9) Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas tales que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$$

Demostrar que entonces existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = g(c)$

Razonamos con el contrarrecíproco: Supongamos que no existe ningún $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = g(c)$

Definamos $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por $h(c) = f(c) - g(c)$.

Por ~~lo anterior~~ hipótesis sabemos que h no tiene soluciones en $[a,b]$, luego aplicando el teorema de Bolzano nos lleva a que h es siempre positiva o siempre negativa. Esto implica que:

- O bien $f > g \longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx > \int_a^b g(x)\,dx$

Conservación del orden

- O bien $f < g \longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx$