Tema 5

2.2.1. Potencias reales

Pretendemos dar significado a la expresión x^y para todo número real positivo x y todo número real y. Ya hemos definido, en el Capítulo 1, las potencias enteras de un número real y estudiado sus propiedades. También hemos definido y estudiado las propiedades de las raíces n-ésimas, esto es, de las potencias de la forma $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ para $n \in \mathbb{N}$.

Dados $x > 0$, $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$, definimos $x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$. Notemos primero que $(\sqrt[q]{x})^p = \sqrt[q]{x^p}$ pues

$$\left((\sqrt[q]{x})^p\right)^q = (\sqrt[q]{x})^{pq} = \left((\sqrt[q]{x})^q\right)^p = x^p.$$

Naturalmente, debemos probar que si $p/q = m/n$ donde $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $x^{p/q} = x^{m/n}$. En efecto, puesto que $pn = qm$ tenemos que

$$\left((\sqrt[q]{x})^p\right)^{qn} = \left((\sqrt[q]{x})^q\right)^{pn} = x^{pn} = x^{qm} = \left((\sqrt[n]{x})^n\right)^{qm} = \left((\sqrt[n]{x})^m\right)^{qn}$$

es decir, $\left(x^{p/q}\right)^{qn} = \left(x^{m/n}\right)^{qn}$, lo que implica que $x^{p/q} = x^{m/n}$. En consecuencia, si r es un número racional podemos definir, sin ambigüedad alguna, la potencia x^r por $x^r = x^{p/q}$, donde $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$ son tales que $r = p/q$.

Observa que la definición de x^r para r racional se reduce a las ya conocidas para los casos particulares en que r es un entero o el inverso de un natural, así mismo la notación empleada es coherente con las notaciones usadas antes para tales casos particulares.

2.29 Proposición. *Para todo número racional $r \in \mathbb{Q}$ y todo número real y se verifica que* $\exp(ry) = (\exp(y))^r$. *En particular,* $\exp(r) = \mathrm{e}^r$. *Además, para todo $x \in \mathbb{R}$ se verifica que*

$$\exp(x) = \sup\{\mathrm{e}^r : r \in \mathbb{Q},\, r < x\}.$$

Demostración. Utilizando la propiedad de la exponencial $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$, se prueba fácilmente por inducción que para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $y \in \mathbb{R}$ se verifica que $\exp(ny) = (\exp(y))^n$. Si ahora n es un entero negativo tenemos que:

$$\exp(ny) = \exp(-n(-y)) = (\exp(-y))^{-n} = \left(\frac{1}{\exp(y)}\right)^{-n} = \exp(y)^n$$

Concluimos que $\exp(ny) = (\exp(y))^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y todo $y \in \mathbb{R}$. Deducimos ahora que $\left(\exp\left(\frac{1}{m}y\right)\right)^m = \exp(y)$ para todo $m \in \mathbb{N}$, esto es, $\exp\left(\frac{y}{m}\right) = \sqrt[m]{\exp(y)}$. Luego, $\exp\left(\frac{n}{m}y\right) = \left(\exp\left(\frac{y}{m}\right)\right)^n = \left(\sqrt[m]{\exp(y)}\right)^n$, de donde se sigue la primera afirmación del enunciado. En particular, $\exp(r) = (\exp(1))^r = \mathrm{e}^r$ para todo $r \in \mathbb{Q}$.

Dado $x \in \mathbb{R}$, sea $C = \{e^r : r \in \mathbb{Q},\ r < x\}$. Claramente $\exp(x)$ es un mayorante de C por lo que $\alpha = \sup(C) \leqslant \exp(x)$. Si fuera $\alpha < \exp(x)$, entonces $\log(\alpha) < x$ y, por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, hay algún $r \in \mathbb{Q}$ tal que $\log(\alpha) < r < x$. Pero entonces se tiene que $\alpha < \exp(r) = e^r$, lo que es contradictorio pues $e^r \in C$. Luego $\alpha = \exp(x)$. □

La proposición anterior justifica la notación que suele usarse para $\exp(x)$, dicho número se representa simbólicamente por e^x y puede interpretarse como "la potencia x del número e". En lo sucesivo nosotros también usaremos dicha notación y reservaremos la notación $\exp(\cdot)$ para aquellos casos en que aparezcan expresiones complicadas en el exponente.

Acabamos de probar que $(e^y)^r = e^{ry}$ para todo $y \in \mathbb{R}$ y todo $r \in \mathbb{Q}$. Dado $x > 0$, ponemos $y = \log(x)$ y obtenemos que $x^r = \exp(r\log(x))$. Esta igualdad, válida para todo $x > 0$ y para todo $r \in \mathbb{Q}$, justifica la siguiente definición.

2.30 Definición. Dados dos números reales $x > 0$ e $y \in \mathbb{R}$, se define la potencia x^y de **base** x y **exponente** y como el número real dado por

$$\boxed{x^y = \exp(y\log(x))}$$

Definimos también $0^x = 0$ para todo $x > 0$ y $0^0 = 1$.

Los comentarios anteriores justifican la consistencia de esta definición con la antes dada para exponentes racionales, así como la coherencia de las notaciones empleadas en ambos casos. Las propiedades básicas de las potencias de base y exponentes reales se indican a continuación y se proponen como fácil ejercicio.

2.31 Proposición (Leyes de los exponentes)**.** *Cualesquiera sean $a > 0$, $b > 0$ y para todos x, y en $\mathbb{R}$, se verifica que*

$$a^{x+y} = a^x a^y; \quad (a^x)^y = a^{xy}; \quad (ab)^x = a^x b^x.$$

2.32 Definición. Dado un número positivo $a > 0$ la función $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, definida para todo $x \in \mathbb{R}$ por $\exp_a(x) = a^x$, se llama **función exponencial de base** a.

Dado un número positivo $a > 0$ y $a \neq 1$, la función $\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definida para todo $x \in \mathbb{R}^+$ por $\log_a(x) = \dfrac{\log(x)}{\log(a)}$, se llama **función logaritmo de base** a.

Dado un número real b la función de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}$, definida para todo $x > 0$ por $x \mapsto x^b$, se llama **función potencia de exponente** b.

2.33 Proposición. *a)* $\dfrac{x}{1+x} \leqslant \log(1+x) \leqslant x$ *para todo* $x > -1$*, y la desigualdad es estricta si* $x \neq 0$.

b) $\left|\dfrac{\log(1+x)}{x} - 1\right| < \dfrac{|x|}{1+x}$ *para todo* $x > -1, x \neq 0$.

c) $x \leqslant \mathrm{e}^x - 1 \leqslant x\mathrm{e}^x$ *para todo número real* x*, y la desigualdad es estricta si* $x \neq 0$.

d) $\left|\dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} - 1\right| < |\mathrm{e}^x - 1|$ *para todo* $x \neq 0$.

Demostración. *a)* Sabemos que $\log(t) < n(t^{1/n} - 1)$ para todo $t > 0$, $t \neq 1$ y todo $n \in \mathbb{N}$. En particular, para $n = 1$, $\log(t) < t - 1$ para todo $t > 0, t \neq 1$. Sustituyendo t por $1+x$ obtenemos $\log(1+x) < x$ para todo $x > -1, x \neq 0$. Para estos valores de x se tiene que el número $z = \dfrac{1}{1+x} - 1$ también verifica que $z > -1, z \neq 0$, luego, por lo ya visto, se tendrá que $\log(1+z) < z$, es decir, $\dfrac{x}{1+x} < \log(1+x)$. Queda así probado el punto *a)*.

b) Se deduce fácilmente de *a)* dividiendo ambos lados de la desigualdad por x y tratando por separado el caso en que $x > 0$ y el caso en que $x < 0$.

c) Si $x \neq 0$, el número $z = \mathrm{e}^x - 1$ verifica que $z > -1$, y $z \neq 0$, por consiguiente $\dfrac{z}{1+z} < \log(1+z) < z$, es decir, $\dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x} < x < \mathrm{e}^x - 1$, y de aquí se sigue de forma inmediata la desigualdad del apartado *c)*.

d) Se deduce fácilmente de *c)* dividiendo ambos lados de la desigualdad por x y tratando por separado el caso en que $x > 0$ y el caso en que $x < 0$. □

2.2.2. Sucesiones de exponenciales y logaritmos

A continuación vamos a estudiar sucesiones de exponenciales y logaritmos. El resultado básico al respecto es el siguiente.

2.34 Proposición. *a) Una sucesión $\{x_n\}$ converge a $x \in \mathbb{R}$ si, y sólo si, la sucesión $\{e^{x_n}\}$ converge a e^x.*

b) Una sucesión de números positivos $\{y_n\}$ converge a un número positivo $y > 0$ si, y sólo si, la sucesión $\{\log(y_n)\}$ converge a $\log(y)$.

Demostración. Teniendo en cuenta que la función exponencial es creciente, se deduce inmediatamente que si $\{x_n\}$ está acotada entonces también $\{e^{x_n}\}$ está acotada. Esta observación, junto con la desigualdad

$$x_n \leqslant e^{x_n} - 1 \leqslant x_n e^{x_n}$$

probada en la proposición anterior, y el principio de las sucesiones encajadas, nos permiten deducir que si $\text{lím}\{x_n\} = 0$ entonces $\text{lím}\{e^{x_n}\} = 1$. Si ahora suponemos que $\text{lím}\{x_n\} = x$, se tiene que $\text{lím}\{x_n - x\} = 0$ y, por lo ya visto, $\text{lím}\{e^{x_n - x}\} = 1$, de donde, por ser $e^{x_n} = e^{x_n - x} e^x$, se sigue que $\text{lím}\{e^{x_n}\} = e^x$. Hemos probado una parte de la afirmación *a)* del enunciado.

Supongamos ahora que $\{y_n\}$ es una sucesión de números positivos con $\text{lím}\{y_n\} = 1$. Pongamos $z_n = y_n - 1$. Claramente $z_n > -1$, por lo que, según hemos probado en la proposición anterior, se verifica la desigualdad

$$\frac{z_n}{1+z_n} \leqslant \log(1+z_n) = \log(y_n) \leqslant z_n.$$

Teniendo ahora en cuenta que $\text{lím}\{z_n\} = 0$ deducimos, por el principio de las sucesiones encajadas, que $\text{lím}\{\log(y_n)\} = 0$. Si ahora suponemos que $\text{lím}\{y_n\} = y$ siendo $y > 0$, entonces

$\text{lím}\left\{\dfrac{y_n}{y}\right\} = 1$ y, por lo ya visto, será $\text{lím}\left\{\log\left(\dfrac{y_n}{y}\right)\right\} = = \text{lím}\{\log(y_n) - \log(y)\} = 0$, es decir, $\text{lím}\{\log(y_n)\} = \log(y)$. Hemos probado una parte de la afirmación *b)* del enunciado.

Las afirmaciones recíprocas se deducen de las ya probadas:

Si $\{e^{x_n}\}$ converge a e^x, entonces haciendo $y_n = e^{x_n}$ e $y = e^x$, se verificará, por lo ya visto, que $\{x_n\} = \{\log(y_n)\}$ converge a $x = \log(y)$.

Si $\{\log(y_n)\}$ converge a $\log(y)$, haciendo $x_n = \log(y_n)$ y $x = \log(y)$, se verificará, por lo ya visto, que $\{y_n\} = \{e^{x_n}\}$ converge a $y = \exp(x)$. □

2.35 Teorema. *a) Para toda sucesión* $\{x_n\}$ *tal que* $-1 < x_n \neq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y* $\lim\{x_n\} = 0$, *se verifica que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+x_n)}{x_n} = 1, \text{ y } \lim_{n\to\infty}(1+x_n)^{1/x_n} = \mathrm{e}.$$

b) Para toda sucesión $\{x_n\}$ *tal que* $\lim\{x_n\} = 0$ *y* $x_n \neq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *se verifica que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{x_n} - 1}{x_n} = 1.$$

Demostración. *a)* En virtud de la desigualdad probada en el punto *b)* de la proposición 2.33, para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que

$$\left| \frac{\log(1+x_n)}{x_n} - 1 \right| < \frac{|x_n|}{1+x_n}$$

de donde se sigue inmediatamente que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+x_n)}{x_n} = 1$. Deducimos ahora que

$$\lim_{n\to\infty}(1+x_n)^{1/x_n} = \lim_{n\to\infty} \exp\left(\frac{\log(1+x_n)}{x_n}\right) = \exp(1) = \mathrm{e}.$$

b) Puesto que $\lim\{\mathrm{e}^{x_n}\} = 1$ y, en virtud de la desigualdad probada en el punto *d)* de la proposición 2.33, para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que

$$\left| \frac{\mathrm{e}^{x_n} - 1}{x_n} - 1 \right| < |\mathrm{e}^{x_n} - 1|,$$

deducimos que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{x_n} - 1}{x_n} = 1$. □

2.36 Corolario. *a) Para toda sucesión* $\{x_n\}$ *tal que* $0 < x_n \neq 1$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y* $\lim\{x_n\} = 1$, *se verifica que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(x_n)}{x_n - 1} = 1.$$

b) Para toda sucesión $\{x_n\}$ *tal que* $x_n \notin [-1,0]$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y* $\lim\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\} = 0$, *se verifica que*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = \mathrm{e}.$$

Demostración. Poniendo, según sea el caso *a)* o el *b)*, $z_n = x_n - 1$, o $z_n = \dfrac{1}{x_n}$, tenemos que, en cada caso, la sucesión $\{z_n\}$ verifica las hipóptesis del punto *a)* del teorema 2.35 por lo que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+z_n)}{z_n} = 1, \text{ y } \lim_{n\to\infty}(1+z_n)^{1/z_n} = \mathrm{e},$$

equivalentemente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(x_n)}{x_n - 1} = 1, \text{ y } \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = \mathrm{e}. \quad \square$$