Topología I

Doble grado en ingeniería informática y matemáticas
Convocatoria extraordinaria – 8 de febrero de 2021

1.- Sea X un conjunto y $A \subset X$ un subconjunto no vacío distinto de X. Se define la familia T de subconjuntos de X por la igualdad:

$$T = \big\{U \subset X : U \cap A = \emptyset\big\} \cup \{X\}.$$

a) Probar que T es una topología en X.
b) ¿Es (X, T) un espacio Hausdorff?
c) Sea $B = X \setminus A$. Identificar las topologías T_A, T_B inducidas en A, B, respectivamente, por la topología T.
d) Calcular las menores bases de entornos para cada punto de X.
e) ¿Verifica (X, T) los axiomas de numerabilidad AN-I y AN-II?
f) Calcular todos los subconjuntos conexos de (X, T).
g) Calcular todos los subconjuntos compactos de (X, T).

2.- Pregunta de teoría. Probar que el producto de dos espacios topológicos compactos (con la topología producto) es un espacio topológico compacto. Demostrar también los resultados previos imprescindibles.

3.- Estudiar de forma razonada las siguientes cuestiones:

a) Sea $f : (X, T) \to (Y, T')$ una aplicación continua e inyectiva entre espacios topológicos. ¿Es cierto que si A es discreto en (X, T), entonces $f(A)$ es discreto en (Y, T')? ¿Es cierto que si A' es discreto en (Y, T') y $f^{-1}(A') \neq \emptyset$, entonces $f^{-1}(A')$ es discreto en (X, T)?
b) Sea (X, d) un espacio métrico, $A \subset X$ un subconjunto no vacío, y sea $f : X \to \mathbb{R}$ la función $f(p) = d(p, A)$. Probar que A es denso si y sólo si f es idénticamente cero.
c) Demostrar que la aplicación $p : \mathbb{S}^n \to \mathbb{RP}^n$ es abierta y cerrada ($\mathbb{RP}^n$ es el cociente topológico de $(\mathbb{S}^n, T)$ por la relación de equivalencia $xRy \Leftrightarrow y = \pm x$. La topología T de $\mathbb{S}^n$ es la inducida como subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$).

Primera pregunta: 4 puntos (a,b,c,d,e: 0,50; f,g: 0,75 puntos)
Segunda y tercera preguntas: 3 puntos

Duración del examen: 3 horas

1. a) Para probar que T es una topología en X comprobamos las tres propiedades:

(i) $X \in T$ por hipótesis. Como $\emptyset \cap A = \emptyset$, también $\emptyset \in T$.

(ii) Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ una familia de subconjuntos abiertos de (X, T). Si alguno de ellos es igual a X, entonces $\bigcup_{i\in I} U_i = X \in T$. Si ninguno de ellos es igual a X, entonces $U_i \cap A = \emptyset$ para todo $i \in I$. Esto implica que:

$$\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right) \cap A = \bigcup_{i\in I} \left(U_i \cap A\right) = \emptyset.$$

Por tanto $\bigcup_{i\in I} U_i \in T$.

(iii) Sea $\{U_i\}_{i\in F}$ una familia de subconjuntos abiertos de (X, T), donde F es un conjunto finito. Si todos los conjuntos U_i son iguales a X, entonces $\bigcap_{i\in F} U_i = X \in T$. Si alguno de los conjuntos $\{U_i\}_{i\in F}$ es distinto de X, entonces existe $i_0 \in F$ tal que $U_{i_0} \cap A = \emptyset$, y

$$\left(\bigcap_{i\in F} U_i\right) \cap A = \bigcap_{i\in F} \left(U_i \cap A\right) = \emptyset.$$

Por tanto, $\bigcap_{i\in F} U_i \in T$.

b) El espacio (X, T) no es nunca Hausdorff. Si tomamos $a \in A$ y $b \in X \setminus A$, el único conjunto abierto que contiene al punto a es X. Por tanto, el único entorno de a es X, que siempre contiene a b.

c) Si $U \in T$, entonces $U \cap A = \emptyset$ (si $U \neq X$) o $U \cap A = A$ (si $U = X$). Por tanto, T_A es la topología trivial en A.

Si U es cualquier subconjunto de $B = X \setminus A$, entonces $U \cap A = \emptyset$. Por tanto, $U \in T$ y como $U \cap B = U$, el conjunto U pertenece a T_B. La topología T_B es entonces la topología discreta en B.

d) Si $a \in A$, el único subconjunto abierto que contiene a a es X. Por tanto, una base de entornos del punto a es $B_a = \{X\}$. Si $b \in X \setminus A$, entonces el conjunto $\{b\}$ es abierto ($\{b\} \cap A = \emptyset$). Por tanto, una base de entornos de b es $B_b = \{\{b\}\}$.

e) Por el apartado anterior, (X, T) es AN-I porque cada punto tiene una base de entornos formada por un único conjunto.

Veamos que (X, T) es AN-II si y sólo si B es numerable. Si (X, T) es AN-II, entonces (B, T_B) también es AN-II. Como T_B es la topología discreta en B, sabemos que B tiene que ser numerable. Recíprocamente, si B es numerable, una base con una cantidad numerable de conjuntos de T es:

$$\{\{b\} : b \in B\} \cup \{X\}.$$

f) Veamos que los únicos subconjuntos conexos de (X, T) son los que cortan a A y los puntos.

Sea $C \subset X$ un subconjunto de (X, T). Si $C \cap A \neq \emptyset$, como el único conjunto abierto que contiene a algún punto de A es X, el conjunto C debe ser conexo. Si $C \cap A = \emptyset$, entonces $C \subset X \setminus A = B$. Como B tiene la topología discreta, también C la tiene y, si C conexo, tiene que ser un punto.

g) Veamos que los únicos subconjuntos compactos de (X, T) son los que cortan a A y los subconjuntos finitos de $B = X \setminus A$.

Sea $K \subset X$ un subconjunto de (X,T). Si $K \cap A \neq \emptyset$ y $\{U_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento abierto de K por abiertos de T, entonces alguno de los conjuntos U_i es igual a X y ese conjunto forma un subrecubrimiento finito de K. Por tanto, K es compacto. Si $K \cap A = \emptyset$, entonces $K \subset B = X \setminus A$ y, como B tiene la topología discreta, si K es compacto tiene que ser finito.

3.- a) La primera afirmación es falsa. Tomamos $(X,T) = (\mathbb{R}, T_u)$, $(Y,T') = (\mathbb{R}, T_t)$, $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ y $A = \{0,1\} \subset \mathbb{R}$. Entonces A es un subconjunto discreto de $(\mathbb{R}, T_u)$, pero $A' = f(A) = A$ no es un subconjunto discreto de $(\mathbb{R}, T_t)$.

La segunda afirmación es verdadera. Sea $a \in A$ y $a' = f(a)$. Como A' tiene la topología discreta, existe $U' \in T'$ tal que $\{a'\} = A' \cap U'$. Como f es continua, $f^{-1}(U')$ pertenece a T. Además, por ser f inyectiva:

$$f^{-1}(U') \cap A = \{a\}.$$

Para probar esta igualdad, tomamos $a_1 \in f^{-1}(U') \cap A$. Entonces $f(a_1) \in U' \cap f(A) = U' \cap A' = \{a'\}$. Como f es inyectiva, $a_1 = a$. Esto demuestra que $f^{-1}(U') \cap A \subset \{a\}$ y la otra inclusión es trivial. Por tanto, $\{a\} \in T_A$ y, como $a \in A$ es arbitrario, T_A es la topología discreta en A.

b) Supongamos que A es denso ($\overline{A} = X$). Sabemos que la aplicación f es continua (de hecho es lipschitziana), y que $f(A) = \{0\}$ ya que si $p \in A$, entonces $d(p,A) = 0$. Por tanto

$$f(X) = f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} = \overline{\{0\}} = \{0\}.$$

Esto nos dice que la imagen de f es $\{0\}$ y, por tanto, f es idénticamente cero.

Si $f(p) = d(p,A) = 0$ para todo $p \in X$, veamos que A es denso. Sea $p \in X$, y sea $r > 0$. Si $B(p,r) \cap A = \emptyset$, entonces $d(p,q) \geqslant r$ para todo $q \in A$. Por tanto

$$d(p,A) = \text{ínf}\{d(p,q) : q \in A\} \geqslant r > 0.$$

Esto contradice nuestra hipótesis y demuestra que $B(p,r) \cap A \neq \emptyset$ para todo $r > 0$. Por tanto $p \in \overline{A}$. Como p es arbitrario, se tiene que $X \subset \overline{A}$.

c) Para probar ambas propiedades usaremos que la aplicación antípoda $A : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ definida por $A(x) = -x$ es un homeomorfismo de $\mathbb{S}^n$ (es biyectiva, continua y $A^{-1} = A$).

Para ver que p es abierta tomamos un conjunto abierto $U \subset \mathbb{S}^n$. Entonces $p(U)$ es abierto en $\mathbb{RP}^n$ si y sólo si $p^{-1}(p(U))$ es abierto de $\mathbb{S}^n$. Pero $p^{-1}(p(U)) = U \cup A(U)$, que es unión de dos conjuntos abiertos. Para probar que p es cerrada razonamos de forma análoga.