Análisis Matemático I

Tema 4: Compacidad y conexión

Conjuntos acotados en un espacio métrico

Conjunto acotado

E espacio métrico, $\quad A \subset E$

A está acotado cuando está incluido en una bola

$$A \text{ acotado} \quad \Longrightarrow \quad \forall x \in E \;\; \exists\, r \in \mathbb{R}^+ \;:\; A \subset B(x,r)$$

Primeros ejemplos

- Todo subconjunto finito de E está acotado
- $x_n \in E \;\forall n \in \mathbb{N}$. $\quad \{x_n\}$ sucesión acotada cuando
  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ acotado, es decir, $\;\exists\, x \in E \;:\; \{d(x_n,x)\}$ acotada
- Toda sucesión convergente está acotada

La acotación no es una propiedad topológica

d distancia en un conjunto no vacío E

$$\rho(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \qquad \forall x,y \in E$$

ρ distancia en E, equivalente a d

Teorema de Bolzano-Weierstrass

Conjuntos acotados en espacios normados

X espacio normado, $\quad A \subset X$

$$A \text{ acotado} \iff \exists M > 0 \,:\, \|x\| \leqslant M \quad \forall x \in A$$

Dos normas equivalentes dan lugar a los mismos conjuntos acotados

En $\mathbb{R}^N$ usamos cualquier norma cuya topología sea la usual

Caso de un producto de espacios normados

$X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_N$ producto de espacios normados, $\quad A \subset X$

$$A \text{ acotado} \iff \{x(k) : x \in A\} \text{ acotado} \quad \forall k \in \Delta_N$$

Teorema de Bolzano-Weierstrass

Toda sucesión acotada de vectores de $\mathbb{R}^N$ admite una sucesión parcial convergente

Compacidad

Espacio métrico compacto

Un espacio métrico E es compacto cuando

toda sucesión de puntos de E admite una sucesión parcial convergente

Un conjunto $A \subset E$ es compacto cuando A es un espacio métrico compacto con la distancia inducida, es decir, cuando toda sucesión de puntos de A admite una sucesión parcial que converge a un punto de A

Dos condiciones necesarias

E espacio métrico, $\quad A \subset E$

$$A \text{ compacto} \quad \Longrightarrow \quad A \text{ acotado} \quad \text{y} \quad \overline{A} = A$$

Subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^N$

Un subconjunto de $\mathbb{R}^N$ es compacto si, y sólo si, es cerrado y acotado

Teoremas de Weierstrass y Hausdorff

Teorema de Weierstrass

$E\,,F$ espacios métricos, $f : E \to F$ continua

E compacto $\Longrightarrow$ $f(E)$ compacto

Existencia de máximos y mínimos

E espacio métrico compacto, $f : E \to \mathbb{R}$ continua. Entonces:

$$\exists\ u,v \in E\ :\ f(u) \leqslant f(x) \leqslant f(v) \quad \forall x \in E$$

Teorema de Hausdorff (1932)

- Todas las normas en $\mathbb{R}^N$ son equivalentes
- Todas las normas en un espacio vectorial de dimensión finita son equivalentes

Conexión

Motivación

E espacio métrico, $f : E \to \mathbb{R}$ continua, tal que $f(E)$ no es un intervalo

$$\alpha, \lambda, \beta \in \mathbb{R}, \quad \alpha < \lambda < \beta, \quad \alpha, \beta \in f(E), \quad \lambda \notin f(E)$$

$$U = \{x \in E : f(x) < \lambda\} \quad \text{y} \quad V = \{x \in E : f(x) > \lambda\}$$

$$E = U \cup V, \quad U = U^\circ, \quad V = V^\circ, \quad U \neq \emptyset, \quad V \neq \emptyset, \quad U \cap V = \emptyset$$

Espacio métrico conexo

Un espacio métrico es conexo cuando

no se puede expresar como unión de dos abiertos no vacíos disjuntos

$$E = U \cup V, \quad U = U^\circ, \quad V = V^\circ, \quad U \cap V = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad U = \emptyset \ \text{o} \ V = \emptyset$$

$$U^\circ = U = \overline{U} \subset E \quad \Longrightarrow \quad U = \emptyset \ \text{o} \ U = E$$

Caracterización

Para un espacio métrico E, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- E es conexo
- $f : E \to \mathbb{R}$ continua $\Longrightarrow$ $f(E)$ intervalo
- $f : E \to \{0,1\}$ continua $\Longrightarrow$ f constante

Versión general del teorema del valor intermedio

Subconjuntos conexos de $\mathbb{R}$

Un subconjunto de $\mathbb{R}$ es conexo si, y sólo si, es un intervalo

Teorema del valor intermedio

E, F espacios métricos, $f : E \to F$ continua

E conexo $\Longrightarrow$ $f(E)$ conexo

Corolario

E espacio métrico compacto y conexo, $f : E \to \mathbb{R}$ continua. Entonces:

$f(E)$ es un intervalo cerrado y acotado

Convexidad

Otra caracterización de los espacios métricos conexos

Un espacio métrico E es conexo si, y sólo si, para cualesquiera $x, y \in E$ existe un conjunto conexo $C \subset E$ tal que $x, y \in C$

Conjuntos convexos

Un subconjunto E de un espacio vectorial X es convexo cuando:

$$x, y \in E \implies (1-t)x + ty \in E \quad \forall t \in [0,1]$$

Ejemplos de conjuntos conexos

- Todo subconjunto convexo de un espacio normado es conexo
- Las bolas de un espacio normado son conjuntos convexos, luego conexos
- E espacio métrico, C, D subconjuntos conexos de E

$$C \cap D \neq \emptyset \implies C \cup D \text{ conexo}$$