ÁLGEBRA 1

CURSO 20-21

DOBLE GRADO MATEMÁTICAS INFORMÁTICA

RELACIÓN DE EJERCICIOS 6

6.1. Determinar las unidades y los divisores de cero de los anillos $\mathbb{Z}_5$ y $\mathbb{Z}_8$.

6.2. ¿Es el anillo definido por el conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ con las operaciones $(a, a') + (b, b') = (a + b, a' + b')$ y $(a, a')(b, b') = (ab, ab' + a'b)$ un Dominio de Integridad?

6.3. Estudiar si los siguientes anillos son, o no, Dominios de Integridad:

$$\mathbb{Z}_8, \ \ \mathbb{Z}[\sqrt{2}], \ \ \mathbb{Z}_3, \ \ \mathbb{Z}_6[X], \ \ \mathbb{Z}[i], \ \ \mathbb{Z}_5[X].$$

6.4. En un anillo R un elemento a es idempotente si $a^2 = a$. Demuestra que en un dominio de integridad los únicos idempotentes son 0 y 1. Dar un ejemplo de un anillo que tenga otros idempotentes.

6.5. ¿Es $3 - 2i$ un divisor de $8 - i$ en el anillo $\mathbb{Z}[i]$? ¿Cuáles son los divisores de 5 en $\mathbb{Z}[i]$?

6.6. Argumentar la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones referidas a elementos de un Dominio de Integridad

1. $a \mid b \wedge a \nmid c \Rightarrow a \nmid b + c$.
2. $a \nmid b \wedge a \nmid c \Rightarrow a \nmid b + c$.

6.7. Denotemos por $\mathbb{Q}(x)$ el cuerpo de fracciones de $\mathbb{Z}[X]$. Describir los elementos de $\mathbb{Q}(x)$ y sus operaciones. Probar que $\mathbb{Q}(x)$ es también el cuerpo de fracciones de $\mathbb{Q}[x]$

6.8. Dado el conjunto $A = \{\frac{m}{2^k} \mid m \in \mathbb{Z}, k \geq 0\}$, probar que A es un subanillo de $\mathbb{Q}$ que no contiene a $\mathbb{Z}$ y que el cuerpo de fracciones de A es $\mathbb{Q}$.