Tema 2

1.41 Proposición. *Sea $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una aplicación tal que $\varphi(n) < \varphi(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se verifica entonces que φ es estrictamente creciente, es decir, si n, m son números naturales tales que $n < m$ entonces $\varphi(n) < \varphi(m)$. En particular, φ es inyectiva.*

Si además se supone que φ toma valores en $\mathbb{N}$, esto es, $\varphi(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$, entonces:

i) $\varphi(n) \geqslant n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

ii) Si $\varphi(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, φ es la identidad, es decir, $\varphi(n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

1.42 Proposición. *Sea A un conjunto infinito de números naturales. Entonces existe una única biyección creciente de $\mathbb{N}$ sobre A.*

Demostración. Por ser A infinito no puede estar contenido en ningún segmento $S(p)$, esto es, el conjunto $\{x \in A : p < x\}$ no es vacío cualquiera sea $p \in \mathbb{N}$. Haciendo uso del principio de buena ordenación podemos definir $f : \mathbb{N} \to A$ por:

$$\begin{aligned} &f(1) = \text{mín}(A) \\ &f(n+1) = \text{mín}\{x \in A : f(n) < x\} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Con ello es claro que $f(n) < f(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Del lema anterior se sigue que f es creciente e inyectiva. Probaremos que $f(\mathbb{N}) = A$. Puesto que, por su definición, es $f(\mathbb{N}) \subseteq A$, bastará probar que dicha inclusión no puede ser estricta. Pongamos $C = A \setminus f(\mathbb{N})$. Si $C \neq \emptyset$, sea $p = \text{mín}(C)$; esto es, p es el *primer* elemento de A que no está en $f(\mathbb{N})$. Es claro que $p > \text{mín}(A)$. Sea $q = \text{máx}\{x \in A : x < p\}$. Tenemos que $p > q$ y $q \in A$ pero $q \notin C$ por lo que $q \in f(\mathbb{N})$. Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $q = f(k)$. Entonces, como $f(k) < p$, se tiene, por ser $f(k+1) = \text{mín}\{x \in A : f(k) < x\}$, que $f(k+1) \leqslant p$. Como también es $f(k+1) > f(k) = q$ y $f(k+1) \in A$, debe ser $f(k+1) \geqslant p$. Resulta así que $f(k+1) = p$ lo cual es contradictorio. En consecuencia C tiene que ser vacío, es decir, $f(\mathbb{N}) = A$.

Para probar la unicidad de f supongamos que g es una biyección creciente de $\mathbb{N}$ sobre A. Notando g^{-1} la aplicación inversa de g, es inmediato comprobar que la aplicación $\varphi = f \circ g^{-1}$ es una biyección creciente de $\mathbb{N}$ sobre $\mathbb{N}$ y, por el lema anterior, debe ser la identidad, $f(g^{-1}(n)) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo que $f(k) = g(k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. □

1.43 Definición. Un conjunto A se llama *numerable* si es vacío o si existe alguna aplicación inyectiva de A en $\mathbb{N}$.

1.44 Proposición. *Un conjunto es numerable si, y sólo si, es finito o es equipotente a $\mathbb{N}$.*

Demostración. Claramente todo conjunto finito es numerable. Sea A un conjunto infinito numerable y sea $\varphi : A \to \mathbb{N}$ una aplicación inyectiva. Tenemos entonces que $A \sim \varphi(A)$ por lo que, al ser A infinito, se sigue que $\varphi(A)$ también es infinito y por el teorema anterior $\varphi(A) \sim \mathbb{N}$ con lo que también $A \sim \mathbb{N}$. □

Evidentemente podemos contar los elementos de un conjunto finito y también sabemos contar los números naturales (aunque nunca acabaríamos de contarlos). En consecuencia la proposición anterior nos dice que los conjuntos numerables son aquellos cuyos elementos pueden contarse.

1.45 Proposición. *Un conjunto no vacío A es numerable si, y sólo si, hay una aplicación sobreyectiva de $\mathbb{N}$ sobre A.*

Demostración. Sea $f : \mathbb{N} \to A$ una aplicación sobreyectiva. Para cada elemento $a \in A$ el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : f(n) = a\}$ no es vacío por lo que podemos definir, haciendo uso del principio de buena ordenación, una aplicación $g : A \to \mathbb{N}$ por:

$$g(a) = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : f(n) = a\} \quad \text{para todo } a \in A$$

Con ello se tiene que $f(g(a)) = a$ para todo $a \in A$ lo que implica que g es inyectiva y por tanto que A es numerable.

La afirmación recíproca es consecuencia de la proposición anterior. □

1.46 Proposición. *$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ son equipotente a $\mathbb{N}$.*

Demostración. Sea $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la aplicación dada por $\varphi(n) = (p,q)$ donde $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ verifica que $n = 2^{p-1}(2q-1)$. Es decir, $p-1$ es la mayor potencia de 2 que divida a n ($p = 1$ si n es impar). Es claro que la aplicación así definida es una biyección de $\mathbb{N}$ sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Es fácil probar que la aplicación $\sigma : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ dada por:

$$\sigma((p,q)) = \begin{cases} (p/2,q), & \text{si } p \text{ es par;} \\ ((-p+1)/2,q), & \text{si } p \text{ es impar.} \end{cases}$$

es una biyección. Por tanto, la aplicación $\sigma \circ \varphi : N \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ es una biyección. □

Dados dos números racionales $r < s$, el número $\dfrac{r+s}{2}$ también es racional y $r < \dfrac{r+s}{2} < s$. Se deduce de aquí que el conjunto $\{x \in \mathbb{Q} : r < x < s\}$ es no vacío y no tiene máximo (ni mínimo) por lo que deducimos que dicho conjunto es infinito. Resulta así que entre cada dos números racionales hay infinitos racionales. A pesar de ello no hay más números racionales que naturales. La intuición aquí es engañosa.

1.47 Proposición. *El conjunto de los números racionales es numerable.*

Demostración. Es consecuencia de las dos proposiciones anteriores y de que la aplicación $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ dada por $f(p,q) = p/q$ es sobreyectiva. □

Por ser $\mathbb{Q}$ numerable infinito sabemos que $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$, es decir, existen biyecciones de $\mathbb{N}$ sobre $\mathbb{Q}$. Hemos respondido en parte a nuestra pregunta inicial con un resultado muy sorprendente: ¡hay tantos números racionales como números naturales! Nos falta todavía dar alguna información del tamaño de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

1.48 Proposición (Principio de los intervalos encajados)**.**

Para cada número natural n sea $I_n = [a_n, b_n]$ un intervalo cerrado no vacío y supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $I_{n+1} \subseteq I_n$. Se verifica entonces que:

i) $\alpha = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \leqslant \beta = \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$,

ii) $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = [\alpha, \beta]$.

En particular, el conjunto $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ *no es vacío.*

Demostración. Las hipótesis $\emptyset \neq I_{n+1} \subseteq I_n$, implican que $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Razonando como en la primera parte de 1.41, deducimos que las aplicaciones $n \mapsto a_n$ y $n \mapsto -b_n$, son crecientes, esto es, $a_n \leqslant a_m$, $b_m \leqslant b_n$ siempre que $n < m$. Ahora, dados $p, q \in \mathbb{N}$ y poniendo $k = \max\{p, q\}$, tenemos que $a_p \leqslant a_k \leqslant b_k \leqslant b_q$. Hemos obtenido así que cualesquiera sean los números naturales p, q es $a_p \leqslant b_q$. Luego todo elemento de $B = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ es mayorante de $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ y por tanto $\alpha = \sup A \leqslant b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Lo cual, a su vez, nos dice que α es un minorante de B y por tanto concluimos que $\alpha \leqslant \beta = \inf B$. Hemos probado i). La afirmación ii) es consecuencia de que $x \in \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ equivale a que $a_n \leqslant x \leqslant b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo que equivale a que $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$, es decir $x \in [\alpha, \beta]$. □

1.49 Proposición. *Dados dos números reales $a < b$ se verifica que el intervalo $[a, b]$ no es numerable.*

Demostración. Si $[a, b]$ fuera numerable tendría que ser, en virtud de la proposición 1.44, equipotente a $\mathbb{N}$. Veamos que esto no puede ocurrir. Supongamos que $\varphi : \mathbb{N} \to [a, b]$ es una biyección de $\mathbb{N}$ sobre $[a, b]$. En particular φ es sobreyectiva por lo que deberá ser $[a, b] = \{\varphi(n) : n \in \mathbb{N}\}$. Obtendremos una contradicción probando que tiene que existir algún elemento $z \in [a, b]$ tal que $z \notin \{\varphi(n) : n \in \mathbb{N}\}$. Para ello se procede de la siguiente forma. Dividimos el intervalo $[a, b]$ en tres intervalos cerrados de igual longitud:

$$\left[a, a + \frac{b-a}{3}\right], \quad \left[a + \frac{b-a}{3}, b - \frac{b-a}{3}\right], \quad \left[b - \frac{b-a}{3}, b\right]$$

y llamamos I_1 al primero de ellos (es decir el que está más a la izquierda) que no contiene a $\varphi(1)$. Dividamos ahora el intervalo I_1 en tres intervalos cerrados de igual longitud y llamemos I_2 al primero de ellos que no contiene a $\varphi(2)$. Este proceso puede "continuarse indefinidamente" pues, supuesto que $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, y que tenemos intervalos cerrados de longitud *positiva* I_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, tales que $I_{k+1} \subseteq I_k$ para $1 \leqslant k \leqslant n-1$, y $\varphi(k) \notin I_k$ para $1 \leqslant k \leqslant n$, dividimos el intervalo I_n en tres intervalos cerrados de igual longitud y llamamos I_{n+1} al primero de ellos que no contiene a $\varphi(n+1)$. De esta forma para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos un intervalo cerrado I_n no vacío verificándose que $I_{n+1} \subseteq I_n$ y $\varphi(n) \notin I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. El principio de los intervalos encajados nos dice que hay algún número real z que está en *todos* los I_n. Por tanto, cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$, por ser $z \in I_n$ y $\varphi(n) \notin I_n$, se tiene necesariamente que $z \neq \varphi(n)$, esto es, $z \notin \{\varphi(n) : n \in \mathbb{N}\}$ pero evidentemente $z \in [a,b]$. $\square$

1.50 Proposición. *$\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ son conjuntos no numerables.*

Demostración. Evidentemente todo subconjunto de un conjunto numerable también es numerable. Como acabamos de ver que hay subconjuntos de $\mathbb{R}$ que no son numerables deducimos que $\mathbb{R}$ no es numerable. Puesto que $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ y sabemos que $\mathbb{Q}$ es numerable y $\mathbb{R}$ no lo es, deducimos que $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ no es numerable. $\square$