GEOMETRÍA III (Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas)

Respuestas Examen Final Convocatoria Extraordinaria

1. *En el espacio euclidiano* $\mathbb{R}^3$ *llamemos*

   - $G\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *al giro de ángulo* $\pi/4$ *y eje* $S = (1,-1,1) + L(\{(0,0,1\})$, *y*
   - $\sigma\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *a la simetría ortogonal respecto del plano*

   $$\Pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x - y = 0\}.$$

   a) *Encuentra la matriz que representa a* G *y a* σ *en el sistema de referencia usual.*

   b) *Clasifica el movimiento rígido* $\sigma \circ G$ *y describe sus elementos geométricos.*

Respuesta:

Item a): El movimiento G es un giro con eje

$$S = (1,-1,1) + L(\{(0,0,1\}) = (1,-1,0) + L(\{(0,0,1\})$$

y ángulo $\pi/4$. Un sistema de referencia rectangular $\mathcal{R} = \{p_0, B\}$ natural para G ha de tener por origen un punto $p_0 \in S$ y como base ortonormal de direcciones $B = \{v_1, v_2, v_2\}$ una donde $\{v_1, v_2\}$ sea base ortonormal de $\overrightarrow{S}^\perp$ y $v_3 \in \overrightarrow{S}$ un vector unitario. Esto conlleva la elección de una orientación en $\overrightarrow{S}^\perp$, justo la que induce la base $\{v_1, v_2\}$, relativa a la cual realizaremos el ejercicio. Como $(1,-1,0) \in S$, $\overrightarrow{S} = L(\{(0,0,1)\}$ y $\overrightarrow{S}^\perp = L(\{(1,0,0),(0,1,0)\}$, por criterios de sencillez elegiremos

$$p_0 = (1,-1,0), \ \ v_1 = (1,0,0), \ v_2 = (0,1,0), \ v_3 = (0,0,1);$$

observemos que con esta elección $B = B_0$ es la base usual de $\mathbb{R}^3$.

Teniendo en cuenta que $\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, se tiene que

$$M(G,\mathcal{R}) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) & 0 \\ 0 & \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Como

$$M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

tenemos que

$$M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}_0, \mathcal{R}) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

La identidad

$$M(G,\mathcal{R}_0) = M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3},\mathcal{R},\mathcal{R}_0)\cdot M(G,\mathcal{R})\cdot M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3},\mathcal{R}_0,\mathcal{R})$$

nos proporciona finalmente

$$M(G,\mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

esto es

$$M(G,\mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1-\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Procedamos ahora a calcular $M(\sigma,\mathcal{R}_0)$ para la simetría ortogonal $\sigma\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ respecto del plano $\Pi = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \colon x-y=0\}$. Para ello calcularemos primero la proyección ortogonal $\pi\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ respecto del plano $\Pi = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon x-y=0\}$. Tomemos $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ y llamemos $\pi(x,y,z)=(a,b,c)$. Sabemos que

- $(a,b,c)\in\Pi$, esto es, $a-b=0$.
- $\overrightarrow{(x,y,z)(a,b,c)} = (a-x,b-y,c-z)\in\overrightarrow{\Pi}^{\perp} = L(\{(1,-1,0)\})$. Como

  $$L(\{(1,-1,0)\}) = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon z = x+y=0\},$$

  esto equivale a que $c-z = a-x+b-y = 0$.

Resolviendo en a,b,c nos queda $a=b=\frac{1}{2}(x+y),\ c=z$, y por tanto

$$\pi(x,y,z) = \frac{1}{2}(x+y,x+y,2z).$$

Como por definición de la simetría ortogonal $\sigma = 2\pi - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$, finalmente queda

$$\sigma(x,y,z) = (x+y,x+y,2z)-(x,y,z) = (y,x,z),$$

esto es

$$M(\sigma,\mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

lo que concluye el item a).

Item b): El movimiento $\sigma\circ G$ viene representado en la referencia usual $\mathcal{R}_0$ por la matriz

$$M(\sigma\circ G,\mathcal{R}_0) = M(\sigma,\mathcal{R}_0)\cdot M(G,\mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1-\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

esto es,

$$M(\sigma \circ G, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 1-\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Llamemos $f = \sigma \circ G$, y observemos que f es un movimiento inverso al ser composición de un directo y un inverso (o por comprobación directa $\det(\overrightarrow{f}) = -1$). Procedamos a clasificar f y determinar sus elementos geométricos. Para ello estudiemos su conjunto de puntos fijos

$$\mathcal{P}_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon f(x, y, z) = (x, y, z)\}.$$

Como

$$f(x, y, z) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) - 1, \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y) + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, z \right),$$

es inmediato comprobar que $\mathcal{P}_f = \varnothing$, y por tanto f es una simetría deslizante respecto a un plano afín $T \subset \mathbb{R}^3$.

La variedad de dirección $\overrightarrow{T}$ de T coincide con $\mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$, esto es,

$$\overrightarrow{T} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon \overrightarrow{f}(x, y, z) = (x, y, z)\}.$$

Como

$$\overrightarrow{f}(x, y, z) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y), \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y), z \right),$$

finalmente queda

$$\overrightarrow{T} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon y - \left(\sqrt{2}-1\right) x = 0\} = L(\{(0,0,1), (1, \sqrt{2}-1, 0)\})$$

Para determinar T basta con encontrar un punto $p_0 \in T$, nos sirve el punto medio del segmento que formen p y $f(p)$ para cualquier $p \in \mathbb{R}^3$. Eligiendo por ejemplo $p = (0,0,0)$ tenemos que $f(0,0,0) = \big(-1, 1-\sqrt{2}, 0\big)$ y por tanto

$$p_0 = \frac{1}{2}\big(-1, 1-\sqrt{2}, 0\big) \in T,$$

y de aquí que

$$T = p_0 + \overrightarrow{T} = \frac{1}{2}\big(-1, 1-\sqrt{2}, 0\big) + L(\{(0,0,1), (1, \sqrt{2}-1, 0)\}).$$

Por último, el vector de deslizamiento u de F coincide con $\overrightarrow{pf(p)}$ para cualquier $p \in T$. Eligiendo $p = p_0 = \frac{1}{2}\big(-1, 1-\sqrt{2}, 0\big) \in T$ un cálculo directo nos da

$$u = (-1, 1-\sqrt{2}, 0).$$

2. *Clasifica afínmente la cuádrica de* $\mathbb{R}^3$

$$H = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon 1 - 4x_1 + x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 + 4x_3 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3 + x_3^2 = 0\},$$

encontrando un sistema de referencia afín en el que venga representada por su matriz canónica.

Respuesta: La matriz que representa a H en el sistema de referencia usual $\mathcal{R}_0$ es

$$\hat{C} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & -2 & 0 & 2 \\ \hline -2 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right),$$

de donde su núcleo cuadrático queda

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Los correspondientes polinomios característicos quedan

$$\hat{p}(t) = \det(\hat{C} - t\mathrm{Id}_4) = 45 + 36t - 14t^2 - 4t^3 + t^4 = (-5+t)(-3+t)(1+t)(3+t),$$

$$p(t) = \det(C - t\mathrm{Id}_3) = -27 + 9t + 3t^2 - t^3 = -(-3+t)^2(3+t).$$

Por comprobación directa o usando la regla de Descartes se concluye que

$$R_H = 4 = r_H + 1, \quad S_H = 0 = s_H - 1,$$

por lo que la forma reducida de H es

$$\hat{C}_0 = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

y se trata de un hiperboloide de dos hojas.

Para encontrar el sistema de referencia donde adopta la forma reducida procedemos a diagonalizar el núcleo cuadrático C determinando bases ortonormales de los subespacios propios para sus valores propios $t = 3, -3$.

$$V_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon (C - 3\mathrm{Id}_3).(x,y,z)^{\mathrm{t}} = 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + y + z = 0\} =$$

$$= L\big(\{(1,-1,0),(1,1,-2)\}\big) = L\big(\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)\}\big),$$

$$V_{-3} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon (C{+}3\mathrm{Id}_3).(x,y,z)^{\mathrm{t}} = 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x = y = z\} = L\big(\{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\}\big).$$

Formamos el sistema de referencia con base de direcciones apropiada para alcanzar la forma de Sylvester de C

$$\mathcal{R}_1 = \big\{(0,0,0), B_1 = \{\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,0), \frac{1}{3\sqrt{2}}(1,1,-2), \frac{1}{3}(1,1,1)\}\big\}.$$

Como

$$M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right),$$

la hipercuádrica H viene representada en $\mathcal{R}_1$ por la matriz

$$\hat{C}_1 = M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0)^{\mathrm{t}} \cdot \hat{C} \cdot M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & -\sqrt{2} & 0 \\ \hline -\sqrt{\frac{2}{3}} & 1 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Si denotamos por $p_{\mathcal{R}_1} = (x_1, y_1, z_1)$ las coordenadas genéricas en $\mathcal{R}_1$ de los puntos $p \in \mathbb{R}^3$, la ecuación polinomica asociada a H en $\mathcal{R}_1$ quedaría

$$x_1^2 + y_1^2 - z_1^2 - 2\sqrt{\frac{2}{3}}x_1 - 2\sqrt{2}y_1 + 1 = 0,$$

y completando cuadrados

$$\left(x_1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 + \left(y_1 - \sqrt{2}\right)^2 - z_1^2 - \frac{5}{3} = 0,$$

esto es,

$$\left(\sqrt{\frac{3}{5}}x_1 - \sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{5}}y_1 - \sqrt{\frac{6}{5}}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{3}{5}}z_1\right)^2 - 1 = 0.$$

Llamemos $\mathcal{R}_2$ al sistema de referencia de $\mathbb{R}^3$ en el que los puntos $p \in \mathbb{R}^3$ se escriben con coordenadas $p_{\mathcal{R}_2}$ satisfaciendo

$$x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}z_1,\ y_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}y_1 - \sqrt{\frac{6}{5}},\ z_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}x_1 - \sqrt{\frac{2}{5}},$$

esto es, el Ãºnico que satisface

$$M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{5}} \\ -\sqrt{\frac{6}{5}} & 0 & \sqrt{\frac{3}{5}} & 0 \\ -\sqrt{\frac{2}{5}} & \sqrt{\frac{3}{5}} & 0 & 0 \end{array}\right).$$

En este sistema de referencia la matriz la ecuación polinómica que representa a H es

$$-x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - 1 = 0 \Longleftrightarrow x_2^2 - y_2^2 - z_2^2 + 1 = 0,$$

por lo que salvo cambiar el signo la matriz $\hat{C}_2$ que representa a H en $\mathcal{R}_2$ es $\hat{C}_0$.

3. *Consideremos en $\mathbb{P}^4$ las variedades proyectivas*

$$Y = V\big(\{(1:0:-1:0:1), (0:1:0:1:-1), (2:2:-2:1:2)\}\big),$$

$$Z = \{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4) \in \mathbb{P}^4 \colon x_0 - x_1 + x_4 = 0, 2x_0 + x_2 - x_3 = 0\}.$$

a) *Determina las ecuaciones implícitas canónicas de los subespacios $Y \cap Z, Y \vee Z$.*

b) *Determina las ecuaciones implícitas en el sistema de referencia usual de $\mathbb{R}^4$ de los subespacios afines R, S de $\mathbb{R}^4$ con proyectivizaciones $X_R = Y \cap Z, X_S = Y \vee Z$.*

c) *Determina las ecuaciones implícitas canónicas en $\mathbb{P}^4$ de las variedades del infinito R_∞, S_∞ de los subespacios afines R, S.*

Respuesta:

Item a): Primero calculemos las ecuaciones implícitas canónicas de Y. Como

$$Y = V\big(\{(1:0:-1:0:1),(0:1:0:1:-1),(2:2:-2:1:2)\}\big)$$

y los puntos $(1:0:-1:0:1),(0:1:0:1:-1),(2:2:-2:1:2)$ de $\mathbb{P}^4$ son proyectivamente independientes, un punto $(x_0:x_1:x_2:x_3:x_4) \in \mathbb{P}^4$ pertence a Y si y solo si

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & x_0 \\ 0 & 1 & 2 & x_1 \\ -1 & 0 & -2 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \\ 1 & -1 & 2 & x_4 \end{pmatrix} = 3.$$

Como la submatriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

es de rango 3, $(x_0:x_1:x_2:x_3:x_4) \in Y$ si y sólo si

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & x_0 \\ 0 & 1 & 2 & x_1 \\ -1 & 0 & -2 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & x_0 \\ 0 & 1 & 2 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \\ 1 & -1 & 2 & x_4 \end{pmatrix} = 0,$$

esto es,

$$x_0 + x_2 = x_0 + x_1 - 2x_3 - x_4 = 0$$

que son las ecuaciones implícitas canónicas de Y.

Ahora es claro que

$$Y \cap Z = \{(x_0:x_1:x_2:x_3:x_4) \in \mathbb{P}^4 \colon x_0+x_2 = x_0+x_1-2x_3-x_4 = x_0-x_1+x_4 = 2x_0+x_2-x_3 = 0\},$$

y eliminando ecuaciones dependientes o redundantes

$$Y \cap Z = \{(x_0:x_1:x_2:x_3:x_4) \in \mathbb{P}^4 \colon x_0+x_2 = x_0+x_1-2x_3-x_4 = x_0-x_1+x_4 = 0\}.$$

La última expresión determina las ecuaciones implícitas canónicas de $Y \cap Z$. De hecho pasando a paramétricas se deduce que

$$Y \cap Z = V\big(\{(1:0:-1:1:-1),(0:1:0:0:1)\}\big).$$

Para calcular $Y \vee Z$ resolvamos el sistema que nos proporcionan las ecuaciones implicícitas canónicas de Z y observemos que

$$Z = V\big(\{(1:0:0:2:-1),(0:1:0:0:1),(0:0:1:1:0)\}\big),$$

o equivalentemente

$$Z = V\big(\{(1:0:-1:1:-1),(0:1:0:0:1),(0:0:1:1:0)\}\big),$$

y por tanto
$$Z = (Z \cap Y) \vee \{(0:0:1:1:0)\}.$$
Como
$$Y = V\big(\{(1:0:-1:0:1), (0:1:0:1:-1), (2:2:-2:1:2)\}\big),$$
o equivalentemente
$$Y = V\big(\{(0:1:0:1:-1), (1:0:-1:1:-1), (0:1:0:0:1)\}\big),$$
deducimos igualmente que
$$Y = (Y \cap Z) \vee (\{(0:1:0:1:-1)\}.$$
De lo anterior se tiene que
$$Y \vee Z = V\big(\{(0:0:1:1:0), (0:1:0:1:-1)\}\big),$$
esto es
$$Y \vee Z = V\big(\{(1:0:-1:1:-1), (0:1:0:0:1), (0:0:1:1:0), (0:1:0:1:-1)\}\big).$$
La ecuación implícita de $Y \vee Z$ se corresponde con
$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & x_1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & x_3 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & x_4 \end{pmatrix} = -3x_0 - x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0.$$

Item b): Recordemos el embebimiento canónico de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{P}^4$
$$\mathfrak{e}\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{P}^4, \quad \mathfrak{e}(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4),$$
el hiperplano del infinito
$$\mathbb{R}^4_\infty = \{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4) \in \mathbb{P}^4 \colon x_0 = 0\} \subset \mathbb{P}^4,$$
y la transformación inversa
$$\mathfrak{e}^{-1}\colon \mathbb{P}^4 \setminus \mathbb{R}^4_\infty \to \mathbb{R}^4, \quad \mathfrak{e}^{-1}(x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4) = (x_1/x_0, x_2/x_0, x_3/x_0, x_4/x_0).$$
Como
$$Y \cap Z = \{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4) \in \mathbb{P}^4 \colon x_0 + x_2 = x_0 + x_1 - 2x_3 - x_4 = x_0 - x_1 + x_4 = 0\},$$
el subespacio afín R con proyectivización $Y \cap Z$ viene dado por
$$R = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \colon 1 + x_2 = 1 + x_1 - 2x_3 - x_4 = 1 - x_1 + x_4 = 0\}.$$
Análogamente el subespacio afín S con proyectivización $Y \vee Z$ viene dado por
$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \colon -3 - x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0\}.$$

Item c): Las ecuaciones implícitas canónicas de las variedades del infinito de R, S son por tanto
$$R_\infty = \{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4) \in \mathbb{P}^4 \colon x_0 = x_2 = x_1 - 2x_3 - x_4 = -x_1 + x_4 = 0\},$$
$$S_\infty = \{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4) \in \mathbb{P}^4 \colon x_0 = -x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0\}.$$