Análisis Matemático I

Práctica 2: Diferenciabilidad

Planteamiento del problema

El problema

Dado un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, estudiar la continuidad,
la diferenciabilidad y la continuidad de las derivadas parciales,
de un campo escalar $f : \Omega \to \mathbb{R}$

Primer paso: la parte rutinaria del problema

La rutina

Habitualmente, existe un conjunto abierto $U \subset \Omega$ tal que

$f\big|_U$ se obtiene mediante operaciones con funciones de clase C^1,

luego es fácil comprobar que $f\big|_U$ es de clase C^1 y, como U es abierto,

el carácter local de la continuidad y la diferenciabilidad nos dicen que

f es diferenciable, luego también continua, en todo punto de U

De paso habremos calculado las derivadas parciales de f en U

y comprobado que son continuas en U

Por tanto, la parte rutinaria del problema consiste en:

a.1 Definir el conjunto U y comprobar que es abierto

a.2 Comprobar que $f\big|_U \in C^1(U)$

a.3 Usar el carácter local de la continuidad y de la diferenciabilidad

A partir de ahora se trata de estudiar lo que ocurre en cada punto de $\Omega \setminus U$

Segundo paso

Cálculo de las derivadas parciales

El segundo paso en nuestro estudio debe ser el siguiente:

(b) En cada punto $a \in \Omega \setminus U$, estudiar la existencia de las derivadas parciales de f en a y, en su caso, calcularlas

- Si no existe alguna de las derivadas parciales de f en a,
  sabemos que f no es diferenciable en a.
  Quedará estudiar la continuidad en el punto a de f
  y de las derivadas parciales que estén definidas en a (Práctica 1)
- Si f es parcialmente derivable en a,
  disponemos del vector gradiente $\nabla f(a)$

Diferenciabilidad

Criterio de diferenciabilidad

Suponiendo que f es parcialmente derivable en un punto $a \in \Omega \setminus U$, sabemos que f es diferenciable en a si, y sólo si, se tiene:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - \big(\nabla f(a) \,\big|\, x - a\big)}{\|x - a\|} = 0$$

Podemos definir $\varphi(x) = \dfrac{f(x) - f(a) - \big(\nabla f(a) \,\big|\, x - a\big)}{\|x - a\|} \quad \forall x \in \Omega \setminus \{a\}$

y f será diferenciable en a si, y sólo si, $\lim_{x \to a} \varphi(x) = 0$

- La norma en la definición de φ se elige a voluntad, pero la norma euclídea suele ser la mejor elección
- A veces no es necesario saber si φ tiene límite en el punto a

Conclusión del estudio (I)

Para concretar, suponemos que $N = 2$ y que f es parcialmente derivable en Ω.

Fijado un punto $a \in \Omega \setminus U$, tenemos las tres opciones siguientes.

La opción más "optimista"

(c) Estudiar primero la continuidad de las derivadas parciales de f en a

Si una de ellas es continua en a, sabremos que f es diferenciable, luego también continua, en a

La opción más "pesimista"

(c) Estudiar primero la continuidad de f en a

Si f no es continua en a, tampoco podrá ser diferenciable y ninguna derivada parcial podrá ser continua en a

Conclusión del estudio (II)

La opción más "conservadora"

(c) Estudiar primero la diferenciabilidad de f en a

- Si f es diferenciable en a, también será continua en a

  Quedará estudiar la continuidad de las derivadas parciales

- Si f no es diferenciable en a, ninguna derivada parcial será continua en a

  Quedará estudiar la continuidad de f