Ejercicio 3.15: En cada uno de los siguientes casos, determinar los intervalos en los que la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo:

(i) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 10$,

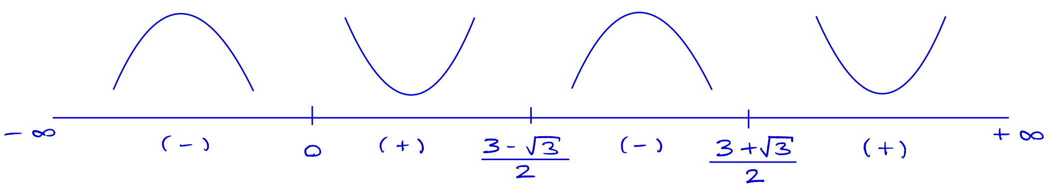
$$f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2$$

$$f''(x) = 20x^3 - 60x^2 + 30x = 0 = x(20x^2 - 60x + 30) \Longrightarrow \boxed{x_1 = 0}$$

$$20x^2 - 60x + 30 = 0 \Longleftrightarrow 2x^2 - 6x + 3 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36-24}}{4} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{4}$$

$$x_2 = \frac{6}{4} + \frac{\sqrt{12}}{4} = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{3}{4}} = \boxed{\frac{3+\sqrt{3}}{2}} \simeq 2'366$$

$$x_3 = \frac{6}{4} - \frac{\sqrt{12}}{4} = \boxed{\frac{3-\sqrt{3}}{2}} \simeq 0'634$$



$$f''(-1) = -20 - 60 - 30 = -110 < 0$$

$$f''\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{5}{2} = 2'5 > 0$$

$$f''(2) = -20 < 0 \quad ; \quad f''(4) = 440 > 0$$

Intervalos de concavidad de f:

$]-\infty, 0[$ cóncava hacia abajo.

$]0, \frac{3-\sqrt{3}}{2}[$ cóncava hacia arriba.

$]\frac{3+\sqrt{3}}{2}, 0[$ cóncava hacia abajo.

$]0, +\infty[$ cóncava hacia arriba.

(ii) $f(x) = \frac{x^2+3x+1}{x^2+1}$,

$$f'(x) = \frac{(2x+3)(x^2+1) - 2x(x^2+3x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{\cancel{2x^3}+\cancel{2x}+3x^2+3-\cancel{2x^3}-6x^2-\cancel{2x}}{x^4+1+2x^2} =$$

$$= \frac{-3x^2+3}{x^4+2x^2+1}$$

$$f''(x) = \frac{-6x(x^4+2x^2+1)-(4x^3+4x)(-3x^2+3)}{(x^2+1)^4} = \frac{-6x^5-12x^3-6x+12x^5-\cancel{12x^3}+\cancel{12x^3}-12x}{(x^2+1)^4} =$$

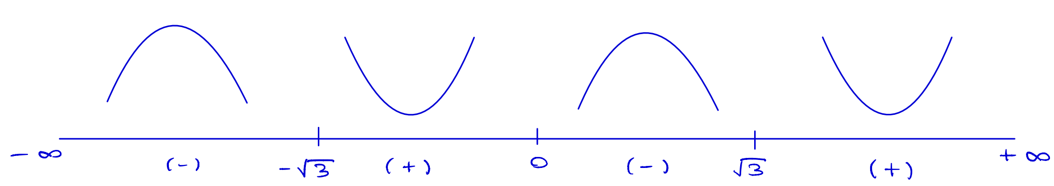
$$= \frac{6x^5-12x^3-18x}{(x^2+1)^4} = 0 \Longleftrightarrow 6x^5-12x^3-18x = 0 \Longleftrightarrow$$

$$= x^5-2x^3-3x = x(x^4-2x^2-3) = 0 \Longrightarrow \boxed{x_1 = 0}$$

$x^4-2x^2-3 = 0 \Longleftrightarrow z^2-2z-3=0$ (sea $z = x^2$) $\Longleftrightarrow z = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2\pm 4}{2}$; $z_1 = 3$, $z_2 = -1$

$z = 3 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{3}$: $\boxed{x_2 = \sqrt{3}}$, $\boxed{x_3 = -\sqrt{3}}$

$z = -1 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$



$f''(-2) = \frac{-12}{125} < 0$; $f''(-1) = \frac{3}{2} > 0$

$f''(1) = -\frac{3}{2} < 0$; $f''(2) = \frac{12}{125} > 0$

Intervalos de concavidad de f:

$]-\infty, -\sqrt{3}[$ cóncava hacia abajo.
$]-\sqrt{3}, 0[$ cóncava hacia arriba.
$]0, \sqrt{3}[$ cóncava hacia abajo.
$]\sqrt{3}, +\infty[$ cóncava hacia arriba.