Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Cálculo I – Evaluación 5 – Soluciones

1. Estudia según los valores de $a\in\mathbb{R}$ la convergencia de las series:

$$\text{a)}\quad \sum_{n\geqslant 1}\frac{((3n)!)^2}{(n!)^6}a^{6n}; \qquad\qquad \text{b)}\ \sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{4\cdot 6\cdot 8\dots(2n+2)}{9\cdot 11\cdot 13\dots(2n+7)}\right)^a$$

Solución.

a) Pongamos $a_n=\dfrac{((3n)!)^2}{(n!)^6}a^{6n}$. Si $a=0$, se trata de la serie nula que, evidentemente, converge a 0. Supuesto que $a\neq 0$, se trata de una serie de términos positivos. La forma de a_n sugiere aplicar el criterio del cociente. Tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{((3(n+1))!)^2}{((n+1)!)^6}\frac{(n!)^6}{((3n)!)^2}a^6=\frac{((3n+3)!)^2}{((3n)!)^2}\frac{1}{(n+1)^6}a^6=\\ &=\frac{(3n+3)^2(3n+2)^2(3n+1)^2}{(n+1)^6}a^6=\frac{3^2(3n+2)^2(3n+1)^2}{(n+1)^4}a^6 \quad\longrightarrow\quad 3^6a^6\end{aligned}$$

Por tanto, si $3^6a^6<1$, es decir, $|a|<\frac{1}{3}$, la serie es convergente, y si $|a|>\frac{1}{3}$, la serie es divergente. El caso en que $|a|=\frac{1}{3}$, el cociente $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge a 1 por valores menores que 1, por lo que el criterio del cociente no proporciona información sobre la convergencia de la serie. Para estudiar este caso podemos usar el criterio de Raabe en su forma alternativa. Si $|a|=\frac{1}{3}$, tenemos que

$$\begin{aligned}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^n &= \left(\frac{3^4(n+1)^4}{(3n+2)^2(3n+1)^2}\right)^n=\left(\frac{3n+3}{3n+2}\right)^{2n}\left(\frac{3n+3}{3n+1}\right)^{2n}=\\ &=\left(1+\frac{1}{3n+2}\right)^{2n}\left(1+\frac{2}{3n+1}\right)^{2n}\longrightarrow \mathrm{e}^{\frac{2}{3}}\,\mathrm{e}^{\frac{4}{3}}=\mathrm{e}^2\end{aligned}$$

Concluimos que para $|a|=\frac{1}{3}$ la serie es convergente.

b) Pongamos $a_n=\left(\dfrac{4\cdot 6\cdot 8\dots(2n+2)}{9\cdot 11\cdot 13\dots(2n+7)}\right)^a$. Para $a\leqslant 0$ se tiene que $a_n\geqslant 1$, por lo que, al no cumplirse la condición necesaria de convergencia, la serie es divergente. Supuesto que $a>0$, tenemos que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\left(\frac{2n+4}{2n+9}\right)^a\longrightarrow 1$$

Como el cociente $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge a 1 por valores menores que 1, el criterio del cociente no proporciona información sobre la convergencia de la serie. Usaremos seguidamente el criterio de Raabe en su forma alternativa.

$$\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^n=\left(\frac{2n+9}{2n+4}\right)^{an}=\left(1+\frac{5}{2n+4}\right)^{an}\longrightarrow \mathrm{e}^{\frac{5}{2}a}$$

Luego si $a>\frac{2}{5}$ la serie es convergente y si $a<\frac{2}{5}$ la serie es divergente.

Comentarios. Como las potencias de exponente positivo son estrictamente crecientes en $\mathbb{R}^+$, es claro que $3^6a^6<1\Leftrightarrow\sqrt[6]{3^6a^6}<1\Leftrightarrow 3\sqrt[6]{a^6}<1\Leftrightarrow 3|a|<1$, porque las raíces pares son positivas y $\sqrt[6]{a^6} = |a|$. Algunos lo olvidan, y no es igual afirmar que la serie en a) converge para $a < \frac{1}{3}$ que para $|a| < \frac{1}{3}$. Para estudiar el caso en que $|a| = \frac{1}{3}$, la mayoría no usáis la forma alternativa del criterio de Raabe sino que lo aplicáis directamente con lo que trabajáis más de lo necesario, si hubierais simplificado del todo puede que hubierais reconocido al número e y podríais haberos ahorrado un poco de trabajo.

En la segunda serie algunos han estudiado lo que pasa cuando $a = \frac{2}{5}$, y para ello han usado una técnica que está explicada en mi libro *Cálculo diferencial e integral de funciones de una variable*. Me parece estupendo, ha sido una agradable sorpresa para mí que algunos de vosotros consultéis ese libro que mis compañeros de Departamento silencian y no recomiendan a sus alumnos aunque sí lo hacen profesores de otras universidades. En este curso hay un grupo de estudiantes a quienes se les dan bien las matemáticas y les gusta esta asignatura pero, como dije, no era necesario hacer este estudio, porque, a diferencia de la primera serie en la que el caso dudoso se resuelve fácilmente con un criterio conocido, en esta segunda serie la técnica aludida es muy específica y no la hemos visto en clase.

2. Estudia la convergencia y la convergencia absoluta de las series:

$$\text{a)} \sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+1}; \qquad\qquad \text{b)} \sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n}\frac{1}{\sqrt{n+2}\,\sqrt[n+2]{3}}$$

Solución.

a) Estudiaremos en primer lugar la convergencia absoluta, es decir, la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$ donde $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+1}$. Tenemos que:

$$\frac{1}{n+1} = \frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+\sqrt{n}} \leqslant a_n = \frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+1} < \frac{1}{n}$$

La desigualdad de la izquierda implica, por el criterio básico de comparación, que la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es divergente, es decir, la serie $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}a_n$ no converge absolutamente.

Para ver si es convergente, como se trata de una serie alternada, aplicaremos el criterio de Leibniz. La desigualdad de la derecha implica que $\{a_n\} \to 0$. Probaremos que la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente. Tenemos que:

$$a_{n+1} < a_n \Longleftrightarrow \frac{\sqrt{n+1}}{(n+1)\sqrt{n+1}+1} < \frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+1} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow n\sqrt{n(n+1)} + \sqrt{n+1} < (n+1)\sqrt{n(n+1)} + \sqrt{n} \Longleftrightarrow \sqrt{n+1} < \sqrt{n(n+1)} + \sqrt{n}$$

Como esta última desigualdad es evidentemente cierta para todo $n \in \mathbb{N}$, concluimos que $\{a_n\}$ es decreciente y, por el criterio de Leibniz, la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}a_n$ es convergente.

b) Pongamos $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+2}\,\sqrt[n+2]{3}}$. Puesto que $1 < \sqrt[n+2]{3} < 2$, tenemos que

$$\frac{1}{2\sqrt{n+2}} < a_n < \frac{1}{\sqrt{n+2}}$$

y deducimos, por el criterio básico de comparación, que la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ no es convergente, es decir, la serie $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n a_n$ no converge absolutamente. También deducimos que $\{a_n\} \to 0$. Si probamos que $\{a_n\}$ es decreciente, por el criterio de Leibniz, la serie $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n a_n$ será convergente. Tenemos que

$$\frac{1}{\sqrt{n+3}\,\sqrt[n+3]{3}} < \frac{1}{\sqrt{n+2}\,\sqrt[n+2]{3}} \iff \frac{3^{\frac{1}{n+2}}}{3^{\frac{1}{n+3}}} < \frac{\sqrt{n+3}}{\sqrt{n+2}} \iff 3^{\frac{1}{(n+2)(n+3)}} < \sqrt{\frac{n+3}{n+2}} \tag{1}$$

$$\iff 9^{\frac{1}{(n+2)}} < \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{n+3}$$

Recordemos que para todo $m\in\mathbb{N}$ es $(1+\frac{1}{m})^{m+1} > \mathrm{e}$, y además, como $\mathrm{e}^3 > (\frac{5}{2})^3 = \frac{125}{8} > 9$, es claro que para todo $n\in\mathbb{N}$ es $\mathrm{e}^{n+2} > 9$. Por tanto:

$$\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{n+3} = \left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n+3} > \mathrm{e} > 9^{\frac{1}{(n+2)}}$$

Concluimos que $\{a_n\}$ es decreciente y, por el criterio de Leibniz, la serie $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n a_n$ es convergente.

Comentario. Hay muchas alternativas para estudiar estas series. Por ejemplo, para la primera puede usarse la evidente equivalencia asintótica $\{n+1/\sqrt{n}\}\sim\{n\}$ para deducir que

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+1} = \frac{1}{n+1/\sqrt{n}} \sim \frac{1}{n}$$

Como la serie $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ es divergente, se deduce, por el criterio límite de comparación, que $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ también es divergente, es decir, la serie $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}a_n$ no es absolutamente convergente. Naturalmente, también se deduce que $\{a_n\}\to 0$ puesto que sucesiones asintóticamente equivalentes tienen el mismo límite.

En la segunda serie, puesto que $\left\{\sqrt[n]{3}\right\}\to 1$, puede usarse la equivalencia asintótica

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+2}\,\sqrt[n+2]{3}} \sim \frac{1}{\sqrt{n+2}}$$

para deducir, por el criterio límite de comparación, que $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es divergente, es decir, la serie $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}a_n$ no es absolutamente convergente. Naturalmente, también se deduce que $\{a_n\}\to 0$.

Donde muchos se equivocan es al tratar de probar que la sucesión $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+2}\,\sqrt[n+2]{3}}$ es decreciente. Para probar desigualdades no pueden usarse equivalencias asintóticas ni razonamientos que impliquen límites de sucesiones que convergen más o menos rápidamente como algunos hacéis. Cuando la demostración directa es trabajosa o no evidente, pueden usarse, como he hecho yo, otras desigualdades conocidas. Algunos utilizan la desigualdad básica

$$ab^n < \left(\frac{a+nb}{n+1}\right)^{n+1}$$

Haciendo en ella $a=2, b=1$ y sustituyendo n por $n+1$ para obtener que

$$2 < \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{n+2}$$

y como para todo $n\in\mathbb{N}$ se verifica que $2 > 9^{\frac{1}{n+3}}$, deducir que

$$\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{n+2} > 2 > 9^{\frac{1}{n+3}}.$$

Lo que prueba la desigualdad (1) y por tanto que la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente.

Como podéis comprobar el número e, es decir, las sucesiones que usamos para definirlo, aparecen con frecuencia algo escondidas y hay que saber reconocerlas porque de eso depende muchas veces la resolución de un ejercicio.

En general, los resultados de esta evaluación son buenos, creo que mi insistencia y constante repetición de lo que es una serie han servido para que la mayoría entienda qué es una serie. No es un logro menor, muchos doctores en matemáticas no saben lo que es una serie.