Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Cálculo I – Desigualdades. Ejercicios resueltos

Desigualdades entre funciones polinómicas. Supongamos que $p(x)$ es una función polinómica de una variable, y queremos calcular para qué valores de la variable x se verifica que $p(x) > 0$.

Para ello lo que vamos a hacer es calcular las soluciones reales de la ecuación $p(x) = 0$, es decir, las *raíces* reales del polinomio $p(x)$. Esto solamente puede hacerse en casos sencillos. El más frecuente es cuando $p(x)$ es un polinomio con coeficientes que son números enteros y el coeficiente del término de mayor grado es igual a 1, porque entonces las raíces *enteras* de $p(x)$ deben ser divisores del término independiente.

> *Una función polinómica solamente puede cambiar de signo en los puntos donde se anula, y por tanto entre cada par de raíces* ***consecutivas*** *dicha función es siempre positiva o siempre negativa.*

1. Calcula para qué valores de x se verifica que $-6 - 19x + 28x^2 + 2x^3 - 6x^4 + x^5 > 0$.

Solución. Por lo antes dicho, las raíces *enteras* del polinomio

$$p(x) = -6 - 19x + 28x^2 + 2x^3 - 6x^4 + x^5$$

solamente pueden ser $-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6$. Tenemos que:

$$p(-6) < 0,\ p(-3) = -480,\ p(-2) = 0, p(-1) = 32,\ p(1) = 0,\ p(2) = 20,\ p(3) = 0,\ p(6) > 0.$$

Por tanto, -2, 1 y 3 son las únicas raíces *enteras* de $p(x)$. Dividiendo por Ruffini obtenemos que $p(x) = (x+2)(x-1)(x-3)(x^2-4x-1)$. Calculamos ahora las raíces del trinomio de segundo grado $x^2 - 4x - 1$, que resultan ser $\alpha = 2 - \sqrt{5}$ y $\beta = 2 + \sqrt{5}$.

Ordenamos ahora todas las raíces de menor a mayor. Teniendo en cuenta que $2 < \sqrt{5} < 3$, resulta que $-2 < \alpha < 1 < 3 < \beta$. Tenemos que:

$$p(x) = (x+2)(x-\alpha)(x-1)(x-3)(x-\beta)$$

Deducimos que:

$$\begin{aligned}
x < -2 \quad &\Longrightarrow \quad p(x) < 0 \text{ porque es producto de cinco números negativos.}\\
-2 < x < \alpha \quad &\Longrightarrow \quad p(x) > 0 \text{ porque es producto de un número positivo y cuatro negativos.}\\
\alpha < x < 1 \quad &\Longrightarrow \quad p(x) < 0 \text{ porque es producto de dos números positivos y tres negativos.}\\
1 < x < 3 \quad &\Longrightarrow \quad p(x) > 0 \text{ porque es producto de tres números positivos y dos negativos.}\\
3 < x < \beta \quad &\Longrightarrow \quad p(x) < 0 \text{ porque es producto de cuatro números positivos y uno negativo.}\\
\beta < x \quad &\Longrightarrow \quad p(x) > 0 \text{ porque es producto de cinco números positivos.}
\end{aligned}$$

Del estudio anterior se deduce que:

$$\{x \in \mathbb{R} : p(x) > 0\} =]-2, 2-\sqrt{5}[\cup]1,3[\cup]-2+\sqrt{5}, +\infty[.$$

Naturalmente, si lo que se quiere es calcular para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica que $p(x) \geqslant 0$ basta añadir al resultado anterior los puntos en los que se anula $p(x)$.

Si nos piden estudiar para qué valores de la variable x se verifica una desigualdad del tipo $p(x) < q(x)$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinómicas, basta observar que la desigualdades

$p(x) < q(x)$ y $q(x) - p(x) > 0$ son equivalentes y que $q(x) - p(x)$ es una función polinómica por lo que podemos seguir el mismo procedimiento anterior.

Observación. ***Si*** $a > 0$, las desigualdades $ab \geqslant 0$ y $b \geqslant 0$ son equivalentes y también son equivalentes las desigualdades $ab > 0$ y $b > 0$. Podemos usar este hecho para simplificar el estudio del signo de una función polinómica.

Por ejemplo, sea la función polinómica $p(x) = (x+2)^3(x+1)^2x(x-1)^5(x-4)^6(x^2+x+1)$. Se trata de calcular para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica que $p(x) > 0$. Como $p(x)$ se anula en los puntos $-2, -1, 0, 1, 4$ *en lo que sigue consideraremos que x es distinto de todos ellos*, es decir, que $p(x) \neq 0$. Tenemos entonces que $(x+1)^2 > 0$, $(x-4)^6 > 0$ y x^2+x+1 es un trinomio con discriminante negativo y cuyo coeficiente del término x^2 es positivo, por lo que se verifica que $x^2+x+1 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (de hecho $x^2+x+1 = (x+1/2)^2 + 3/4 > 0$), deducimos que la desigualdad $p(x) > 0$ es equivalente a $(x+2)^3x(x-1)^5 > 0$.

Fíjate que lo que hemos hecho ha sido *prescindir de las raíces de orden par* (la raíz -1 de orden 2 y la raíz 4 de orden 6). También podemos prescindir de los trinomios con discriminante negativo y coeficiente de x^2 positivo.

Podemos simplificar más teniendo en cuenta que

$$(x+2)^3x(x-1)^5 = (x+2)^2(x+2)x(x-1)^4(x-1)$$

y que $(x+2)^2 > 0$ y $(x-1)^4 > 0$. Por tanto la desigualdad $(x+2)^3x(x-1)^5 > 0$ es equivalente a $(x+2)x(x-1) > 0$. Pongamos $q(x) = (x+2)x(x-1)$. Hemos obtenido que *para valores de x distintos de* $-2, -1, 0, 1, 4$ la desigualdad $p(x) > 0$ es equivalente a $q(x) > 0$. Pero esta última es muy fácil de estudiar. Así, sin olvidar que estamos considerando x distinto de $-2, -1, 0, 1, 4$, obtenemos:

$$\begin{array}{l} p(x) < 0 \ \text{ para todo } \ x \in]-\infty, -2[\\ p(x) > 0 \ \text{ para todo } \ x \in]-2, -1[\cup]-1, 0[\\ p(x) < 0 \ \text{ para todo } \ x \in]0, 1[\\ p(x) > 0 \ \text{ para todo } \ x \in]1, 4[\cup]4, +\infty[\end{array}$$

$x < -2$	$\Longrightarrow$	$q(x) < 0$ (producto de tres números negativos)	$\Longrightarrow p(x) < 0$.
$-2 < x < 0, x \neq -1$	$\Longrightarrow$	$q(x) > 0$ (producto de un número positivo y dos negativos)	$\Longrightarrow p(x) > 0$.
$0 < x < 1$	$\Longrightarrow$	$q(x) < 0$ (producto de dos números positivos y uno negativos)	$\Longrightarrow p(x) < 0$.
$1 < x, x \neq 4$	$\Longrightarrow$	$q(x) > 0$ (producto de tres números positivos)	$\Longrightarrow p(x) > 0$.

Hemos obtenido que:

$$\{x \in \mathbb{R} : p(x) > 0\} =]-2, -1[\cup]-1, 0[\cup]1, 4[\cup]4, +\infty[.$$

Es fácil deducir de lo anterior el siguiente resultado.

> *Una función polinómica cambia de signo en las raíces reales de orden impar y no cambia de signo en las raíces de orden par.*

Naturalmente, si lo que se quiere es calcular para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica que $p(x) \geqslant 0$ basta añadir al resultado anterior los puntos en los que se anula $p(x)$.

Desigualdades entre funciones racionales. Supongamos que $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinómicas de una variable, y queremos calcular para qué valores de la variable x se verifica que $\dfrac{p(x)}{q(x)} > 0$.

En estos ejercicios basta observar que la desigualdad $\dfrac{p(x)}{q(x)} > 0$ es equivalente a la desigualdad $p(x)q(x) > 0$, la cual ya sabemos resolver porque $p(x)q(x)$ es una función polinómica.

2. Calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica la siguiente desigualdad.

$$\frac{x^2 - 4x - 2}{x^3 + 1} > 0.$$

Solución. La desigualdad del enunciado es equivalente a:

$$h(x) = (x^2 - 4x - 2)(x^3 + 1) > 0.$$

Las raíces de h son las soluciones de las ecuaciones

$$x^2 - 4x - 2 = 0, \qquad x^3 + 1 = 0.$$

Las soluciones de la primera ecuación son:

$$\alpha = \frac{4 - \sqrt{24}}{2} = 2 - \sqrt{6}, \qquad \beta = \frac{4 + \sqrt{24}}{2} = 2 + \sqrt{6}.$$

La segunda ecuación tiene una solución evidente, $x = -1$. Dividiendo por Ruffini resulta:

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$$

El trinomio $x^2 - x + 1$ tiene discriminante negativo y coeficiente de x^2 positivo por lo que es siempre positivo, $x^2 - x + 1 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Tenemos que:

$$h(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x + 1)(x^2 - x + 1) > 0 \Longleftrightarrow p(x) = (x + 1)(x - \alpha)(x - \beta) > 0.$$

Como $-1 < \alpha < \beta$, deducimos que:

$$\begin{aligned}
x < -1 \quad &\Longrightarrow \quad p(x) < 0 \text{ porque es producto de tres números negativos.}\\
-1 < x < \alpha \quad &\Longrightarrow \quad p(x) > 0 \text{ porque es producto de un número positivo y dos negativos.}\\
\alpha < x < \beta \quad &\Longrightarrow \quad p(x) < 0 \text{ porque es producto de dos números negativos y uno positivo.}\\
\beta < x \quad &\Longrightarrow \quad p(x) > 0 \text{ porque es producto de tres números positivos.}
\end{aligned}$$

Concluimos que la desigualdad del enunciado es cierta para valores de x en $]-1, \alpha[\cup]\beta, +\infty[$.

3. Calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica la desigualdad $\dfrac{1 - 2x}{x^2 - 4} > \dfrac{1}{2}$.

Solución. Se trata de una desigualdad entre funciones racionales (la función racional de la derecha es una constante). Seguiremos el procedimiento general visto en clase. Tenemos que:

$$\frac{1 - 2x}{x^2 - 4} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1 - 2x}{x^2 - 4} - \frac{1}{2} > 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2 - 4x + 6}{2(x^2 - 4)} > 0 \Leftrightarrow (x^2 + 4x - 6)(x^2 - 4) < 0$$

Pongamos $P(x) = (x^2 + 4x - 6)(x^2 - 4)$. Las soluciones de la ecuación $x^2 + 4x - 6 = 0$ son $\alpha = -2 - \sqrt{10}$ y $\beta = -2 + \sqrt{10}$. Por lo que las raíces del polinomio P son, ordenadas de menor a mayor, $\alpha < -2 < \beta < 2$. Tenemos así que:

$$P(x) = (x - \alpha)(x + 2)(x - \beta)(x - 2)$$

Deducimos que:

$$\begin{aligned}
x < \alpha \quad &\Longrightarrow \quad P(x) > 0 \text{ porque es producto de cuatro números negativos.}\\
\alpha < x < -2 \quad &\Longrightarrow \quad P(x) < 0 \text{ porque es producto de un número positivo y tres negativos.}\\
-2 < x < \beta \quad &\Longrightarrow \quad P(x) > 0 \text{ porque es producto de dos números positivos y dos negativos.}\\
\beta < x < 2 \quad &\Longrightarrow \quad P(x) < 0 \text{ porque es producto de tres números positivos y uno negativo.}\\
\beta < x \quad &\Longrightarrow \quad P(x) > 0 \text{ porque es producto de cuatro números positivos.}
\end{aligned}$$

Del estudio anterior se deduce que:

$$\mathcal{A} = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1 - 2x}{x^2 - 4} > \frac{1}{2} \right\} =]-2 - \sqrt{10}, -2[\cup]-2 + \sqrt{10}, 2[.$$

4. Calcula para qué valores de $x\in\mathbb{R}$ se verifica la desigualdad $\left|\dfrac{x-2}{x^2-2x-1}\right| > \dfrac{1}{2}$.

Solución. La desigualdad del enunciado equivale a que se verifique *alguna* de las desigualdades:

$$\text{a)}\ \frac{x-2}{x^2-2x-1} > \frac{1}{2}, \qquad \text{b)}\ \frac{x-2}{x^2-2x-1} < -\frac{1}{2}$$

La desigualdad a) es equivalente a:

$$\frac{x-2}{x^2-2x-1} - \frac{1}{2} = \frac{-x^2+4x-3}{2(x^2-2x-1)} > 0 \Longleftrightarrow (-x^2+4x-3)(x^2-2x-1) > 0$$

Como en esta última aparece el trinomio $-x^2+4x-3$ con coeficiente de x^2 negativo, para evitar posibles errores conviene cambiar de signo. Obtenemos así que la desigualdad del enunciado es equivalente a:

$$p(x) = (x^2-4x+3)(x^2-2x-1) < 0$$

Calculando las raíces de los dos trinomios obtenemos que, *ordenadas de menor a mayor*, son $1-\sqrt{2} < 1 < 1+\sqrt{2} < 3$. Pongamos $\alpha = 1-\sqrt{2}$, $\beta = 1+\sqrt{2}$. Tenemos que:

$$p(x) = (x^2-4x+3)(x^2-2x-1) = (x-\alpha)(x-1)(x-\beta)(x-3)$$

Deducimos que:

$$\begin{aligned}
x < \alpha &\implies p(x) > 0 \text{ porque es producto de cuatro números negativos.}\\
\alpha < x < 1 &\implies p(x) < 0 \text{ porque es producto de un número positivo y tres negativos.}\\
1 < x < \beta &\implies p(x) > 0 \text{ porque es producto de dos números negativos y dos positivos.}\\
\beta < x < 3 &\implies p(x) < 0 \text{ porque es producto de tres números positivos y uno negativo.}\\
3 < x &\implies p(x) > 0 \text{ porque es producto de cuatro números positivos.}
\end{aligned}$$

Concluimos que la desigualdad a) se verifica para $x \in]1-\sqrt{2}, 1[\cup]1+\sqrt{2}, 3[$.

Análogamente se obtiene que la desigualdad b) se verifica para $x \in]-\sqrt{5}, 1-\sqrt{2}[\cup]\sqrt{5}, 1+\sqrt{2}[$.

Finalmente, la desigualdad del enunciado se verifica para

$$x \in]-\sqrt{5}, 1-\sqrt{2}[\cup]1-\sqrt{2}, 1[\cup]\sqrt{5}, 1+\sqrt{2}[\cup]1+\sqrt{2}, 3[.$$

5. Comprobar que el conjunto

$$A = \left\{ x\in\mathbb{R} : \left|\frac{x^3-5}{x^2-2x-3}\right| \leqslant 1 \right\}.$$

tiene máximo y mínimo y calcularlos.

Solución. Lo que hay que hacer es describir el conjunto A, es decir, los números reales que verifican la desigualdad:

$$\left|\frac{x^3-5}{x^2-2x-3}\right| \leqslant 1. \tag{1}$$

Esta desigualdad es equivalente a las dos desigualdades:

$$-1 \leqslant \frac{x^3-5}{x^2-2x-3} \leqslant 1. \tag{2}$$

Consideremos la parte de la izquierda de esta desigualdad. Tenemos que:

$$-1 \leqslant \frac{x^3-5}{x^2-2x-3} \Longleftrightarrow 1+\frac{x^3-5}{x^2-2x-3} = \frac{x^3+x^2-2x-8}{x^2-2x-3} \geqslant 0 \Longleftrightarrow (x^3+x^2-2x-8)(x^2-2x-3) \geqslant 0.$$

Como el polinomio $x^3 + x^2 - 2x - 8$ tiene la raíz 2, obtenemos fácilmente:

$$(x^3 + x^2 - 2x - 8)(x^2 - 2x - 3) = (x - 2)(x^2 + 3x + 4)(x + 1)(x - 3)$$

Como x^2+3x+4 no tiene raíces reales, se sigue que para todo $x\in\mathbb{R}$ es $x^2+3x+4 > 0$, por lo que podemos prescindir de este factor. Hemos obtenido que la parte de la izquierda de la desigualdad (2) es equivalente a:

$$h(x) = (x + 1)(x - 2)(x - 3) \geqslant 0.$$

Como la función racional en (1) no está definida en los ceros del denominador, $x = -1$ y $x = 3$, excluiremos dichos puntos de nuestras consideraciones. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
x < -1 \quad &\Longrightarrow \quad h(x) < 0 \text{ porque es producto de tres números negativos.}\\
-1 < x < 2 \quad &\Longrightarrow \quad h(x) > 0 \text{ porque es producto de un número positivo y dos negativos.}\\
2 < x < 3 \quad &\Longrightarrow \quad h(x) < 0 \text{ porque es producto de dos números positivos y uno negativo.}\\
3 < x \quad &\Longrightarrow \quad h(x) > 0 \text{ porque es producto de tres números positivos.}
\end{aligned}$$

Como, además, $h(2) = 0$, concluimos que la parte de la izquierda de la desigualdad (2) es cierta para $x \in]-1, 2]\cup]3, +\infty[$.

Consideremos la parte de la derecha de la desigualdad (2). Tenemos que:

$$\frac{x^3 - 5}{x^2 - 2x - 3} \leqslant 1 \Longleftrightarrow \frac{x^3 - 5}{x^2 - 2x - 3} - 1 = \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x^2 - 2x - 3} \leqslant 0 \Longleftrightarrow (x^3+x^2-2x-8)(x^2-2x-3) \leqslant 0.$$

Como el polinomio $x^3 - x^2 + 2x - 2$ tiene la raíz 1, obtenemos fácilmente:

$$(x^3 - x^2 + 2x - 2)(x^2 - 2x - 3) = (x - 1)(x^2 + 2)(x + 1)(x - 3)$$

Para todo $x\in\mathbb{R}$ es $x^2 + 2 > 0$, por lo que podemos prescindir de este factor. Hemos obtenido que la parte de la derecha de la desigualdad (2) es equivalente a:

$$g(x) = (x + 1)(x - 1)(x - 3) \leqslant 0.$$

Como la funciòn racional en (1) no está definida en los ceros del denominador, $x = -1$ y $x = 3$, excluiremos dichos puntos de nuestras consideraciones. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
x < -1 \quad &\Longrightarrow \quad g(x) < 0 \text{ porque es producto de tres números negativos.}\\
-1 < x < 1 \quad &\Longrightarrow \quad g(x) > 0 \text{ porque es producto de un número positivo y dos negativos.}\\
1 < x < 3 \quad &\Longrightarrow \quad g(x) < 0 \text{ porque es producto de dos números positivos y uno negativo.}\\
3 < x \quad &\Longrightarrow \quad g(x) > 0 \text{ porque es producto de tres números positivos.}
\end{aligned}$$

Como, además, $g(1) = 0$, concluimos que la parte de la derecha de la desigualdad (2) es cierta para $x \in]-\infty, -1[\cup[1, 3[$.

Concluimos que el conjunto A del enunciado es:

$$A = \big(\,]-1, 2]\cup]3, +\infty[\,\big) \bigcap \big(\,]-\infty, -1[\cup[1, 3[\,\big) = [1, 2].$$

Por tanto $\min(A) = 1$ y $\max(A) = 2$.

Igualdades o desigualdades en las que intervienen valores absolutos

En general, para resolver igualdades o desigualdades en las que intervienen valores absolutos se deben considerar todos los casos posibles para quitar los valores absolutos que aparecen.

- Igualdades del tipo $|f(x)+g(x)| = |f(x)|+|g(x)|$. Como consecuencia de la desigualdad triangular, la igualdad $|f(x)+g(x)| = |f(x)|+|g(x)|$ es equivalente a la desigualdad $f(x)g(x) \geqslant 0$.
- Una igualdad del tipo $|f(x)| = |g(x)|$ es equivalente a la igualdad $(f(x))^2 = (g(x))^2$; y también es equivalente a que se verifique alguna de las igualdades $f(x) = g(x)$ o $f(x) = -g(x)$.
- Una igualdad del tipo $|f(x)| = g(x)$ es equivalente a que se verifique alguna de las igualdades $f(x) = g(x)$ o $f(x) = -g(x)$, y además que se verifique $g(x) \geqslant 0$.
- Una desigualdad del tipo $|f(x)| \leqslant |g(x)|$ es equivalente a la desigualdad $(f(x))^2 \leqslant (g(x))^2$.
- Una desigualdad del tipo $|f(x)| \leqslant |g(x)|$ también puede estudiarse calculando los valores de x para los que se da la igualdad $|f(x)| = |g(x)|$, es decir, los puntos en que se anula la función $h(x) = |f(x)| - |g(x)|$. Estos puntos determinan intervalos en los que la función $h(x)$ tiene signo constante[1].
- Una desigualdad del tipo $|f(x)| \leqslant g(x)$ es equivalente a que se verifiquen las dos desigualdades $-g(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, y además que se verifique $g(x) \geqslant 0$.
- Una desigualdad del tipo $|f(x)| \geqslant g(x)$ se verifica para los valores de x tales que $g(x) < 0$; y para aquellos valores de x para los que $g(x) \geqslant 0$ es equivalente a que se verifique alguna de las dos desigualdades $f(x) \leqslant -g(x)$, $f(x) \geqslant g(x)$.

6. Calcula para qué valores de x se verifica la igualdad

$$|x^2+3x-9| = |x^2+x-6| + |2x-3|\,.$$

Solución. Poniendo $f(x) = x^2+x-6$ y $g(x) = 2x-3$, la igualdad del enunciado se escribe como $|f(x)+g(x)| = |f(x)|+|g(x)|$, igualdad que equivale a $f(x)g(x) \geqslant 0$, es decir $(x^2+x-6)(2x-3) \geqslant 0$. Calculando las raíces del trinomio tenemos que

$$(x^2+x-6)(2x-3) = 2(x+3)(x-2)(x-3/2).$$

Deducimos fácilmente que la desigualdad $f(x)g(x) \geqslant 0$ se verifica si $-3 \leqslant x \leqslant 3/2$, o si $x \geqslant 2$.

7. Calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica que $|x-6|(1+|x-3|) \geqslant 1$.

Solución. Para estudiar la desigualdad $|x-6|(1+|x-3|) \geqslant 1$, lo que vamos a hacer es quitar los valores absolutos y para ello consideraremos que x sea mayor o menor que 3 y mayor o menor que 6. Tenemos así las siguientes posibilidades:

- Caso en que $x \leqslant 3$. Tenemos que:

$$|x-6|(1+|x-3|) \geqslant 1 \Longleftrightarrow (6-x)(1+3-x) \geqslant 1 \Longleftrightarrow x^2-10x+23 \geqslant 0.$$

Las raíces de $x^2-10x+23 = 0$ son $a = 5-\sqrt{2}$, $b = 5+\sqrt{2}$. Tenemos que $x^2-10x+23 \geqslant 0$ cuando sea $x \leqslant a$ o $x \geqslant b$. Como estamos considerando que $x \leqslant 3$, no puede ser $x \geqslant b$ y la condición $x \leqslant a$ se cumple porque $3 < a$. Concluimos que la desigualdad estudiada es cierta para $x \leqslant 3$.

- Caso en que $3 \leqslant x \leqslant 6$. Tenemos que:

$$|x-6|(1+|x-3|) \geqslant 1 \Longleftrightarrow (6-x)(1+x-3) \geqslant 1 \Longleftrightarrow x^2-8x+13 \leqslant 0.$$

Las raíces de $x^2-8x+13 = 0$ son $c = 4-\sqrt{3}$, $d = 4+\sqrt{3}$. Tenemos que $x^2-8x+13 \leqslant 0$ cuando $x \in [c,d]$. Como estamos considerando que $x \in [3,6]$, ambas condiciones se cumplen si

[1] Suponemos que las funciones f y g son continuas, en cuyo caso, esto es consecuencia del teorema de Bolzano que estudiaremos pronto.

$x \in [c,d] \cap [3,6] = [3,d]$, donde hemos tenido en cuenta que $c < 3 < d < 6$. Concluimos que la desigualdad estudiada es cierta para $3 \leqslant x \leqslant 4+\sqrt{3}$.

- Caso en que $6 \leqslant x$. Tenemos que:

$$|x-6|(1+|x-3|) \geqslant 1 \Longleftrightarrow (x-6)(1+x-3) \geqslant 1 \Longleftrightarrow x^2-8x+11 \geqslant 0.$$

Las raíces de $x^2-8x+11=0$ son $u=4-\sqrt{5}$, $d=4+\sqrt{5}$. Tenemos que $x^2-8x+13 \geqslant 0$ cuando $x \leqslant u$ o $x \geqslant v$. Como estamos considerando que $x \geqslant 6$, y tenemos que $u < 6 < v$, no puede ser $x \leqslant u$. Concluimos que la desigualdad estudiada es cierta para $x \geqslant 4+\sqrt{5}$.

Del estudio anterior se deduce que:

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} : |x-6|(1+|x-3|) \geqslant 1\} =]-\infty, 4+\sqrt{3}] \cup [4+\sqrt{5}, +\infty[.$$

8. Calcula para qué valores de x se verifica la desigualdad $|-x+|x-1|| < 2$.

   Solución. La desigualdad del enunciado es equivalente a las dos desigualdades

$$-2 < -x+|x-1| < 2$$

que son equivalentes a $x-2 < |x-1| < x+2$. La segunda de estas desigualdades solamente puede darse si $x > -2$. Supongamos que $-2 < x \leqslant 1$. Entonces se tiene que $|x-1| = 1-x$, por lo que las desigualdades anteriores son en este caso $x-2 < 1-x < x+2$, que equivalen a $-3 < -2x < 1$, es decir, $-1 < 2x < 3$, o bien $-1/2 < x < 3/2$. No podemos olvidar que hemos usado que $x \leqslant 1$, por lo que la condición obtenida queda $-1/2 < x \leqslant 1$. Para $x > 1$ se tiene que $|x-1| = x-1$, por lo que las desigualdades anteriores son en este caso $x-2 < x-1 < x+2$, que se cumplen siempre. Concluimos que la desigualdad del enunciado es cierta para $x > -1/2$

9. Calcula para qué valores de x se verifica la siguiente desigualdad.

$$|x+1| + |x^2-3x+2| < 4.$$

Solución. Puesto que $x^2-3x+2 = (x-1)(x-2)$, tenemos que

$$|x+1| + |x^2-3x+2| = |x+1| + |(x-1)(x-2)| = |x+1| + |x-1||x-2|.$$

Para controlar los valores absolutos consideraremos por separado los casos $x < -1$, $-1 < x < 1$, $1 < x < 2$ y $x > 2$.

- Para $x \leqslant -1$ tenemos $|x+1|+|x-1||x-2| = -x-1+(1-x)(2-x) = x^2-4x+1$. Por tanto, la desigualdad del enunciado es $x^2-4x+1 < 4$, es decir, $x^2-4x-3 < 0$. Es fácil comprobar que para $x \leqslant -1$ se verifica que $x^2-4x-3 > 0$. Por tanto, para $x \leqslant -1$ la desigualdad del enunciado es siempre falsa.
- Para $x \in]-1,1]$ tenemos $|x+1|+|x-1||x-2| = x+1+(1-x)(2-x) = x^2-2x+3$. Por tanto, la desigualdad del enunciado es $x^2-2x+3 < 4$, es decir, $x^2-2x-1 < 0$. Las raíces de este trinomio son $1-\sqrt{2}$ y $1+\sqrt{2}$. Es inmediato comprobar que $x^2-2x-1 < 0$ equivale a que $1-\sqrt{2} < x < 1+\sqrt{2}$. Concluimos que la desigualdad del enunciado es válida en el conjunto $]-1,1] \cap]1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}[=]1-\sqrt{2}, 1]$.
- Para $1 < x < 2$ tenemos $|x+1|+|x-1||x-2| = x+1+(x-1)(2-x) = -x^2+4x-1$. Por tanto, la desigualdad del enunciado es $-x^2+4x-1 < 4$, es decir, $x^2-4x+5 > 0$. Este trinomio no tiene raíces reales, por tanto se verifica que $x^2-4x+5 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Concluimos que la desigualdad del enunciado es válida para $1 < x < 2$.
- Para $x \geqslant 2$ tenemos $|x+1|+|x-1||x-2| = x+1+(x-1)(x-2) = x^2-2x+3$. Por tanto, la desigualdad del enunciado es $x^2-2x+3 < 4$, es decir, $x^2-2x-1 < 0$. Las raíces de este trinomio son $1-\sqrt{2}$ y $1+\sqrt{2}$. Es inmediato comprobar que $x^2-2x-1 < 0$ equivale a que $1-\sqrt{2} < x < 1+\sqrt{2}$. Como $2 < 1+\sqrt{2}$, concluimos que la desigualdad del enunciado es válida en el conjunto $[2,+\infty[\cap]1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}[= [2, 1+\sqrt{2}[$.

Concluimos que la desigualdad se verifica para

$$x \in]1-\sqrt{2}, 1]\cup]1, 2[\cup[2, 1+\sqrt{2}[=]1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}[$$

.

10. Supuesto que $0 < a < b$, calcula para qué valores de x se verifica la desigualdad

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{a+b-x}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \tag{3}$$

Solución. Se trata de una desigualdad entre funciones racionales (la función racional de la derecha es una constante). Seguiremos el procedimiento general visto en clase. Tenemos que:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{a+b-x}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \Leftrightarrow \frac{a+b}{x(a+b-x)}<\frac{a+b}{ab} \Leftrightarrow \frac{a+b}{x(a+b-x)}-\frac{a+b}{ab}<0$$

Haciendo las operaciones indicadas y simplificando se obtiene que:

$$\frac{a+b}{x(a+b-x)}-\frac{a+b}{ab}=\frac{(a+b)(x^2-(a+b)x+ab)}{abx(a+b-x)}$$

Como $ab > 0$ y $a+b > 0$, deducimos que la desigualdad (3) es equivalente a:

$$(x^2-(a+b)x+ab)x(a+b-x)=-(x-a)(x-b)x(x-(a+b))<0 \Longleftrightarrow H(x)=x(x-a)(x-b)(x-(a+b))>0$$

Las raíces de este polinomio son, ordenadas de menor a mayor, $0 < a < b < a+b$. Tenemos que:

$x < 0 \implies H(x) > 0$ porque es producto de cuatro números negativos.
$0 < x < a \implies H(x) < 0$ porque es producto de un número positivo y tres negativos.
$a < x < b \implies H(x) > 0$ porque es producto de dos números positivos y dos negativos.
$b < x < a+b \implies H(x) < 0$ porque es producto de tres números positivos y uno negativo.
$a+b < x \implies H(x) > 0$ porque es producto de cuatro números positivos.

Del estudio anterior se deduce que:

$$\mathcal{A}=\left\{x\in\mathbb{R} : \frac{1}{x}+\frac{1}{a+b-x}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right\}=]-\infty, 0[\cup]a, b[\cup]a+b, +\infty[$$