Relación 1

Aarón Jerónimo Fernández

Ejercicios

Ejercicio 1.9: Dado $a > 1$, probar que la ecuación $x + e^{-x} = a$ tiene, al menos, una solución positiva y otra negativa.

Para probar esto primero tomaremos la ecuación equivalente $x+e^{-x}-a = 0$ y definiremos la función $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x + e^{-x} - a$. Para conseguir nuestro objetivo bastará con probar que dicha función se anula en dos puntos, uno en $x < 0$ y otro en $x > 0$.

Para ello, derivaremos la función ya que esta es claramente continua y derivable. Primero buscaremos sus máximos y mínimos, derivando la función e igualando la derivada a 0:

$$f'(x) = 1 - e^{-x} \qquad \text{(1ª derivada)}$$

Igualamos la derivada a 0:

$$\begin{gathered} 1 - e^{-x} = 0 \\ e^{-x} = 1 \\ x = 0 \end{gathered}$$

Ahora calcularemos la segunda derivada y vemos si $x = 0$ es un mínimo o un máximo:

$$f''(x) = e^{-x} \qquad \text{(2ª derivada)}$$

Calculamos $f''(0)$:

$$f''(0) = e^0 = 1 > 0$$

Como $f''(0) > 1$ tenemos un mínimo en $x = 0$. ¿Este mínimo es negativo o positivo?, en caso de que fuera positivo la ecuación no se anularía nunca, como queremos probar que se anula en dos puntos, supondremos que es negativo y en caso de serlo, veremos para qué valores de a lo es. Calculamos $f(0)$:

$$f(0) = 0 + e^0 - a = 1 - a$$

Veamos cuando $f(0) < 0$:

$$\begin{gathered} 1 - a < 0 \\ -a < -1 \\ a > 1 \end{gathered}$$

Como vemos esto se cumple para cualquier a que cumpla las condiciones que nos da el enunciado, bastará encontrar dos valores de x tal que $f(x) > 0$ para probar, por el Teorema de Bolzano, que la función tiene dos soluciones, una positiva y otra negativa.

Si vemos como se comporta la función en $f(a)$ nos encontramos con lo siguiente:

$$f(a) = a + e^{-a} - a = \frac{1}{e^a} > 0$$

Acabamos de probar que $f(a) > 0$ y que, por el T$^{\underline{a}}$ de Bolzano, $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$ con $x_0(0, a) \in \Rightarrow x_0 > 0$. Razonando análogamente llegamos a que $\exists x_1 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_1) = 0$ con $x_1 \in (-a, 0) \Rightarrow x_0 < 0$.