

## TEMA 2: Espacios afines euclídeos

El impulso civilizador que supuso el helenismo, periodo iniciado por Alejandro Magno en el siglo IV AC, tuvo entre otras muchas consecuencias la creación de importantes centros de conocimiento en el área mediterránea, el más conocido de ellos la ciudad de Alejandría en el norte de Egipto. En este contexto histórico se inscriben *Los Elementos*, uno de los escritos más influyentes de la Historia Occidental atribuido a Euclides de Alejandría alrededor del año 300 A.C. La obra consiste de 13 tomos en los que se describe de forma razonablemente rigurosa la geometría de su época. Euclides compiló con bastante acierto conceptos, definiciones, postulados, teoremas y corolarios acerca de rectas, ángulos, triángulos, circunferencias y otras figuras planas y del espacio. Durante muchos siglos se creyó que la Geometría Euclídea era la única posible, fracasándose en múltiples ocasiones en el intento de demostrar el V Postulado de Euclides (por un punto exterior a una recta pasa una única paralela) a partir de los otros cuatro postulados previos sobre los que se cimentaban los pilares lógicos de Los Elementos. De hecho, la Geometría Euclídea llegó a influir en los tratados de grandes pensadores como Descartes o Kant. Finalmente, a principios del s. XIX y de forma independiente, Karl Gauss, Nicolai Lobachevsky y Janos Bolyai crearon las Geometrías Elíptica e Hiperbólica, en las que el V Postulado de Euclides no se sostiene (aunque sí el resto de la arquitectura lógica de la geometría). Éste fue el nacimiento de las geometrías no euclidianas, y en definitiva, el origen de la geometría moderna. En este Tema 2 del curso nos vamos a dedicar a estudiar la Geometría Euclídea desde un punto de vista actual, más cartesiano, revisando algunas de las aportaciones más importantes a lo largo de estos 23 siglos con un lenguaje mucho más estructurado desde la modernidad matemática. Por ejemplo, Euclides desconocía el concepto de aplicación, y por tanto le era imposible interpretar la primitiva idea de «igualdad de figuras» a través del concepto de movimiento rígido.

### 3. EL ESPACIO AFÍN EUCLÍDEO

En esta sección presentaremos la formulación moderna del concepto de espacio afín euclídeo o espacio afín dotado de una métrica euclidiana en su variedad de dirección.

#### 3.1. Repaso de espacios vectoriales métricos euclidianos

Para un correcto tratamiento de lo que sigue, necesitamos recordar algunas notaciones y conceptos básicos de la teoría de espacios vectoriales euclídeos estudiadas en cursos anteriores.

En lo que sigue  $V$  será un espacio vectorial real de  $\dim V = n$ .

Si  $\mathcal{B}$  denota la familia de todas las bases ordenadas de  $V$ , dos bases  $B, B' \in \mathcal{B}$  se dirá que tienen el mismo carácter de orientabilidad, y escribiremos  $B \sim B'$ , si

$$\det M(\text{Id}_V, B, B') > 0.$$

La relación  $\sim$  es de equivalencia en  $\mathcal{B}$  y el cociente  $\mathcal{B}/\sim$  tiene exactamente dos clases de equivalencia. En efecto, si  $B = \{v_1, \dots, v_n\} \in \mathcal{B}$  y  $B' = \{-v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , es fácil ver que  $B \not\sim B'$  y  $(\mathcal{B}/\sim) = \{[B], [B']\}$ .

**Definición 3.1** Una orientación en  $V$  es una clase de equivalencia  $\mathcal{O} \in \mathcal{B}/\sim$ . Un par  $(V, \mathcal{O})$ , donde  $\mathcal{O}$  es una orientación en  $V$ , es un espacio vectorial orientado.

Una base ordenada  $B$  de  $V$  se dice positiva en un espacio vectorial orientado  $(V, \mathcal{O})$  si  $[B] = \mathcal{O}$ , y negativa si  $[B] \neq \mathcal{O}$ .

Recordemos que un espacio vectorial euclídeo es un par  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , donde  $V$  es un espacio vectorial real y  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es una métrica euclidiana en  $V$ , esto es. una aplicación bilineal y simétrica

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

satisfaciendo

$$\langle v, v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in V \quad \text{y} \quad \langle v, v \rangle = 0 \iff v = \vec{0}.$$

Denotaremos por

$$\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}, \quad \|v\| = +\sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

su norma asociada a  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .

**Propiedades 3.2** Sea  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio vectorial euclídeo. Se satisfacen las siguientes propiedades:

- (a)  $\|v\| \geq 0 \quad \forall v \in V$ , y la igualdad se da si y solo si  $v = \vec{0}$ .
- (b)  $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, v \in V$ .
- (c) **Desigualdad triangular:**  $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad \forall u, v \in V$ .
- (d) **Desigualdad de Cauchy-Schwarz:**  $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\| \quad \forall u, v \in V$ , y la igualdad se da si y solo si  $\{u, v\}$  son linealmente dependientes.

La ortogonalidad de vectores  $u, v$  en  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  se define

$$v \perp u \iff \langle v, u \rangle = 0.$$

Si  $U \subseteq V$  es un subespacio vectorial, su complemento ortogonal  $U^\perp$  de  $U$  en  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  viene dado por

$$U^\perp = \{v \in V: v \perp u \quad \forall u \in U\}.$$

De forma análoga, la ortogonalidad de subespacios vectoriales  $U, W \subseteq V$  se define

$$U \perp W \iff u \perp w \quad \forall u \in U, \forall w \in W \iff U \subseteq W^\perp \iff W \subseteq U^\perp.$$

**Propiedades 3.3** Dado  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio vectorial euclídeo, son ciertas las satisfacen propiedades:

- (a) Si  $X \subseteq V$  es un subconjunto arbitrario entonces  $L(X)^\perp = \{v \in V: v \perp x \quad \forall x \in X\}$ , donde  $L(X)$  representa la intersección de todos los subespacios vectoriales de  $V$  que contienen a  $X$  (menor subespacio vectorial de  $V$  conteniendo a  $X$ ).
- (b)  $U \subseteq W \iff W^\perp \subseteq U^\perp$  para cualesquiera subespacios  $U, W \subseteq V$ .
- (c)  $(U^\perp)^\perp = U$  para todo subespacio  $U \subseteq V$ .
- (d)  $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$  y  $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$  para cualesquiera subespacios  $U, W \subseteq V$ .
- (e)  $V = U \oplus U^\perp$  para todo subespacio  $U \subseteq V$ .

El hecho de que  $U$  y  $U^\perp$  sean subespacios vectoriales suplementarios en  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  da sentido a la siguiente definición.

**Notación 3.4** La proyección  $\vec{\pi}_{U, U^\perp}$  y la simetría  $\vec{\sigma}_{U, U^\perp}$  sobre  $U$  en la dirección de  $U^\perp$  en un espacio vectorial euclídeo  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  se denotan

$$\vec{\pi}_U^\perp \equiv \vec{\pi}_{U, U^\perp}, \quad \vec{\sigma}_U^\perp \equiv \vec{\sigma}_{U, U^\perp},$$

y se denominan proyección y simetría ortogonales sobre  $U$  en  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , respectivamente.

Las bases naturales para  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  son las ortonormales, esto es, las bases  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$  para las que la matriz de la métrica

$$M(\langle \cdot, \cdot \rangle, B) := (\langle e_i, e_j \rangle)_{i,j=1,\dots,n} = I_n.$$

El grupo de matrices ortogonales de orden  $n$

$$O(n, \mathbb{R}) := \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : A \cdot A^t = I_n\}$$

gobierna la geometría de los espacios vectoriales euclidianos  $n$ -dimensionales. De hecho, si  $B$  es una base ortonormal de  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  y  $B'$  es una base de  $V$  se tiene que

$$B' \text{ es ortonormal en } (V, \langle \cdot, \cdot \rangle) \iff M(I_V, B, B') \in O(n, \mathbb{R}).$$

**Definición 3.5** Sea  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle, \mathcal{O})$  un plano euclídeo orientado ( $\dim V = 2$ ), sea  $\{u_1, u_2\}$  una dupla ordenada de vectores de  $V \setminus \{\vec{0}\}$ , y sea  $B = \{w_1, w_2\}$  la única base ortonormal positiva en  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle, \mathcal{O})$  con  $w_1 = \frac{1}{\|u_1\|}u_1$  (basta elegir un  $w_2 \in L(\{w_1\})^\perp$  unitario conveniente). El ángulo orientado que forman  $u_1$  y  $u_2$  en  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle, \mathcal{O})$  es el único número real  $\alpha \in \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$  tal que

$$u_2 = \|u_2\|(\cos(\alpha)w_1 + \text{sen}(\alpha)w_2).$$

Si se escribe  $\alpha \in \mathbb{R}$ , el ángulo se entiende determinado salvo la suma de un múltiplo entero de  $2\pi$ . También usaremos la notación  $\alpha = \angle_o(u_1, u_2) \in \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ .

Por  $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$  entendemos el grupo aditivo de los reales módulo  $2\pi$ , esto es, el cociente del grupo  $(\mathbb{R}, +)$  por el subgrupo  $2\pi\mathbb{Z} \leq \mathbb{R}$ . Por otra parte, la existencia del ángulo orientado está garantizada por el hecho de que  $\frac{1}{\|u_2\|}u_2 = xw_1 + yw_2$  con  $x^2 + y^2 = 1$ , ya que en ese caso el análisis real nos garantiza la existencia de un único  $\alpha \in \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$  con  $\cos(\alpha) = x, \text{sen}(\alpha) = y$ .

Es inmediato que

$$u_1 \perp u_2 \iff \angle_o(u_1, u_2) = \pm\pi/2 \pmod{2\pi}.$$

**Propiedades 3.6** Los siguientes enunciados son ciertos:

(I) Si  $u_1, u_2, u_3 \in V \setminus \{\vec{0}\}$  entonces  $\angle_o(u_1, u_2) + \angle_o(u_2, u_3) = \angle_o(u_1, u_3)$ . En particular,  $\angle_o(u_1, u_2) = -\angle_o(u_2, u_1)$  para todo  $u_1, u_2 \in V \setminus \{\vec{0}\}$ .

(II) Si  $B$  es una base ortonormal positiva de  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle, \mathcal{O})$  y  $u_1, u_2 \in V \setminus \{\vec{0}\}$ , entonces

$$\det_B(u_1, u_2) := \det((u_1)_B, (u_2)_B) = \|u_1\| \|u_2\| \text{sen}(\angle_o(u_1, u_2)),$$

donde  $\det_B$  es el tensor alternado  $\varphi_1 \otimes \varphi_2 - \varphi_2 \otimes \varphi_1 \in \Lambda_2(V)$  generado a partir de la base  $B^* = \{\varphi_1, \varphi_2\}$  dual de  $B$  en el espacio dual  $V^*$  de  $V$ .

DEMOSTRACIÓN: Escribamos  $\alpha = \angle_o(u_1, u_2)$  y  $\beta = \angle_o(u_2, u_3)$

Si  $B = \{w_1, w_2\}$  es la única base ortonormal positiva en  $(V, \langle, \rangle, \mathcal{O})$  con  $w_1 = \frac{1}{\|u_1\|}u_1$ , sabemos que

$$\frac{1}{\|u_2\|}u_2 = (\cos(\alpha)w_1 + \sin(\alpha)w_2).$$

Observemos que la base

$$B' = \{w'_1 = \frac{1}{\|u_2\|}u_2, w'_2 = -\sin(\alpha)w_1 + \cos(\alpha)w_2\}$$

satisface  $\det M(\text{Id}_V, B, B') = \sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2 = 1 > 0$ , y por tanto es también ortonormal y positiva. Por tanto, por definición,

$$\frac{1}{\|u_3\|}u_3 = (\cos(\beta)w'_1 + \sin(\beta)w'_2),$$

esto es

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|u_3\|}u_3 &= (\cos(\beta)(\cos(\alpha)w_1 + \sin(\alpha)w_2) + \sin(\beta)(-\sin(\alpha)w_1 + \cos(\alpha)w_2)) = \\ &= ((\cos(\beta)\cos(\alpha) - \sin(\beta)\sin(\alpha))w_1 + (\cos(\beta)\sin(\alpha) + \sin(\beta)\cos(\alpha))w_2), \end{aligned}$$

de donde

$$\frac{1}{\|u_3\|}u_3 = (\cos(\alpha + \beta)w_1 + \sin(\alpha + \beta)w_2)$$

y  $\angle_o(u_1, u_3) = \alpha + \beta$ , lo que prueba (i).

Para demostrar (ii), observemos que

$$\begin{aligned} \det_B(u_1, u_2) &:= \det((u_1)_B, (u_2)_B) = \det_B(\|u_1\|w_1, \|u_2\|(\cos(\alpha)w_1 + \sin(\alpha)w_2)) = \\ &= \|u_1\|\|u_2\|\det_B(w_1, \cos(\alpha)w_1 + \sin(\alpha)w_2) = \|u_1\|\|u_2\|\sin(\alpha)\det_B(w_1, w_2), \end{aligned}$$

de donde al ser  $\det_B(w_1, w_2) = 1$  finalmente queda  $\det_B(u_1, u_2) = \|u_1\|\|u_2\|\sin(\alpha)$ . ■

La desigualdad de Cauchy-Schwarz  $|\langle u_1, u_2 \rangle| \leq \|u_1\|\|u_2\|$  y el análisis real garantizan la existencia de un único número real  $\beta \in [0, \pi]$  tal que  $\langle u_1, u_2 \rangle = \|u_1\|\|u_2\|\cos(\beta)$  para cualesquiera  $u_1, u_2 \in V \setminus \{\vec{0}\}$ .

**Definición 3.7** *Dados dos vectores  $u_1, u_2 \in V \setminus \{\vec{0}\}$  en un espacio vectorial euclidiano  $(V, \langle, \rangle)$ , el ángulo no orientado que forman es el único número real  $\angle(u_1, u_2) \in [0, \pi]$  tal que  $\langle u_1, u_2 \rangle = \|u_1\|\|u_2\|\cos(\angle(u_1, u_2))$ .*

Dados  $u, v \in V \setminus \{\vec{0}\}$ , es trivial comprobar que:

- $\angle(u, v) = \angle(v, u)$  y  $\angle(u, -v) = \pi - \angle(u, v)$ .
- $u \perp v \iff \angle(u, v) = \frac{\pi}{2}$ .
- Si  $\mathcal{O}$  es una orientación en  $(V, \langle, \rangle)$  y  $\angle_o(u, v)$  es la determinación en  $[0, 2\pi[$  del ángulo orientado que forman  $u$  y  $v$ , entonces

$$\angle(u, v) = \min\{\angle_o(u, v), 2\pi - \angle_o(u, v)\}.$$

## 3.2. Espacios afines euclídeos: distancia, ángulo y perpendicularidad

Comencemos con la definición fundamental de este tema.

**Definición 3.8** *Un espacio afín euclídeo es una cuaterna  $(\mathcal{A}, \vec{\mathcal{A}}, \rightarrow, \langle, \rangle)$  donde  $(\mathcal{A}, \vec{\mathcal{A}}, \rightarrow)$  es un espacio afín y  $(\vec{\mathcal{A}}, \langle, \rangle)$  es un espacio vectorial euclídeo. Si no hay lugar para la ambigüedad, es común relajar la notación y escribir  $(\mathcal{A}, \langle, \rangle)$  en vez de  $(\mathcal{A}, \vec{\mathcal{A}}, \rightarrow, \langle, \rangle)$ .*

El ejemplo más sencillo de espacio afín euclídeo es  $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n, \rightarrow, \langle, \rangle)$  con  $\langle, \rangle$  el producto escalar clásico.

**Definición 3.9** *La función distancia en un espacio afín euclídeo  $(\mathcal{A}, \langle, \rangle)$  se define:*

$$d: \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}, \quad d(p, q) = \|\vec{pq}\|,$$

donde  $\|\cdot\|$  es la norma en  $(\vec{\mathcal{A}}, \langle, \rangle)$ .

Como consecuencia de la axiomática de espacio afín y de las propiedades de la norma  $\|\cdot\|$ , es inmediato comprobar que  $(\mathcal{A}, d)$  es un espacio métrico, esto es:

- (I)  $d(p, q) \geq 0$  para todo  $p, q \in \mathcal{A}$ , y se da la igualdad si y solo si  $p = q$ .
- (II)  $d(p, q) = d(q, p)$  para todo  $p, q \in \mathcal{A}$ .
- (III)  $d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r)$  para todo  $p, q, r \in \mathcal{A}$ .

**Definición 3.10** *Dos subespacios afines  $S, T$  en un espacio afín euclídeo  $(\mathcal{A}, \langle, \rangle)$  se dicen perpendiculares (u ortogonales) si  $\vec{S} \perp \vec{T}$  en  $(\vec{\mathcal{A}}, \langle, \rangle)$ . En ese caso se escribiremos  $S \perp T$ .*

Presentamos a continuación los sistemas de referencia naturales en los espacios afines euclídeos, llamados rectangulares. Precisemos la definición.

**Definición 3.11** *Un sistema de referencia  $\mathcal{R} = \{p_0, B\}$  en un espacio afín euclídeo  $(\mathcal{A}, \langle, \rangle)$  se dice rectangular u ortonormal si la base de sus direcciones  $B$  es una base ortonormal de  $(\vec{\mathcal{A}}, \langle, \rangle)$ .*

Como consecuencia de la definición, si  $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$  son sistemas de referencia en  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{R}$  es rectangular, entonces

$$\mathcal{R}' \text{ es rectangular} \iff M(\text{Id}_V, B, B') \in O(n, \mathbb{R}) \quad (n = \dim \mathcal{A}).$$

Por tanto, si  $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$  son sistemas de referencia rectangulares,

$$M(\text{Id}_\mathcal{A}, \mathcal{R}, \mathcal{R}') = \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array} \right), \quad A \in O(n, \mathbb{R}).$$

**Definición 3.12** *Si  $S, T$  son rectas secantes en un espacio afín euclídeo  $(\mathcal{A}, \langle, \rangle)$  y  $\vec{S} = L(\{u\})$ ,  $\vec{T} = L(\{v\})$ , el ángulo que forman  $S$  y  $T$  en  $(\mathcal{A}, \langle, \rangle)$  es el número*

$$\angle(S, T) := \min\{\angle(u, v), \angle(u, -v)\} = \min\{\angle(u, v), \pi - \angle(u, v)\} \in [0, \pi/2],$$

donde los ángulos no orientados  $\angle(u, v), \angle(u, -v) \in [0, \pi]$  se calculan en  $(\vec{\mathcal{A}}, \langle, \rangle)$ .

A tenor de la anterior definición, es evidente que

**Proposición 3.13** *Si  $S, R$  son dos rectas paralelas en  $(\mathcal{A}, \langle, \rangle)$  y  $T$  es secante a ambas entonces  $\angle(S, T) = \angle(R, T)$ .*

**Proposición 3.14 (Complemento ortogonal)** *Si  $S$  es un subespacio afín en  $(\mathcal{A}, \langle, \rangle)$  y  $p \in \mathcal{A}$ , entonces existe un único subespacio afín  $T$  que contiene a  $p$ , es suplemento de  $S$  y es perpendicular a  $S$ :*

$$p \in T, \quad \dim S + \dim T = \dim \mathcal{A}, \quad T \perp S.$$

DEMOSTRACIÓN: Veamos que  $T = p + \vec{S}^\perp$  resuelve la proposición. En efecto, claramente  $p \in T$ ,  $S \perp T$ , y  $\dim S + \dim T = \dim \mathcal{A}$  toda vez que  $\vec{\mathcal{A}} = \vec{S} \oplus \vec{S}^\perp$ . Solo resta comprobar la unicidad. Supongamos que  $T'$  satisface también la tesis de la proposición. La condición  $T' \perp S$  implica  $\vec{T}' \subseteq \vec{S}^\perp$ , mientras que la identidad  $\dim S + \dim T' = \dim \mathcal{A}$  garantiza que  $\vec{T}' = \vec{S}^\perp$  toda vez que  $\dim \vec{T}' = \dim T' = \dim \mathcal{A} - \dim S = \dim \vec{\mathcal{A}} - \dim \vec{S} = \dim \vec{S}^\perp$ . Como  $p \in T'$  concluimos que  $T' = p + \vec{S} = T$ . ■

Como hemos visto en su demostración, el subespacio  $T$  en la tesis de la proposición anterior está caracterizado por las condiciones

$$p \in T, \quad \vec{T} = \vec{S}^\perp.$$

Se le suele denominar el complemento (o suplemento) ortogonal a  $S$  que pasa por  $p$ .

**Definición 3.15** *Sea  $S$  es un subespacio afín en  $(\mathcal{A}, \langle, \rangle)$  y  $T$  es un complemento ortogonal de  $S$ . La proyección afín*

$$\pi_S^\perp: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}, \quad \pi_S^\perp := \pi_{S, T},$$

*(que no depende de complemento ortogonal  $T$  utilizado) es conocida como la proyección ortogonal sobre  $S$  en  $(\mathcal{A}, \langle, \rangle)$ .*

Tiene sentido hablar de distancia entre subespacios afines  $S, T$  en un espacio afín euclídeo  $(\mathcal{A}, \langle, \rangle)$  de acuerdo con la siguiente definición

$$d(S, T) := \inf\{d(p, q) : p \in S, q \in T\}.$$

La siguiente proposición nos proporciona una interpretación geométrica de este concepto, además de un mecanismo de cálculo directo. Entre otras cosas nos dirá que  $d(S, T)$  es de hecho un mínimo, y que éste se alcanza justo en puntos formando vectores ortogonales a ambos subespacios.

**Proposición 3.16** *Sean  $S, T$  subespacios afines de un espacio afín euclídeo  $(\mathcal{A}, \langle, \rangle)$ . Entonces*

(I) *Existen puntos  $p_0 \in S, q_0 \in T$  tales que  $\overrightarrow{p_0 q_0} \in \vec{S}^\perp \cap \vec{T}^\perp$ .*

(II) *Si  $p_0 \in S, q_0 \in T$  son tales que  $\overrightarrow{p_0 q_0} \in \vec{S}^\perp \cap \vec{T}^\perp$  entonces  $d(S, T) = d(p_0, q_0)$ .*

DEMOSTRACIÓN: Si  $S \cap T \neq \emptyset$  la tesis de la proposición es trivial, bastará con elegir  $p_0 = q_0 \in S \cap T$  y observar que  $0 = d(S, T) = d(p_0, q_0)$ .

Supongamos pues que  $S \cap T = \emptyset$ . Sin pérdida de generalidad, salvo sustituir  $\mathcal{A}$  como espacio ambiente por su subespacio  $S \vee T$  con la métrica restringida sobre  $\overrightarrow{S \vee T}$ , podemos suponer que  $S \vee T = \mathcal{A}$ .

Como  $S \cap T = \emptyset$  la fórmula de dimensiones (ver Corolario 2.20-(iii)) nos dice que  $\dim \mathcal{A} = \dim(S \vee T) = \dim(\vec{S} + \vec{T}) + 1$ , esto es,  $\vec{S} + \vec{T}$  es un hiperplano vectorial en  $\vec{\mathcal{A}}$  y  $(\vec{S} + \vec{T})^\perp$  es una recta vectorial. Por tanto existe  $v \in \vec{\mathcal{A}} \setminus \{\vec{0}\}$  tal que

$$\vec{S}^\perp \cap \vec{T}^\perp = (\vec{S} + \vec{T})^\perp = L(\{v\}) \quad \text{y} \quad \vec{\mathcal{A}} = (\vec{S} + \vec{T}) \oplus L(\{v\}).$$

Escribiendo  $S = p + \vec{S}$ ,  $T = q + \vec{T}$  y usando que  $\overrightarrow{pq} \in \vec{\mathcal{A}} = (\vec{S} + \vec{T}) \oplus L(\{v\})$ , podemos encontrar  $u \in \vec{S}$ ,  $w \in \vec{T}$  y  $\lambda v \in L(\{v\})$  tales que

$$\overrightarrow{pq} = u + w + \lambda v.$$

Si elegimos  $p_0 = p + u \in S$  y  $q_0 = q - w \in T$ , un cálculo directo da

$$\overrightarrow{p_0 q_0} = \overrightarrow{(p+u)(q-w)} = \overrightarrow{pq} - w - u = \lambda v \in (\vec{S} + \vec{T})^\perp = \vec{S}^\perp \cap \vec{T}^\perp,$$

probando (i).

Para probar (ii), supongamos que  $p_0 \in S$ ,  $q_0 \in T$  son tales que  $\overrightarrow{p_0 q_0} \in \vec{S}^\perp \cap \vec{T}^\perp$ . Si tomamos  $p \in S$  y  $q \in T$  arbitrarios,

$$\begin{aligned} d(p, q)^2 &= \|\overrightarrow{pq}\|^2 = \|\overrightarrow{pp_0} + \overrightarrow{p_0 q_0} + \overrightarrow{q_0 q}\|^2 = \langle \overrightarrow{pp_0} + \overrightarrow{p_0 q_0} + \overrightarrow{q_0 q}, \overrightarrow{pp_0} + \overrightarrow{p_0 q_0} + \overrightarrow{q_0 q} \rangle = \\ &= \|\overrightarrow{pp_0} + \overrightarrow{q_0 q}\|^2 + \|\overrightarrow{p_0 q_0}\|^2 + 2\langle \overrightarrow{pp_0} + \overrightarrow{q_0 q}, \overrightarrow{p_0 q_0} \rangle = \|\overrightarrow{pp_0} + \overrightarrow{q_0 q}\|^2 + \|\overrightarrow{p_0 q_0}\|^2 \geq \|\overrightarrow{p_0 q_0}\|^2 = d(p_0, q_0)^2, \end{aligned}$$

donde hemos usado que  $\overrightarrow{p_0 q_0} \perp (\overrightarrow{pp_0} + \overrightarrow{q_0 q})$  ya que  $\overrightarrow{pp_0} + \overrightarrow{q_0 q} \in \vec{S} + \vec{T}$ . Esto prueba que  $d(p, q) \geq d(p_0, q_0)$  para todo  $p \in S$ ,  $q \in T$ , y por tanto

$$d(S, T) := \inf\{d(p, q) : p \in S, q \in T\} = \min\{d(p, q) : p \in S, q \in T\} = d(p_0, q_0),$$

lo que concluye la demostración. ■

**Corolario 3.17** Si  $S, T$  son subespacios afines de  $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ,

$$d(S, T) = 0 \iff S \cap T \neq \emptyset.$$

**Corolario 3.18** Si  $S$  es un subespacio afín de  $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  y  $p \in \mathcal{A}$ , entonces

$$d(p, S) = d(p, \pi_S^\perp(p)).$$

En particular, si  $S$  es un hiperplano afín,  $\mathcal{R} = \{p_0, B = \{e_1, \dots, e_n\}\}$  es un sistema de referencia rectangular de  $\mathcal{A}$ ,  $p_{\mathcal{R}} = (y_1, \dots, y_n)^t$  son las coordenadas de un punto  $p \in \mathcal{A}$  en  $\mathcal{R}$ , y

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j + a_0 = 0$$

es la una ecuación implícita de  $S$  en  $\mathcal{R}$ , entonces

$$d(p, S) = \frac{|\sum_{j=1}^n a_j y_j + a_0|}{\sqrt{\sum_{j=1}^n a_j^2}}.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea  $T_p$  el único subespacio afín de  $\mathcal{A}$  con  $p \in T_p$  y  $\vec{T}_p = \vec{S}^\perp$ , esto es,  $T_p = p + \vec{S}^\perp$  (el suplemento ortogonal de  $S$  pasando por  $p$ ). Recordemos que por definición

$$\pi_S^\perp(p) = T_p \cap S.$$

Como  $\pi_S^\perp(p) \in S$  y  $\overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)} \in \vec{S}^\perp \cap \overrightarrow{\{p\}}^\perp = \vec{S}^\perp \cap \{\vec{0}\}^\perp = \vec{S}^\perp \cap \vec{\mathcal{A}} = \vec{S}^\perp$ , de la Proposición 3.16 aplicada a los subespacios afines  $S$  y  $\{p\}$  deducimos que

$$d(p, S) = d(p, \pi_S^\perp(p)).$$

Para probar la segunda parte del corolario asumamos que  $S$  es un hiperplano afín como en el enunciado, y notemos que

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j = \langle \sum_{j=1}^n a_j e_j, \sum_{j=1}^n x_j e_j \rangle = 0$$

es una ecuación implícita de  $\vec{S}$  en la base ortonormal  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$  de  $(\vec{\mathcal{A}}, \langle, \rangle)$  de las direcciones de  $\mathcal{R}$ , de donde

$$\vec{S}^\perp = L(\{\sum_{j=1}^n a_j e_j\}).$$

Fijemos  $q \in S$  un punto arbitrario. La expresión  $\vec{qp} = \overrightarrow{q\pi_S^\perp(p)} + \overrightarrow{\pi_S^\perp(p)p}$ , donde

$$\overrightarrow{q\pi_S^\perp(p)} \in \vec{S} \quad \text{y} \quad \overrightarrow{\pi_S^\perp(p)p} \in \vec{S}^\perp,$$

describe la descomposición del vector  $\vec{qp}$  de acuerdo a la suma directa  $\vec{\mathcal{A}} = \vec{S} \oplus \vec{S}^\perp$ . Llamando

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^n a_j^2}} \sum_{j=1}^n a_j e_j$$

y teniendo en cuenta que  $\overrightarrow{\pi_S^\perp(p)p} \in \vec{S}^\perp = L(\{\nu\})$  y  $\|\nu\| = 1$ , inferimos que

$$\|\overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)}\| = |\langle \overrightarrow{\pi_S^\perp(p)p}, \nu \rangle| = |\langle \vec{qp}, \nu \rangle|.$$

Escribiendo  $q_{\mathcal{R}} = (z_1, \dots, z_n)^t$  las coordenadas de  $q$  en  $\mathcal{R}$ , deducimos que

$$\begin{aligned} \langle \vec{qp}, \nu \rangle &= \langle \overrightarrow{qp_0} + \overrightarrow{p_0p}, \nu \rangle = \frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^n a_j^2}} \langle \sum_{j=1}^n y_j e_j - \sum_{j=1}^n z_j e_j, \sum_{j=1}^n a_j e_j \rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^n a_j^2}} \left( \sum_{j=1}^n y_j a_j - \sum_{j=1}^n z_j a_j \right) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^n a_j^2}} \left( \sum_{j=1}^n y_j a_j + a_0 \right), \end{aligned}$$

donde hemos usado que  $B$  es una base ortonormal de  $(\vec{\mathcal{A}}, \langle, \rangle)$  y que  $a_0 = -\sum_{j=1}^n z_j a_j$  al ser  $q \in S$ . Por tanto,

$$d(p, S) = d(p, \pi_S^\perp(p)) = \|\overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)}\| = |\langle \vec{qp}, \nu \rangle| = \frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^n a_j^2}} \left| \sum_{j=1}^n y_j a_j + a_0 \right|$$

como queríamos demostrar. ■



**Ejercicio 3.19** En el espacio afín euclideo clásico  $(\mathbb{R}^4, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  calcula  $d(S, T)$ , donde  $S, T$  son los subespacios afines

$$S = (1, 0, 0, 0) + L(\{(0, 0, 1, -1)\}), \quad T = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z = y - t = 1\}.$$

SOLUCIÓN: Resolviendo el sistema que nos proporcionan las ecuaciones implícitas de  $T$  tenemos que

$$T = (0, 1, 0, 0) + L(\{(-1, 1, 0, 1), (1, 0, -1, 0)\}) = \{(-\lambda + \mu, 1 + \lambda, -\mu, \lambda) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Análogamente

$$S = (1, 0, 0, 0) + L(\{(0, 0, 1, -1)\}) = \{(1, 0, \delta, -\delta) : \delta \in \mathbb{R}\}.$$

Tomemos

$$p_0 = (1, 0, \delta, -\delta) \in S, \quad q_0 = (-\lambda + \mu, 1 + \lambda, -\mu, \lambda) \in T$$

genéricos e imponamos

$$\overrightarrow{p_0 q_0} = (-\lambda + \mu - 1, 1 + \lambda, -\mu - \delta, \lambda + \delta) \in \overrightarrow{S}^\perp \cap \overrightarrow{T}^\perp.$$

Es claro que  $\overrightarrow{T} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z = y - t = 0\}$ , esto es

$$\overrightarrow{T} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \langle (x, y, z, t), (1, 1, 1, 0) \rangle = \langle (x, y, z, t), (0, 1, 0, -1) \rangle = 0\}.$$

Por tanto  $\overrightarrow{T} = L(\{(1, 1, 1, 0), (0, 1, 0, -1)\})^\perp$ , de donde

$$\overrightarrow{T}^\perp = (L(\{(1, 1, 1, 0), (0, 1, 0, -1)\})^\perp)^\perp = L(\{(1, 1, 1, 0), (0, 1, 0, -1)\})$$

y podemos escribir

$$\overrightarrow{T}^\perp = \{(\lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1, -\lambda_2) : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Análogamente

$$\overrightarrow{S}^\perp = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \langle (x, y, z, t), (0, 0, 1, -1) \rangle = 0\} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : z - t = 0\}.$$

De aquí que

$$\overrightarrow{S}^\perp \cap \overrightarrow{T}^\perp = \{(\lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1, -\lambda_2) \in \mathbb{R}^4 : \lambda_1 + \lambda_2 = 0\} = \{(\lambda_1, 0, \lambda_1, \lambda_1) : \lambda_1 \in \mathbb{R}\},$$

o en otras palabras

$$\overrightarrow{S}^\perp \cap \overrightarrow{T}^\perp = L(\{(1, 0, 1, 1)\}) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : y = z - x = t - x = 0\}.$$

Finalmente la condición

$$\overrightarrow{p_0 q_0} = (-\lambda + \mu - 1, 1 + \lambda, -\mu - \delta, \lambda + \delta) \in \overrightarrow{S}^\perp \cap \overrightarrow{T}^\perp$$

equivale a que

$$1 + \lambda = -\mu - \delta + \lambda - \mu = \lambda + \delta + \lambda - \mu = 0,$$

esto es  $\lambda = \mu = -1, \delta = 1$ .

Esto lleva a

$$p_0 = (1, 0, 1, -1), \quad q_0 = (0, 0, 1, -1), \quad \overrightarrow{p_0 q_0} = (-1, 0, 0, 0).$$

y  $\text{dist}(S, T) = \|\overrightarrow{p_0 q_0}\| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2} = 1.$  ■

### 3.3. Repaso de isometrías lineales en espacios vectoriales euclidianos

Recordemos algunos resultados básicos sobre espacios vectoriales euclídeos estudiados en cursos anteriores.

Sean  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ,  $(V', \langle \cdot, \cdot \rangle')$  espacios vectoriales euclídeos. Una aplicación

$$h: (V, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (V', \langle \cdot, \cdot \rangle')$$

es una *isometría lineal o vectorial* si es un isomorfismo lineal y satisface

$$\langle h(v), h(u) \rangle' = \langle v, u \rangle \quad \forall v, u \in V.$$

Si  $\dim V = \dim V' = n$ , el grupo ortogonal  $O(n, \mathbb{R})$  gobierna de nuevo este tipo de transformaciones, en el sentido de que si  $B, B'$  son bases ortonormales de  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ,  $(V', \langle \cdot, \cdot \rangle')$  entonces:

$$h: (V, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (V', \langle \cdot, \cdot \rangle') \text{ es isometría vectorial} \iff M(h, B, B') \in O(n, \mathbb{R}).$$

Las isometrías dejan invariante la norma de vectores, esto es,

$$\|h(v)\|' = \|v\| \quad \forall v \in V.$$

Como consecuencia, también preservan ángulos no orientados

$$\angle'(h(v), h(u)) = \arccos \left( \frac{\langle h(u), h(v) \rangle'}{\|h(u)\|' \|h(v)\|'} \right) = \arccos \left( \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|} \right) = \angle(v, u).$$

Igual ocurre con los orientados si  $h$  preserva las orientaciones fijadas  $\mathcal{O}$  en  $V$  y  $\mathcal{O}'$  en  $V'$ . En particular, respetan la ortogonalidad

$$u \perp v \iff h(u) \perp h(v) \quad \forall u, v \in V.$$

Por tanto  $h(U^\perp) = h(U)^\perp$  para todo subespacio  $U \subseteq V$ .

Centremos nuestro interés en los endomorfismos isométricos  $h: (V, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . La siguiente proposición no da información sobre su estructura básica.

**Proposición 3.20** *Sea  $h: V \rightarrow V$  una isometría vectorial en un espacio vectorial euclídeo  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  de  $\dim V = n$ . Los siguientes enunciados son ciertos:*

- (I)  $\det(h) = \pm 1$ .
- (II) *Los únicos posibles valores propios de  $h$  son 1 y  $-1$ .*
- (III) *Si  $V_1 = \text{Ker}(h - \text{Id}_V)$  y  $V_{-1} = \text{Ker}(h + \text{Id}_V)$  entonces  $V_1 \perp V_{-1}$ .*
- (IV)  $h((V_1 + V_{-1})^\perp) = (V_1 + V_{-1})^\perp$ .
- (V)  $\dim(V_1 + V_{-1})^\perp$  es par y  $\det(h) = (-1)^{\dim V_{-1}}$ .

**DEMOSTRACIÓN:** Si  $A \in O(n, \mathbb{R})$  es una matriz ortogonal entonces  $1 = \det(I_n) = \det(A \cdot A^t) = \det(A)^2$ , y por tanto  $\det(A) = \pm 1$ . Como  $M(h, B) \equiv M(h, B, B) \in O(n, \mathbb{R})$  para cualquier base  $B$  ortonormal de  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , se sigue que  $\det(h) = \det(M(h, B)) = \pm 1$  probando (i).

Si  $\lambda$  es un valor propio de  $h$  y  $v \in V \setminus \{\vec{0}\}$  un vector propio asociado, esto es, tal que  $h(v) = \lambda v$ , entonces  $\lambda^2 \|v\|^2 = \|h(v)\|^2 = \|v\|^2$ . Como  $\|v\|^2 \neq 0$  deducimos que  $\lambda^2 = 1$ , probando (ii).

Si  $v \in V_1$  y  $u \in V_{-1}$  entonces

$$\langle v, u \rangle = \langle h(v), h(u) \rangle = \langle v, -u \rangle = -\langle v, u \rangle,$$

esto es  $\langle v, u \rangle = 0$  y  $v \perp u$ , lo que prueba (iii).

Es claro que

$$h((V_1 + V_{-1})^\perp) = (h(V_1 + V_{-1}))^\perp = (h(V_1) + h(V_{-1}))^\perp = (V_1 + V_{-1})^\perp,$$

de donde se sigue (iv).

Finalmente, como  $V = (V_1 \oplus V_{-1}) \oplus (V_1 + V_{-1})^\perp$  y  $h$  deja invariantes los tres sumandos de esa suma directa, es claro que

$$\det(h) = \det(h|_{V_1}) \det(h|_{V_{-1}}) \det(h|_{(V_1 + V_{-1})^\perp}) = (-1)^{\dim V_{-1}} \det(h|_{(V_1 + V_{-1})^\perp}),$$

donde entendemos  $h|_{V_{\pm 1}}: V_{\pm 1} \rightarrow V_{\pm 1}$  y  $h|_{(V_1 + V_{-1})^\perp}: (V_1 + V_{-1})^\perp \rightarrow (V_1 + V_{-1})^\perp$ . Para acabar basta con ver que  $\dim(V_1 + V_{-1})^\perp$  es par y  $\det(h|_{(V_1 + V_{-1})^\perp}) = 1$ . La isometría lineal  $h|_{(V_1 + V_{-1})^\perp}$  no tiene valores propios (los únicos valores propios posibles de  $h$  son 1 y -1 y  $(V_1 + V_{-1})^\perp \cap V_{\pm 1} = \emptyset$ ), y por tanto su polinomio característico

$$p(t) = \det(h|_{(V_1 + V_{-1})^\perp} - t \text{Id}_{(V_1 + V_{-1})^\perp})$$

no tiene raíces reales. El Teorema de Bolzano fuerza a que  $p(t)$  sea un polinomio de grado  $k = \dim(V_1 + V_{-1})^\perp$  par, y como su término líder es  $t^k$ , a que su término independiente  $\det(h|_{(V_1 + V_{-1})^\perp})$  sea positivo. Por (i), al ser  $h|_{(V_1 + V_{-1})^\perp}$  una isometría  $\det(h|_{(V_1 + V_{-1})^\perp}) = \pm 1$ , de donde  $\det(h|_{(V_1 + V_{-1})^\perp}) = 1$  probando (v). ■

Las isometrías vectoriales con  $\det(h) = 1$  son llamadas *positivas o directas*, y la de  $\det(h) = -1$  *negativas o inversas*.

Cerraremos este repaso de las propiedades básicas de las isometrías lineales con la siguiente proposición.

**Proposición 3.21** Si  $h: (V, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  es una isometría lineal entonces

$$\text{Ker}(h - \text{Id}_V) = \text{Im}(h - \text{Id}_V)^\perp.$$

DEMOSTRACIÓN: Si  $v \in \text{Ker}(h - \text{Id}_V)$  y  $u \in \text{Im}(h - \text{Id}_V)$  entonces

$$h(v) = v \quad \text{y} \quad u = h(w) - w \quad \text{para algún } w \in V.$$

Por tanto, usando que  $h$  es una isometría vectorial,

$$\langle v, u \rangle = \langle v, h(w) - w \rangle = \langle v, h(w) \rangle - \langle v, w \rangle = \langle h(v), h(w) \rangle - \langle v, w \rangle = 0,$$

lo que demuestra que  $\text{Ker}(h - \text{Id}_V) \subseteq \text{Im}(h - \text{Id}_V)^\perp$ . Si probamos que  $\dim \text{Ker}(h - \text{Id}_V) = \dim \text{Im}(h - \text{Id}_V)^\perp$  serían iguales y acabaríamos la proposición.

En efecto, como  $h - \text{Id}_V$  es un endomorfismo del primer teorema de isomorfía en el álgebra lineal deducimos que

$$\dim \text{Ker}(h - \text{Id}_V) + \dim \text{Im}(h - \text{Id}_V) = \dim V,$$

y como siempre  $V = \text{Im}(h - \text{Id}_V) \oplus \text{Im}(h - \text{Id}_V)^\perp$  tenemos que

$$\dim \text{Im}(h - \text{Id}_V) + \dim \text{Im}(h - \text{Id}_V)^\perp = \dim V.$$

Por tanto  $\dim \text{Ker}(h - \text{Id}_V) = \dim \text{Im}(h - \text{Id}_V)^\perp$ , lo que concluye la prueba. ■

Una parte relevante de la teoría de isometrías vectoriales en un espacio vectorial euclídeo es su clasificación. Repasemos brevemente la misma en los casos de dimensiones 2 y 3.

### 3.3.1. Clasificación de las isometrías en planos vectoriales euclídeos

Sea  $h: V \rightarrow V$  una isometría vectorial en un espacio vectorial euclidiano  $(V, \langle, \rangle)$  de dimensión 2. Si  $h \neq \text{Id}_V$ , caben dos posibilidades:

- (i)  $\det(h) = 1$ . En este caso, fijada una orientación  $\mathcal{O}$  en  $V$  existe un único  $\theta \in ]0, 2\pi[$  tal que

$$M(h, B) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

en cualquier base ortonormal  $B = \{v_1, v_2\}$  positivamente orientada (si eligiésemos la orientación contraria el ángulo  $\theta$  cambiaría por  $2\pi - \theta$ ). En efecto, si escribimos

$$h(v_j) = \sum_{i=1}^2 a_{ij}v_i, \quad j = 1, 2,$$

al ser

$$M(h, B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \text{O}(2, \mathbb{R})$$

deducimos que

$$\|(a_{11}, a_{21})\| = \|(a_{12}, a_{22})\| = 1, \quad \langle (a_{11}, a_{21}), (a_{12}, a_{22}) \rangle = 0, \quad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1,$$

donde  $\|\cdot\|$  y  $\langle, \rangle$  son la norma y producto escalar clásicos en  $\mathbb{R}^2$ .

Como  $\|(a_{11}, a_{21})\| = 1$ , por las propiedades de las funciones trigonométricas existe un único  $\theta \in ]0, 2\pi[$  tal que  $a_{11} = \cos \theta$ ,  $a_{21} = \sin \theta$ . Despejando arriba deducimos que  $a_{12} = -\sin \theta$ ,  $a_{22} = \cos \theta$  como habíamos afirmado. Obsérvese que en este caso  $\text{Ker}(h - \text{Id}_V) = \{\vec{0}\}$ .

Se dice que  $h$  es un giro de ángulo  $\theta \in ]0, 2\pi[$  respecto de la orientación  $\mathcal{O}$  fijada, y escribimos  $h = G_\theta$ . Nótese que para todo vector  $v \in V \setminus \{\vec{0}\}$  el ángulo orientado  $\angle_o(v, G_\theta(v))$  respecto de  $\mathcal{O}$  coincide con  $\theta$ . Si no se enfatiza la orientación, el correspondiente ángulo no orientado  $\theta \in ]0, \pi]$  del giro  $h$  se determina a través de la ecuación  $\text{Traza}(h) = 2 \cos(\theta)$ . El elemento geométrico que determina un giro vectorial es su ángulo.

- (ii)  $\det(h) = -1$ . Recordemos que el polinomio característico de  $h$  es de la forma

$$p_h(t) := \det(M(h, B) - tI_2) = t^2 - \text{Traza}(h)t + \det(h)$$

para cualquier base  $B$  de  $V$ . Recuerda que

$$\text{Traza}(h) = \text{Traza}(M(h, B)) \quad \text{y} \quad \det(h) = \det(M(h, B))$$

no dependen de la base  $B$ . Al ser el término independiente del polinomio  $p_h(t)$  igual a  $\det(h) = -1 < 0$ , inferimos que  $p_h(t)$  ha de descomponer en los reales. Como además  $\det(h)$  es el producto de las raíces de  $p_h(t)$  (valores propios de  $h$ ) y  $h$  es una isometría, esas raíces han de ser justamente 1 y  $-1$ . Por tanto  $h$  diagonaliza con valores propios 1 y  $-1$ , ambos de multiplicidad 1. Elegidos vectores propios *unitarios* (de norma 1)  $v_1$  y  $v_{-1}$  para los valores propios 1 y  $-1$ , respectivamente, y formando la base ortonormal  $B = \{v_1, v_{-1}\}$ , se tiene que

$$M(h, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Concluimos que  $h$  es la simetría ortogonal  $\vec{\sigma}_U^\perp$  respecto de la recta vectorial  $U := V_1 = \text{Ker}(h - \text{Id}_V)$  (ver Notación 3.4). El elemento geométrico que determina una simetría ortogonal es la recta vectorial respecto a la cual se simetriza.

### 3.3.2. Clasificación de las isometrías en espacios vectoriales euclídeos tridimensionales

Sea  $h: V \rightarrow V$  una isometría vectorial en un espacio vectorial euclidiano  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  de dimensión 3. Si  $h \neq \text{Id}_V$ , caben tres posibilidades:

- (I)  $\det(h) = 1$ . Veamos que en este caso 1 es un valor propio de  $h$  de multiplicidad 1.

En efecto, si llamamos  $V_{-1} = \text{Ker}(h + \text{Id}_V)$  de Proposición 3.20-(v) deducimos que  $\dim V_{-1} = 0, 2$ . El caso  $\dim V_{-1} = 2$  obliga a que  $p_h$  descomponga sobre  $\mathbb{R}$ , ya que entonces  $p_h$  sería un polinomio de grado 3 con  $-1$  como raíz al menos doble, de donde habría de tener una tercera raíz que habría de ser 1 y simple (recordemos que los valores propios de  $h$  son 1 o  $-1$  al ser una isometría y  $\det(h) = 1$ ). Finalmente, si  $\dim V_{-1} = 0$  entonces 1 sería valor propio de  $h$  ya que  $p_h$  es de grado impar y ha de tener al menos una raíz (valor propio) que no es  $-1$ , luego ha de ser 1 (como antes, los valores propios de  $h$  solo pueden ser 1 o  $-1$ ). Además, la multiplicidad de 1 como valor propio es exactamente 1, ya que si  $v$  es un vector propio del valor propio 1 y  $U = L(\{v\})$ , la isometría positiva  $h|_{U^\perp}: U^\perp \rightarrow U^\perp$  en el plano vectorial euclidiano  $(U^\perp, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  (con la métrica inducida) ha de ser un giro no trivial, ya que  $h$  no es la identidad en  $V$ , y por tanto  $h|_{U^\perp}$  no aporta más autovalores para  $h$ . Esto prueba nuestra afirmación.

Llamemos

$$V_1 = \text{Ker}(h - \text{Id}_V)$$

al subespacio propio de 1 ( $\dim V_1 = 1$ ) y elijamos  $v_1 \in V_1$  unitario. Como hemos explicado arriba,  $h$  es una isometría que deja invariante el plano  $V_1^\perp$ , y la isometría  $h|_{V_1^\perp}: V_1^\perp \rightarrow V_1^\perp$  satisface  $\det(h|_{V_1^\perp}) = 1$  y por tanto es un giro en  $V_1^\perp$ . Fijando una orientación  $\mathcal{O}$  en el plano  $V_1^\perp$  vía una base ortonormal ordenada  $\{v_2, v_3\}$  de  $V_1^\perp$  (que será positiva respecto a  $\mathcal{O}$ ),  $h|_{V_1^\perp}$  será un giro de ángulo orientado  $\theta \in ]0, 2\pi[$  en el plano orientado  $(V_1^\perp, \mathcal{O})$ .

Por tanto, en la base ortonormal  $B = \{v_2, v_3, v_1\}$  de  $V$  se tiene que

$$M(h, B) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se dice que  $h$  es un giro con eje la recta vectorial  $V_1$  y de ángulo  $\theta \in ]0, 2\pi[$  respecto de la orientación  $\mathcal{O}$  inducida por  $\{v_2, v_3\}$  en  $V_1^\perp$ . Si no se desea enfatizar orientación, el correspondiente ángulo no orientado  $\theta \in ]0, \pi]$  del giro  $h$  se determina por la ecuación

$$\text{Traza}(h) = 1 + 2 \cos(\theta).$$

Los elementos geométricos que determinan un giro son su eje y su ángulo.

- (II)  $\det(h) = -1$ . En este caso de la Proposición 3.20-(v) deducimos que  $-1$  es valor propio de  $h$  y podemos elegir  $v_{-1} \in V$  vector propio unitario para el valor propio  $-1$  de  $h$ . Llamemos

$$U = L\{v_{-1}\} \subseteq V_{-1} = \text{Ker}(h + \text{Id}_V).$$

Como  $U$  es invariante por la isometría  $h$ , el plano  $U^\perp$  es invariante por  $h$  y  $\det(h|_{U^\perp}) = 1$ . Surge aquí una dicotomía:

(II)<sub>1</sub>  $h|_{U^\perp} = \text{Id}_{U^\perp}$ , y por tanto

$$U^\perp = V_1 = \text{Ker}(h - \text{Id}_V) \quad \text{y} \quad U = V_{-1} = \text{Ker}(h + \text{Id}_V).$$

En este caso  $h$  diagonaliza con valores propios  $-1$  y  $1$  de multiplicidades  $2$  y  $1$ , respectivamente. Elegida una base ortonormal  $\{v_1, v_2\}$  de  $V_1$ ,  $B = \{v_1, v_2, v_{-1}\}$  es una base ortonormal de  $V$  en la que

$$M(h, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Concluimos que  $h$  es la simetría ortogonal  $\vec{\sigma}_{V_1}^\perp$  respecto del plano vectorial  $V_1$  (ver Notación 3.4). El elemento geométrico que determina una simetría ortogonal respecto de un plano es el plano vectorial respecto del cual se simetriza.

(II)<sub>2</sub>  $h|_{U^\perp}$  es un giro en  $U^\perp$ . Elijamos una base ortonormal ordenada  $\{v_1, v_2\}$  de  $(U^\perp, \langle, \rangle)$ , fijemos en el plano  $U^\perp$  la orientación  $\mathcal{O}$  que induce esa base, y llamemos  $\theta \in ]0, 2\pi[$  al correspondiente ángulo orientado del giro  $h|_{U^\perp}$  respecto de  $\mathcal{O}$ . Entonces,  $B = \{v_1, v_2, v_{-1}\}$  es una base ortonormal de  $V$  y

$$M(h, B) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

En este caso  $h$  es la composición del giro de eje  $U = L\{v_{-1}\} \subseteq V_{-1}$  y ángulo orientado  $\theta$  respecto a la orientación  $\mathcal{O}$  inducida por  $\{v_1, v_2\}$  en  $U^\perp$ , y la simetría ortogonal  $\vec{\sigma}_{U^\perp}^\perp$ . Nótese que  $U = L\{v_{-1}\} = V_{-1}$  si y solo si  $\theta \neq \pi$ , y si  $\theta = \pi$  entonces  $h = -\text{Id}_V = V_{-1}$ . Los elementos geométricos de  $h$  son los mismos que los del giro involucrado.

### 3.4. Isometrías afines

El concepto de isometría afín es una traslación natural del de isometría vectorial a espacios afines euclídeos.

**Definición 3.22** Una isometría afín entre espacios afines euclidianos  $(\mathcal{A}, \langle, \rangle)$  y  $(\mathcal{A}', \langle, \rangle')$  es una afinidad  $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$  cuya aplicación lineal asociada  $\vec{f}: \vec{\mathcal{A}} \rightarrow \vec{\mathcal{A}}'$  es una isometría vectorial entre los espacios vectoriales euclidianos  $(\vec{\mathcal{A}}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  y  $(\vec{\mathcal{A}}', \langle \cdot, \cdot \rangle')$ .

La siguiente proposición recoge las propiedades fundamentales de las isometrías afines.

**Proposición 3.23** Si  $f: (\mathcal{A}, \langle, \rangle) \rightarrow (\mathcal{A}', \langle, \rangle')$  es una isometría afín entonces:

- (I)  $d'(f(p), f(q)) = d(p, q)$  para todo  $p, q \in \mathcal{A}$ , donde  $d, d'$  son las distancias en  $(\mathcal{A}, \langle, \rangle)$  y  $(\mathcal{A}', \langle, \rangle')$ .
- (II)  $\angle'(f(S), f(T)) = \angle(S, T)$  para cualesquiera rectas secantes  $S, T$  en  $\mathcal{A}$ , donde  $\angle, \angle'$  representan los ángulos en  $(\mathcal{A}, \langle, \rangle)$  y  $(\mathcal{A}', \langle, \rangle')$ .
- (III) Dos subespacios  $S, T$  son ortogonales en  $(\mathcal{A}, \langle, \rangle)$  si y solo si sus imágenes  $H(S)$  y  $H(T)$  son ortogonales en  $(\mathcal{A}', \langle, \rangle')$ .

DEMOSTRACIÓN: Item (i) es consecuencia del siguiente cálculo

$$d'(f(p), f(q)) = \|\overrightarrow{f(p)f(q)}\|' = \|\vec{f}(\overrightarrow{pq})\|' = \|\overrightarrow{pq}\| = d(p, q),$$

donde  $\|\cdot\|$  y  $\|\cdot\|'$  son las normas en  $(\vec{\mathcal{A}}, \langle, \rangle)$  y  $(\vec{\mathcal{A}}', \langle, \rangle')$ .

Como la isometría vectorial  $\vec{f}: (\vec{\mathcal{A}}, \langle, \rangle) \rightarrow (\vec{\mathcal{A}}', \langle, \rangle')$  preserva ángulos, es inmediato deducir que  $f: (\mathcal{A}, \langle, \rangle) \rightarrow (\mathcal{A}', \langle, \rangle')$  preserva ángulos entre rectas secantes, de donde se sigue (ii). Por análogo razonamiento  $f: (\mathcal{A}, \langle, \rangle) \rightarrow (\mathcal{A}', \langle, \rangle')$  preserva la ortogonalidad de subespacios afines, probando (iii). ■

**Proposición 3.24** *Una homotecia  $H: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  de razón  $r \neq 0, 1$  en un espacio afín euclídeo  $(\mathcal{A}, \langle, \rangle)$  satisface:*

- (I)  $d(H(p), H(q)) = |r|d(p, q)$  para todos  $p, q \in \mathcal{A}$ .
- (II)  $\angle(H(S), H(T)) = \angle(S, T)$  para cualesquiera rectas secantes  $S, T$  en  $\mathcal{A}$ .
- (III) Si  $S, T$  son subespacios de  $\mathcal{A}$ ,  $H(S) \perp H(T) \iff S \perp T$ .

DEMOSTRACIÓN: Es claro que

$$d(H(p), H(q)) = \|\overrightarrow{H(p)H(q)}\| = \|\vec{h}(\overrightarrow{pq})\| = \|r\overrightarrow{pq}\| = |r|\|\overrightarrow{pq}\| = |r|d(p, q),$$

lo que demuestra (i). Para probar (ii), tomemos rectas afines  $S, T$ , tomemos  $u \in \vec{S}, v \in \vec{T}$  no nulos tales que  $\angle(S, T) = \angle(u, v)$ . Como  $\vec{H} = r\text{Id}_V$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \angle(H(S), H(T)) &= \angle(rv, ru) = \arccos\left(\frac{\langle ru, rv \rangle}{\|ru\|\|rv\|}\right) = \\ &= \arccos\left(\frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|\|v\|}\right) = \angle(v, u) = \angle(S, T), \end{aligned}$$

lo que prueba (ii). Item (iii) es trivial o consecuencia de (ii) ya que  $S \perp T$  si y solo si  $\angle(S, T) = \pi/2$ . ■

**Definición 3.25** *Una aplicación afín biyectiva  $f: (\mathcal{A}, \langle, \rangle) \rightarrow (\mathcal{A}', \langle, \rangle')$  entre espacios afines euclidianos se dice que es una semejanza de razón  $r \neq 0, 1$ ,  $r > 0$ , si y sólo si*

$$\langle \vec{f}(u), \vec{f}(v) \rangle' = r^2 \langle u, v \rangle \quad \forall u, v \in \vec{\mathcal{A}}.$$

El ejemplo más sencillo de semejanzas en espacios afines euclidianos son las homotecias. Es fácil ver que la composición de dos semejanzas es una semejanza o una isometría. De hecho toda semejanza es composición de una homotecia y una isometría. El conjunto formado por la unión de las semejanzas y las isometrías en un espacio afín euclidiano  $(\mathcal{A}, \langle, \rangle)$  es un grupo con la composición.

Como consecuencia de la Proposición 3.24 tenemos el siguiente:

**Corolario 3.26** *Si  $f: (\mathcal{A}, \langle, \rangle) \rightarrow (\mathcal{A}', \langle, \rangle')$  es una semejanza de razón  $r > 0$  entonces*

- (I)  $d'(f(p), f(q)) = rd(p, q)$  para todos  $p, q \in \mathcal{A}$ .
- (II)  $\angle(f(S), f(T)) = \angle(S, T)$  para cualesquiera rectas secantes  $S, T$  en  $\mathcal{A}$ .
- (III) Si  $S, T$  son subespacios de  $\mathcal{A}$ ,  $f(S) \perp f(T) \iff S \perp T$ .

Como consecuencia de las Proposiciones 3.23 y 3.24, el enunciado de la Proposición 3.24 es formalmente válido para semejanzas.

Por último, enunciaremos la siguiente caracterización analítica de las isometrías afines.

**Proposición 3.27** *Si  $(\mathcal{A}, \langle, \rangle), (\mathcal{A}', \langle, \rangle')$  son espacios afines euclidianos  $n$ -dimensionales,  $\mathcal{R} = \{p_0, B\}$  y  $\mathcal{R}' = \{p'_0, B'\}$  son sistemas de referencia rectangulares en  $(\mathcal{A}, \langle, \rangle)$  y  $(\mathcal{A}', \langle, \rangle')$  respectivamente, y  $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$  es afín, entonces*

$$f: (\mathcal{A}, \langle, \rangle) \rightarrow (\mathcal{A}', \langle, \rangle') \text{ es una isometría afín} \iff A := M(\vec{f}, B, B') \in O(n, \mathbb{R}).$$

En otras palabras, si  $\mathcal{R}$  y  $\mathcal{R}'$  son referencias rectangulares en  $(\mathcal{A}, \langle, \rangle)$  y  $(\mathcal{A}', \langle, \rangle')$ ,

$$f: (\mathcal{A}, \langle, \rangle) \rightarrow (\mathcal{A}', \langle, \rangle') \text{ isometría afín} \iff M(f, \mathcal{R}, \mathcal{R}') = \left( \frac{1}{b} \middle| \frac{0}{A} \right), \quad A \in O(n, \mathbb{R}).$$

Como consecuencia, las traslaciones  $\tau: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  en un espacio afín euclidiano  $(\mathcal{A}, \langle, \rangle)$  son isometrías afines; basta observar que  $M(\tau, \mathcal{R}) \equiv M(\tau, \mathcal{R}, \mathcal{R}) = \left( \frac{1}{b} \middle| \frac{0}{I_n} \right)$  para todo sistema de referencia rectangular  $\mathcal{R}$  en  $(\mathcal{A}, \langle, \rangle)$ .

### 3.5. Movimientos rígidos

El concepto de movimiento rígido es fundamental en la geometría euclidiana ya que permite expresar con rigor la idea clásica de igualdad de figuras: dos figuras en un espacio afín euclídeo son equivalentes o iguales si existe un movimiento rígido que lleva una en la otra.

**Definición 3.28** *Un movimiento rígido en un espacio afín euclidiano  $(\mathcal{A}, \langle, \rangle)$  es una isometría afín  $f: (\mathcal{A}, \langle, \rangle) \rightarrow (\mathcal{A}, \langle, \rangle)$ . Un movimiento rígido se dice directo o positivo si  $\det(\vec{f}) = 1 > 0$ , e inverso o negativo si  $\det(\vec{f}) = -1 < 0$ .*

Para la comprensión de la naturaleza geométrica de un movimiento rígido es fundamental conocer su conjunto de puntos fijos. El siguiente lema, cuya demostración es muy ilustrativa, resultará de gran ayuda para la clasificación de movimientos rígidos que veremos con posterioridad. Expresa que toda isometría  $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  se descompone de forma única como la composición de un movimiento rígido con puntos fijos y una traslación con dirección en  $\text{Ker}(\vec{f} - Id)$ .

**Lema 3.29** *Dado un movimiento rígido  $f: (\mathcal{A}, \langle, \rangle) \rightarrow (\mathcal{A}, \langle, \rangle)$ , existe un único vector  $u \in \text{Ker}(\vec{f} - Id)$  y un único movimiento rígido  $g: (\mathcal{A}, \langle, \rangle) \rightarrow (\mathcal{A}, \langle, \rangle)$  con  $\mathcal{P}_g \neq \emptyset$  tales que*

$$f = \tau_u \circ g,$$

donde  $\tau_u$  es la traslación de vector  $u$ . Además

$$\mathcal{P}_g = \{q \in \mathcal{A}: \overrightarrow{qf(q)} = u\} = \{q \in \mathcal{A}: \overrightarrow{qf(q)} \in \text{Ker}(\vec{f} - Id)\}.$$

Obsérvese que, por la unicidad en Lema 3.29,  $\mathcal{P}_f \neq \emptyset$  si y solo si  $u = \vec{0}$  y  $g = f$ .



DEMOSTRACIÓN: Llamemos

$$V = \{\overrightarrow{qf(q)} : q \in \mathcal{A}\} \subseteq \overrightarrow{\mathcal{A}},$$

y veamos que  $V$  es un subespacio afín de  $\overrightarrow{\mathcal{A}}$  (dotado de su estructura afín canónica como espacio vectorial) con  $\overrightarrow{V} = \text{Im}(\overrightarrow{f} - \text{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}})$ . Para ello bastará con demostrar que, fijado  $p \in \mathcal{A}$  arbitrario,

$$V = \overrightarrow{pf(p)} + \text{Im}(\overrightarrow{f} - \text{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}).$$

En efecto, para todo  $q \in \mathcal{A}$  se tiene que

$$\overrightarrow{qf(q)} = \overrightarrow{qp} + \overrightarrow{pf(p)} + \overrightarrow{f(p)f(q)} = \overrightarrow{pf(p)} + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{pq}) - \overrightarrow{pq} = \overrightarrow{pf(p)} + (\overrightarrow{f} - \text{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}})(\overrightarrow{pq}),$$

de donde  $V \subseteq \overrightarrow{pf(p)} + \text{Im}(\overrightarrow{f} - \text{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}})$ . La otra inclusión se sigue del cálculo inverso

$$\overrightarrow{pf(p)} + (\overrightarrow{f} - \text{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}})(u) = \overrightarrow{pf(p)} + \overrightarrow{f}(u) - u = \overrightarrow{pf(p)} + \overrightarrow{f(p)f(p+u)} - \overrightarrow{p(p+u)} = \overrightarrow{(p+u)f(p+u)},$$

que implica  $\overrightarrow{pf(p)} + (\overrightarrow{f} - \text{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}})(u) \in V$  para todo  $u \in \overrightarrow{\mathcal{A}}$ .

La descomposición en suma directa ortogonal  $\overrightarrow{\mathcal{A}} = \overrightarrow{V} \oplus \overrightarrow{V}^\perp$  nos permite escribir de forma única  $\overrightarrow{pf(p)} = v + u$  con  $v \in \overrightarrow{V}$  y  $u \in \overrightarrow{V}^\perp$ , de donde

$$V = \overrightarrow{pf(p)} + \overrightarrow{V} = (u + v) + \overrightarrow{V} = u + \overrightarrow{V}, \quad u \in \overrightarrow{V}^\perp.$$

Como  $V \cap \overrightarrow{V}^\perp = (u + \overrightarrow{V}) \cap \overrightarrow{V}^\perp = \{u\}$ , el vector  $u$  queda unívocamente determinado por la identidad

$$\{u\} = V \cap \overrightarrow{V}^\perp.$$

Además, de la Proposición 3.21 tenemos que  $\overrightarrow{V}^\perp = \text{Im}(\overrightarrow{f} - \text{Id})^\perp = \text{Ker}(\overrightarrow{f} - \text{Id})$ , por lo que  $u \in \text{Ker}(\overrightarrow{f} - \text{Id})$ .

Definiendo  $g = \tau_{-u} \circ f$  no es difícil observar que  $\mathcal{P}_g \neq \emptyset$ . Basta con elegir un punto  $p_0 \in \mathcal{A}$  tal que  $\overrightarrow{p_0 f(p_0)} = u$  (usar que  $u \in V$  y la definición de  $V$ ), y realizar el siguiente cálculo

$$g(p_0) = p_0 + \overrightarrow{p_0 g(p_0)} = p_0 + \overrightarrow{p_0 \tau_{-u}(f(p_0))} = p_0 + \overrightarrow{p_0(f(p_0) - u)} = p_0 + \overrightarrow{p_0 f(p_0)} - u = p_0.$$

Como  $f = \tau_u \circ g$  esto prueba la parte de existencia en el lema.

Para la de unicidad, supongamos que  $f = \tau_{u'} \circ g'$  con  $u' \in \text{Ker}(\overrightarrow{f} - \text{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}) = \overrightarrow{V}^\perp$  y  $\mathcal{P}_{g'} \neq \emptyset$ . Como existe  $q \in \mathcal{A}$  tal que  $g'(q) = q$  deducimos que  $\overrightarrow{qf(q)} = \overrightarrow{q\tau_{u'}(q)} = u' \in V$ . De aquí que  $u' \in V \cap \overrightarrow{V}^\perp = \{u\}$ ,  $u = u'$  y  $g = g'$ .

Para acabar nos resta probar que

$$\mathcal{P}_g = \{q \in \mathcal{A} : \overrightarrow{qf(q)} = u\} = \{q \in \mathcal{A} : \overrightarrow{qf(q)} \in \text{Ker}(\overrightarrow{f} - \text{Id})\}.$$

En efecto, usando que  $V = \{\overrightarrow{qf(q)} : q \in \mathcal{A}\}$  y  $V \cap \overrightarrow{V}^\perp = \{u\}$  se tiene que

$$\overrightarrow{qf(q)} = u \iff \overrightarrow{qf(q)} \in \overrightarrow{V}^\perp = \text{Im}(\overrightarrow{f} - \text{Id})^\perp = \text{Ker}(\overrightarrow{f} - \text{Id}).$$

Como

$$q \in \mathcal{P}_g \iff \overrightarrow{qg(q)} = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{qf(q)} = \overrightarrow{q\tau_u(g(q))} = u + \overrightarrow{qg(q)} = u + \overrightarrow{0} = u,$$

se sigue lo que queríamos demostrar. ■

### 3.5.1. Clasificación de los movimientos rígidos en un plano afín euclidiano

Sea  $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  un movimiento rígido en un plano afín euclidiano  $(\mathcal{A}, \langle, \rangle)$  ( $\dim \mathcal{A} = 2$ ). Se pueden dar los siguientes casos:

- (a)  $f$  es directo y  $\mathcal{P}_f = \emptyset$ . Como  $\det(\vec{f}) = 1$ , de la clasificación de isometrías lineales de un plano vectorial deducimos que o bien  $\vec{f} = \text{Id}_V$  ó  $\vec{f}$  es un giro de ángulo orientado  $\theta \in ]0, 2\pi[$  respecto de una orientación fijada en  $\vec{\mathcal{A}}$ . Si se diese el segundo caso tendríamos  $\text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\vec{\mathcal{A}}}) = \{\vec{0}\}$ , y por tanto de la Proposición 2.61  $\mathcal{P}_f \neq \emptyset$  consistiría de un punto, absurdo. Por tanto  $\vec{f} = \text{Id}_{\vec{\mathcal{A}}}$  y  $f$  es una **traslación**  $\tau_u$ ,  $u \in \vec{\mathcal{A}}$ .

En cualquier sistema de referencia  $\mathcal{R} = \{p_0, B\}$  de  $\mathcal{A}$  ( $B$  base de las direcciones de  $\mathcal{R}$ ), se tiene que

$$M(f, \mathcal{R}) = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ b_1 & 1 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

donde  $(b_1, b_2)$  son las coordenadas  $u_B$  de  $u$  en la base  $B$  de  $\vec{\mathcal{A}}$ .

- (b)  $f$  es directo y  $\mathcal{P}_f \neq \emptyset$ . Razonando como antes deducimos que  $\vec{f} = \text{Id}_V$  o  $\vec{f}$  es un giro de ángulo  $\theta \in ]0, 2\pi[$ . Como  $\mathcal{P}_f \neq \emptyset$ , si  $\vec{f} = \text{Id}_V$  entonces  $f = \text{Id}_{\mathcal{A}}$ . Si  $\vec{f}$  es un giro de ángulo orientado  $\theta \in ]0, 2\pi[$  respecto de una orientación fijada en  $\vec{\mathcal{A}}$  entonces  $\text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\vec{\mathcal{A}}}) = \{\vec{0}\}$  y  $\mathcal{P}_f = \{q\}$  es un punto por la Proposición 2.61; en este caso decimos que  $f$  es un **giro de centro**  $q \in \mathcal{A}$  y **ángulo orientado**  $\theta \in ]0, 2\pi[$  respecto de la orientación fijada en  $\vec{\mathcal{A}}$ . En cualquier sistema de referencia rectangular  $\mathcal{R} = \{q, B\}$  de  $\mathcal{A}$  con origen en el único punto fijo  $q$  ( $B$  representa la base ortonormal en  $\vec{\mathcal{A}}$  de las direcciones de  $\mathcal{R}$ , que supondremos positiva respecto de la orientación en  $\vec{\mathcal{A}}$ ), se tiene que

$$M(f, \mathcal{R}) = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\text{sen} \theta \\ 0 & \text{sen} \theta & \cos \theta \end{array} \right).$$

- (c)  $f$  es inverso y  $\mathcal{P}_f \neq \emptyset$ . Por la clasificación de isometrías lineales de un plano vectorial, como  $\det(\vec{f}) = -1$  deducimos que  $\vec{f}$  es la simetría ortogonal  $\vec{\sigma}_{V_1}^\perp$  respecto de la recta vectorial  $V_1 = \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\vec{\mathcal{A}}})$ . Como  $\mathcal{P}_f \neq \emptyset$ , tomado  $q \in \mathcal{P}_f$  tenemos que

$$f(p) = f(q) + \vec{f}(\vec{pq}) = q + \vec{\sigma}_{V_1}^\perp(\vec{pq}) \quad \forall p \in \mathcal{A},$$

y por tanto por definición  $f$  es la **simetría respecto de la recta afín**  $S = q + V_1 = \mathcal{P}_f$  en la **dirección de**  $V_1^\perp = V_{-1} = \text{Ker}(\vec{f} + \text{Id}_{\vec{\mathcal{A}}})$ , o simplemente  $f$  es la **simetría ortogonal respecto de la recta afín**  $S = \mathcal{P}_f$ , y es denotada como  $\sigma_S^\perp$ . En cualquier sistema de referencia rectangular  $\mathcal{R} = \{q, B\}$  de  $\mathcal{A}$  con origen en  $q \in S = \mathcal{P}_f$  y base ortonormal de direcciones  $B = \{v_1, v_{-1}\}$  con  $v_1 \in \vec{S} = V_1$  y  $v_{-1} \in \vec{S}^\perp = V_{-1}$ , se tiene que

$$M(f, \mathcal{R}) = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right).$$

(d)  $f$  es inverso y  $\mathcal{P}_f = \emptyset$ . Como antes  $\overrightarrow{f}$  es la simetría ortogonal  $\overrightarrow{\sigma}_{V_1}^\perp$  respecto de la recta vectorial  $V_1 = \text{Ker}(\overrightarrow{f} - \text{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}})$ . Usemos el Lema 3.29 y pongamos

$$f = \tau_u \circ g$$

donde  $u \in V_1 \setminus \{0\}$ ,  $\mathcal{P}_g \neq \emptyset$  y  $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{g}$ . Por el caso anterior  $g$  es la simetría ortogonal respecto de la recta afín  $S = \mathcal{P}_g$ , y por tanto  $f$  es la composición de la simetría ortogonal afín  $\sigma_S^\perp$  respecto de la recta  $S = \mathcal{P}_g$  y la translación de vector  $u \in V_1 = \text{Ker}(\overrightarrow{g} - \text{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}) = \overrightarrow{S}$  no nulo. Este movimiento rígido se llama **simetría deslizante respecto de la recta afín  $S$  con vector de deslizamiento  $u \in \overrightarrow{S}$** . En cualquier sistema de referencia rectangular  $\mathcal{R} = \{q, B\}$  de  $\mathcal{A}$  con origen en  $q \in S = \mathcal{P}_g$  y base ortonormal de direcciones  $B = \{v_1, v_{-1}\}$  con  $v_1 \in \overrightarrow{S} = V_1$  y  $v_{-1} \in \overrightarrow{S}^\perp = V_{-1}$ , se tiene que

$$M(f, \mathcal{R}) = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ b_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right),$$

donde  $(b_1, 0) \neq (0, 0)$  son las coordenadas  $u_B$  de  $u$  en  $B$ .

**Observación 3.30** Si  $f = \tau_u \circ g$  es una simetría deslizante con  $g = \sigma_S^\perp$  y  $u \in \overrightarrow{S}$ , hemos probado que (ver el Lema 3.29):

- La recta de simetría  $S$  de  $f$  coincide con  $\mathcal{P}_g$ .
- El vector de deslizamiento  $u = \overrightarrow{pf(p)}$  para cualquier  $p \in S$ .

A efectos de cálculo,  $S = \{p \in \mathcal{A} : \overrightarrow{pf(p)} \in \overrightarrow{S} = \text{Ker}(\overrightarrow{f} - \text{Id}_V)\}$ .

También puede ser descrita también como el lugar geométrico

$$S = \{m_{pf(p)} : p \in \mathcal{A}\}.$$

En efecto, para todo  $p \in \mathcal{A}$

$$m_{p,f(p)} = p + \frac{1}{2}\overrightarrow{pf(p)} = (p + \frac{1}{2}\overrightarrow{pg(p)}) + \frac{1}{2}u = m_{p,g(p)} + \frac{1}{2}u,$$

de donde usando que  $S = \mathcal{P}_g = \{m_{p,g(p)} : p \in \mathcal{A}\}$  y  $u \in \overrightarrow{S}$  se sigue lo enunciado.

**Ejercicio 3.31** Se considera la aplicación afín  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  cuya expresión matricial con respecto a  $R_0$  es:

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} -3/5 & -4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Demuestra que es un movimiento rígido, clasifícalo y describe sus elementos geométricos.

SOLUCIÓN: Observemos que

$$M(\overrightarrow{f}, B_0) = \begin{pmatrix} -3/5 & -4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

y claramente  $M(\vec{f}, B_0) \cdot M(\vec{f}, B_0)^t = I_2$ , esto es,  $M(\vec{f}, B_0) \in O(2, \mathbb{R})$  (es una matriz ortogonal). Como el sistema de referencia usual  $\mathcal{R}_0 = \{(0, 0), B_0\}$  en  $\mathbb{R}^2$  es rectangular respecto del producto escalar clásico  $\langle, \rangle$ , y por tanto la base usual  $B_0$  es una base ortonormal en  $(\mathbb{R}^2, \langle, \rangle)$ , inferimos que efectivamente  $f$  es un movimiento rígido.

Escrito con nuestra notación habitual  $f$  está determinado por la siguiente expresión matricial

$$\begin{pmatrix} 1 \\ f(x, y) \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 3 & -3/5 & -4/5 \\ 1 & -4/5 & 3/5 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Como  $\det M(\vec{f}, B_0) = -1$  se trata de un movimiento inverso.

Además la ecuación  $f(x, y) = (x, y)$ , que se escribe

$$\left(-\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 3, -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + 1\right) = (x, y),$$

no tiene ninguna solución por lo que  $\mathcal{P}_f = \emptyset$ .

Mirando la clasificación de movimientos rígidos en el plano  $f$  ha de ser una *simetría deslizante*. Describamos a continuación sus elementos geométricos. Para ello hemos de encontrar la recta  $S$  respecto a la que simetrizamos y el vector  $u \in \vec{S}$  con el que trasladamos, de forma que  $f = \tau_u \circ \sigma_S^\perp$ . De la Observación 3.30, la recta de simetría descrita en forma paramétrica se calcula de la siguiente forma

$$\begin{aligned} S = \{m_{(a,b)f(a,b)} : (a, b) \in \mathbb{R}^2\} &= \left\{ \frac{1}{2}(a, b) + \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{5}a - \frac{4}{5}b + 3, -\frac{4}{5}a + \frac{3}{5}b + 1\right) : (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \\ &= \left\{ \frac{1}{10}(2a - 4b + 15, -4a + 8b + 5) : (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}. \end{aligned}$$

Llamando  $\lambda = 2a - 4b$  para eliminar la redundancia de parámetros queda

$$S = \left\{ \frac{1}{10}(\lambda + 15, -2\lambda + 5) : \lambda \in \mathbb{R} \right\} = (3/2, 1/2) + L(\{(1, -2)\}).$$

Otra forma alternativa de calcular  $S$  es coger un punto de  $\mathbb{R}^2$  arbitrario, por ejemplo el  $(0, 0)$  por simplicidad de cálculo, determinar su imagen  $f(0, 0) = (3, 1)$ , y tener en cuenta que el punto medio

$$m_{(0,0)f(0,0)} = (3/2, 1/2) \in S.$$

Como de la Observación 3.30 la variedad de dirección de  $S$  viene dada por

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\mathbb{R}^2}) = \{(x, y) : (M(\vec{f}, B_0) - I_2)(x, y)^t = (0, 0)^t\} = \\ &= \{(x, y) : \begin{pmatrix} -\frac{8}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} (x, y)^t = (0, 0)^t\} = \{(x, y) : y = -2x\} = L(\{(1, -2)\}), \end{aligned}$$

se sigue también que  $S = (3/2, 1/2) + L(\{(1, -2)\})$ .

Para calcular el vector de deslizamiento  $u \in \vec{S}$  de  $f$ , basta con elegir cualquier punto de  $S$ , por sencillez de cálculo elegiremos el  $(3/2, 1/2)$ , calcular su imagen  $f(3/2, 1/2) = (17/10, 1/10)$  por  $f$ , y usar la fórmula (ver Observación 3.30)

$$u = \overrightarrow{(3/2, 1/2), f(3/2, 1/2)} = \overrightarrow{(3/2, 1/2), (17/10, 1/10)} = (1/5, -2/5).$$

■

**Ejercicio 3.32** Calcular en coordenadas usuales de  $\mathbb{R}^2$  los siguientes movimientos:

- (a) El giro de centro el punto  $O = (1, 2)$  y ángulo orientado  $\theta = 2\pi/3$  respecto de la orientación usual.
- (b) La simetría ortogonal deslizante respecto de la recta afín  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 1\}$  con vector de deslizamiento  $u = (1, 1)$ .

SOLUCIÓN: Resolvamos (a). Recordemos que la orientación usual en  $\mathbb{R}^2$  es la que tiene por base positiva a la base usual  $B_0$ . Por tanto, si fijamos el sistema de referencia rectangular  $\mathcal{R} = \{(1, 2), B_0\}$ , la matriz que representa al giro  $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  en el plano euclidiano usual  $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  viene dada por

$$M(G, \mathcal{R}) = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos(2\pi/3) & -\sin(2\pi/3) \\ 0 & \sin(2\pi/3) & \cos(2\pi/3) \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{array} \right).$$

Si  $\mathcal{R}_0$  es el sistema de referencia usual entonces

$$M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0) = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

de donde

$$M(G, \mathcal{R}_0) = M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0) \cdot M(G, \mathcal{R}) \cdot M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0)^{-1} = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline \sqrt{3} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right).$$

Resolvamos ahora (b) con un razonamiento similar. En este caso hemos de encontrar la expresión analítica del movimiento  $\tau_u \circ \sigma_S^\perp$ .

Primero observemos que

$$S = (1, 0) + L(\{(1, 1)\}) \quad \text{y} \quad \vec{S} = L(\{(1, 1)\}),$$

por lo que la condición natural  $u = (1, 1) \in \vec{S}$  para el vector de deslizamiento se satisface. Es claro que  $\vec{S}^\perp = L(\{(1, 1)\})^\perp = L\{(1, -1)\}$ , de donde

$$B = \{v_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), v_{-1} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})\}$$

es una base ortonormal de  $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  con  $v_1 \in \vec{S}$ ,  $v_{-1} \in \vec{S}^\perp$ .

Teniendo en cuenta que  $q = (1, 0) \in S$ , en el sistema de referencia  $\mathcal{R} = \{q, B\}$  la simetría ortogonal  $\sigma_S^\perp$  respecto de la recta  $S$  viene representada por la matriz

$$M(\sigma_S^\perp, \mathcal{R}) = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right).$$

Razonando como antes, si  $\mathcal{R}_0$  es el sistema de referencia usual entonces

$$M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0) = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right),$$

de donde

$$M(\sigma_S^\perp, \mathcal{R}_0) = M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}(\mathcal{R}, \mathcal{R}_0) \cdot M(\sigma_S^\perp, \mathcal{R}) \cdot M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}(\mathcal{R}, \mathcal{R}_0)^{-1} = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Como la traslación  $\tau_u$  satisface

$$M(\tau_u, \mathcal{R}_0) = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

la simetría deslizante  $f = \tau_u \circ \sigma_S^\perp: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que resuelve el ejercicio viene determinada por la expresión

$$M(f, \mathcal{R}_0) = M(\tau_u, \mathcal{R}_0) \cdot M(\sigma_S^\perp, \mathcal{R}_0) = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

■

**Ejercicio 3.33** Construir un movimiento rígido de  $(\mathbb{R}^2, \langle, \rangle)$  que transforme la recta afín  $S$  de ecuación  $x + y = 2$  en la recta afín  $R = (1, -1) + L((1, 1))$ . Clasificar el movimiento obtenido.

SOLUCIÓN: Estudiemos la posición relativa de  $S$  y  $R$ . Para ello observemos que

$$S = \{(x, y): x + y = 2\} = (1, 1) + L(\{(1, -1)\}), \quad R = (1, -1) + L(\{(1, 1)\}) = \{(x, y): x - y = 2\},$$

de donde  $S \cap R = \{(x, y): x + y = x - y = 2\} = \{(2, 0)\}$ . Se trata pues de dos rectas secantes en el punto  $p_0 = (2, 0)$ . Los vectores  $u = (1, -1)$  y  $v = (1, 1)$  directores de  $S$  y  $R$ , respectivamente, satisfacen  $\langle u, v \rangle = 0$ , esto es,  $u \perp v$  y  $L(\{u\})^\perp = L(\{v\})$ , por lo que las rectas son ortogonales. Resumiendo

$$S \cap R = \{p_0\} \quad \text{y} \quad S \perp T.$$

Cualquier giro  $G$  con centro  $p_0$  y ángulo orientado  $\pm\pi/2$  respecto de la orientación usual en  $\mathbb{R}^2$  llevará  $S$  en  $R$  ya que

$$G(S) = G(p_0) + \vec{G}(\vec{S}) = G(p_0) + \vec{G}(L(\{u\})) = p_0 + L(\{\vec{G}(u)\}) = p_0 + L(\{v\}) = R,$$

y análogamente  $G(R) = S$ . Aquí hemos tenido en cuenta que  $\angle(u, \vec{G}(u)) = \pi/2$ , esto es  $u \perp \vec{G}(u)$ , y por tanto  $\vec{G}(u) \in \vec{R} = L(\{v\})$ .

Por lo demás, para determinar un tal giro  $G$  se sigue el procedimiento habitual. Consideramos cualquier sistema de referencia rectangular con origen  $p_0$ , por ejemplo  $\mathcal{R} = \{p_0, B_0\}$ , y escribimos

$$M(G, \mathcal{R}) = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos(\pi/2) & -\text{sen}(\pi/2) \\ 0 & \text{sen}(\pi/2) & \cos(\pi/2) \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Como

$$M(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0) = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

y  $M(G, \mathcal{R}_0) = M(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0) \cdot M(G, \mathcal{R}) \cdot M(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0)^{-1}$ , quedará

$$M(G, \mathcal{R}_0) = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

La solución proporcionada no es única, por ejemplo al principio podíamos haber elegido  $G$  con

$$M(G, \mathcal{R}) = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-\pi/2) & -\sin(-\pi/2) \\ 0 & \sin(-\pi/2) & \cos(-\pi/2) \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{array} \right),$$

y proceder de forma similar.

Otra posibilidad para resolver el ejercicio es encontrar una simetría ortogonal  $\sigma_T^\perp$  en  $\mathbb{R}^2$  que lleve  $S$  en  $R$ . La idea es considerar una recta  $T$  que contenga a  $p_0$  y satisfaga  $\vec{\sigma}_T^\perp(\vec{S}) = \vec{R}$ . En efecto, en ese caso se tendría

$$\sigma_T^\perp(S) = \sigma_T^\perp(p_0 + \vec{S}) = \sigma_T^\perp(p_0) + \vec{\sigma}_T^\perp(\vec{S}) = p_0 + \vec{R} = R.$$

Encontrar esa recta en este caso es fácil, bastará encontrar un subespacio vectorial  $U \subset \mathbb{R}^2$  tal que

$$\vec{\sigma}_U^\perp(1, -1) = (1, 1),$$

por ejemplo  $U = L\{(0, 1)\}$  (también valdría  $U = L\{(1, 0)\}$ ), y simplemente tomar  $T = p_0 + U = (2, 0) + L\{(0, 1)\}$ . Como hemos explicado antes la simetría  $\sigma_T^\perp$  resolvería el ejercicio. Por otra parte, es inmediato demostrar que

$$M(\sigma_T^\perp, \mathcal{R}_0) = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

■

### 3.5.2. Clasificación de los movimientos rígidos en un espacio afín euclidiano tridimensional

Sea  $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  un movimiento rígido en un espacio afín euclidiano  $(\mathcal{A}, \vec{\mathcal{A}}, \langle, \rangle)$  de  $\dim \mathcal{A} = 3$ . Se pueden dar los siguientes casos:

- (A)  $f$  es directo y  $\mathcal{P}_f \neq \emptyset$ . De la clasificación de isometrías lineales de espacios vectoriales euclidianos tridimensionales con  $\det(\vec{f}) = 1$  deducimos que  $\vec{f} = \text{Id}_V$  ó  $\vec{f}$  es un giro con eje la recta vectorial  $V_1 = \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\vec{\mathcal{A}}})$  de ángulo orientado  $\theta \in ]0, 2\pi[$  respecto de una orientación  $\mathcal{O}$  en el plano vectorial  $V_1^\perp$ . En el primer caso claramente  $f = \text{Id}_{\mathcal{A}}$ . En el segundo caso, fijado  $q \in \mathcal{P}_f$ , tenemos que

$$\mathcal{P}_f = q + V_1 \text{ y } f(p) = q + \vec{f}(\vec{qp}) \text{ para todo } p \in \mathcal{A}.$$

Por definición se dice que  $f$  es un giro con eje la recta afín  $S = \mathcal{P}_f$  de ángulo orientado  $\theta \in ]0, 2\pi[$  respecto de la orientación  $\mathcal{O}$  adoptada en  $\vec{S}^\perp$ . En cualquier sistema de referencia rectangular  $\mathcal{R} = \{q, B\}$  de  $\mathcal{A}$  con origen en  $q \in S$  y base

ortonormal de direcciones  $B = \{v_1, v_2, v_3\}$  tal que  $v_3 \in \vec{S} = V_1$  y  $\{v_1, v_2\}$  es base positiva en  $(\vec{S}^\perp = V_1^\perp, \mathcal{O})$ , se tiene que

$$M(f, \mathcal{R}) = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta & 0 \\ 0 & \operatorname{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Si no enfatizamos orientación, el ángulo  $\alpha \in ]0, \pi]$  no orientado asociado al giro  $f$  obedece a la fórmula

$$2 \cos \alpha + 1 = \operatorname{Traza}(M(\vec{f}, B)).$$

- (B)  $f$  es directo y  $\mathcal{P}_f = \emptyset$ . Aquí tenemos en cuenta Lema 3.29 y descomponemos  $f = \tau_u \circ g$ , donde  $u \in V_1 = \operatorname{Ker}(\vec{f} - \operatorname{Id}_{\vec{\mathcal{A}}})$ ,  $u \neq \vec{0}$ , y  $\mathcal{P}_g \neq \emptyset$ . Del caso anterior  $\vec{g} = \operatorname{Id}_{\vec{\mathcal{A}}}$  ó  $\vec{g}$  es un giro con eje la recta vectorial  $\operatorname{Ker}(\vec{g} - \operatorname{Id}_{\vec{\mathcal{A}}}) = V_1$  de ángulo orientado  $\theta \in ]0, 2\pi[$  respecto a una orientación dada en  $V_1^\perp$  (recordar que  $\vec{f} = \vec{g}$ ). Al ser  $\mathcal{P}_f = \emptyset$ , en el primer caso  $\vec{g} = \operatorname{Id}_{\vec{\mathcal{A}}}$  se tiene que  $f$  **es una traslación**  $\tau_u$ ,  $u \in \vec{\mathcal{A}}$ . En cualquier sistema de referencia  $\mathcal{R} = \{q, B\}$  de  $\mathcal{A}$  obtenemos

$$M(f, \mathcal{R}) = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline b_1 & 1 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 & 0 \\ b_3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

donde  $(b_1, b_2, b_3)$  son las coordenadas  $u_B$  de  $u$  en la base  $B$ .

En el caso de que  $\vec{g}$  sea un giro, por lo visto en (A) inferimos que  $g$  es un giro con eje la recta afín  $S = \mathcal{P}_g$  de ángulo orientado  $\theta \in ]0, 2\pi[$  respecto a una orientación prefijada en  $V_1^\perp = \vec{S}^\perp$ , y por tanto  $f$  es la composición de ese giro con una traslación de vector  $u \in \vec{S} = V_1$ ,  $u \neq \vec{0}$ . Se dice que  $f$  **es un movimiento helicoidal de eje la recta afín  $S$** , ángulo orientado  $\theta \in ]0, 2\pi[$  (respecto de la orientación fijada en  $V_1^\perp$ ) y **vector de deslizamiento**  $u \in \vec{S}$ . En cualquier sistema de referencia rectangular  $\mathcal{R} = \{q, B\}$  de  $\mathcal{A}$  con origen en  $q \in S$  y base ortonormal de direcciones  $B = \{v_1, v_2, v_3\}$  tal que  $v_3 \in \vec{S} = V_1$  y  $\{v_2, v_3\}$  es positiva en  $V_1^\perp$ , se tiene que

$$M(f, \mathcal{R}) = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta & 0 \\ 0 & \operatorname{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ b_3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

donde  $(0, 0, b_3)$  son las coordenadas  $u_B$  de  $u$  en la base  $B$ .

Si no enfatizamos orientación, el ángulo  $\alpha \in ]0, \pi]$  no orientado asociado al movimiento helicoidal  $f$  obedece a la fórmula

$$2 \cos \alpha + 1 = \operatorname{Traza}(M(\vec{f}, B)).$$

**Observación 3.34** *Los puntos  $p$  del eje  $S$  del movimiento helicoidal  $f = \tau_u \circ g$  son los puntos fijos del giro  $g$ , y se caracterizan del Lema 3.29 por la propiedad  $\overrightarrow{pf(p)} \in \vec{S} = V_1 = \operatorname{Ker}(\vec{f} - \operatorname{Id}_V)$ , siendo el vector de deslizamiento  $u = \overrightarrow{pf(p)}$  para cualquier  $p \in S$ .*



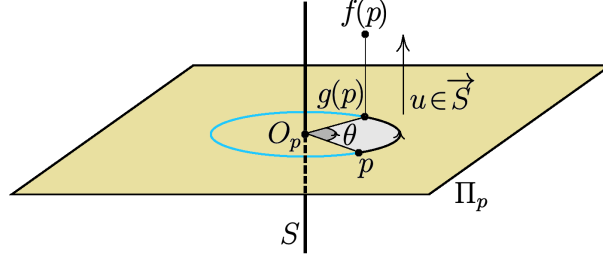


Figura 12: Movimiento Helicoidal

Se puede visualizar un movimiento helicoidal  $f$  con eje  $S$ , ángulo  $\theta$  y vector de deslizamiento  $u \in \vec{S}$  de la siguiente manera. Dibuja el eje  $S$  y coge un punto  $p$  cualquiera del espacio. Toma el plano  $\Pi_p$  perpendicular a  $S$  que contiene a  $p$  y llama  $O_p$  al punto de corte  $S \cap \Pi_p$ . Luego, dentro del plano  $\Pi_p$ , con un compás pinchas en  $O_p$  y abres el compás hasta alcanzar en el extremo a  $p$ , realizando a continuación el giro en  $\Pi_p$  del punto  $p$  con centro  $O_p$  y ángulo  $\theta$  de la forma tradicional. Te saldrá un nuevo punto  $g(p) \in \Pi_p$ , justo la imagen de  $p$  por el giro  $g$  con eje  $S$  y ángulo  $\theta$ , al que luego solo tienes que sumar el vector de deslizamiento  $u$  (ortogonal a  $\Pi_p$  y en la dirección de  $\vec{S}$ ): el punto  $f(p)$  es el  $g(p) + u$ .

(C)  $f$  es inverso y  $\mathcal{P}_f \neq \emptyset$ . Por la clasificación de isometrías lineales de un espacio vectorial euclídeo tridimensional, como  $\det(\vec{f}) = -1$  surgen dos posibilidades para  $\vec{f}$ :

- $\vec{f}$  es la simetría ortogonal  $\vec{\sigma}_{V_1}^\perp$  respecto de un plano vectorial  $V_1 = \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\vec{\mathcal{A}}})$ . En este caso, como  $\mathcal{P}_f \neq \emptyset$ , tomado  $q \in \mathcal{P}_f$  tenemos que

$$f(p) = f(q) + \vec{f}(\vec{pq}) = q + \vec{\sigma}_{V_1}^\perp(\vec{pq}) \quad \forall p \in \mathcal{A}.$$

y por tanto por definición  $f$  es la **simetría respecto del plano afín  $S = q + V_1 = \mathcal{P}_f$  en la dirección de  $V_1^\perp = V_{-1} = \text{Ker}(\vec{f} + \text{Id}_{\vec{\mathcal{A}}})$** , o simplemente  **$f$  es la simetría ortogonal respecto del plano afín  $S = \mathcal{P}_f$** , que será denotada como  $\sigma_S^\perp$ . En cualquier sistema de referencia rectangular  $\mathcal{R} = \{q, B\}$  de  $\mathcal{A}$  con origen en  $q \in S$  y base ortonormal de direcciones  $B = \{v_1, v_2, v_3\}$  con  $v_1, v_2 \in \vec{S} = V_1$  y  $v_3 \in V_{-1} = V_1^\perp$ , se tiene que

$$M(f, \mathcal{R}) = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right).$$

- $\vec{f}$  es un giro con eje una recta vectorial  $U \subseteq V_{-1} = \text{Ker}(\vec{f} + \text{Id}_{\vec{\mathcal{A}}})$  y ángulo orientado  $\theta \in ]0, 2\pi[$  respecto a una orientación en  $U^\perp$ , seguido de la simetría ortogonal  $\vec{\sigma}_{U^\perp}^\perp$  respecto del plano vectorial  $U^\perp$ . En este caso  $\text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\vec{\mathcal{A}}}) = \{\vec{0}\}$ , por lo que la Proposición 2.61 garantiza que  $f$  tiene un único punto fijo que llamaremos  $p_0$ . Resulta por tanto que  $f$  es la **composición del giro de eje  $S = p_0 + U$  y ángulo orientado  $\theta$  respecto de una orientación en  $U^\perp$ , y la simetría ortogonal  $\sigma_T^\perp$  respecto a  $T = p_0 + U^\perp$** . En cualquier sistema de referencia rectangular  $\mathcal{R} = \{p_0, B\}$  de  $\mathcal{A}$  con origen en el único punto fijo

$p_0$  de  $f$  y base ortonormal de direcciones  $B = \{v_1, v_2, v_3\}$  con  $v_3 \in \vec{S} = U$  y  $\{v_2, v_3\}$  base positiva de  $U^\perp$ , se tiene que

$$M(f, \mathcal{R}) = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta & 0 \\ 0 & \operatorname{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right).$$

Nótese que  $U = L\{v_3\} = V_{-1} = \operatorname{Ker}(\vec{f} + \operatorname{Id}_{\vec{\mathcal{A}}})$  si y solo si  $\theta \neq \pi$ , y si  $\theta = \pi$  entonces  $\vec{f} = -\operatorname{Id}_{\vec{\mathcal{A}}} = V_{-1}$ . Cuando  $\theta = \pi$  el movimiento  $f$  se denomina también *simetría central* respecto al punto  $p_0$ , y se corresponde con la homotecia  $h_{p_0, -1}$ .

Si no enfatizamos orientación, el ángulo  $\alpha \in ]0, \pi]$  no orientado asociado a  $f$  obedece a la fórmula

$$2 \cos \alpha - 1 = \operatorname{Traza}(M(\vec{f}, B)).$$

- (D)  $f$  es inverso y  $\mathcal{P}_f = \emptyset$ . Razonamos como en el caso anterior, solo que como  $\mathcal{P}_f = \emptyset$  la Proposición 2.61 nos dice que el caso  $\operatorname{Ker}(\vec{f} - \operatorname{Id}_{\vec{\mathcal{A}}}) = \{\vec{0}\}$  no se puede darse, y  $\vec{f}$  ha de ser necesariamente la simetría ortogonal  $\vec{\sigma}_{V_1}^\perp$  respecto del plano vectorial  $V_1 = \operatorname{Ker}(\vec{f} - \operatorname{Id}_{\vec{\mathcal{A}}})$ . Por el Lema 3.29

$$f = \tau_u \circ g,$$

donde  $u \in V_1 \setminus \{0\}$  y  $\mathcal{P}_g \neq \emptyset$ . Siguiendo lo visto en (C),  $g$  ha de ser la simetría ortogonal  $\sigma_S^\perp$  respecto del plano afín  $S = \mathcal{P}_g$ , y por tanto  $f$  es la composición de  $\sigma_S^\perp$  y la translación de vector  $u \in V_1 = \operatorname{Ker}(\vec{g} - \operatorname{Id}_V) = \operatorname{Ker}(\vec{f} - \operatorname{Id}_V) = \vec{S}$ . Este movimiento rígido se llama **simetría ortogonal deslizante respecto del plano afín  $S$  con vector de deslizamiento  $u \in \vec{S}$** .

En cualquier sistema de referencia rectangular  $\mathcal{R} = \{q, B\}$  de  $\mathcal{A}$  con origen en  $q \in S$  y base ortonormal de direcciones  $B = \{v_1, v_2, v_3\}$  con  $v_1, v_2 \in \vec{S} = V_1 = \operatorname{Ker}(\vec{f} - \operatorname{Id}_{\vec{\mathcal{A}}})$  y  $v_3 \in V_{-1} = \operatorname{Ker}(\vec{f} + \operatorname{Id}_{\vec{\mathcal{A}}})$ , se tiene que

$$M(f, \mathcal{R}) = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline b_1 & 1 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right),$$

donde  $(b_1, b_2, 0)$  son las coordenadas  $u_B$  de  $u$  en  $B$ .

**Observación 3.35** Si  $f = \tau_u \circ g$  es una simetría deslizante con  $g = \sigma_S^\perp$  y  $u \in \vec{S}$ , hemos probado que (ver el Lema 3.29):

- El plano de simetría  $S$  de  $f$  coincide con  $\mathcal{P}_g$ .
- El vector de deslizamiento  $u = \overrightarrow{pf(p)}$  para cualquier  $p \in S$ .

A efectos de cálculo,  $S = \{p \in \mathcal{A} : \overrightarrow{pf(p)} \in \vec{S} = \operatorname{Ker}(\vec{f} - \operatorname{Id}_V)\}$ .

El plano  $S$  puede ser descrito también como el lugar geométrico

$$S = \{m_{pf(p)} : p \in \mathcal{A}\}.$$

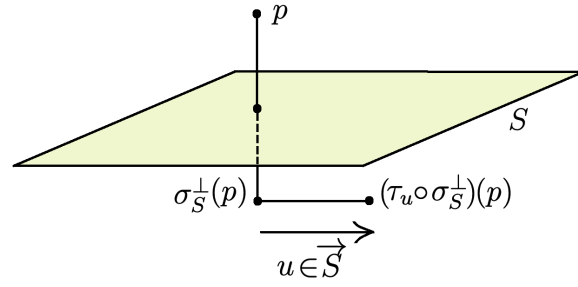


Figura 13: Simetría ortogonal con deslizamiento

En efecto, para todo  $p \in \mathcal{A}$

$$m_{p,f(p)} = p + \frac{1}{2} \overrightarrow{pf(p)} = (p + \frac{1}{2} \overrightarrow{pg(p)}) + \frac{1}{2}u = m_{p,g(p)} + \frac{1}{2}u,$$

de donde usando que  $S = \mathcal{P}_g = \{m_{p,g(p)} : p \in \mathcal{A}\}$  y  $u \in \overrightarrow{S}$  se sigue lo enunciado.

Es conveniente dibujar los elementos geométricos de los movimientos estudiados en cada caso (rectas o planos de simetría, ángulos de giro y vectores de deslizamiento) en una cuartilla de papel. Intenta visualizar cómo actúa cada uno de ellos, entendiendo la posición relativa de un punto genérico y su imagen. Este ejercicio geométrico sencillo es importante, te ayudará a comprender mejor la naturaleza de todos estos movimientos.

**Ejercicio 3.36** Demuestra que la siguiente aplicación afín  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$f(x, y, z) = \left( \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{x - \sqrt{3}y}{2}, \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}x + y}{2}, z + 1 \right).$$

es un movimiento rígido del espacio afín euclídeo  $\mathbb{R}^3$  y clasifícalo determinando sus elementos geométricos.

SOLUCIÓN: La aplicación lineal asociada  $\overrightarrow{f}$  satisface

$$M(\overrightarrow{f}, B_0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Claramente  $M(\overrightarrow{f}, B_0) \cdot M(\overrightarrow{f}, B_0)^t = I_3$ , esto es,  $M(\overrightarrow{f}, B_0) \in O(3, \mathbb{R})$  (es una matriz ortogonal). Como el sistema de referencia usual  $\mathcal{R}_0 = \{(0, 0, 0), B_0\}$  en  $\mathbb{R}^3$  es rectangular respecto del producto escalar clásico  $\langle, \rangle$ , y por tanto la base usual  $B_0$  es una base ortonormal en  $(\mathbb{R}^3, \langle, \rangle)$ , inferimos que efectivamente  $f$  es un movimiento rígido.

Además  $\det M(\overrightarrow{f}, B_0) = 1$ , por lo que es un movimiento directo. Su conjunto de puntos fijos viene dado por  $\mathcal{P}_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = (x, y, z)\}$ , esto es,

$$\mathcal{P}_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left( \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{x - \sqrt{3}y}{2}, \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}x + y}{2}, z + 1 \right) = (x, y, z)\} =$$

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left( \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{-x - \sqrt{3}y}{2}, \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}x - y}{2}, 1 \right) = (0, 0, 0)\} = \emptyset.$$

Como  $\vec{f} \neq \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$ , la clasificación de los movimientos rígidos en espacios euclidianos tri-dimensionales nos dice que  $f$  es un movimiento helicoidal. Determinemos sus elementos geométricos, esto es, eje  $S$ , ángulo de giro  $\theta$  y vector de deslizamiento  $u \in \vec{S}$ .

Recordemos que  $\vec{S} = \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_V)$ , esto es,

$$\begin{aligned}\vec{S} &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (M(\vec{f}, B_0) - I_3) \cdot (x, y, z)^t = (0, 0, 0)^t\} = \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot (x, y, z)^t = (0, 0, 0)^t\} = \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0\} = L(\{(0, 0, 1)\}).\end{aligned}$$

De la Observación 3.34, los puntos  $(x, y, z)$  del eje  $S$  de  $f$  se caracterizan por la propiedad  $\overrightarrow{(x, y, z)f(x, y, z)} \in \vec{S}$ , esto es,

$$\overrightarrow{(x, y, z)f(x, y, z)} = \left( \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{-x - \sqrt{3}y}{2}, \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}x - y}{2}, 1 \right) \in \vec{S}.$$

Como  $x = y = 0$  son las ecuaciones implícitas de  $\vec{S}$  en  $B_0$ , Imponiendo que las dos primeras coordenadas de  $\overrightarrow{(x, y, z)f(x, y, z)}$  se anulen nos queda

$$(x, y, z) \in S \iff \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{-x - \sqrt{3}y}{2} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}x - y}{2} = 0,$$

esto es,

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 1\} = (1, 1, 0) + L(\{(0, 0, 1)\}).$$

El ángulo no orientado  $\alpha \in ]0, \pi]$  del movimiento helicoidal se calcula de la fórmula

$$\text{Traza}(M(\vec{f}, B_0)) = 2 \cos \alpha + 1 \iff 2 = 2 \cos \alpha + 1 \iff \cos \alpha = 1/2 \iff \alpha = \pi/3.$$

Para calcular el ángulo orientado  $\theta$  respecto de una orientación elegida en  $\vec{S}^\perp$  procedemos así. En  $\vec{S}^\perp$ , elegimos una base ortonormal  $B$  que determine la orientación positiva  $\mathcal{O}$  en  $\vec{S}^\perp$  que vamos a fijar. Como  $\vec{S}^\perp = L(\{(0, 0, 1)\})^\perp = L(\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\})$  en este caso tomaremos

$$B = \{v_1, v_2\} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}.$$

Luego calculamos la matriz  $M(\vec{f}|_{\vec{S}^\perp}, B)$ , que queda

$$M(\vec{f}|_{\vec{S}^\perp}, B) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Por definición, el ángulo orientado de  $f$  respecto de la orientación  $\mathcal{O}$  fijada en  $\vec{S}^\perp$  es el único real  $\theta \in ]0, 2\pi[$  tal que  $\cos \theta = \frac{1}{2}$ ,  $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , esto es  $\theta = \pi/3$ .

Por último, el vector de deslizamiento  $u$  de  $f$  se calcula de la expresión  $u = \overrightarrow{pf(p)}$  para cualquier  $p \in S$ . Elegimos por sencillez  $p = (1, 1, 0)$ , calculamos  $f(1, 1, 0) = (1, 1, 1)$ , y deducimos que

$$u = \overrightarrow{(1, 1, 0)f(1, 1, 0)} = \overrightarrow{(1, 1, 0)(1, 1, 1)} = (0, 0, 1).$$

■

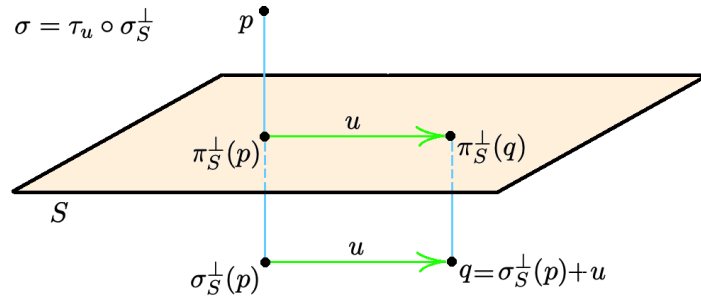
**Ejercicio 3.37** Sean  $S$  plano y  $p, q$  puntos en  $\mathbb{R}^3$ . Probar que son equivalentes los siguientes enunciados:

1. Existe  $\sigma: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  simetría ortogonal deslizante respecto del plano  $S$  tal que  $\sigma(p) = q$ .
2.  $\overrightarrow{pq} \notin \vec{S}^\perp$  y  $\overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)} = -\overrightarrow{q\pi_S^\perp(q)}$ , donde  $\pi_S^\perp: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  representa a la proyección ortogonal sobre  $S$ .

Prueba que existe una simetría deslizante  $\sigma: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  con  $\sigma(S) = S$  y  $\sigma(p) = q$  cuando

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3: x_1 - x_2 = 1\}, \quad p = (2, -1, 0), \quad q = (-1, 0, 0).$$

Determinala dando su matriz en la referencia usual de  $\mathbb{R}^3$ .



SOLUCIÓN: a)  $\Rightarrow$  b) Sea  $\sigma: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  simetría ortogonal deslizante respecto de  $S$  tal que  $\sigma(p) = q$ . En principio sabemos que existe un vector  $u \in \vec{S} \setminus \{\vec{0}\}$  tal que  $\sigma$  es la composición de la simetría ortogonal respecto del plano  $S$  seguida de la traslación de vector  $u$ :

$$\sigma = \tau_u \circ \sigma_S^\perp.$$

Veamos que  $\overrightarrow{pq}$  no pertenece a  $\vec{S}^\perp$ . En efecto, la identidad

$$q = \sigma(p) = (\tau_u \circ \sigma_S^\perp)(p) = \sigma_S^\perp(p) + u = p + (\overrightarrow{p\sigma_S^\perp(p)} + u)$$

implica que  $\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{p\sigma_S^\perp(p)} + u$ , y la definición de simetría ortogonal implica que  $\overrightarrow{p\sigma_S^\perp(p)} \in \vec{S}^\perp$ . Como la descomposición  $\mathbb{R}^3 = \vec{S} \oplus \vec{S}^\perp$  es en suma directa, deducimos de lo anterior que  $\overrightarrow{pq} \in \vec{S}^\perp$  si y sólo si el vector  $u \in \vec{S}$  es el vector nulo  $\vec{0}$ , lo que contradice que  $\sigma$  es deslizante.

Por tanto  $\overrightarrow{pq}$  no pertenece a  $\vec{S}^\perp$ .

Veamos ahora que  $-\overrightarrow{q\pi_S^\perp(q)} = \overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)}$ . Para ello, observemos que de la definición de simetría ortogonal  $\overrightarrow{p\sigma_S^\perp(p)} = 2\overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)}$ , de donde volviendo a la ecuación de arriba

$$\begin{aligned} q &= p + (\overrightarrow{p\sigma_S^\perp(p)} + u) = p + (\overrightarrow{2p\pi_S^\perp(p)} + u) = \\ &= (p + \overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)}) + (\overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)} + u) = \pi_S^\perp(p) + (\overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)} + u) = (\pi_S^\perp(p) + u) + \overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)}. \end{aligned}$$

Ahora podemos demostrar que el punto  $z := \pi_S^\perp(p) + u$  coincide con la proyección  $\pi_S^\perp(q)$ , ya que satisface:

- $z \in S$ : usar que  $\pi_S^\perp(p) \in S$  y  $u \in \vec{S}$ .

- $\vec{zq} \in \vec{S}^\perp$ : usar que de la expresión  $q = z + \overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)}$  probada anteriormente  $\vec{zq} = \overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)} \in \vec{S}^\perp$ .

En conclusión

$$\overrightarrow{-q\pi_S^\perp(q)} = \overrightarrow{\pi_S^\perp(q)q} = \overrightarrow{(\pi_S^\perp(p) + u)q} = \overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)},$$

lo que concluye la prueba.

b)  $\Rightarrow$  a)

Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  plano y  $p, q \in \mathbb{R}^3$  puntos tales que  $\vec{pq} \notin \vec{S}^\perp$  y  $\overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)} = \overrightarrow{-q\pi_S^\perp(q)}$ . Consideremos los puntos  $\pi_S^\perp(p), \pi_S^\perp(q) \in S$  y llamemos

$$u = \overrightarrow{\pi_S^\perp(p)\pi_S^\perp(q)} \in \vec{S}.$$

Veamos que  $u \neq \vec{0}$ . Para ello basta con observar que

$$\vec{pq} = \overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)} + \overrightarrow{\pi_S^\perp(p)\pi_S^\perp(q)} + \overrightarrow{\pi_S^\perp(q)q} = (\overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)} + \overrightarrow{\pi_S^\perp(q)q}) + u,$$

y tener en cuenta que  $\overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)} + \overrightarrow{\pi_S^\perp(q)q} \in \vec{S}^\perp$  y  $\vec{pq} \notin \vec{S}^\perp$ .

Comprobemos finalmente que la simetría deslizante  $\sigma = \tau_u \circ \sigma_S^\perp$  resuelve el ejercicio; para ello bastará con demostrar que  $\sigma(p) = q$ . En efecto,

$$\begin{aligned} \sigma(p) &= \sigma_S^\perp(p) + u = p + (\overrightarrow{p\sigma_S^\perp(p)} + u) = p + (\overrightarrow{2p\pi_S^\perp(p)} + u) = \pi_S^\perp(p) + (\overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)} + u) = \\ &= (\pi_S^\perp(p) + u) + \overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)} = (\pi_S^\perp(p) + \overrightarrow{\pi_S^\perp(p)\pi_S^\perp(q)}) + \overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)} = \pi_S^\perp(q) + \overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)} = \\ &= \pi_S^\perp(q) + (\overrightarrow{-q\pi_S^\perp(q)}) = \pi_S^\perp(q) + \overrightarrow{\pi_S^\perp(q)q} = q. \end{aligned}$$

En cuanto a la parte práctica, vamos a justificar que existe una simetría deslizante  $\sigma: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  con  $\sigma(S) = S$  y  $\sigma(p) = q$  cuando

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3: x_1 - x_2 = 1\}, \quad p = (2, -1, 0), \quad q = (-1, 0, 0).$$

Para una respuesta afirmativa, y usando lo demostrado, será suficiente con ver que

$$\vec{pq} \notin \vec{S}^\perp \quad \text{y} \quad \overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)} = \overrightarrow{-q\pi_S^\perp(q)},$$

donde  $\pi_S^\perp: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  representa a la proyección ortogonal sobre  $S$ . Determinemos por tanto la expresión analítica de  $\pi_S^\perp$ . Tomemos  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  genérico y escribamos  $\pi_S^\perp(x, y, z) = (a, b, c)$ . Sabemos que

- $(a, b, c) \in S$ , esto es,  $a - b = 1$ .
- $\overrightarrow{(x, y, z)(a, b, c)} = (a - x, b - y, c - z) \in \vec{S}^\perp$ ; como  $\vec{S} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3: x_1 - x_2 = 0\}$  entonces  $\vec{S}^\perp = L(\{(1, -1, 0)\}) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3: x_3 = x_1 + x_2 = 0\}$ , y por tanto  $c - z = a - x + b - y = 0$ .

Resolviendo  $a = \frac{1}{2}(x + y + 1), b = \frac{1}{2}(x + y - 1), c = z$ , y por tanto

$$\pi_S^\perp: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \pi_S^\perp(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}(x + y + 1), \frac{1}{2}(x + y - 1), z\right).$$

Ahora queda claro que

$$\vec{pq} = \overrightarrow{(2, -1, 0)(-1, 0, 0)} = (-3, 1, 0) \notin \vec{S}^\perp = L(\{(1, -1, 0)\}) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3: x_3 = x_1 + x_2 = 0\}$$

y

$$\begin{aligned}\overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)} &= \overrightarrow{(2, -1, 0)\pi_S^\perp(2, -1, 0)} = \overrightarrow{(2, -1, 0)(1, 0, 0)} = (-1, 1, 0) = \\ &= \overrightarrow{-(-1, 0, 0)(0, -1, 0)} = -\overrightarrow{(-1, 0, 0)\pi_S^\perp(-1, 0, 0)} = -\overrightarrow{q\pi_S^\perp(q)}.\end{aligned}$$

De lo demostrado en la parte teórica del ejercicio deducimos que existe una simetría deslizante  $\sigma: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  con  $\sigma(S) = S$  y  $\sigma(p) = q$ . Para determinar la expresión matricial de  $\sigma$  en  $\mathcal{R}_0$ , recordemos que  $\sigma = \tau_u \circ \sigma_S^\perp$  para cierto vector  $u \in \vec{S}$ . Como probamos en el anterior razonamiento, el vector  $u$  puede calcularse mediante la expresión

$$u = \overrightarrow{\pi_S^\perp(p)\pi_S^\perp(\sigma(p))} = \overrightarrow{\pi_S^\perp(p)\pi_S^\perp(q)} = \overrightarrow{(1, 0, 0)(0, -1, 0)} = (-1, -1, 0).$$

La expresión analítica de  $\sigma_S^\perp$  se puede determinar usando la fórmula  $\overrightarrow{p\sigma_S^\perp(p)} = 2\overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)}$ , esto es,  $\sigma_S^\perp(p) = 2\pi_S^\perp(p) - p$ , que nos da

$$\sigma_S^\perp(x, y, z) = 2\pi_S^\perp(x, y, z) - (x, y, z) = 2\left(\frac{1}{2}(x+y+1), \frac{1}{2}(x+y-1), z\right) - (x, y, z) = (y+1, x-1, z).$$

De aquí que

$$\sigma(x, y, z) = (\tau_u \circ \sigma_S^\perp)(x, y, z) = (y+1, x-1, z) + (-1, -1, 0) = (y, x-2, z),$$

esto es,

$$M(\sigma, \mathcal{R}_0) = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

■

**Ejercicio 3.38** *Determinar la expresión analítica en el sistema de referencia usual del espacio euclidiano  $\mathbb{R}^3$  del movimiento helicoidal  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  con los siguientes elementos geométricos:*

- Eje  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x - y - 1 = y - z + 1 = 0\}$ .
- Ángulo orientado  $\theta = \pi/4$  respecto a la orientación  $\mathcal{O}$  inducida por la base ordenada  $B' = \{(1, -1, 0), (0, 1, -1)\}$  de  $\vec{S}^\perp$ .
- Vector de deslizamiento  $u = (-1, -1, -1) \in \vec{S}$ .

SOLUCIÓN: Observemos que

$$S = (0, -1, 0) + L(\{(1, 1, 1)\}), \quad \vec{S} = L(\{(1, 1, 1)\}), \quad \vec{S}^\perp = L(\{(1, -1, 0), (0, 1, -1)\}).$$

El ejercicio está bien planteado ya que  $B'$  es una base ordenada de  $S^\perp$ , determinando por tanto una orientación en ese plano vectorial, y el vector de deslizamiento  $u$  pertenece a  $\vec{S}$ . Necesitaremos un sistema de referencia rectangular  $\mathcal{R} = \{q, B = \{v_1, v_2, v_3\}\}$  adaptado al movimiento helicoidal, esto es, tal que  $q \in S$ ,  $\{v_1, v_2\}$  sea base ortonormal positiva de  $(\vec{S}^\perp, \mathcal{O})$ , y  $v_3 \in \vec{S}$  sea unitario.

Elegimos

$$q = (0, -1, 0), \quad \{v_1, v_2\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2) \right\}, \quad v_3 = 1/\sqrt{3}(1, 1, 1).$$

Notemos que, si llamamos  $B'' = \{v_1, v_2\}$ , la matriz

$$M(\text{Id}_{\vec{S}^\perp}, B'', B') = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$$

tiene determinante  $> 0$ , y por tanto  $B''$  es una base ortonormal positiva en  $(\vec{S}^\perp, \mathcal{O})$ .

Como  $u = -\sqrt{3}v_3$ , y por tanto  $u_B = (0, 0, -1)^t$ , la matriz del movimiento helicoidal  $f$  en la referencia  $\mathcal{R}$  adaptada ha de ser:

$$M(f, \mathcal{R}) = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) & 0 \\ 0 & \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Como

$$M(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0) = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1/\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -1 & -1/\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array} \right),$$

la identidad  $M(f, \mathcal{R}_0) = M(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0) \cdot M(f, \mathcal{R}) \cdot M(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0)^{-1}$  nos da finalmente

$$M(f, \mathcal{R}_0) = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{-\sqrt{\sqrt{3}+2}-2}{3} & \frac{\sqrt{2}+1}{3} & \frac{1-\sqrt{\sqrt{3}+2}}{3} & \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}+2}{6} \\ \frac{\sqrt{2}-5}{3} & \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}+2}{6} & \frac{\sqrt{2}+1}{3} & \frac{1-\sqrt{\sqrt{3}+2}}{3} \\ \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}-4}{6} & \frac{1-\sqrt{\sqrt{3}+2}}{3} & \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}+2}{6} & \frac{\sqrt{2}+1}{3} \end{array} \right).$$

■

**Ejercicio 3.39** *Determinar la expresión analítica en el sistema de referencia usual del espacio euclidiano  $\mathbb{R}^3$  del movimiento rígido definido por la composición  $\sigma_T^\perp \circ G$ , donde:*

- $G$  es el giro con eje  $S = (0, 0, 1) + L(\{(1, -1, 0)\})$  de ángulo orientado  $\pi/3$  respecto de la orientación en  $\vec{S}^\perp$  inducida por  $B' = \{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ .
- $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z - 1 = 0\}$ .

*Clasifica el movimiento resultante.*

**SOLUCIÓN:** Determinemos la expresión analítica de  $G$  en  $\mathcal{R}_0$ . Para ello, determinemos primero un sistema de referencia rectangular  $\mathcal{R} = \{q, B = \{v_1, v_2, v_3\}\}$  adaptado a  $G$ . Esto significa que  $q \in S$ ,  $\{v_1, v_2\}$  es base ortonormal positiva de  $(\vec{S}^\perp, \mathcal{O})$ , y  $v_3 \in \vec{S}$  es unitario. En este caso tomaremos

$$q = (0, 0, 1), \quad B'' = \{v_1, v_2\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0), (0, 0, 1) \right\}, \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0).$$

La comprobación de que  $B''$  es positiva en  $(\vec{S}^\perp, \mathcal{O})$  es trivial toda vez que la matriz

$$M(\text{Id}_{\vec{S}^\perp}, B'', B') = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



tiene determinante  $> 0$ .

La matriz del giro  $G$  en la referencia  $\mathcal{R}$  adaptada ha de ser:

$$M(G, \mathcal{R}) = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos(\pi/3) & -\sin(\pi/3) & 0 \\ 0 & \sin(\pi/3) & \cos(\pi/3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Como

$$M(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0) = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right),$$

la identidad  $M(G, \mathcal{R}_0) = M(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0) \cdot M(G, \mathcal{R}) \cdot M(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0)^{-1}$  nos da finalmente

$$M(G, \mathcal{R}_0) = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \sqrt{\frac{3}{8}} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\sqrt{\frac{3}{8}} \\ \sqrt{\frac{3}{8}} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\sqrt{\frac{3}{8}} \\ \frac{1}{2} & \sqrt{\frac{3}{8}} & \sqrt{\frac{3}{8}} & \frac{1}{2} \end{array} \right).$$

Por otra parte, un cálculo elemental nos dice que la matriz que representa a  $\sigma_T^\perp$  en  $\mathcal{R}_0$  es

$$M(\sigma_T^\perp, \mathcal{R}_0) = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right),$$

de donde si llamamos  $f = \sigma_T^\perp \circ G$  se deduce que la expresión analítica de  $f$  en  $\mathcal{R}_0$  está determinada por la matriz

$$M(f, \mathcal{R}_0) = M(\sigma_T^\perp, \mathcal{R}_0) \cdot M(G, \mathcal{R}_0) = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \sqrt{\frac{3}{8}} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\sqrt{\frac{3}{8}} \\ \sqrt{\frac{3}{8}} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\sqrt{\frac{3}{8}} \\ \frac{3}{2} & -\sqrt{\frac{3}{8}} & -\sqrt{\frac{3}{8}} & -\frac{1}{2} \end{array} \right).$$

Esto acaba la primera parte del ejercicio.

Consideremos ahora el movimiento rígido  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dado por la expresión matricial

$$\begin{pmatrix} 1 \\ f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \sqrt{\frac{3}{8}} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\sqrt{\frac{3}{8}} \\ \sqrt{\frac{3}{8}} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\sqrt{\frac{3}{8}} \\ \frac{3}{2} & -\sqrt{\frac{3}{8}} & -\sqrt{\frac{3}{8}} & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Para clasificarlo observemos que  $f$  es inverso al ser composición de un giro (directo) y una isometría (inverso). El conjunto  $\mathcal{P}_f$  de puntos fijos de  $f$  surge de resolver la ecuación  $f(x, y, z) = (x, y, z)$ , y da por soluciones el plano afín

$$\mathcal{P}_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: \sqrt{6}z + x + y = \sqrt{6}\}.$$

Por la clasificación de los movimientos rígidos  $f$  es la simetría ortogonal  $\sigma_\Pi^\perp$  respecto del plano  $\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: \sqrt{6}z + x + y = \sqrt{6}\}$ . ■

**Ejercicio 3.40** Demuestra que la siguiente aplicación  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es un movimiento rígido del espacio afín euclídeo  $(\mathbb{R}^3, \langle, \rangle)$  y clasifícalo:

$$f(x, y, z) = (2y/\sqrt{5} + z/\sqrt{5}, \sqrt{5}x/3 - 2y/(3\sqrt{5}) + 4z/(3\sqrt{5}), -2x/3 - y/3 + 2z/3).$$

SOLUCIÓN: De la definición de  $f$  se deduce que

$$M(f, \mathcal{R}_0) = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array} \right)$$

Al ser  $f$  es lineal tenemos que  $\vec{f} = f$ . Como

$$M(\vec{f}, B_0) = \left( \begin{array}{ccc} 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array} \right),$$

$B_0$  es una base ortonormal de  $(\mathbb{R}^3, \langle, \rangle)$  y  $M(\vec{f}, B_0) \cdot M(\vec{f}, B_0)^t = I_3$  deducimos que  $M(\vec{f}, B_0) \in O(3, \mathbb{R})$  y  $f$  es un movimiento rígido. Además como  $\det M(\vec{f}, B_0) = -1$  se trata de un movimiento inverso. El conjunto de puntos fijos  $\mathcal{P}_f$  surge de resolver la ecuación  $f(x, y, z) = (x, y, z)$ , y como  $\det(M(\vec{f}, B_0) - I_3) \neq 0$  en este caso resulta

$$\mathcal{P}_f = \{(0, 0, 0)\}.$$

De la clasificación de los movimientos rígidos,  $f$  ha de ser de la forma

$$f = \sigma_T^\perp \circ G,$$

donde  $G$  es un giro respecto de una recta  $S$  y  $\sigma_T^\perp$  la simetría ortogonal respecto del plano  $T$  ortogonal a  $S$  con  $S \cap T = \{p_0\}$ . Determinemos los elementos geométricos de  $f$ .

Recordemos que

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \text{Ker}(f + \text{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: (M(\vec{f}, B_0) + I_3) \cdot (x, y, z)^t = (0, 0, 0)^t\} = \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} & 1 - \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 + \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema

$$\vec{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: y + \frac{1}{11}(2 + 5\sqrt{5})x = z + \frac{1}{11}(-4 + \sqrt{5})x = 0\},$$

esto es  $\vec{S} = L(\{(11, -2 - 5\sqrt{5}, 4 - \sqrt{5})\})$ . Por tanto

$$S = p_0 + \vec{S} = (0, 0, 0) + L(\{(11, -2 - 5\sqrt{5}, 4 - \sqrt{5})\}) = L(\{(11, -2 - 5\sqrt{5}, 4 - \sqrt{5})\}),$$

El ángulo  $\alpha \in ]0, \pi]$  no orientado del giro  $G$  se deduce de la expresión

$$-1 + 2 \cos \alpha = \text{Traza}(M(\vec{f}, B_0)) = -\frac{2}{3\sqrt{5}} + 2/3 \iff \alpha = \arccos(-\frac{1}{3\sqrt{5}} + \frac{5}{6}) \in ]0, \pi[.$$

El plano  $T$  ortogonal a  $S$  pasando por  $p_0$  viene dado por la expresión

$$T = p_0 + \vec{S}^\perp = (0, 0, 0) + \vec{S}^\perp.$$

Como

$$\begin{aligned}\vec{S}^\perp &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: \langle (x, y, z), (11, -2 - 5\sqrt{5}, 4 - \sqrt{5}) \rangle = 0\} = \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: 11x - (2 + 5\sqrt{5})y + (4 - \sqrt{5})z = 0\} = \\ &= \{(\lambda, \mu, -(4 + \sqrt{5})\lambda + (3 + 2\sqrt{5})\mu): \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

se tiene que

$$T = L(\{(-1, 0, 4 + \sqrt{5}), (0, 1, 3 + 2\sqrt{5})\}).$$

Si queremos el ángulo orientado  $\theta \in [0, 2\pi[$  de  $G$  respecto de una orientación  $\mathcal{O}$  en  $\vec{S}^\perp$ , tomaremos primero una base ortonormal ordenada  $B$  de  $\vec{S}^\perp$  que fije  $\mathcal{O}$  y calcularemos la matriz  $M(\vec{f}|_{\vec{S}^\perp}, B)$ , que será la típica matriz  $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  determinando unívocamente  $\theta$ . Los cálculos son muy penosos y los omitiremos. ■

**Ejercicio 3.41** Demuestra que la siguiente aplicación  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es un movimiento rígido del espacio afín euclídeo  $(\mathbb{R}^3, \langle, \rangle)$  y clasifícalo:

$$f(x, y, z) = (x/2 - \sqrt{3}z/2 + 2, y + 2, -\sqrt{3}x/2 - z/2 + 2).$$

SOLUCIÓN: La matriz de  $f$  en el sistema de referencia  $\mathcal{R}_0$  viene dada por la expresión

$$M(f, \mathcal{R}_0) = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array} \right).$$

Como

$$M(\vec{f}, B_0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$B_0$  es una base ortonormal de  $(\mathbb{R}^3, \langle, \rangle)$  y  $M(\vec{f}, B_0) \cdot M(\vec{f}, B_0)^t = I_3$  deducimos que  $M(\vec{f}, B_0) \in O(3, \mathbb{R})$  y  $f$  es un movimiento rígido. Además como  $\det M(\vec{f}, B_0) = -1$  se trata de un movimiento inverso. El conjunto de puntos fijos  $\mathcal{P}_f$  surge de resolver la ecuación  $f(x, y, z) - (x, y, z) = (0, 0, 0)$ , que en este caso resulta el sistema

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: (2 - \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}z, 2, 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{3}{2}z) = (0, 0, 0)\} = \emptyset.$$

Por la clasificación de movimientos rígidos  $f$  es una simetría deslizante de la forma  $\tau_u \circ \sigma_S^\perp$ , donde  $S$  es un plano afín y  $u \in \vec{S}$ . Determinemos sus elementos geométricos.

Sabemos que  $\vec{S} = \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\mathbb{R}^3})$ , esto es,

$$\vec{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: (M(\vec{f}, B_0) - I_3) \cdot (x, y, z)^t = (0, 0, 0)\} =$$

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \cdot (x, y, z)^t = (0, 0, 0)\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x = -\sqrt{3}z\},$$

esto es,

$$\vec{S} = L(\{(0, 1, 0), (-\sqrt{3}, 0, 1)\}).$$

Sabemos que  $m_{p,f(p)} \in S$  para todo  $p \in \mathbb{R}^3$ . Eligiendo  $p = (0, 0, 0)$ , como  $f(0, 0, 0) = (2, 2, 2)$  ese cálculo nos dice que

$$m_{(0,0,0),f(0,0,0)} = m_{(0,0,0),(2,2,2)} = (1, 1, 1) \in S.$$

Como  $S = (1, 1, 1) + \vec{S}$ , de aquí que

$$S = (1, 1, 1) + L(\{(0, 1, 0), (-\sqrt{3}, 0, 1)\}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + \sqrt{3}z - 1 - \sqrt{3} = 0\}.$$

El vector de deslizamiento  $u \in \vec{S}$  se calcula de la forma  $u = \overrightarrow{pf(p)}$ ,  $p \in S$ . Tomando  $p = (1, 1, 1) \in S$  y calculando  $f(1, 1, 1) = (\frac{1}{2}(5 - \sqrt{3}), 3, \frac{1}{2}(3 - \sqrt{3}))$  se tiene que

$$u = \overrightarrow{(1, 1, 1), f(1, 1, 1)} = (\frac{1}{2}(3 - \sqrt{3}), 2, \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3})).$$

■

### 3.6. Geometría de triángulos en el plano afín euclidiano

Vamos a recordar algunos de los resultados clásicos acerca de triángulos en el plano euclidiano.

**Definición 3.42** *Un triángulo en un espacio afín  $\mathcal{A}$  son tres puntos  $\{a, b, c\}$  afínmente independientes, que se suelen llamar vértices del triángulo. Normalmente, se suele hablar de triángulos  $\{a, b, c\}$  en planos afines, ya que sus propiedades se pueden circunscribir al plano  $\Pi = \langle \{a, b, c\} \rangle \subseteq \mathcal{A}$  que lo contiene. Comencemos con algunas definiciones básicas.*

**Definición 3.43** *Si  $T = \{a, b, c\}$  es un triángulo en un plano afín euclidiano  $(\mathcal{A}, \langle, \rangle)$ , se definen los ángulos interiores  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  y  $\hat{C}$  de  $T$  en los vértices  $a$ ,  $b$  y  $c$  respectivamente como los ángulos orientados*

$$\hat{A} = \angle_o(\vec{ab}, \vec{ac}), \quad \hat{B} = \angle_o(\vec{bc}, \vec{ba}) \quad \text{y} \quad \hat{C} = \angle_o(\vec{ca}, \vec{cb})$$

*respecto de la orientación  $\mathcal{O}$  del plano  $\vec{\mathcal{A}}$  inducida por la base ordenada  $\{\vec{ab}, \vec{ac}\}$ .*

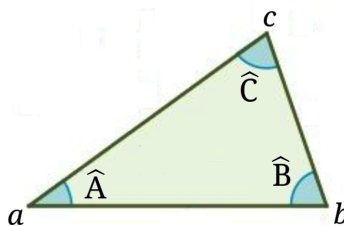


Figura 14: Triángulo

La ordenación de vértices y vectores en la anterior definición es crucial. Aparentemente, el vértice  $a$  juega un papel relevante respecto de los otros dos al fijar la orientación  $\mathcal{O}$  en  $\vec{\mathcal{A}}$ , pero esto no es así. De hecho, las bases ordenadas  $B_2 = \{\vec{bc}, \vec{ba}\}$  y  $B_3 = \{\vec{ca}, \vec{cb}\}$  inducen la misma orientación  $\mathcal{O}$  en  $\vec{\mathcal{A}}$  que  $B_1 = \{\vec{ab}, \vec{ac}\}$ . En efecto, como  $\vec{bc} = \vec{ba} + \vec{ac} = -\vec{ab} + \vec{ac}$  y  $\vec{ba} = -\vec{ab}$  se tiene que

$$M(\text{Id}_{\vec{\mathcal{A}}}, B_2, B_1) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

y por tanto  $\det(M(\text{Id}_{\vec{\mathcal{A}}}, B_2, B_1)) = 1 > 0$ . De forma análoga se comprueba que  $\det(M(\text{Id}_{\vec{\mathcal{A}}}, B_3, B_1)) = 1 > 0$ .

**Observación 3.44** *Es conveniente recordar que, por definición, el ángulo orientado está bien definido salvo múltiplos enteros de  $2\pi$ , y por tanto siempre podemos tomar una determinación del mismo que pertenezca al intervalo  $[0, 2\pi[$ . Por este motivo, y en lo sucesivo, dado un triángulo  $\{a, b, c\}$  siempre supondremos*

$$\hat{A}, \hat{B}, \hat{C} \in ]0, 2\pi[.$$

El siguiente resultado recoge las propiedades básicas de los ángulos de un triángulo (Euclides siglo III A.C.).

**Teorema 3.45** *Sea  $\{a, b, c\}$  un triángulo en un plano afín euclidiano  $(\mathcal{A}, \langle, \rangle)$ . Son ciertos los siguientes enunciados:*

$$(I) \quad \hat{A}, \hat{B}, \hat{C} \in ]0, \pi[.$$

$$(II) \quad \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi.$$

DEMOSTRACIÓN: Demostremos (i). Calculemos  $\hat{A}$  (análogamente se razonaría con  $\hat{B}$  y  $\hat{C}$ ), para lo cual llamemos  $B = \{\vec{ab}, \vec{ac}\}$  y escribamos

$$w_1 = \frac{1}{\|\vec{ab}\|} \vec{ab}, \text{ y } w_2 = \frac{1}{\|u_2\|} u_2, \text{ donde } u_2 = \vec{ac} - \langle w_1, \vec{ac} \rangle w_1.$$

Un cálculo sencillo nos dice que  $B_0 = \{w_1, w_2\}$  es una base ortonormal de  $(\vec{\mathcal{A}}, \langle, \rangle)$  y

$$\det(M(\text{Id}_{\vec{\mathcal{A}}}, B, B_0)) = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{\|\vec{ab}\|} & \langle w_1, \vec{ac} \rangle \\ 0 & \|u_2\| \end{pmatrix} > 0,$$

esto es,  $B_0$  induce la misma orientación que  $B$  en  $\vec{\mathcal{A}}$ . Por definición,  $\hat{A}$  es el único real en  $]0, 2\pi[$  satisfaciendo

$$\frac{1}{\|\vec{ac}\|} \vec{ac} = \cos(\hat{A}) w_1 + \sin(\hat{A}) w_2,$$

de donde como  $\vec{ac} = \langle w_1, \vec{ac} \rangle w_1 + \|u_2\| w_2$  inferimos que  $\sin \hat{A} = \frac{\|u_2\|}{\|\vec{ac}\|} > 0$ , esto es,  $\hat{A} \in ]0, \pi[$ . Esto prueba (i).

Para probar (ii), recordemos que  $\angle_o(u, v) = \angle_o(-u, -v)$ , y que salvo sumar un múltiplo de  $2\pi$  la regla de aditividad  $\angle_o(u, v) + \angle_o(v, w) = \angle_o(u, w)$  es válida.

Usando estas fórmulas, y respecto de la orientación  $\mathcal{O}$  en  $\vec{\mathcal{A}}$  inducida por  $\{\vec{ab}, \vec{ac}\}$ , se tiene que:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \angle_o(\vec{ab}, \vec{ac}) + \angle_o(\vec{ca}, \vec{cb}) + \angle_o(\vec{bc}, \vec{ba}) = \angle_o(\vec{ab}, \vec{ac}) + \angle_o(-\vec{ca}, -\vec{cb}) + \angle_o(\vec{bc}, \vec{ba}) =$$

$$= \angle_o(\vec{ab}, \vec{ac}) + \angle(\vec{ac}, \vec{bc}) + \angle_o(\vec{bc}, \vec{ba}) = \angle_o(\vec{ab}, \vec{ba}) + 2k\pi = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

En la última identidad hemos usado que  $\angle_o(\vec{ab}, \vec{ba}) = \pi$ . Como  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C} \in ]0, \pi[$ , necesariamente  $\pi + 2k\pi = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < 3\pi$ , por lo que  $k = 0$  y se tiene lo deseado. ■

**Teorema 3.46 (Teorema de Pitágoras)** *Dado un triángulo  $\{a, b, c\}$  con ángulo  $\hat{A} = \pi/2$ ,*

$$d(a, b)^2 + d(a, c)^2 = d(b, c)^2.$$

Este tipo de triángulos se llaman *rectángulos* con ángulo recto en el vértice  $a$ . Los segmentos  $[a, b]$  y  $[a, c]$  se denominan *catetos* de  $\{a, b, c\}$ , y el segmento  $[b, c]$  *hipotenusa* de  $\{a, b, c\}$ .

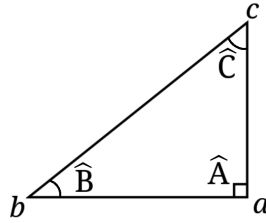


Figura 15: Triángulo rectángulo

DEMOSTRACIÓN: La prueba del teorema de Pitágoras es muy simple para nosotros:

$$d(b, c)^2 = \|\vec{bc}\|^2 = \langle \vec{ba} + \vec{ac}, \vec{ba} + \vec{ac} \rangle = \|\vec{ba}\|^2 + \|\vec{ac}\|^2 + 2\langle \vec{ba}, \vec{ac} \rangle = d(a, b)^2 + d(a, c)^2,$$

donde simplemente hemos tenido en cuenta que  $\hat{A} = \pi/2$  si y solo si  $\langle \vec{ba}, \vec{ac} \rangle = 0$  (esto es,  $\vec{ab} \perp \vec{ac}$ ). ■

**Proposición 3.47** *Dados dos triángulos  $\{a, b, c\}$  y  $\{a', b', c'\}$  en un plano afín euclidiano  $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , si  $d(a, b) = d(a', b')$ ,  $d(a, c) = d(a', c')$ , y  $d(b, c) = d(b', c')$ , entonces*

$$\hat{A} = \hat{A}', \quad \hat{B} = \hat{B}', \quad \hat{C} = \hat{C}'.$$

DEMOSTRACIÓN: La única afinidad  $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  tal que

$$f(a) = a', \quad f(b) = b', \quad f(c) = c'$$

satisface

$$\|\vec{f}(\vec{ab})\| = \|\vec{a'b'}\| = \|\vec{ab}\|, \quad \|\vec{f}(\vec{ac})\| = \|\vec{a'c'}\| = \|\vec{ac}\|, \quad \|\vec{f}(\vec{bc})\| = \|\vec{b'c'}\| = \|\vec{bc}\|,$$

y por tanto es una isometría lineal. De aquí que  $f$  sea un movimiento rígido y preserve ángulos. ■

### 3.6.1. Puntos notables de un triángulo

Los tres puntos notables de un triángulo que trataremos en esta sección son el *baricentro*, el *circuncentro* y el *ortocentro* (dejaremos el *incentro* para un tratamiento posterior más específico). Explicamos a continuación cómo se generan y sus propiedades básicas.

**Definición 3.48** *Dado un triángulo  $\{a, b, c\}$ , la mediana asociada al vértice  $a$  es la recta  $M_a = \langle \{a, m_{bc}\} \rangle$  que une  $a$  y el punto medio  $m_{bc}$  o centro de masas del lado opuesto  $[b, c]$ . Análogamente se define las medianas  $M_b$  y  $M_c$  asociadas a  $b$  y  $c$ .*

El punto

$$B = q + \frac{1}{3}(\vec{q\bar{a}} + \vec{q\bar{b}} + \vec{q\bar{c}})$$

no depende de  $q \in \mathcal{A}$ , y es fácil comprobar que está contenido en las tres medianas del triángulo  $\{a, b, c\}$ :

$$\{B\} = M_a \cap M_b \cap M_c.$$

En efecto, bastará con ver que  $B \in M_a = a + L(\{\overrightarrow{am_{bc}}\})$  (análogamente se razonaría para comprobar que  $B \in M_b$  y  $B \in M_c$ ). Como  $m_{bc} = q + (\frac{1}{2}\vec{q\bar{b}} + \frac{1}{2}\vec{q\bar{c}})$  se tiene que

$$\overrightarrow{am_{bc}} = a(q + (\frac{1}{2}\vec{q\bar{b}} + \frac{1}{2}\vec{q\bar{c}})) = -\vec{q\bar{a}} + \frac{1}{2}\vec{q\bar{b}} + \frac{1}{2}\vec{q\bar{c}},$$

de donde  $\vec{aB} = \vec{a\bar{q}} + \frac{1}{3}(\vec{q\bar{a}} + \vec{q\bar{b}} + \vec{q\bar{c}}) = -\frac{2}{3}\vec{q\bar{a}} + \frac{1}{3}(\vec{q\bar{b}} + \vec{q\bar{c}}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{am_{bc}} \in \vec{M}_a$  y  $B \in M_a$  como queríamos demostrar.

**Definición 3.49 (Baricentro)** *El punto  $B = q + \frac{1}{3}(\vec{q\bar{a}} + \vec{q\bar{b}} + \vec{q\bar{c}})$  es conocido como el centro de masas o baricentro del triángulo  $\{a, b, c\}$ .*

El concepto de baricentro es puramente afín, se puede definir sin apelar a ninguna métrica euclídea en  $\vec{A}$ .

**Definición 3.50** *Dados dos puntos  $p, q$  en un plano afín euclidiano euclidiano  $(\mathcal{A}, \langle, \rangle)$ , la mediatriz del segmento  $[p, q]$  es la recta  $R$  que pasa por  $m_{pq}$  y es ortogonal a la recta  $\langle \{p, q\} \rangle$  que generan  $p$  y  $q$ . Explícitamente,*

$$R = m_{pq} + L\{\vec{p\bar{q}}\}^\perp.$$

Si  $r$  es un punto de la mediatriz  $R$  de  $[p, q]$ , se tiene que

$$r = m_{pq} + v = (p + \frac{1}{2}\vec{p\bar{q}}) + v = (q + \frac{1}{2}\vec{q\bar{p}}) + v$$

para un vector  $v \perp \vec{p\bar{q}}$ , y por tanto

$$d(p, r)^2 = \|\vec{p\bar{r}}\|^2 = \|\frac{1}{2}\vec{p\bar{q}} + v\|^2 = \|\frac{1}{2}\vec{p\bar{q}}\|^2 + \|v\|^2 = \|\frac{1}{2}\vec{q\bar{p}} + v\|^2 = \|\vec{q\bar{r}}\|^2 = (q, r)^2.$$

No es difícil ver el recíproco, esto es, si  $r \in \mathcal{A}$  es un punto que equidista de  $p$  y  $q$  (a saber,  $d(p, r) = d(q, r)$ ) entonces  $r$  está contenido en la mediatriz  $R$  de  $[p, q]$ . En efecto, si  $d(p, r) = d(q, r)$  entonces

$$\|\vec{p\bar{r}}\|^2 = \|\vec{q\bar{r}}\|^2 = \|\vec{q\bar{p}} + \vec{p\bar{r}}\|^2 \iff \langle \vec{q\bar{p}}, \vec{q\bar{p}} + 2\vec{p\bar{r}} \rangle = 0,$$

de donde  $v := \frac{1}{2}\vec{q\bar{p}} + \vec{p\bar{r}} \in L\{\vec{p\bar{q}}\}^\perp$ . Por tanto

$$r = p + \vec{p\bar{r}} = (p + \frac{1}{2}\vec{p\bar{q}}) + v = m_{pq} + v \in m_{pq} + L\{\vec{p\bar{q}}\}^\perp = R$$

como queríamos comprobar.

**Proposición 3.51** Sea  $\{a, b, c\}$  un triángulo, y llamemos  $R_a$  a la mediatriz del lado  $[b, c]$ ,  $R_b$  a la mediatriz del lado  $[a, c]$  y  $R_c$  a la mediatriz del lado  $[a, b]$ . Entonces existe un único punto  $C \in \mathcal{A}$  tal que

$$C = R_a \cap R_b \cap R_c.$$

DEMOSTRACIÓN: Si  $R_a$  y  $R_b$  fuesen paralelas tendríamos que las rectas vectoriales  $L\{\vec{bc}\}^\perp$  y  $L\{\vec{ac}\}^\perp$  en  $\vec{\mathcal{A}}$  serían iguales, y por tanto  $\{\vec{bc}, \vec{ac}\}$  serían linealmente dependientes, lo que es absurdo ya que  $\{a, b, c\}$  es un triángulo. Por tanto  $R_a$  y  $R_b$  no son paralelas, y de igual forma ocurre con las parejas de rectas  $R_a, R_c$  y  $R_b, R_c$ . Esto garantiza que  $C := R_a \cap R_b$  es un único punto caracterizado por la propiedad de equidistar de  $a, b$  y  $c$ , de donde necesariamente

$$C = R_a \cap R_b \cap R_c.$$

■

**Definición 3.52 (Circuncentro)** Con la notación de la Proposición 3.51, al punto  $C$  se le llama circuncentro del triángulo  $\{a, b, c\}$ .

Su nombre deriva de la propiedad geométrica que lo caracteriza: es el centro de la circunferencia que contiene a los tres vértices del triángulo  $\{a, b, c\}$ .

**Definición 3.53** Dado un triángulo  $\{a, b, c\}$  en un plano afín euclidiano  $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , la altura  $H_a$  del vértice  $a$  es la recta que pasa por  $a$  y es ortogonal al lado opuesto  $[b, c]$ :

$$H_a = a + L\{\vec{bc}\}^\perp.$$

Análogamente se definen las alturas asociadas a los vértices  $b$  y  $c$ :

$$H_b = b + L\{\vec{ac}\}^\perp \quad y \quad H_c = c + L\{\vec{ab}\}^\perp.$$

**Proposición 3.54** Si  $\{a, b, c\}$  es un triángulo en un plano  $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , entonces existe un único punto  $O$  tal que

$$O = H_a \cap H_b \cap H_c.$$

DEMOSTRACIÓN: Como los vectores  $\vec{ac}$  y  $\vec{bc}$  son linealmente independientes ( $\{a, b, c\}$  es un triángulo), las rectas  $H_a$  y  $H_b$  no son paralelas y se cortan en un único punto  $O$ . Comprobemos que  $O \in H_c$ , o equivalentemente, que  $\vec{Oc} \perp \vec{ab}$ . En efecto,

$$\begin{aligned} \langle \vec{Oc}, \vec{ab} \rangle &= \langle \vec{Oa} + \vec{ac}, \vec{aO} + \vec{Ob} \rangle = \langle \vec{Oa}, \vec{aO} + \vec{Ob} \rangle + \langle \vec{ac}, \vec{aO} \rangle + \langle \vec{ac}, \vec{Ob} \rangle = \\ &= \langle \vec{Oa}, \vec{aO} + \vec{Ob} \rangle - \langle \vec{Oa}, \vec{ac} \rangle + \langle \vec{ac}, \vec{Ob} \rangle = \langle \vec{Oa}, \vec{aO} + \vec{Ob} - \vec{ac} \rangle + \langle \vec{ac}, \vec{Ob} \rangle = \\ &= \langle \vec{Oa}, \vec{ca} + \vec{aO} + \vec{Ob} \rangle + \langle \vec{ac}, \vec{Ob} \rangle = \langle \vec{Oa}, \vec{cb} \rangle + \langle \vec{ac}, \vec{Ob} \rangle = 0, \end{aligned}$$

donde hemos tenido en cuenta que  $\langle \vec{ac}, \vec{Ob} \rangle = \langle \vec{cb}, \vec{Oa} \rangle = 0$  al ser  $O \in H_b \cap H_a$ . ■

**Definición 3.55 (Ortocentro)** Al punto  $O \in \mathcal{A}$  intersección de las tres alturas de un triángulo  $\{a, b, c\}$  en un plano afín euclídeo  $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  se le llama ortocentro de  $\{a, b, c\}$ .

Estamos en condiciones de enunciar y probar el *Teorema clásico de Euler*, que da información sobre la posición relativa de los tres puntos notables de un triángulo.



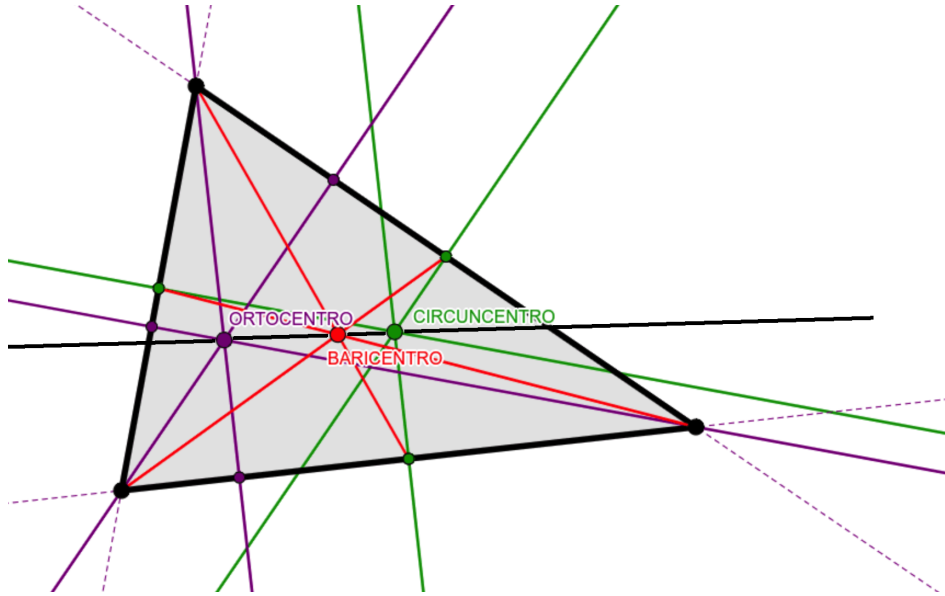


Figura 16: Recta de Euler

**Teorema 3.56 (Euler)** Dado un triángulo  $\{a, b, c\}$  en un plano afín euclidiano  $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , el baricentro  $B$ , circuncentro  $C$  y ortocentro  $O$  de  $\{a, b, c\}$  están alineados.

Si  $\{B, C, O\}$  contiene al menos dos puntos distintos, la recta pasando por  $B$ ,  $C$  y  $O$  se denomina recta de Euler de  $\{a, b, c\}$ .

DEMOSTRACIÓN: Llamemos  $h: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  a la homotecia con centro  $B$  y razón  $-1/2$ . La clave es observar que  $h$  lleva cada vértice de  $\{a, b, c\}$  en el punto medio de su lado opuesto. En efecto, como  $B = a + \frac{1}{3}(\vec{ab} + \vec{ac})$ , es claro que

$$\begin{aligned} h(a) &= B + \left(-\frac{1}{2}\right)\vec{Ba} = B + \frac{1}{2}\vec{aB} = \left(a + \frac{1}{3}(\vec{ab} + \vec{ac})\right) + \frac{1}{6}(\vec{ab} + \vec{ac}) = \\ &= a + \frac{1}{2}(\vec{ab} + \vec{ac}) = m_{bc}, \end{aligned}$$

o en otras palabras,  $h$  lleva el vértice  $a$  en el punto medio de  $[b, c]$ , y el mismo razonamiento se aplica a los otros dos vértices.

Veamos que  $h$  lleva las alturas de  $\{a, b, c\}$  en las mediatrices de  $\{a, b, c\}$ . En efecto

$$h(H_a) = h(a + \vec{H}_a) = h(a) + \vec{h}(\vec{H}_a) = h(a) + \left(-\frac{1}{2}\text{Id}_{\mathcal{A}}\right)(\vec{H}_a) = m_{bc} + \vec{H}_a = m_{bc} + \vec{R}_a = R_a,$$

donde hemos usado que  $\vec{H}_a = \vec{R}_a = L(\{\vec{bc}\})^\perp$ . Análogamente se prueba que  $h(H_b) = R_b$  y  $h(H_c) = R_c$ .

Finalmente, como el ortocentro de  $\{a, b, c\}$  es el cruce de las tres alturas  $O = H_a \cap H_b \cap H_c$ , deducimos que  $h(O) = h(H_a) \cap h(H_b) \cap h(H_c) = R_a \cap R_b \cap R_c = C$ . Pero un punto y su imagen por una homotecia están siempre alineados con el centro de la misma, por lo que  $O$  y  $C = h(O)$  están alineados con  $B$  como queríamos demostrar. ■

### 3.6.2. Bisectrices e incentro de un triángulo

Para introducir el concepto de bisectriz asociada a cada vértice de un triángulo en un plano afín euclidiano  $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , y posteriormente definir el incentro del mismo como el punto de corte de sus tres bisectrices, necesitamos alguna notación previa.

**Definición 3.57** Un espacio afín orientado es un espacio afín  $(\mathcal{A}, \vec{\mathcal{A}}, \rightarrow)$  en el que se ha fijado una orientación  $\mathcal{O}$  en  $\vec{\mathcal{A}}$ . Se suele representar  $(\mathcal{A}, \vec{\mathcal{A}}, \mathcal{O}, \rightarrow)$ , o simplemente  $(\mathcal{A}, \mathcal{O})$ . Análogamente se define el concepto de espacio afín euclidiano orientado  $(\mathcal{A}, (\vec{\mathcal{A}}, \langle, \rangle), \mathcal{O}, \rightarrow)$ , que de forma simplificada se suele escribir  $(\mathcal{A}, \langle, \rangle, \mathcal{O})$ .

Dados  $p \in \mathcal{A}$  y  $v \in \vec{\mathcal{A}} \setminus \{0\}$  unitario ( $\|v\| = 1$ ), el conjunto

$$L_p(v) := \{p + \lambda v : \lambda \geq 0\} \subseteq p + L(\{v\})$$

es la *semirrecta con origen  $p$  en la dirección de  $v$* . Fijada una orientación  $\mathcal{O}$  en  $\vec{\mathcal{A}}$  y tomados  $p \in \mathcal{A}$  y  $u, v \in \vec{\mathcal{A}} \setminus \{0\}$  unitarios, el ángulo orientado que forman las semirrectas  $L_p(u), L_p(v)$  (en ese orden) se define como

$$\angle_o(L_p(u), L_p(v)) := \angle_o(u, v).$$

**Proposición 3.58** Fijada una orientación  $\mathcal{O}$  en  $\vec{\mathcal{A}}$  y dados vectores  $u, v \in \vec{\mathcal{A}} \setminus \{0\}$  unitarios, existe un único vector unitario  $w \in \vec{\mathcal{A}} \setminus \{0\}$  tal que

$$\angle_o(u, w) = \angle_o(w, v) = \frac{1}{2} \angle_o(u, v).$$

DEMOSTRACIÓN: Consideremos  $\{w_1 = u, w_2\}$  base ortonormal positiva en  $(\vec{\mathcal{A}}, \langle, \rangle, \mathcal{O})$ . Recordemos que si  $\angle_o(u, v) = \alpha$ , el número  $\alpha$  es el único real en  $[0, 2\pi[$  tal que

$$v = \cos(\alpha)w_1 + \sin(\alpha)w_2.$$

Si definimos

$$w = \cos(\alpha/2)w_1 + \sin(\alpha/2)w_2,$$

claramente  $\angle_o(u, w) = \alpha/2$ . La proposición se sigue de la identidad

$$\angle_o(u, w) + \angle_o(w, v) = \angle_o(u, v) = \alpha;$$

ver Propiedades 3.6. ■

**Definición 3.59** Sean  $L_p(u_1)$  y  $L_p(u_2)$  dos semirrectas en el plano afín euclidiano orientado  $(\mathcal{A}, \langle, \rangle, \mathcal{O})$  tales  $\angle_o(L_1, L_2) \in ]0, \pi[$ . Por definición, la bisectriz que forman  $L_p(u_1)$  y  $L_p(u_1)$  (en ese orden) es la semirrecta

$$b_{L_p(u_1), L_p(u_2)} := L_p(w),$$

donde  $w \in \vec{\mathcal{A}}$  es el único vector unitario con  $\angle_o(u_1, w) = \angle_o(w, u_2) = \frac{1}{2} \angle_o(u_1, u_2)$  en  $(\mathcal{A}, \langle, \rangle, \mathcal{O})$ .

**Observación 3.60** Es importante reparar en que el concepto de bisectriz sólo se ha definido para semirrectas  $L_p(u_1), L_p(u_2)$  formando un ángulo orientado menor que un llano (esto es, en  $]0, \pi[$ ) en  $(\mathcal{A}, \langle, \rangle, \mathcal{O})$ , o equivalentemente, cuando la base ordenada  $\{u_1, u_2\}$  es positiva en  $(\vec{\mathcal{A}}, \mathcal{O})$ .

La siguiente proposición identifica la bisectriz con el lugar de puntos equidistantes a las semirrectas.

**Proposición 3.61** Sean  $L_p(u_1)$  y  $L_p(u_2)$  dos semirrectas en el plano afín euclidiano orientado  $(\mathcal{A}, \langle, \rangle, \mathcal{O})$  tales que  $\angle_o(L_p(u_1), L_p(u_2)) \in ]0, \pi[$ . Un punto  $q \in \mathcal{A}$ ,  $q \neq p$ , pertenece a la bisectriz  $b_{L_p(u_1), L_p(u_2)}$  si y sólo si se satisfacen las dos siguientes condiciones:

- (I)  $\{u_1, \overrightarrow{pq}\}, \{\overrightarrow{pq}, u_2\}$  son bases positivas en  $(\overrightarrow{\mathcal{A}}, \mathcal{O})$ .
- (II)  $d(q, p + L(\{u_1\})) = d(q, p + L(\{u_2\})) > 0$ .

DEMOSTRACIÓN: Consideremos  $\{w_1 = u_1, w_2\}$  base ortonormal positiva en  $(\mathcal{A}, \langle, \rangle, \mathcal{O})$ . Si llamamos  $\angle_o(u_1, u_2) = \alpha \in ]0, \pi[$ , sabemos que

$$u_2 = \cos(\alpha)u_1 + \sin(\alpha)w_2 \quad (\sin(\alpha) > 0) \quad y$$

$$b_{L_1, L_2} = \{p + \mu(\cos(\alpha/2)u_1 + \sin(\alpha/2)w_2) : \mu \geq 0\}.$$

Supongamos que

$$q = p + \mu(\cos(\alpha/2)u_1 + \sin(\alpha/2)w_2) \in b_{L_1, L_2}.$$

Entonces, es inmediato comprobar que las bases

$$\{u_1, \overrightarrow{pq}\} = \{u_1, \cos(\alpha/2)u_1 + \sin(\alpha/2)w_2\} \quad y$$

$$\{\overrightarrow{pq}, u_2\} = \{\cos(\alpha/2)u_1 + \sin(\alpha/2)w_2, u_2 = \cos(\alpha)u_1 + \sin(\alpha)w_2\}$$

son positivas (inducen la misma orientación que  $\{u_1, w_2\}$ ), de donde se sigue (i).

De otro lado, el punto  $q_1 := p + \mu \cos(\alpha/2)u_1 \in L_p(u_1) \subset p + L(\{u_1\})$  satisface

$$\overrightarrow{q_1 q} = \overrightarrow{(p + \mu \cos(\alpha/2)u_1)(p + \mu(\cos(\alpha/2)u_1 + \sin(\alpha/2)w_2))} = \mu \sin(\alpha/2)w_2 \in L(\{u_1\})^\perp,$$

por lo que la Proposición 3.16 implica que

$$d(q, p + L(\{u_1\})) = \|\overrightarrow{q_1 q}\| = \|\mu \sin(\alpha/2)w_2\| = \mu \sin(\alpha/2) > 0.$$

De forma similar, el punto  $q_2 = p + \mu \cos(\alpha/2)u_2 \in L_p(u_2) \subset p + L(\{u_2\})$  satisface

$$\begin{aligned} \overrightarrow{q_2 q} &= \overrightarrow{(p + \mu \cos(\alpha/2)u_2)(p + \mu(\cos(\alpha/2)u_1 + \sin(\alpha/2)w_2))} = \\ &= \mu(\cos(\alpha/2)u_1 + \sin(\alpha/2)w_2 - \cos(\alpha/2)u_2) = \\ &= \mu(\cos(\alpha/2)(1 - \cos(\alpha))u_1 + (\sin(\alpha/2) - \cos(\alpha/2)\sin(\alpha))w_2) = \\ &= \mu \sin(\alpha/2)(\sin(\alpha)u_1 - \cos(\alpha)w_2) \in L(\{u_2\})^\perp, \end{aligned}$$

y por tanto

$$d(q, p + L(\{u_2\})) = \|\overrightarrow{q_2 q}\| = \|\mu \sin(\alpha/2)(\sin(\alpha)u_1 - \cos(\alpha)w_2)\| = \mu \sin(\alpha/2).$$

Esto demuestra que

$$d(q, p + L(\{u_1\})) = d(q, p + L(\{u_2\})) = \mu \sin(\alpha/2) > 0,$$

y por tanto (ii).

**Observación 3.62** Notemos que para todo punto  $q \in b_{L_1, L_2}$  su proyección ortogonal  $\pi_{L_j}^\perp(q)$  sobre la recta  $L_j = p + L(\{u_j\})$  está contenida  $L_p(u_j)$ , esto es,

$$q_j := \pi_{L_j}^\perp(q) = (q + L(\{u_j\})^\perp) \cap (p + L(\{u_j\})) \in L_p(u_j), \quad j = 1, 2.$$

Supongamos ahora que  $q \in \mathcal{A}$ ,  $q \neq p$ , satisface (i) y (ii). Si escribimos

$$q = p + \mu(\sin(\beta)u_1 + \cos(\beta)w_2),$$

donde  $\mu = d(p, q)$  y  $\beta \in [0, 2\pi[$ , es fácil ver que la condición (i) equivale a que  $\beta \in ]0, \alpha[$ .

Observemos que como  $d(q, p + L(\{u_1\})) = d(q, p + L(\{u_2\})) > 0$  entonces  $q \notin (p + L(\{u_1\})) \cup (p + L(\{u_2\}))$ . Es más, las rectas  $q + L(\{u_j\})^\perp$  y  $L_j := p + L(\{u_j\})$  se cortan en un único punto, a saber  $q_j := \pi_{L_j}^\perp(q)$ ,  $j = 1, 2$ , siendo

$$d(q, q_1) = d(q, p + L(\{u_1\})) = d(q, p + L(\{u_2\})) = d(q, q_2) > 0.$$

Por tanto  $q_1, q_2 \neq p, q$  y los conjuntos  $T_j = \{p, q, q_j\}$ ,  $j = 1, 2$ , definen sendos triángulos rectángulos. Como  $T_1$  y  $T_2$  tienen uno de sus catetos de igual longitud (a saber, el  $[q, q_1]$  de  $T_1$  y el  $[q, q_2]$  de  $T_2$ ) y comparten la misma hipotenusa  $[p, q]$ , por el Teorema de Pitágoras los catetos  $[p, q_1] \subseteq L_p(u_1)$  de  $T_1$  y  $[p, q_2] \subseteq L_p(u_2)$  de  $T_2$  han de tener también igual longitud. Por tanto la afinidad en  $h: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  que lleva

$$p \mapsto p, \quad q \mapsto q, \quad q_1 \mapsto q_2$$

es una isometría en  $(\mathcal{A}, \langle, \rangle)$  satisfaciendo  $h(T_1) = T_2$ , y en consecuencia  $T_1$  y  $T_2$  tienen los mismos ángulos en vértices correspondientes por  $h$ . En particular, tienen el mismo ángulo en  $p$ , que claramente coincide con  $\beta$ . Nótese que por (i) las orientaciones naturales de  $\vec{\mathcal{A}}$  utilizadas para calcular el ángulo  $\beta$  en el vértice  $p$  en  $T_1$  y  $T_2$  coinciden con la orientación  $\mathcal{O}$  fijada en  $\vec{\mathcal{A}}$ . Como consecuencia, la semirrecta  $L_0 = L_p(\frac{1}{pq}\vec{pq})$  satisface  $\angle_o(L_p(u_1), L_0) = \angle_o(L_0, L_p(u_2)) = \beta$ , y Propiedades 3.6 garantiza que

$$\angle_o(L_p(u_1), L_0) + \angle_o(L_0, L_p(u_2)) = 2\beta = \angle_o(L_p(u_1), L_p(u_2)) = \alpha \in ]0, \pi[.$$

Esto implica  $\beta = \frac{1}{2}\alpha$  y  $q = p + \mu(\sin(\beta)u_1 + \cos(\beta)w_2) \in b_{L_p(u_1), L_p(u_2)}$ , concluyendo la prueba. ■

**Definición 3.63** Sea  $\{a, b, c\}$  es un triángulo en  $(\mathcal{A}, \langle, \rangle)$ , y fijemos en  $\vec{\mathcal{A}}$  la orientación  $\mathcal{O}$  inducida por  $\{\vec{ab}, \vec{ac}\}$  (equivalente a  $\{\vec{bc}, \vec{ba}\}$  y  $\{\vec{ca}, \vec{cb}\}$ ). Las bisectrices en los vértices  $a, b$  y  $c$  se definen como

$$b_a := b_{L_a(\vec{ab}), L_a(\vec{ac})}, \quad b_b := b_{L_b(\vec{bc}), L_b(\vec{ba})}, \quad b_c := b_{L_c(\vec{ca}), L_c(\vec{cb})}.$$

**Proposición 3.64** Si  $\{a, b, c\}$  es un triángulo en  $(\mathcal{A}, \langle, \rangle)$ , entonces entonces existe un único punto  $I \in \mathcal{A}$  tal que

$$I = b_a \cap b_b \cap b_c.$$

DEMOSTRACIÓN: Como siempre denotemos por

$$\hat{A} = \angle_o(\vec{ab}, \vec{ac}), \quad \hat{B} = \angle_o(\vec{bc}, \vec{ba}), \quad \hat{C} = \angle_o(\vec{ca}, \vec{cb}) \in ]0, \pi[,$$

y llamemos  $\mathcal{O}$  a la orientación en  $\mathcal{A}$  inducida por cualquiera de las bases ordenadas  $\{\vec{ab}, \vec{ac}\}, \{\vec{bc}, \vec{ba}\}, \{\vec{ca}, \vec{cb}\}$  (es la misma).

Si consideramos  $\{\frac{1}{\|\vec{ab}\|}\vec{ab}, w_2\}$  base ordenada ortogonal y positiva en  $(\mathcal{A}, \langle, \rangle, \mathcal{O})$  y escribimos

$$\frac{1}{\|\vec{ac}\|}\vec{ac} = \cos(\hat{A})\frac{1}{\|\vec{ab}\|}\vec{ab} + \sin(\hat{A})w_2,$$

tenemos que

$$b_a := b_{L_a(\vec{ab}), L_a(\vec{ac})} = \{a + \mu \left( \cos(\hat{A}/2) \frac{1}{\|\vec{ab}\|} \vec{ab} + \sin(\hat{A}/2) w_2 \right) : \mu \geq 0\}.$$

Como

$$\cos(\hat{A}/2) \frac{1}{\|\vec{ab}\|} \vec{ab} + \sin(\hat{A}/2) w_2 = \frac{\sin(\hat{A}/2)}{\sin(\hat{A})} \left( \frac{\vec{ab}}{\|\vec{ab}\|} + \frac{\vec{ac}}{\|\vec{ab}\|} \right)$$

y  $\frac{\sin(\hat{A}/2)}{\sin(\hat{A})} > 0$ , deducimos que

$$b_a = \{a + \mu \left( \frac{1}{\|\vec{ac}\|} \vec{ac} + \frac{1}{\|\vec{ab}\|} \vec{ab} \right) : \mu \geq 0\}.$$

Análogamente  $b_c = \{c + \mu \left( \frac{1}{\|\vec{ca}\|} \vec{ca} + \frac{1}{\|\vec{cb}\|} \vec{cb} \right) : \mu \geq 0\}$ .

No es difícil ver que las semirrectas  $b_a$  y  $b_c$  se cortan en un único punto, esto es, el punto de corte de las rectas que contienen a  $b_a$  y  $b_c$  está en  $b_a \cap b_c$ . Una forma sencilla de comprobarlo es considerar la única afinidad  $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^2$  determinada por

$$F(a) = (-1, 0), \quad F(c) = (1, 0), \quad F(b) = (-1, 2)$$

y darse cuenta de que las semirrectas  $F(b_a)$  y  $F(b_c)$  de  $\mathbb{R}^2$  son secantes dentro del semiplano  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$ ; de ahí lo deseado. Por el mismo razonamiento  $b_a \cap b_b$ ,  $b_b \cap b_c \neq \emptyset$ .

Llamemos  $I$  al punto de corte  $b_a \cap b_c$ .

Como  $I \in b_a$ , de la Proposición 3.61

- $\{\vec{ab}, \vec{aI}\}, \{\vec{aI}, \vec{ac}\}$  son bases positivas en  $(\vec{\mathcal{A}}, \mathcal{O})$  y
- $d(I, a + L(\{\vec{ab}\})) = d(I, a + L(\{\vec{ac}\}))$ .

Análogamente, como  $I \in b_c$  entonces

- $\{\vec{ca}, \vec{cI}\}, \{\vec{cI}, \vec{cb}\}$  son bases positivas en  $(\vec{\mathcal{A}}, \mathcal{O})$  y
- $d(I, c + L(\{\vec{ca}\})) = d(I, c + L(\{\vec{cb}\}))$ .

Usando que  $c + L(\{\vec{ca}\}) = a + L(\{\vec{ac}\})$ ,  $a + L(\{\vec{ab}\}) = b + L(\{\vec{ba}\})$  y  $c + L(\{\vec{cb}\}) = b + L(\{\vec{bc}\})$ , deducimos de lo anterior que

$$d(I, b + L(\{\vec{ba}\})) = d(I, b + L(\{\vec{bc}\})).$$

Además, la base

$$\{\vec{bc}, \vec{bI}\} = \{-\vec{cb}, -\vec{cb} + \vec{cI}\}$$

induce la misma orientación que  $\{\vec{cI}, \vec{cb}\}$ , luego es positiva en  $(\vec{\mathcal{A}}, \mathcal{O})$ , y lo mismo ocurre con  $\{\vec{bI}, \vec{ba}\}$ . Por la Proposición 3.61 concluimos que  $I \in b_b$ , esto es,  $I \in b_a \cap b_b \cap b_c$ . Esto concluye la demostración. ■

**Definición 3.65 (Incentro)** Al punto  $I \in \mathcal{A}$  intersección de las tres bisectrices de un triángulo  $\{a, b, c\}$  en un plano afín euclídeo  $(\mathcal{A}, \langle, \rangle)$  se le llama incentro de  $\{a, b, c\}$ .

Démonos cuenta de que la distancia desde el incentro a los tres lados de un triángulo  $\{a, b, c\}$  es constante, y esta constante define el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo (con centro el incentro). Para ello téngase en cuenta que, por la Observación 3.62, la proyección ortogonal del incentro sobre la recta  $a + L(\{\vec{ab}\})$  está contenida en  $[a, b]$ , e igual con los otros lados. Compárese esta propiedad geométrica con la que define al circuncentro.

### 3.6.3. El Teorema de Tales

Concluiremos el tema de espacios afines euclidianos demostrando el *Teorema de Tales* (siglo VII A.C.). Nuestro enunciado será con un lenguaje más moderno.

**Teorema de Tales:** Sea  $(\mathcal{A}, \langle, \rangle)$  un espacio afín euclidiano de dimensión  $\geq 2$ . Sean  $\Pi_1, \Pi_2$  y  $\Pi_3$  tres hiperplanos en  $\mathcal{A}$  paralelos y distintos dos a dos. Sean  $R$  y  $S$  dos rectas distintas en  $\mathcal{A}$  no paralelas a los hiperplanos, y llamemos  $r_i = \Pi_i \cap R$ ,  $s_i = \Pi_i \cap S$ ,  $i = 1, 2, 3$ , a los correspondientes puntos de corte. Entonces

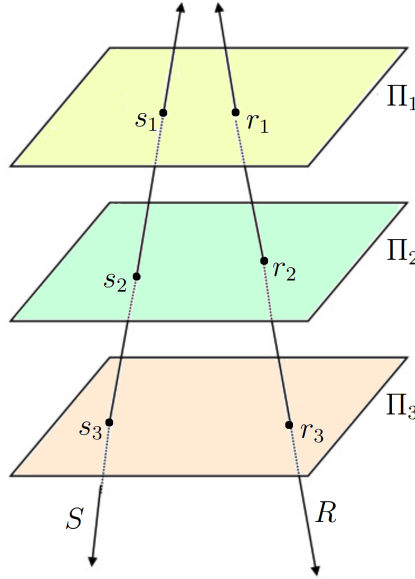
$$\frac{d(s_1, s_2)}{d(s_1, s_3)} = \frac{d(r_1, r_2)}{d(r_1, r_3)}.$$

DEMOSTRACIÓN: Llamemos  $\pi: \mathcal{A} \rightarrow S \subseteq \mathcal{A}$  a la proyección afín sobre  $S$  en la dirección  $\vec{\Pi} := \vec{\Pi}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  (no depende de  $i$  porque son paralelos). Por la definición de esta proyección afín,

$$\pi(r_i) = S \cap (r_i + \vec{\Pi}) = S \cap \Pi_i = s_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Como  $r_1, r_2$  y  $r_3$  están alineados, existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  único y no nulo tal que  $\overrightarrow{r_1 r_3} = \lambda \overrightarrow{r_1 r_2}$ , y por tanto

$$d(r_1, r_3) = \|\overrightarrow{r_1 r_3}\| = |\lambda| \|\overrightarrow{r_1 r_2}\| = |\lambda| d(r_1, r_2).$$



Como  $\pi$  es afín

$$\overrightarrow{\pi(r_1 r_3)} = \overrightarrow{\pi(r_1) \pi(r_3)} = \overrightarrow{s_1 s_3} \quad \text{y} \quad \overrightarrow{\pi(r_1 r_2)} = \overrightarrow{\pi(r_1) \pi(r_2)} = \overrightarrow{s_1 s_2},$$

de donde al ser  $\overrightarrow{\pi(r_1 r_3)} = \lambda \overrightarrow{\pi(r_1 r_2)}$  inferimos que  $\overrightarrow{s_1 s_3} = \lambda \overrightarrow{s_1 s_2}$ .

Así

$$d(s_1, s_3) = \|\overrightarrow{s_1 s_3}\| = |\lambda| \|\overrightarrow{s_1 s_2}\| = |\lambda| d(s_1, s_2),$$

por lo que

$$\frac{1}{|\lambda|} = \frac{d(s_1, s_2)}{d(s_1, s_3)} = \frac{d(r_1, r_2)}{d(r_1, r_3)}.$$

Esto concluye el teorema. ■