Ejercicio Examen Final 2020

2. $f_\lambda: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$M(f; B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & \lambda-1 \\ 0 & -1/2 & -1 \\ 0 & 1-\frac{\lambda^2}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

a) Hallar $Im(f_\lambda)$ y $Ker(f_\lambda)$, según los valores de λ. Indicar si f_λ es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3/2 & \lambda-1 \\ 0 & -1/2 & -1 \\ 0 & 1-\lambda^2/2 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} + 1 - \frac{\lambda^2}{2}$$

$$-1 + 2 - \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Downarrow \lambda = \pm 1$$

Si $\lambda = \pm 1$, $\dim_{\mathbb{R}} Im(f_\lambda) = 2$

Si $\lambda \neq \pm 1$, $\dim_{\mathbb{R}} Im(f_\lambda) = 3$

$\boxed{\lambda = 1}$

$Im(f_\lambda) = \mathcal{L}\{(1,0,0),(0,-1,1)\}$ No es inyectiva ni sobreyectiva

~~$Ker(f_\lambda) = \mathcal{L}\{(0,1,0)\}$ NO~~

~~$\boxed{\lambda = -1}$ $Im(f_\lambda) = \mathcal{L}\{(1,0,0),(-2,-1,1)\}$~~

$Ker(f_\lambda) =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+3y=0 \\ -y-2z=0 \\ y+2z=0 \end{array}\right\} \text{Sol.: } (3z, -2z, z)$$

$Ker(f_\lambda) = \mathcal{L}\{(3,-2,1)\}$

$\boxed{\lambda = -1}$ $Im(f_\lambda) = \mathcal{L}\{(1,0,0),(-2,-1,1)\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & -2 \\ 0 & -1/2 & -1 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+3y-4z=0 \\ -y-2z=0 \\ y+2z=0 \end{array}\right\} \text{Sol.: } (5z, -2z, z)$$

$Ker(f_\lambda) = \mathcal{L}\{(5,-2,1)\}$ No es inyectiva ni sobreyectiva

$\boxed{\lambda \neq \pm 1}$ $Ker(f_\lambda) = \{0\}$

$Im(f_\lambda) = \{(1,0,0),(3/2,-1/2,1-\frac{\lambda^2}{2}),(\lambda-1,-1,1)\}$

Es una biyección.

b) Según los valores de λ, obtener una base de $Ker(f_\lambda) \cap Im(f_\lambda)$ y $Ker(f_\lambda) + Im(f_\lambda)$. ¿Para qué valores $\mathbb{R}^3 = Ker(f_\lambda) \oplus Im(f_\lambda)$?

$\boxed{\lambda \neq \pm 1}$

$Ker(f_\lambda) = \{0\}$

$Im(f_\lambda) = \mathcal{L}\{(1,0,0), \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 1-\frac{\lambda^2}{2}\right), (\lambda-1,-1,1)\}$

$Ker(f_\lambda) \cap Im(f_\lambda) = \{0\}$

$Ker(f_\lambda) + Im(f_\lambda) = \mathcal{L}\{(1,0,0), \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 1-\frac{\lambda^2}{2}\right), (\lambda-1,-1,1)\}$

Es suma directa.

$\boxed{\lambda = -1}$ $Ker(f_\lambda) = \mathcal{L}\{(5,-2,1)\}$

$Im(f_\lambda) = \mathcal{L}\{(1,0,0), (-2,-1,1)\}$

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{Forman base}$$

$Ker(f_\lambda) + Im(f_\lambda) = \mathcal{L}\{(5,-2,1), (1,0,0), (-2,-1,1)\}$

$\dim Ker(f_\lambda) + \dim Im(f_\lambda) = \dim(Ker(f_\lambda) \cap Im(f_\lambda)) + \dim(Ker(f_\lambda) + Im(f_\lambda))$

$1 + 2 = \underset{\Rightarrow 0}{?} + 3$

Suma directa

$\boxed{\lambda = 1}$ $Ker(f_\lambda) = \mathcal{L}\{(3,-2,1)\}$

$Im(f_\lambda) = \mathcal{L}\{(1,0,0), (0,-1,1)\}$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{Forman base}$$

$Ker(f_\lambda) + Im(f_\lambda) = \mathcal{L}\{(3,-2,1), (1,0,0), (0,-1,1)\}$

Por la misma razón que en el anterior caso, son suma directa.

c) Hallar bases de $\mathbb{R}^3$ tales que la matriz asociada a f_λ en esas bases sea:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ Para los λ que sea posible

Esto es posible para $\lambda = \pm 1$ ya que la $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}(f_\lambda) = 2$, que justo es el rango de la matriz dada

$\boxed{\lambda = -1}$

Como una columna es de ceros, el 3er vector de la base debe ser del $\mathrm{Ker}(f_\lambda)$. Por ejemplo, $(5,-2,1)$. También sabemos que $f_\lambda(1,0,0) = (1,0,0)$ y que $f_\lambda(0,0,1) = (-2,-1,1)$. Por ello;

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{Forman base}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{Forman base}$$

$B = \{(1,0,0),(0,0,1),(5,-2,1)\}$

$B' = \{(1,0,0),(-2,-1,1),(0,0,1)\}$

$$M(f_\lambda; B' \leftarrow B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\lambda = 1}$

Por la misma razón que antes, el 3er vector será del $\mathrm{Ker}(f_\lambda)$, por ejemplo, $(3,-2,1)$. También sabemos que $f_\lambda(1,0,0) = (1,0,0)$ y que $f_\lambda(0,0,1) = (0,-1,1)$. Por ello:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{Forman base}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{Forman base}$$

$B = \{(1,0,0),(0,0,1),(3,-2,1)\}$

$B' = \{(1,0,0),(0,-1,1),(0,0,1)\}$

$$M(f_\lambda; B' \leftarrow B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio Examen Ordinaria 3

Calcúlese un endomorfismo f de $M_2(\mathbb{R})$ que verifique las siguientes tres propiedades:

- $f \circ f = f$
- $\mathrm{Im}\, f^t = an(S_2(\mathbb{R}))$
- $\mathrm{Ker}\, f^t = an(A_2(\mathbb{R}))$

$$S_2(\mathbb{R}) = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\}$$

$$A_2(\mathbb{R}) = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right\}$$

$$\begin{cases} \mathrm{Ker}(f^t) = an(\mathrm{Im}(f)) \Rightarrow \mathrm{Im}(f) = A_2(\mathbb{R}) \\ \mathrm{Im}(f^t) = an(\mathrm{Ker}(f)) \Rightarrow \mathrm{Ker}(f) = S_2(\mathbb{R}) \end{cases}$$

Para que $f \circ f = f$

$$f\circ f\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = f\left(f\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \checkmark$$

$$f\circ f\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = f\left(f\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \checkmark$$

$$f\circ f\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = f\left(f\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \checkmark$$

Necesitamos una matriz L.I. con $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ tal que $f(A) = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ y para la que también se cumpla que $f \circ f = f$:

$$f\circ f(A) = f(f(A)) = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} = f(A) \Rightarrow A = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

$$B = \left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right\}$$

$$B' = \left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$$

$$M(f; B' \leftarrow B) = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$