Estudio de la iterada.

- Sea $x_{n+1} = f(x_n)$ donde

$$f : \mathbb{K} \to \mathbb{K},$$

es continua.

- Sea $x_{n+1} = f(x_n)$ donde
$$f : \mathbb{K} \to \mathbb{K},$$
es continua.
- Dado $k \in \{2, 3, 4, ...\}$, se define la iterada a k pasos como
$$g(x) = f^k(x) = \underbrace{f(f(...f}_{k \text{ veces}}(x)...))$$

- Sea $x_{n+1} = f(x_n)$ donde
$$f : \mathbb{K} \to \mathbb{K},$$
es continua.
- Dado $k \in \{2, 3, 4, \dots\}$, se define la iterada a k pasos como
$$g(x) = f^k(x) = \underbrace{f(f(\dots f}_{k \text{ veces}}(x)\dots))$$

Así vamos saltando de k en k términos de la sucesión

Ejemplo

Si $f(x) = x^2 - 1$, entonces
$g(x) = f^2(x) = f(f(x)) = (f(x))^2 - 1 = (x^2 - 1)^2 - 1.$

Cuidado esto no es cuadrado, sino $f(f(x))$

- Si x_n es solución de $x_{n+1} = f(x_n)$ y $g(x) = f^k(x)$ entonces $y_n = x_{kn}$ es solución de $y_{n+1} = g(y_n)$.

Puntos fijos e iterada.

- Si x^* es punto fijo de f también lo es de la iterada.

Puntos fijos e iterada.

- Si x^* es punto fijo de f también lo es de la iterada.
- Si x^* es punto fijo estable de f también lo es de la iterada.

Puntos fijos e iterada.

- Si x^* es punto fijo de f también lo es de la iterada.
- Si x^* es punto fijo estable de f también lo es de la iterada.
- Si x^* es punto fijo asintóticamente estable de f también lo es de la iterada.

Puntos fijos e iterada.

- Si x^* es punto fijo de f también lo es de la iterada.
- Si x^* es punto fijo estable de f también lo es de la iterada.
- Si x^* es punto fijo asintóticamente estable de f también lo es de la iterada.
- Si x^* es punto fijo inestable de f también lo es de la iterada.

Puntos fijos e iterada.

- Si x^* es punto fijo de f también lo es de la iterada.
- Si x^* es punto fijo estable de f también lo es de la iterada.
- Si x^* es punto fijo asintóticamente estable de f también lo es de la iterada.
- Si x^* es punto fijo inestable de f también lo es de la iterada.

Son sí y sólo sí

Corolario (Caso dejado atrás)

Todo punto fijo x^* con $f'(x^*) < -1$, es inestable.

Ejercicio

Estudia la estabilidad de los puntos fijos de $x_{n+1} = 2x_n^2 - x_n$.

Demostración Corolario

Si x^* es punto fijo de f

$$g(x^*) = f(f(x^*)) = f(x^*) = x^*$$

$$g'(x^*) = f(f(x)) = \left[f'(f(x)) \cdot f'(x)\right]_{x=x^*} = f'(x^*) \cdot f'(x^*) > 1$$

Ejercicio

$$f(x) = 2x^2 - x$$

$$x = 2x^2 - x \Longrightarrow x = 0 \quad x = 1$$

$$f'(x) = 4x - 1$$

$f'(0) = -1$ $\quad$ $f'(1) = 3$

$\hookrightarrow$ Inestable

$\hookrightarrow$ El criterio no dice nada

$$g(x) = f(f(x)) = 2(f(x))^2 - f(x)$$

$$\hookrightarrow g(x) = 2(2x^2 - x)^2 - (2x^2 - x) = 8x^4 - 8x^3 + 2x^2 - 2x^2 + x = 8x^4 - 8x^3 + x$$

$$g'(0) = 1 \quad g''(0) = 0 \quad g'''(0) = -48$$

Luego $x = 0$ es asintóticamente estable

Ciclos

Una solución periódica no constante se llama un ciclo. Se dice que es un k-ciclo si k es su periódo minimal.

Ciclos

Una solución periódica no constante se llama un ciclo. Se dice que es un k-ciclo si k es su periódo minimal.

Ejemplos

- Todas las soluciones de $x_{n+1} = -x_n$ salvo el punto fijo son 2-ciclos.

Ciclos

Una solución periódica no constante se llama un ciclo. Se dice que es un k-ciclo si k es su periódo minimal.

Ejemplos

- Todas las soluciones de $x_{n+1} = -x_n$ salvo el punto fijo son 2-ciclos.
- $\{-1, 2\}$ es un 2-ciclo de $x_{n+1} = \frac{x_n^2 - 4x_n + 1}{3}$.

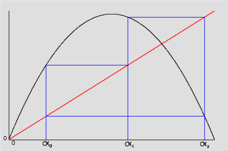
$\frac{(-1)^2 - 4(-1) + 1}{3} = 2 \qquad \frac{2^2 - 4 \cdot 2 + 1}{3} = -1$

Ciclos

Una solución periódica no constante se llama un ciclo. Se dice que es un k-ciclo si k es su periódo minimal.

Ejemplos

- Todas las soluciones de $x_{n+1} = -x_n$ salvo el punto fijo son 2-ciclos.
- $\{-1, 2\}$ es un 2-ciclo de $x_{n+1} = \frac{x_n^2 - 4x_n + 1}{3}$.
- En el siguiente dibujo hay un 3-ciclo



Si tenemos un punto fijo x^* de la k iterada entonces la solución con dato inicial $x_0 = x^*$ de la ecuacion $x_{n+1} = f(x_n)$ es siempre k-periódica pero no quiere decir que k sea su periodo minimal.

$$f(x) = x^2 + 7x$$

$$g(x) = f(f(x)) = f(x^2+7x) = (x^2+7x)^2 + 7(x^2+7x) =$$

$$= x^4 + 49x^2 + 14x^3 + 7x^2 + 49x = x^4 + 14x^3 + 56x^2 + 49x$$

Puntos fijos

$$x = x^4 + 14x^3 + 56x^2 + 49x \rightarrow x = 0 \quad \text{Punto fijo, no vale}$$

$$x^4 + 14x^3 + 56x^2 + 48x = 0 \rightarrow$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 14 & 56 & 48 \\ -6 & \downarrow & -6 & -48 & -48 \\ \hline & 1 & 8 & 8 & \boxed{0} \end{array}$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{32}}{2} = \text{Son los puntos de un 2-ciclo}$$

Ciclos e iterada.

Si tenemos un punto fijo x^* de la k iterada entonces la solución con dato inicial $x_0 = x^*$ de la ecuacion $x_{n+1} = f(x_n)$ es siempre k-periódica pero no quiere decir que k sea su periodo minimal.

Un punto fijo x^* de la k iterada puede ser:

- Un punto fijo de la ecuación original.
- Un k'-ciclo con k' divisor de k.

Ejemplo

Calcula los 2-ciclos de la ecuación en diferencias

$$x_{n+1} = x_n^2 + 7x_n. \longrightarrow \text{Lo hago arriba}$$

Estabilidad de los Ciclos

Puesto que los ciclos pueden verse como puntos fijos de la iterada se define Estabilidad /Estabilidad asintótica/Inestabilidad de un ciclo como el mismo concepto en la ecuación iterada. Lo cual deja los siguientes problemas:

- Un ciclo da lugar a un conjunto finito de puntos fijos en la iterada. ¿La estabilidad de dichos puntos es equivalente?
- Si tenemos un k'-ciclo es punto fijo de la k' iterada, paro tambien punto fijo de una k iterada con k multiplo de k'. ¿La estabilidad de dichos puntos es equivalente?

Criterio de la primera aproximación para ciclos

Sea $f : I \to I$ de clase 1, donde I es un intervalo abierto. Sea $x_1^*, x_2^*, ..., x_k^*$ es un k-ciclo. Entonces...

- si $|f'(x_1^*)f'(x_2^*)...f'(x_k^*)| < 1$ el punto es asintóticamente estable.
- si $|f'(x_1^*)f'(x_2^*)...f'(x_k^*)| > 1$ el punto es inestable.

$f(x) = \frac{x^2-4x+1}{3}$

$f'(x) = \frac{2x-4}{3}$

$f'(-1) = \frac{-2-4}{3} = -2 \quad \left.f'(2) = 0\right\} f'(-1)\cdot f'(2) = 0 \Longrightarrow$ Asintóticamente estable

Ejercicio

Estudia la estabilidad del ciclo $\{-1, 2\}$ en $x_{n+1} = \frac{x_n^2-4x_n+1}{3}$.