(15) Sea $f: [-\frac{1}{2}, +\infty[\to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = (x+e^x)^{\frac{1}{x}}$, si $x \neq 0$ y $f(0) = e^2$. Estudiar la derivabilidad de f.

En primer lugar, estudiamos la continuidad de f (pues, para que sea derivable en un punto a, necesariamente ha de ser continua en dicho punto). Como la composición y la suma de funciones continuas son continuas, tenemos (en virtud del Th de localización de la continuidad):

- f es continua en $]-\frac{1}{2}, 0[$, por serlo $f_{]-\frac{1}{2}, +\infty[}$ en su dominio
- f es continua en $]0, +\infty[$, por serlo $f_{]0, +\infty[}$ en su dominio.

Caso $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x+e^x)^{\frac{1}{x}} = 1^\infty = e^L \Rightarrow L = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}\cdot(x+e^x-1) =$$

L'Hôpital

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x+x-1}{x} = \frac{0}{0} \overset{L}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x+1}{1} = 1+1 = 2.$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x+e^x)^{\frac{1}{x}} = 1^\infty = e^L \Rightarrow L = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\cdot(x+e^x-1) =$$

L'Hôpital

$$= \frac{0}{0} \overset{L}{=} \lim_{x\to 0^+} e^x+1 = 1+1 = 2.$$

$f(0) = e^2$

Como $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$, deducimos que la función es continua en $x=0$.

Ahora vamos a estudiar la derivabilidad. Aplicando el carácter local de la derivabilidad: $f(x) = (x+e^x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(x+e^x)}{x}}$

$x' \in]-1,+\infty[\setminus \{0\} \Rightarrow f'(x) = e^{\frac{\ln(x+e^x)}{x}} \cdot \dfrac{\frac{1}{x+e^x}(e^x+1) - \ln(x+e^x)}{x^2}$,

$x \in]-1,+\infty[\setminus\{0\}$ Como $f'(a^-) = f'(a^+) \in \mathbb{R}$, $a \in]-1,+\infty[\setminus\{0\}$ tenemos que f es derivable en $]-\frac{1}{2},+\infty[$. Para el caso $x=0$, tenemos que comprobar si $f'(0^-) = f'(0^+)$. Como

$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{\ln(x+e^x)}{x}} \cdot \dfrac{\frac{e^x+1}{x+e^x} - \ln(x+e^x)}{x^2}$ y sabemos que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{(e^x+1)x}{e^x+x} - \ln(e^x+x)}{x^2} = \frac{0-0}{0} = \frac{0}{0} \overset{\text{L'Hôpital}}{=}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{(e^x x + e^x + 1)(e^x+x) - x(e^x+1)^2}{(e^x+x)^2} - \frac{1}{e^x+x}\cdot(e^x+1)}{2x} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x e^x}{(e^x+x)^2} - x\frac{(e^x+1)^2}{(e^x+x)^2}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}\left[\frac{e^x}{(e^x+x)^2} - \left(\frac{e^x+1}{e^x+x}\right)^2\right] =$$

$$\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{1^2} - \left(\frac{2}{1}\right)^2\right] = \frac{1}{2}\cdot(-3) = -3/2.$$

deducimos $f'(0^-) = e^2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) = -\dfrac{3e^2}{2}$ (hemos aplicado que $\{x_n\}\to x$, $\{y_n\}\to y \Rightarrow \{x_n y_n\} \to xy$)

Análogamente,

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln(x+e^x)}{x}} \cdot \frac{\frac{e^x+1}{x+e^x} - \ln(x+e^x)}{x^2} = e^2\cdot(-3/2) =$$

$= -3/2\, e^2$.

Como $f'(0^-) = f'(0^+)$, deducimos que f es derivable en $x=0$. En consecuencia, f es derivable en todo su dominio de definición, con función derivada $f':]-\frac{1}{2},+\infty[$ dado por

$$f'(x) = \begin{cases} (x+e^x)^{\frac{1}{x}} \cdot \dfrac{\frac{1+e^x}{x+e^x} - \ln(x+e^x)}{x^2} & \text{si } x \in]-\frac{1}{2},+\infty[\setminus\{0\} \\ -\frac{3}{2}e^2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$