Ejercicio transparencia 62

Considera los sistemas de ecuaciones lineales con matriz de coeficientes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

y términos independientes

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b}_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Resuélvelos por el método más eficiente.

<u>Solución</u>. Determinemos inicialmente, si es posible, una factorización tipo LU de la matriz de coeficientes y a continuación, mediante dos sistema triangulares auxiliares para cada vector de términos independiente, resolveremos los correspondientes sistemas.

Para la factorización LU, consideramos la de tipo Doolittle (el caso Crout ya ha sido ilustrado en la transparencia 55), esto es, con coeficientes 1 en la diagonal principal de L. Por tanto, planteamos la ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix}$$

Resolvemos las correspondientes 16 ecuaciones, no lineales pero muy simples, describiendo los coeficientes de **A** por filas, en orden descendente, y en cada fila de izquierda a derecha. Obtenemos:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Para el primero de los sistemas de ecuaciones lineales resolvemos los dos auxiliares triangulares

(i) $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}_1$, cuya solución es $\mathbf{y} = [1, 1, 2, -1]^T$, y

(ii) $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$, con solución $\mathbf{x} = [1, 0, 0, 1]^T$, que además es la solución del sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_1$.

Procediendo de forma análoga (¡y haciendo uso de la factorización LU obtenida para la matriz de coeficientes **A**!), deducimos que las respectivas soluciones para los dos sistemas restantes son $[1, 0, 0, 2]^T$ y $[0, 1, 1, 0]^T$.