Análisis Matemático I

Tema 1: El espacio euclídeo.
Espacios normados y espacios métricos

Definiciones y notación

Definición de $\mathbb{R}^N$

$$N \in \mathbb{N} \ \text{ fijo} \qquad \Delta_N = \{k \in \mathbb{N} : k \leqslant N\} = \{1, 2, \ldots, N\}$$

$$\mathbb{R}^N = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \overset{(N)}{\cdots} \times \mathbb{R} = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_N) \ : \ x_1, x_2, \ldots, x_N \in \mathbb{R} \right\}$$

Para cada $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, y cada $k \in \Delta_N$,

el número real x_k es la k-ésima componente de x

Notación alternativa sin subíndices

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\} \qquad \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N \quad \longleftrightarrow \quad x : \Delta_N \to \mathbb{R}, \quad x(k) = x_k \quad \forall k \in \Delta_N$$

Para cada $x \in \mathbb{R}^N$ y cada $k \in \Delta_N$ denotamos también por $x(k)$

a la k-ésima componente de x

Estructura de espacio vectorial

Suma y producto por escalares

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N, \quad y = (y_1, y_2, \ldots, y_N) \in \mathbb{R}^N, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Suma: $x + y = \big(x_1 + y_1 , x_2 + y_2 , \ldots , x_N + y_N \big)$

o bien $\big(x + y\big)(k) = x(k) + y(k) \quad \forall k \in \Delta_N$

Producto por escalares: $\lambda x = \big(\lambda x_1 , \lambda x_2 , \ldots , \lambda x_N \big)$

o bien $\big(\lambda x\big)(k) = \lambda x(k) \quad \forall k \in \Delta_N$

$\mathbb{R}^N$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$

Base usual de $\mathbb{R}^N$

$\mathbb{R}^N$ tiene dimensión N. Su base usual es:

$\{e_1, e_2, \ldots, e_N\}$ donde, para cada $k \in \Delta_N$, el vector $e_k \in \mathbb{R}^N$ viene dado por

$$e_k(k) = 1 \quad \text{y} \quad e_k(j) = 0 \quad \forall j \in \Delta_N \setminus \{k\}$$

$$x = \sum_{k=1}^{N} x_k \, e_k = \sum_{k=1}^{N} x(k) \, e_k \quad \forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$$

Las componentes de cada $x \in \mathbb{R}^N$ son las coordenadas de x en la base usual

Producto escalar

Producto escalar de $\mathbb{R}^N$

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N, \quad y = (y_1, y_2, \ldots, y_N) \in \mathbb{R}^N$$

El producto escalar de x por y es el número real $\big(x \,\big|\, y\big)$ dado por:

$$\big(x \,\big|\, y\big) = \sum_{k=1}^{N} x_k\, y_k = \sum_{k=1}^{N} x(k)\, y(k)$$

$(x,y) \mapsto \big(x \,\big|\, y\big)$, de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ en $\mathbb{R}$, es el producto escalar de $\mathbb{R}^N$

Propiedades del producto escalar

(P.1) $\big(\lambda u + \mu v \,\big|\, y\big) = \lambda \big(u \,\big|\, y\big) + \mu \big(v \,\big|\, y\big) \quad \forall u, v, y \in \mathbb{R}^N, \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

(P.2) $\big(x \,\big|\, y\big) = \big(y \,\big|\, x\big) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N$

(P.3) $\big(x \,\big|\, x\big) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$

Espacios pre-hilbertianos

Producto escalar en un espacio vectorial

X espacio vectorial, $\varphi : X \times X \to \mathbb{R}$ forma en dos variables

- φ es una forma bilineal cuando es lineal en cada variable, es decir, cuando fijado un $z \in X$ arbitrario, tanto $x \mapsto \varphi(x,z)$ como $y \mapsto \varphi(z,y)$ son aplicaciones lineales de X en $\mathbb{R}$
- φ es simétrica cuando: $\varphi(x,y) = \varphi(y,x) \ \ \forall x,y \in X$
- Cada forma bilineal simétrica φ lleva asociada una forma cuadrática:

  $$Q : X \to \mathbb{R}, \quad Q(x) = \varphi(x,x) \ \ \forall x \in X$$

  Se dice que Q es definida positiva cuando: $Q(x) > 0 \ \ \forall x \in X \setminus \{0\}$
- Un producto escalar en X es una forma bilineal simétrica $\varphi : X \times X \to \mathbb{R}$ cuya forma cuadrática asociada es definida positiva
- Un espacio pre-hilbertiano es un espacio vectorial X dotado de un producto escalar

Ejemplos de espacios pre-hilbertianos

De dimensión finita

$\mathbb{R}^N$ es un espacio pre-hilbertiano con su producto escalar, dado por:

$$\varphi(x,y) = \big(x \,\big|\, y\big) = \sum_{k=1}^{N} x(k)\, y(k) \qquad \forall x,y \in \mathbb{R}^N$$

Recibe el nombre de espacio euclídeo N-dimensional

De dimensión infinita

$C[0,1]$ espacio vectorial de todas las funciones continuas de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$

$$\varphi(x,y) = \int_0^1 x(t)\, y(t)\, dt \qquad \forall x,y \in C[0,1]$$

φ es un producto escalar, con el que $C[0,1]$ es un espacio pre-hilbertiano

Norma de un espacio pre-hilbertiano

Norma de un espacio pre-hilbertiano

X espacio prehilbertiano, con producto escalar $(x,y) \mapsto \big(x \,\big|\, y\big)$

Norma de un vector $x \in X$: $\quad \|x\| = \big(x \,\big|\, x\big)^{1/2}$

La aplicación $x \mapsto \|x\|$, de X en $\mathbb{R}$, es la norma del espacio pre-hilbertiano X, o la norma asociada al producto escalar de X

Propiedades de la norma

(N.1) $\quad \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \qquad \forall x,y \in X$

(N.2) $\quad \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\| \qquad \forall x \in X, \ \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

(N.3) $\quad x \in X, \ \ \|x\| = 0 \implies x = 0$

Desigualdad de Cauchy-Schwartz

$$\big|\big(x \,\big|\, y\big)\big| \leqslant \|x\|\,\|y\| \qquad \forall x,y \in X$$

Se verifica la igualdad si, y sólo si, x e y son linealmente dependientes

Ejemplo en dimensión finita

Norma euclídea de $\mathbb{R}^N$

La norma del espacio euclídeo N-dimensional se denomina norma euclídea

Viene dada por: $$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{N} x(k)^2\right)^{1/2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

Para cada $x \in \mathbb{R}^N$, $\|x\|$ se interpreta como la longitud del vector x

Sus propiedades tienen una clara interpretación geométrica:

- $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N$ (Desigualdad triangular)
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$ (Homogeneidad por homotecias)
- $x \in \mathbb{R}^N, \quad \|x\| = 0 \implies x = 0$ (No degeneración)

Desigualdad de Cauchy-Schwartz en $\mathbb{R}^N$:

$$\left|\sum_{k=1}^{N} x(k)\, y(k)\right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{N} x(k)^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{N} y(k)^2\right)^{1/2} \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^N$$

La norma euclídea en $\mathbb{R}$ es el valor absoluto: $\|x\| = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$

La igualdad $\big|\left(x \,\middle|\, y\right)\big| = \|x\| \, \|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N$ sólo se verifica cuando $N = 1$

Ejemplo en dimensión infinita

La norma de $C[0,1]$

La norma del espacio pre-hilbertiano $C[0,1]$, viene dada por:

$$\|x\| = \left(\int_0^1 x(t)^2\,dt\right)^{1/2} \qquad \forall\, x \in C[0,1]$$

En este caso, la desigualdad de Cauchy-Schwartz es:

$$\left|\int_0^1 x(t)\,y(t)\,dt\right| \leqslant \left(\int_0^1 x(t)^2 dt\right)^{1/2} \left(\int_0^1 y(t)^2 dt\right)^{1/2} \qquad \forall\, x,y \in C[0,1]$$

Concepto de espacio normado

Norma en un espacio vectorial

Una norma en un espacio vectorial X es una aplicación

$x \mapsto \|x\|$, de X en $\mathbb{R}$, que verifica:

(N.1) Desigualdad triangular: $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X$

(N.2) Homogeneidad por homotecias: $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \quad \forall x \in X, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

(N.3) No degeneración: $x \in X, \ \|x\| = 0 \implies x = 0$

Un espacio normado es un espacio vectorial X, dotado de una norma $\|\cdot\|$

Propiedades de todas las normas

En todo espacio normado X, se tiene:

- $\|x\| \geqslant 0 \ \ \forall x \in X$, siendo $\|x\| = 0$ si, y sólo si, $x = 0$
- $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x \pm y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \ \ \forall x, y \in X$
- Si $n \in \mathbb{N}, \ x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \right\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|\lambda_k x_k\| = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \, \|x_k\|$$

Ejemplos de espacios normados

Espacios pre-hibertianos

Todo espacio pre-hilbertiano es un espacio normado, con la norma asociada a su producto escalar

Normas en $\mathbb{R}$

Toda norma en $\mathbb{R}$ es proporcional al valor absoluto

Otras normas en $\mathbb{R}^N$

Norma de la suma: $$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{N} |\,x(k)\,| \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

Norma del máximo: $$\|x\|_\infty = \max\left\{\,|\,x(k)\,| \,:\, k \in \Delta_N\,\right\} \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

Otras normas en un espacio vectorial de dimensión infinita

Para $x \in C[0,1]$ podemos definir:

$$\|x\|_1 = \int_0^1 |x(t)|\,dt \qquad \text{y} \qquad \|x\|_\infty = \max\left\{|x(t)| \,:\, t \in [0,1]\right\}$$

Concepto de espacio métrico

Distancia de un espacio normado

X espacio normado. Distancia entre dos puntos:

$$d(x,y) = \|y - x\| \qquad \forall x,y \in X$$

A partir de la distancia, recuperamos la norma: $\|x\| = d(0,x) \quad \forall x \in X$

Propiedades de la distancia:

- $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z) \quad \forall x,y,z \in X$
- $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y \in X$
- $d(x,y) = 0 \iff x = y$

Distancia en un conjunto

Distancia en un conjunto $E \neq \emptyset$: función $d : E \times E \to \mathbb{R}$ que verifica

(D.1) Desigualdad triangular: $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z) \quad \forall x,y,z \in E$

(D.2) Simetría: $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y \in E$

(D.3) No degeneración. Para $x,y \in E$, se tiene: $d(x,y) = 0 \iff x = y$

Cuando tenemos definida una distancia $d : E \times E \to \mathbb{R}$,
decimos que E es un espacio métrico

Propiedades y ejemplos

Propiedades de todas las distancias

En todo espacio métrico E, con distancia d, se tiene:

- $d(x,y) \geqslant 0 \quad \forall x,y \in E$
- $|d(x,z) - d(y,z)| \leqslant d(x,y) \quad \forall x,y,z \in E$
- $n \in \mathbb{N},\ x_0, x_1, \ldots, x_n \in E \implies d(x_0,x_n) \leqslant \sum_{k=1}^{n} d(x_{k-1},x_k)$

Primeros ejemplos de espacios métricos

Todo espacio normado X se considera siempre como espacio métrico, con la distancia asociada a su norma: $d(x,y) = \|y-x\| \quad \forall x,y \in X$

En $\mathbb{R}^N$ disponemos de tres distancias, definidas para $x,y \in \mathbb{R}^N$, como sigue:

- Distancia euclídea: $d(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{N} \big(y(k)-x(k)\big)^2\right)^{1/2}$
- Distancia de la suma: $d_1(x,y) = \sum_{k=1}^{N} |y(k)-x(k)|$
- Distancia del máximo: $d_\infty(x,y) = \max\big\{|y(k)-x(k)| : k \in \Delta_N\big\}$

Para $N=1$ coinciden. Distancia usual: $d(x,y) = |y-x| \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

Otros ejemplos de espacios métricos

Norma y distancia inducidas

- X espacio normado con $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$. Y subespacio vectorial de X
  La restricción de $\|\cdot\|$ a Y es una norma $\|\cdot\|_Y : Y \to \mathbb{R}$
  Se dice que $\|\cdot\|_Y$ es la norma inducida por $\|\cdot\|$ en Y
  Con la norma $\|\cdot\|_Y$, se dice que Y es un subespacio normado de X
- E espacio métrico con distancia $d : E \times E \to \mathbb{R}$. $\emptyset \neq A \subset E$
  Al restringir d se obtiene una distancia $d_A : A \times A \to \mathbb{R}$
  Se dice que d_A es la distancia inducida por d en A
  Con la distancia d_A, se dice que A es un subespacio métrico de E
- Un espacio normado $X \neq \{0\}$ tiene multitud de subespacios métricos que no son subespacios normados de X

Distancia discreta

E conjunto no vacío arbitrario. Distancia discreta en E:

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$