Ejercicio 14 (Relación 3)

José Alberto Hoces Castro

7 de abril 2021

Ejercicio 14. Dar un ejemplo que muestre que la composición de dos funciones cóncavas hacia arriba puede no ser cóncava hacia arriba.

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) := |x|$. Por una proposición vista en clase (la de la caracterización de la concavidad hacia arriba) en la diapositiva 6, podemos afirmar que f es cóncava hacia arriba en $\mathbb{R}$. La proposición dice así:

Dada $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, se dice que f es cóncava si:

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b) \qquad \forall a, b \in I \;\; con \;\; a < b \qquad t \in [0,1]$$

Aplicando esto a f se tiene que:

$$|ta + (1-t)b| \leq t|a| + (1-t)|b| \qquad \forall a, b \in \mathbb{R} \;\; con \;\; a < b \qquad t \in [0,1]$$

Lo cual es claro por las propiedades del valor absoluto. Por lo tanto, f es cóncava hacia arriba. Sea ahora $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $g(x) := x^2 - 9$. Por el corolario de la diapositiva 12, como g es continua en $\mathbb{R}$, derivable $\mathbb{R}$ y $g''(x) = 2 \geq 0$, concluimos que g también es cóncava hacia arriba en todo su dominio.

Definamos ahora $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ como la composición de las funciones f y g, es decir, $h(x) := (f \circ g)(x) = |x^2 - 9|$. Estudiemos la concavidad de h:

$$h(x) := \begin{cases} x^2 - 9 & si \quad x \leq -3 \\ -x^2 + 9 & si \quad -3 < x < 3 \\ x^2 - 9 & si \quad x \geq 3 \end{cases}$$

Estudiemos ahora la derivada segunda de h:

$$h''(x) := \begin{cases} 2 & si \quad x < -3 \\ -2 & si \quad -3 < x < 3 \\ 2 & si \quad x > 3 \end{cases}$$

Aplicando el corolario de la diapositiva 12, por el signo de h'' concluimos que h es cóncava hacia arriba en los intervalos $(-\infty, -3)$ y $(3, +\infty)$, mientras que es cóncava hacia abajo en el intervalo $(-3, 3)$. Por lo tanto, he aquí un ejemplo de composición de dos funciones cóncavas hacia arriba que no es cóncava hacia arriba en todo su dominio. Las gráficas de las funciones expuestas son:

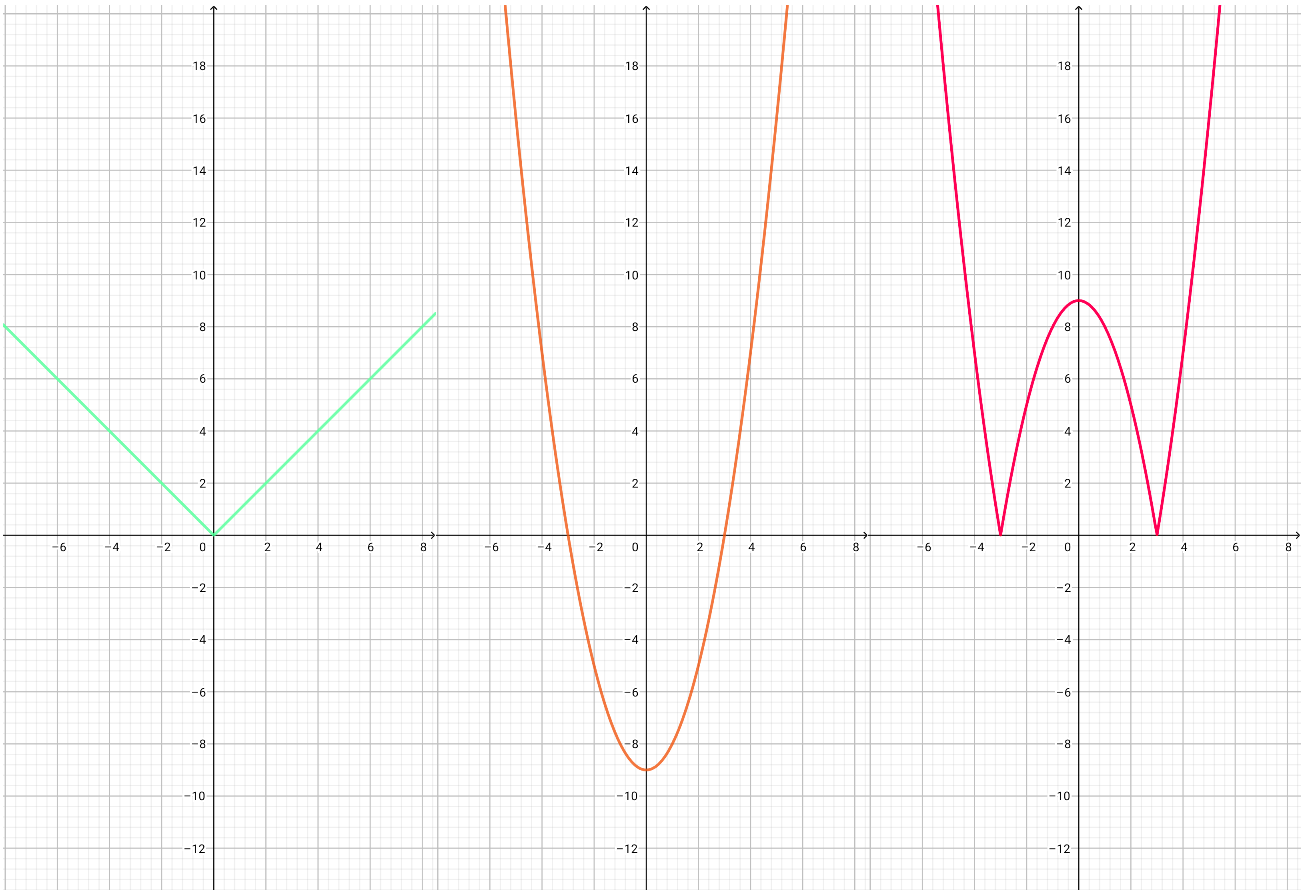

Figura 1: Gráficas de f,g y h respectivamente