Algorítmica

Capítulo 5: Algoritmos para la Exploración de Grafos.

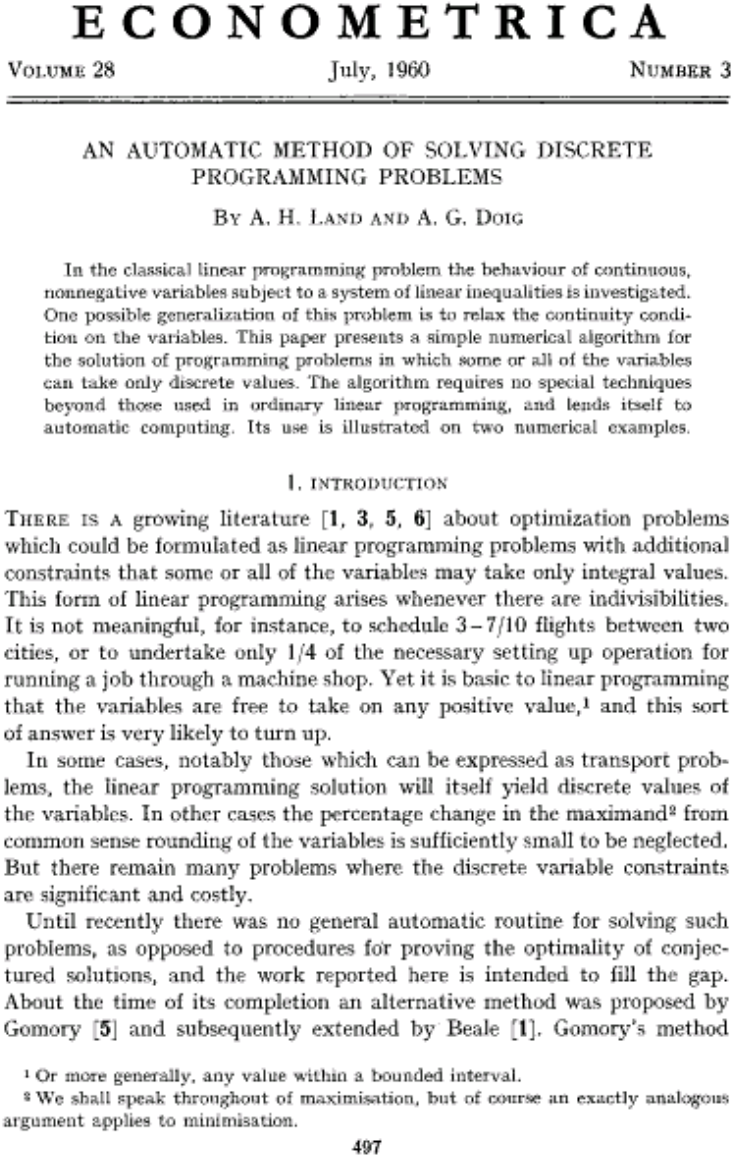
Tema 15: El método Branch and Bound*

- Método general Branch and Bound
  - Resolución del Problema de la Mochila.
  - Resolución del Problema del Viajante de Comercio.
  - Descripción del Problema de los 15

*** Ramificación y Poda en español**

Branch and bound

- **Branch and Bound** es una técnica muy similar a la de **Backtacking**, y basa su diseño en el análisis del árbol de estados de un problema:
  - Realiza un **recorrido sistemático** de ese árbol.
  - El recorrido no tiene que ser necesariamente en profundidad.
- Generalmente se aplica para resolver problemas de Optimización (Programación Matemática) y para jugar juegos
- Lo crearon A.H. Land y A.G. Doig en 1960, pero el nombre se lo dieron Little, Murty, Sweeney y Karel. Fue R. J. Dakin quien le dió la versión actual en 1965



ECONOMETRICA

VOLUME 28 July, 1960 NUMBER 3

AN AUTOMATIC METHOD OF SOLVING DISCRETE PROGRAMMING PROBLEMS

BY A. H. LAND AND A. G. DOIG

In the classical linear programming problem the behaviour of continuous, nonnegative variables subject to a system of linear inequalities is investigated. One possible generalization of this problem is to relax the continuity condition on the variables. This paper presents a simple numerical algorithm for the solution of programming problems in which some or all of the variables can take only discrete values. The algorithm requires no special techniques beyond those used in ordinary linear programming, and lends itself to automatic computing. Its use is illustrated on two numerical examples.

1. INTRODUCTION

THERE IS A growing literature [1, 3, 5, 6] about optimization problems which could be formulated as linear programming problems with additional constraints that some or all of the variables may take only integral values. This form of linear programming arises whenever there are indivisibilities. It is not meaningful, for instance, to schedule 3–7/10 flights between two cities, or to undertake only 1/4 of the necessary setting up operation for running a job through a machine shop. Yet it is basic to linear programming that the variables are free to take on any positive value,[1] and this sort of answer is very likely to turn up.

In some cases, notably those which can be expressed as transport problems, the linear programming solution will itself yield discrete values of the variables. In other cases the percentage change in the maximand[2] from common sense rounding of the variables is sufficiently small to be neglected. But there remain many problems where the discrete variable constraints are significant and costly.

Until recently there was no general automatic routine for solving such problems, as opposed to procedures for proving the optimality of conjectured solutions, and the work reported here is intended to fill the gap. About the time of its completion an alternative method was proposed by Gomory [5] and subsequently extended by Beale [1]. Gomory's method

[1] Or more generally, any value within a bounded interval.

[2] We shall speak throughout of maximisation, but of course an exactly analogous argument applies to minimisation.

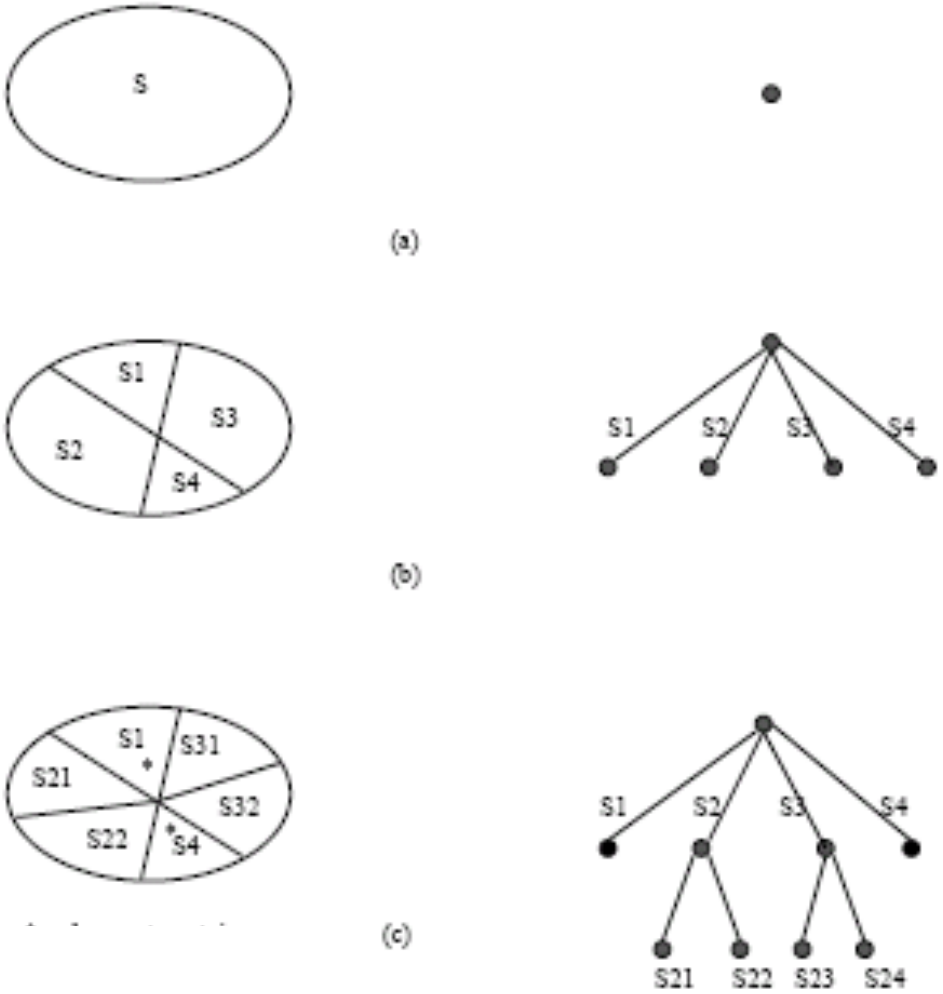
Branch and bound

- Los algoritmos generados por está técnica son normalmente de orden **exponencial** o peor en su peor caso, pero su aplicación en casos muy grandes, ha demostrado ser eficiente (incluso más que bactracking).
- Puede ser vista como una **generalización** (o mejora) de la técnica de Backtracking.
- La principal novedad es que habrá una **estrategia de ramificación**.
- Se tratará como un aspecto importante las **técnicas de poda**, para eliminar nodos que no lleven a soluciones óptimas.
- La poda se realiza **estimando** en cada nodo **cotas** del beneficio que podemos obtener a partir del mismo.

Branch and bound

- Diferencia fundamental con Backtracking:
  - En Bactracking tan pronto como se genera un nuevo hijo del nodo en curso, este hijo pasa a ser el **nodo en curso**.
  - En BB se generan todos los hijos del nodo en curso antes de que **cualquier otro nodo vivo** pase a ser el nuevo nodo en curso (esta técnica no utiliza la búsqueda en profundidad)
- En consecuencia:
  - En Backtracking los únicos nodos vivos son los que están en el camino de la raíz al nodo en curso.
  - En BB puede haber más nodos vivos (se almacenan en una estructura de datos auxiliar: **lista de nodos vivos (LNV)**.
- Además
  - En Bactracking el test de comprobación nos decía si era fracaso o no, mientras que en BB la cota nos sirve para podar el árbol y para saber el orden de ramificación, comenzando por las más prometedoras

Branch and bound



Descripción General del Método

- BB es un método de búsqueda general que se aplica conforme a lo siguiente:
- Explora un árbol comenzando a partir de un problema raíz (el problema original con su región factible completa)
- Entonces se aplican procedimientos de cotas inferiores y superiores al problema raíz.
- Si las cotas cumplen las condiciones que se hayan establecido, habremos encontrado la solución optimal y el procedimiento termina.
- Si ese no fuera el caso, entonces la región factible se divide en dos o mas regiones, dando lugar a distintos subproblemas.
- Esos subproblemas particionan la región factible. La búsqueda se desarrolla en cada una de esas regiones.
- El método (algoritmo) se aplica recursivamente a los subproblemas.

Descripción General del Método

- Si se encuentra una solución optimal para un subproblema, será una solución factible para el problema completo, pero no necesariamente el óptimo global.
- Cuando en un nodo (subproblema) la cota superior es menor que el mejor valor conocido en la región, no puede existir un óptimo global en el subespacio de la región factible asociada a ese nodo, y por tanto ese nodo puede ser eliminado en posteriores consideraciones.
- La búsqueda sigue hasta que se examinan o "podan" todos los nodos, o hasta que se alcanza algún criterio pre-establecido sobre el mejor valor encontrado y las cotas superiores de los problemas no resueltos

Branch and bound

- **Para cada nodo i tendremos:**
  - Una **Cota superior** (**CS(i)**) y una **Cota inferior** (**CI(i)**) del beneficio (o coste) óptimo que podemos alcanzar a partir de ese nodo.
    - Determinan cuándo se puede realizar una poda.
  - Una **Estimación del Beneficio (o coste)** óptimo que se puede encontrar a partir de ese nodo. Puede ser una media de las anteriores.
    - Ayuda a decidir qué parte del árbol evaluar primero.
  - Una **Estrategia de Poda**
    - Suponemos un problema de maximización
    - Hemos recorrido varios nodos 1..n, estimando para cada uno la cota superior **CS (j)** e inferior **CI (j)**, respectivamente, para **j** entre 1 y n.
    - Hay dos casos

Branch and bound

- **CASO 1.** Si a partir de un nodo siempre podemos obtener alguna solución válida, entonces **podar un nodo i si**:

  CS (i) ≤ CI (j), para algún nodo j generado.

- **Ejemplo:** problema de la mochila, utilizando un árbol binario.
  - A partir de **a**, podemos encontrar un beneficio máximo de CS(a)=4.
  - A partir de **b**, tenemos garantizado un beneficio mínimo de CI(b)=5.
  - Podemos podar el nodo **a**, sin perder ninguna solución óptima.

- **CASO 2.** Si a partir de un nodo puede que no lleguemos a una solución válida, entonces podemos **podar un nodo i si**:

  CS (i) ≤ Beneficio (j), para algún j, solución final (factible).

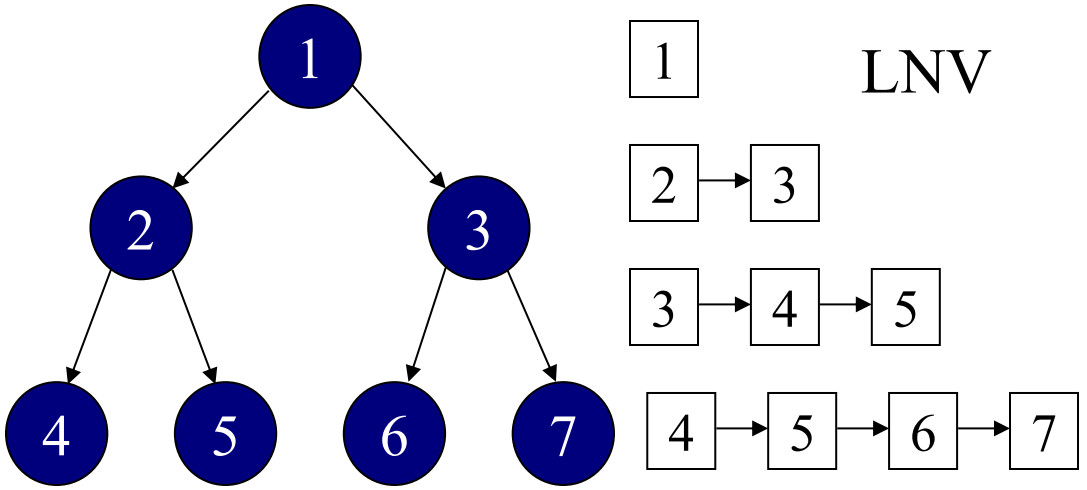
- **Ejemplo:** problema de las 8 reinas. A partir de una solución parcial, no está garantizado que exista una solución

Branch and bound

Estrategias de ramificación

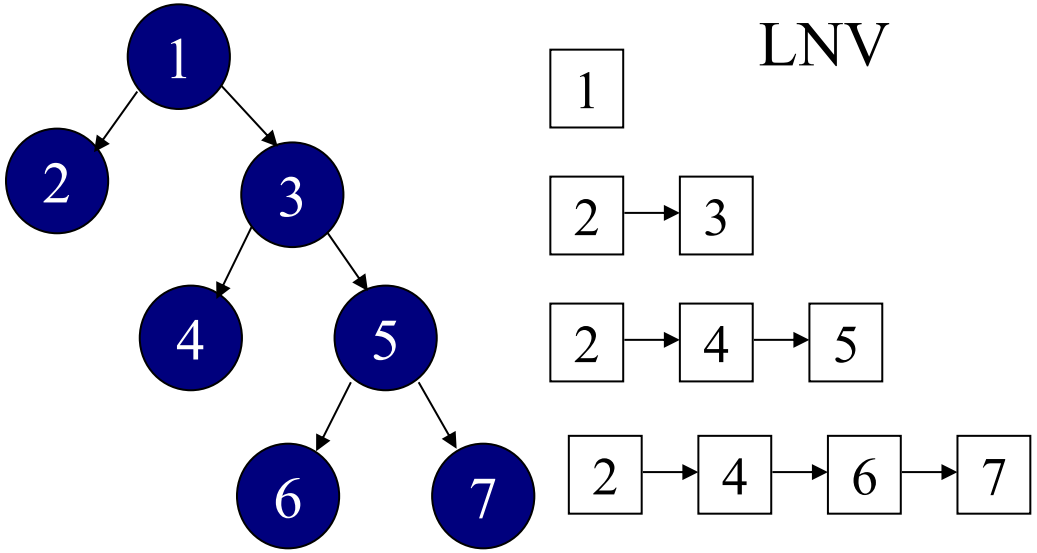
- Normalmente el árbol de soluciones es implícito, no se almacena en ningún lugar.
- Para hacer el recorrido se utiliza una **lista de nodos vivos** (**LNV**)
- La **LNV** contiene todos los nodos que han sido generados pero que no han sido explorados todavía. Son los nodos pendientes de tratar por el algoritmo.
- Según cómo sea la lista, el recorrido será de uno u otro tipo.

Estrategia FIFO
(First In First Out)
- La lista de nodos vivos es una cola
- El recorrido es en anchura



Branch and bound

ESTRATEGIA LIFO
(Last In First Out)
- La lista de nodos vivos es una pila
- El recorrido es en profundidad



- Las estrategias FIFO y LIFO realizan una búsqueda "a ciegas", sin tener en cuenta los beneficios.
- Usando la estimación del beneficio, entonces será mejor buscar primero por los nodos con mayor valor estimado.
- **Estrategias LC (Least Cost):**
  - Entre todos los nodos de la lista de nodos vivos, elegir el que tenga mayor beneficio (o menor coste) para explorar a continuación.

Branch and bound

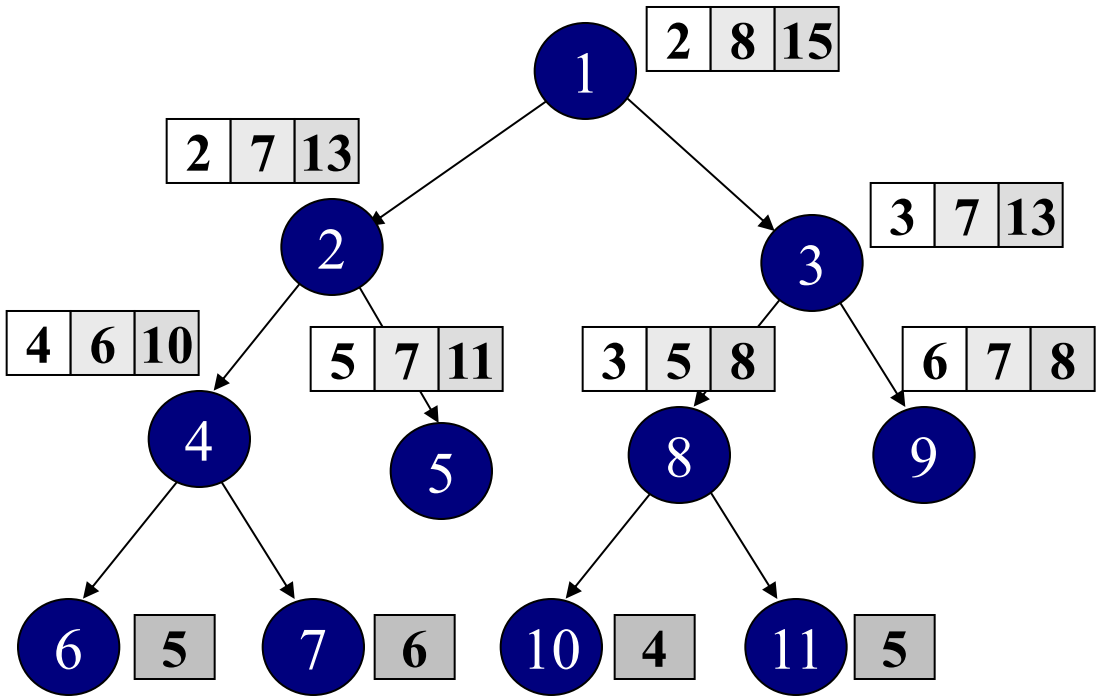
Estrategias de ramificación LC

- En caso de empate (de beneficio o coste estimado) deshacerlo usando un criterio **FIFO** ó **LIFO**:
  - **Estrategia LC-FIFO:** Seleccionar de la LNV el que tenga mayor beneficio y en caso de empate escoger el primero que se introdujo (de los que empatan).
  - **Estrategia LC-LIFO:** Seleccionar de la LNV el que tenga mayor beneficio y en caso de empate escoger el último que se introdujo (de los que empatan).

- En cada nodo podemos tener: cota inferior de coste, coste estimado y cota superior del coste.
- Podar según los valores de las cotas.
- Ramificar según los costes estimados.

BB: El Método General

- **Ejemplo. Branch and Bound usando LC-FIFO.**
- Supongamos un problema de minimización, y que tenemos el caso 1 (a partir de un nodo siempre existe alguna solución).
- Para realizar la poda usaremos una variable **C** = valor de la menor de las cotas superiores hasta ese momento (o de alguna solución final).
- Si para algún nodo i, CI(i) ≥ C, entonces podar i.



C	LNV
15	1
13	2 → 3
10	4 → 3 → 5
5	3 → 5
5	8 → 5
4	5

BB: El Método General

Algunas cuestiones

- Sólo se comprueba el criterio de poda cuando se introduce o se saca un nodo de la lista de nodos vivos.
- Si un descendiente de un nodo es una solución final entonces no se introduce en la lista de nodos vivos. Se comprueba si esa solución es mejor que la actual, y se actualiza **C** y el valor de la mejor solución óptima de forma adecuada.
- ¿Qué pasa si a partir de un nodo solución pueden haber otras soluciones?
- ¿Cómo debe ser actualizada la variable **C** (variable de poda) si el problema es de maximización, o si tenemos el caso 2 (a partir de un nodo puede que no exista ninguna solución)?
- ¿Cómo será la poda, para cada uno de los casos anteriores?
- ¿Qué pasa si para un nodo **i** tenemos que **CI(i)** = **CS(i)**?
- ¿Cuándo acaba el algoritmo?
- ¿Cómo calcular las cotas?

BB: El Método General

- **Esquema general.** Problema de minimización, suponiendo el caso en que existe solución a partir de cualquier nodo.

```
RamificacionYPoda (NodoRaiz: tipo_nodo; var s: tipo_solucion);
    LNV:= {NodoRaiz};
    C:= CS (NodoRaiz);
    s:= ∅;
    Mientras LNV ≠ ∅ hacer
        x:= Seleccionar (LNV);  { Según un criterio FIFO, LIFO, LC-FIFO ó LC-LIFO }
        LNV:= LNV - {x};
        Si CI (x) < C entonces                    { Si no se cumple se poda x }
            Para cada y hijo de x hacer
                Si y es una solución final mejor que s entonces
                    s:= y;
                    C:= min (C, Coste (y) );
                Sino si y no es solución final y (CI(y) < C) entonces
                    LNV:= LNV + {y};
                    C:= min (C, CS (y) );
            FinPara;
    FinMientras;
```

BB: Análisis de los tiempos de ejecución

- El tiempo de ejecución depende de:
  - **Número de nodos recorridos**: depende de la efectividad de la poda.
  - **Tiempo gastado en cada nodo**: tiempo de hacer las estimaciones de coste y tiempo de manejo de la lista de nodos vivos.
- En el peor caso, el tiempo es igual que el de un algoritmo con backtracking (ó peor si tenemos en cuenta el tiempo que lleva la LNV)
- ¿Cómo hacer que un algoritmo BB sea más eficiente?
  - **Hacer estimaciones de costo muy precisas**: Se realiza una poda exhaustiva del árbol. Se recorren menos nodos pero se gasta mucho tiempo en realizar las estimaciones.
  - **Hacer estimaciones de costo poco precisas**: Se gasta poco tiempo en cada nodo, pero el número de nodos puede ser muy elevado. No se hace mucha poda.
- Se debe buscar un equilibrio entre la exactitud de las cotas y el tiempo de calcularlas.

Ejemplo, El Problema de la Mochila 0/1

- **Diseño del algoritmo** BB:
  - Definir una representación de la solución. A partir de un nodo, cómo se obtienen sus descendientes.
  - Dar una manera de calcular el valor de las cotas y la estimación del beneficio.
  - Definir la estrategia de ramificación y de poda.

- **Representación de la solución:**
  - **Mediante un árbol binario**: $(s_1, s_2, ..., s_n)$, con $s_i = (0, 1)$.
    Hijos de un nodo $(s_1, s_2, ..., s_k)$:
    $(s_1, ..., s_k, 0)$ y $(s_1, ..., s_k, 1)$.
  - **Mediante un árbol combinatorio**: $(s_1, s_2, ..., s_m)$ donde $m \leq n$ y $s_i \in \{1, 2, ..., n\}$.
    Hijos de un nodo $(s_1, .., s_k)$:
    $(s_1, .., s_k, s_k+1)$, $(s_1, ..., s_k, s_k+2)$, ..., $(s_1, ..., s_k, n)$

Ejemplo, El Problema de la Mochila 0/1

- **Cálculo de cotas:**
  - **Cota inferior**: Beneficio que se obtendría incluyendo solo los objetos incluidos hasta ese nodo.
  - **Estimación del beneficio**: A la solución actual, sumar el beneficio de incluir los objetos enteros que quepan, utilizando greedy. Suponemos que los objetos están ordenados por orden decreciente de v_i/w_i.
  - **Cota superior**: Resolver el problema de la mochila continuo a partir de ese nodo (con un algoritmo greedy), y quedarse con la parte entera.
- **Ejemplo**. n = 4, M = 7, v = (2, 3, 4, 5), w = (1, 2, 3, 4)

  - Nodo actual: (1, 1) (1, 2)
  - Hijos: (1, 1, 0), (1, 1, 1) (1, 2, 3), (1, 2, 4)
  - Cota inferior: $CI = v_1 + v_2 = 2 + 3 = 5$
  - Estimación del beneficio: $EB = CI + v_3 = 5 + 4 = 9$
  - Cota superior: $CS = CI + \lfloor MochilaGreedy(3, 4) \rfloor = 5 + \lfloor 4+5/4 \rfloor = 10$

Ejemplo, El Problema de la Mochila 0/1

- **Forma de realizar la poda:**
  - En una variable **C** guardar el valor de la mayor cota inferior hasta ese momento dado.
  - Si para un nodo, su cota superior es menor o igual que **C** entonces se puede podar ese nodo.
- **Estrategia de ramificación:**
  - Puesto que tenemos una estimación del coste, usar una estrategia **LC**: explorar primero las ramas con mayor valor esperado **(MB)**.
  - ¿LC-FIFO ó LC-LIFO? Usaremos la LC-LIFO: en caso de empate seguir por la rama más profunda. (MB-LIFO)

Ejemplo, El Problema de la Mochila 0/1

```
Mochila01RyP (v, w: array [1..n] of integer; M: integer; var s: nodo);
    inic:= NodoInicial (v, w, M);
    C:= inic.CI;
    LNV:= {inic};
    s.v_act:= -∞;
    Mientras LNV ≠ ∅ hacer
        x:= Seleccionar (LNV);      { Según el criterio MB-LIFO }
        LNV:= LNV - {x};
        Si  x.CS > C  Entonces                  { Si no se cumple se poda x }
            Para  i:= 0, 1  Hacer
                y:= Generar (x, i, v, w, M);
                Si (y.nivel = n)  Y  (y.v_act > s.v_act)  Entonces
                    s:= y;
                    C:= max (C, s.v_act );
                Sino Si  (y.nivel < n)  Y  (y.CS > C)  Entonces
                    LNV:= LNV + {y};
                    C:= max (C, y.CI );
            FinPara;
        FinSi;
    FinMientras;
```

Ejemplo, El Problema de la Mochila 0/1

NodoInicial (v, w: array [1..n] of integer; M: integer) : nodo;

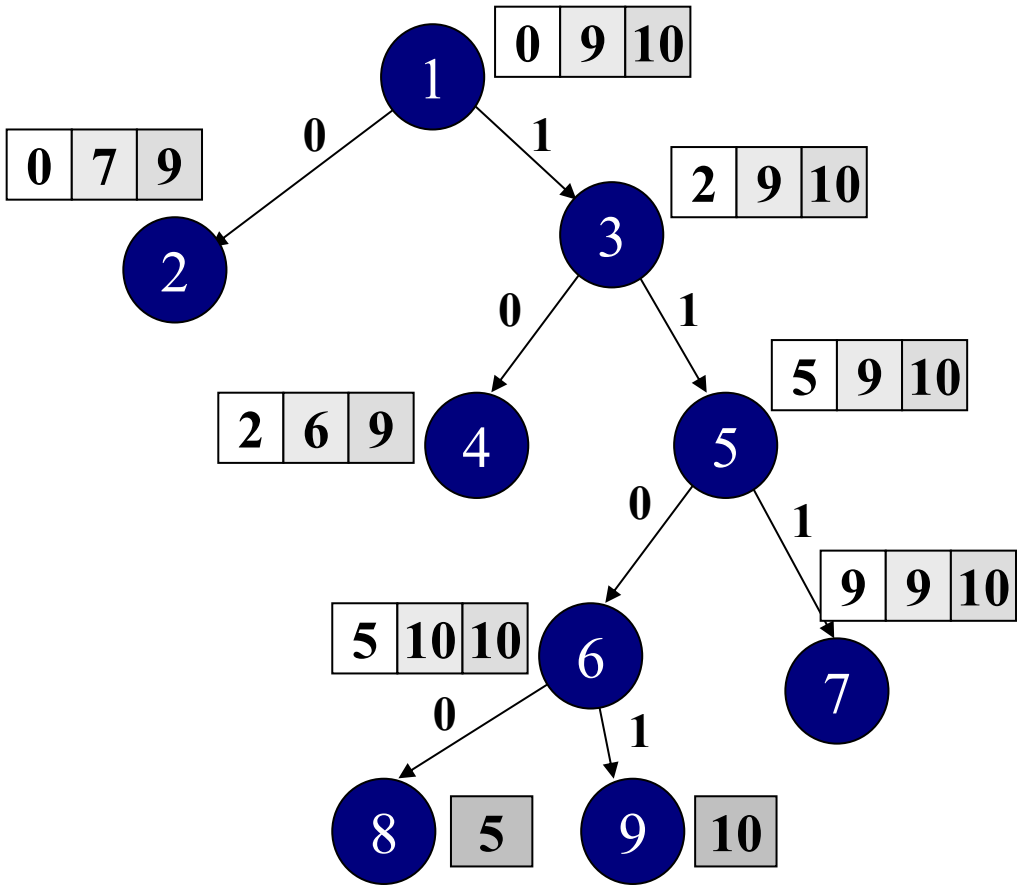
```
res.CI:= 0;
res.CS:= ⌊MochilaVoraz (1, M, v, w)⌋;
res.BE:= Mochila01Voraz (1, M, v, w);
res.nivel:= 0;
res.v_act:= 0;  res.w_act:= 0;
Devolver res;
```

Generar (x: nodo; i: (0, 1); v,w: array [1..n] of int; M: int): nodo;

```
res.tupla:= x.tupla;
res.nivel:= x.nivel + 1;
res.tupla[res.nivel]:= i;
Si  i = 0  Entonces  res.v_act:= x.v_act;  res.w_act:= x.w_act;
Sino   res.v_act:= x.v_act + v[res.nivel]; res.w_act:= x.w_act + w[res.nivel];
res.CI:= res.v_act;
res.BE:= res.CI + Mochila01Voraz (res.nivel+1, M - res.w_act, v, w);
res.CS:= res.CI + ⌊MochilaVoraz (res.nivel+1, M - res.w_act, v, w)⌋;
Si res.w_act > M Entonces {Sobrepasa el peso M: descartar el nodo }
        res.CI:= res.CS:= res.BE:= -∞;
Devolver res;
```

Ejemplo, El Problema de la Mochila 0/1

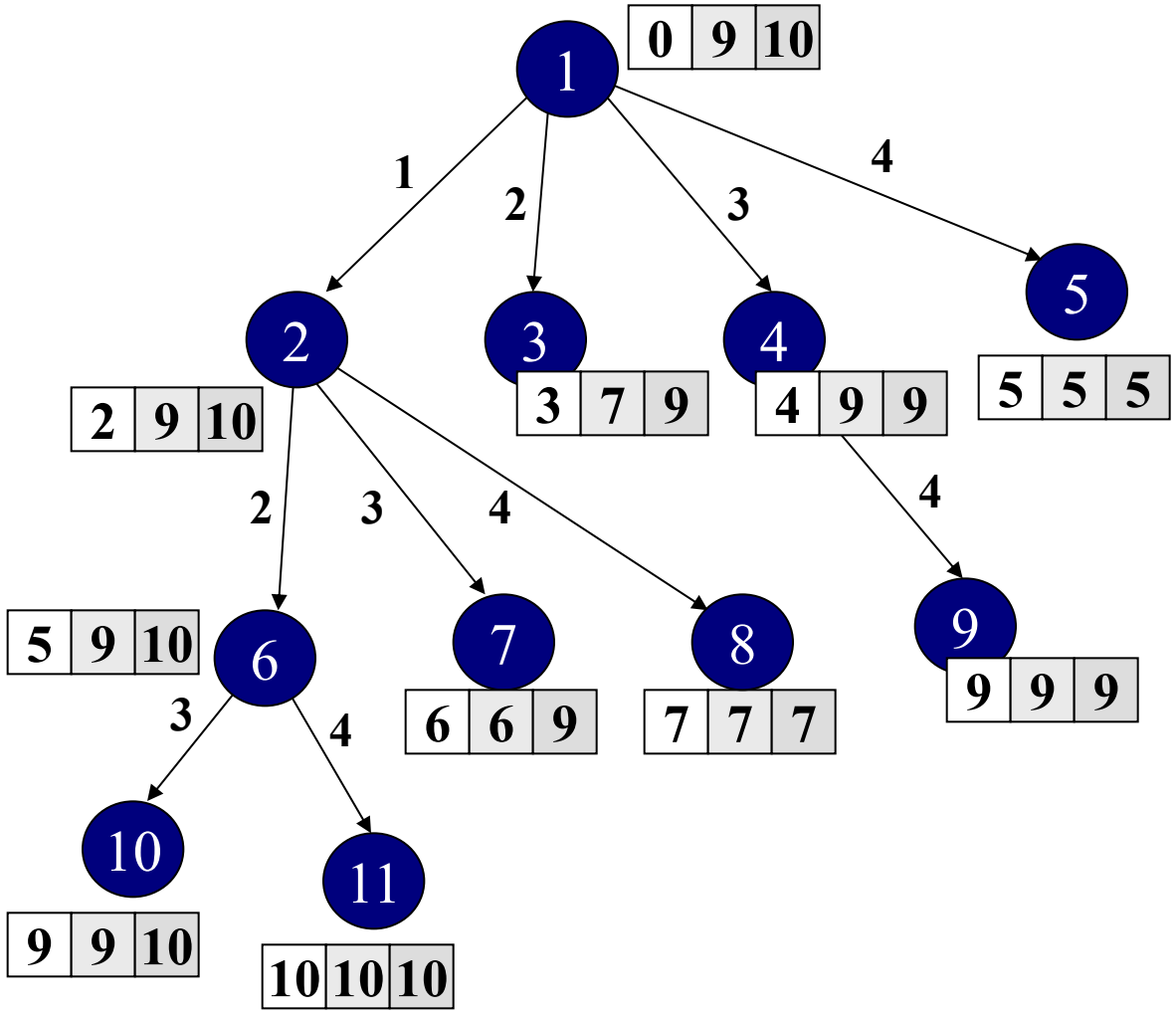
- **Ejemplo**. n = 4, M = 7, v = (2, 3, 4, 5), w = (1, 2, 3, 4)



C	LNV
0	1
2	3 → 2
5	5 → 2 → 4
9	6 → 7 → 2 → 4
10	7 → 2 → 4
10	2 → 4
10	4

Ejemplo, El Problema de la Mochila 0/1

- **Ejemplo**. Utilizando un árbol combinatorio y LC-FIFO, n = 4, M = 7, v = (2, 3, 4, 5), w = (1, 2, 3, 4)



C	LNV
0	1
5	2 → 4 → 3
7	4 → 6 → 3 → 7
9	6 → 3 → 7
10	3 → 7
10	7

El Problema del Viajante de Comercio

- Este problema tiene un algoritmo exacto (lo veremos mas adelante) pero se le puede adaptar Branch and bound sin dificultad
- **Recordatorio:**
- Encontrar un recorrido de longitud mínima para una persona que tiene que visitar varias ciudades y volver al punto de partida, conocida la distancia existente entre cada dos ciudades.
- Es decir, dado un grafo dirigido con arcos de longitud no negativa, se trata de encontrar un circuito de longitud mínima que comience y termine en el mismo vértice y pase exactamente una vez por cada uno de los vértices restantes

El Problema del Viajante de Comercio

- Formalización:
  - Sean G = (V,A) un grafo orientado, $V=\{1,2,\ldots,n\}$,
  - D[i,j] la longitud de $(i,j)\in A$, $D[i,j]=\infty$ si no existe el arco (i,j).
  - El circuito buscado empieza en el vértice 1.

  - Candidatos:
    E = { 1,X,1 | X es una permutación de (2,3,…,n) }
    |E| = (n-1)!

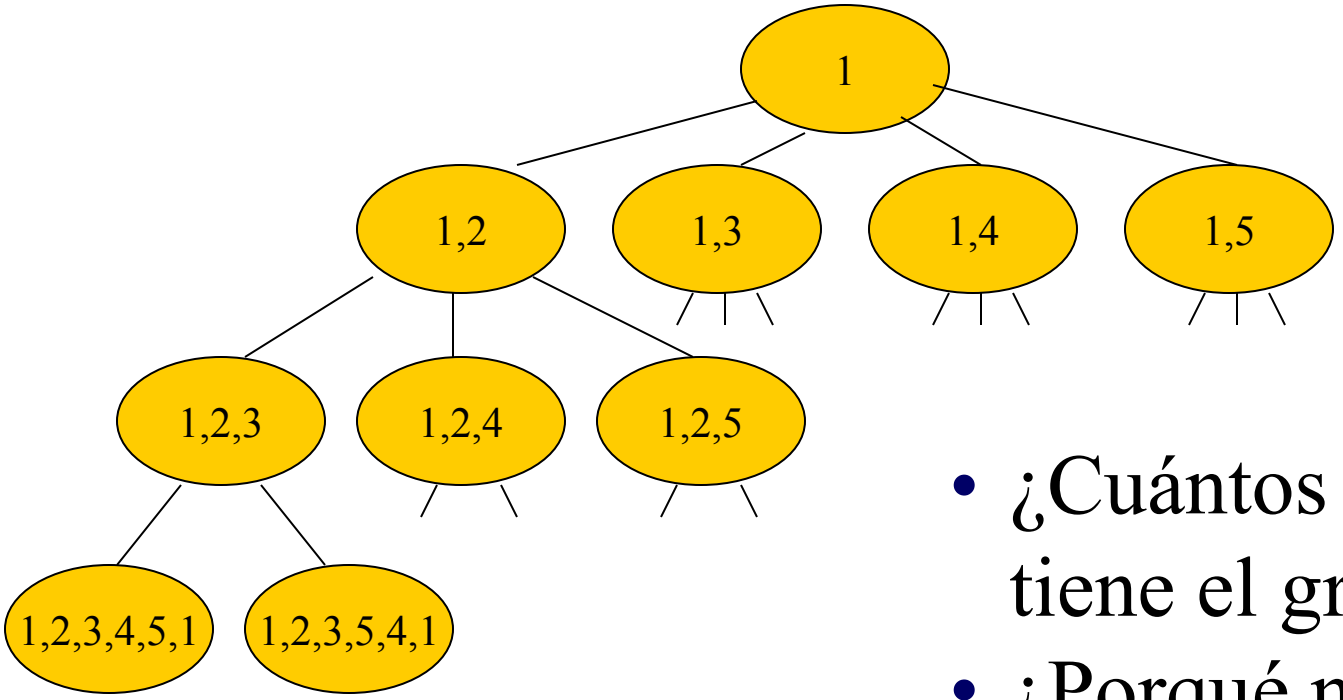
  - Soluciones factibles:
    E = { 1,X,1 | $X = x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}$, es una permutación de (2,3,…,n) tal que $(i_j,i_{j+1}) \in A$, $0<j<n$, $(1, x_1) \in A$, $(x_{n-1},1) \in A$}

  - Función objetivo:
    $F(X)=D[1,x_1]+D[x_1, x_2] + D[x_2, x_3]+\ldots+D[x_{n-2}, x_{n-1}]+D[x_n,1]$

El Problema del Viajante de Comercio

- Arbol de búsqueda de soluciones:
  - La raíz del árbol (nivel 0) es el vértice de inicio del ciclo.
  - En el nivel 1 se consideran TODOS los vértices menos el inicial.
  - En el nivel 2 se consideran TODOS los vértices menos los 2 que ya fueron visitados.
  - Y así sucesivamente hasta el nivel ‘n-1’ que incluirá al vértice que no ha sido visitado.

Ejemplo



- ¿Cuántos vértices tiene el grafo?
- ¿Porqué no se requiere el último nivel en el árbol?

Análisis del problema con Branch and Bound

- Criterio de selección para expandir un nodo del árbol de búsqueda de soluciones:
  - Un vértice en el nivel i del árbol, debe ser adyacente al vértice en el nivel i-1 del camino correspondiente en el árbol.
  - Puesto que es un problema de Minimización, si el costo posible a acumular al expandir el nodo i, es **menor** al mejor costo acumulado hasta ese momento, vale la pena expandir el nodo, si no, el camino se deja de explorar ahi...

Estimación del costo posible a acumular

- Si se sabe cuáles son los vértices que faltan por visitar…
- Cada vértice que falta tiene arcos de salida hacia otros vértices…
- El mejor costo, será el del arco que tenga el valor menor…
- Esta información se puede obtener del renglón correspondiente al vértice en la matriz de adyacencias (excluyendo a los valores cero)...
- La sumatoria de los mejores arcos de cada vértice que falte, más el costo del camino ya acumulado, es una estimación válida para tomar decisiones respecto a las podas en el árbol..

Ejemplo

- Dada la siguiente matriz de adyacencias, ¿cuál es el costo mínimo posible de visitar todos los nodos una sola vez?

0	14	4	10	20
14	0	7	8	7
4	5	0	7	16
11	7	9	0	2
18	7	17	4	0

→ Mínimo = **4**

→ Mínimo = **7**

→ Mínimo = **4**

→ Mínimo = **2**

→ Mínimo = **4**

TOTAL = 21

Ejemplo

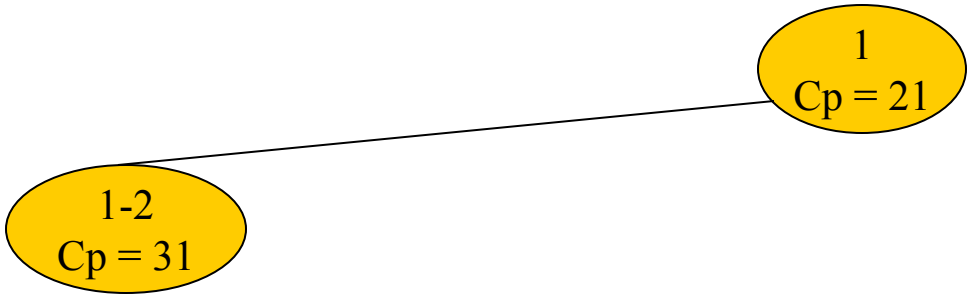
0	14	4	10	20
14	0	7	8	7
4	5	0	7	16
11	7	9	0	2
18	7	17	4	0

1
Cp = 21

Costo mínimo = ∞

Ejemplo

0	14	4	10	20
14	0	7	8	7
4	5	0	7	16
11	7	9	0	2
18	7	17	4	0



Costo mínimo = ∞

<u>Cálculo del Costo posible:</u>

Acumulado de 1-2 : **14**

Más mínimo de 2-3, 2-4 y 2-5: **7**

Más mínimo de 3-1, 3-4 y 3-5: **4**

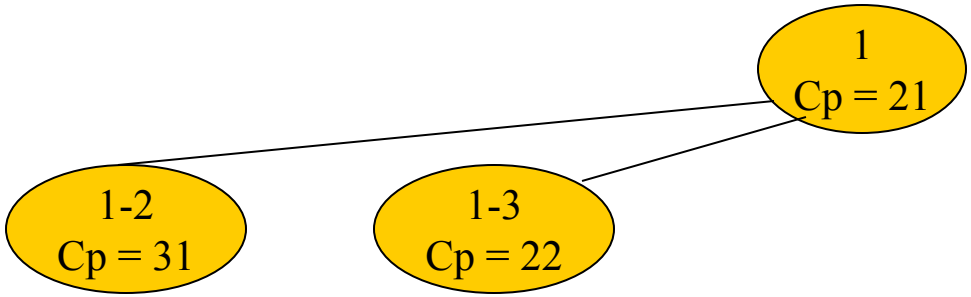
Más mínimo de 4-1, 4-3 y 4-5: **2**

Más mínimo de 5-1, 5-3 y 5-4: **4**

TOTAL = 31

Ejemplo

0	14	4	10	20
14	0	7	8	7
4	5	0	7	16
11	7	9	0	2
18	7	17	4	0



Costo mínimo = ∞

<u>Cálculo del Costo posible:</u>

Acumulado de 1-3 : **4**

Más mínimo de 3-2, 3-4 y 3-5: **5**

Más mínimo de 2-1, 2-4 y 2-5: **7**

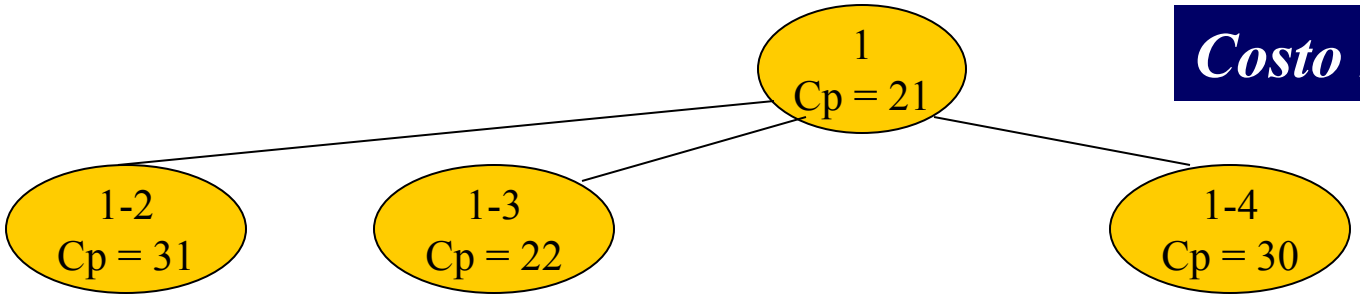
Más mínimo de 4-1, 4-3 y 4-5: **2**

Más mínimo de 5-1, 5-3 y 5-4: **4**

TOTAL = 22

Ejemplo

0	14	4	10	20
14	0	7	8	7
4	5	0	7	16
11	7	9	0	2
18	7	17	4	0



Costo mínimo = ∞

<u>Cálculo del Costo posible:</u>

Acumulado de 1-4 : **10**

Más mínimo de 4-2, 4-3 y 4-5: **2**

Más mínimo de 3-1, 3-2 y 3-5: **4**

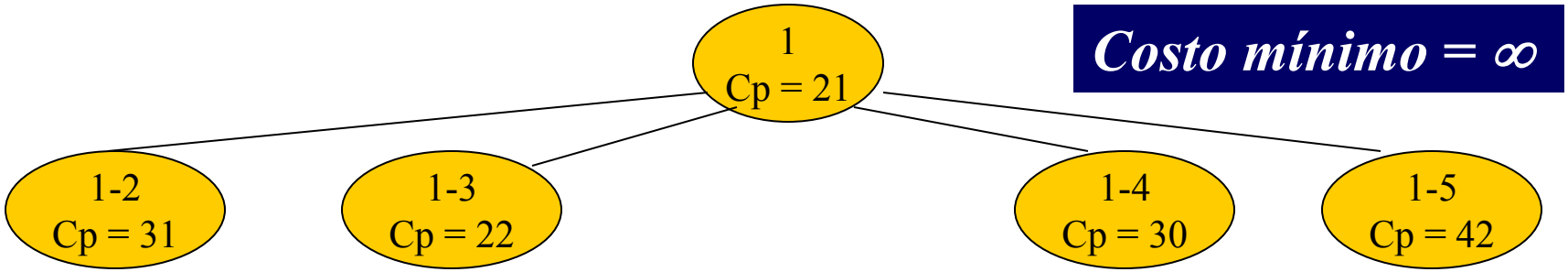
Más mínimo de 2-1, 2-3 y 2-5: **7**

Más mínimo de 5-1, 5-2 y 5-3: **7**

TOTAL = 30

Ejemplo

0	14	4	10	20
14	0	7	8	7
4	5	0	7	16
11	7	9	0	2
18	7	17	4	0



Costo mínimo = ∞

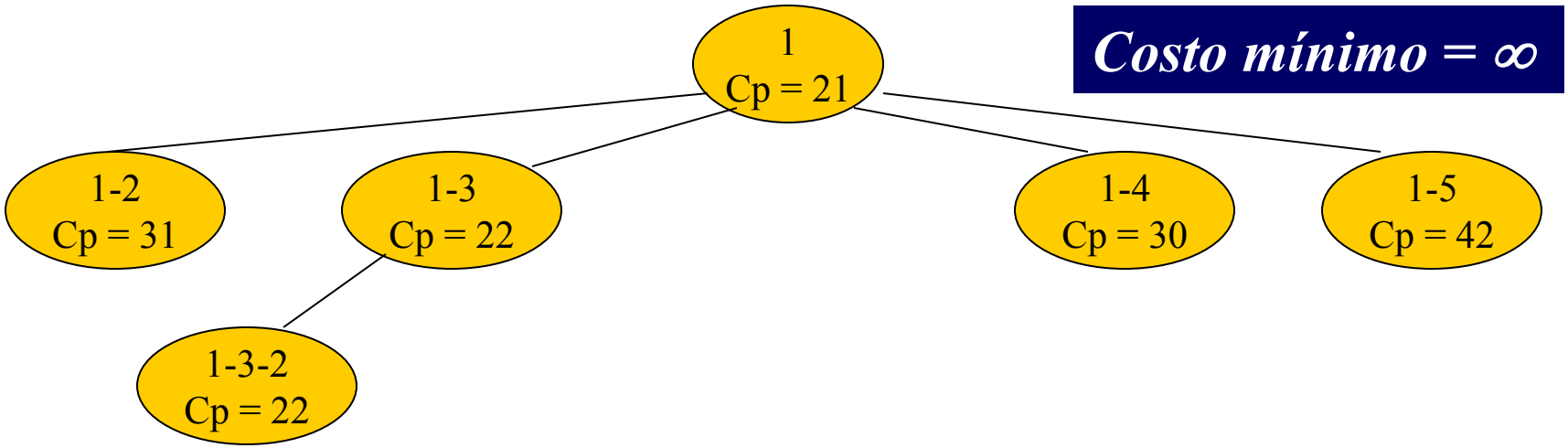
¿Cuál es el mejor nodo para expandir?

<u>Cálculo del Costo posible:</u>

Acumulado de 1-5 : **20**
Más mínimo de 5-2, 5-3 y 5-4: **4**
Más mínimo de 4-1, 4-2 y 4-3: **7**
Más mínimo de 3-1, 3-2 y 3-4: **4**
Más mínimo de 2-1, 2-3 y 2-4: **7**
TOTAL = 42

Ejemplo

0	14	4	10	20
14	0	7	8	7
4	5	0	7	16
11	7	9	0	2
18	7	17	4	0



Costo mínimo = ∞

<u>Cálculo del Costo posible:</u>

Acumulado de 1-3-2 : **9**

Más mínimo de 2-4 y 2-5: **7**

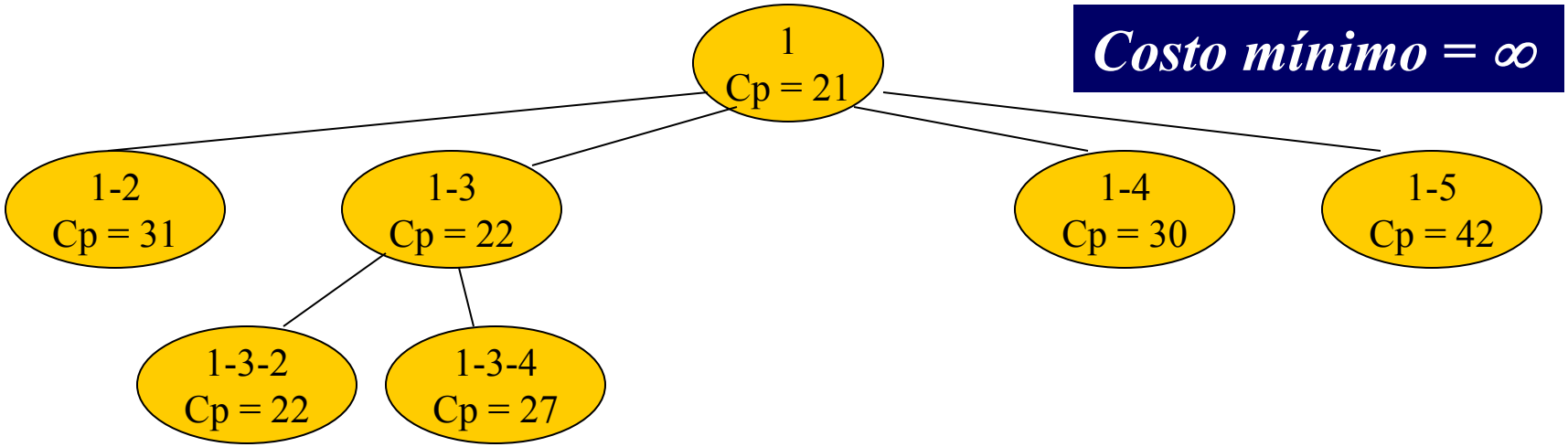
Más mínimo de 4-1 y 4-5: **2**

Más mínimo de 5-1 y 5-4: **4**

TOTAL = 22

Ejemplo

0	14	4	10	20
14	0	7	8	7
4	5	0	7	16
11	7	9	0	2
18	7	17	4	0



Costo mínimo = ∞

Cálculo del Costo posible:

Acumulado de 1-3-4 : **11**

Más mínimo de 4-2 y 4-5: **2**

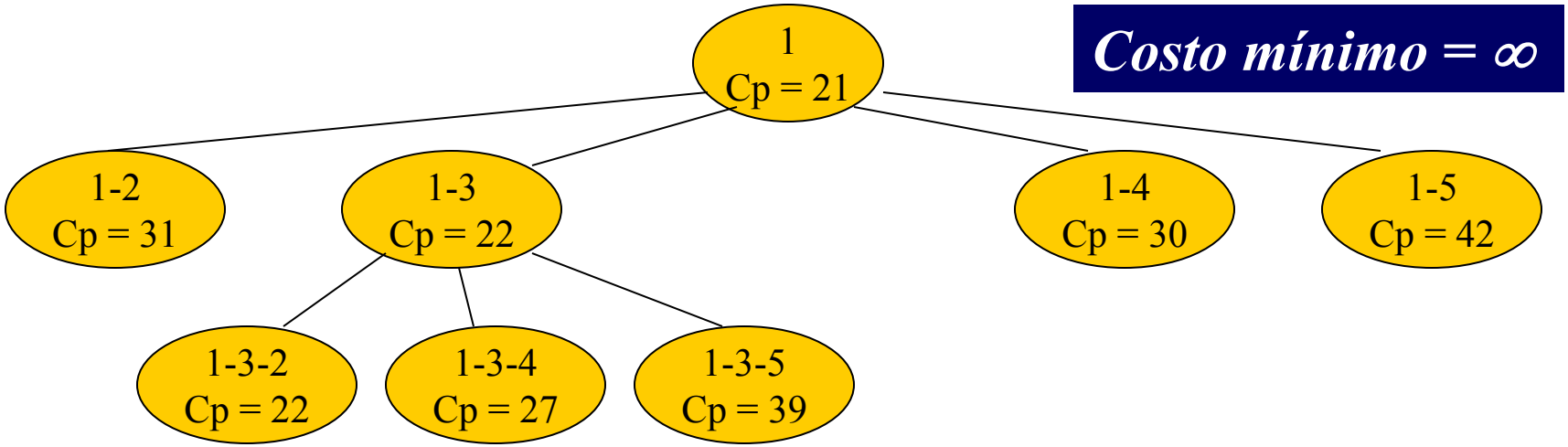
Más mínimo de 2-1 y 2-5: **7**

Más mínimo de 5-1 y 5-2: **7**

TOTAL = 27

Ejemplo

0	14	4	10	20
14	0	7	8	7
4	5	0	7	16
11	7	9	0	2
18	7	17	4	0



Costo mínimo = ∞

¿Cuál es el mejor nodo para expandir?

Cálculo del Costo posible:

Acumulado de 1-3-5 : **20**

Más mínimo de 5-2 y 5-4: **4**

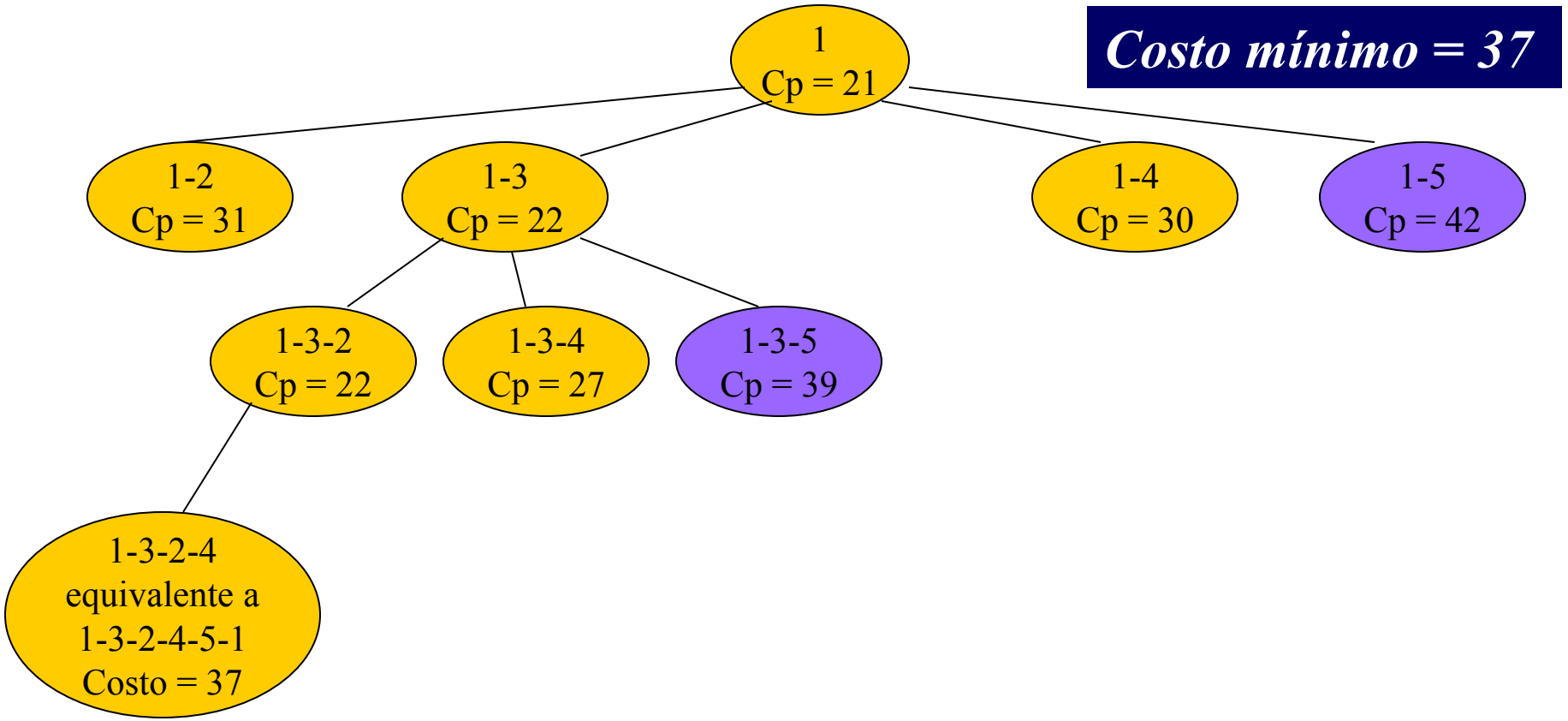
Más mínimo de 2-1 y 2-4: **8**

Más mínimo de 4-1 y 4-2: **7**

TOTAL = 39

Ejemplo

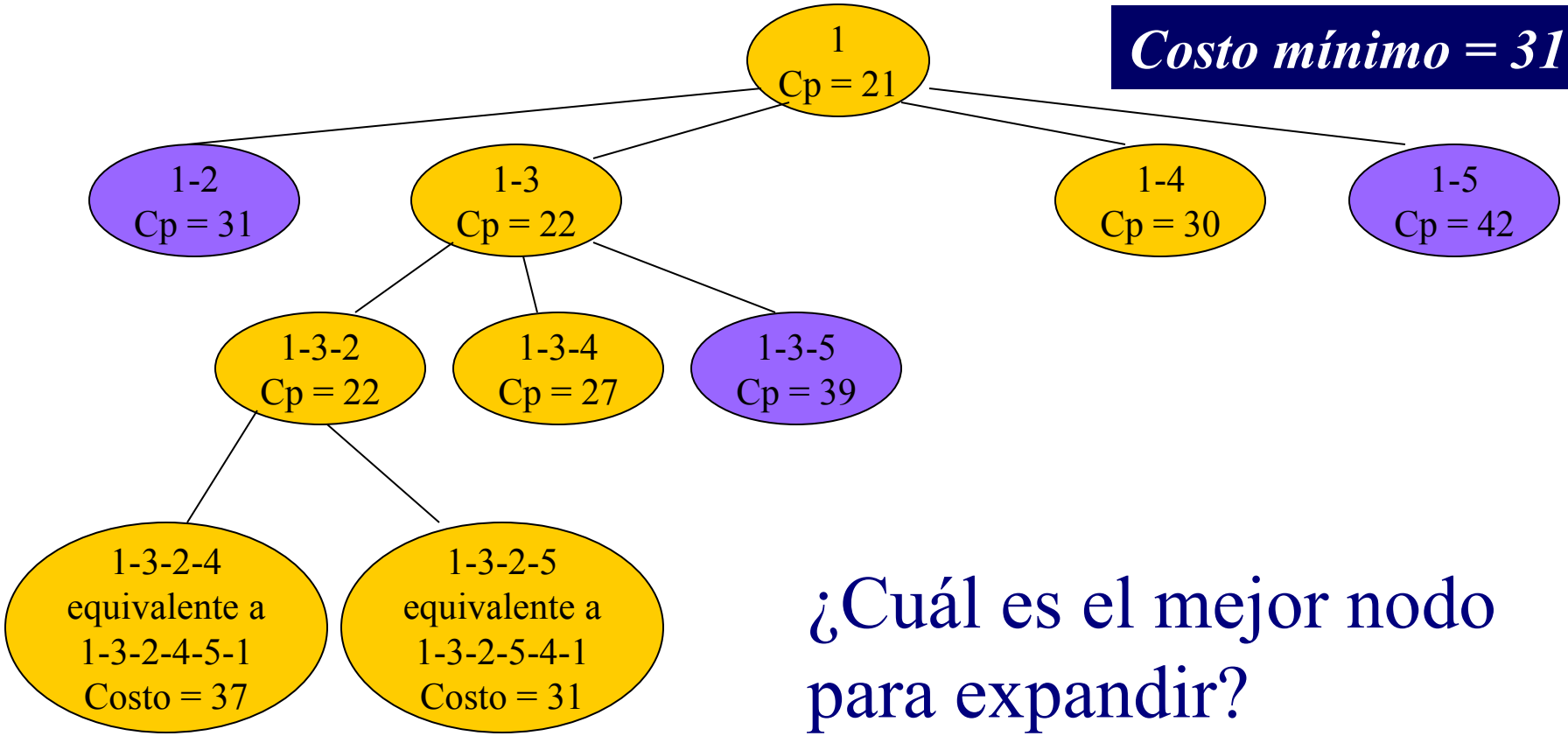
0	14	4	10	20
14	0	7	8	7
4	5	0	7	16
11	7	9	0	2
18	7	17	4	0



Costo mínimo = 37

Ejemplo

0	14	4	10	20
14	0	7	8	7
4	5	0	7	16
11	7	9	0	2
18	7	17	4	0

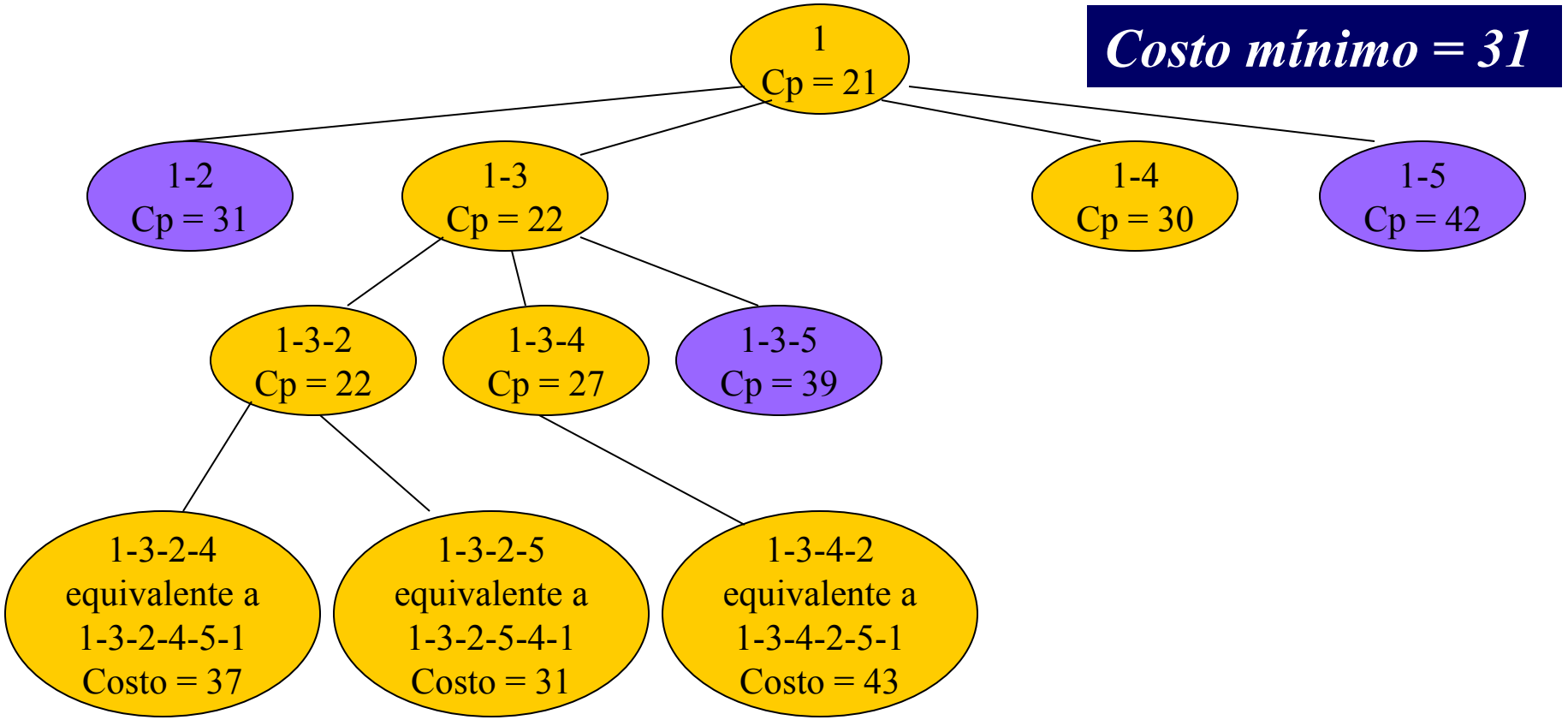


Costo mínimo = 31

¿Cuál es el mejor nodo para expandir?

Ejemplo

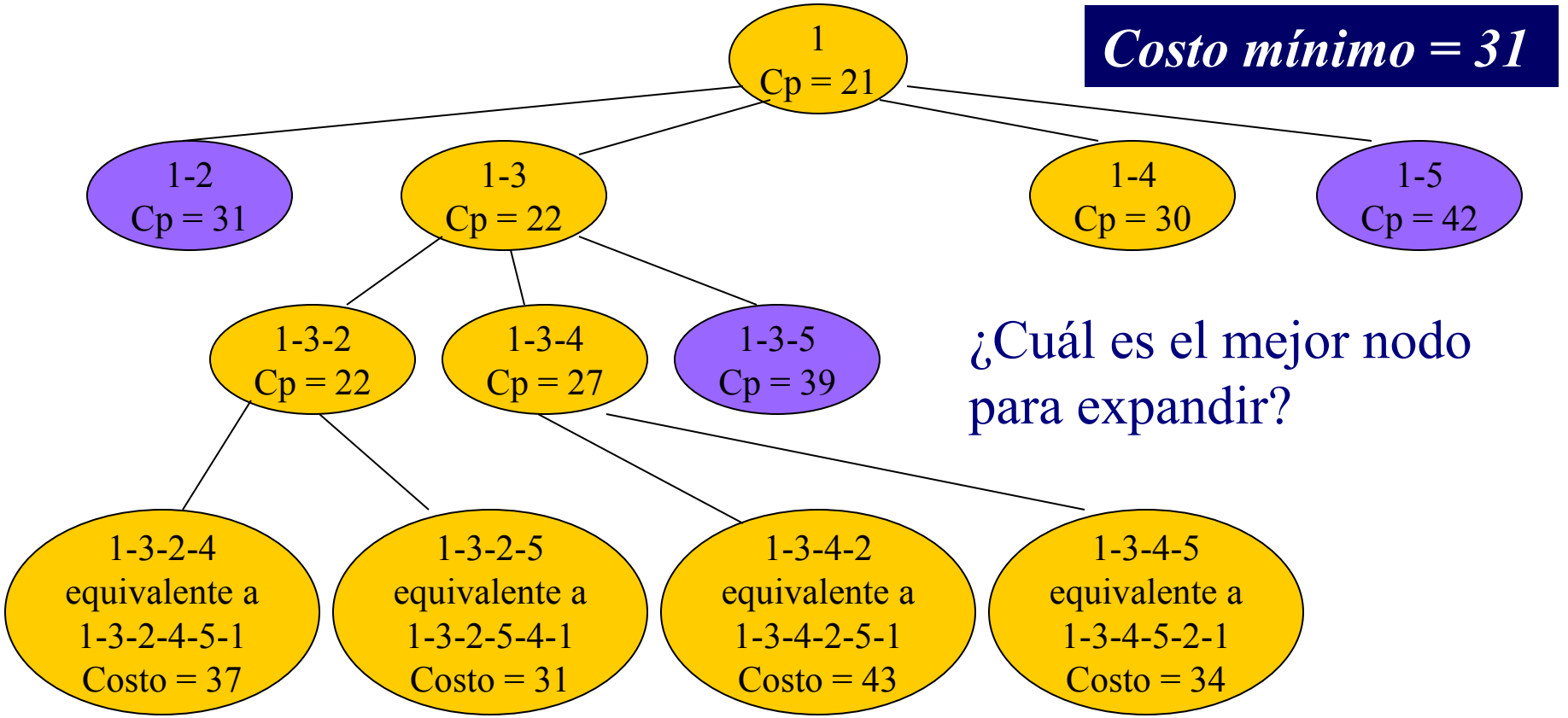
0	14	4	10	20
14	0	7	8	7
4	5	0	7	16
11	7	9	0	2
18	7	17	4	0



Costo mínimo = 31

Ejemplo

0	14	4	10	20
14	0	7	8	7
4	5	0	7	16
11	7	9	0	2
18	7	17	4	0

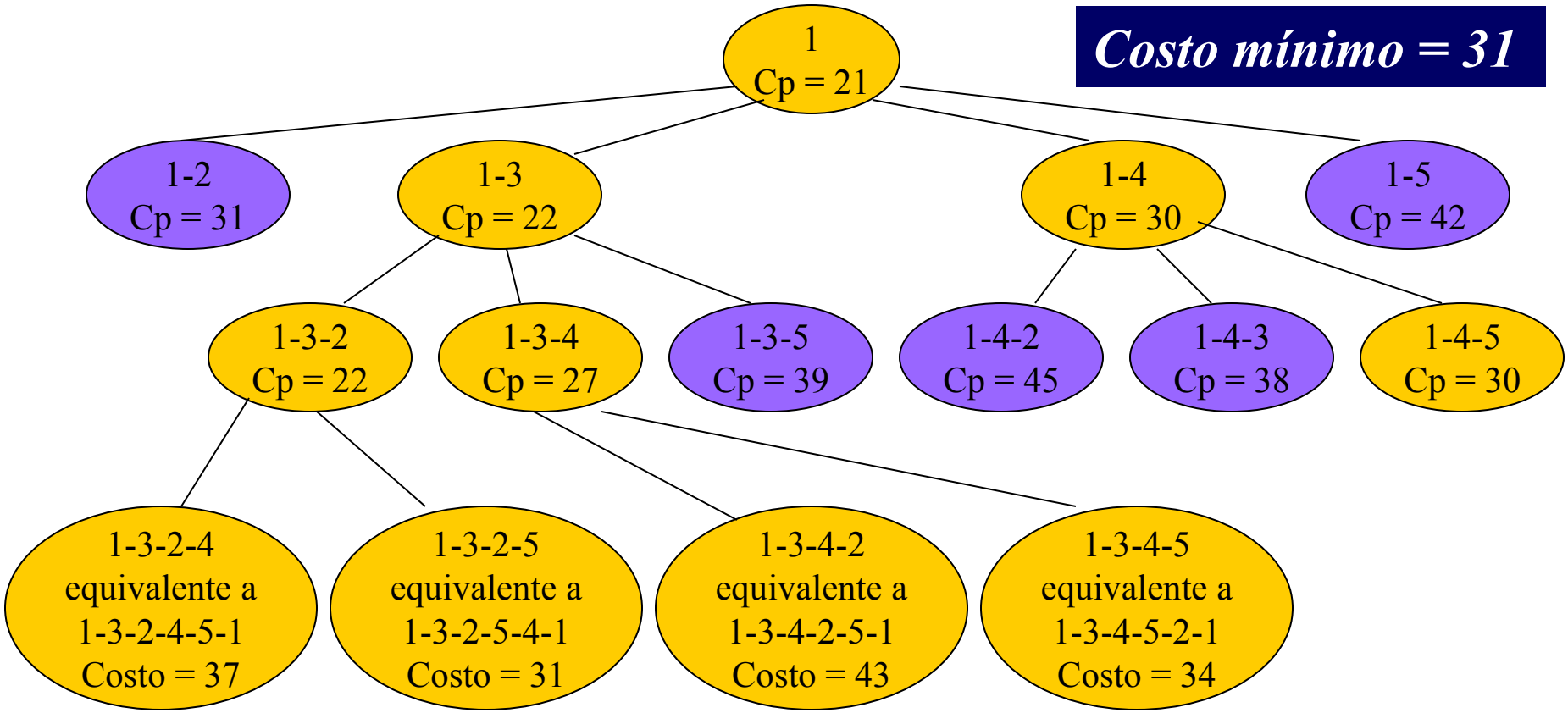


Costo mínimo = 31

¿Cuál es el mejor nodo para expandir?

Ejemplo

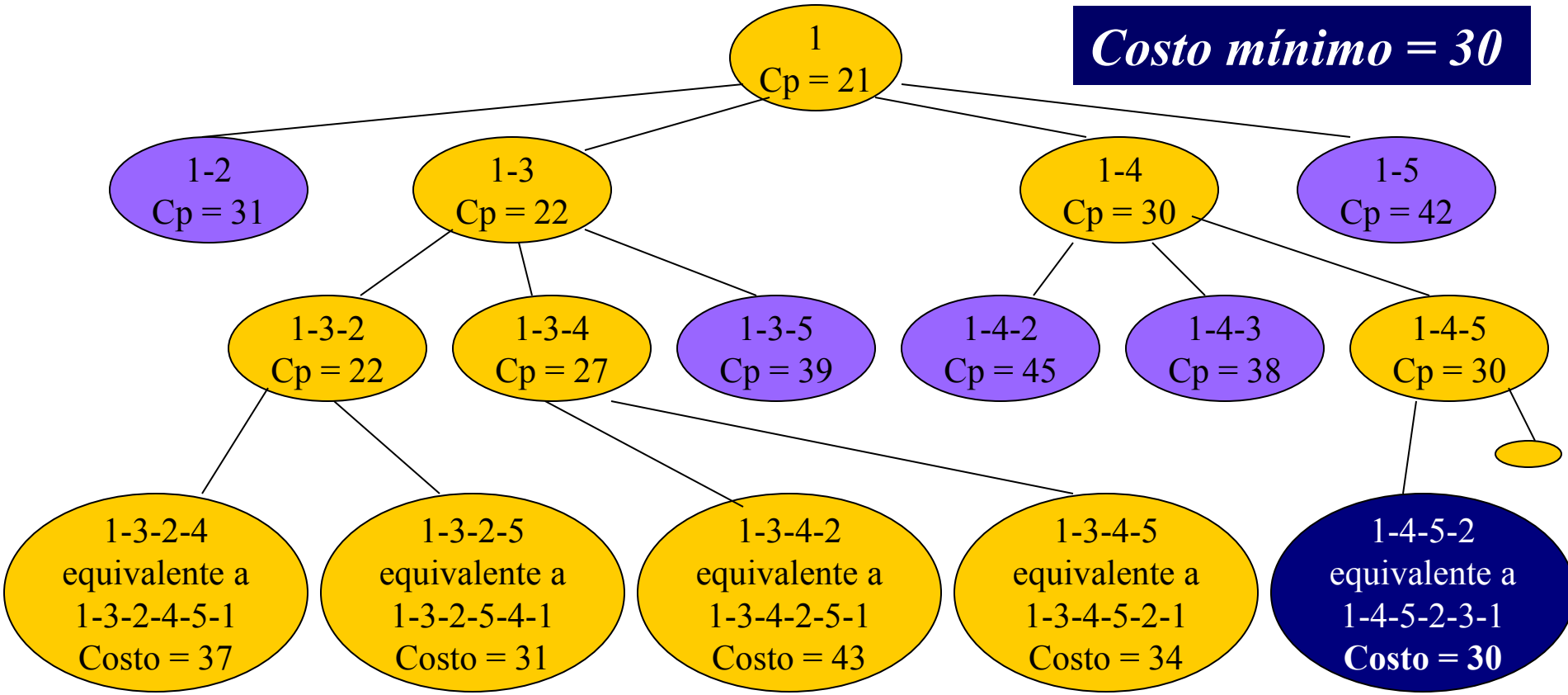
0	14	4	10	20
14	0	7	8	7
4	5	0	7	16
11	7	9	0	2
18	7	17	4	0



¿Cuál es el mejor nodo para expandir?

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 0 & 14 & 4 & 10 & 20 \\ 14 & 0 & 7 & 8 & 7 \\ 4 & 5 & 0 & 7 & 16 \\ 11 & 7 & 9 & 0 & 2 \\ 18 & 7 & 17 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$



Conclusión final
El Problema del Viajante de Comercio

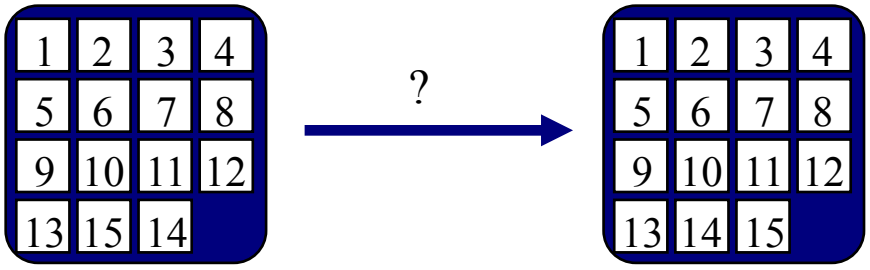
- Branch and bound ofrece una opción más de solución del problema del Viajante de Comercio…
- Sin embargo, NO asegura tener un buen comportamiento en cuanto a eficiencia, ya que en el peor caso tiene un tiempo exponencial…
- El problema puede ser resuelto con algoritmos heurísticos: SA, AG, FANS, TS, ...

El juego del 15

Samuel Loyd: El juego del 15 o “taken”.

Problema publicado en un periódico de Nueva York en 1878 y por cuya solución se ofrecieron 1000 dólares.

- El problema original:



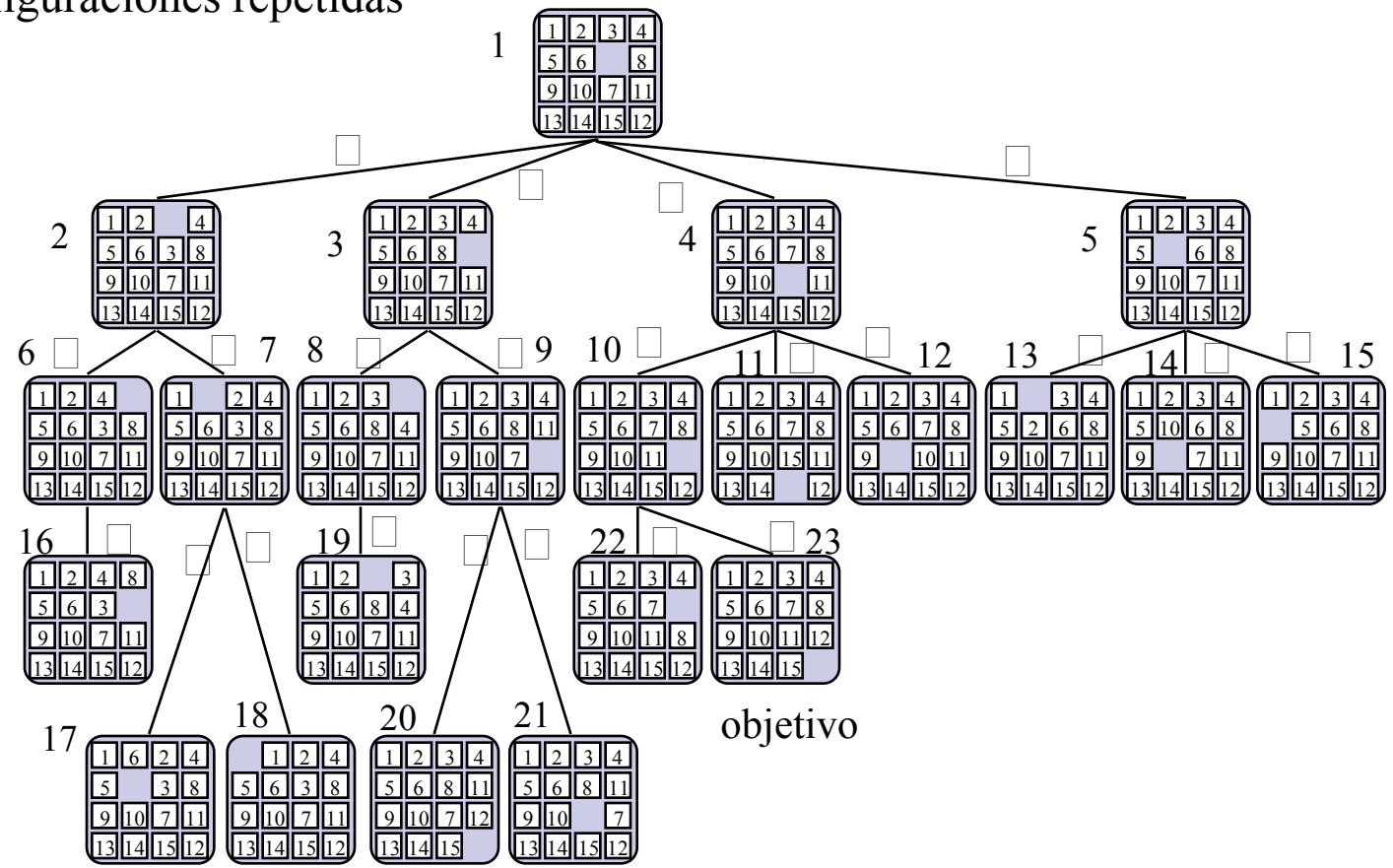
Problema de Lloyd

El objetivo

- Decisión: encontrar una secuencia de movimientos que lleven al objetivo
- Optimización: encontrar la secuencia de movimientos más corta

El juego del 15

- Configuración: permutación de (1,2,...,16)
- Solución: secuencia de configuraciones que
  - Empiezan en el estado inicial y acaban en el final.
  - De cada configuración se puede pasar a la siguiente.
  - No hay configuraciones repetidas



El juego del 15

- **Problema muy difícil para backtracking**
  - El árbol de búsqueda es potencialmente muy profundo (16! niveles), aunque puede haber soluciones muy cerca de la raíz.
- **Se puede resolver con branch and bound (aunque hay métodos mejores): Algoritmo A***
- **Funciones de prioridad:**
  - número de fichas mal colocadas (puede engañar)
  - suma, para cada ficha, de la distancia a la posición donde le tocaría estar
  - El 8-puzzle, introducción a la I.A. clásica