Geometría I: Tema 4
Espacio dual de un espacio vectorial

Juan de Dios Pérez

Índice

1. Introducción.

Como sabemos que un cuerpo conmutativo K es un espacio vectorial sobre sí mismo, si V es un espacio vectorial sobre K podemos considerar aplicaciones lineales $f : V \longrightarrow K$, a cada una de las cuales la llamaremos una forma lineal sobre V.
Al conjunto de todas las formas lineales $\{f : V \longrightarrow K \,/\, f \text{ es lineal}\}$ lo notaremos V^* y lo llamaremos el espacio vectorial dual de V. Es un espacio vectorial, pues por lo que hemos visto $V^* = \mathrm{Hom}_K(V, K)$ y, además, si $\dim_K(V) = n$, entonces $\dim_K(V^*) = n$.
Si $f : V \longrightarrow K$ es una forma lineal, podemos suponer en K la base $\{1\}$. Entonces dada $\mathcal{B}$ base de V, podemos considerar $\mathcal{M}(f; \{1\} \leftarrow \mathcal{B})$ que notaremos, simplemente, $\mathcal{M}(f; \mathcal{B})$.

2. Bases duales.

Sean $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de V y $\mathcal{B}^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ una base de V^*. Diremos que $\mathcal{B}^*$ es la base dual de $\mathcal{B}$ si $\forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$ se verifica que $\varphi_i(v_i) = 1$, pero $\forall\, j \in \{1, \ldots, n\}$, $j \neq i$, se tiene $\varphi_i(v_j) = 0$.

Proposición 1 (1ª propiedad de las bases duales)**.**
Si $\mathcal{B}^*$ es la base dual de $\mathcal{B}$, entonces $\forall\, \varphi \in V^*$, los elementos de su matriz asociada en la base $\mathcal{B}$ coinciden con sus coordenadas en la base $\mathcal{B}^*$.

Demostración. Para verlo, llamemos $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix} = \mathcal{M}(f; \mathcal{B})$. Entonces $a_i = \varphi(v_i)$ $\forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$. Por otra parte, si $\varphi = (b_1, b_2, \ldots, b_n)_{\mathcal{B}^*}$, tendremos que $\varphi = b_1\varphi_1 + b_2\varphi_2 + \cdots + b_n\varphi_n$ y así,

$$\varphi(v_i) = a_i = (b_1\varphi_1 + b_2\varphi_2 + \cdots + b_n\varphi_n)(v_i) = b_1\varphi_1(v_i) + \cdots + b_i\varphi_i(v_i) + \cdots + b_n\varphi_n(v_i) = b_i\varphi_i(v_i) = b_i \cdot 1 = b_i,$$

como queríamos. □

La pregunta que nos hacemos ahora es que si dada una base $\mathcal{B}$ de V, podemos calcular su base dual $\mathcal{B}^*$. Sabemos que si $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$, una forma lineal está completamente determinada conociendo sus imágenes de los vectores de $\mathcal{B}$. Así, $\forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$, $\exists_1\, \varphi_i \in V^*$ que verifica $\varphi_i(v_i) = 1$ y $\varphi_i(v_j) = 0$, $\forall\, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j$.
Tenemos así definidas n formas lineales sobre V, $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$. Queremos ver que, efectivamente, forman una base de V^*. Como sabemos que $\dim_K(V^*) = n$, bastará ver que tales formas lineales son linealmente independientes. Supongamos entonces que $\exists\, a_1, \ldots, a_n \in K$ tales que $a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \cdots + a_n\varphi_n = \varphi_0$ (esta es la forma lineal nula (neutro de V^* para la suma) dada por $\varphi_0(v) = 0$, $\forall\, v \in V$). Entonces, $\forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$, $\varphi_0(v_i) = 0 = (a_1\varphi_1 + \cdots + a_i\varphi_i + \cdots + a_n\varphi_n)(v_i) = a_1\varphi_1(v_i) + \cdots + a_i\varphi_i(v_i) + \cdots + a_n\varphi_n(v_i) = a_i \cdot 1 = a_i$, y hemos demostrado el siguiente resultado:

Proposición 2.
Para cada base $\mathcal{B}$ de un espacio vectorial V existe una base $\mathcal{B}^*$ de V^* que es dual de $\mathcal{B}$.

Ejemplo 1.

Consideremos en $\mathbb{R}^3$ la base $\mathcal{B} = \{(1,-1,1),(1,2,-1),(-1,1,0)\}$ y calculemos su base dual.

Consideremos $\mathcal{B}_U = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ la base usual de $\mathbb{R}^3$ y veamos como es su dual $\mathcal{B}_U^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$. Como $\varphi_i(e_j) = \delta_{ij}\ \forall i,j \in \{1,2,3\}$, dando un vector arbitrario $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$ se tiene

$$\varphi_1(x_1,x_2,x_3) = \varphi_1(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = x_1,$$

$$\varphi_2(x_1,x_2,x_3) = \varphi_2(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = x_2,$$

$$\varphi_3(x_1,x_2,x_3) = \varphi_3(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = x_3.$$

Llamemos ahora $\mathcal{B}^* = \{\psi_1, \psi_2, \psi_3\}$; $\psi_1 = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + a_3\varphi_3$, y como $\mathcal{B}^*$ ha de ser la base dual de $\mathcal{B}$, tendremos que

$$\psi_1(1,-1,1) = 1 = (a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + a_3\varphi_3)(1,-1,1) = a_1 - a_2 + a_3$$

$$\psi_1(1,2,-1) = 0 = (a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + a_3\varphi_3)(1,2,-1) = a_1 + 2a_2 - a_3$$

$$\psi_1(-1,1,0) = 0 = (a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + a_3\varphi_3)(-1,1,0) = -a_1 + a_2$$

De manera que cuando conozcamos a_1, a_2 y a_3 tendremos determinada ψ_1, así que, en definitiva, hemos de resolver el siguiente sistema de Cramer:

$$\begin{cases} a_1 & -a_2 & +a_3 & = 1 \\ a_1 & +2a_2 & -a_3 & = 0 \\ -a_1 & +a_2 & & = 0 \end{cases}$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3$, tendremos:

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{3} = \frac{1}{3}, \quad a_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}}{3} = \frac{1}{3}, \quad a_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{3} = 1.$$

Así, $\psi_1 = \frac{1}{3}\varphi_1 + \frac{1}{3}\varphi_2 + \varphi_3$ lo que nos dice que $\forall (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$ se tiene $\psi_1(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + x_3$.

Si suponemos ahora que $\psi_2 = b_1\varphi_1 + b_2\varphi_2 + b_3\varphi_3$, tendremos, repitiendo el proceso, que

$$\psi_2(v_1) = 0 = (b_1\varphi_1 + b_2\varphi_2 + b_3\varphi_3)(1,-1,1) = b_1 - b_2 + b_3$$

$$\psi_2(v_2) = 1 = (b_1\varphi_1 + b_2\varphi_2 + b_3\varphi_3)(1,2,-1) = b_1 + 2b_2 - b_3$$

$$\psi_2(v_3) = 0 = (b_1\varphi_1 + b_2\varphi_2 + b_3\varphi_3)(-1,1,0) = -b_1 + b_2$$

Su solución es ahora:

$$b_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{3} = \frac{1}{3}, \quad b_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{3} = \frac{1}{3}, \quad b_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{3} = 0.$$

Luego $\psi_2 = \frac{1}{3}\varphi_1 + \frac{1}{3}\varphi_2$, lo que nos dice que $\forall\,(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\psi_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2$.

Y si $\psi_3 = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + c_3\varphi_3$, análogamente nos queda el sistema

$$\begin{cases} c_1 & -c_2 & +c_3 & = 0 \\ c_1 & +2c_2 & -c_3 & = 0 \\ -c_1 & +c_2 & & = 1 \end{cases}$$

cuya solución viene dada por:

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{3} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{3} = -\frac{1}{3}, \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{2}{3}, \quad c_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{3} = 1.$$

Ahora $\psi_3 = -\frac{1}{3}\varphi_1 + \frac{2}{3}\varphi_2 + \varphi_3$, con lo que $\psi_3(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + x_3$.

Lo importante aquí, es que hemos fijado las bases $\mathcal{B}_U$ de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B}_U^*$ de $(\mathbb{R}^3)^*$ de manera que hemos expresado en $\mathcal{B}_U$ los vectores de $\mathcal{B}$ y en $\mathcal{B}_U^*$ las formas lineales de $\mathcal{B}^*$. Lo que hemos hecho, en realidad es imponer que

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Así, concluimos que las coordenadas en $\mathcal{B}_U^*$ de las formas de $\mathcal{B}^*$ vienen dadas por las filas de A^{-1}, siendo A la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores de $\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}_U$.

Este procedimiento es general, y nos sirve también para resolver el problema inverso: dada una base de V^* calcular la base de V de la que es dual, como veremos en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.

Sean ψ_1, ψ_2, ψ_3 formas lineales sobre $\mathbb{R}^3$ dadas por:

$$\psi_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2 + 2x_3$$
$$\psi_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2$$
$$\psi_3(x_1, x_2, x_3) = x_1$$

Veamos que $\{\psi_1, \psi_2, \psi_3\} = \overline{\mathcal{B}}$ nos da una base de $\mathbb{R}^3$. Si de nuevo consideramos $\mathcal{B}_U$ y $\mathcal{B}_U^*$, las coordenadas en $\mathcal{B}_U^*$ de ψ_1 son $(1, 2, 2)$, las de ψ_2 son $(1, -1, 0)$ y las de ψ_3 son $(1, 0, 0)$. Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, son linealmente independientes y forman una base de $(\mathbb{R}^3)^*$. Si queremos calcular la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $\overline{\mathcal{B}} = \mathcal{B}^*$, $\mathcal{B} = \{(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3), (z_1, z_2, z_3)\}$ ha de verificar que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = I_3.$$

Luego los vectores de $\mathcal{B}$ son las columnas de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$. Así,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{-3}{2} \end{pmatrix}.$$

Así, $\mathcal{B} = \left\{ \left(0, 0, \frac{1}{2}\right), (0, -1, 1), \left(1, 1, \frac{-3}{2}\right) \right\}$.

Proposición 3 (2ª propiedad de las bases duales)**.**

Si $\mathcal{B}^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ es la base dual de $\mathcal{B}$, entonces si para $x \in V$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)_{\mathcal{B}}$, tenemos que $x_i = \varphi_i(x)$, $\forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$, ya que si $x = x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n$, $\varphi_i(x) = x_1\varphi_i(v_1) + \cdots + x_i\varphi_i(v_i) + \cdots + x_n\varphi_i(v_n) = x_i \cdot 1 = x_i$.

3. Teorema de Reflexividad.

Supongamos que V es un espacio vectorial sobre el cuerpo K con $\dim_K(V) = n$. Sabemos entonces que $\dim_K(V^*) = n$ y, análogamente, si consideramos el espacio bidual de V, $(V^*)^*$, también tendrá dimensión n. Por tanto, V y $(V^*)^*$ serán isomorfos. Como hemos visto, en general, un isomorfismo entre V y $(V^*)^*$ dependerá de bases que escojamos en V y en su bidual. El Teorema de Reflexividad, sin embargo, nos va a dar un isomorfismo intrínseco entre ambos espacios, que no dependerá de bases de los espacios.

Teorema 1 (Teorema de Reflexividad)**.**

La aplicación $\Phi : V \longrightarrow (V^*)^*$, dada por $\Phi(v) = \Phi_v : V^* \longrightarrow K$ tal que $\forall\, \varphi \in V^*$, $\Phi_v(\varphi) = \varphi(v)$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Demostración. En primer lugar, hemos de ver que Φ está bien definida; es decir, que $\forall\, v \in V$, $\Phi_v : V^* \longrightarrow K$ es lineal. Para ello, sean $a, b \in K$ y $\varphi_1, \varphi_2 \in V^*$. $\Phi_v(a\varphi_1 + b\varphi_2) = (a\varphi_1 + b\varphi_2)(v) = a\varphi_1(v) + b\varphi_2(v) = a\Phi_v(\varphi_1) + b\Phi_v(\varphi_2)$ y, por tanto, $\Phi : V \longrightarrow (V^*)^*$ es una aplicación bien definida.

A continuación, veamos que Φ es lineal, es decir, que $\forall\, c, d \in K$, $\forall\, v_1, v_2 \in V$ se tiene $\Phi(cv_1 + dv_2) = c\Phi(v_1) + d\Phi(v_2)$ o, análogamente, que $\Phi_{cv_1+dv_2} = c\Phi_{v_1} + d\Phi_{v_2}$. Tomemos $\varphi \in V^*$; entonces $\Phi_{cv_1+dv_2}(\varphi) = \varphi(cv_1 + dv_2) = c\varphi(v_1) + d\varphi(v_2) = c\Phi_{v_1}(\varphi) + d\Phi_{v_2}(\varphi) = (c\Phi_{v_1} + d\Phi_{v_2})(\varphi)$, lo que nos proporciona la igualdad deseada.

Finalmente, hemos de ver que Φ es un isomorfismo. Como sabemos que ambos espacios vectoriales tienen la misma dimensión, bastará con ver que Φ es un monomorfismo: sea entonces $v \in \mathrm{Ker}(\Phi)$. Esto significa que $\Phi_v : V^* \longrightarrow K$ es la aplicación lineal cero. Entonces $\forall\, \varphi \in V^*$, $\Phi_v(\varphi) = \varphi(v) = 0$. Veamos que si $v \in V$ verifica que $\forall\, \varphi \in V^*$, $\varphi(v) = 0$, necesariamente $v = 0$: si no fuera asi, $v \neq 0$ y podemos añadir vectores para que $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ nos dé una base de V. Sea entonces $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\} = \mathcal{B}^*$ su base dual. Claramente $\varphi_1(v) = 1 \neq 0$, en contra de nuestra hipótesis. Así que si $\Phi_v = 0$ entonces $v = 0$ y Φ es, efectivamente, un isomorfismo. $\square$

El Teorema de Reflexividad nos permite identificar V y $(V^*)^*$ como espacios vectoriales haciendo que $v \equiv \Phi_v$. A partir de ahora, consideraremos V y $(V^*)^*$ como el mismo espacio vectorial.

4. Anulador de un subespacio.

Definición 1.

Sea $V(K)$ un espacio vectorial y S un subconjunto de V. Definimos el anulador de S como el conjunto $an(S) = \{\varphi \in V^* \,/\, \phi(v) = 0 \; \forall\, v \in S\}$.

Tenemos las siguientes propiedades para el anulador:

1. $\text{an}(S)$ es un subespacio vectorial de V^*.

2. $\text{an}(S) = \text{an}(\mathcal{L}(S))$.

Demostración. 1. Para demostrar esta propiedad, sean $\varphi_1, \varphi_2 \in \text{an}(S)$ y sean $a, b \in K$. Consideremos $a\varphi_1 + b\varphi_2$ y veamos que pertenece a $\text{an}(S)$. Si tomamos $v \in S$, $(a\varphi_1 + b\varphi_2)(v) = a\varphi_1(v) + b\varphi_2(v) = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0$, pues $\varphi_1(v) = \varphi_2(v) = 0$, ya que $\varphi_1, \varphi_2 \in \text{an}(S)$.

2. Para demostrar esta propiedad, como $S \subseteq \mathcal{L}(S)$, si φ anula a todos los vectores de $\mathcal{L}(S)$, en particular tiene que anular a todos los de S, luego $\text{an}(\mathcal{L}(S)) \subseteq \text{an}(S)$. En el otro sentido, sea $\varphi \in \text{an}(S)$. Cada vector de $\mathcal{L}(S)$ será de la forma $a_1v_1 + \cdots + a_kv_k$ con $v_1, \ldots, v_k \in S$. Entonces $\varphi(a_1v_1 + \cdots + a_kv_k) = a_1\varphi(v_1) + \cdots + a_k\varphi(v_k) = a_1 \cdot 0 + \cdots + a_k \cdot 0 = 0$. Por tanto, $\text{an}(S) \subseteq \text{an}(\mathcal{L}(S))$ y tendremos la igualdad.

$\square$

Si U es un subespacio vectorial de V, la 2ª propiedad nos permite calcular el $\text{an}(U)$ calculando simplemente el anulador de una base de U.

Ejemplo 3.

Consideremos en $\mathbb{R}^4$ el subespacio vectorial $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_3) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 + x_3 = 0, x_2 + 2x_4 = 0\}$. Todos los vectores de $\mathbb{R}^4$ los referiremos a $\mathbb{B}_U^4$ y todas las formas lineales de $(\mathbb{R}^4)^*$ a la base $(\mathcal{B}_U^4)^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$. (Recordemos que $\forall\, i \in \{1, 2, 3, 4\}$, $\varphi_i(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_i$).

Calculemos, en primer lugar, una base de U. Unas ecuaciones paramétricas de U serían

$$\begin{cases} x_1 = & \lambda \\ x_3 = & -\lambda \\ x_4 = & \quad +\mu \\ x_2 = & \quad -2\mu \end{cases}$$

Así,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lo que nos da que $\{(1,0,-1,0),(0,-2,0,1)\}$ es una base de U. Una forma arbitraria $\psi \in V^*$ será $\psi = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + a_3\varphi_3 + a_4\varphi_4$. Para que $\psi \in \mathrm{an}(U) = \mathrm{an}(\mathcal{L}(\{(1,0,-1,0),(0,-2,0,1)\}))$ tendremos que $\psi(1,0,-1,0) = \psi(0,-2,0,1) = 0$.

Entonces $(a_1\varphi_1+a_2\varphi_2+a_3\varphi_3+a_4\varphi_4)(1,0,-1,0) = a_1 - a_3 = 0$ y $(a_1\varphi_1+a_2\varphi_2+a_3\varphi_3+a_4\varphi_4)(0,-2,0,1) = -2a_2 + a_4 = 0$. Luego unas ecuaciones implícitas de $\mathrm{an}(U)$ respecto de $(\mathcal{B}_U^4)^*$ son

$$\begin{cases} a_1 - a_3 = 0 \\ -2a_2 + a_4 = 0 \end{cases}$$

Una base de $\mathrm{an}(U)$ vendrá dada por las formas $\psi_1 = \varphi_1 + \varphi_3$, $\psi_2 = \varphi_2 + 2\varphi_4$. Esto es, $\mathrm{an}(U) = \mathcal{L}(\{\varphi_1+\varphi_3, \varphi_2+2\varphi_4\})$. Donde $(\varphi_1+\varphi_3)(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1 + x_3$ y $(\varphi_2+2\varphi_4)(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_2 + 2x_4$.

En general, si suponemos que $\dim_K(V) = n$ y U es un subespacio vectorial de V con dimensión r, siendo $\{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ una base de V, procediendo como en el ejemplo, obtendremos r ecuaciones implícitas para $\mathrm{an}(U)$. Esto nos dice que

$$\dim_K(\mathrm{an}(U)) = \dim_K(V) - \dim_K(U).$$

5. Aplicación lineal traspuesta.

Sean $V(K)$ y $V'(K)$ dos espacios vectoriales y $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal. Sean $\mathcal{B}$ una base de V y $\mathcal{B}'$ una base de V' de modo que $\mathcal{M}(f;\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}) = A$. Consideremos los espacios duales V^*, con base $\mathcal{B}^*$ y $(V')^*$ con base $(\mathcal{B}')^*$. Veamos cómo podemos definir una aplicación lineal de $(V')^*$ en V^*. Para ello, si $\varphi' \in (V')^*$, aparece el siguiente diagrama:

$$V \xrightarrow{f} V' \xrightarrow{\varphi'} K$$

de manera que $\varphi' \circ f$ es una aplicación lineal de V en K, es decir, $\forall\, \varphi' \in (V')^*$, $\varphi' \circ f \in V^*$.

Definimos entonces $f^t : (V')^* \longrightarrow V^*$ mediante $f^t(\varphi') = \varphi` \circ f$, $\forall\, \varphi' \in (V')^*$.

Tenemos entonces las siguientes propiedades:

1. f^t es una aplicación lineal.
2. $\mathcal{M}(f^t;\mathcal{B}^* \leftarrow (\mathcal{B}')^*) = A^t$.

Demostración. 1. Vamos a demostrar la primera propiedad: sean $\varphi_1', \varphi_2' \in (V')^*$, $a, b \in K$. Entonces $f^t(a\varphi_1' + b\varphi_2') = (a\varphi_1' + b\varphi_2') \circ f = a(\varphi_1' \circ f) + b(\varphi_2' \circ f) = af^t(\varphi_1') + bf^t(\varphi_2')$, ya que $\forall\, v \in V$, $((a\varphi_1' + b\varphi_2') \circ f)(v) = (a\varphi_1' + b\varphi_2')(f(v)) = a\varphi_1'(f(v)) + b\varphi_2'(f(v)) = a(\varphi_1'(f(v))) + b(\varphi_2'(f(v))) = a(\varphi_1' \circ f)(v) + b(\varphi_2' \circ f)(v)$.

2. Para demostrar 2, supongamos que $(\mathcal{B}')^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$. Sea $\varphi_i,\ i \in \{1, \dots, n\}$, $\mathcal{M}(\varphi_i;\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} \varphi_i(v_1') & \dots & \varphi_i(v_n') \end{pmatrix}$, suponiendo que $\mathcal{B}' = \{v_1', \dots, v_n'\}$. Luego

$$\mathcal{M}(\varphi_i;\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\mathcal{M}(\varphi_i \circ f; \mathcal{B}) = \mathcal{M}(\varphi_i; \mathcal{B}')\mathcal{M}(f; \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \overset{i)}{1} & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{im} \end{pmatrix}.$$

Esta será la i-ésima columna de $\mathcal{M}(f^t; \mathcal{B}^* \leftarrow (\mathcal{B}')^*)$ con lo cual, esta matriz es A^t.

$\square$

La aplicación f^t se llama la aplicación lineal traspuesta de f.