Página Principal / Mis cursos / GRADUADO-A EN INGENIERÍA INFORMÁTICA Y MATEMÁTICAS (2011) (297) / TOPOLOGÍA I (2122)-297_11_26_2122 / Tema 1. Espacios topológicos / Prueba tema 1

Comenzado el	viernes, 12 de noviembre de 2021, 09:05
Estado	Finalizado
Finalizado en	viernes, 12 de noviembre de 2021, 09:48
Tiempo empleado	42 minutos 38 segundos
Calificación	**7,50** de 10,00 (**75**%)

Pregunta **1**

Correcta

Se puntúa 2,50 sobre 2,50

Dado un espacio métrico (X,d) y un punto $x \in X$, denotamos por $\overline{B}(x,r)$ a la bola cerrada de centro x y radio $r > 0$. La familia de conjuntos

$$\mathcal{B}_x = \{\mathrm{int}(\overline{B}(x,r)) : r > 0\}$$

es una base de entornos del punto x; este enunciado es

Seleccione una:

- (•) Verdadero ✔
- ( ) Falso

Como $B(x,r) \subset \overline{B}(x,r)$, y el interior de un conjunto es el mayor conjunto abierto contenido en el conjunto, se tiene que $B(x,r) \subset \mathrm{int}(\overline{B}(x,r))$. Por tanto, los elementos de $\mathcal{B}_x$ son entornos de x. Si $U \in \mathcal{N}_x$, como las bolas cerradas forman una base de entornos de x, existe $r > 0$ tal que $\overline{B}(x,r) \subset U$. Entonces

$$\mathrm{int}(\overline{B}(x,r)) \subset \overline{B}(x,r) \subset U$$

y concluimos que $\mathcal{B}_x$ es base de entornos de x.

La respuesta correcta es 'Verdadero'

Pregunta **2**

Incorrecta

Se puntúa 0,00 sobre 2,50

Sea (X, T) un espacio topológico, $x \in X$. Consideramos la familia de subconjuntos de X definida por

$T_x = \{U \in T : x \in U\} \cup \{\emptyset\}$.

Marcar las respuestas correctas.

- a. T_x es una topología en X
- b. Si (X, T) es T_1 y $x \neq y$, entonces $T_x \neq T_y$
- c. Para cualquier espacio topológico (X, T) y todo par de puntos $x, y \in X$ tales que $x \neq y$ se tiene que $T_x \neq T_y$
- d. T_x no es una topología en X

Respuesta incorrecta.

Es fácil comprobar que T_x es una topología en X para todo $x \in X$.

1. $\emptyset \in T_x$ por definición. $X \in T_x$ porque $X \in T$ y $x \in X$.

2. Si $\{U_i\}_{i \in I} \subset T_x$ o bien todos los conjuntos son vacíos y la unión también lo es, o alguno de ellos no es vacío y debe contener a x, por lo que la unión $\cup_{i \in I} U_i$ pertenece a T y contiene a x. Entonces $\cup_{i \in I} U_i \in T_x$.

3. Si $U_1, \ldots, U_k \in T_x$, o bien alguno de los conjuntos es vacío y $U_1 \cap \ldots \cap U_k$ es vacío, o bien todos los conjuntos son distintos del vacío y todos deben contener a x. Entonces $x \in U_1 \cap \ldots \cap U_k \in T$, por lo que $U_1 \cap \ldots \cap U_k \in T_x$.

Si T es la topología trivial en X entonces $T_x = T$ para todo $x \in X$.

Si (X, T) es T_1, dados $x, y \in X$ tales que $x \neq y$, existe un abierto $U \in T$ tal que $x \in U, y \notin U$. Por tanto $U \in T_x$ y $U \notin T_y$, por lo que $T_x \neq T_y$.

Las respuestas correctas son:
T_x es una topología en X

,

Si (X, T) es T_1 y $x \neq y$, entonces $T_x \neq T_y$

Si (X, T) es T_1 y $x \neq y$, entonces $T_x \neq T_y$

Pregunta **3**

Correcta

Se puntúa 2,50 sobre 2,50

Sea T_S la topología de Sorgenfrey en $\mathbb{R}$ generada por la base

$\mathcal{B}_S = \{[a, b) : a < b\}$.

Sea $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Marcar una respuesta

- a. $\mathring{A} = \emptyset, \quad \overline{A} = [0, 1)$
- b. $\mathring{A} = \emptyset, \quad \overline{A} = [0, 1]$ ✔
- c. $\mathring{A} = (0, 1), \quad \overline{A} = [0, 1)$
- d. $\mathring{A} = (0, 1), \quad \overline{A} = [0, 1]$

Respuesta correcta

Para todo punto $x \in \mathbb{R}$, una base de entornos de x es

$\mathcal{B}_x = \{[x, x + \varepsilon) : \varepsilon > 0\}$.

Como cada conjunto de la base de entornos contiene números irracionales, $\mathring{A} = \emptyset$.

Por otra parte $A \subset \overline{A}$. Si $x < 0$, el conjunto $[x, 0)$ es un entorno de x que no corta a A. Si $x > 1$, el conjunto $[x, x + 1)$ es un entorno de x que no corta a A. Si $x \in [0, 1] \setminus A$ es un número irracional, entonces $x \in (0, 1)$ y todo entorno $[x, x + \varepsilon)$, con $\varepsilon > 0$, contiene números racionales del intervalo $[0, 1]$, por lo que $x \in \overline{A}$. Por tanto $\overline{A} = [0, 1]$.

La respuesta correcta es:
$\mathring{A} = \emptyset, \quad \overline{A} = [0, 1]$

Pregunta **4**

Correcta

Se puntúa 2,50 sobre 2,50

Sea T_K la topología de Kuratowski en $\mathbb{R}$ generada por la base

$\mathcal{B}_K = \{(a,b) : a < b\} \cup \{(a,b) \setminus K : a < b\}$,

donde $K = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Consideramos en $\mathbb{R}$ la sucesión $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Marcar una única respuesta

- a. La sucesión no converge ✔
- b. La sucesión converge sólo a 0
- c. La sucesión converge sólo a -1
- d. La sucesión converge a todos los puntos del espacio

Respuesta correcta

La sucesión no puede converger a $x < 0$ porque $(x-1, 0)$ es un entorno de x que no contiene ningún punto de la sucesión. Tampoco a $x > 0$ porque $(\frac{x}{2}, x+1)$ es un entorno de x que contiene solo una cantidad finita de puntos de la sucesión. Si existe un límite, debe ser $x = 0$. Pero la sucesión tampoco converge a 0 porque $(-1,1) \setminus K$ es un entorno de 0 que no contiene ningún punto de la sucesión. Se concluye que la sucesión no converge.

La respuesta correcta es:
La sucesión no converge

◄ Cuestionario autoevaluación tema 1

Ir a...

Grabaciones problemas ►