5.4)

$f: [a, b] \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(x) \geq 0$ para $x \in [a, b]$

¿Si $\int_a^b f(x)\,dx = 0 \Rightarrow f = 0$?

Corolario: Si $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua tal que $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$, pero existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) > 0$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx > 0$.

Según el corolario si existe un valor $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) > 0$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx > 0$. Como en nuestro caso $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, no existe ningún $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) > 0$.

Demostración del corolario:

Suponemos $x_0 \in]a, b[$ (si $f(a) \neq 0$ ó $f(b) \neq 0$ esto no se verificaría). Por el teorema de conservación de signo, existe $\delta > 0$ tal que $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subseteq]a, b[$.

Sea $m := \min\{f(x) : x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]\} > 0$.

Por tanto $0 < 2\delta m \leq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,dx$.

En consecuencia, $0 < \int_a^{x_0-\delta} f(x)\,dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,dx + \int_{x_0+\delta}^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

Como $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ y $f(x) \geq 0$, las integrales en los diferentes intervalos tendrán valor 0. Por tanto $f(x) = 0$.