Análisis Matemático II

Tema 4: Propiedades de la medida de Lebesgue

Intervalos diádicos

Notación

Para $a \in \mathbb{R}^N$ y $\emptyset \neq E \subset \mathbb{R}^N$ escribimos: $a + E = \{a + y : y \in E\}$

Es claro que: $a \in \mathbb{R}^N, \ J \in \mathcal{J} \implies a + J \in \mathcal{J}$

Para $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ definimos:

$$\mathbb{J}_n = \left[0, \frac{1}{2^n}\right[^N \quad \text{y} \quad \mathbb{A}_n = \left\{a \in \mathbb{R}^N : 2^n a \in \mathbb{Z}^N\right\}$$

Intervalos diádicos

Un intervalo diádico es un conjunto de la forma

$J = a + \mathbb{J}_n$ con $a \in \mathbb{A}_n$, donde $n \in \mathbb{N}_0$

Se dice que n es el orden del intervalo diádico J

Propiedades de los intervalos diádicos

Propiedades inmediatas

- Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ se tiene: $\mathbb{R}^N = \biguplus_{a \in \mathbb{A}_n} (a + \mathbb{J}_n)$
- Para $n, m \in \mathbb{N}_0$ con $n < m$, todo intervalo diádico de orden m está contenido en un único intervalo diádico de orden n

La propiedad clave que más nos interesa

Todo abierto de $\mathbb{R}^N$ se puede expresar como unión numerable de intervalos diádicos, dos a dos disjuntos

Ejemplos de conjuntos medibles

Subconjuntos de $\mathbb{R}^N$ que son medibles:

- Los abiertos y los cerrados
- Los conjuntos de tipo G_δ (intersecciones numerables de abiertos)
- Los de tipo F_σ (uniones numerables de cerrados)

Conjuntos de Borel

σ-álgebra engendrada

$$\Omega \neq \emptyset \quad \text{y} \quad \mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\Omega)$$

Existe una mínima σ-álgebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ tal que $\mathcal{T} \subset \mathcal{A}$

Se dice que $\mathcal{A}$ es la σ-álgebra engendrada por $\mathcal{T}$

Conjuntos de Borel

La σ-álgebra de Borel de un espacio topológico Ω es la engendrada por la topología de Ω

Denotaremos por $\mathcal{B}$ a la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^N$

Los elementos de $\mathcal{B}$ son los conjuntos de Borel en $\mathbb{R}^N$

Observaciones sobre los conjuntos de Borel

Otra descripción de la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^N$

La σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^N$ coincide con

la engendrada por la familia $\mathcal{J}$ de los intervalos acotados

Medibilidad de los conjuntos de Borel

Todos los conjuntos de Borel en $\mathbb{R}^N$ son medibles: $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$

Estabilidad de los conjuntos de Borel

Si $E \in \mathcal{B}$ y $\varphi : E \to \mathbb{R}^N$ es una función continua, entonces:

$$\varphi^{-1}(B) \in \mathcal{B} \quad \forall B \in \mathcal{B}$$

Por tanto, los homeomorfismos de $\mathbb{R}^N$ preservan los conjuntos de Borel

Propiedades topológicas de la medida de Lebesgue (I)

Una propiedad clave de la medida exterior

$$\lambda^*(E) = \inf \left\{ \lambda(G) \ : \ E \subset G^\circ = G \subset \mathbb{R}^N \right\} \quad \forall\, E \in \mathcal{P}\big(\mathbb{R}^N\big)$$

Regularidad exterior

$$\lambda(E) = \inf \left\{ \lambda(G) \ : \ E \subset G^\circ = G \subset \mathbb{R}^N \right\} \quad \forall\, E \in \mathcal{M}$$

Caracterización de los conjuntos medibles

Para un conjunto $E \subset \mathbb{R}^N$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) E es medible

(2) Para cada $\varepsilon > 0$, existe un abierto $G \subset \mathbb{R}^N$, con $E \subset G$ y $\lambda^*(G \setminus E) < \varepsilon$

(3) Para cada $\varepsilon > 0$, existe un cerrado $F \subset \mathbb{R}^N$ con $F \subset E$ y $\lambda^*(E \setminus F) < \varepsilon$

(4) Existe $A \subset \mathbb{R}^N$, de tipo F_σ, con $A \subset E$ y $\lambda^*(E \setminus A) = 0$

(5) Existe $B \subset \mathbb{R}^N$, de tipo G_δ, con $E \subset B$ y $\lambda^*(B \setminus E) = 0$

Propiedades topológicas de la medida de Lebesgue (II)

Regularidad interior

$$\lambda(E) = \sup \left\{ \lambda(K) \ : \ K \text{ compacto}, \ \ K \subset E \right\} \quad \forall\, E \in \mathcal{M}$$

Primer teorema de unicidad

Si $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra con $\mathcal{B} \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{M}$,

y $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ una medida tal que

$\mu(J) = \lambda(J)$ para todo intervalo diádico $J \subset \mathbb{R}^N$,

entonces: $\quad \mu(E) = \lambda(E) \quad \forall\, E \in \mathcal{A}$

En particular, λ es la única medida, definida en $\mathcal{M}$,

que extiende a la medida elemental de los intervalos acotados

Invariancia por traslaciones

Invariancia por traslaciones de la medida exterior

$$\lambda^*\big(x+E\big) = \lambda^*\big(E\big) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, \ \forall E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$$

Invariancia por traslaciones de la medida de Lebesgue

$$E \in \mathcal{M}, \ x \in \mathbb{R}^N \quad \Longrightarrow \quad x+E \in \mathcal{M}, \ \lambda(x+E) = \lambda(E)$$

¿ Es única ?

- Si para $E \in \mathcal{M}$ definimos $\mu(E)$ como el número de elementos de E

  μ es una medida invariante por traslaciones, con $\mu \neq \lambda$

  luego hay que imponer alguna condición adicional
- Para $\rho \in \mathbb{R}_0^+$, la medida $\rho\lambda$ es invariante por traslaciones

  luego hay que imponer alguna normalización

Caracterización mediante la invarianza por traslaciones

Lema clave para la caracterización

Sea $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ o bien $\mathcal{A} = \mathcal{M}$,

y sea $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ una medida invariante por traslaciones,

verificando que $\mu(\mathbb{J}) = 1$ donde $\mathbb{J} = [0, 1[^N$. Entonces:

$$\mu(E) = \lambda(E) \quad \forall E \in \mathcal{A}$$

Segundo teorema de unicidad

Para $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, o bien $\mathcal{A} = \mathcal{M}$,

sea $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ una medida invariante por traslaciones.

Supongamos que existe un abierto no vacío $G \subset \mathbb{R}^N$ con $\mu(G) < \infty$.

Entonces existe $\rho \in \mathbb{R}_0^+$ tal que $\mu(E) = \rho\lambda(E) \quad \forall E \in \mathcal{A}$

Invariancia por isometrías

Isometrías para la distancia euclídea

Si $T:\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ es una isometría para la distancia euclídea, con $T(0)=0$, entonces T es lineal

Invariancia por isometrías

La medida de Lebesgue es invariante por isometrías para la distancia euclídea, es decir:

Si $T:\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ es una tal isometría, entonces:

$$E \in \mathcal{M} \quad \Longrightarrow \quad T(E) \in \mathcal{M}, \;\; \lambda\big(T(E)\big) = \lambda(E)$$

Conjuntos de Cantor: motivación y preliminares

Motivación

Para $N > 1$, todo hiperplano afín en $\mathbb{R}^N$

es un conjunto de medida nula, no numerable

¿Qué ocurre para $N = 1$?

Preliminares

Llamamos sucesión admisible a toda sucesión $a = \{a_n\}$ en $\mathbb{R}$,

tal que: $0 < a_n < \dfrac{a_{n-1}}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, entendiendo que $a_0 = 1$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ denotamos por $U_n = \{0,1\}^N$

al conjunto de todas las aplicaciones de $\Delta_n = \{k \in \mathbb{N} : k \leqslant n\}$ en $\{0,1\}$,

es decir, de todas las n-uplas de ceros y unos

Definición de los conjuntos de Cantor

Conjuntos de Cantor

Fijamos una sucesión admisible $a = \{a_n\}$

y escribimos: $\rho_n = a_{n-1} - a_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad$ (con $a_0 = 1$)

Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $u \in U_n$ definimos:

$$J(u) = \big[\, m(u)\,,\, m(u) + a_n \,\big] \quad \text{donde} \quad m(u) = \sum_{k=1}^{n} u(k)\,\rho_k$$

de modo que $\big\{ J(u) : u \in U_n \big\}$ es una familia formada por

2^n intervalos compactos, de longitud a_n

Definimos: $K_n(a) = \bigcup_{u \in U_n} J(u) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y $C(a) = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n(a)$

Decimos que $C(a)$ es el conjunto de Cantor asociado a la sucesión a

Visión constructiva de los conjuntos de Cantor (I)

Primera generación de intervalos

Tenemos $U_1 = \{0,1\}$, $m(0) = 0$, y $m(1) = \rho_1 = 1 - a_1$, de donde

$J(0) = \big[0, a_1\big]$ y $J(1) = \big[1 - a_1, 1\big]$, siendo $a_1 < 1 - a_1$, luego:

$$\big[0,1\big] = \big[0, a_1\big] \biguplus \big]a_1, 1 - a_1\big[\biguplus \big[1 - a_1, 1\big]$$

Al suprimir el intervalo central queda la primera generación: $\big\{J(0), J(1)\big\}$,

2 intervalos compactos disjuntos de longitud a_1

que dan lugar al conjunto $K_1(a) = J(0) \biguplus J(1)$

Para $n \in \mathbb{N}$ suponemos construida la n-ésima generación $\big\{J(u) : u \in U_n\big\}$

2^n intervalos compactos, dos a dos disjuntos, de longitud a_n

que dan lugar al conjunto $K_n(a) = \biguplus\limits_{u \in U_n} J(u)$

Visión constructiva de los conjuntos de Cantor (II)

De la n-ésima generación a la siguiente

Para $u \in U_n$ sean $(u,0) = (u(1),\ldots,u(n),0)$ y $(u,1) = (u(1),\ldots,u(n),1)$

con lo cual: $U_{n+1} = \{(u,0) : u \in U_n\} \biguplus \{(u,1) : u \in U_n\}$

Partiendo del intervalo $J(u) = [m(u), m(u)+a_n]$, tenemos:

$$J(u,0) = \left[m(u)\,,\, m(u)+a_{n+1}\right] \quad \text{y} \quad J(u,1) = \left[m(u)+\rho_{n+1}\,,\, m(u)+a_n\right]$$

Como $a_{n+1} < \rho_{n+1}$, tenemos tres intervalos consecutivos:

$$J(u) = J(u,0) \biguplus \left]m(u)+a_{n+1}\,,\, m(u)+\rho_{n+1}\right[\biguplus J(u,1)$$

Al suprimir el intervalo central, quedan $J(u,0)$ y $J(u,1)$

Obtenemos así la $(n+1)$-ésima generación:

$$\{J(u,0) : u \in U_n\} \biguplus \{J(u,1) : u \in U_n\} = \{J(v) : v \in U_{n+1}\}$$

2^{n+1} intervalos compactos, dos a dos disjuntos, de longitud a_{n+1}

que dan lugar al conjunto $K_{n+1}(a) = \biguplus_{v \in U_{n+1}} J(v)$

Medida de los conjuntos de Cantor

Primeras propiedades de los conjuntos de Cantor

Para toda sucesión admisible $a = \{a_n\}$, el conjunto de Cantor $C(a)$

es compacto, tiene interior vacío, y verifica que

$$\lambda\big(C(a)\big) = \lim_{n\to\infty} 2^n a_n$$

Conjuntos de Cantor con medida prefijada

Para cada $\rho \in \mathbb{R}$, con $0 \leqslant \rho < 1$,

existe un conjunto de Cantor C_ρ, tal que $\lambda(C_\rho) = \rho$

El conjunto de Cantor más conocido

El conjunto de Cantor C_0,

asociado a la sucesión admisible $\{1/3^n\}$,

se conoce como conjunto ternario de Cantor

y verifica que $\lambda(C_0) = 0$

Otra descripción de los conjuntos de Cantor

Notación

$\mathbb{U} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ es el conjunto de todas la aplicaciones de $\mathbb{N}$ en $\{0,1\}$,

es decir, de todas las sucesiones de ceros y unos

$\mathbb{U}$ es equipotente a $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, luego no es numerable

Descripción explícita de los conjuntos de Cantor

$a = \{a_n\}$ sucesión admisible, $a_0 = 1$, $\rho_n = a_{n-1} - a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Definiendo: $$T_a(u) = \sum_{n=1}^{\infty} u(n)\,\rho_n \quad \forall u \in \mathbb{U}$$

se tiene que T_a es una biyección de $\mathbb{U}$ sobre el conjunto de Cantor $C(a)$

Por tanto, $C(a)$ es equipotente a $\mathbb{U}$, luego no es numerable

Caso del conjunto ternario de Cantor

$$C_0 = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{3^n} \ : \ c_n \in \{0,2\} \quad \forall n \in \mathbb{N} \right\}$$

Cardinales de algunos conjuntos

Teorema de Cantor-Bernstein

Si X e Y son conjuntos, tales que existen

dos aplicaciones inyectivas $g : X \to Y$ y $h : Y \to X$,

entonces X e Y son equipotentes

Algunas consecuencias

- $\mathbb{U}$ es equipotente a $\mathbb{R}$
- Todos los conjuntos de Cantor son equipotentes a $\mathbb{R}$
- Para $p, q \in \mathbb{N}$, los conjuntos $\mathbb{R}^p$ y $\mathbb{R}^q$ son equipotentes
- El conjunto $\mathcal{M}$ es equipotente a $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$

Topología de los conjuntos de Cantor

Todos los conjuntos de Cantor son homeomorfos

Conjuntos no medibles y conjuntos medibles que no son de Borel

Abundancia de conjuntos no medibles

Todo subconjunto de $\mathbb{R}^N$ con medida exterior estrictamente positiva

contiene un conjunto no medible

Como consecuencia, el conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \setminus \mathcal{M}$ es equipotente a $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$

Conjuntos medibles que no son de Borel

Se verifica que $\mathcal{M} \neq \mathcal{B}$, es decir,

existen subconjuntos medibles de $\mathbb{R}^N$ que no son conjuntos de Borel