Antonio Martínez e Ignacio Sánchez

Recuperación

Dentro de cada ejercicio todos los apartados tienen la misma puntuación.

1. **(4 puntos)** Se considera la siguiente matriz con coeficientes reales

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Sea g la métrica de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base usual es A. Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base usual es A.

a) Calcular la signatura y clasificar la métrica g según los valores de a.

b) Para $a = 1$ obtener una base conjugada (ortogonal) para la métrica g.

c) ¿Para qué valores de a es f autoadjunto en $(\mathbb{R}^3, g_u)$?. Para $a = 2$ calcular, si es posible, una base ortogonal de $(\mathbb{R}^3, g_u)$ formada por vectores propios de f.

d) ¿Existen valores de a para los que f es una isometría en $(\mathbb{R}^3, g_u)$? Para dichos valores, describir las isometrías obtenidas.

2. **(3 puntos)** Se considera el espacio vectorial euclídeo $(S_2(\mathbb{R}), g)$, donde $S_2(\mathbb{R})$ es el espacio de las matrices simétricas de orden 2 con coeficientes reales y $g(M, N) = traza(MN)$.

a) Calcular la proyección ortogonal de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ sobre el subespacio dado por $U = \{M \in S_2(\mathbb{R}) : traza(M) = 0\}$.

b) Determina el giro de ángulo $\pi/4$ y eje $L(I_2)$.

3. **(3 puntos)** Resolver de forma razonada las siguientes cuestiones:

a) Sea A una matriz antisimétrica de orden 3. ¿Es siempre $\lambda = 0$ un valor propio de A?

b) ¿Es cierto que si dos matrices cuadradas son congruentes, entonces sus determinantes son iguales?

c) Sea g una métrica sobre V y u, $v \in V$ vectores tales que $g(u, v) = 0$, $g(u, u) \neq 0$ y $g(v, v) \neq 0$. Prueba que u y v son linealmente independientes.

d) ¿Es cierto que toda matriz ortogonal de orden 3 con determinante positivo es diagonalizable?

Exámenes Geometría II

15 septiembre 2014

1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

g métrica con $M(g, B_u) = A$

f endomorfismo con $M(f, B_u) = A$

a) Signatura y clasificación de la métrica g en función de a.

Primero vemos para qué valores de a es g degenerada:

$$\det(A) = 0 \Leftrightarrow a^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} a = -1 \\ a = 1 \end{matrix}$$

Estudiemos primero dichos casos:

$\boxed{a = -1}$

$$M(g, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{F_2: F_2+F_3}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{C_2: C_2+C_3}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{F_2 \leftrightarrow F_3}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{C_2 \leftrightarrow C_3}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Degenerada rango 2
Indefinida índice 1
Signatura: $(1, 1)$

$\boxed{a = 1}$

$$M(g, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{F_2 - F_3}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{C_2 - C_3}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{F_2 \leftrightarrow F_3}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{C_2 \leftrightarrow C_3}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Degenerada rango 2
Semidefinida positiva
Índice 0
Signatura: $(2, 0)$

Para el resto de casos, aplicamos el criterio de Sylvester:

$\alpha_1(g, B_u) = 1 > 0 \quad \alpha_2(g, B_u) = a \quad \alpha_3(g, B_u) = a^2 - 1$

$a > 0$, $a < 0$

$-1 < a < 1 \Rightarrow \alpha_3 < 0$

$a < -1 \quad a > 1 \Rightarrow \alpha_3 > 0$

$a < -1 \Rightarrow \alpha_1 > 0 \quad \alpha_2 < 0 \quad \alpha_3 > 0 \Rightarrow$ Indef. no deg. rango 3 índice 2
Signatura: $(1, 2)$

$-1 < a < 0 \Rightarrow \alpha_1 > 0 \quad \alpha_2 < 0 \quad \alpha_3 < 0 \Rightarrow$ Indef. no deg. rango 3 índice 1
Signatura: $(2, 1)$

$\boxed{a = 0}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{F_2: F_2+F_3}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{C_2: C_2+C_3}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\alpha_1 > 0 \quad \alpha_2 > 0 \quad \alpha_3 < 0 \Rightarrow$ Indef. no deg. rango 3 índice 1
Signatura: $(2, 1)$

$0 < a < 1 \Rightarrow \alpha_1 > 0 \quad \alpha_2 > 0 \quad \alpha_3 < 0 \Rightarrow$ Indef. no deg. rango 3 índice 1
Signatura: $(2, 1)$

$a>1 \Rightarrow \alpha_1>0 \quad \alpha_2>0 \quad \alpha_3>0 \Rightarrow$ Euclídea no deg. rango 3
índice 0. Signatura: $(3,0)$

b) $a=1$. Obtener base ortonormal

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix} \xLeftrightarrow{F_2:F_2-F_3} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&1&1\end{pmatrix} \xLeftrightarrow{C_2:C_2-C_3} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xLeftrightarrow{F_2\leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} \xLeftrightarrow{C_2\leftrightarrow C_3} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \xRightarrow{C_2:C_2-C_3} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix} \xRightarrow{C_2\leftrightarrow C_3} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&1&0\end{pmatrix} \Rightarrow B=\{(1,0,0),(0,-1,1),(0,1,0)\}$$

c) ¿Valores de a para los que f es autoadjunto en $(\mathbb{R}^3, g_u)$? Para $a=2$, si es posible, hallar base ortogonal de $(\mathbb{R}^3, g_u)$ formada por vectores propios de f.

Estamos considerando la métrica euclídea usual. Para que f sea autoadjunto, $\underbrace{M(g_u, B_u)}_{I_3} \cdot M(f, B_u)$ simétrica.

Como $M(f,B_u)$ es simétrica y $M(g_u,B_u)=I_3$, f es autoadjunto siempre $\forall a\in\mathbb{R}$.

$\boxed{a=2}$ $\quad M(f,B_u)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}$

Hallamos el pol. característico:

$$P_f(\lambda)=\det\begin{pmatrix}1-\lambda&0&0\\0&2-\lambda&1\\0&1&2-\lambda\end{pmatrix}=(1-\lambda)\det\begin{pmatrix}2-\lambda&1\\1&2-\lambda\end{pmatrix}=$$

$$=(1-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+3) \longrightarrow \lambda=\frac{4\pm 2}{2}=\begin{cases}1\\3\end{cases}$$

$$\lambda_1=1 \quad a_{\lambda_1}=2 \qquad \lambda_2=3 \quad a_{\lambda_2}=1$$

$$V_3=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \middle/ \begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \middle/ \begin{matrix}-2x=0\\y-z=0\end{matrix}\right\}=$$

$$=\mathcal{L}\{(0,1,1)\}$$

$$\omega_g(0,1,1)=2 \Rightarrow B'=\left\{\tfrac{\sqrt{2}}{2}(0,1,1)\right\}$$

$$V_1=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \middle/ \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / y+z=0\}=$$

$$=\mathcal{L}\{(1,0,0),(0,1,-1)\}$$

Gram-Schmidt:

$$u_1=(1,0,0) \Rightarrow u_2=(0,1,-1)-\frac{g((1,0,0),(0,1,-1))}{\|(1,0,0)\|^2}(1,0,0)=(0,1,-1)$$

Una base ortonormal de vectores propios será:

$$B'' = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}(0,1,1), (1,0,0), \frac{\sqrt{2}}{2}(0,1,-1) \right\}$$

d) ¿Valores propios para los que f en $(\mathbb{R}^3, g_u)$ es isometría? Para dichos valores, clasificarla.

$$f \text{ isometría} \iff M(g_u, B_u) = M(f,B_u)^t \cdot \underbrace{M(g_u,B_u)}_{I_3} \cdot M(f,B_u)$$

$$M(f,B_u)^t \cdot M(f,B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+1 & 2a \\ 0 & 2a & a^2+1 \end{pmatrix} = \underbrace{M(g_u,B_u)}_{I_3}$$

f isometría $\iff a=0$

Empecemos calculando el determinante:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$$

$$p_f(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2-1) = (1-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-1) \qquad \lambda_1 = 1 \quad a_{\lambda_1} = 2$$

$$\lambda_2 = -1 \quad a_{\lambda_2} = 1$$

$$V_{-1} = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;/\; \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;/\; \begin{matrix} 2x=0 \\ y+z=0 \end{matrix}\right\} =$$

$$= \mathcal{L}\{(0,-1,-1)\} \qquad \dim(V_{-1}) = 1$$

$$V_1 = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;/\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;/\; y-z=0\} =$$

$$= \mathcal{L}\{(1,0,0),(0,1,1)\} \qquad \dim(V_1) = 2$$

Se trata de una simetría especular respecto de V_1.

2. $(S_2(\mathbb{R}), g)$ Espacio de las matrices simétricas de orden 2 con coeficientes reales y $g(M,N) = \text{traza}(M\cdot N)$

$\Rightarrow$ EVME

a) Proyección ortogonal de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ sobre $U = \{M \in S_2(\mathbb{R}) : \text{traza}(M) = 0\}$.

$$B = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$U = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R}) \;|\; a+c=0\right\} = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\left(\mathcal{L}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)^\perp = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R}) \;/\; tr\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0\right\} =$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R}) \;/\; tr\begin{pmatrix} b & a \\ c & b \end{pmatrix} = 0\right\} = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R}) \;/\; b=0\right\}$$

$$\left(\mathcal{L}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right)^{\perp} = \left\{\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}\in S_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; tr\left(\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right)=0\right\} =$$

$$= \left\{\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}\in S_2(\mathbb{R}) \;/\; tr\begin{pmatrix}a&-b\\b&-c\end{pmatrix}=0\right\} = \left\{\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}\in S_2(\mathbb{R}) \;/\; a-c=0\right\}$$

$$U^{\perp} = \left\{\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}\in S_2(\mathbb{R}) \;\middle/\; \begin{matrix}a-c=0\\ b=0\end{matrix}\right\} = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

Hallamos base ortonormal de U y $U^{\perp}$: (Gram-Schmidt)

$\boxed{U}$ $\quad u_1 = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} \qquad \omega_g(u_1) = tr\left(\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = 2$

$$tr\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix} = 0$$

$$u_2 = \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} - \frac{g\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right)}{\left\|\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right\|^2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

$$\omega_g(u_2) = tr\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = 2$$

$$B' = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right\}$$

$\boxed{U^{\perp}}$

$$tr\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = 2$$

$$B'' = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\} \qquad \mathcal{M}(f, B'\cup B'') = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}0&\sqrt{2}/2\\\sqrt{2}/2&0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2&0\\0&-\sqrt{2}/2\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2&0\\0&\sqrt{2}/2\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\sqrt{2}y + \sqrt{2}z = 2\\ \sqrt{2}x = 4\\ \sqrt{2}x = 4\\ -\sqrt{2}y + \sqrt{2}z = 2\end{cases} \Rightarrow x = 2\sqrt{2} \quad y=0 \quad z=\sqrt{2}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\sqrt{2}\\0\\\sqrt{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\sqrt{2}\\0\\0\end{pmatrix}_{B'\cup B''} = \begin{pmatrix}0&2\\2&0\end{pmatrix}_{B_u} \Rightarrow \text{Proyección de A sobre U}$$

b) Determinar el giro de ángulo $\frac{\pi}{4}$ y eje $\mathcal{L}(I_2)$.

$\mathcal{L}(I_2) = V_1$

$$(\mathcal{L}(I_2))^{\perp} = \left\{\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}\in S_2(\mathbb{R}) \;/\; tr\left(\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)=0\right\} =$$

$$= \left\{\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}\in S_2(\mathbb{R}) \;/\; tr\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}=0\right\} = \left\{\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}\in S_2(\mathbb{R}) \;/\; a+c=0\right\} = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right\}$$

Hallamos bases ortonormales de $\mathcal{L}(I_2)$ y $(\mathcal{L}(I_2))^\perp$:

$\boxed{\mathcal{L}(I_2)}$ $tr\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)=2 \quad B'=\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$

$\boxed{(\mathcal{L}(I_2))^\perp}$ Gram-Schmidt: Es justo la base de U del apartado anterior. Lo reciclamos:

$$B''=\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right\}$$

$$\mathcal{M}(f, B'\cup B'')=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\operatorname{sen}\theta\\0&\operatorname{sen}\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\overset{\theta=\frac{\pi}{4}}{=}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\sqrt{2}/2&-\sqrt{2}/2\\0&\sqrt{2}/2&\sqrt{2}/2\end{pmatrix}$$

3. a) A antisimétrica de orden 3. ¿$\lambda=0$ valor propio de A?

$$A=\begin{pmatrix}0&a_{12}&a_{13}\\-a_{12}&0&a_{23}\\-a_{13}&-a_{23}&0\end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I_n)=\det\begin{pmatrix}-\lambda&a_{12}&a_{13}\\-a_{12}&-\lambda&a_{23}\\-a_{13}&-a_{23}&-\lambda\end{pmatrix}=-\lambda^3-a_{12}a_{13}a_{23}+a_{12}a_{13}a_{23}-a_{13}^2\lambda-a_{12}^2\lambda-a_{23}^2\lambda=$$

$$=-\lambda^3-(a_{13}^2+a_{12}^2+a_{23}^2)\lambda=-\lambda(\lambda^2+a_{13}^2+a_{12}^2+a_{23}^2)\Rightarrow \text{Claramente } \lambda=0 \text{ valor propio}$$

b) ¿Matrices congruentes $\Rightarrow$ mismo determinante?

No. Contraejemplo: (En $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$)

$$\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

Son congruentes ya que ambas son congruentes a $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ y la congruencia es una relación de equivalencia.

$$\det\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}=2\neq\det\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=1$$

c) g métrica sobre V y $u,v\in V$ tales que $g(u,v)=0$, $g(u,u)\neq0$, $g(v,v)\neq 0$. Probar que u y v son L.I.

u y v L.I. $\Leftrightarrow$ $au+bv=0$ con $a=b=0$

$$0=g(\underbrace{au+bv}_{\vec{0}},u)=g(au,u)+g(bv,u)=a(g(u,u))+b(g(v,u))=$$

$$=ag(u,u)+b\underbrace{g(u,v)}_{0}=ag(u,u)\Rightarrow \text{Como } g(u,u)\neq0,\ a=0$$

$$0=g(\underbrace{au+bv}_{\vec{0}},v)=g(au,v)+g(bv,v)=a\underbrace{g(u,v)}_{0}+bg(v,v)=$$

$$=bg(v,v)\Rightarrow \text{Como } g(v,v)\neq0,\ b=0$$

Por lo tanto, u y v son L.I.

d) ¿Es toda matriz ortogonal de orden 3 con determinante positivo diagonalizable?

No. Sea g la métrica euclídea usual y f una isometría cuya matriz en la base usual es:

$$M(f, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$P_f(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta-\lambda & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\det\begin{pmatrix} \cos\theta-\lambda & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\underbrace{(\lambda^2 - 2\cos\theta + 1)} \to \lambda = \frac{2\cos\theta \pm \sqrt{4\cos^2\theta - 4}}{2} \Rightarrow \text{Si } \theta \in]0,\pi[,$$

por ejemplo $\theta = \frac{\pi}{2}$, el discriminante será $-4 < 0$ y el único valor propio será 1, por lo que $M(f, B_u)$ no sería diag. a pesar de ser ortogonal.