Ejercicio 2.2:

Ventana:

$\Rightarrow r = \frac{b}{2}$

- Dado un perímetro P, queremos conseguir la máxima luminosidad sabiendo que la zona roja deja pasar la mitad de luz que la zona verde.

- Primero, veamos cómo se podría escribir el perímetro en función de la base (b) y la altura (h):

$$P = b + 2h + \frac{\cancel{2}\pi r}{\cancel{2}} = b\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) + 2h \quad (1)$$

- Para calcular la cantidad de luz que deja pasar el cristal, definiremos la función L tal que:

$$L(b,h) = 2 \cdot \underbrace{b \cdot h}_{\substack{\text{Área} \\ \text{rectángulo}}} + \underbrace{\frac{\pi b^2}{8}}_{\substack{\text{Área} \\ \text{semicírculo}}}$$

- Por (1) sabemos que $h = \dfrac{p - b\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)}{2}$ y, por tanto, podemos escribir L en función de b:

$$L(b) = 2b\left(\frac{p - b\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)}{2}\right) + \frac{\pi b^2}{8} = bp + b^2\left(\frac{\pi}{8} - 1 - \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= bp + b^2\left(\frac{-3\pi - 8}{8}\right)$$

- Para conocer los extremos relativos de la función, la derivamos e igualamos a 0:

$$L'(b) = p + 2 \cdot \left(\frac{-3\pi - 8}{8}\right)b = p + \left(\frac{-3\pi - 8}{4}\right)b = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{b = \frac{4p}{3\pi + 8}}$$

- Ahora podemos sustituir para conocer h:

$$\boxed{h =} \frac{p - b\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)}{2} = \frac{\dfrac{2(3\pi + 8)p - 8p - 4p\pi}{2(3\pi + 8)}}{2} = \frac{(3\pi + 8)p - 4p - 2\pi p}{2(3\pi + 8)} = \boxed{\frac{p(\pi + 4)}{2(3\pi + 8)}}$$

- Para comprobar que el valor de b es un máximo, calculamos la segunda derivada:

$$L''(b) = \frac{-3\pi - 8}{4} < 0$$ $\Rightarrow$ es un máximo por el criterio de la segunda derivada, ya que L es 2 veces derivable.

- Por lo tanto, podemos asegurar que la ventana dejará pasar más luz cuando su base mida $b = \frac{4p}{3\pi + 8}$ y su altura $h = \frac{p(\pi + 4)}{2(3\pi + 8)}$