GEOMETRÍA III
(Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas)

Primer Control (18/11/2021)

1. *Consideremos un espacio afín real* $(\mathcal{A}, \overrightarrow{\mathcal{A}}, \overrightarrow{\ })$ *con* $\dim \mathcal{A} = 3$*, dos puntos distintos* $p, q \in \mathcal{A}$ *y un plano* T *en* $\mathcal{A}$ *tal que* $p, q \notin T$*. Probar que los dos enunciados siguientes son equivalentes.*

   (a) $\mathrm{m}_{pq} \in T$.

   (b) *Existe una única simetría afín* $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ *tal que* $f(p) = q$ *y* $f\big|_T = \mathrm{Id}_T$.

   Encontrar la expresión matricial en el sistema de referencia usual $\mathcal{R}_0$ *de* $\mathbb{R}^3$ *de la única simetría afín* $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *que fija todos los puntos del plano* $T = (0, -1, 0) + L\{(1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$ *y satisface* $f(-1, 1, 0) = (3, -1, 2)$*. Dada la recta* S *con ecuaciones implícitas*

$$x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 2x_1 + x_2 + 1 = 0$$

   en $\mathcal{R}_0$*, calcular además las ecuaciones implicitas de* $f(S)$*.*

Respuesta:

(a) $\Rightarrow$ (b) Como $p, q \notin T$, el plano T y la recta $L = p \vee q$ son subespacios afines complementarios. Tiene sentido considerar la proyección y simetría afines respecto de T en la dirección de la recta vectorial $\vec{L} = L\{\overrightarrow{pq}\}$:

$$\pi_{T,L}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad \sigma_{T,L}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}.$$

De nuestras hipótesis $T \cap L = \{\mathrm{m}_{pq}\}$. Como $p, q \in L$ y por definición $\pi_{T,L}(p) = \pi_{T,L}(q) = T \cap L$, concluímos que

$$\pi_{T,L}(p) = \pi_{T,L}(q) = \mathrm{m}_{pq}.$$

Pero también por definición $\mathrm{m}_{p\sigma_{T,L}(p)} = \pi_{T,L}(p)$, esto es,

$$\mathrm{m}_{p\sigma_{T,L}(p)} = \mathrm{m}_{pq}.$$

Teniendo en cuenta que $\mathrm{m}_{p\sigma_{T,L}(p)} = p + \frac{1}{2}\overrightarrow{p\sigma_{T,L}(p)}$ y $\mathrm{m}_{pq} = p + \frac{1}{2}\overrightarrow{pq}$, inferimos que $\overrightarrow{p\sigma_{T,L}(p)} = \overrightarrow{pq}$, esto es $\sigma_{T,L}(p) = q$, y de aquí que la simetría afín $f = \sigma_{T,L}$ realice lo deseado.

Para comprobar la unicidad, supongamos que $\sigma\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ es otra simetría afín en las mismas condiciones. Como f y σ llevan p en q y viceversa, la aplicación afín $\sigma \circ f$ fija punto a punto el conjunto $T \cup \{p, q\}$ y por tanto fija los puntos de un sistema de referencia de $\mathcal{A}$ (ya que $p, q \notin T$ y $\dim \mathcal{A} = 3$). De aquí que $\sigma \circ f = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$, y por el mismo razonamiento $f \circ \sigma = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$, lo que prueba que $f = \sigma^{-1} = \sigma$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Si $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ es simetría afín, $f(p) = q$ y $f\big|_T = \mathrm{Id}_T$, deducimos que $T \subseteq \mathcal{P}_f$, y por tanto $\mathcal{P}_f = T$ ya que el conjunto de puntos fijos de una simetría afín distinta de la identidad es una recta o un plano (el primer caso lógicamente se descarta). Como f es una simetría afín respecto al plano T y $p \neq q = f(p)$, inferimos que la dirección de simetrización de f es necesariamente la de la recta afín $L = p \vee q = p \vee f(p)$. Por tanto f ha de ser la simetría afín $\sigma_{T,L}$, y en particular de la definición de $\sigma_{T,L}$

$$\mathrm{m}_{pq} = \mathrm{m}_{pf(p)} = \mathrm{m}_{p\sigma_{T,L}(p)} = \pi_{T,L}(p) = \pi_{T,L}(q) \in T$$

como queríamos demostrar.

Para la segunda parte del ejercicio, comenzaremos por notar que el punto medio m del segmento $[(-1,1,0),(3,-1,2)]$, a saber $\mathrm{m}=(1,0,1)$, satisface

$$(1,0,1)=(0,-1,0)+\big((1,0,0)+(0,1,1)\big)\in(0,-1,0)+L\{(1,0,0),(0,1,1)\}=T.$$

La parte primera del ejercicio garantiza que existe una simetría afín f realizando lo pedido. Para determinarla, llamemos

$$L=(-1,1,0)\vee(3,-1,2).$$

Por simplicidad llamemos $\pi\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ a la proyección afín sobre T en la dirección de L. Si por un momento escribimos $\pi(x_1,x_2,x_3)=(a,b,c)$, sabemos que necesariamente

- $(a,b,c)\in T=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\colon x_3-x_2=1\}$.
- $\overrightarrow{(a,b,c)(x_1,x_2,x_3)}=(x_1-a,x_2-b,x_3-c)\in\vec{L}=L(\{(2,-1,1)\})=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\colon x_2+x_3=x_1-2x_3=0\}$.

Por tanto

$$c-b-1=-b-c+x_2+x_3=2c-a-2x_3+x_1=0,$$

esto es

$$a=1+x_1+x_2-x_3,\ b=\frac{1}{2}(-1+x_2+x_3),\ c=\frac{1}{2}(1+x_2+x_3).$$

Queda

$$\pi\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\quad \pi(x_1,x_2,x_3)=\big(1+x_1+x_2-x_3,\frac{1}{2}(-1+x_2+x_3),\frac{1}{2}(1+x_2+x_3)\big),$$

y como la proyección sobre T en la dirección de L obedece a la fórmula $\sigma=2\pi-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$, obtenemos que las expresiones de σ en $\mathcal{R}_0$ son

$$\sigma\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\quad \sigma(x_1,x_2,x_3)=(2+x_1+2x_2-2x_3,-1+x_3,1+x_2).$$

En forma matricial,

$$M(\sigma,\mathcal{R}_0)=\left(\begin{array}{c|ccc}1&0&0&0\\ \hline 2&1&2&-2\\ -1&0&0&1\\ 1&0&1&0\end{array}\right).$$

Para acabar el ejercicio consideremos la recta S con ecuaciones implícitas $x_1+x_2+x_3-1=2x_1+x_2+1=0$, o equivalentemente $-x_1+x_3-2=2x_1+x_2+1=0$. Deducimos que

$$S=(0,-1,2)+L(\{(1,-2,1)\}),$$

y por tanto

$$\sigma(S)=\sigma(0,-1,2)+L(\{\vec{\sigma}(1,-2,1)\})=(-4,1,0)+L(\{(-5,1,-2)\}).$$

Pasando a implícitas en la referencia $\mathcal{R}_0$,

$$\sigma(S)=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\colon\ -1+x_1+5x_2=2-2x_2-x_3=0\}.$$

2. *Consideremos la transformación $f\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ dada por la expresión matricial*

$$\left(\begin{array}{c}1\\ \hline f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|ccc}1&0&0&0\\ \hline -4&\frac{4}{9}&\frac{8}{9}&-\frac{1}{9}\\ 4&-\frac{4}{9}&\frac{1}{9}&-\frac{8}{9}\\ -2&-\frac{7}{9}&\frac{4}{9}&\frac{4}{9}\end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c}1\\ \hline x_1\\x_2\\x_3\end{array}\right).$$

Probar que f es un movimiento rígido del espacio afín euclidiano usual $\mathbb{R}^3$ y calcular sus elementos geométricos.

Respuesta:

Llamemos $\mathcal{R}_0 = \{(0,0,0), B_0\}$ al sistema de referencia rectangular usual en $(\mathbb{R}^3, \langle\, ,\, \rangle)$.

La aplicación lineal asociada $\vec{f}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tiene la expresión analítica en la base ortonormal usual B_0

$$\vec{f}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} \\ -\frac{7}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Como

$$M(\vec{f}, B_0) = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} \\ -\frac{7}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix},$$

un cálculo directo nos da $M(\vec{f}, B_0)^{\mathrm{t}} \cdot M(\vec{f}, B_0) = \mathrm{I}_3$. Por tanto $M(\vec{f}, B_0) \in O_3(\mathbb{R})$, y como $\mathcal{R}_0$ es una referencia rectangular, f es un movimiento rígido. Al ser $\det\big(M(\vec{f}, B_0)\big) = 1$, el movimiento f es positivo.

Estudiemos su conjunto de puntos fijos, para lo cual resolveremos la ecuación $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)$ en $\mathbb{R}^3$. Queda el sistema

$$\big(-4 - 5x_1/9 + 8x_2/9 - x_3/9, 4 - 4x_1/9 - 8x_2/9 - 8x_3/9, -2 - 7x_1/9 + 4x_2/9 - 5x_3/9\big) = (0,0,0),$$

que nos da como solución

$$\mathcal{P}_f = \{(\lambda, 9/2 + \lambda/2, -\lambda) \colon \lambda \in \mathbb{R}\} = (0, 9/2, 0) + L(\{(1, 1/2, -1)\}).$$

Se trata de una recta afín de puntos fijos, de donde por la clasificación de los movimientos rígidos f ha de ser un giro con eje $L := \mathcal{P}_f$. El ángulo no orientado $\alpha \in [0, \pi]$ de f obedece a la fórmula

$$1 + 2\cos(\alpha) = \mathrm{Traza}(\vec{f}) = 1,$$

de donde $\cos(\alpha) = 0$ y $\alpha = \pi/2$.

Si deseamos calcular el ángulo orientado de f respecto de alguna orientación previamente fijada en $\overrightarrow{L}^{\perp}$, elijamos primero una base ortonormal de $\vec{L}^{\perp}$ que nos proporcione esa orientación. Por ejemplo $B = \{w_1, w_2\}$, con

$$w_1 = (1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5}, 0),\ w_2 = (4/(3\sqrt{5}), 2/(3\sqrt{5}), \sqrt{5}/3).$$

A continuación observemos que $f(w_1) = -w_2, f(w_2) = w_1$, y por tanto el giro $\vec{f}\big|_{\vec{L}^{\perp}} \colon \vec{L}^{\perp} \to \vec{L}^{\perp}$ tiene por matriz asociada en la base B

$$M(\vec{f}\big|_{\vec{L}^{\perp}}, B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $\theta \in]0, 2\pi[$ es el ángulo orientado de $\vec{f}\big|_{\vec{L}^{\perp}}$ respecto de la orientación inducida por B se tiene que

$$M(\vec{f}\big|_{\vec{L}^{\perp}}, B) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

de donde comparando las dos expresiones $\theta = -\pi/2$.

3. *Sea $T = \{a, b, c\}$ un triángulo en un plano euclidiano $(\mathcal{A}, \overrightarrow{\mathcal{A}}, \vec{\ }, \langle\, ,\, \rangle)$ con ángulos $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ en los vértices a, b, c respectivamente. Probar que son equivalentes:*

a) $\mathrm{d}(a, b) = \mathrm{d}(a, c)$.

b) $\hat{B} = \hat{C}$.

c) *La mediatriz R_a y la mediana M_a del vértice a son coincidentes.*

Como consecuencia, probar que si $\mathrm{d}(a,b) = \mathrm{d}(a,c) = d(b,c)$ (esto es, T es equilátero) entonces el vértice a y el baricentro B de T determinan unívocamente los vertices b y c.

Respuesta:

Por definición

$$\cos(\hat{A}) = \frac{\langle \overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac} \rangle}{\|\overrightarrow{ab}\| \|\overrightarrow{ac}\|}, \quad \cos(\hat{B}) = \frac{\langle \overrightarrow{bc}, \overrightarrow{ba} \rangle}{\|\overrightarrow{bc}\| \|\overrightarrow{ba}\|}, \quad \cos(\hat{C}) = \frac{\langle \overrightarrow{ca}, \overrightarrow{cb} \rangle}{\|\overrightarrow{ca}\| \|\overrightarrow{cb}\|}.$$

Como $\hat{B}, \hat{C} \in]0, \pi[$,

$$\hat{B} = \hat{C} \Leftrightarrow \cos(\hat{B}) = \cos(\hat{C}) \Leftrightarrow \langle \overrightarrow{bc}, \overrightarrow{ba} \rangle \|\overrightarrow{ca}\| \|\overrightarrow{cb}\| = \langle \overrightarrow{ca}, \overrightarrow{cb} \rangle \|\overrightarrow{bc}\| \|\overrightarrow{ba}\| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \langle \overrightarrow{ba} + \overrightarrow{ac}, \overrightarrow{ba} \rangle \|\overrightarrow{ca}\| = \langle \overrightarrow{ca}, \overrightarrow{ca} + \overrightarrow{ab} \rangle \|\overrightarrow{ba}\| \Leftrightarrow (\|\overrightarrow{ba}\|^2 + \langle \overrightarrow{ac}, \overrightarrow{ba} \rangle) \|\overrightarrow{ca}\| = (\|\overrightarrow{ca}\|^2 + \langle \overrightarrow{ca}, \overrightarrow{ab} \rangle) \|\overrightarrow{ba}\| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{ba}\| \|\overrightarrow{ca}\| (\|\overrightarrow{ba}\| - \|\overrightarrow{ca}\|) = \langle \overrightarrow{ca}, \overrightarrow{ab} \rangle (\|\overrightarrow{ba}\| - \|\overrightarrow{ca}\|) \Leftrightarrow (\|\overrightarrow{ba}\| - \|\overrightarrow{ca}\|)(\|\overrightarrow{ba}\| \|\overrightarrow{ca}\| - \langle \overrightarrow{ca}, \overrightarrow{ab} \rangle) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\|\overrightarrow{ba}\| - \|\overrightarrow{ca}\|)(\|\overrightarrow{ba}\| \|\overrightarrow{ca}\| + \langle \overrightarrow{ac}, \overrightarrow{ab} \rangle) = 0 \Leftrightarrow (\|\overrightarrow{ba}\| - \|\overrightarrow{ca}\|) \|\overrightarrow{ba}\| \|\overrightarrow{ca}\| \big(1 + \cos(\hat{A})\big) = 0 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{ba}\| = \|\overrightarrow{ca}\|.$$

En definitiva $\hat{B} = \hat{C} \Leftrightarrow \mathrm{d}(a,b) = \mathrm{d}(a,c)$, con lo que (a) $\Leftrightarrow$ (b).

Recordemos que $M_a = a \vee \mathrm{m}_{bc}$ y $R_a = \mathrm{m}_{bc} + L(\{\overrightarrow{bc}\})^\perp$. La propiedad geométrica que caracterizan a los puntos de la mediatriz R_a es que equidistan de b y c, por lo que

$$d(a,b) = d(a,c) \Leftrightarrow a \in R_a \Leftrightarrow a \in M_a \cap R_a \Leftrightarrow M_a = R_a,$$

donde para la penúltima equivalencia hemos tenido en cuenta que siempre $a \in M_a$ y para la última que $a \neq \mathrm{m}_{bc} \in M_a \cap R_a$. Esto prueba que (a) $\Leftrightarrow$ (c).

Para la última parte del ejercicio, supongamos que un triángulo T es equilátero y conocemos el vértice a y el baricentro B. Hemos de determinar los vértices b, c restantes. Por la prueba del Teorema de Euler, la homotecia $h = h_{B,-1/2}$ aplica a en m_{bc}, esto es, el punto medio del segmento $[b,c]$ está determinado por a y B con la fórmula:

$$\mathrm{m}_{bc} = B + \big(-\frac{1}{2}\overrightarrow{Ba}\big).$$

Por la primera parte del ejercicio $M_a = R_a$, y en particular $\overrightarrow{R}_a = \overrightarrow{M}_a = L(\{\overrightarrow{aB}\})$. Como la recta $b \vee c$ es perpendicular a R_a y contiene a m_{bc}, deducimos que

$$b \vee c = \mathrm{m}_{bc} + L(\{\overrightarrow{aB}\})^\perp = \big(B + \big(-\frac{1}{2}\overrightarrow{Ba}\big)\big) + L(\{\overrightarrow{aB}\})^\perp,$$

y por tanto la recta $b \vee c$ está también determinada por a y B. Por último, si llamamos

$$r = \mathrm{d}(a,b) = \mathrm{d}(a,c) = d(b,c) = 2\mathrm{d}(b, \mathrm{m}_{bc}) = 2\mathrm{d}(c, \mathrm{m}_{bc}),$$

como los triángulos $\{a, \mathrm{m}_{bc}, b\}$, $\{a, \mathrm{m}_{bc}, c\}$ son rectángulos con ángulo recto en el vértice m_{bc}, el Teorema de Pitágoras nos dice que $d(a, \mathrm{m}_{bc})^2 + \frac{1}{4}r^2 = r^2$, y de aquí que el número real

$$r = \frac{2}{\sqrt{3}} d(a, \mathrm{m}_{bc}) = \frac{2}{\sqrt{3}} \|\overrightarrow{a\mathrm{m}_{bc}}\| = \frac{2}{\sqrt{3}} \|\overrightarrow{a\big(B + \big(-\frac{1}{2}\overrightarrow{Ba}\big)\big)}\| = \frac{2}{\sqrt{3}} \|\frac{3}{2}\overrightarrow{aB}\| = \sqrt{3}\|\overrightarrow{aB}\|$$

sea función de a, B. En consecuencia, si elegimos un vector $w \in L(\{\overrightarrow{aB}\})^\perp$ unitario (que obviamente se determina a partir de a, B), los vértices b, c han de ser los puntos

$$\mathrm{m}_{bc} + \frac{r}{2}w = \mathrm{m}_{bc} + \frac{\sqrt{3}}{2}\|\overrightarrow{aB}\|w, \quad \mathrm{m}_{bc} + \big(-\frac{r}{2}w\big) = \mathrm{m}_{bc} + \big(-\frac{\sqrt{3}}{2}\|\overrightarrow{aB}\|w\big),$$

esto es,

$$B + \big(-\frac{1}{2}\overrightarrow{Ba} + \frac{\sqrt{3}}{2}\|\overrightarrow{aB}\|w\big), \quad B + \big(-\frac{1}{2}\overrightarrow{Ba} - \frac{\sqrt{3}}{2}\|\overrightarrow{aB}\|w\big).$$