x) \vee \forall y \neg q(y, x))$

18. Demostrar, usando la resolución, que la fórmula $\exists x\exists y(p(x, y) \wedge q(y))$ es consecuencia semántica de las fórmulas:

   - $q(a)$
   - $\forall x(q(x) \to q(g(x)) \vee q(f(x)))$
   - $\forall x(p(x, g(x)) \wedge p(x, f(x)))$

19. Demostrar, usando resolución lineal ordenada, que la fórmula

   $$\exists x(o(x) \wedge \forall y(t(y) \to \exists z p(y, z, x)))$$

   es consecuencia de las fórmulas:

- $\forall x((t(x) \land \neg q(x)) \to \forall y \forall z(o(y) \to p(x, z, y)))$
- $\forall x((t(x) \land q(x)) \to \forall y \forall z((o(y) \land s(y)) \to p(x, z, y)))$
- $\exists x(o(x) \land r(x)) \land \exists y(o(y) \land s(y))$

20. Demostrar, usando resolución lineal ordenada, que la fórmula

$$\exists x(r(x) \land t(x))$$

es consecuencia de las fórmulas:

- $\exists x(r(x) \land \forall y(p(y) \to q(x, y)))$
- $\forall x(r(x) \to \exists y(s(x, y) \land p(y)))$
- $\forall x(\exists y(s(x, y) \land q(x, y)) \to t(x))$

21. Demostrar, usando resolución lineal ordenada, que la fórmula

$$\exists x \exists y(pl(x) \land cn(y) \land cp(x, y))$$

es consecuencia de las fórmulas:

- $\forall x(je(x) \land cs(x) \to \exists y(pp(y) \land cp(x, y)))$
- $\forall x(je(x) \to pl(x)) \land \exists x(je(x) \land cs(x))$
- $\forall x(pp(x) \to \neg cd(x) \land jg(x))$
- $\forall x(jg(x) \to cn(x) \lor cd(x))$

22. Construir una OL-refutación del conjunto de cláusulas:

- $r(a, f(c), f(b))$
- $p(a)$
- $r(x, x, f(x))$
- $\neg r(x, y, z) \lor r(y, x, z)$
- $\neg r(x, y, z) \lor q(x, z)$
- $\neg p(x) \lor \neg r(y, z, u) \lor \neg q(x, u) \lor q(x, y) \lor q(x, z)$
- $\neg q(a, b)$

23. Demostrar, usando OL-resolución, que la fórmula

$$\exists x(r(x) \lor \exists y(q(x, y) \land p(y)))$$

es consecuencia de las fórmulas:

- $\forall x((o(x) \land \exists y(q(y, x) \land s(y))) \to p(x))$
- $\forall x(o(x) \land v(x) \to s(x))$
- $\forall x(o(x) \land \neg v(x) \to r(x))$
- $\forall x(\exists y(q(y, x) \land o(y)) \to o(x))$
- $o(a) \land q(a, b)$

24. Demostrar, usando resolución lineal ordenada, que la fórmula

$$\neg \forall x o(x)$$

es consecuencia de las fórmulas:

- $\forall x(q(x) \wedge \neg t(x) \rightarrow s(x))$
- $\forall x(q(x) \wedge t(x) \rightarrow r(x) \vee p(x))$
- $\forall x((s(x) \vee r(x) \vee p(x)) \rightarrow \neg o(x)$
- $\exists x q(x)$

25. Demostrar, usando resolución lineal ordenada, que la fórmula

$$\exists x as(s)$$

es consecuencia de las fórmulas:

- $\forall x(md(x) \wedge \neg bl(x) \rightarrow ca(x))$
- $\forall x(un(x) \wedge ca(x) \rightarrow mx(g(x)) \vee fm(f(x)))$
- $\forall x(bl(x) \rightarrow dg(x))$
- $\forall x(mx(x) \rightarrow il(x))$
- $\forall x(fm(x) \rightarrow fa(x))$
- $\forall x(dg(x) \vee il(x) \vee fa(x) \rightarrow as(x))$
- $un(a) \vee md(a)$

26. Demostrar, usando resolución lineal ordenada, que la fórmula

$$\neg \exists x(r(x) \wedge s(x))$$

es consecuencia de las fórmulas:

- $\forall x((r(x) \wedge s(x)) \rightarrow \exists y(q(y) \wedge p(x, y)))$
- $\forall x(q(x) \rightarrow t(x))$
- $\forall x(t(x) \rightarrow o(x))$
- $\forall x \forall y(r(x) \wedge o(y) \rightarrow \neg p(x, y))$

27. Determine si el siguiente conjunto de cláusualas es satisfacible o insatisfacible:

$$\begin{aligned}\Gamma = \{&c(x) \vee d(f(x), x),\\ &c(y) \vee \neg d(x, y) \vee b(x),\\ &\neg a(x) \vee b(x),\\ &\neg b(x) \vee \neg a(x) \vee c(y) \vee \neg d(x, y)\\ &\neg c(a)\\ &a(x) \vee \neg b(x)\}\end{aligned}$$

28. Sea el conjunto de fórmulas:

$$\begin{aligned}\Gamma = \{&\forall x(\exists y(p(x, y) \wedge r(x, y)) \rightarrow b(x)),\\ &\exists x(\neg c(x) \wedge \forall y(\neg q(y) \rightarrow r(x, y)),\\ &\forall x(\forall y(q(y) \vee \neg p(x, y)) \rightarrow c(x))\}\end{aligned}$$

y sea γ la fórmula:

$$\exists(b(x) \wedge \neg c(x))$$

Compruebe que γ es consecuencia semántica de Γ.

5.21. Ejemplos

Ejemplo 5.21.1. Encuentre un conjunto de fórmulas de un lenguaje de primer orden que siendo satisfacible, no admita ningún modelo finito.

Solución. Consideremos las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned}
\varphi_0 &\equiv \forall x \neg r(x,x) && \text{(antisimetría)}\\
\varphi_1 &\equiv \forall x \forall y \forall z (r(x,y) \to (r(y,z) \to r(x,z))) && \text{(transitividad)}\\
\varphi_2 &\equiv \forall x \exists y r(x,y) && \text{(conexión)}
\end{aligned}$$

de un lenguaje con un único símbolo de relación r, que es binario. Supongamos que $\mathbf{A}$ es un modelo para $\Phi = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2\}$. Como A debe ser no vacío, tendrá al menos un elemento a_0. Como $\mathbf{A}$ es modelo de φ_2, dado un elemento cualquiera a_n de A exisitirá al menos un elemento $a_{n+1} \in A$ tal que $\langle a_n, a_{n+1} \rangle \in (r)^{\mathbf{A}}$; esto proporciona una sucesión $\{a_n\}_n$ de elementos de A. Demostraremos por inducción que para todo número natural no nulo n y para todo número natural i tal que $0 \leq i < n$, $\langle a_i, a_n \rangle \in (r)^{\mathbf{A}}$. En efecto, razonamos sobre el número natural no nulo n mediante el predicado $P(n)$ del tenor:

$$\text{para todo } i \text{ tal que } 0 \leq i < n,\ \langle a_i, a_n \rangle \in (r)^{\mathbf{A}}$$

de la forma siguiente:

- En el **caso base**, $n = 1$; por la construcción de $\{a_n\}$ sabemos que $\langle a_0, a_1 \rangle \in (r)^{\mathbf{A}}$, lo que demuestra que es cierto $P(0)$.
- Supongamos que n es un número natural no nulo y, como **hipótesis de inducción**, que $P(n)$ vale, es decir que para todo i tal que $0 \leq i < n$, $\langle a_i, a_n \rangle \in (r)^{\mathbf{A}}$.
- En el **paso de inducción** demostraremos que es cierta $P(n+1)$. Sea i tal que $0 \leq i < n+1$; tenemos dos casos:
  - $i = n$; en tal caso, por la construcción de la sucesión $\{a_n\}_n$, $\langle a_n, a_{n+1} \rangle \in (r)^{\mathbf{A}}$.
  - $i < n$; por la hipótesis de inducción $\langle a_i, a_n \rangle \in (r)^{\mathbf{A}}$ y por el caso anterior tenemos que $\langle a_n, a_{n+1} \rangle \in (r)^{\mathbf{A}}$. Al ser $\mathbf{A}$ modelo de φ_1, necesariamente $\langle a_i, a_{n+1} \rangle \in (r)^{\mathbf{A}}$.

Por el *principio de inducción finita* sabemos que para todo número natural n, vale $P(n)$. Como consecuencia, para cualesquiera números naturales m y n, $\langle a_m, a_n \rangle \in (r)^{\mathbf{A}}$; pero como $\mathbf{A}$ es modelo de φ_0, para cualesquiera números naturales m y n, $a_m \neq a_n$. Tenemos, pues, que $\{a_n : n \in \omega\} \subseteq A$ y como el subconjunto es equipotente a ω, el conjunto no puede ser finito. La idea para este ejercicio vino sugerida par la relación $<$ entre números naturales y, en efecto, $\langle \omega, < \rangle$ es modelo de Φ ya que $<$ es una relación en ω: antireflexiva, transitividad y total. Como consecuencia tenemos que Φ es satisfacible. □

Ejemplo 5.21.2. Demuestre que la fórmula

$$\forall x(\neg r(x,x) \wedge \exists y r(x,y)) \wedge \forall x \forall y \forall z((r(x,y) \wedge r(y,z)) \to r(x,z)) \tag{5.22}$$

es satisfacible y refutable.

Solución. Si llamamos α a la fórmula (5.22), resulta que α es lógicamente equivalente a la siguiente fórmula:

$$\forall x(\neg r(x,x)) \wedge \forall x \exists y r(x,y) \wedge \forall x \forall y \forall z((r(x,y) \wedge r(y,z)) \to r(x,z))$$

a la que llamaremos β. Buscaremos una estructura $\mathbf{A}$ y otra $\mathbf{B}$ tal que para una asignación ν, fija aunque arbitraria (α es sentencia), se cumpla $I^{\nu}_{\mathbf{A}}(\beta) = 1$ y $I^{\nu}_{\mathbf{B}}(\beta) = 0$. Al cumplirse $\beta = \alpha$, habremos probado que α es satisfacible y refutable. Para especificar $\mathbf{A}$ recurriremos al "ente" ω en calidad de conjunto, de existencia tan fundadamente puesta en duda, en el bien entendido de que ello no sería en modo alguno necesario; y si lo hacemos es tan solo por haber sido la respuesta más popular en el examen:

- $A = \omega$
- $(r)^{\mathbf{A}} = <$

Dado que $<$ no relaciona jamás a ningún número natural con él mismo (esto es más que no ser reflexiva), es transitiva y para todo $n \in \omega$ existe $m \in \omega$ tal que $n < m$ (por ejemplo, dado n basta con tomar $m = n+1$); se cumplirá que $I^{\nu}_{\mathbf{A}}(\beta) = 1$. Para especificar $\mathbf{B}$, sea:

- $B = \{0\}(= 1)$
- $(r)^{\mathbf{A}} = \{\langle 0, 0\rangle\}$

Es claro que $I^{\nu}_{\mathbf{B}}(\forall x(\neg r(x,x))) = 0$, por lo que $I^{\nu}_{\mathbf{B}}(\beta) = 0$. Esto demuestra lo que queríamos. $\square$

Ejemplo 5.21.3. Sean:

- $\alpha_1 \equiv \forall x(r(x) \to (s(x) \vee q(x)))$
- $\alpha_2 \equiv \forall x(q(x) \to \exists y p(x,y))$
- $\alpha_3 \equiv \forall x(s(x) \to \exists y p(x,y))$
- $\alpha_4 \equiv \forall x(r(x) \to \exists y p(x,y))$

y demuestre que $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \models \alpha_4$, pero que $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \not\models \alpha_1$.

Solución. Cosideremos lo siguiente:

- $\alpha_1^p \equiv \forall x(r(x) \vee s(x) \vee q(x))$, $\alpha_1^s \equiv \alpha_1^p$.
- $\alpha_2^p \equiv \forall x \exists y(\neg q(x) \vee p(x,y))$, $\alpha_2^s \equiv \forall x(\neg q(x) \vee p(x, f(x)))$.
- $\alpha_3^p \equiv \forall x \exists y(\neg s(x) \vee p(x,y))$, $\alpha_3^s \equiv \forall x(\neg s(x) \vee p(x, g(x)))$.
- $(\neg\alpha_4)^p \equiv \exists x \forall y(r(x) \wedge \neg p(x,y))$, $(\neg\alpha_4)^s \equiv \forall y(r(a) \wedge \neg p(a,y)) = r(a) \wedge \forall y \neg p(a,y)$.

Que ocurra $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \models \alpha_4$ equivale a que sea insatisfacible el conjunto $\Gamma = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \neg\alpha_4\}$; pero sabemos que Γ es equisatifacible al conjunto de cláusulas:

$$\begin{aligned}\Sigma = \{&\forall x(r(x) \vee s(x) \vee q(x)),\\ &\forall x(\neg q(x) \vee p(x, f(x))),\\ &\forall x(\neg s(x) \vee p(x, g(x))),\\ &r(a),\\ &\forall y \neg p(a,y)\}\end{aligned}$$

y éste último es insatisfacible, como pondrá de manifiesto la resolución lineal input sobre el conjunto de cláusulas (de Horn, realmente) Σ (cfr. Figura 5.2). Para demostrar que $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \not\models \alpha_1$ encontraremos

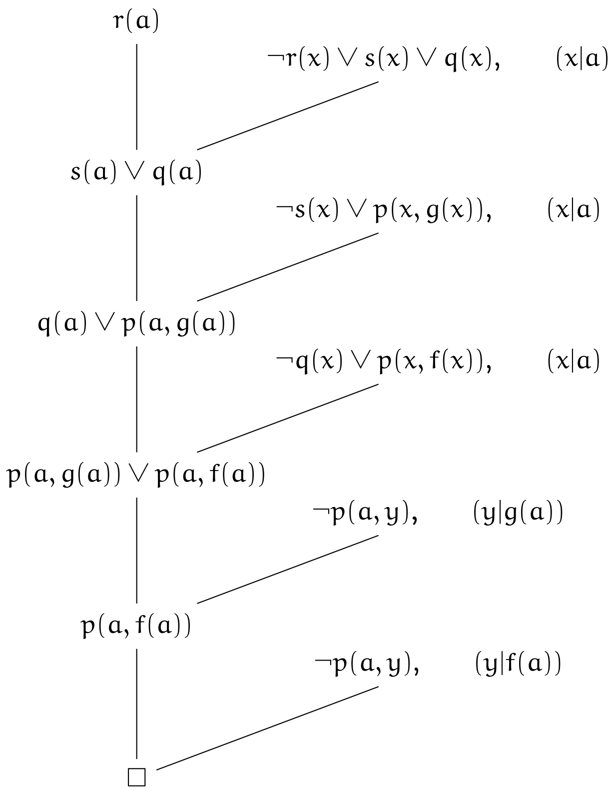

Figura 5.2: Refutación del conjunto Σ mediante la resolución lineal input.

una interpretación $\langle \mathbf{A}, v \rangle$ tal que: para todo $2 \le i \le 4$, $I^v_{\mathbf{A}}(\alpha_i) = 1$ y sin embargo $I^v_{\mathbf{A}}(\alpha_1) = 0$. Como $\mathbf{A}$ vale, por ejemplo, la siguiente:

- $A = \{0, 1, 2\} (= 3)$
- $(p)^{\mathbf{A}} = \{\langle 0, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 0\rangle\}$
- $(r)^{\mathbf{A}} = A$
- $(s)^{\mathbf{A}} = \{0\}$
- $(q)^{\mathbf{A}} = \{2\}$

y como v, una asignación fija pero arbitraria (al tratarse de un conjunto de sentencias). En efecto:

$$\begin{aligned} I^v_{\mathbf{A}}(\alpha_2) = 1 \text{ sii, para todo } a \in A,\ & (I^{v(x|a)}_{\mathbf{A}}(q(x)) = 0 \text{ ó } I^{v(x|a)}_{\mathbf{A}}(\exists y p(x, y)) = 1) \\ \text{sii, para todo } a \in A,\ & (I^{v(x|a)}_{\mathbf{A}}(q(x)) = 0 \text{ ó existe } b \in A \text{ tq } I^{v(x|a, y|b)}_{\mathbf{A}}(p(x, y)) = 1) \\ \text{sii, para todo } a \in A,\ & (a \notin (q)^{\mathbf{A}} \text{ ó existe } b \in A \text{ tq } \langle a, b\rangle \in (q)^{\mathbf{A}}) \end{aligned} \tag{5.23}$$

toda vez que $(q)^{\mathbf{A}} = \{2\}$ y $\langle 2, 0\rangle \in (p)^{\mathbf{A}}$, la condición (5.24) es cierta, de donde $I^v_{\mathbf{A}}(\alpha_2) = 1$. Análogamente:

- toda vez que $(q)^{\mathbf{A}} = \{0\}$ y $\langle 0, 1\rangle \in (p)^{\mathbf{A}}$, $I^v_{\mathbf{A}}(\alpha_3) = 1$

- toda vez que $\langle 0,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,0\rangle \in (p)^{\mathbf{A}}$, se cumple que para todo $a \in A$, existe $b \in A$ tal que $\langle a,b\rangle \in (p)^{\mathbf{A}}$ y por tanto $I^{\nu}_{\mathbf{A}}(\alpha_4) = 1$.

Sin embargo, $I^{\nu}_{\mathbf{A}}(\alpha_4) = 0$; en efecto:

$$\begin{aligned} I^{\nu}_{\mathbf{A}}(\alpha_1) = 1 &\text{ sii, para todo } a \in A,\ (I^{\nu(x|a)}_{\mathbf{A}}(r(x)) = 0 \text{ ó } I^{\nu(x|a)}_{\mathbf{A}}(s(x) \vee q(x)) = 1) \\ &\text{ sii, para todo } a \in A,\ (I^{\nu(x|a)}_{\mathbf{A}}(r(x)) = 0 \text{ ó } I^{\nu(x|a)}_{\mathbf{A}}(s(x)) = 1 \text{ ó } I^{\nu(x|a)}_{\mathbf{A}}(q(x)) = 1) \\ &\text{ sii, para todo } a \in A,\ (a \notin (r)^{\mathbf{A}} \text{ ó } a \in (s)^{\mathbf{A}} \cup (q)^{\mathbf{A}}) \end{aligned} \tag{5.24}$$

pero: $(s)^{\mathbf{A}} \cup (q)^{\mathbf{A}} = \{0,2\}$, $1 \in (r)^{\mathbf{A}}$ y $1 \notin (s)^{\mathbf{A}} \cup (q)^{\mathbf{A}}$; así pues, la condición (5.24) es falsa, de donde cualquier condición equivalente es falsa, en particular $I^{\nu}_{\mathbf{A}}(\alpha_1) = 1$. Es decir, $I^{\nu}_{\mathbf{A}}(\alpha_1) = 0$ mientras que $I^{\nu}_{\mathbf{A}}(\alpha_2) = 1 = I^{\nu}_{\mathbf{A}}(\alpha_3) = I^{\nu}_{\mathbf{A}}(\alpha_4)$; ello demuestra lo que queríamos. □

Ejemplo 5.21.4. Clasifique razonadamente la fórmula:

$$\varphi \equiv \neg\exists x p(x) \wedge \exists x q(x) \wedge \forall x(p(x) \to q(x))$$

Solución. Como en la fórmula no ocurre libremente símbolo de variable alguno, para interpretarla será indiferente la asignación de variables que sea usada. Sea $\mathbf{A}$ una estructura para el lenguaje sucinto en el que están expresadas las fórmulas y ν una asignación de variables cualquiera; $I^{\nu}_{\mathbf{A}}(\varphi) = 1$ sii se cumplen las siguientes condiciones:

- $I^{\nu}_{\mathbf{A}}(\neg\exists x p(x)) = 1$ (sii $(p)^{\mathbf{A}} = \varnothing$)
- $I^{\nu}_{\mathbf{A}}(\exists x q(x)) = 1$ (sii $(q)^{\mathbf{A}} \neq \varnothing$)
- $I^{\nu}_{\mathbf{A}}(\forall x(p(x) \to q(x))) = 1$ (sii $(p)^{\mathbf{A}} \subseteq (q)^{\mathbf{A}}$)

Por tanto, la estructra $\mathbf{A}$ debe satisfacer simultáneamente las siguientes condiciones:

- $(p)^{\mathbf{A}} = \varnothing$
- $(q)^{\mathbf{A}} \neq \varnothing$
- $(p)^{\mathbf{A}} \subseteq (q)^{\mathbf{A}}$

Si se construye $\mathbf{A}$ de manera que $(p)^{\mathbf{A}} = \varnothing$ y $(q)^{\mathbf{A}} \neq \varnothing$, entonces $I^{\nu}_{\mathbf{A}}(\varphi) = 1$; pero si se construye $\mathbf{A}$ de manera que $(q)^{\mathbf{A}} = \varnothing$, entonces $I^{\nu}_{\mathbf{A}}(\varphi) = 0$. Como ambas maneras de construir $\mathbf{A}$ son posibles, φ es contingente. □

Ejemplo 5.21.5. Demuestre que para cualesquiera fórmula φ de un lenguaje de primer orden y símbolo de variable x, son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1. φ es universalmente válida.
2. $\forall x\varphi$ es universalmente válida.

Solución. Sean φ una fórmula de un lenguaje de primer orden y x un símbolo de variable cualesquiera. Supongamos que φ es universalmente válida y consideremos una interpretación $\langle \mathbf{A}, s\rangle$, fija pero arbitraria. Al ser φ universalmente válida se cumple que para todo $a \in A$, $I^{s(x|a)}_{\mathbf{A}}(\varphi) = 1$ y esto justamente significa que $I^s_{\mathbf{A}}(\forall x\varphi) = 1$. Al ser $\langle \mathbf{A}, s\rangle$ arbitraria, lo que vale para ella vale para toda interpretación; de ahí se deduce que $\forall x\varphi$ es universalmente válida. **Recíprocamente**, supongamos que $\forall x\varphi$ es universalmente válida y sea $\langle \mathbf{A}, s\rangle$ una interpretación fija pero arbitraria. Se tiene, según la hipótesis y particularizando la misma, que $I^{s(x|s(x))}_{\mathbf{A}}(\varphi) = 1$; pero como $s = s(x|s(x))$, en realidad se tiene $I^s_{\mathbf{A}}(\varphi) = 1$. Al ser $\langle \mathbf{A}, s\rangle$ arbitraria, lo que vale para ella vale para toda interpretación; de ahí se deduce que φ es universalmente válida. □

Ejemplo 5.21.6. Considere las fórmulas:

- $\varphi_0 \equiv \forall x(r(x,x) \to \forall y r(x,y))$
- $\varphi_1 \equiv \forall x\forall y(r(x,y) \to r(y,x))$
- $\varphi_2 \equiv \forall x\exists y(\neg r(y,x))$
- $\varphi_3 \equiv \forall x(\neg r(x,x))$

Diga razonadamente si son ciertas o no las siguientes afirmaciones:

1. $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \models \varphi_3$
2. $\varphi_0, \varphi_2, \varphi_3 \models \varphi_1$

Solución. Para demostrar que $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \models \varphi_3$ expresaremos en forma prenexa las fórmulas oportunas y encontraremos para cada una de ellas una forma de Skolem. Tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\varphi_0 &= \forall x\forall y(\neg r(x,x) \lor r(x,y)) \\
&\equiv \varphi_0^p \equiv \varphi_0^{ps} \\
\varphi_1 &= \forall x\forall y(\neg r(x,y) \lor r(y,x)) \\
&\equiv \varphi_1^p \equiv \varphi_1^{ps} \\
\varphi_2 &= \forall x\exists y(\neg r(y,x)) \\
&\equiv \varphi_2^p \\
\varphi_2^{ps} &\equiv \forall x(\neg r(f(x),x)) \\
\neg\varphi_3 &= \exists x r(x,x) \\
\neg\varphi_3^{ps} &\equiv r(a,a)
\end{aligned}$$

Veremos ahora que el conjunto de cláusulas:

$$\Sigma = \{r(a,a), \neg r(x,x) \lor r(x,y), \neg r(x,y) \lor r(y,x), \neg r(f(x),x)\}$$

Consideremos el siguiente proceso de resolución:

σ.91) $r(a,a)$ (hip.)

σ.92) $\neg r(x,x) \lor r(x,y)$ (hip.)

σ.93) $r(a,y)$, resolvente entre σ.1 y σ.2a con la sustitución $(x|a)$.

σ.94) $\neg r(x,y_1) \lor r(y_1,x)$ (hip.)

σ.95) $r(y,a)$, resolvente entre σ.3 y σ.4a con la sustitución $(x|a)(y_1|y)$.

$\sigma.96)$ $\neg r(f(x), x)$ (hip.)

$\sigma.97)$ $\square$, resolvente entre $\sigma.5$ y $\sigma.6$ con la sustitución $(y|f(x))(x|a) = (y|f(a))(x|a)$.

Sin embargo $\varphi_0, \varphi_2, \varphi_3 \not\models \varphi_1$; para demostrarlo fijaremos una asignación de variables cualquiera s (pues evaluaremos sentencias) y construimos la estructura $\mathbf{A}$ determinada por lo siguiente:

- $A = \{0, 1\}$
- $(r)^{\mathbf{A}} = \{\langle 0, 1\rangle\}$

Con ella evaluaremos las fórmulas:

- $I^s_{\mathbf{A}}(\varphi_0) = 1 = I^s_{\mathbf{A}}(\varphi_2) = I^s_{\mathbf{A}}(\varphi_3)$ resultan ciertas porque $(r)^{\mathbf{A}}$ no relaciona a ningún elemento con él mismo.
- $I^s_{\mathbf{A}}(\varphi_1) = 0$ porque $(r)^{\mathbf{A}}$ no es simétrica.

$\square$

Ejemplo 5.21.7. Clasifique razonadamente la fórmula:

$$\varphi \equiv \exists x p(x) \wedge \neg\exists y q(y) \wedge \forall z(p(z) \rightarrow q(z))$$

Solución. Supongamos que $\mathbf{A}$ es una estructura para el lenguaje sucinto en el que están expresadas las fórmulas. Al ser φ un sentencia, sea v una asignación de variables cualquiera. Si $I^v_{\mathbf{A}}(\varphi)$ tuviese valor 1, entonces:

- $I^v_{\mathbf{A}}(\exists x p(x)) = 1$ sii existe $m \in A$ tal que $m \in (p)^{\mathbf{A}}$ sii $(p)^{\mathbf{A}} \neq \varnothing$.
- $I^v_{\mathbf{A}}(\neg\exists y q(y)) = 1$ sii para todo $m \in A$, $m \notin (q)^{\mathbf{A}}$ sii $(q)^{\mathbf{A}} = \varnothing$.
- $I^v_{\mathbf{A}}(\forall z(p(z) \rightarrow q(z))) = 1$ sii para todo $m \in A$, si $m \in (p)^{\mathbf{A}}$ entonces $m \in (q)^{\mathbf{A}}$ sii $(p)^{\mathbf{A}} \subseteq (q)^{\mathbf{A}}$.

En resumen, $I^v_{\mathbf{A}}(\varphi) = 1$ sii

- $(p)^{\mathbf{A}} \neq \varnothing$
- $(q)^{\mathbf{A}} = \varnothing$
- $(p)^{\mathbf{A}} \subseteq (q)^{\mathbf{A}}$

y estas tres condiciones últimas no pueden darse a la vez; pues de darse, el conjunto vacío tendría elementos. Así pues, φ es una contradicción. $\square$

Ejemplo 5.21.8. Demuestre que para cualesquiera fórmula φ y símbolo de variable x, son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1. φ es satisfacible.
2. $\exists x\varphi$ es satisfacible.

Solución. Supongamos que φ es satisfacible y sea $\langle \mathbf{A}, s\rangle$ una interpretación tal que $I^s_{\mathbf{A}}(\varphi) = 1$. Sea $c = s(x)$, con lo que $s(x|c) = s$; entonces $I^{s(x|c)}_{\mathbf{A}}(\varphi) = 1$ y, por tanto, existe $a \in A$ —verbigracia c— tal que $I^{s(x|a)}_{\mathbf{A}}(\varphi) = 1$, o sea, $I^s_{\mathbf{A}}(\exists x\varphi) = 1$. Para el recíproco, si $\exists x\varphi$ es satisfacible, sea $\langle \mathbf{A}, s\rangle$ una interpretación que la satisface. Entonces $I^s_{\mathbf{A}}(\exists x\varphi) = 1$, o equivalentemente, existe $a \in A$ tal que $I^{s(x|a)}_{\mathbf{A}}(\varphi) = 1$. Si llamamos s' a $s(x|a)$, lo que hemos expresado es que $I^{s'}_{\mathbf{A}}(\varphi) = 1$, es decir, hemos concluido que φ es satisfacible. □

Ejemplo 5.21.9. Diga razonadamente si el conjunto de cláusulas:

1. $\neg s(f(x), g(a)) \vee r(f(a), x)$
2. $s(f(y), y) \vee p(y)$
3. $\neg p(g(a)) \vee \neg p(z)$
4. $\neg r(x, y) \vee p(y)$

es satisfacible o insatisfacible. De ser satisfacible, póngalo de manifiesto aportando una interpretación construida al efecto.

Solución. Consideremos la siguiente demostración:

1. $\neg s(f(x), g(a)) \vee r(f(a), x)$, hip. 1
2. $s(f(y), y) \vee p(y)$, hip. 2
3. $p(g(a)) \vee r(f(a), g(a))$, resolución entre 1 y 2, $\Phi = (x|g(a))(y|g(a))$
4. $\neg r(x, y) \vee p(y)$, hip. 4
5. $p(g(a)) \vee p(g(a)) = p(g(a))$, resolución entre 3 y 4, $\Phi = (x|f(a))(y|g(a))$
6. $\neg p(g(a))$, factor de hip. 3 con $(z|g(a))$
7. □, resolución entre 5 y 6

□

Ejemplo 5.21.10. Diga razonadamente si es cierta o no la siguiente afirmación:

$$\forall x\forall y\forall z(\neg p(f(x, y), g(z, b)) \rightarrow p(f(g(a, y), a), x)) \models \exists x\exists z p(f(x, w), z)$$

Solución. No es cierta. Para ponerlo de manifiesto sea:

- $\varphi \equiv \forall x\forall y\forall z(\neg p(f(x, y), g(z, b)) \rightarrow p(f(g(a, y), a), x))$
- $\psi \equiv \exists x\exists z p(f(x, w), z)$

y consideremos la siguiente interpretación:

- $\mathbf{A}$:

- $A = \{0, 1, 2\}$
- $(a)^{\mathbf{A}} = 0$, $(b)^{\mathbf{A}} = 1$
- $(g)^{\mathbf{A}}$ es la función constantemente igual a 2 y

$$(f)^{\mathbf{A}}(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } y = 0 \\ 2, & \text{si } y = 1 \\ 1, & \text{si } y = 2 \end{cases}$$

- $(p)^{\mathbf{A}} = \{\langle 0, 0\rangle, \langle 0, 1\rangle, \langle 0, 2\rangle, \langle 1, 2\rangle\}$

- ν cualquier asignación cumpliendo $\nu(w) = 1$, verbigracia, la función constantemente igual a 1.

Se tiene que:

- Para todo $m \in A$ y asignación ν', $I_{\mathbf{A}}^{\nu'(x|m)}(p(f(g(a, y), a), x)) = 1$ pues para todo $m \in A$, $\langle 0, m\rangle \in (p)^{\mathbf{A}}$. Esto conlleva que $I_{\mathbf{A}}^{\nu}(\varphi) = 1$
- Por otra parte,

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{A}}^{\nu}(\psi) = 1 &\Leftrightarrow \text{ existen } m, n \in A \text{ tal que } \langle (f)^{\mathbf{A}}(m, \nu(w)), n\rangle \in (p)^{\mathbf{A}} \\ &\Leftrightarrow \text{ existen } m, n \in A \text{ tal que } \langle (f)^{\mathbf{A}}(m, 1), n\rangle \in (p)^{\mathbf{A}} \\ &\Leftrightarrow \text{ existen } m, n \in A \text{ tal que } \langle 2, n\rangle \in (p)^{\mathbf{A}} \end{aligned}$$

  La última condición es falsa, así que $I_{\mathbf{A}}^{\nu}(\psi) = 0$.

□

Ejemplo 5.21.11. Considere las siguientes fórmulas de cierto lenguaje de primer orden:

- $\alpha_1 \equiv \forall x(\exists y r(f(x), y) \to q(x, x))$
- $\alpha_2 \equiv \forall x(q(x, a) \to p(f(x)))$
- $\alpha_3 \equiv \exists x \exists y r(x, y) \to \forall \neg q(x, x)$
- $\alpha_4 \equiv \exists y \forall x(p(x) \to r(x, y))$
- $\beta \equiv \exists x(\neg r(f(x), x) \wedge \neg q(a, x))$

y demuestre que $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \models \beta$.

Solución. Para ello consideraremos el conjunto

$$\Gamma = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \neg\beta\}$$

y construiremos un conjunto de cláusulas, Σ equisatisfacible respecto a Γ basándonos en las formas prenexa y de Skolem de las fórmulas dadas. El mencionado conjunto Σ de cláusulas es:

$$\begin{aligned} \Sigma = \{&\neg r(f(x), y) \vee q(x, x), \\ &\neg q(x, a) \vee p(f(x)), \\ &\neg r(x, y) \vee \neg q(z, z), \\ &\neg p(x) \vee r(x, b), \\ &\ r(f(x), x) \vee q(a, x)\} \end{aligned}$$

que queda refutado por resolución en el esquema de la Figura 5.3: □

$$\neg r(x,y) \vee \neg q(z,z)$$

$$\neg p(x) \vee r(x,b)$$
$$\Psi = (x|x_1),\ \Phi = (x_1|x)(y|b)$$

$$\neg q(z,z) \vee \neg p(x)$$

$$\neg q(x,a) \vee p(f(x))$$
$$\Psi = (x|x_1),\ \Phi = (x_1|f(x))$$

$$\neg q(z,z) \vee \neg q(x,a)$$
$$(x|a)(z|a)$$
$$\neg q(a,a)$$

$$\neg r(f(x),y) \vee q(x,x), \qquad (x|a)$$

$$\neg r(f(a),y)$$

$$r(f(x),x) \vee q(a,x), \qquad (x|a)(y|a)$$

$$q(a,a)$$

$$\neg q(a,a)$$

$$\Box$$

Figura 5.3: Refutación del conjunto Σ mediante la resolución.