Mario Megías Mateo 1º UEIIM

Ejercicio 5.21. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Justificar que la función $H(x) = \int_{x^2}^{x^3} f(t)\,dt$ es derivable y calcular su derivada

Al ser f una función continua en $\mathbb{R}$, es Riemann integrable en $\mathbb{R}$. Combinando el Primer Teorema Fundamental del cálculo con la regla de la cadena obtenemos el siguiente corolario:

•) Corolario: Sea I un intervalo y sean $u, v: I \to [a,b]$ funciones derivables y sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada que es Riemann integrable. Entonces la función $G(x) := \int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\,dt$ es derivable en I siendo

$$G'(x) = f(u(x))\,u'(x) - f(v(x))\,v'(x).$$

El resultado anterior nos garantiza que la función $H(x)$ es derivable, cuya derivada es:

$$H'(x) = 3x^2 f(x^3) - 2x f(x^2)$$