18

$\exists r > 0$

i) $f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in \,]x_0 - r, x_0 + r[\,, \quad r > 0$

· ~~Definición f cóncava hacia arriba~~

· Supongamos que existe ~~un~~ $\tilde{x} \in I \quad f(\tilde{x}) < f(x_0)$

· Por la concavidad hacia arriba de f tenemos que:

$$f(t x_0 + (1-t)\tilde{x}) \leq t f(x_0) + (1-t) f(\tilde{x}) <$$
$$t f(x_0) + (1-t) f(x_0) = f(x_0) \quad \forall t \in \,]0,1[$$

· Tomado t suficientemente cercano a 1, tenemos que $t x_0 + (1-t)\tilde{x} \in \,]x_0 - r, x_0 + r[$, y por tanto

$$f(x_0) \leq f(t x_0 + (1-t)\tilde{x}) < f(x_0) \quad \boxed{\Leftarrow \text{CONTRADICCIÓN}}$$

Por tanto, $f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in I$, es decir, f alcanza en x_0 un mínimo absoluto.

ii) Como f es derivable y cóncava hacia arriba, se verifica que:

$$f(x) \geq f(y) + f'(y)(x - y)$$

$\forall x, y \in I$

Si $\exists x_0$ tal que $f'(x_0) = 0$ se tiene que

$$\boxed{f(x) \geq f(x_0)} \quad \forall x \in I$$

Por tanto, x_0 es un mínimo absoluto de f.