TEMA 3 - CORRIENTE ALTERNA

En este tema vamos a establecer una equivalencia entre las señales de tipo seno y coseno con los números complejos.

Ejemplo:

Supongamos que tenemos una fuente de tensión cuya diferencia de potencial depende de la siguiente expresión

$$v(t) = \underset{V_0}{\underset{\downarrow}{2}}\cos\left(\underset{\omega}{\underset{\downarrow}{3.7}}t + \underset{\alpha}{\underset{\downarrow}{\frac{\pi}{4}}}\right)\text{V} \Rightarrow v(t) = \underbrace{2e^{j\left(3.7t+\frac{\pi}{4}\right)}\ \text{V}}_{\text{Se usará este número complejo para el circuito}}$$

Es importante recordar que:

$$2\cos\left(3.7t + \frac{\pi}{4}\right) = \text{Real}\left(2e^{j\left(3.7t+\frac{\pi}{4}\right)}\right)$$

Las soluciones del circuito son números complejos.
En este caso, como es una señal de tipo coseno, nos quedaremos con la parte real de los números complejos.
Imaginemos que hemos resuelto el circuito y hemos calculado la intensidad que circula por un elemento:

$$i(t) = 4.15e^{j\left(3.7t-\frac{\pi}{3}\right)}\ \text{A}$$

$$\Downarrow$$

$$i(t) = \text{Real}\left(4.15e^{j\left(3.7t-\frac{\pi}{3}\right)}\text{A}\right) = 4.15\cos\left(3.7t - \frac{\pi}{3}\right)\text{A}$$

Si la señal de la que partíamos era de tipo seno, nos habríamos quedado con la parte imaginaria.

Características CA

Se denomina corriente alterna a la corriente eléctrica en la que la magnitud y dirección varían cíclicamente. La forma de onda de la corriente alterna más comúnmente utilizada es la de una onda senoidal. Los polos de las fuentes irán cambiando con el periodo, y si están los polos en el dibujo eso es para $t=0$.

- Las funciones seno y coseno están perfectamente definidas matemáticamente, y con números complejos se facilita su análisis.
- Las ondas periódicas no senoidales se pueden descomponer en suma de una serie de ondas senoidales de distintas frecuencias.

Impedancia

Generalización de la ley de Ohm

$$v(t) = Z \cdot i(t)$$ (Suele ser un número complejo)

Z es la impedancia y se mide en Ohmios (Ω). Su valor depende del tipo de elemento a considerar. A continuación lo calcularemos para:

- Resistencia • Condensador • Bobina

1) Resistencia

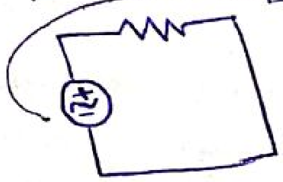
$$v(t) = R \cdot i(t)$$

1°) La impedancia de una resistencia se calcula como $Z_R = R$.

2°) $i(t) = \frac{V_0}{R} e^{j(\omega t+\alpha)}$ $i(t)$ tiene las mismas frecuencia angular y fase que $v(t)$ pero distinto módulo.

Ejemplo

$\Rightarrow v(t) = V_0 \cos(\omega t+\alpha) \Rightarrow v(t) = V_0 e^{j(\omega t+\alpha)}$

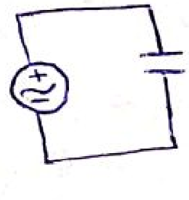


¿$i(t)$? R cumplen la ley de Ohm $\Rightarrow v(t) = R \cdot i(t) \Rightarrow i(t) = \frac{v(t)}{R}$

$$\Rightarrow \frac{V_0 e^{j(\omega t+\alpha)}}{R} = i(t) = \frac{V_0}{R} e^{j(\omega t+\alpha)}$$

2) Condensador

$$i(t) = C\,\frac{dv(t)}{dt}$$



$v(t) = V_0 e^{j(\omega t+\alpha)}$

$$i(t) = C\cdot V_0\, j\omega\, e^{j(\omega t+\alpha)} = C\cdot V_0\cdot \omega\cdot e^{j\frac{\pi}{2}}\cdot e^{j(\omega t+\alpha)} = C\cdot V_0\cdot\omega\cdot e^{j(\omega t+\alpha+\frac{\pi}{2})} = i(t)$$

$i(t)$ tiene la misma frecuencia angular que $v(t)$ pero distinto módulo ($C\omega V_0$) y distinta fase ($\alpha+\frac{\pi}{2}$). Recordar que el módulo depende de la frecuencia angular.

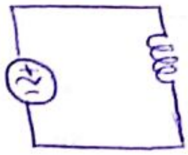
$$v(t) = Z\cdot i(t)$$

$$\Rightarrow \cancel{V_0 e^{j(\omega t+\alpha)}} = Z_c\, C\, \cancel{V_0}\, \omega\, j\, \cancel{e^{j(\omega t+\alpha)}} \Rightarrow 1 = Z_c\cdot C\cdot\omega\cdot j \Rightarrow Z_c = \frac{1}{j\omega C}$$

$$Z_c = \frac{1}{e^{j\frac{\pi}{2}}\,\omega C}$$

3. Bobina

$$v(t) = L\cdot\frac{d\,i(t)}{dt}$$



$$i(t) = \frac{1}{L}\int v(t)\,dt = \frac{1}{L}\int V_0 e^{j(\omega t+\alpha)}\,dt = \frac{V_0}{L}\cdot\frac{e^{j(\omega t+\alpha)}}{j\omega} =$$

$$\frac{V_0}{jL\omega}e^{j(\omega t+\alpha)} = \frac{V_0}{L\omega\cdot e^{j\frac{\pi}{2}}}e^{j(\omega t+\alpha)} = \frac{V_0}{L\omega}e^{j(\omega t+\alpha-\frac{\pi}{2})} = i(t)$$

1°) $i(t)$ tiene distinto módulo que $v(t)$ y depende tanto de las características del elemento (L) como de la frecuencia angular (ω)

La fase de $i(t)$ es $(\alpha-\frac{\pi}{2})$

2°) $v(t) = Z_L\cdot i(t)$

$$\cancel{V_0 e^{j(\omega t+\alpha)}} = Z_L\cdot\frac{\cancel{V_0}}{L\omega}e^{j(\cancel{\omega t+\alpha}-\frac{\pi}{2})} \Rightarrow 1 = Z_L\cdot\frac{1}{L\omega}e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow Z_L = \frac{L\omega}{e^{-j\frac{\pi}{2}}} = L\omega e^{j\frac{\pi}{2}} = L\omega j \Rightarrow \boxed{Z_L = j\omega L}$$

A partir de ahora necesitaremos la ω de la fuente y la característica del elemento (R, C, L). Las impedancias se usan para cuando los elementos están en serie o en paralelo. Independientemente de si tenemos fuentes de tensión o de corriente, trabajaremos con fasores ($e^{j\omega t}$).

$$i(t) \begin{cases} I_0\cos(\omega t+\alpha I) \\ I_0 \operatorname{sen}(\omega t+\alpha I) \end{cases} \Rightarrow \underbrace{I_0 e^{j(\omega t+\alpha I)}}_{I_0 e^{j\alpha I}} \qquad v(t) \begin{cases} V_0\cos(\omega t+\alpha V) \\ V_0\operatorname{sen}(\omega t+\alpha V) \end{cases} \Rightarrow \underbrace{V_0 e^{j(\omega t+\alpha V)}}_{V_0 e^{j\alpha V}}$$

Por ejemplo:
- Buscamos $i_2(t)$:

$$I_2 = I_{0_2} e^{j\alpha I_2}$$

1°) Añadir $* e^{j\omega t}$

$$i_2(t) = I_{0_2} e^{j(\omega t + \alpha I_2)}$$

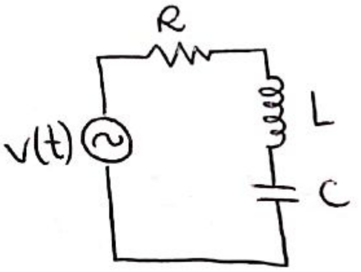
2°) Nos quedamos con la parte real de $i_2(t)$ si las fuentes eran de tipo coseno:

$$i_2(t) = I_{0_2} \cos(\omega t + \alpha I_2)$$

Si eran de tipo seno:

$$i_2(t) = I_{0_2} \operatorname{sen}(\omega t + \alpha I_2)$$

Ejemplo Transparencia 19



Datos

$R = 1k\Omega \Longrightarrow Z_R = 10^3 \Omega$

$L = 1mH = 10^{-3} H \Rightarrow Z_L = j\omega L = j \cdot 10^6 \cdot 10^{-3} = j 10^3 \Omega$

$C = 2nF = 2 \cdot 10^{-9} F \Rightarrow Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-9}} = -0.5 \cdot 10^3 j \Omega$

$v(t) = 10\cos(10^6 \frac{rad}{s} t) V$

$$v(t) = 10\cos(10^6 t) V \Rightarrow \underbrace{v(t) = 10 e^{j(10^6 t)} V}_{\text{FASOR}}$$

$\omega = 10^6 \frac{rad}{s}$

$\Downarrow$

$V = 10V$

Se cumple que:

$$v(t) = v_R(t) + v_L(t) + v_C(t)$$

Usando fasores:

$$10V = I Z_R + I Z_L + I Z_C$$

$$\Rightarrow 10V = IR + Ij\omega L + I \cdot \frac{1}{j\omega C}$$

Despejamos I:

$$I = \frac{10V}{Z_R + Z_C + Z_L} = 8.93 e^{-j0.46} mA$$

1°) Añadir la dependencia temporal

$+ e^{j\omega t} \Rightarrow i(t) = 8.93 e^{j(\omega t - 0.46)} mA$

2°) Me quedo con la parte real o imaginaria de $i(t)$. En este caso con la parte real porque $v(t)$ era de tipo coseno:

$\boxed{i(t) = 8.93\cos(10^6 t - 0.46)\ \text{mA}}$

Para calcular V_R, V_C y V_L:

$$V_R = IR \qquad V_C = \frac{1}{j\omega C} I \qquad V_L = j\omega L I$$

Se vuelve a añadir la dependencia temporal y nos quedamos con la parte real.

Cálculo potencia

$$p(t) = VI\cos(\omega t + \alpha_V)\cos(\omega t + \alpha_I) = \frac{VI}{2}\left[\cos(2\omega t + \alpha_V + \alpha_I) + \cos(\alpha_V - \alpha_I)\right]$$

$$\cos(A)\cos(B) = \frac{1}{2}\left[\cos(A+B) + \cos(A-B)\right]$$

(Esto en caso de que nos quedásemos con la parte real de los fasores)

Para calcular la potencia media:

$$\overline{P} = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt$$

$$\int_0^T \cos(2\omega t + \alpha_V + \alpha_I)\,dt = 0$$

La única parte que contribuye a este cálculo es:

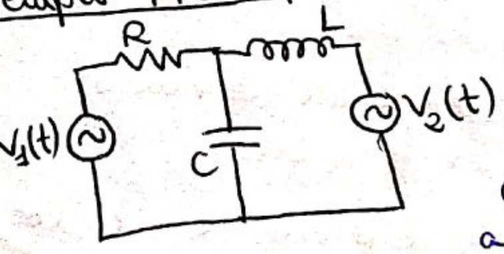
$$\overline{P} = \frac{1}{T}\frac{VI}{2}\int_0^T \cos(\alpha_V - \alpha_I)\,dt = \frac{1}{\cancel{T}}\cdot\frac{VI}{2}\cos(\alpha_V - \alpha_I)\cancel{T} = \overline{P}$$

Entonces para cada elemento:

Resistencia: $\overline{P} = \frac{VI}{2}$ porque $\alpha_V - \alpha_I = 0$

Condensador o bobina: $\overline{P} = 0$ porque $\alpha_V - \alpha_I = \frac{\pi}{2}$

<u>Ejemplo Transparencia 32</u>

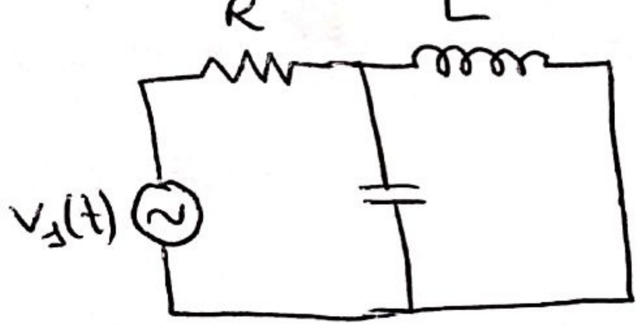


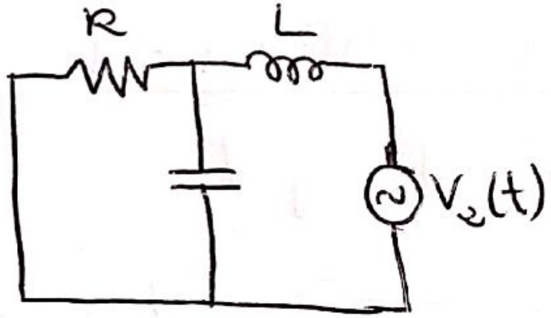
<u>Datos</u>

$V_1(t) = 10\cos(10^6 t)\ \text{V}$

$V_2(t) = 3\cos\left(2\cdot 10^6 t + \frac{\pi}{6}\right)\ \text{V}$

Como tenemos dos fuentes que trabajan a distintas frecuencias, habrá que aplicar el principio de superposición, de manera que habrá que resolver 2 circuitos:





Se resuelve usando $\omega = 10^6 \frac{rad}{s}$

Se resuelve usando $\omega = 2 \cdot 10^6 \frac{rad}{s}$

Sumo las soluciones finales, las que dependen del tiempo y son funciones coseno.

Teoremas de Thevenin y Norton en circuitos en CA

La formulación es la misma que en CC, solo que hablaremos de Impedancias Thevenin y Norton en lugar de resistencias.

Z_{th} y Z_n son funciones de la frecuencia, y $V_{th}(t)$ e $I_n(t)$ dependen del tiempo