

GEOMETRÍA I. DGIIM

ESPACIO DUAL

Relación de problemas

1. Sea V un espacio vectorial sobre K finitamente generado. Demostrar que si $v \in V$ y $v \neq 0$ entonces existe $\varphi \in V^*$ tal que $\varphi(v) \neq 0$. ¿Es φ única en estas condiciones?
2. Calcular la base dual de la base B del espacio V en estos casos:
 - a) $B = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$, $V = \mathbb{R}^3$.
 - b) $B = \{(i, 0), (0, i)\}$, $V = \mathbb{C}^2$.
 - c) $B = \{1, 1+x, 1+x^2, 1+x^3\}$, $V = \mathbb{R}_3[x]$.

3. En el espacio $\mathbb{R}_2[x]$ de los polinomios con coeficientes reales y grado menor o igual a 2 se considera la aplicación $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$\varphi(p(x)) = \int_{-1}^1 p(x) dx.$$

Se pide lo siguiente:

- a) Demostrar que $\varphi \in (\mathbb{R}_2[x])^*$. Calcular las coordenadas de φ en la base dual de $\{1, x, x^2\}$.
 - b) Construir una base \overline{B} de $(\mathbb{R}_2[x])^*$ a partir de φ .
 - c) Obtener una base B de $\mathbb{R}_2[x]$ de forma que $B^* = \overline{B}$.
4. Sea V un espacio vectorial sobre K finitamente generado. Dados dos subespacios vectoriales U y W de V , demostrar que:

$$\text{an}(U + W) = \text{an}(U) \cap \text{an}(W), \quad \text{an}(U \cap W) = \text{an}(U) + \text{an}(W).$$

Deducir que si $V = U \oplus W$ entonces $V^* = \text{an}(U) \oplus \text{an}(W)$.

5. Sea V un espacio vectorial sobre K finitamente generado. Sabemos que si $\varphi \in V^*$ y $\varphi \neq \varphi_0$, entonces $\text{Nuc}(\varphi)$ es un hiperplano de V . Demostrar que, dado un hiperplano H de V , existe $\varphi \in V^*$ con $\text{Nuc}(\varphi) = H$. ¿Qué relación hay entre dos formas lineales φ y ψ sobre V tales que $\text{Nuc}(\varphi) = \text{Nuc}(\psi) = H$?

6. En cada uno de los siguientes casos, obtener unas ecuaciones implícitas para el subespacio U del espacio vectorial V :

a) $U = L((1, -1, 1), (2, 1, 0), (5, -2, 3)), \quad V = \mathbb{R}^3.$

b) $U = L((-1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, 1)), \quad V = \mathbb{R}^4.$

c) $U = L((1, -1, 0), (0, 1, -1)) \cap L((0, 1, 0)).$

d) $U = L((1, -1, 1, 0)) + L((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (2, 0, 1, 0)).$

7. Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por:

$$f(1, 1, 0) = (1, -1), \quad f(1, 0, 1) = (3, 0), \quad f(0, 1, 1) = (-2, 1).$$

Calcular la matriz de f' con respecto a las bases duales de las bases usuales de \mathbb{R}^2 y de \mathbb{R}^3 , respectivamente. Calcular bases de $\text{Nuc}(f')$ e $\text{Im}(f')$.

8. Decidir razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

- a) Toda forma lineal $\varphi \neq \varphi_0$ sobre un espacio vectorial V es un epimorfismo.
- b) Existe un subespacio de \mathbb{R}^{12} que está definido por 7 ecuaciones implícitas independientes y está generado por 4 vectores.
- c) Para cada $v \in \mathbb{R}^3$ con $v \neq 0$, existe un epimorfismo $f : \text{an}(\{v\}) \rightarrow \mathbb{R}^3$.
- d) Una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales sobre K finitamente generados es un isomorfismo si y sólo si también lo es su aplicación traspuesta.