Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Cálculo I – Evaluación 4

1. Supongamos que $\{x_n\}$ es una sucesión mayorada y sean $A_n = \{x_k : k \geqslant n\}$, $\beta_n = \sup(A_n)$. Sea $A = \{n \in \mathbb{N} : \beta_n \in A_n\}$. Prueba que:

   i) Si el conjunto A es finito entonces $\{x_n\}$ tiene una sucesión parcial estrictamente creciente.

   ii) Si el conjunto A es infinito entonces $\{x_n\}$ tiene una sucesión parcial decreciente.

2. Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada y α, β, números reales. Se verifica entonces que:

   i) $\alpha = \underline{\text{lím}}\{x_n\}$ si, y sólo si, para todo $\varepsilon > 0$ el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n < \alpha - \varepsilon\}$ es finito y el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n < \alpha + \varepsilon\}$ es infinito.

   ii) $\beta = \overline{\text{lím}}\{x_n\}$ si, y sólo si, para todo $\varepsilon > 0$ el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n > \beta + \varepsilon\}$ es finito y el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n > \beta - \varepsilon\}$ es infinito.

3. Calcula los límites de las sucesiones:

$$a)\ x_n = \left(1 + \log \frac{n^2+1}{n^2+n+1}\right)^n; \quad b)\ y_n = \frac{\frac{1}{2\log 2} + \frac{1}{3\log 3} + \cdots + \frac{1}{n \log n}}{\log(\log(n+1))}$$