Aplicaciones Del Cálculo Integral

Cálculo de áreas planas.

Regiones de Tipo I: Comenzamos recordando lo siguiente:

Definición. Si $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ es una función integrable entonces el área de la región del plano comprendida entre la gráfica de f, las rectas $x = a$ e $y = b$, y el eje de abcisas se define como

$$A = \int_a^b |f(x)|dx$$

Definición. Sean $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ dos funciones Riemann integrables. Se define el área comprendida entre las curvas $f(x)$ y $g(x)$ y las rectas $x = a$ y $x = b$ como

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$

Observaciones.

(i) Por área comprendida entre $f(x)$ y $g(x)$ (sin más) entenderemos el área determinada por f y g entre las rectas dadas por sus puntos de corte.

(ii) Nótese que por ser $f(x)$ y $g(x)$ Riemann integrables, la integrabilidad de $|f - g|$ está garantizada.

(iii) Si fuese $f(x) \geq g(x)$ entonces, para $P_n \in \mathscr{P}[a,b]$ con $\Delta P_n \to 0$, sería
$A = \int_a^b f(x) - g(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k=n}(f(t_k) - g(t_k)(x_k - x_{k-1}) = \lim_{n\to\infty} \sigma(f, P_n)$.

(iv) Cuando una de las funciones no domina a la otra, entonces hemos de ver en qué subintervalos f domina a g, o la revés, para usar la aditividad de la integral respecto del intervalo de integración.

Regiones de tipo II

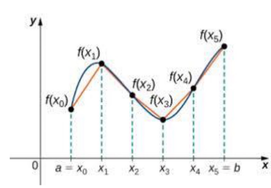
Supongamos que $f, g : [a,b] \to [c,d]$ son funciones integrables y biyectivas tales que $f^{-1}, g^{-1}: [c,d] \to [a,b]$ también son integrables. Entonces en área limitada por $f(x)$ y $g(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ puede definirse como el área limitada por las funciones inversas $f^{-1}(y)$ y $g^{-1}(y)$ entre las rectas $y = c$ e $y = d$. Esto es

$$A = \int_c^d |f^{-1}(y) - g^{-1}(y)|dy.$$

Cálculo de longitudes de curvas

Dada una función integrable $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, a cada partición $P = \{x_0 = a, x_1 \dots, x_n = b\}$ le corresponde una poligonal de vértices $(x_k, f(x_k))$, donde $k = 0,1, \dots, n$, como sucede en la siguiente figura:

Definición. Se dice que la gráfica de $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ es una curva rectificable cuando el supremo de las longitudes poligonales asociadas a las particiones del intervalo $[a,b]$ es finito. Cuando una curva no es rectificable decimos que es de longitud infinita.



Teorema. Si $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ de clase $C^1([a, b])$. Entonces es su gráfica es una curva rectificable cuya longitud viene dada por

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Áreas de superficies de revolución

Sea $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^1([a, b])$. El área de la superficie engendrada por la rotación de la función $f(x)$ sobre el eje $0X$, entre los valores $x = a$ y $x = b$, viene determinada por

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Volúmenes de sólidos de revolución

Es possible calcular volúmenes de regiones en $\mathbb{R}^3$ integrando las áreas que se obtienen cuando seccionamos al sólido en cuestión por planos paralelos a uno dado.

Método de los discos o de las arandelas. Si $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua y positiva, entonces la región la curva dada por la gráfica de f entre los valores $x = a$ y $x = b$, al girar en torno al eje OX determina un sólido de revolución cuyo volumen es

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

Volúmenes de los sólidos de revolución engendrados por dos curvas que giran sobre OX. Si $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$ son funciones integrables con $0 \leq f(x) \leq g(x)$, entonces el volumen del cuerpo engendrado al girar sobre el eje OX la región limitada por las gráficas de las funciones f y g entre los valores $x = a$ y $x = b$, viene dada por

$$V = \pi \int_a^b (g(x)^2 - f(x)^2) dx.$$

Métodos de las láminas o de los tubos. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función integrable y positiva. El volumen del sólido de revolución engendrado la girar sobre el eje OY la región plana limitada por la gráfica de $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $x = a$ y $x = b$ viene dada por

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx.$$

Cuando el eje de giro es la recta vertical $x = r$ en lugar del eje OY entonces obtenemos

$$V = 2\pi \int_a^b |x - r| f(x)\, dx.$$