GEOMETRÍA III
(Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas)

Final Convocatoria Ordinaria (01/02/2021)

1. *Sean S plano y p, q puntos en $\mathbb{R}^3$. Probar que son equivalentes los siguientes enunciados:*

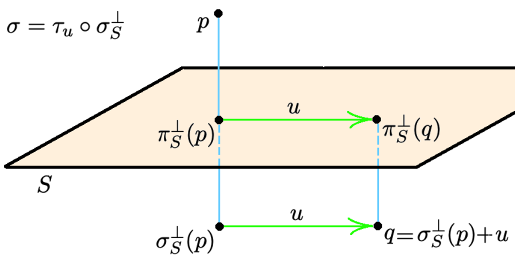
   (a) Existe $\sigma\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ simetría ortogonal deslizante respecto del plano S tal que $\sigma(p) = q$.

   (b) $\overrightarrow{pq} \notin \overrightarrow{S}^{\perp}$ y $\overrightarrow{p\pi_S^{\perp}(p)} = -\overrightarrow{q\pi_S^{\perp}(q)}$, donde $\pi_S^{\perp}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ representa a la proyección ortogonal sobre S.

   Razonar si existe una simetría deslizante $\sigma\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con $\sigma(S) = S$ y $\sigma(p) = q$ cuando

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 - x_2 = 1\}, \quad p = (2, -1, 0), \quad q = (-1, 0, 0).$$

   En caso afirmativo determinarla dando su matriz en la referencia usual de $\mathbb{R}^3$.



Solución:

a) $\Rightarrow$ b) Sea $\sigma\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ simetría ortogonal deslizante respecto de S tal que $\sigma(p) = q$. En principio sabemos que existe un vector $u \in \overrightarrow{S} \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ tal que σ es la composición de la simetría ortogonal respecto del plano S seguida de la traslación de vector u:

$$\sigma = \tau_u \circ \sigma_S^{\perp}.$$

Veamos que $\overrightarrow{pq}$ no pertenece a $\overrightarrow{S}^{\perp}$. En efecto, la identidad

$$q = \sigma(p) = (\tau_u \circ \sigma_S^{\perp})(p) = \sigma_S^{\perp}(p) + u = p + \left(\overrightarrow{p\sigma_S^{\perp}(p)} + u\right)$$

implica que $\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{p\sigma_S^{\perp}(p)} + u$, y la definición de simetría ortogonal implica que $\overrightarrow{p\sigma_S^{\perp}(p)} \in \overrightarrow{S}^{\perp}$. Como la descomposición $\mathbb{R}^3 = \overrightarrow{S} \oplus \overrightarrow{S}^{\perp}$ es en suma directa, deducimos de lo anterior que $\overrightarrow{pq} \in \overrightarrow{S}^{\perp}$ si y sólo si el vector $u \in \overrightarrow{S}$ es el vector nulo $\overrightarrow{0}$, lo que contradice que σ es deslizante. Por tanto $\overrightarrow{pq}$ no pertenece a $\overrightarrow{S}^{\perp}$.

Veamos ahora que $-\overrightarrow{q\pi_S^\perp(q)} = \overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)}$. Para ello, observemos que de la definición de simetría ortogonal $\overrightarrow{p\sigma_S^\perp(p)} = 2\overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)}$, de donde volviendo a la ecuación de arriba

$$q = p + \big(\overrightarrow{p\sigma_S^\perp(p)} + u\big) = p + \big(2\overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)} + u\big) =$$

$$= (p + \overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)}) + \big(\overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)} + u\big) = \pi_S^\perp(p) + \big(\overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)} + u\big) = \big(\pi_S^\perp(p) + u\big) + \overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)}.$$

Ahora podemos demostrar que el punto $z := \pi_S^\perp(p) + u$ coincide con la proyección $\pi_S^\perp(q)$, ya que satisface:

- $z \in S$: usar que $\pi_S^\perp(p) \in S$ y $u \in \overrightarrow{S}$.
- $\overrightarrow{zq} \in \overrightarrow{S}^\perp$: usar que de la expresión $q = z + \overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)}$ probada anteriormente $\overrightarrow{zq} = \overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)} \in \overrightarrow{S}^\perp$.

En conclusión

$$-\overrightarrow{q\pi_S^\perp(q)} = \overrightarrow{\pi_S^\perp(q)q} = \overrightarrow{\big(\pi_S^\perp(p) + u\big)q} = \overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)},$$

lo que concluye la prueba.

b) $\Rightarrow$ a)

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ plano y $p, q \in \mathbb{R}^3$ puntos tales que $\overrightarrow{pq} \notin \overrightarrow{S}^\perp$ y $\overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)} = -\overrightarrow{q\pi_S^\perp(q)}$. Consideremos los puntos $\pi_S^\perp(p), \pi_S^\perp(q) \in S$ y llamemos

$$u = \overrightarrow{\pi_S^\perp(p)\pi_S^\perp(q)} \in \overrightarrow{S}.$$

Veamos que $u \neq \overrightarrow{0}$. Para ello basta con observar que

$$\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)} + \overrightarrow{\pi_S^\perp(p)\pi_S^\perp(q)} + \overrightarrow{\pi_S^\perp(q)q} = \big(\overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)} + \overrightarrow{\pi_S^\perp(q)q}\big) + u,$$

y tener en cuenta que $\overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)} + \overrightarrow{\pi_S^\perp(q)q} \in \overrightarrow{S}^\perp$ y $\overrightarrow{pq} \notin \overrightarrow{S}^\perp$.

Comprobemos finalmente que la simetría deslizante $\sigma = \tau_u \circ \sigma_S^\perp$ resuelve el ejercicio; para ello bastará con demostrar que $\sigma(p) = q$. En efecto,

$$\sigma(p) = \sigma_S^\perp(p) + u = p + \big(\overrightarrow{p\sigma_S^\perp(p)} + u\big) = p + \big(2\overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)} + u\big) = \pi_S^\perp(p) + \big(\overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)} + u\big) =$$

$$= \big(\pi_S^\perp(p) + u\big) + \overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)} = \big(\pi_S^\perp(p) + \overrightarrow{\pi_S^\perp(p)\pi_S^\perp(q)}\big) + \overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)} = \pi_S^\perp(q) + \overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)} =$$

$$= \pi_S^\perp(q) + \big(-\overrightarrow{q\pi_S^\perp(q)}\big) = \pi_S^\perp(q) + \overrightarrow{\pi_S^\perp(q)q} = q.$$

Parte práctica: Hemos de justificar si existe una simetría deslizante $\sigma\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con $\sigma(S) = S$ y $\sigma(p) = q$ cuando

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 - x_2 = 1\}, \quad p = (2, -1, 0), \quad q = (-1, 0, 0).$$

Para una respuesta afirmativa, y usando lo demostrado, será suficiente con ver que

$$\overrightarrow{pq} \notin \overrightarrow{S}^\perp \ \text{ y } \ \overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)} = -\overrightarrow{q\pi_S^\perp(q)},$$

donde $\pi_S^\perp \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ representa a la proyección ortogonal sobre S. Determinemos por tanto la expresión analítica de $\pi_S^\perp$. Tomemos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ genérico y escribamos $\pi_S^\perp(x, y, z) = (a, b, c)$. Sabemos que

- $(a, b, c) \in S$, esto es, $a - b = 1$.
- $\overrightarrow{(x, y, z)(a, b, c)} = (a - x, b - y, c - z) \in \overrightarrow{S}^{\perp}$; como $\overrightarrow{S} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 - x_2 = 0\}$ entonces $\overrightarrow{S}^{\perp} = L(\{(1, -1, 0)\}) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon x_3 = x_1 + x_2 = 0\}$, y por tanto $c - z = a - x + b - y = 0$.

Resolviendo $a = \frac{1}{2}(x + y + 1), b = \frac{1}{2}(x + y - 1), c = z$, y por tanto

$$\pi_S^{\perp} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \ \ \pi_S^{\perp}(x, y, z) = \big(\frac{1}{2}(x + y + 1), \frac{1}{2}(x + y - 1), z\big).$$

Ahora queda claro que

$$\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{(2, -1, 0)(-1, 0, 0)} = (-3, 1, 0) \notin \overrightarrow{S}^{\perp} = L(\{(1, -1, 0)\}) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon x_3 = x_1 + x_2 = 0\}$$

y

$$\overrightarrow{p\pi_S^{\perp}(p)} = \overrightarrow{(2, -1, 0)\pi_S^{\perp}(2, -1, 0)} = \overrightarrow{(2, -1, 0)(1, 0, 0)} = (-1, 1, 0) =$$
$$-\overrightarrow{(-1, 0, 0)(0, -1, 0)} = -\overrightarrow{(-1, 0, 0)\pi_S^{\perp}(-1, 0, 0)} = -\overrightarrow{q\pi_S^{\perp}(q)}.$$

De lo ya demostrado en la anterior implicación deducimos que existe una simetría deslizante $\sigma \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con $\sigma(S) = S$ y $\sigma(p) = q$. Para determinar la expresión matricial de σ en $\mathcal{R}_0$, recordemos que $\sigma = \tau_u \circ \sigma_S^{\perp}$ para cierto vector $u \in \overrightarrow{S}$. Como probamos en el anterior razonamiento, el vector u puede calcularse mediante la expresión

$$u = \overrightarrow{\pi_S^{\perp}(p)\pi_S^{\perp}(\sigma(p))} = \overrightarrow{\pi_S^{\perp}(p)\pi_S^{\perp}(q)} = \overrightarrow{(1, 0, 0)(0, -1, 0)} = (-1, -1, 0).$$

La expresión analítica de $\sigma_S^{\perp}$ se puede determinar usando la fórmula $\overrightarrow{p\sigma_S^{\perp}(p)} = 2\overrightarrow{p\pi_S^{\perp}(p)}$, esto es, $\sigma_S^{\perp}(p) = 2\pi_S^{\perp}(p) - p$, que nos da

$$\sigma_S^{\perp}(x, y, z) = 2\pi_S^{\perp}(x, y, z) - (x, y, z) = 2\big(\frac{1}{2}(x+y+1), \frac{1}{2}(x+y-1), z\big) - (x, y, z) = (y+1, x-1, z).$$

De aquí que

$$\sigma(x, y, z) = (\tau_u \circ \sigma_S^{\perp})(x, y, z) = (y + 1, x - 1, z) + (-1, -1, 0) = (y, x - 2, z),$$

esto es,

$$M(\sigma, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Nota: *La respuesta correcta a la anterior pregunta ha de ser lógica, formal y matemática, y no contener circunloquios retóricos apoyados en figuras o percepciones intuitivas no demostradas.*

2. *Clasifica afínmente la cuádrica*

$$H = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_1 + x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2 + 2x_3 + 1 = 0\},$$

encontrando un sistema de referencia afín en el que venga representada por su matriz canónica.

Solución:

La cuádrica viene representada por la siguiente matriz en la referencia usual $\mathcal{R}_0$ de $\mathbb{R}^3$

$$\hat{C} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

con núcleo cuadrático

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Un cálculo elemental del rango de ambas matrices nos dice que

$$R_H = \operatorname{rang}(\hat{C}) = 3, \quad r_H = \operatorname{rang}(C) = 3.$$

Por otra parte, los polinomios característicos de $\hat{C}$ y C son respectivamente

$$p_{\hat{C}}(t) = 6t + t^2 - 4t^3 + t^4 = (-3+t)(-2+t)t(1+t), \quad p_C(t) = -4 + 3t^2 - t^3 = -(-2+t)^2(1+t).$$

Por tanto la regla de Descartes (o una observación directa) nos dice que

$$S_H = s_h = 1.$$

De la tabla de clasificación de las cuádricas concluimos que H tiene por matriz canónica

$$\hat{C}_0 = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right),$$

se trata de un cono.

Para encontrar la referencia en la que adopta su matriz canónica procedemos como sigue. Primero calculamos los subespacios propios asociados a los valores propios $-1, 2$ del núcleo cuadrático C.

Para el valor propio 1 queda

$$V_{-1} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon (C + \mathrm{I}_3).(x,y,z)^{\mathrm{t}} = (0,0,0)^{\mathrm{t}}\} = L(\{(1,1,1)\},$$

que admite a $\{\frac{1}{3}(1,1,1)\}$ como base ortonormal. A esta base la multiplicamos por $1/\sqrt{|-1|} = 1$ (quedará invariante), generando la base de V_{-1}:

$$B_{-1} = \{\frac{1}{3}(1,1,1)\}$$

Para el valor propio 2 hacemos un cálculo similar.

$$V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon (C - 2\mathrm{I}_3).(x,y,z)^{\mathrm{t}} = (0,0,0)^{\mathrm{t}}\} = L(\{(1,-1,0),(1,0,-1)\},$$

que tiene a $\{(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\sqrt{\frac{2}{3}})\}$ como base ortonormal. A esta base la multiplicamos por $1/\sqrt{|2|} = 1/\sqrt{2}$ generando la base de V_2:

$$B_2 = \{(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})\}.$$

En el sistema de referencia centrado en el origen con direcciones $B_{-1} \cup B_2$, a saber,

$$\mathcal{R}_1 = \big\{(0,0,0), \{\frac{1}{3}(1,1,1), (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})\}\big\},$$

la matriz que representa a H es la siguiente

$$\hat{C}_1 = M(\mathrm{Id}_3, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0)^t \cdot \hat{C} \cdot M(\mathrm{Id}_3, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Si llamamos $p_{\mathcal{R}_1} = (y_1, y_2, y_3)$ a las coordenadas en $\mathcal{R}_1$ de los puntos $p \in \mathbb{R}^3$, la hipercuádrica se corresponde con los ceros del polinomio

$$1 - y_1^2 - y_2 + y_2^2 - \sqrt{3}y_3 + y_3^2 = 0,$$

o equivalentemente completando cuadrados

$$-y_1^2 + (y_2 - \frac{1}{2})^2 + (y_3 - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 = 0.$$

Consideremos el único sistema de referencia $\mathcal{R}_2$ en $\mathbb{R}^3$ en el que las coordenadas $p_{\mathcal{R}_2} = (z_1, z_2, z_3)$ de los puntos de $p \in \mathbb{R}^3$ vengan determinadas por las ecuaciones analíticas

$$z_1 = y_2 - \frac{1}{2}, \;\; z_2 = y_3 - \frac{\sqrt{3}}{2}, \;\; z_3 = y_1,$$

esto es, el que satisface

$$M(\mathrm{Id}_{R^3}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

La cuádrica H se corresponde ahora con los puntos de $\mathbb{R}^3$ cuyas coordenadas en $\mathcal{R}_2$ son ceros del polinomio

$$z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 = 0,$$

y por tanto H viene representada en $\mathcal{R}_2$ por la matriz canónica $\hat{C}_0$. Esto concluye el ejercicio.

Si se desea expresar $\mathcal{R}_2$ respecto a la referencia $\mathcal{R}_0$ basta con usar la fórmula

$$M(\mathrm{Id}_{R^3}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0) = M(\mathrm{Id}_{R^3}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) \cdot M(\mathrm{Id}_{R^3}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1) = M(\mathrm{Id}_{R^3}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) \cdot M(\mathrm{Id}_{R^3}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)^{-1} =$$

$$= \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right).$$

3. Determina la matriz en la base usual de $\mathbb{R}^3$ de la única homografía $f\colon \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ que transforma respectivamente las rectas proyectivas $x_0 - x_1 + x_2 = 0, x_0 + 2x_2 = 0, x_0 + x_1 = 0$ en las rectas proyectivas $x_0 = 0, x_1 = 0, x_2 = 0$, y además fija el punto $(1 : 1 : 1) \in \mathbb{P}^2$.

Solución:

Demos nombre a las rectas proyectivas

$$R_1 = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2 \colon x_0 - x_1 + x_2 = 0\},$$

$$R_2 = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2 \colon x_0 + 2x_2 = 0\},$$

$$R_3 = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2 \colon x_0 + x_1 = 0\},$$

$$S_1 = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2 \colon x_0 = 0\},\ \ S_2 = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2 \colon x_1 = 0\},\ \ S_3 = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2 \colon x_2 = 0\}.$$

Sea $f\colon \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ una homografía que lleve $f(R_j) = S_j$, $j = 1, 2, 3$. Necesariamente

$$f(R_1 \cap R_2) = S_1 \cap S_2, \ \text{ esto es, } \ f(2 : 1 : -1) = (0 : 0 : 1),$$

$$f(R_1 \cap R_3) = S_1 \cap S_3, \ \text{ esto es, } \ f(1 : -1 : -2) = (0 : 1 : 0),$$

$$f(R_2 \cap R_3) = S_2 \cap S_3, \ \text{ esto es, } \ f(2 : 2 : -1) = (1 : 0 : 0),$$

Por tanto, si llamamos $B_1 = \{(2, 1, -1), (1, -1, -2), (2, 2, -1)\}$ (base de $\mathbb{R}^3$) y B_0 a la base canónica de $\mathbb{R}^3$, el isomorfismo lineal $\hat{f}$ asociado a una tal f ha de satisfacer:

$$M(\hat{f}, B_1, B_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma \\ 0 & \mu & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

para $\lambda, \mu, \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Por tanto

$$M(\hat{f}, B_0) \equiv M(\hat{f}, B_0, B_0) = M(\hat{f}, B_1, B_0) \cdot M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, B_0, B_1) = M(\hat{f}, B_1, B_0) \cdot M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, B_1, B_0)^{-1},$$

y como

$$M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, B_1, B_0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix},$$

queda finalmente

$$M(\hat{f}, B_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma \\ 0 & \mu & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\gamma & \gamma & -\gamma \\ -\frac{\mu}{3} & 0 & -\frac{2\mu}{3} \\ \frac{5\lambda}{3} & -\lambda & \frac{4\lambda}{3} \end{pmatrix}.$$

Como deseamos que $f(1 : 1 : 1) = (1 : 1 : 1)$, necesitamos que

$$(\gamma, -\mu, 2\lambda) = \beta(1, 1, 1)$$

para algún $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Basta con elegir

$$\gamma = \beta, \ \ -\mu = \beta, \ \ 2\lambda = \beta,$$

que están determinados unívocamente salvo proporcionalidad. Queda finalmente

$$M(\hat{f}, B_0) = \beta \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{5}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{\beta}{3} \begin{pmatrix} -6 & 6 & -6 \\ 2 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix},$$

de donde $f\colon \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ es la homografía con matriz

$$M(f, B_0) = \begin{pmatrix} -6 & 6 & -6 \\ 2 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

o cualquier múltiplo suya.