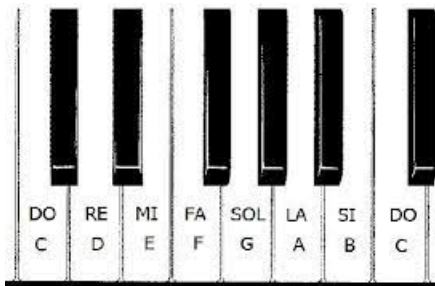


Matemáticas en la formación de escalas musicales.

Estructura de la escala musical

Do	1	Re	1	Mi	$\frac{1}{2}$	Fa	1	Sol	1	La	1	Si	$\frac{1}{2}$	Do
C		D		E		F		G		A		B		C

- Guido D'Arezzo, 991?- 1033?), Ut-Re-Mi-Fa-Sol-La-Sa-Ut sobre un himno a San Juan Bautista llamado "Ut queant laxis" (Pablo el Diácono)
- Anselmo de Flandes, Sa→ Si.
- Giovanni Battista Doni, Ut→ Do,



Aspectos físicos de la música.

La ecuación de ondas en una recta.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t).$$

Donde x es posición, t tiempo, c velocidad de propagación.

Sonidos puros

$$u(x, t) = A \operatorname{sen}(2\pi\omega t) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\ell} x\right).$$

- A es la intensidad máxima.
- ω es la frecuencia.
- ℓ es la longitud entre dos nodos consecutivos.

$$\omega = \frac{c}{2\ell}.$$

Sonidos que suenan bien juntos.

- Pitagoras (569 a.C.-475 a.C.)
- ① Si acortamos la longitud, la frecuencia sube. Si alargamos la longitud la frecuencia baja.
- ② Si dividimos por 2, la longitud, la frecuencia se multiplica por 2. Los sonidos son muy similares. Estamos en la misma nota. (Es una relación de equivalencia.)
- ③ Si dividimos por 3, la frecuencia se multiplica por 3 y los sonidos suenan bien juntos. (Es una relación de dependencia, no es transitiva.)
- ④ Si dividimos por 4, hemos dividido dos veces por 2, y estamos en la misma nota.
- ⑤ Si dividimos por 5, la frecuencia se multiplica por 5 y los sonidos suenan bien juntos (algo peor).
- ⑥ Etc.

La quinta justa.

- Si multiplicamos por 2 la frecuencia. Es la misma nota tras una escala.
- Si multiplicamos por 3 la frecuencia. Obtenemos una nota entre una escala ($\times 2$) y dos escalas ($\times 2 \times 2$).
- Una quinta justa se obtiene al multiplicar por $\frac{3}{2}$ su frecuencia. Es bajar una escala la nota obtenida al multiplicar por 3. Una quinta justa es un intervalo que contiene 3 tonos y un semitono.
 - 1 Do \rightarrow Sol,
 - 2 Re \rightarrow La,
 - 3 Mi \rightarrow Si,
 - 4 Fa \rightarrow Do,
 - 5 Sol \rightarrow Re,
 - 6 La \rightarrow Mi,

Falta la quinta Si \rightarrow Fa, que no es una quinta Justa. “Quinta diablo”.

Escala pentafona.

- Multiplicar por 3 es por tanto un intervalo de $3 + 6$ tonos y un semitono.
- Si x es la escala correspondiente, al multiplicar por 3 la frecuencia queda:

① $\text{Do}^x \rightarrow \text{Sol}^{x+1},$

② $\text{Re}^x \rightarrow \text{La}^{x+1},$

③ $\text{Mi}^x \rightarrow \text{Si}^{x+1},$

④ $\text{Fa}^x \rightarrow \text{Do}^{x+2},$ (cambia dos veces la escala).

⑤ $\text{Sol}^x \rightarrow \text{Re}^{x+1},$

⑥ $\text{La}^x \rightarrow \text{Mi}^{x+1},$

Partiendo de Re^3 de frecuencia $\omega \sim 293.665$ ciclos/segundo:

Do^3		Re^3		Mi^3	$\frac{1}{2}$	Fa^3		Sol^3		La^3		Si^3	$\frac{1}{2}$	Do^4
		ω												
		ω						$\frac{4}{3}\omega$		$\frac{3}{2}\omega$				
$\frac{8}{9}\omega$		ω		$\frac{9}{8}\omega$				$\frac{4}{3}\omega$		$\frac{3}{2}\omega$				$\frac{16}{9}\omega$

Problema.

- Tono=Multiplicar por $\frac{9}{8} = 1.125$,
- Tono+Semitono=Multiplicar por $\frac{32}{27} = 1.185185185$.
- 3 tonos= $(1.125)^3 = 1.423828125$,
- 2(Tono+Semitono)= $(\frac{32}{27})^2 = 1.404663923$.

Escala diatónica.

- ① $\text{Do}^x \rightarrow \text{Sol}^{x+1},$
- ② $\text{Re}^x \rightarrow \text{La}^{x+1},$
- ③ $\text{Mi}^x \rightarrow \text{Si}^{x+1},$
- ④ $\text{Fa}^x \rightarrow \text{Do}^{x+2},$
- ⑤ $\text{Sol}^x \rightarrow \text{Re}^{x+1},$
- ⑥ $\text{La}^x \rightarrow \text{Mi}^{x+1},$

($\omega \sim 293.665$ ciclos/segundo, es la afinación de Re^3)

Do^3		Re^3		Mi^3	$\frac{1}{2}$	Fa^3		Sol^3		La^3		Si^3	$\frac{1}{2}$	Do^4
		ω												
		ω						$\frac{4}{3}\omega$		$\frac{3}{2}\omega$				
$\frac{8}{9}\omega$		ω		$\frac{9}{8}\omega$				$\frac{4}{3}\omega$		$\frac{3}{2}\omega$				$\frac{16}{9}\omega$
$\frac{8}{9}\omega$		ω		$\frac{9}{8}\omega$		$\frac{32}{27}\omega$		$\frac{4}{3}\omega$		$\frac{3}{2}\omega$		$\frac{27}{16}\omega$		$\frac{16}{9}\omega$

Problema.

- Tono=Multiplicar por $\frac{9}{8} = 1.125$,
- Semitono=Multiplicar por $\frac{256}{243} = 1.053497942$.
- 2 Semitonos= $(\frac{256}{243})^2 = 1.109857915$.

Coma Pitagórica.

- Semitono diatónico. Es el semitono entre notas de diferente mismo nombre. Ej $Mi \rightarrow Fa$, $Do \rightarrow Re\flat$, $Do\sharp \rightarrow Re$. Tiene el valor $\frac{256}{243} = 1.053497942$
- Semitono cromático. Es el semitono entre notas del mismo nombre. Ej $Do \rightarrow Do\sharp$, $Re\flat \rightarrow Re$.

Usando que Un tono = Semitono diatónico + Semitono Cromático, obtenemos que el semitono cromático tiene el valor

$$\frac{\frac{9}{8}}{\frac{256}{243}} = \frac{2187}{2048},$$

y es algo mayor que el diatónico.

Una coma pitagórica es la diferencia entre un semitono cromático y uno diatónico

$$\frac{\frac{2187}{2048}}{\frac{256}{243}} = \frac{531441}{524288}.$$

Y aproximadamente 9 comas es un tono.

Escala temperada.

Si tomo α la solución de $\alpha^{12} = 2$ se toman todos los semitonos iguales quedando: (tomo ω la afinación de Re^3)

Do^3		Re^3		Mi^3		Fa^3		Sol^3		La^3		Si^3		Do^4
$\frac{\omega}{\alpha^2}$		ω		$\alpha^2\omega$		$\alpha^3\omega$		$\alpha^5\omega$		$\alpha^7\omega$		$\alpha^9\omega$		$\alpha^{10}\omega$

La ecuación $\alpha^{12} = 2$, se resolvió con la ayuda de los logaritmos que fueron estudiados por:

John Napier de Merchiston, 1550-1617.

Esta fijado por convección en música. El valor del La^3 es 440 ciclos por segundo, calcula la frecuencia de afinación segun la escala Pitagórica y la escala temperada del Sol^2 .

Escalas referida a Do³

- $\omega \sim 261.626$ ciclos/segundo, afinación de Do³.
- $\alpha = \sqrt[12]{2} \sim 1.059463094$.

Do ³	Re ³	Mi ³	Fa ³	Sol ³	La ³	Si ³	Do ⁴
ω	$\frac{9}{8}\omega$	$\frac{81}{64}\omega$	$\frac{4}{3}\omega$	$\frac{3}{2}\omega$	$\frac{27}{16}\omega$	$\frac{243}{128}\omega$	2ω
ω	$\alpha^2\omega$	$\alpha^4\omega$	$\alpha^5\omega$	$\alpha^7\omega$	$\alpha^9\omega$	$\alpha^{11}\omega$	2ω

Distancias entre notas.

- El valor de afinación del La^3 es por acuerdo 440 ciclos/segundo.
- $\alpha = \sqrt[12]{2} \sim 1.059463094$.
- Todas las notas se obtienen a partir de esta teniendo en cuenta la siguiente distancia entre notas.

Do		Re		Mi		Fa		Sol		La		Si		Do
	$\frac{9}{8}$		$\frac{9}{8}$		$\frac{256}{243}$		$\frac{9}{8}$		$\frac{9}{8}$		$\frac{9}{8}$		$\frac{256}{243}$	
	α^2		α^2		α		α^2		α^2		α^2		α	

Modificación de la escala pitagórica.

$\omega \sim 261.626$ ciclos/segundo afinación de Do^3 .

Si^2	Do^3	Re^3	Mi^3	Fa^3	Sol^3	La^3	Si^3	Do^4
$\frac{128}{243}\omega$	ω	$\frac{9}{8}\omega$	$\frac{81}{64}\omega$	$\frac{4}{3}\omega$	$\frac{3}{2}\omega$	$\frac{27}{16}\omega$	$\frac{243}{128}\omega$	2ω
$\frac{15}{16}\omega$	ω	$\frac{9}{8}\omega$	$\frac{5}{4}\omega$	$\frac{4}{3}\omega$	$\frac{3}{2}\omega$	$\frac{27}{16}\omega$	$\frac{15}{8}\omega$	2ω

- La segunda escala es una modificación bastante extendida de la escala pitagórica, con una afinación mejor referida a Do^3 . Observar que ahora no todos los tonos son iguales.