Análisis Matemático I

17 de enero de 2022

(1) Enunciar y demostrar el teorema de la función inversa local

(2) Definir el gradiente de un campo escalar y explicar su relación con la diferencial, así como su utilidad para calcular el plano tangente a una superficie

(3) Estudiar la continuidad, la diferenciabilidad y la continuidad de las derivadas parciales de la función $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \left(x^2 + y^2\right)\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \quad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\,, \quad f(0,0) = 0$$

(4) Calcular la imagen de la función $f: A \to \mathbb{R}$, donde

$$A = \left\{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\,,\ \ y \geq 0\,\right\} \qquad \text{y}$$
$$f(x,y) = x^2 + y^2 - x - y \qquad \forall\,(x,y) \in A$$

(5) Probar que el sistema de ecuaciones

$$x^2 + y^2 - 2uv = 0$$
$$x^3 + y^3 + u^3 - v^3 = 0$$

define funciones implícitas $u = u(x,y)$ y $v = v(x,y)$, que son diferenciables en un entorno del punto $(1,-1)$, con $u(1,-1) = v(1,-1) = 1$.

Probar también que la función $(x,y) \mapsto \big(u(x,y), v(x,y)\big)$ es de clase C^1 e inyectiva en un entorno de $(1,-1)$.