TEMA 3: Hipercuádricas Afines

La geometría griega se fundamentó en el uso de la regla y el compás, esto es, se centró esencialmente en aquellas construcciones basadas en la recta y el círculo. El trasfondo analítico detrás de todo ello son las ecuaciones lineales y cuadráticas. Con esto queremos decir que los griegos resolvieron mediante la geometría axiomática o sintética euclidiana problemas que con una fomulación moderna o cartesiana son modelados a través de las ecuaciones de segundo grado. Las cónicas son los objetos naturales desde este punto de vista ya que se generan cortando el cono (superficie de revolución basada en la recta y la circunferencia) con planos.

Apolonio de Perga (Perga, c. 262 - Alejandría, c. 190 a. C.), geómetra y astrónomo griego, recopiló en su obra *Sobre las secciones cónicas* todo el conocimiento clásico sobre este tipo de objetos, ofreciendo una descripción geométrica tan precisa de los mismos que ha llegado a ser considerado un precursor de la geometría cartesiana. A él debemos la solución completa de la ecuación general de segundo grado por medio de la geometría, y la introducción de la nomenclatura clásica de elipse, parábola e hipérbola para las cónicas.

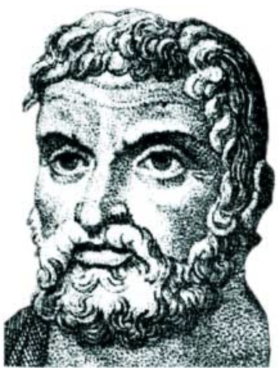


Figura 17: Apolonio de Perga

En esta sección vamos a presentar el tratamiento moderno de las hipercuádricas en espacios afines. Formalmente, las hipercuádricas se definirán como los ceros de los polinomios de grado dos en varias variables, y el objetivo fundamental de su estudio será la clasificación. Para ello tendremos que profundizar en aquellas herramientas del álgebra lineal relacionadas con procesos de diagonalización de matrices. Fundamentalmente probaremos que toda matríz simétrica se puede ser diagonalizada por congruencia a través de matrices del grupo afín.

4. DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES

Comenzaremos repasando la teoría clásica de diagonalización matrices y fijaremos alguna notación.

En lo que sigue denotaremos por $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ al espacio de las matrices cuadradas reales de orden n.

Definición 4.1 *Una matriz $D = (d_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ (espacio de las matrices cuadradas de orden n) se dice* diagonal *si $d_{i,j} = 0$, $i \neq j$. Si $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ ($k \leq n$) son* *números reales distintos y $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ son enteros positivos tales que $\sum_{i=1}^k n_i = n$, denotaremos por $D\big(a_1^{(n_1)}, \ldots, a_k^{(n_k)}\big)$ a la matriz diagonal $(d_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}$ con entradas ordenadas en la diagonal*

$$(d_{1,1}, \ldots, d_{n,n}) = \big((a_1, \overset{n_1}{\ldots}, a_1), \ldots, (a_i, \overset{n_i}{\ldots}, a_i), \ldots, (a_k, \overset{n_k}{\ldots}, a_k)\big),$$

esto es,

$$D\big(a_1^{(n_1)}, \ldots, a_k^{(n_k)}\big) = \left(\begin{array}{c|c|c} a_1\mathrm{I}_{n_1} & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & \cdots & a_k\mathrm{I}_{n_k} \end{array}\right)$$

Definición 4.2 *Dada una matriz $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ cuadrada de orden n, un número $a \in \mathbb{R}$ se dice un valor propio de C si existe $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que $C \cdot y = ay$. A tal vector $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ se le denominará vector propio del valor propio a. Si a es un valor propio de C, al subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$*

$$V_a = \{y \in \mathbb{R}^n \colon C \cdot y = a\, y\}$$

se le llamará subespacio propio de a.

Los valores propios de C coinciden son las raíces reales del polinomio característico

$$p_C(x) = \det\big(C - x \cdot \mathrm{I}_n\big)$$

de C. La *multiplicidad algebraica* de un valor propio a de C es, por definición, la multiplicidad $m_a \geq 1$ de a como raiz de $p_C(x)$. Asimismo, el entero $\dim V_a \geq 1$ es conocido como la *multiplicidad geométrica* de a. No es difícil ver que $\dim V_a \leq m_a$ para todo valor propio a de C.

Definición 4.3 (Semejanza de matrices) *Dos matrices C_1 y C_2 se dicen* semejantes *si existe $Q \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ tal que $Q^{-1}C_1Q = C_2$. La relación binaria de semejanza en $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ es de equivalencia. Una matriz $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ se dice* diagonalizable por semejanza *si existe $Q \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ tal que $Q^{-1}CQ$ es diagonal.*

No es difícil probar que:

Teorema 4.4 *Una matriz $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ es diagonalizable por semejanza si y solo si*

$$\sum_{i=1}^k \dim V_{a_i} = n,$$

donde $a_1, \ldots, a_k$ son sus valores propios. De forma equivalente, $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ es diagonalizable por semejanza si y solo si si $p_C(x)$ descompone en $\mathbb{R}$ y $m_a = \dim V_a$ para todo valor propio a de C.

Como consecuencia del Teorema 4.4, dos matrices C_1 y C_2 diagonalizables son semejantes si y solo si tienen los mismos valores propios con las mismas multiplicidades.

El procedimiento estándar para la diagonalización por semejanza de una matriz $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ es el siguiente. Resolviendo la ecuación $p_C(x) = 0$ se calculan los distintos valores propios $a_1, \ldots, a_k$ de C, y para cada a_i se determina una base $B_i = \{u_1^i, \ldots, u_{n_i}^i\}$

del subespacio propio V_{a_i}, donde hemos escrito $n_i = \dim V_{a_i}$. Finalmente se forma la matriz $Q \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ que distribuye por columnas los vectores de la base ordenada

$$B = B_1 \cup \ldots \cup B_k = \{u_1^1 \ldots, u_{n_1}^1, \ldots, u_1^k, \ldots, u_{n_i}^k\}$$

de $\mathbb{R}^n$, en la que claramente $Q^{-1}CQ = D\big(a_1^{(n_1)}, \ldots, a_k^{(n_k)}\big)$.

En lo que sigue denotemos por

$$\mathrm{S}_n(\mathbb{R}) = \{C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \colon C = C^{\mathrm{t}}\}$$

al espacio de las matrices simétricas. El siguiente teorema recuerda que toda matriz simétrica es diagonalizable por semejanza, siendo sus subespacios propios mutuamente ortogonales en el espacio vectorial euclídeo $(\mathbb{R}^n, \langle\, , \rangle)$, donde $\langle\, , \rangle$ es el producto escalar clásico

$$\langle x, y \rangle = x \cdot y^{\mathrm{t}}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Teorema 4.5 *Si $C \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ es una matriz simétrica entonces:*

- *C tiene al menos un valor propio real.*
- *Si $a \in \mathbb{R}$ es valor propio de C y $V_a^\perp \subseteq \mathbb{R}^n$ es el subespacio ortogonal a V_a en $(\mathbb{R}^n, \langle\, , \rangle)$ entonces $C \cdot v \in V_a^\perp$ para todo $v \in V_a^\perp$.*
- *Si $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ son valores propios de C distintos entonces $V_{a_1} \perp V_{a_2}$ en $(\mathbb{R}^n, \langle\, , \rangle)$.*
- *C es diagonalizable por semejanza.*

Dos matrices simétricas $C_1, C_2 \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ se dicen *ortogonalmente equivalentes* si existe $P \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ tal que $C_2 = P^t \cdot C_1 \cdot P$. Como consecuencia de lo anterior es posible la diagonalización ortogonal de cualquier matriz simétrica en los términos que recoge el siguiente teorema.

Teorema 4.6 (Diagonalización ortogonal) *Toda matriz $C \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ es ortogonalmente equivalente a una matriz diagonal, esto es, existe una matriz $P \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ tal que*

$$P^{\mathrm{t}} \cdot C \cdot P = D\big(a_1^{(n_1)}, \ldots, a_k^{(n_k)}\big),$$

donde $a_1, \ldots, a_k$ son los valores propios de C y $n_1, \ldots, n_k$ sus correspondientes multiplicidades (geométricas o algebraicas, coinciden).

Del Teorema 4.6 se concluye que dos matrices simétricas son ortogonalmente equivalentes si y sólo si tienen polinomios característicos proporcionales, o equivalentemente, tienen los mismos valores propios con las mismas multiplicidades.

El procedimiento para realizar la diagonalización ortogonal $C \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ es el siguiente. Por el Teorema 4.5 la matriz C es diagonalizable por semejanza. Por el Teorema 4.4, el polinomio $p_C(x)$ descompone sobre $\mathbb{R}$ y podemos calcular sus distintas raíces $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ (valores propios de C). Para cada a_i buscamos una base $B_{a_i} = \{u_1^i, \ldots, u_{n_i}^i\}$ de V_{a_i} (escribimos $n_i = \dim V_{a_i}$), a la que sometemos al procedimiento de ortonormalización de Gram-Schmidt para el producto escalar $\langle\, , \rangle$ de $\mathbb{R}^n$, hasta generar una base ortonormal

$$B'_{a_i} = \{v_1^i, \ldots, v_{n_i}^i\}$$

de $(V_{a_i}, \langle\, , \rangle)$. Como

$$B' = B'_{a_1} \cup \ldots \cup B'_{a_k}$$

es una base ortonormal de $(\mathbb{R}^n, \langle\,,\,\rangle)$, entonces la matriz ortogonal $P \in \mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ que distribuye ordenadamente por columnas los vectores de B' satisface

$$P^{\mathrm{t}} \cdot C \cdot P = D\big(a_1^{(n_1)}, \ldots, a_k^{(n_k)}\big).$$

La diagonalización por congruencia es la más natural para el espacio de las matrices simétricas. Recordemos los conceptos fundamentales.

Definición 4.7 (Congruencia de matrices) *Dos matrices C_1 y C_2 se dicen* congruentes *si existe $Q \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ tal que $Q^{\mathrm{t}} C_1 Q = C_2$. La relación binaria de congruencia en $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ es de equivalencia. Una matriz $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ se dice* diagonalizable por congruencia *si existe $Q \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ tal que $Q^{\mathrm{t}} C Q$ es diagonal.*

Teorema 4.8 (Sylvester) *Para toda $C \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ existe $Q \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ tal que*

$$Q^{\mathrm{t}} \cdot C \cdot Q = D\big(1^{(t)}, (-1)^{(s)}, 0^{(c)}\big),$$

donde $c, s, t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $c + s + t = n$. (Si alguno de esos enteros es nulo no interviene en la matriz diagonal.) Además:

- *Si $D\big(1^{(t)}, (-1)^{(s)}, 0^{(c)}\big)$ y $D\big(1^{(t')}, (-1)^{(s')}, 0^{(c')}\big)$ son congruentes entonces $c = c'$, $s = s'$, $t = t'$. Por tanto, los números c, s, t de arriba son únicos y C es congruente a una única matriz diagonal con entradas 1, -1 y 0 ordenadas en la diagonal.*

  En particular $\mathrm{rang}(C) = s + t$.

- *Los números t y s de la forma de Sylvester de una matriz simétrica C coinciden con el número de raíces $+$ y $-$ de su polinomio característico $p_C(x)$, respectivamente, y el número c con la multiplicidad de 0 como raíz de $p_C(x)$.*

Definición 4.9 *Si $C \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$, la única matriz de la forma $D\big(1^{(t)}, (-1)^{(s)}, 0^{(c)}\big)$ congruente con C se la llama* matriz o forma de Sylvester *de C.*

Como consecuencia del Teorema 4.8, dos matrices C_1 y C_2 son congruentes si y solo si tienen la misma forma de Sylvester.

Si $C \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$, un procedimiento para realizar la diagonalización por congruencia que nos lleve a su forma de Sylvester es el siguiente. Como explicábamos arriba en el proceso de diagonalización ortogonal de C, primero generamos bases ortonormales

$$B'_{a_i} = \{v_1^i, \ldots, v_{n_i}^i\}$$

de $(V_{a_i}, \langle\,,\,\rangle)$ para cada $i = 1, \ldots, k$. Si $a_i \neq 0$, *normalizamos* cada v_j^i de B'_{a_i} multiplicando por el número real $\frac{1}{\sqrt{|a_i|}}$, formando la nueva base

$$B''_{a_i} = \{\frac{1}{\sqrt{|a_i|}} v_1^i, \ldots \frac{1}{\sqrt{|a_i|}} v_{n_i}^i\}$$

de V_{a_i}. Si 0 es uno de los valores propios de C el último paso para pasar de la base B'_0 a la base B''_0 en V_0 carece de sentido, y escribimos $B''_0 = B'_0$.

Finalmente se construye la matriz Q que distribuye por columnas de forma ordenada los vectores de la base ordenada

$$B'' = B''_{a_1} \cup \ldots \cup B''_{a_k}$$

de $\mathbb{R}^n$. Por construcción B'' es una base *ortogonal* de $(\mathbb{R}^n, \langle\,,\,\rangle)$ (ya que $B' = B'_{a_1} \cup \ldots \cup B'_{a_k}$ es ortonormal) y

$$Q^{\mathrm{t}} \cdot C \cdot Q = D\big(1^{(t)}, (-1)^{(s)}, 0^{(c)}\big),$$

si previamente hemos tenido la precaución de ordenar la lista de autovalores $a_1, \ldots, a_k$ de forma que aparezcan primero los positivos, después los negativos, y por último el 0.

4.1. Hipercuádricas afines

En lo que sigue $(\mathcal{A}, \overrightarrow{\mathcal{A}}, \vec{\ })$ será un espacio afín con $\dim \mathcal{A} = n$ y $\mathcal{R}$ un sistema de referencia en $\mathcal{A}$.

Definición 4.10 *Dada una matriz simétrica*

$$\widehat{C} = \left(\begin{array}{c|c} a & z^{\mathrm{t}} \\ \hline z & C \end{array}\right) \in \mathrm{S}_{n+1}(\mathbb{R}),$$

donde $a \in \mathbb{R}$*,* $z = (z_1, \ldots, z_n)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^n$*, y* $C = (c_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$*, y un sistema de referencia* $\mathcal{R}$ *en* $\mathcal{A}$*, el conjunto*

$$\boxed{H = \{p \in \mathcal{A} \colon \left(1, p_{\mathcal{R}}^{\mathrm{t}}\right) \cdot \widehat{C} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}} \end{pmatrix} = 0\}} \tag{4}$$

se dice ser la hipercuádrica *del espacio afín* $\mathcal{A}$ *asociada a la matriz simétrica* $\hat{C}$ *en el sistema de referencia* $\mathcal{R}$ *(o simplemente al par* $(\hat{C}, \mathcal{R})$*).*

En la anterior definición $p_{\mathcal{R}} = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{t}}$ indica las coordenadas del punto $p \in \mathcal{A}$ en $\mathcal{R}$ en *notación columna.*

Con el lenguaje de la Definición 4.10, se dice que $\widehat{C} = \left(\begin{array}{c|c} a & z^{\mathrm{t}} \\ \hline z & C \end{array}\right)$ es *una matriz de* H *en el sistema de referencia* $\mathcal{R}$, y que C es la *matriz del núcleo cuadrático* asociado a $\hat{C}$. Como la matriz $\lambda\hat{C}$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, determina igualmente el conjunto de puntos $H \subset \mathcal{A}$ por sus coordenadas en $\mathcal{R}$ (ver (4)), es conveniente definir

$$\boxed{M_{\mathcal{R}}(H) = \left\{\lambda\hat{C} \colon \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\}}$$

como el conjunto de matrices de la hipercuádrica H asociada a $(\hat{C}, \mathcal{R})$, y análogamente

$$\boxed{N_{\mathcal{R}}(H) = \left\{\lambda C \colon \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\}}$$

como el conjunto de los núcleos cuadráticos asociados a matrices de H en $M_{\mathcal{R}}(H)$.

Observación 4.11 *Nótese que el concepto de hipercuádrica no sólo refiere al conjunto* $H \subset \mathcal{A}$*, sino también a la matriz* $\hat{C}$ *que lo define en el sistema de referencia* $\mathcal{R}$*. Formalmente es apropiado identificar la hipercuádrica con el par* $(\hat{C}, \mathcal{R})$ *que la determina, o incluso con* $(M_{\mathcal{R}}(H), \mathcal{R})$*, aunque si no hay lugar para ambigüedades se piensa en ella como el subconjunto de puntos* $H \subset \mathcal{A}$*. No obstante como veremos más adelante esta mentalidad es en ocasiones imprecisa.*

Desarrollando (4), un cálculo elemental nos dice que el conjunto $H \subset \mathcal{A}$ consiste de los puntos de $p \in \mathcal{A}$ cuyas coordenadas $p_{\mathcal{R}}$ en $\mathcal{R}$ satisfacen la *ecuación cuadrática*

$$p_{\mathcal{R}}^{\mathrm{t}} \cdot C \cdot p_{\mathcal{R}} + 2\langle z, p_{\mathcal{R}}\rangle + a = 0,$$

o equivalentemente escribiendo $p_{\mathcal{R}} = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{t}}$

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_{i,j} x_i x_j + 2\sum_{i=1}^{n} z_i x_i + a = 0. \tag{5}$$

Por tanto los puntos de H se caracterizan en coordenadas en $\mathcal{R}$ como los ceros del polinomio de grado dos en n variables

$$P_{\hat{C}}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} c_{i,j} x_i x_j + 2\sum_{i=1}^{n} z_i x_i + a$$

asociado a la matriz simétrica $\hat{C} \in M_{\mathcal{R}}(H)$. Al igual que arriba, para cada $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ los ceros del polinomio cuadrático $\lambda P_{\hat{C}} = P_{\lambda \hat{C}}$ se corresponden con las coordenadas en $\mathcal{R}$ de los puntos de H. Denotaremos por

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(H) = \left\{\lambda P_{\hat{C}} \colon \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\}$$

a la familia de polinomios de $H = (\hat{C}, \mathcal{R})$.

Veamos que el sistema de referencia $\mathcal{R}$ utilizado para la definición de la hipercuádrica H es irrelevante, en el sentido de que en cualquier otro sistema de referencia $\mathcal{R}'$ los puntos de H se caracterizan en coordenadas en $\mathcal{R}'$ por una ecuación matricial (que dependerá de $\mathcal{R}'$) como la de (4), o equivalentemente, se corresponden con el conjunto de ceros de otro polinomio cuadrático (que dependerá de $\mathcal{R}'$) como el de (5).

Sea H la hipercuádrica en $\mathcal{A}$ con matriz

$$\widehat{C} = \left(\begin{array}{c|c} a & z^{\mathrm{t}} \\ \hline z & C \end{array}\right) \in M_{\mathcal{R}}(H)$$

en $\mathcal{R}$. Tomemos otro sistema de referencia $\mathcal{R}'$ y escribamos la matriz de cambio de sistema de referencia de $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}$ de la forma

$$M(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}', \mathcal{R}) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array}\right) \in \mathrm{Aff}_n(\mathbb{R}).$$

donde $A = M(\mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{A}}}, B', B)$ siendo B y B' las bases de las direcciones de $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$, respectivamente. Recordemos que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}} \end{pmatrix} = M(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}', \mathcal{R}) \begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}'} \end{pmatrix},$$

de donde sustituyendo el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}} \end{pmatrix}$ por la expresión

$$M(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}', \mathcal{R}) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}'} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}'} \end{pmatrix}$$

en (4) , deducimos que el conjunto H consiste de los puntos $p \in \mathcal{A}$ cuyas coordenadas $p_{\mathcal{R}'}$ en $\mathcal{R}'$ satisfacen $M(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}', \mathcal{R})^{\mathrm{t}} \cdot \hat{C} \cdot M(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}', \mathcal{R}) = 0$, esto es,

$$(1, p_{\mathcal{R}'}^{\mathrm{t}}) \cdot \left(\begin{array}{c|c} 1 & b^{\mathrm{t}} \\ \hline 0 & A^{\mathrm{t}} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} a & z^{\mathrm{t}} \\ \hline z & C \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}'} \end{pmatrix} = 0.$$

Desarrollando el anterior producto de matrices queda la ecuación

$$(1, p_{\mathcal{R}'}^{\mathrm{t}}) \cdot \left(\begin{array}{c|c} a + b^{\mathrm{t}} \cdot z + z^{\mathrm{t}} \cdot b + b^{\mathrm{t}} \cdot C \cdot b & z^{\mathrm{t}} \cdot A + b^{\mathrm{t}} \cdot C \cdot A \\ \hline A^{\mathrm{t}} \cdot z + A^{\mathrm{t}} \cdot C \cdot b & A^{\mathrm{t}} \cdot C \cdot A \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}'} \end{pmatrix} = 0,$$

donde en el cálculo hemos tenido en cuenta que $C^{\mathrm{t}} = C$.

Definiendo

$$\hat{C}' = \left(\begin{array}{c|c} 1 & b^{\mathrm{t}} \\ \hline 0 & A^{\mathrm{t}} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} a & z^{\mathrm{t}} \\ \hline z & C \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} a' & (z')^{\mathrm{t}} \\ \hline z' & C' \end{array}\right) \in \mathrm{S}_{n+1}(\mathbb{R}), \tag{6}$$

donde

$$\begin{aligned} a' &= a + b^{\mathrm{t}} \cdot z + z^{\mathrm{t}} \cdot b + b^{\mathrm{t}} \cdot C \cdot b \in \mathbb{R}, \\ z' &= A^{\mathrm{t}} \cdot z + A^{\mathrm{t}} \cdot C \cdot b \in \mathbb{R}^n, \\ C' &= A^{\mathrm{t}} \cdot C \cdot A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \end{aligned} \tag{7}$$

inferimos que H se describe en términos de coordenadas en $\mathcal{R}'$ como

$$H = \{p \in \mathcal{A} \colon \big(1, p_{\mathcal{R}'}^{\mathrm{t}}\big) \cdot \hat{C}' \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}'} \end{pmatrix} = 0\},$$

esto es, como los ceros del polinomio cuadrático

$$P_{\hat{C}'}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} c'_{i,j} x'_i x'_j + 2 \sum_{i=1}^{n} z'_i x'_i + a' = 0$$

donde hemos escrito $z' = (z'_1, \ldots, z'_n)$ y $C' = (c'_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}$.

A modo de resumen hemos probado que:

Proposición 4.12 *Si H es la hipercuádrica en $\mathcal{A}$ asociada al par $(\hat{C}, \mathcal{R} = \{p_0, B\})$ y $\mathcal{R}' = \{p'_0, B'\}$ es otro sistema de referencia en $\mathcal{A}$, entonces H es la hipercuádrica en $\mathcal{A}$ asociada al par $(\hat{C}', \mathcal{R}')$ donde*

$$\hat{C}' = M(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}', \mathcal{R})^{\mathrm{t}} \cdot \hat{C} \cdot M(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}', \mathcal{R}).$$

Además, si C es el núcleo cuadrático de $\hat{C}$ entonces

$$C' = M(\mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}, B', B)^{\mathrm{t}} \cdot C \cdot M(\mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}, B', B)$$

es el núcleo cuadrático de la matriz $\hat{C}'$. Los conjuntos $M_{\mathcal{R}'}(H), N_{\mathcal{R}'}(H)$, y $\mathcal{P}_{\mathcal{R}'}(H)$ de matrices, núcleos cuadráticos de matrices y polinomios de H asociados al par $(\hat{C}', \mathcal{R}')$ se definen de forma natural y satisfacen:

$$M_{\mathcal{R}'}(H) = M(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}', \mathcal{R})^{\mathrm{t}} \cdot M_{\mathcal{R}}(H) \cdot M(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}', \mathcal{R})$$

$$N_{\mathcal{R}'}(H) = M(\mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}, B', B)^{\mathrm{t}} \cdot N_{\mathcal{R}}(H) \cdot M(\mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}, B', B).$$

Como las matrices de cambio de sistema de referencia $M(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}', \mathcal{R})$ pertenecen al grupo afín $\mathrm{Aff}_n(\mathbb{R})$, la anterior observación expresa que las matrices que definen una hipercuádrica cambian *por congruencia en el grupo afín* al cambiar de sistema de referencia. Esto implica que sus rangos y formas de Sylvester, salvo revertir las cantidades de 1 y -1 en la diagonal, son universales (ver Teorema 4.8). Como consecuencia tenemos la siguiente proposición.

Proposición 4.13 *Dada una hipercuádrica $H \equiv (\hat{C}, \mathcal{R})$ en $\mathcal{A}$, se tiene que:*

(I) *El rango $R_H := \mathrm{rang}(\hat{C})$ es común a todas las matrices $\hat{C} \in M_{\mathcal{R}}(H)$, y por la Proposición 4.12 es común a todas las matrices en $M_{\mathcal{R}'}(H)$ para cualquier otro sistema de referencia $\mathcal{R}'$.*

(II) *Si $D\big(1^{(\hat{t})}, (-1)^{(\hat{s})}, 0^{(\hat{c})}\big)$ es la forma de Sylvester de una matriz $\hat{C} \in M_{\mathcal{R}}(H)$ para algún sistema de referencia $\mathcal{R}$, el número*

$$S_H := |\hat{t} - \hat{s}|$$

no depende ni de la matriz $\hat{C} \in M_{\mathcal{R}}(H)$, y por la Proposición 4.12 es común a todas las formas de Sylvester de matrices en $M_{\mathcal{R}'}(H)$ para cualquier otro sistema de referencia $\mathcal{R}'$.

(III) *El rango* $r_H := \mathrm{rang}(C)$ *es común a todas las matrices* $C \in N_{\mathcal{R}}(H)$*, y por la Proposición 4.12 es común a todas las matrices en* $N_{\mathcal{R}'}(H)$ *para cualquier otro sistema de referencia* $\mathcal{R}'$*.*

(IV) *Si* $D\big(1^{(t)}, (-1)^{(s)}, 0^{(c)}\big)$ *es la forma de Sylvester de una matriz* $C \in N_{\mathcal{R}}(H)$ *para algún sistema de referencia* $\mathcal{R}$*, el número*

$$s_H := |t - s|$$

no depende ni de la matriz $C \in N_{\mathcal{R}}(H)$*, y por la Proposición 4.12 es común a todas las formas de Sylvester de matrices en* $N_{\mathcal{R}'}(H)$ *para cualquier otro sistema de referencia* $\mathcal{R}'$*.*

La diferencia entre el número de 1 y el de -1 en la forma de Sylvester de una matriz simétrica A cambia de signo cuando se calculan para la matriz λA, $\lambda < 0$. Por ese motivo hemos definido S_H y s_H en valor absoluto en la anterior Proposición.

La siguiente definición jugará un papel importante.

Definición 4.14 *Dos hipercuádricas* $H_1 = (\hat{C}_1, \mathcal{R}_1)$*,* $H_2 = (\hat{C}_2, \mathcal{R}_2) \subseteq \mathcal{A}$ *se dicen* afínmente equivalentes *si satisface cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes:*

- *Existen sistemas de referencia* $\mathcal{R}$ *y* $\mathcal{R}'$ *de* $\mathcal{A}$ *en los que* $M_{\mathcal{R}}(H_1) = M_{\mathcal{R}'}(H_2)$*.*
- *Existen un sistema de referencia* $\mathcal{R}$ *de* $\mathcal{A}$ *y una matriz* $Q \in \mathrm{Aff}_n(\mathbb{R})$ *tales que* $Q^{\mathrm{t}} \cdot \hat{C} \cdot Q \in M_{\mathcal{R}}(H_2)$ *para toda* $\hat{C} \in M_{\mathcal{R}}(H_1)$*, o equivalentemente*

$$M_{\mathcal{R}}(H_2) = Q^{\mathrm{t}} \cdot M_{\mathcal{R}}(H_1) \cdot Q.$$

- *Para todo sistema de referencia* $\mathcal{R}$ *de* $\mathcal{A}$ *existe una matriz* $Q \in \mathrm{Aff}_n(\mathbb{R})$ *tal que* $Q^{\mathrm{t}} \cdot \hat{C} \cdot Q \in M_{\mathcal{R}}(H_2)$ *para toda* $\hat{C} \in M_{\mathcal{R}}(H_1)$*, o equivalentemente*

$$M_{\mathcal{R}}(H_2) = Q^{\mathrm{t}} \cdot M_{\mathcal{R}}(H_1) \cdot Q.$$

Aunque es algo rutinario, es importante comprobar que las condiciones anteriores son equivalentes entre sí. Las Proposiciones 4.12, 4.13 nos dan el siguiente corolario:

Corolario 4.15 *Si* H_1, H_2 *son hipercuádricas afínmente equivalentes en* $\mathcal{A}$ *entonces*

$$(R_{H_1}, r_{H_1}, S_{H_1}, s_{H_1}) = (R_{H_2}, r_{H_2}, S_{H_2}, s_{H_2}).$$

Es importante observar que las afinidades transforman hipercuádricas en hipercuádricas. En efecto, recordemos que dado un sistema de referencia $\mathcal{R}$ en $\mathcal{A}$ se tiene que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ f(p)_{\mathcal{R}} \end{pmatrix} = M(f, \mathcal{R}) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}} \end{pmatrix} \quad \forall p \in \mathcal{A}.$$

Por tanto, si H es la hipercuádrica asociada a $(\hat{C}, \mathcal{R})$,

$$p \in H \Longleftrightarrow (1, f(p)_{\mathcal{R}}) \cdot \big(M(f, \mathcal{R})^{-1}\big)^{\mathrm{t}} \cdot \hat{C} \cdot M(f, \mathcal{R})^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ f(p)_{\mathcal{R}} \end{pmatrix} = 0,$$

esto es, los puntos $f(p)$ de $f(H)$ se caracterizan por pertenecer a la hipercuádrica que en $\mathcal{R}$ está definida por la matriz $M(f^{-1}, \mathcal{R})^{\mathrm{t}} \cdot \hat{C} \cdot M(f^{-1}, \mathcal{R})$. Como conclusión, $f(H)$

es la hipercuádrica asociada al par $\big(M(f^{-1},\mathcal{R})^{\mathrm{t}}\cdot\hat{C}\cdot M(f^{-1},\mathcal{R}),\mathcal{R}\big)$, esto es, la que en coordenadas en $\mathcal{R}$ viene asociada a las matrices

$$M_{\mathcal{R}}(f(H))=\big\{\lambda\left(M(f^{-1},\mathcal{R})^{\mathrm{t}}\cdot\hat{C}\cdot M(f^{-1},\mathcal{R})\right):\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\big\}.$$

Esta información se suele escribir formalmente de la forma

$$M_{\mathcal{R}}\big(f(H)\big)=M(f^{-1},\mathcal{R})^{\mathrm{t}}\cdot M_{\mathcal{R}}(H)\cdot M(f^{-1},\mathcal{R}),$$

o equivalentemente,

$$M_{\mathcal{R}}(H)=M(f,\mathcal{R})^{\mathrm{t}}\cdot M_{\mathcal{R}}\big(f(H)\big)\cdot M(f,\mathcal{R}). \tag{8}$$

Como consecuencia de este cálculo, el concepto de equivalencia de hipercuádricas también se puede reformular en términos de afinidades.

Proposición 4.16 *Dos hipercuádricas $H_1=(\hat{C}_1,\mathcal{R}_1)$, $H_2=(\hat{C}_2,\mathcal{R}_2)\subseteq\mathcal{A}$ son equivalentes si y sólo si existe una afinidad $f\colon\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ tal que*

$$M_{\mathcal{R}}(H_2)=M(f^{-1},\mathcal{R})^{\mathrm{t}}\cdot M_{\mathcal{R}}(H_1)\cdot M(f^{-1},\mathcal{R})$$

para cualquier sistema de referencia $\mathcal{R}$ en $\mathcal{A}$ (en particular, $f(H_1)=H_2$).

Demostración : Fijemos $\mathcal{R}$ sistema de referencia en $\mathcal{A}$ arbitrario y tomemos $\hat{C}\in M_{\mathcal{R}}(H_1)$, $\hat{C}'\in M_{\mathcal{R}}(H_2)$. La equivalencia entre las hipercuádricas H_1 y H_2 se traduce en que existe $Q\in\mathrm{Aff}_n(\mathbb{R})$ tal que $\hat{C}'=\lambda(Q^{\mathrm{t}}\cdot\hat{C}\cdot Q)$ para algún $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, lo que por la fórmula (8) equivale a que $f(H_2)=H_1$ para la única afinidad $f\colon\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ con $M(f,\mathcal{R})=Q$. ■

Las hipercuádricas en $\mathbb{R}^2$ definidas por los polinomios

$$H_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x^2+1=0\},\quad H_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x^2+y^2+1=0\}$$

son vacías, y no son equivalentes pues sus matrices asociadas

$$\hat{C}_1=\left(\begin{array}{c|cc}1&0&0\\\hline 0&1&0\\0&0&0\end{array}\right)\in M_{\mathcal{R}_0}(H_1),\quad \hat{C}_2=\left(\begin{array}{c|cc}1&0&0\\\hline 0&1&0\\0&0&1\end{array}\right)\in M_{\mathcal{R}_0}(H_2)$$

no son congruentes. Sin embargo existe $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ afinidad tal que $f(H_1)=f(\varnothing)=\varnothing=H_2$ (cualquiera nos vale). La equivalencia de hipercuádricas es por tanto un concepto que afecta a las matrices que las definen, no sólo a los conjuntos de puntos que determinan (ver Observación 4.11).

4.2. Clasificación afín de las hipercuádricas

Ya estamos en condiciones de abordar el teorema fundamental de clasificación de hipercuádricas. La idea básica será probar que toda hipercuádrica H viene representada en un sistema de referencia adecuado por una matriz canónica simplificada. Necesitaremos para ello alguna notación.

En lo que sigue supondremos fijado un sistema de referencia $\mathcal{R}_0$ en $\mathcal{A}$ ($\dim\mathcal{A}=n$).

Definición 4.17 *Las hipercuádricas $H\subseteq\mathcal{A}$ con matrices respecto de $\mathcal{R}_0$ descritas en la siguiente lista se llamarán* hipercuádricas canónicas *en $\mathcal{A}$ con respecto a $\mathcal{R}_0$:*

(I) $M_{\mathcal{R}_0}(H) = \left\{ \lambda \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & D\big(1^{(t)}, (-1)^{(s)}, 0^{(c)}\big) \end{array} \right) : \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$, *o equivalentemente*

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(H) = \big\{\lambda(\sum_{i=1}^{t} x_i^2 - \sum_{j=1}^{s} x_j^2) = 0 \colon \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big\},$$

donde $t, s, c \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*,* $|t| + |s| > 0$*,* $t + s + c = n$ *y* $t - s \geq 0$*.*

En este caso $R_H = r_H = t + s$ *y* $S_H = s_H = t - s \geq 0$*.*

(II) $M_{\mathcal{R}_0}(H) = \left\{ \lambda \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & D\big(1^{(t)}, (-1)^{(s)}, 0^{(c)}\big) \end{array} \right) : \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$, *o equivalentemente*

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(H) = \big\{\lambda(1 + \sum_{i=1}^{t} x_i^2 - \sum_{j=1}^{s} x_j^2) = 0 \colon \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big\},$$

donde $t, s, c \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*,* $|t| + |s| > 0$*,* $t + s + c = n$*.*

En este caso $R_H = r_H + 1 = t + s + 1$*,* $S_H = |t - s + 1|$ *y* $s_H = |t - s|$*.*

(III) $M_{\mathcal{R}_0}(H) = \left\{ \lambda \left(\begin{array}{c|c} 0 & e_n^{\mathrm{t}} \\ \hline e_n & D\big(1^{(t)}, (-1)^{(s)}, 0^{(c)}\big) \end{array} \right) : \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$, *o equivalentemente*

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(H) = \big\{\lambda(2x_n + \sum_{i=1}^{t} x_i^2 - \sum_{j=1}^{s} x_j^2) = 0 \colon \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big\},$$

donde $e_n = (0, \ldots, 0, 1)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^n$ *es el último vector de la base canónica de* $\mathbb{R}^n$*,* $t, s, c \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*,* $|t| + |s| > 0$*,* $t + s + c = n$*,* $c > 0$ *y* $t - s \geq 0$*.*

En este caso $R_H = r_H + 2 = t + s + 2$ *y* $S_H = s_H = t - s \geq 0$*.*

Observación 4.18 *Obsérvese que las cuádruplas de números enteros* (R_H, r_H, S_H, s_H) *discriminan las matrices presentadas en la Definición 4.17, por lo que no hay dos matrices equivalences en la anterior lista (ver Corolario 4.15).*

Hablando a grosso modo, el siguiente teorema expresa que dada una matriz simétrica de orden $n+1$ (típicamente la de una hipercuádrica en un sistema de referencia de $\mathcal{A}$), ella o su opuesta pueden ser transformadas por congruencia en $\mathrm{Aff}_n(\mathbb{R})$ en una de las matrices canónicas del listado anterior.

Teorema 4.19 *Toda hipercuádrica* $H = (\hat{C}_0, \mathcal{R}_0)$ *de* $\mathcal{A}$ *es equivalente a una y sólo una de las hipercuádricas canónicas descritas en la Definición 4.17.*

Demostración: Lo que hemos de probar es que existe un sistema de referencia $\mathcal{R}$ de $\mathcal{A}$ en el que H puede ser representada por alguna de las matrices canónicas descritas en Definición 4.17- (I)-(II)-(III).

Tomemos una matriz que represente a H en $\mathcal{R}_0$, por ejemplo

$$\hat{C}_0 = \left(\begin{array}{c|c} a_0 & z_0^{\mathrm{t}} \\ \hline z_0 & C_0 \end{array} \right) \in M_{\mathcal{R}_0}(H).$$

Recordemos que, dado un sistema de referencia $\mathcal{R}_1$ con $M(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b_1 & A_1 \end{array}\right)$, la matriz $\left(\begin{array}{c|c} 1 & b_1^{\mathrm{t}} \\ \hline 0 & A_1^{\mathrm{t}} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} a_0 & z_0^{\mathrm{t}} \\ \hline z_0 & C_0 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b_1 & A_1 \end{array}\right) \in M_{\mathcal{R}_1}(H)$, esto es,

$$\left(\begin{array}{c|c} a_0 + b_1^{\mathrm{t}} \cdot z_0 + z_0^{\mathrm{t}} \cdot b_1 + b_1^{\mathrm{t}} \cdot C_0 \cdot b_1 & z_0^{\mathrm{t}} \cdot A_1 + b_1^{\mathrm{t}} \cdot C_0 \cdot A_1 \\ \hline A_1^{\mathrm{t}} \cdot z_0 + A_1^{\mathrm{t}} \cdot C_0 \cdot b_1 & A_1^{\mathrm{t}} \cdot C_0 \cdot A_1 \end{array}\right) \in M_{\mathcal{R}_1}(H).$$

Por el Teorema 4.8, podemos elegir $A_1 \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ tal que

$$A_1^{\mathrm{t}} \cdot C_0 \cdot A_1 = D\big(1^{(t)}, (-1)^{(s)}, 0^{(c)}\big),$$

donde , $|t| + |s| > 0$ ya que H es una hipercuádrica.

Fijada esta A_1, un cálculo directo nos dice que

$$A_1^{\mathrm{t}} \cdot z_0 + A_1^{\mathrm{t}} \cdot C \cdot b_1 = A_1^{\mathrm{t}} \cdot z_0 + D\big(1^{(t)}, (-1)^{(s)}, 0^{(c)}\big) \cdot (A_1^{-1} \cdot b_1).$$

Escribamos

$$A_1^{\mathrm{t}} \cdot z_0 = \left(\begin{array}{c} z' \\ \hline z_1 \end{array}\right), \quad z' \in \mathbb{R}^{t+s}, z_1 \in \mathbb{R}^c,$$

llamemos $x' \in \mathbb{R}^{t+s}$ al único vector tal que

$$z' + D\big(1^{(t)}, (-1)^{(s)}\big) \cdot x' = 0 \in \mathbb{R}^{t+s},$$

y usando la regularidad A_1 elijamos $b_1 \in \mathbb{R}^n$ el único vector tal que

$$A_1^{-1} \cdot b_1 = \left(\begin{array}{c} x' \\ \hline 0 \end{array}\right) \in \mathbb{R}^n.$$

Para esta elección de b_1 se tiene que

$$A_1^{\mathrm{t}} \cdot z_0 + A_1^{\mathrm{t}} \cdot C \cdot b_1 = \left(\begin{array}{c} z' \\ \hline z_1 \end{array}\right) + D\big(1^{(t)}, (-1)^{(s)}, 0^{(c)}\big) \cdot \left(\begin{array}{c} x' \\ \hline 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline z_1 \end{array}\right).$$

En el sistema de referencia $\mathcal{R}_1$ determinado por la condición $M(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b_1 & A_1 \end{array}\right)$ queda

$$\left(\begin{array}{c|c|c} a_1 & 0 & z_1^{\mathrm{t}} \\ \hline 0 & D\big(1^{(t)}, (-1)^{(s)}\big) & 0 \\ \hline z_1 & 0 & 0 \end{array}\right) \in M_{\mathcal{R}_1}(H),$$

donde

$$a_1 = a_0 + b_1^{\mathrm{t}} \cdot z_0 + z_0^{\mathrm{t}} \cdot b_1 + b_1^{\mathrm{t}} \cdot C_0 \cdot b_1, \quad \left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline z_1 \end{array}\right) = A_1^{\mathrm{t}} \cdot z_0 + A_1^{\mathrm{t}} \cdot C_0 \cdot b_1.$$

Si $a_1 = 0 \in \mathbb{R}$ y $z_1 = 0 \in \mathbb{R}^c$, se sigue el caso (I). Obsérvese que podemos garantizar que $s_H = t - s \geq 0$ sin más que cambiar de inicio $\left(\begin{array}{c|c} a_0 & z_0^{\mathrm{t}} \\ \hline z_0 & C_0 \end{array}\right) \in M_{\mathcal{R}_0}(H)$ por su matriz opuesta.

Si $a_1 \neq 0$ y $z_1 = 0 \in \mathbb{R}^c$ se sigue el caso (II). En efecto, al igual que antes salvo cambiar al inicio $\left(\begin{array}{c|c} a_0 & z_0^{\mathrm{t}} \\ \hline z_0 & C_0 \end{array}\right) \in M_{\mathcal{R}_0}(H)$ por su opuesta podemos suponer $a_1 > 0$. Considerando el sistema de referencia $\mathcal{R}_2$ para el que

$$M(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \sqrt{a_1}\, \mathrm{I}_n \end{array}\right)$$

y usando que

$$\left(\begin{array}{c|c|c} a_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & D\big(1^{(t)},(-1)^{(s)}\big) & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \in M_{\mathcal{R}_1}(H),$$

de la fórmula $M_{\mathcal{R}_2}(H) = M(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1)^{\mathrm{t}} \cdot M_{\mathcal{R}_1}(H) \cdot M(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1)$ deducimos que

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \sqrt{a_1}\,\mathrm{I}_n \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c|c} a_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & D\big(1^{(t)},(-1)^{(s)}\big) & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \sqrt{a_1}\,\mathrm{I}_n \end{array}\right) \in M_{\mathcal{R}_2}(H),$$

esto es,

$$a_1 \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & D\big(1^{(t)},(-1)^{(s)} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \in M_{\mathcal{R}_2}(H).$$

Llegamos a la matriz canónica del caso (II) (obsérvese que en este caso no podemos garantizar que $t-s \geq 0$ por la rigidez que impone la condición $a_1 > 0$ anterior).

Finalmente supongamos que $z_1 \neq 0$, y observemos de nuevo que salvo cambiar al principio $\left(\begin{array}{c|c} a_0 & z_0^{\mathrm{t}} \\ \hline z_0 & C_0 \end{array}\right) \in M_{\mathcal{R}_0}(H)$ por su matriz opuesta podemos suponer que $s_H = t-s \geq 0$. Consideremos ahora un sistema de referencia $\mathcal{R}_2$ para el que

$$M(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1) = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{I}_{t+s} & 0 \\ \hline b_2 & 0 & A_2 \end{array}\right),$$

donde $b_2 \in \mathbb{R}^c$ y $A_2 \in \mathrm{GL}(c, \mathbb{R})$ se determinarán posteriormente. Un cálculo directo siguiendo la fórmula

$$M_{\mathcal{R}_2}(H) = M(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1)^{\mathrm{t}} \cdot M_{\mathcal{R}_1}(H) \cdot M(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1)$$

nos da que

$$\left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{I}_{t+s} & 0 \\ \hline b_2 & 0 & A_2 \end{array}\right)^{\mathrm{t}} \cdot \left(\begin{array}{c|c|c} a_1 & 0 & z_1^{\mathrm{t}} \\ \hline 0 & D\big(1^{(t)},(-1)^{(s)}\big) & 0 \\ \hline z_1 & 0 & 0 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{I}_{t+s} & 0 \\ \hline b_2 & 0 & A_2 \end{array}\right) \in M_{\mathcal{R}_2}(H),$$

esto es,

$$\left(\begin{array}{c|c|c} a_2 & 0 & z_2^{\mathrm{t}} \\ \hline 0 & D\big(1^{(t)},(-1)^{(s)}\big) & 0 \\ \hline z_2 & 0 & 0 \end{array}\right) \in M_{\mathcal{R}_2}(H),$$

donde $a_2 = a_1 + b_2^{\mathrm{t}} \cdot z_1 + z_1^{\mathrm{t}} \cdot b_2$ y $z_2 = A_2^{\mathrm{t}} \cdot z_1$.

Como $z_1 \neq 0$ siempre podemos encontrar una matriz $A_2 \in \mathrm{Gl}(c, \mathbb{R})$ tal que

$$z_2 = A_2^{\mathrm{t}} \cdot z_1 = e_d = (0, \ldots, 0, 1)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^d$$

sea el último vector de la base canónica de $\mathbb{R}^d$. Una vez fijada esta matriz A_2, elegimos cualquier $b_2 \in \mathbb{R}^c$ para que

$$a_2 = a_1 + b_2^{\mathrm{t}} \cdot z_1 + z_1^{\mathrm{t}} \cdot b_2 = 0.$$

Con estas elecciones nos quedaría finalmente

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & e_n^{\mathrm{t}} \\ \hline e_n & D\big(1^{(t)},(-1)^{(s)},0^{(c)}\big) \end{array}\right) \in M_{\mathcal{R}_2}(H),$$

lo que nos lleva al caso (III) y concluye la prueba.

■

Observación 4.20 *La parte de la prueba final correspondiente al caso* (III) *puede realizarse de otra forma alternativa más útil para los ejercicios prácticos.*

En efecto, como en $\mathcal{R}_1$ sabemos que

$$\left(\begin{array}{c|c|c} a_1 & 0 & z_1^{\mathrm{t}} \\ \hline 0 & D\big(1^{(t)}, (-1)^{(s)}\big) & 0 \\ \hline z_1 & 0 & 0 \end{array}\right) \in M_{\mathcal{R}_1}(H),$$

un punto $p \in \mathcal{A}$ pertenece a H si y solo si sus coordenadas $p_{\mathcal{R}_1} = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{t}}$ satisfacen

$$\sum_{i=1}^{\mathrm{t}} x_i^2 - \sum_{i=1}^{s} x_i^2 + 2\langle z_1, (x_{s+t+1}, \ldots, x_n)^{\mathrm{t}}\rangle + a_1 = 0.$$

Como $z_1 \in \mathbb{R}^c$ no es el vector nulo, el sistema de ecuaciones lineales

$$y_i = x_i, \quad i = 1, \ldots, n-1, \quad y_n = \langle z_1, (x_{s+t+1}, \ldots, x_n)^{\mathrm{t}}\rangle + \frac{1}{2}a_1,$$

son las ecuaciones analíticas del cambio de sistema de referencia de $\mathcal{R}_1$ a un sistema de referencia $\mathcal{R}_2$ en el que $p_{\mathcal{R}_2} = (y_1, \ldots, y_n)^{\mathrm{t}}$, justo el que matricialmente se determina por la expresión

$$M(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{I}_{t+s} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mathrm{I}_{c-1} & 0 \\ \hline \frac{1}{2}a_1 & 0 & z_1' & z_1'' \end{array}\right)$$

donde hemos escrito $z_1 = (z_1', z_1'') \in \mathbb{R}^{c-1} \times \mathbb{R}$. Claramente $p \in H$ si y solo si las coordenadas

$$p_{\mathcal{R}_2} = (y_1, \ldots, y_n)^{\mathrm{t}} \quad \text{satisfacen} \quad \sum_{i=1}^{\mathrm{t}} y_i^2 - \sum_{i=1}^{s} y_i^2 + 2y_n = 0,$$

de donde $M_{\mathcal{R}_2}(H)$ se corresponde con el caso (III) como habíamos afirmado.

4.2.1. Cónicas en un plano afín

En este apartado supondremos que $(\mathcal{A}, \overrightarrow{\ })$ es un plano afín: $\dim \mathcal{A} = 2$. Recordemos que en un plano afín las hipercuádricas reciben el nombre de *cónicas*. Nuestra intención es describir la tabla de la clasificación afín, salvo equivalencias, de las cónicas de $\mathcal{A}$. No vamos a hacer nada nuevo, solo particularizar la información que nos da el teorema de clasificación general Teorema 4.19 y recordar alguna notación clásica.

Para ello fijemos una referencia $\mathcal{R}_0$ en $\mathcal{A}$ y consideremos las cónicas canónicas relativas a $\mathcal{R}_0$ descritas en Definicion 4.17. A la luz del Teorema 4.19, toda cónica $H \subseteq \mathcal{A}$ es equivalente a una única de las cónicas canónicas que se listan a continuación, representada cada una de ellas por su matríz y ecuación analítica (polinomio cuadrático) en coordenadas $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ respecto de $\mathcal{R}_0$:

- Caso (I), $R_H = r_H = 1$, $S_H = s_H = 1$ ($t = 1$, $s = 0$):

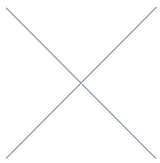
$$\left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \text{ecuación} \qquad x^2 = 0 \qquad \text{(recta doble)}.$$

- Caso (I), $R_H = r_H = 2$, $S_H = s_H = 2$ ($t = 2$, $s = 0$):

$$\left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad x^2 + y^2 = 0 \quad \text{(punto).}$$

- Caso (I), $R_H = r_H = 2$, $S_H = s_H = 0$ ($t = 1$, $s = 1$):

$$\left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad x^2 - y^2 = 0 \quad \text{(par de rectas secantes).}$$



- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 2$, $S_H = s_H - 1 = 1$ ($t = 1$, $s = 0$):

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad x^2 + 1 = 0 \quad \text{(vacío).}$$

- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 2$, $S_H = s_H - 1 = 0$ ($t = 0$, $s = -1$):

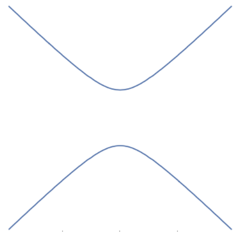
$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad 1 - y^2 = 0 \quad \text{(par de rectas paralelas).}$$

- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 3$, $S_H = s_H + 1 = 3$ ($t = 2$, $s = 0$):

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad 1 + x^2 + y^2 = 0 \quad \text{(vacío).}$$

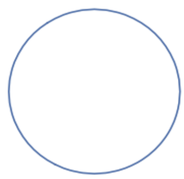
- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 3$, $S_H = s_h + 1 = 1$ ($t = 1$, $s = 1$):

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad 1 + x^2 - y^2 = 0 \quad \text{(hipérbola).}$$



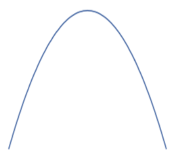
- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 3$, $S_H = s_H - 1 = 1$ ($t = 0$, $s = 2$):

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad 1 - x^2 - y^2 = 0 \quad \text{(elipse).}$$



- Caso (III), $R_H = r_H + 2 = 3$, $S_H = s_H = 1$ ($t = 1$, $s = 0$):

$$\left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad x^2 + 2y = 0 \quad \text{(parábola).}$$



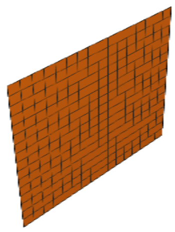
	Tipo (I) $R_H = r_H = 1$	**Tipo (I)** $R_H = r_H = 2$	**Tipo (II)** $R_H = r_H + 1 = 2$	**Tipo (II)** $R_H = r_H + 1 = 3$	**Tipo (III)** $R_H = r_H + 2 = 3$
$S_H = s_H = 0$		Rectas secantes			
$S_H = s_H = 1$	Recta doble				
$S_H = s_H = 2$		Punto			
$S_H = s_H - 1 = 0$			Rectas paralelas		
$S_H = s_H - 1 = 1$				Elipse	
$S_H = s_H - 1 = 2$				Vacío	
$S_H = s_H + 1 = 1$				Hipérbola	
$S_H = s_H + 1 = 2$			Vacío		
$S_H = s_H = 1$					Parábola

4.2.2. Cuádricas en un espacio afín tridimensional

En este apartado supondremos que $(\mathcal{A}, \overrightarrow{\ })$ tiene $\dim \mathcal{A} = 3$. En este caso, las hipercuádricas de $\mathcal{A}$ reciben el nombre de *cuádricas*. Al igual que en al caso de las cónicas, vamos a describir la tabla de la clasificación afín, salvo equivalencias, de las cuádricas de $\mathcal{A}$. Para ello fijaremos una referencia $\mathcal{R}_0$ en $\mathcal{A}$ y consideraremos las cuádricas canónicas relativas a $\mathcal{R}_0$ descritas en Definicion 4.17. A la luz del Teorema 4.19, toda cuádricas $H = (\hat{C}_0, \mathcal{R}_0)$ en $\mathcal{A}$ es equivalente a una única de las cuádricas canónicas que se listan a continuación, representada cada una de ellas por su matríz y ecuación analítica (polinomio cuadrático) en coordenadas $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ respecto de $\mathcal{R}_0$:

- Caso (I), $R_H = r_H = 1$, $S_H = s_H = 1$ $(t = 1,\ s = 0)$:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \text{ecuación} \qquad x^2 = 0 \qquad \text{(plano doble)}.$$

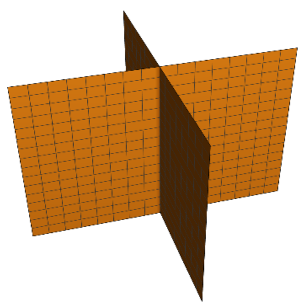


- Caso (I), $R_H = r_H = 2$, $S_H = s_H = 2$ $(t = 2,\ s = 0)$:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \text{ecuación} \qquad x^2 + y^2 = 0 \qquad \text{(recta)}.$$

- Caso (I), $R_H = r_H = 2$, $S_H = s_H = 0$ $(t = 1,\ s = 1)$:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \text{ecuación} \qquad x^2 - y^2 = 0 \qquad \text{(par de planos secantes)}.$$

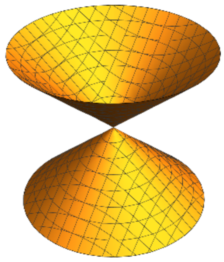


- Caso (I), $R_H = r_H = 3$, $S_H = s_H = 3$ $(t = 3,\ s = 0)$:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{ecuación} \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 0 \qquad \text{(punto)}.$$

- Caso (I), $R_H = r_H = 3$, $S_H = s_H = 1$ $(t = 2,\ s = 1)$:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad x^2 + y^2 - z^2 = 0 \quad \text{(cono).}$$



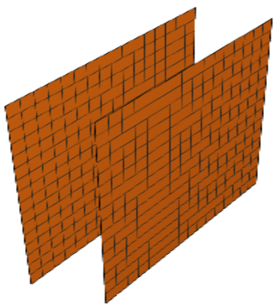
Tipo (I)	$R_H = r_H = 1$	$R_H = r_H = 2$	$R_H = r_H = 3$
$S_H = s_H = 0$		Planos secantes	
$S_H = s_H = 1$	Plano doble		Cono
$S_H = s_H = 2$		Recta	
$S_H = s_H = 3$			Punto

- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 2$, $S_H = s_H + 1 = 2$ $(t = 1,\ s = 0)$:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad 1 + x^2 = 0 \quad \text{(vacío).}$$

- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 2$, $S_H = s_H - 1 = 0$ $(t = 0,\ s = 1)$:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad 1 - x^2 = 0 \quad \text{(par de planos paralelos).}$$

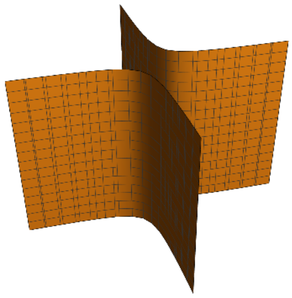


- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 3$, $S_H = s_H + 1 = 3$ $(t = 2,\ s = 0)$:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad 1 + x^2 + y^2 = 0 \quad \text{(vacío).}$$

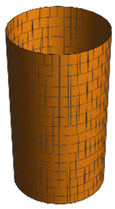
- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 3$, $S_H = s_H + 1 = 1$ ($t = 1$, $s = 1$):

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \text{ecuación} \qquad 1 + x^2 - y^2 = 0 \qquad \text{(cilindro hiperbólico).}$$



- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 3$, $S_H = s_H - 1 = 1$ ($t = 0$, $s = 2$):

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \text{ecuación} \qquad 1 - x^2 - y^2 = 0 \qquad \text{(cilindro elíptico).}$$

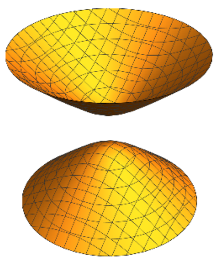


- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 4$, $S_H = s_H + 1 = 4$ ($t = 3$, $s = 0$):

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{ecuación} \qquad 1 + x^2 + y^2 + z^2 = 0 \qquad \text{(vacío).}$$

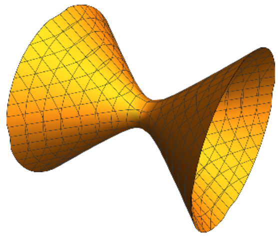
- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 4$, $S_H = s_H + 1 = 2$ ($t = 2$, $s = 1$):

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \qquad \text{ecuación} \qquad 1 + x^2 + y^2 - z^2 = 0 \qquad \text{(hiperboloide de dos hojas).}$$



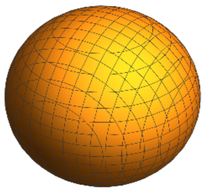
- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 4$, $S_H = s_H - 1 = 0$ ($t = 1$, $s = 2$):

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad 1 + x^2 - y^2 - z^2 = 0 \quad \text{(hiperboloide de una hoja).}$$



- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 4$, $S_H = s_H - 1 = 2$ ($t = 0$, $s = 3$):

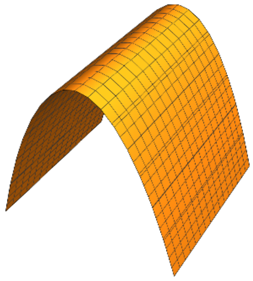
$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad 1 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \quad \text{(elipsoide).}$$



Tipo (II)	$R_H = r_H + 1 = 2$	$R_H = r_H + 1 = 3$	$R_H = r_H + 1 = 4$
$S_H = s_H + 1 = 1$		Cilindro hiperbólico	
$S_H = s_H + 1 = 2$	vacío		Hiperboloide de dos hojas
$S_H = s_H + 1 = 3$		vacío	
$S_H = s_H + 1 = 4$			vacío
$S_H = s_H - 1 = 0$	Planos paralelos		Hiperboloide de una hoja
$S_H = s_H - 1 = 1$		Cilindro elíptico	
$S_H = s_H - 1 = 2$			Elipsoide

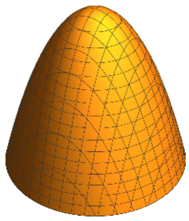
- Caso (III), $R_H = r_H + 2 = 3$, $S_H = s_H = 1$ ($t = 1$, $s = 0$):

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad x^2 + 2z = 0 \quad \text{(cilindro parabólico).}$$



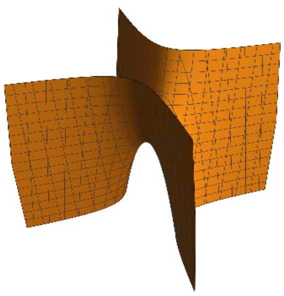
- Caso (III), $R_H = r_H + 2 = 4$, $S_H = s_H = 2$ ($t = 1$, $s = 0$):

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad x^2 + y^2 + 2z = 0 \quad \text{(paraboliode elíptico).}$$



- Caso (III), $R_H = r_H + 2 = 4$, $S_H = s_H = 0$ ($t = 1$, $s = 1$):

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad x^2 - y^2 + 2z = 0 \quad \text{(paraboliode hiperbólico).}$$



Tipo (III)	$R_H = r_H + 2 = 3$	$R_H = r_H + 2 = 4$
$S_H = s_H = 0$		Paraboliode hiperbólico
$S_H = s_H = 1$	Cilindro parabólico	
$S_H = s_H = 2$		Paraboliode elíptico

4.2.3. Algoritmo para la clasificación afín de hipercuádricas

Expliquemos el procedimiento práctico general para la clasificación afín de una hipercuádrica de forma sencilla. Entenderemos por clasificar afínmente una hipercuádrica $H = (\hat{C}, \mathcal{R}_0)$ en $\mathcal{A}$ el encontrar la hipercuádrica canónica respecto de un sistema de referencia fijado $\mathcal{R}_0$ en $\mathcal{A}$, tabuladas en Definicion 4.17, a la que H es equivalente.

La herramienta más útil para este cálculo es la Regla de Descartes sobre el número de raíces positivas de un polinomio. Recordemos su enunciado:

Teorema 4.21 (Regla de Descartes) *El número de raíces positivas contadas con multiplicidad de un polinomio con coeficientes reales es, como máximo, el número de cambios de signo de la secuencia ordenada (de mayor a menor exponente) de sus coeficientes no nulos.*

Por ejemplo, el polinomio $p(x) = 3x^5 - x^3 - 2x^2 + 4x - 6$ tiene por coeficientes no nulos ordenados de mayor a menor exponente a $3, -1, -2, 4, -6$. En esa secuencia se observan tres cambios de signo (de 3 a -1, de -2 a 4 y de 4 a -6), por lo que a lo más puede tener tres raíces positivas. Si consideramos $q(x) = p(-x) = 3x^5 + x^3 - 2x^2 - 4x - 6$, la misma regla nos dice que $q(x)$ tiene a lo más una raíz positiva, esto es, $p(x)$ tiene a lo más una raíz negativa. Por tanto $p(x)$ tiene a lo más cuatro raíces, y en particular no descompone sobre $\mathbb{R}$.

Genéricamente, cuando $p(x)$ es el polinomio característico de una matriz simétrica, las raíces no nulas detectadas por regla de Descartes para $p(x)$ y $p(-x)$ (positivas y negativas) son todas las raices no nulas que posee $p(x)$ (que como bien sabemos descompone sobre $\mathbb{R}$). En este contexto puede ayudar el siguiente corolario.

Corolario 4.22 *Sea $p(x)$ un polinomio con coeficientes reales de grado $n \geq 1$ satisfaciendo:*

- *$p(x)$ descompone en el cuerpo de los números reales (por ejemplo, si $p(x)$ es el polinomio característico de una matriz simétrica real).*
- *$p(x)$ tiene a lo más $t \geq 0$ raíces positivas contadas con multiplicidad (por ejemplo, detectadas por aplicación de la Regla de Descartes a $p(x)$).*
- *$p(x)$ tiene a lo más $s \geq 0$ raíces negativas contadas con multiplicidad (por ejemplo, detectadas por aplicación de la Regla de Descartes a $p(-x)$).*
- *$x = 0$ es raíz de $p(x)$ con multiplicidad $c \geq 0$.*
- *$t + s + c = n$.*

Entonces $p(x)$ tiene exactamente t raíces positivas y s raíces negativas contadas con multiplicidad.

El algoritmo general para clasificar una hipercuádrica $H \subseteq \mathcal{A}$ es el siguiente. Primero determinamos una matriz $\hat{C} \in M_{\mathcal{R}_0}(H)$ que represente a H en $\mathcal{R}_0$ y llamamos $C \in N_{\mathcal{R}_0}(H)$ a su correspondiente núcleo cuadrático:

$$\hat{C} = \left(\begin{array}{c|c} a & z^{\mathrm{t}} \\ \hline z & C \end{array} \right) \in M_{\mathcal{R}_0}(H).$$

A continuación calculamos los rangos R_H de $\hat{C}$ y r_H de C. Si $R_H = r_H$ estamos en el caso (I), si $R_H = r_H + 1$ en el caso (II), y si $R_H = r_H + 2$ en el caso (III). Teniendo en cuenta el Teorema 4.8 podemos proceder así:

- *Caso* (I) *($R_H = r_H$):* Calculamos el polinomio característico $p(x)$ de C y determinamos la distribución de signos de sus raíces. Realmente sólo nos interesa conocer los números t de raíces positivas y s de raíces negativas de $p(x)$; para ello nos ayudamos de la Regla de Descartes. Salvo cambiar $\hat{C}$ por $-\hat{C} \in M_{\mathcal{R}_0}(H)$ siempre podemos conseguir que $s_H = t - s \geq 0$, en cualquier caso $S_H = s_H = |t - s|$ determina unívocamente a que hipercuádrica canónica es H equivalente.

- *Caso* (II) *($R_H = r_H + 1$):* Calculamos los polinomios característicos $p(x)$ de C y $\widehat{p}(x)$ de $\hat{C}$, y determinamos la distribución de signos de sus raíces. Sólo nos interesan los números t de raíces positivas y s de raíces negativas de $p(x)$, y los números $\widehat{t}$ de raíces positivas y $\widehat{s}$ de raíces negativas de $\widehat{p}(x)$ (en ambos casos nos ayudamos de la Regla de Descartes). Salvo cambiar $\hat{C}$ por $-\hat{C} \in M_{\mathcal{R}_0}(H)$ siempre podemos conseguir que $\widehat{t} = t+1$ y $\widehat{s} = s$, en cualquier caso $S_H = |\hat{t} - \hat{s}|$ y $s_H = |t - s|$ determinan unívocamente a que hipercuádrica canónica es H equivalente.

- *Caso* (III) *($R_H = r_H + 2$):* Calculamos el polinomio característico $p(x)$ de C y sus raíces. Sólo necesitamos los números t de raíces positivas y s de raíces negativas de $p(x)$ (nos ayudamos de la Regla de Descartes). Salvo cambiar $\hat{C}$ por $-\hat{C} \in M_{\mathcal{R}_0}(H)$ siempre podemos conseguir que $s_H = t - s \geq 0$, en cualquier caso $S_H = s_H = |t - s|$ determina unívocamente a que hipercuádrica canónica es H equivalente.

Otra cuestión más elaborada es encontrar un sistema de referencia $\mathcal{R}$ de $\mathcal{A}$ en el que $M_{\mathcal{R}}(H)$ coincida con su equivalente canónica en $\mathcal{R}_0$. Para ello hay reproducir la argumentación de la prueba del Teorema 4.19.

4.3. Clasificación euclidiana de las hipercuádricas

Podemos ahora abordar la clasificación afín euclidiana de las hipercuádricas en un espacio afín euclídeo $(\mathcal{A}, \vec{\ }, \langle\, , \rangle)$. La idea básica será probar que toda hipercuádrica H viene representada en un sistema de referencia rectangular adecuado por una matriz canónica simplificada.

Llamaremos

$$\mathrm{E}(\mathcal{A}, \langle\, , \rangle) = \{f : (\mathcal{A}, \vec{\ }, \langle\, , \rangle) \to (\mathcal{A}, \vec{\ }, \langle\, , \rangle) : f \text{ movimiento rígido}\},$$

o simplemente $\mathrm{E}(\mathcal{A})$ por simplicidad, al grupo de los movimientos rígidos en $(\mathcal{A}, \vec{\ }, \langle\, , \rangle)$, y escribiremos como

$$\mathrm{E}_n(\mathbb{R}) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array} \right) : A \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R}) \right\}$$

el grupo euclídeo, esto es, el de las matrices que representan a los movimientos rígidos de $\mathbb{R}^n$ en el sistema de referencia usual. Es claro que si $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ es una afinidad y $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ son sistemas de referencia rectangulares en $(\mathcal{A}, \langle\, , \rangle)$,

$$f \in \mathrm{E}(\mathcal{A}) \Longleftrightarrow M(f, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) \in \mathrm{E}_n(\mathbb{R}).$$

Definición 4.23 *Dos hipercuádricas $H_j = (\hat{C}_j, \mathcal{R}_j)$, $\mathcal{R}_j$ rectangular, $j = 1, 2$, en un espacio afín euclidiano $(\mathcal{A}, \langle\, , \rangle)$ se dicen* euclídeamente equivalentes *si satisfacen cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes:*

- *Existen sistemas de referencia rectangulares $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ de $\mathcal{A}$ en los que $M_{\mathcal{R}}(H_1) = M_{\mathcal{R}'}(H_2)$.*

- *Existen un sistema de referencia rectangular $\mathcal{R}$ de $\mathcal{A}$ y una matriz $Q \in \mathrm{E}_n(\mathbb{R})$ tales que $Q^{\mathrm{t}} \cdot M_{\mathcal{R}}(H_1) \cdot Q = M_{\mathcal{R}}(H_2)$.*
- *Para todo sistema de referencia rectangular $\mathcal{R}$ de $\mathcal{A}$ existe $Q \in \mathrm{E}_n(\mathbb{R})$ tal que $Q^{\mathrm{t}} \cdot M_{\mathcal{R}}(H_1) \cdot Q = M_{\mathcal{R}}(H_2)$.*

Aunque es algo rutinario, es importante comprobar que las condiciones anteriores son equivalentes entre sí.

Como en el caso afín, el concepto de equivalencia euclidiana de hipercuádricas también se puede reformular en términos de movimientos rígidos. En este caso, es fácil ver que dos hipercuádricas $H_j = (\hat{C}_j, \mathcal{R}_j)$, $\mathcal{R}_j$ rectangular, $j = 1, 2$, en $\mathcal{A}$ son euclideamente equivalentes si y sólo si existe un movimiento rígido $f\colon (\mathcal{A}, \langle\, ,\, \rangle) \to (\mathcal{A}, \langle\, ,\, \rangle)$ tal que

$$M_{\mathcal{R}}(H_2) = M(f^{-1}, \mathcal{R})^{\mathrm{t}} \cdot M_{\mathcal{R}}(H_1) \cdot M(f^{-1}, \mathcal{R}).$$

para cualquier sistema de referencia rectangular $\mathcal{R}$ en $(\mathcal{A}, \langle\, ,\, \rangle)$, lo que en particular implica que $f(H_1) = H_2$.

Las hipercuádricas en el plano euclidiano $\mathbb{R}^2$ definidas por los polinomios

$$H_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 0\}, \quad H_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + 2y^2 = 0\}$$

se corresponden con el punto $\{(0, 0)\}$, y no son equivalentes pues sus matrices asociadas

$$\hat{C}_1 = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \in M_{\mathcal{R}_0}(H_1), \quad \hat{C}_2 = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \in M_{\mathcal{R}_0}(H_2)$$

en la referencia rectangular $\mathcal{R}_0$ no son congruentes en el grupo $\mathrm{E}_2(\mathbb{R})$. Sin embargo existe $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ movimiento rígido tal que $f(H_1) = H_2$. Por tanto la equivalencia euclídea afecta a las matrices de las hipercuádricas en sistemas de referencia rectangulares, no sólo a los conjuntos de puntos que definen; ver Observación 4.11.

Ya estamos en condiciones de abordar el teorema fundamental de clasificación euclídea de hipercuádricas. Necesitaremos para ello alguna notación.

En lo que sigue supondremos fijado un sistema de referencia $\mathcal{R}_0$ rectangular en $(\mathcal{A}, \langle\, ,\, \rangle)$ ($\dim \mathcal{A} = n$).

Definición 4.24 *Las hipercuádricas $H = (\hat{C}_0, \mathcal{R}_0)$ en $\mathcal{A}$ con matrices descritas en la siguiente lista se llamarán* hipercuádricas canónicas *en $(\mathcal{A}, \langle, \rangle)$ con respecto al sistema de referencia rectangular $\mathcal{R}_0$:*

(I) $M_{\mathcal{R}_0}(H) = \left\{\lambda \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & D\big(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_t, -\delta_1, \ldots, -\delta_s, 0^{(c)}\big) \end{array}\right) : \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\}$, *o equivalentemente*

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(H) = \big\{\lambda(\sum_{i=1}^{t} \epsilon_i x_i^2 - \sum_{j=1}^{s} \delta_j x_j^2) = 0 \colon \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big\},$$

donde $t, s, c \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $|t| + |s| > 0$, $t + s + c = n$, $t - s \geq 0$, $\epsilon_i, \delta_j > 0$ para todo i, j, $\epsilon_1 = 1 \geq \epsilon_j$, $j = 2, \ldots, t$.

En este caso $R_H = r_H = t + s$ y $S_H = s_H = t - s \geq 0$.

(II) $M_{\mathcal{R}_0}(H) = \left\{\lambda \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & D\big(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_t, -\delta_1, \ldots, -\delta_s, 0^{(c)}\big) \end{array}\right) : \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\}$, *o equivalentemente*

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(H) = \big\{\lambda(1 + \sum_{i=1}^{\mathrm{t}} \epsilon_i x_i^2 - \sum_{j=1}^{s} \delta_j x_j^2) = 0\colon \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big\},$$

donde $t, s, c \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $|t| + |s| > 0$, $t + s + c = n$, *y* $\epsilon_i, \delta_j > 0$ *para todo* i, j.

En este caso $R_H = r_H + 1 = t + s + 1$ *y* $S_H = |t - s + 1|$, $s_H = |t - s|$.

(III) $M_{\mathcal{R}0}(H) = \left\{\lambda \left(\begin{array}{c|c} 0 & e_n^{\mathrm{t}} \\ \hline e_n & D\big(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_t, -\delta_1, \ldots, -\delta_s, 0^{(c)}\big) \end{array}\right) : \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\}$, *o equivalentemente*

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(H) = \big\{\lambda(2x_n + \sum_{i=1}^{\mathrm{t}} \epsilon_i x_i^2 - \sum_{j=1}^{s} \delta_j x_j^2) = 0\colon \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big\},$$

donde $e_n = (0, \ldots, 0, 1)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^n$ *es el último vector de la base canónica de* $\mathbb{R}^n$, $t, s, c \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $|t| + |s| > 0$, $t + s + c = n$, $c > 0, t - s \geq 0$, *y* $\epsilon_i, \delta_j > 0$ *para todo* i, j.

En este caso $R_H = r_H + 2 = t + s + 2$ *y* $S_H = s_H = t - s \geq 0$.

Observación 4.25 *En las matrices de la Definición 4.24, las cuádruplas de números enteros* (R_H, r_H, S_H, s_H) *y los* conjuntos

$$\{\epsilon_i\colon i = 1 \ldots, t\}, \quad \{\delta_j\colon j = 1 \ldots, s\}$$

discriminan las matrices anteriores, en el sentido de que dos matrices en la anterior lista son euclideamente equivalences si y sólo si esos elementos coinciden para ambas.

Demostración: Si dos cuádricas H_1, H_2 representadas por matrices de las listadas en la Definición 4.24 son euclideamente equivalentes, lo son también afínmente y por tanto ambas pertenecen al mismo tipo (I), (II) ó (III). Además, las matrices $\hat{C}_1 \in M_{\mathcal{R}_0}(H_1)$ y $\hat{C}_2 \in M_{\mathcal{R}_0}(H_2)$ de arriba (con $\lambda = 1$) han de satisfacer que $\hat{C}_2 = \mu(Q^t \cdot \hat{C}_1 \cdot Q)$ para alguna matriz $Q \in \mathrm{E}_n(\mathbb{R})$ y $\mu \neq 0$. De (7) es fácil concluir que $\mu = 1$, y de aquí que los respectivos núcleos cuadráticos C_1 de $\hat{C}_1$ y C_2 de $\hat{C}_2$ sean ortogonalmente equivalentes, y por tanto con los mismos valores propios y las mismas multiplicidades. ∎

El siguiente teorema expresa que dada una matriz simétrica de orden $n + 1$ (típicamente la de una hipercuádrica en un sistema de referencia rectangular de $\mathcal{A}$), ella o su opuesta pueden ser transformadas por congruencia en $\mathrm{E}_n(\mathbb{R})$ en una de las matrices canónicas del listado anterior.

Teorema 4.26 *Toda hipercuádrica* $H = (\hat{C}_0, \mathcal{R}_0)$ *de* $(\mathcal{A}, \langle\, ,\, \rangle)$ *es euclídeamente equivalente a una y sólo una de las hipercuádricas canónicas descritas matricialmente en Definición 4.24.*

Demostración: Lo que hemos de probar es que existe un sistema de referencia rectangular $\mathcal{R}$ de $\mathcal{A}$ en el que H puede ser representada por alguna de las matrices canónicas descritas en Definición 4.24- (I)-(II)-(III).

Tomemos una matriz que represente a H en $\mathcal{R}_0$:

$$\hat{C}_0 = \left(\begin{array}{c|c} a_0 & z_0^{\mathrm{t}} \\ \hline z_0 & C_0 \end{array}\right) \in M_{\mathcal{R}_0}(H).$$

Recordemos que, dado un sistema de referencia rectangular $\mathcal{R}_1$ con $M(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b_1 & A_1 \end{array}\right) \in \mathrm{E}_n(\mathbb{R})$, se tiene que $\left(\begin{array}{c|c} 1 & b_1^{\mathrm{t}} \\ \hline 0 & A_1^{\mathrm{t}} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} a_0 & z_0^{\mathrm{t}} \\ \hline z_0 & C_0 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b_1 & A_1 \end{array}\right) \in M_{\mathcal{R}_1}(H)$, esto es,

$$\left(\begin{array}{c|c} a_0 + b_1^{\mathrm{t}} \cdot z_0 + z_0^{\mathrm{t}} \cdot b_1 + b_1^{\mathrm{t}} \cdot C_0 \cdot b_1 & z_0^{\mathrm{t}} \cdot A_1 + b_1^{\mathrm{t}} \cdot C_0 \cdot A_1 \\ \hline A_1^{\mathrm{t}} \cdot z_0 + A_1^{\mathrm{t}} \cdot C_0 \cdot b_1 & A_1^{\mathrm{t}} \cdot C_0 \cdot A_1 \end{array}\right) \in M_{\mathcal{R}_1}(H).$$

Por el Teorema 4.6, podemos elegir $A_1 \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ tal que

$$A_1^{\mathrm{t}} \cdot C_0 \cdot A_1 = D\big(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_t, -\delta_1, \ldots, -\delta_s, 0^{(c)}\big)$$

donde $|t| + |s| > 0$ (H es una hipercuádrica) y los reales $\epsilon_i, \delta_j > 0$ para todo i, j. Fijada esta A_1, un cálculo directo nos dice que

$$A_1^{\mathrm{t}} \cdot z_0 + A_1^{\mathrm{t}} \cdot C \cdot b_1 = A_1^{\mathrm{t}} \cdot z_0 + D\big(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_t, -\delta_1, \ldots, -\delta_s, 0^{(c)}\big) \cdot (A_1^{-1} \cdot b_1).$$

Escribamos

$$A_1^{\mathrm{t}} \cdot z_0 = \left(\begin{array}{c} z' \\ \hline z_1 \end{array}\right), \quad z' \in \mathbb{R}^{t+s}, z_1 \in \mathbb{R}^c,$$

llamemos $x' \in \mathbb{R}^{t+s}$ al único vector tal que

$$z' + D\big(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_t, -\delta_1, \ldots, -\delta_s\big) \cdot x' = 0 \in \mathbb{R}^{t+s},$$

y usando la regularidad de A_1 elijamos $b_1 \in \mathbb{R}^n$ el único vector tal que

$$A_1^{-1} \cdot b_1 = \left(\begin{array}{c} x' \\ \hline 0 \end{array}\right) \in \mathbb{R}^n.$$

Para esta elección de b_1 se tiene que

$$A_1^{\mathrm{t}} \cdot z_0 + A_1^{\mathrm{t}} \cdot C \cdot b_1 = \left(\begin{array}{c} z' \\ \hline z_1 \end{array}\right) + D\big(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_t, -\delta_1, \ldots, -\delta_s, 0^{(c)}\big) \cdot \left(\begin{array}{c} x' \\ \hline 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline z_1 \end{array}\right).$$

En el sistema de referencia rectangular $\mathcal{R}_1$ determinado por la condición $M(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b_1 & A_1 \end{array}\right)$ queda

$$\left(\begin{array}{c|c|c} a_1 & 0 & z_1^{\mathrm{t}} \\ \hline 0 & D\big(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_t, -\delta_1, \ldots, -\delta_s\big) & 0 \\ \hline z_1 & 0 & 0 \end{array}\right) \in M_{\mathcal{R}_1}(H),$$

donde

$$a_1 = a_0 + b_1^{\mathrm{t}} \cdot z_0 + z_0^{\mathrm{t}} \cdot b_1 + b_1^{\mathrm{t}} \cdot C_0 \cdot b_1, \quad \left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline z_1 \end{array}\right) = A_1^{\mathrm{t}} \cdot z_0 + A_1^{\mathrm{t}} \cdot C_0 \cdot b_1.$$

Si $a_1 = 0 \in \mathbb{R}$ y $z_1 = 0 \in \mathbb{R}^c$, se sigue el caso (I). Obsérvese que podemos garantizar que $s_H = t - s \geq 0$ sin más que cambiar de inicio $\left(\begin{array}{c|c} a_0 & z_0^{\mathrm{t}} \\ \hline z_0 & C_0 \end{array}\right) \in M_{\mathcal{R}_0}(H)$ por su matriz opuesta. También se puede suponer que $\epsilon_1 = 1 \geq \epsilon_j$, $j = 2, \ldots, t$ sin mas que reordenar coordenadas para que $\epsilon_1 \geq \epsilon_j$, $j = 2, \ldots, t$, y afectar por el factor $\lambda = 1/\epsilon_1$ la matriz original.

Si $a_1 \neq 0$ y $z_1 = 0 \in \mathbb{R}^c$ se sigue el caso (II). En efecto, al igual que antes salvo cambiar $\left(\begin{array}{c|c} a_0 & z_0^{\mathrm{t}} \\ \hline z_0 & C_0 \end{array}\right) \in M_{\mathcal{R}_0}(H)$ por su matriz opuesta y afectarla matriz por el factor $1/a_1$ podemos suponer $a_1 = 1$ (obsérvese que en este caso no podemos garantizar que $t - s \geq 0$ por la rigidez que impone la condición $a_1 = 1 > 0$ anterior).

Finalmente supongamos que $z_1 \neq 0$, y observemos que salvo cambiar al principio $\left(\begin{array}{c|c} a_0 & z_0^{\mathrm{t}} \\ \hline z_0 & C_0 \end{array}\right) \in M_{\mathcal{R}_0}(H)$ por su matriz opuesta podemos suponer que $s_H = t - s \geq 0$. Consideremos ahora un sistema de referencia rectangular $\mathcal{R}_2$ para el que

$$M(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1) = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{I}_{t+s} & 0 \\ \hline b_2 & 0 & A_2 \end{array}\right),$$

donde $b_2 \in \mathbb{R}^c$ y $A_2 \in \mathrm{O}(c, \mathbb{R})$ se determinarán más adelante. Un cálculo directo siguiendo la fórmula

$$M_{\mathcal{R}_2}(H) = M(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1)^{\mathrm{t}} \cdot M_{\mathcal{R}_1}(H) \cdot M(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1)$$

nos da que

$$\left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{I}_{t+s} & 0 \\ \hline b_2 & 0 & A_2 \end{array}\right)^{\mathrm{t}} \cdot \left(\begin{array}{c|c|c} a_1 & 0 & z_1^{\mathrm{t}} \\ \hline 0 & D\big(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_t, -\delta_1, \ldots, -\delta_s\big) & 0 \\ \hline z_1 & 0 & 0 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{I}_{t+s} & 0 \\ \hline b_2 & 0 & A_2 \end{array}\right) \in M_{\mathcal{R}_2}(H),$$

esto es,

$$\left(\begin{array}{c|c|c} a_2 & 0 & z_2^{\mathrm{t}} \\ \hline 0 & D\big(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_t, -\delta_1, \ldots, -\delta_s\big) & 0 \\ \hline z_2 & 0 & 0 \end{array}\right) \in M_{\mathcal{R}_2}(H),$$

donde $a_2 = a_1 + b_2^{\mathrm{t}} \cdot z_1 + z_1^{\mathrm{t}} \cdot b_2$ y $z_2 = A_2^{\mathrm{t}} \cdot z_1$.

Como $z_1 \neq 0$, salvo multiplicar la matriz original $\left(\begin{array}{c|c} a_0 & z_0^{\mathrm{t}} \\ \hline z_0 & C_0 \end{array}\right) \in M_{\mathcal{R}_0}(H)$ por el factor $\lambda = 1/\|z_1\|$ podemos suponer que $\|z_1\| = 1$, y por tanto, encontrar una matriz $A_2 \in \mathrm{O}(c, \mathbb{R})$ tal que

$$z_2 = A_2^{\mathrm{t}} \cdot z_1 = e_d = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$$

sea el último vector de la base canónica de $\mathbb{R}^d$. Una vez fijada esta matriz A_2, elegimos cualquier $b_2 \in \mathbb{R}^c$ para que

$$a_2 = a_1 + b_2^{\mathrm{t}} \cdot z_1 + z_1^{\mathrm{t}} \cdot b_2 = 0.$$

Con estas elecciones nos quedaría finalmente que

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & e_n^{\mathrm{t}} \\ \hline e_n & D\big((\epsilon_1, \ldots, \epsilon_t, -\delta_1, \ldots, -\delta_s, 0^{(c)}\big) \end{array}\right) \in M_{\mathcal{R}_2}(H),$$

lo que nos lleva al caso (III) y concluye la prueba. ∎

4.3.1. Cónicas en un plano afín euclidiano

En este apartado supondremos que $(\mathcal{A}, \vec{\ }, \langle\,\rangle)$ es un plano afín euclídeo. Nuestra intención es describir la tabla de la clasificación afín euclídea, salvo equivalencias, de las cónicas en $(\mathcal{A}, \vec{\ }, \langle\,\rangle)$. No vamos a hacer nada nuevo, solo particularizar la información que nos da el teorema de clasificación general Teorema 4.26 y recordar alguna notación clásica.

Para ello fijemos una referencia rectangular $\mathcal{R}_0$ en $(\mathcal{A}, \vec{\ }, \langle\,\rangle)$ y consideremos las cónicas canónicas relativas a $\mathcal{R}_0$ descritas en Definicion 4.24. A la luz del Teorema 4.26, toda cónica H en $\mathcal{A}$ es euclideamente equivalente a una única de las cónicas canónicas que se listan a continuación, representada cada una de ellas por su matríz y ecuación analítica (polinomio cuadrático) en coordenadas $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ respecto de $\mathcal{R}_0$:

- Caso (I), $R_H = r_H = 1$, $S_H = s_H = 1$ $(t = 1,\ s = 0)$:

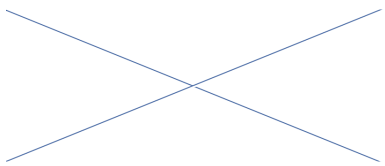
$$\left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \text{ecuación} \qquad x^2 = 0 \qquad \text{(recta doble).}$$

- Caso (I), $R_H = r_H = 2$, $S_H = s_H = 2$ $(t = 2,\ s = 0)$, $\epsilon > 0$:

$$\left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{array}\right) \qquad \text{ecuación} \qquad x^2 + \epsilon y^2 = 0 \qquad \text{(punto).}$$

- Caso (I), $R_H = r_H = 2$, $S_H = s_H = 0$ $(t = 1,\ s = 1)$, $\delta > 0$:

$$\left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta \end{array}\right) \qquad \text{ecuación} \qquad x^2 - \delta y^2 = 0 \qquad \text{(par de rectas secantes).}$$



- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 2$, $S_H = s_H - 1 = 1$ $(t = 1,\ s = 0)$, $\epsilon > 0$:

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \text{ecuación} \qquad \epsilon x^2 + 1 = 0 \qquad \text{(vacío).}$$

- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 2$, $S_H = s_H - 1 = 0$ $(t = 0,\ s = -1)$, $\delta > 0$:

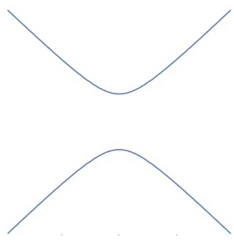
$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta \end{array}\right) \qquad \text{ecuación} \qquad 1 - \delta y^2 = 0 \qquad \text{(par de rectas paralelas).}$$

- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 3$, $S_H = s_H + 1 = 3$ ($t = 2$, $s = 0$), $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$:

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_2 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad 1 + \epsilon_1 x^2 + \epsilon_2 y^2 = 0 \quad \text{(vacío).}$$

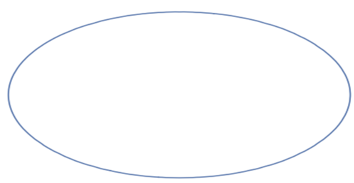
- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 3$, $S_H = s_h + 1 = 1$ ($t = 1$, $s = 1$), $\epsilon, \delta > 0$:

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & -\delta \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad 1 + \epsilon x^2 - \delta y^2 = 0 \quad \text{(hipérbola).}$$



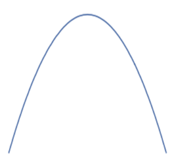
- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 3$, $S_H = s_H - 1 = 1$ ($t = 0$, $s = 2$), $\delta_1, \delta_2 > 0$:

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\delta_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta_2 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad 1 - \delta_1 x^2 - \delta_2 y^2 = 0 \quad \text{(elipse).}$$



- Caso (III), $R_H = r_H + 2 = 3$, $S_H = s_H = 1$ ($t = 1$, $s = 0$), $\epsilon > 0$:

$$\left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & \epsilon & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad \epsilon x^2 + 2y = 0 \quad \text{(parábola).}$$



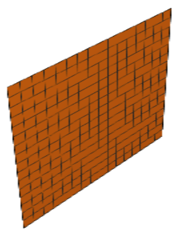
	Tipo (I) $R_H = r_H = 1$	**Tipo (I)** $R_H = r_H = 2$	**Tipo (II)** $R_H = r_H + 1 = 2$	**Tipo (II)** $R_H = r_H + 1 = 3$	**Tipo (III)** $R_H = r_H + 2 = 3$
$S_H = s_H = 0$		Rectas secantes			
$S_H = s_H = 1$	Recta doble				
$S_H = s_H = 2$		Punto			
$S_H = s_H - 1 = 0$			Rectas paralelas		
$S_H = s_H - 1 = 1$				Elipse	
$S_H = s_H - 1 = 2$				Vacío	
$S_H = s_H + 1 = 1$				Hipérbola	
$S_H = s_H + 1 = 2$			Vacío		
$S_H = s_H = 1$					Parábola

4.3.2. Cuádricas en un espacio afín tridimensional

En este apartado supondremos que $(\mathcal{A}, \vec{\ }, \langle\,\rangle)$ tiene $\dim \mathcal{A} = 3$. Al igual que en al caso de las cónicas euclidianas, vamos a describir la tabla de la clasificación, salvo equivalencias euclídea, de las cuádricas de $\mathcal{A}$. Para ello fijaremos una referencia rectangular $\mathcal{R}_0$ en $(\mathcal{A}, \vec{\ }, \langle\,\rangle)$ y consideraremos las cuádricas canónicas relativas a $\mathcal{R}_0$ descritas en Definicion 4.24. A la luz del Teorema 4.26, toda cuádrica H en $\mathcal{A}$ es euclideamente equivalente a una única de las cuádricas canónicas que se listan a continuación, representada cada una de ellas por su matríz y ecuación analítica (polinomio cuadrático) en coordenadas (x, y, z) respecto de $\mathcal{R}_0$:

- Caso (I), $R_H = r_H = 1$, $S_H = s_H = 1$ ($t = 1$, $s = 0$):

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad x^2 = 0 \quad \text{(plano doble).}$$

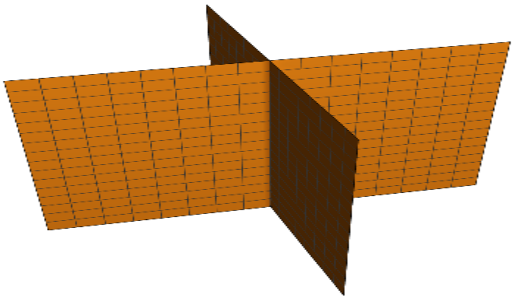


- Caso (I), $R_H = r_H = 2$, $S_H = s_H = 2$ ($t = 2$, $s = 0$), $\epsilon > 0$:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad x^2 + \epsilon y^2 = 0 \quad \text{(recta).}$$

- Caso (I), $R_H = r_H = 2$, $S_H = s_H = 0$ ($t = 1$, $s = 1$), $\delta > 0$:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad x^2 - \delta y^2 = 0 \quad \text{(par de planos secantes)}.$$

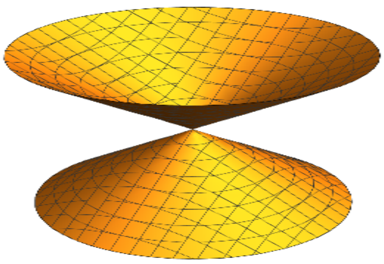


- Caso (I), $R_H = r_H = 3$, $S_H = s_H = 3$ ($t = 3$, $s = 0$), $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon_2 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad x^2 + \epsilon_1 y^2 + \epsilon_2 z^2 = 0 \quad \text{(punto)}.$$

- Caso (I), $R_H = r_H = 3$, $S_H = s_H = 1$ ($t = 2$, $s = 1$), $\epsilon, \delta > 0$:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\delta \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad x^2 + \epsilon y^2 - \delta z^2 = 0 \quad \text{(cono)}.$$



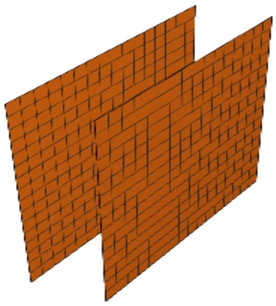
Tipo (I)	$R_H = r_H = 1$	$R_H = r_H = 2$	$R_H = r_H = 3$
$S_H = s_H = 0$		Planos secantes	
$S_H = s_H = 1$	Plano doble		Cono
$S_H = s_H = 2$		Recta	
$S_H = s_H = 3$			Punto

- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 2$, $S_H = s_H + 1 = 2$ $(t = 1,\ s = 0)$, $\epsilon > 0$:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad 1 + \epsilon x^2 = 0 \quad \text{(vacío).}$$

- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 2$, $S_H = s_H - 1 = 0$ $(t = 0,\ s = 1)$, $\delta > 0$:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad 1 - \delta x^2 = 0 \quad \text{(par de planos paralelos).}$$

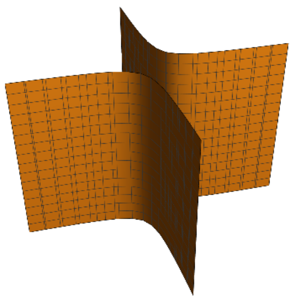


- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 3$, $S_H = s_H + 1 = 3$ $(t = 2,\ s = 0)$, $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad 1 + \epsilon_1 x^2 + \epsilon_2 y^2 = 0 \quad \text{(vacío).}$$

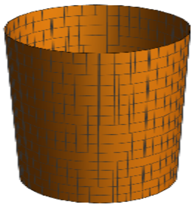
- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 3$, $S_H = s_H + 1 = 1$ $(t = 1,\ s = 1)$, $\epsilon > 0, \delta > 0$:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad 1 + \epsilon x^2 - \delta y^2 = 0 \quad \text{(cilindro hiperbólico).}$$



- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 3$, $S_H = s_H - 1 = 1$ $(t = 0,\ s = 2)$, $\delta_1, \delta_2 > 0$:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad 1 - \delta_1 x^2 - \delta_2 y^2 = 0 \quad \text{(cilindro elíptico).}$$

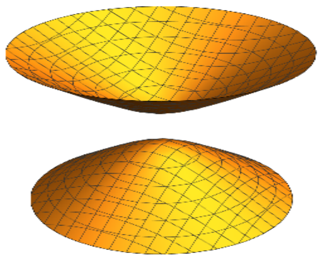


- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 4$, $S_H = s_H + 1 = 4$ ($t = 3$, $s = 0$), $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 > 0$:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon_3 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad 1 + \epsilon_1 x^2 + \epsilon_2 y^2 + \epsilon_3 z^2 = 0 \quad \text{(vacío).}$$

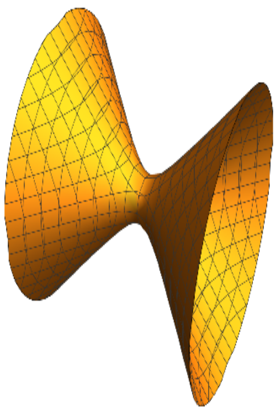
- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 4$, $S_H = s_H + 1 = 2$ ($t = 2$, $s = 1$), $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$, $\delta > 0$:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\delta \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad 1 + \epsilon_1 x^2 + \epsilon_2 y^2 - \delta z^2 = 0 \quad \text{(hiperboloide de dos hojas).}$$



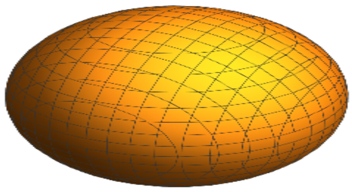
- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 4$, $S_H = s_H - 1 = 0$ ($t = 1$, $s = 2$), $\epsilon > 0, \delta_1, \delta_2 > 0$:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\delta_2 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad 1 + \epsilon x^2 - \delta_1 y^2 - \delta_2 z^2 = 0 \quad \text{(hiperboloide de una hoja).}$$



- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 4$, $S_H = s_H - 1 = 2$ ($t = 0$, $s = 3$), $\delta_1, \delta_2, \delta_3 > 0$:

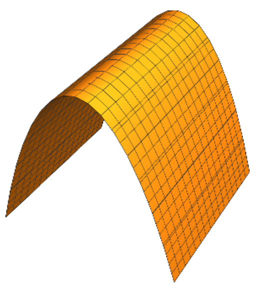
$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\delta_3 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad 1 - \delta_1 x^2 - \delta_2 y^2 - \delta_3 z^2 = 0 \quad \text{(elipsoide).}$$



Tipo (II)	$R_H = r_H + 1 = 2$	$R_H = r_H + 1 = 3$	$R_H = r_H + 1 = 4$
$S_H = s_H + 1 = 1$		Cilindro hiperbólico	
$S_H = s_H + 1 = 2$	vacío		Hiperboloide de dos hojas
$S_H = s_H + 1 = 3$		vacío	
$S_H = s_H + 1 = 4$			vacío
$S_H = s_H - 1 = 0$	Planos paralelos		Hiperboloide de una hoja
$S_H = s_H - 1 = 1$		Cilindro elíptico	
$S_H = s_H - 1 = 2$			Elipsoide

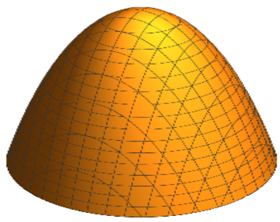
- Caso (III), $R_H = r_H + 2 = 3$, $S_H = s_H = 1$ ($t = 1$, $s = 0$), $\epsilon > 0$:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad \epsilon x^2 + 2z = 0 \quad \text{(cilindro parabólico).}$$



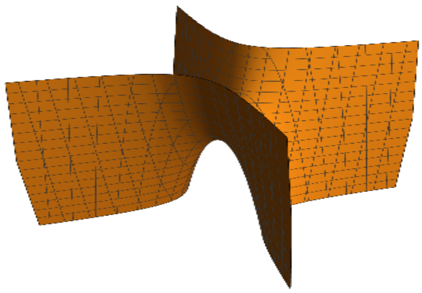
- Caso (III), $R_H = r_H + 2 = 4$, $S_H = s_H = 2$ ($t = 1$, $s = 0$), $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad \epsilon_1 x^2 + \epsilon_2 y^2 + 2z = 0 \quad \text{(paraboliode elíptico).}$$



- Caso (III), $R_H = r_H + 2 = 4$, $S_H = s_H = 0$ $(t = 1,\ s = 1)$, $\epsilon, \delta > 0$:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad \epsilon x^2 - \delta y^2 + 2z = 0 \quad \text{(paraboliode hiperbólico).}$$



Tipo (III)	$R_H = r_H + 2 = 3$	$R_H = r_H + 2 = 4$
$S_H = s_H = 0$		Paraboliode hiperbólico
$S_H = s_H = 1$	Cilindro parabólico	
$S_H = s_H = 2$		Paraboliode elíptico

4.4. Algunos ejercicios resueltos

Ejercicio 4.27 *Clasifica la cónica*

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 - 7y^2 - 6xy + 10x + 2y + 9 = 0\}$$

y encuentra:

- *Un sistema de referencia en el que adopten su ecuación reducida.*
- *Un isomorfismo afín de $\mathbb{R}^2$ que las lleve a su ecuación reducida.*

Solución : Es claro que

$$\hat{C}_0 = \left(\begin{array}{c|cc} 9 & 5 & 1 \\ \hline 5 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & -7 \end{array}\right) \in M_{\mathcal{R}_0}(H)$$

con núcleo cuadrático asociado

$$C_0 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -7 \end{pmatrix} \in N_{\mathcal{R}_0}(H),$$

donde $\mathcal{R}_0$ es el sistema de referencia usual de $\mathbb{R}^2$. De aquí que $R_H = r_H = 2$ y estamos en el caso (I). El polinomio característico $p(t)$ de la matriz C_0 viene dado por

$$p(t) = \det \begin{pmatrix} 1-t & -3 \\ -3 & -7-t \end{pmatrix} = -16 + 6t + t^2 = (t+8)(t-2),$$

de donde C_0 tiene por valores propios a $-8, 2$ y $s_H = S_H = 0$. Por tanto la forma reducida de H es

$$\left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

y H consiste de dos rectas secantes.

Para encontrar el sistema de referencia en el que H adopta su forma canónica, lo primero que haremos es encontrar una base B_1 de $\mathbb{R}^2$ en la que C_0 adopte su forma de Sylvester. Observemos que los subespacios propios de C_0 para los valores propios $2, -8$ son:

$$V_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -9 \end{pmatrix} \cdot (x,y)^{\mathrm{t}} = (0,0)^{\mathrm{t}}\} = L(\{(3,-1)\})$$

y

$$V_{-8} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot (x,y)^{\mathrm{t}} = (0,0)^{\mathrm{t}}\} = L(\{(1,3)\}).$$

Bases ortonormales de los subespacios propios se generan trivialmente:

- $\{\frac{1}{\sqrt{10}}(3,-1)\}$ es base ortonormal de V_2.
- $\{\frac{1}{\sqrt{10}}(1,3)\}$ es base ortonormal de V_{-8}.

Por tanto,

$$B = \{\frac{1}{\sqrt{10}}(3,-1), \frac{1}{\sqrt{10}}(1,3)\}$$

es base ortonormal de $(\mathbb{R}^2, \langle\ ,\ \rangle)$, y la forma de Sylvester $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ de C_0 se alcanza en la base ortogonal de $(\mathbb{R}^2, \langle\ ,\ \rangle)$

$$B_1 = \{\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{10}}(3,-1), \frac{1}{\sqrt{8}\sqrt{10}}(1,3)\} = \{\frac{1}{2\sqrt{5}}(3,-1), \frac{1}{4\sqrt{5}}(1,3)\}.$$

A continuación elegimos un sistema de referencia en $\mathbb{R}^2$ con B_1 como base de direcciones, por simplicidad tomaremos $\mathcal{R}_1 = \{(0,0), B_1\}$, y calcularemos una matriz $\hat{C}_1$ de H en $\mathcal{R}_1$. Evidentemente el núcleo cuadrático C_1 de $\hat{C}_1$ será la anterior forma de Sylvester de C_0. En efecto, sabemos que

$$\hat{C}_1 := M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0)^{\mathrm{t}} \cdot \hat{C}_0 \cdot M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) \in M_{\mathcal{R}_1}(H),$$

y como

$$M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{3}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{4\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{3}{4\sqrt{5}} \end{array}\right)$$

un cálculo inmediato nos da que

$$\hat{C}_1 = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{3}{2\sqrt{5}} & -\frac{1}{2\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{1}{4\sqrt{5}} & \frac{3}{4\sqrt{5}} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|cc} 9 & 5 & 1 \\ \hline 5 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & -7 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{3}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{4\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{3}{4\sqrt{5}} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} 9 & \frac{7}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \hline \frac{7}{\sqrt{5}} & 1 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Si $p_{\mathcal{R}_1} = (x_1, y_1)$ representan las coordenadas en $\mathcal{R}_1$ de los puntos de los puntos $p \in \mathbb{R}^2$, lo anterior significa que H viene representada en $\mathcal{R}_1$ por los ceros del polinomio

$$x_1^2 - y_1^2 + 14/\sqrt{5}x_1 + 4/\sqrt{5}y_1 + 9 = 0,$$

que tras completar cuadrados queda

$$(x_1 + 7/\sqrt{5})^2 - (y_1 - 2/\sqrt{5})^2 = 0.$$

Las ecuaciones analíticas

$$x_2 = x_1 + 7/\sqrt{5}, \quad y_2 = y_1 - 2/\sqrt{5}$$

definen un cambio de $\mathcal{R}_1$ a un nuevo sistema de referencia $\mathcal{R}_2$ con $p_{\mathcal{R}_2} = (x_2, y_2)$ representando las coordenadas de los puntos $p \in \mathbb{R}^2$ en $\mathcal{R}_2$. Claramente

$$x_2^2 - y_2^2 = 0$$

es la ecuación analítica de H en $\mathcal{R}_2$, y por tanto

$$\hat{C}_2 = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \in M_{\mathcal{R}_2}(H).$$

Si se quiere una determinación más explícita de $\mathcal{R}_2$, obsérvese que por definición (de las ecuaciones $x_2 = x_1 + 7/\sqrt{5},\ y_2 = y_1 - 2/\sqrt{5}$) se deduce que

$$M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 7/\sqrt{5} & 1 & 0 \\ -2/\sqrt{5} & 0 & 1 \end{array}\right),$$

de donde

$$M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1) = M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)^{-1} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{7}{\sqrt{5}} & 1 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Por tanto

$$M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0) = M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) \cdot M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{3}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{4\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{3}{4\sqrt{5}} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{7}{\sqrt{5}} & 1 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & 1 \end{array}\right),$$

de donde calculando

$$M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & \frac{3}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{4\sqrt{5}} \\ 1 & -\frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{3}{4\sqrt{5}} \end{array}\right),$$

y esto determina el sistema de referencia $\mathcal{R}_2$ que resuelve el ejercicio.

Para la segunda parte del ejercicio, observemos que de lo anterior se sigue

$$\hat{C}_2 = M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0)^{\mathrm{t}} \cdot \hat{C}_0 \cdot M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0) = M_{\mathcal{R}_2}(H) = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Por otra parte, para toda afinidad $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sabemos que

$$M_{\mathcal{R}_0}\big(f(H)\big) = M(f^{-1}, \mathcal{R}_0)^{\mathrm{t}} \cdot M_{\mathcal{R}_0}(H) \cdot M(f^{-1}, \mathcal{R}_0),$$

esto es,

$$M(f^{-1}, \mathcal{R}_0)^{\mathrm{t}} \cdot \hat{C}_0 \cdot M(f^{-1}, \mathcal{R}_0) \in M_{\mathcal{R}_0}\big(f(H)\big).$$

Si elegimos la única f tal que

$$M(f, \mathcal{R}_0)^{-1} = M(f^{-1}, \mathcal{R}_0) = M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & \frac{3}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{4\sqrt{5}} \\ 1 & -\frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{3}{4\sqrt{5}} \end{array}\right),$$

o calculando

$$M(f, \mathcal{R}_0) = M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0)^{-1} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & \frac{3}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{4\sqrt{5}} \\ 1 & -\frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{3}{4\sqrt{5}} \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{7}{\sqrt{5}} & \frac{3}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{6}{\sqrt{5}} \end{array}\right),$$

se tiene que

$$M(f^{-1}, \mathcal{R}_0)^{\mathrm{t}} \cdot \hat{C}_0 \cdot M(f^{-1}, \mathcal{R}_0) =$$

$$= M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0)^{\mathrm{t}} \cdot \hat{C}_0 \cdot M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0) = \hat{C}_2 = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \in M_{\mathcal{R}_0}(f(H)),$$

lo que acaba el ejercicio. ■

Ejercicio 4.28 *Clasifica la cónica*

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon -39 - 18x + 9x^2 + 12xy + 8y + 4y^2 = 0\}$$

y encuentra:

- *Un sistema de referencia en el que adopten su ecuación reducida.*
- *Un isomorfismo afín de $\mathbb{R}^2$ que las lleve a su ecuación reducida.*

Solución: Es claro que

$$\hat{C}_0 = \left(\begin{array}{c|cc} -39 & -9 & 4 \\ \hline -9 & 9 & 6 \\ 4 & 6 & 4 \end{array}\right) \in M_{\mathcal{R}_0}(H)$$

con núcleo cuadrático asociado

$$C_0 = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \in N_{\mathcal{R}_0}(H),$$

donde $\mathcal{R}_0$ es el sistema de referencia usual de $\mathbb{R}^2$. De aquí que $R_H = r_H + 2 = 3$ y estamos en el caso (III) (el valor de s_H y S_H en este caso es irrelevante para la discusión porque en la tabla de las cónicas reducidas sólo hay una con $R_H = r_H + 2 = 3$, ese fenómeno no ocurrirá e dimensiones superiores). Por tanto la forma reducida de H es

$$\left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

y H es una parábola.

El polinomio característico $p(t)$ de la matriz C_0 viene dado por

$$p(t) = \det \begin{pmatrix} 9-t & 6 \\ 6 & 4-t \end{pmatrix} = -13t + t^2 = t(t-13),$$

de donde C_0 tiene por valores propios a $0, 13$ con subespacios propios asociados

$$V_{13} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 6 & -9 \end{pmatrix} \cdot (x,y)^{\mathrm{t}} = (0,0)^{\mathrm{t}}\} = L(\{(3,2)\})$$

y

$$V_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot (x,y)^{\mathrm{t}} = (0,0)^{\mathrm{t}}\} = L(\{(2,-3)\}).$$

Bases ortonormales de los subespacios propios se generan trivialmente:

- $\{\frac{1}{\sqrt{13}}(3,2)\}$ es base ortonormal de V_{13}.
- $\{\frac{1}{\sqrt{13}}(2,-3)\}$ es base ortonormal de V_0.

Por tanto,

$$B = \{\frac{1}{\sqrt{13}}(3,2), \frac{1}{\sqrt{13}}(2,-3)\}$$

es base ortonormal de $(\mathbb{R}^2, \langle\, , \,\rangle)$, y la forma de Sylvester $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ de C_0 se alcanza en la base ortogonal de $(\mathbb{R}^2, \langle\, , \,\rangle)$

$$B_1 = \{\frac{1}{\sqrt{13}}\frac{1}{\sqrt{13}}(3,2), (2,-3)\} = \{\frac{1}{13}(3,2), (2,-3)\};$$

Nótese la irrelevancia del factor de proporcionalidad en el vector de la base de V_0, por eso lo hemos elegido con la expresión más simple.

Si denotamos $\mathcal{R}_1 = \{(0,0), B_1\}$ sabemos que

$$M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0)^{\mathrm{t}} \cdot \hat{C}_0 \cdot M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) \in M_{\mathcal{R}_1}(H),$$

y como

$$M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{3}{13} & 2 \\ 0 & \frac{2}{13} & -3 \end{array}\right)$$

un cálculo inmediato nos da que

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{3}{13} & \frac{2}{13} \\ 0 & 2 & -3 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|cc} -39 & -9 & 4 \\ \hline -9 & 9 & 6 \\ 4 & 6 & 4 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{3}{13} & 2 \\ 0 & \frac{2}{13} & -3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} -39 & -\frac{19}{13} & -30 \\ \hline -\frac{19}{13} & 1 & 0 \\ -30 & 0 & 0 \end{array}\right) \in M_{\mathcal{R}_1}(H).$$

Si $p_{\mathcal{R}_1} = (x_1, y_1)$ representan las coordenadas en $\mathcal{R}_1$ de los puntos de los puntos $p \in \mathbb{R}^2$, lo anterior significa que H viene representada en $\mathcal{R}_1$ por los ceros del polinomio

$$x_1^2 - \frac{38}{13}x_1 - 60y_1 - 39 = 0,$$

esto es

$$(x_1 - \frac{19}{13})^2 - 60y_1 - \frac{6952}{169} = 0.$$

Las ecuaciones analíticas

$$x_2 = x_1 - \frac{19}{13}, \quad y_2 = -30y_1 - \frac{3476}{169}$$

definen un cambio de $\mathcal{R}_1$ a un nuevo sistema de referencia $\mathcal{R}_2$ con $p_{\mathcal{R}_2} = (x_2, y_2)$ representando las coordenadas de los puntos $p \in \mathbb{R}^2$ en $\mathcal{R}_2$. Claramente

$$x_2^2 + 2y_2 = 0$$

es la ecuación analítica de H en $\mathcal{R}_2$, y por tanto

$$\left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \in M_{\mathcal{R}_2}(H).$$

Si se quiere una determinación más explícita de $\mathcal{R}_2$, obsérvese que por definición (de las ecuaciones $x_2 = x_1 - \frac{19}{13}$, $y_2 = -30y_1 - \frac{3476}{169}$) se deduce que

$$M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{19}{13} & 1 & 0 \\ -\frac{3476}{169} & 0 & -30 \end{array}\right),$$

de donde

$$M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1) = M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)^{-1} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{19}{13} & 1 & 0 \\ -\frac{1738}{2535} & 0 & -\frac{1}{30} \end{array}\right)$$

Por tanto

$$M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0) = M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) \cdot M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1) =$$

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{3}{13} & 2 \\ 0 & \frac{2}{13} & -3 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{19}{13} & 1 & 0 \\ -\frac{1738}{2535} & 0 & -\frac{1}{30} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{2621}{2535} & \frac{3}{13} & -\frac{1}{15} \\ \frac{1928}{845} & \frac{2}{13} & \frac{1}{10} \end{array}\right),$$

y esto determina el sistema de referencia $\mathcal{R}_2$ que resuelve el ejercicio.

Para la segunda parte del ejercicio, observemos que de lo anterior se sigue

$$M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0)^{\mathrm{t}} \cdot \hat{C}_0 \cdot M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \in M_{\mathcal{R}_2}(H).$$

Como en el ejercicio anterior, toda afinidad $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ satisface

$$M_{\mathcal{R}_0}\big(f(H)\big) = M(f^{-1}, \mathcal{R}_0)^{\mathrm{t}} \cdot M_{\mathcal{R}_0}(H) \cdot M(f^{-1}, \mathcal{R}_0),$$

o equivalentemente

$$M(f^{-1}, \mathcal{R}_0)^{\mathrm{t}} \cdot \hat{C}_0 \cdot M(f^{-1}, \mathcal{R}_0) \in M_{\mathcal{R}_0}\big(f(H)\big).$$

Bastará con elegir la única f tal que

$$M(f, \mathcal{R}_0)^{-1} = M(f^{-1}, \mathcal{R}_0) = M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{2621}{2535} & \frac{3}{13} & -\frac{1}{15} \\ \frac{1928}{845} & \frac{2}{13} & \frac{1}{10} \end{array}\right),$$

esto es

$$M(f, \mathcal{R}_0) = M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0)^{-1} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{2621}{2535} & \frac{3}{13} & -\frac{1}{15} \\ \frac{1928}{845} & \frac{2}{13} & \frac{1}{10} \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{19}{13} & 3 & 2 \\ -\frac{3476}{169} & -\frac{60}{13} & \frac{90}{13} \end{array}\right).$$

■

Ejercicio 4.29 *Clasificar las siguientes cónicas:*

(a) $2x^2 - y^2 + 4xy + 6x - 2y + 1 = 0$.

(b) $x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 2y = 0$.

(c) $4x^2 + 2y^2 - 2xy + x - 3y - 3 = 0$.

(d) $-x^2 + xy - \sqrt{3}\,x + \sqrt{3}\,y = 0$.

Solución : Comencemos con la cónica H en (a) definida por

$$2x^2 - y^2 + 4xy + 6x - 2y + 1 = 0.$$

En el sistema de referencia usual $\mathcal{R}_0$ tenemos

$$\hat{C}_0 = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 3 & -1 \\ \hline 3 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \in M_{\mathcal{R}_0}(H)$$

con núcleo simétrico asociado

$$C_0 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \in N_{\mathcal{R}_0}(H).$$

De aquí que $R_H = r_H + 1 = 3$ y estamos en el caso (II).

El polinomio característico $p(t)$ de la matriz C_0 viene dado por

$$p(t) = \det \begin{pmatrix} 2-t & 2 \\ 2 & -1-t \end{pmatrix} = -6 - t + t^2 = (-3+t)(2+t),$$

de donde C_0 tiene por valores propios a $3 > 0, -2 < 0$, $s = t = 1$ y $s_H = 0$ (esa información también se deduce de la regla de Descartes).

Análogamente el polinomio característico $\hat{p}(t)$ de la matriz $\hat{C}_0$ viene dado por

$$\hat{p}(t) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 3 & -1 \\ 3 & 2-t & 2 \\ -1 & 2 & -1-t \end{pmatrix} = -11 + 15t + 2t^2 - t^3.$$

La regla de Descartes nos dice que $\hat{p}(t)$ tiene dos raíces positivas y una negativa. Por tanto $S_H = s_H + 1 = 1$ y la forma reducida de H es

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right),$$

esto es, H es una hipérbola afín.

Estudiemos la cónica H en (b) definida por

$$x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 2y = 0.$$

En el sistema de referencia usual $\mathcal{R}_0$ tenemos que

$$\hat{C}_0 = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \in M_{\mathcal{R}_0}(H)$$

con núcleo simétrico asociado

$$C_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in N_{\mathcal{R}_0}(H).$$

De aquí que $R_H = r_H + 1 = 2$ y estamos en el caso (II).

El polinomio característico $p(t)$ de la matriz C_0 viene dado por

$$p(x) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ 1 & 1-t \end{pmatrix} = -2t + t^2 = t(t-2),$$

de donde C_0 tiene por valores propios a $0, 2 > 0$ y $s_H = 1$ (esa información también se deduce de la regla de Descartes).

Análogamente el polinomio característico $\hat{p}(t)$ de la matriz $\hat{C}_0$ viene dado por

$$\hat{p}(t) = \det \begin{pmatrix} -t & 1 & 1 \\ 1 & 1-t & 1 \\ 1 & 1 & 1-t \end{pmatrix} = 2t + 2t^2 - t^3.$$

La regla de Descartes nos dice que $\hat{p}(t)$ tiene una raíz positiva y una negativa. Por tanto $S_H = s_H - 1 = 0$. Por tanto la forma reducida canónica de H es

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right),$$

esto es, H es un par de rectas paralelas.

Estudiemos la cónica H en (c) definida por

$$4x^2 + 2y^2 - 2xy + x - 3y - 3 = 0.$$

En el sistema de referencia usual $\mathcal{R}_0$ tenemos

$$\hat{C}_0 = \left(\begin{array}{c|cc} -3 & 1/2 & -3/2 \\ \hline 1/2 & 4 & -1 \\ -3/2 & -1 & 2 \end{array}\right) \in M_{\mathcal{R}_0}(H)$$

con núcleo cuadrático asociado

$$C_0 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in N_{\mathcal{R}_0}(H).$$

De aquí que $R_H = r_H + 1 = 3$ y estamos en el caso (II).

El polinomio característico $p(t)$ de la matriz C_0 viene dado por

$$p(t) = \det \begin{pmatrix} 4-t & -1 \\ -1 & 2-t \end{pmatrix} = 7 - 6t + t^2,$$

de donde por la regla de Descartes C_0 tiene dos raíces positivas y $s_H = 2$.

Análogamente el polinomio característico $\hat{p}(t)$ de la matriz $\hat{C}_0$ viene dado por

$$\hat{p}(t) = \det \begin{pmatrix} -3-t & 1/2 & -3/2 \\ 1/2 & 4-t & -1 \\ -3/2 & -1 & 2-t \end{pmatrix} = -29 + \frac{27}{2}t + 3t^2 - t^3.$$

La regla de Descartes nos dice que $\hat{p}(t)$ tiene dos raíces positivas y una negativa y por tanto $S_H = s_H - 1 = 1$. La forma reducida de H es por tanto

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right),$$

esto es, H es una elipse afín.

Estudiemos la cónica H en (d) definida por

$$-x^2 + xy - \sqrt{3}\,x + \sqrt{3}\,y.$$

En el sistema de referencia usual $\mathcal{R}_0$ tenemos

$$\hat{C}_0 = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & -\sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/2 \\ \hline -\sqrt{3}/2 & -1 & -1/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \end{array}\right) \in M_{\mathcal{R}_0}(H)$$

co núcleo cuadrático asociado

$$C_0 = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix} \in N_{\mathcal{R}_0}(H).$$

De aquí que $R_H = r_H + 1 = 3$ y estamos en el caso (II).

El polinomio característico $p(t)$ de la matriz C_0 viene dado por

$$p(x) = \det \begin{pmatrix} -1-t & -1/2 \\ -1/2 & -t \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} + t + t^2,$$

de donde por la regla de Descartes C_0 tiene una raíz positiva, otra negativa y $s_H = 0$.

Análogamente el polinomio característico $\hat{p}(t)$ de la matriz $\hat{C}_0$ viene dado por

$$\hat{p}(t) = \det \begin{pmatrix} -t & -\sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1-t & -1/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & -t \end{pmatrix} = \frac{3}{2} + \frac{7}{4}t - t^2 - t^3.$$

La regla de Descartes nos dice que $\hat{p}(t)$ tiene dos raíces negativas y una positiva y por tanto $S_H = s_H + 1 = 1$. La forma reducida de H es

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right),$$

esto es, H es una hipérbola afín.

■

Ejercicio 4.30 *Clasifica afínmente la cuádrica*

$$H = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_1 + x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2 + 2x_3 + 1 = 0\},$$

encontrando un sistema de referencia afín en el que venga representada por su matriz canónica.

Solución : La cuádrica viene representada por la siguiente matriz en la referencia usual $\mathcal{R}_0$ de $\mathbb{R}^3$

$$\hat{C} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

con núcleo cuadrático

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Un cálculo elemental del rango de ambas matrices nos dice que

$$R_H = \mathrm{rang}(\hat{C}) = 3, \;\; r_H = \mathrm{rang}(C) = 3.$$

Por otra parte, los polinomios característicos de $\hat{C}$ y C son respectivamente

$$p_{\hat{C}}(t) = 6t+t^2-4t^3+t^4 = (-3+t)(-2+t)t(1+t), \;\; p_C(t) = -4+3t^2-t^3 = -(-2+t)^2(1+t).$$

Por tanto la regla de Descartes (o una observación directa) nos dice que

$$S_H = s_h = 1.$$

De la tabla de clasificación de las cuádricas concluimos que H tiene por matriz canónica

$$\hat{C}_0 = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right),$$

se trata de un cono.

Para encontrar la referencia en la que adopta su matriz canónica procedemos como sigue. Primero calculamos los subespacios propios asociados a los valores propios $-1, 2$ del núcleo cuadrático C.

Para el valor propio 1 queda

$$V_{-1} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon (C + \mathrm{I}_3).(x, y, z)^{\mathrm{t}} = (0, 0, 0)^{\mathrm{t}}\} = L(\{(1, 1, 1)\},$$

que admite a $\{\frac{1}{3}(1, 1, 1)\}$ como base ortonormal. A esta base la multiplicamos por $1/\sqrt{|-1|} = 1$ (quedará invariante), generando la base de V_{-1}:

$$B_{-1} = \{\frac{1}{3}(1, 1, 1)\}$$

Para el valor propio 2 hacemos un cálculo similar.

$$V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon (C - 2\mathrm{I}_3).(x, y, z)^{\mathrm{t}} = (0, 0, 0)^{\mathrm{t}}\} = L(\{(1, -1, 0), (1, 0, -1)\},$$

que tiene a $\big\{(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\sqrt{\frac{2}{3}})\big\}$ como base ortonormal. A esta base la multiplicamos por $1/\sqrt{|2|} = 1/\sqrt{2}$ generando la base de V_2:

$$B_2 = \big\{(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})\big\}.$$

En el sistema de referencia centrado en el origen con direcciones $B_{-1}\cup B_2$, a saber,

$$\mathcal{R}_1=\big\{(0,0,0),\{\frac{1}{3}(1,1,1),(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0),(\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{1}{2\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}})\}\big\},$$

la matriz que representa a H es la siguiente

$$\hat{C}_1=M(\mathrm{Id}_3,\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_0)^t\cdot\hat{C}\cdot M(\mathrm{Id}_3,\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_0)=$$

$$=\left(\begin{array}{c|ccc}1&0&0&0\\\hline 0&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2\sqrt{3}}&\frac{1}{2\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c|ccc}1&-1&0&1\\\hline -1&1&-1&-1\\0&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c|ccc}1&0&0&0\\\hline 0&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2\sqrt{3}}\\0&\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2\sqrt{3}}\\0&\frac{1}{\sqrt{3}}&0&-\frac{1}{\sqrt{3}}\end{array}\right),$$

esto es,

$$\hat{C}_1=\left(\begin{array}{c|ccc}1&0&-\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\\hline 0&-1&0&0\\-\frac{1}{2}&0&1&0\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&0&0&1\end{array}\right)$$

Si llamamos $p_{\mathcal{R}_1}=(y_1,y_2,y_3)$ a las coordenadas en $\mathcal{R}_1$ de los puntos $p\in\mathbb{R}^3$, la hipercuádrica se corresponde con los ceros del polinomio

$$1-y_1^2-y_2+y_2^2-\sqrt{3}y_3+y_3^2=0,$$

o equivalentemente completando cuadrados

$$-y_1^2+(y_2-\frac{1}{2})^2+(y_3-\frac{\sqrt{3}}{2})^2=0.$$

Consideremos el único sistema de referencia $\mathcal{R}_2$ en $\mathbb{R}^3$ en el que las coordenadas $p_{\mathcal{R}_2}=(z_1,z_2,z_3)$ de los puntos de $p\in\mathbb{R}^3$ vengan determinadas por las ecuaciones analíticas

$$z_1=y_2-\frac{1}{2},\;\; z_2=y_3-\frac{\sqrt{3}}{2},\;\; z_3=y_1,$$

esto es, el que satisface

$$M(\mathrm{Id}_{R^3},\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2)=\left(\begin{array}{c|ccc}1&0&0&0\\\hline -\frac{1}{2}&0&1&0\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&0&0&1\\0&1&0&0\end{array}\right).$$

La cuádrica H se corresponde ahora con los puntos de $\mathbb{R}^3$ cuyas coordenadas en $\mathcal{R}_2$ son ceros del polinomio

$$z_1^2+z_2^2-z_3^2=0,$$

y por tanto H viene representada en $\mathcal{R}_2$ por la matriz canónica $\hat{C}_0$. Esto concluye el ejercicio.

Si se desea expresar $\mathcal{R}_2$ respecto a la referencia $\mathcal{R}_0$ basta con usar la fórmula

$$M(\mathrm{Id}_{R^3},\mathcal{R}_2,\mathcal{R}_0)=M(\mathrm{Id}_{R^3},\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_0)\cdot M(\mathrm{Id}_{R^3},\mathcal{R}_2,\mathcal{R}_1)=M(\mathrm{Id}_{R^3},\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_0)\cdot M(\mathrm{Id}_{R^3},\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2)^{-1}=$$

$$=\left(\begin{array}{c|ccc}1&0&0&0\\\hline 0&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2\sqrt{3}}\\0&\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2\sqrt{3}}\\0&\frac{1}{\sqrt{3}}&0&-\frac{1}{\sqrt{3}}\end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c|ccc}1&0&0&0\\\hline -\frac{1}{2}&0&1&0\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&0&0&1\\0&1&0&0\end{array}\right)^{-1}=\left(\begin{array}{c|ccc}1&0&0&0\\\hline \frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{array}\right).$$

■

Ejercicio 4.31 *Para la cuádrica en $\mathbb{R}^3$ dada por*

$$2xy + 2xz + 2yz - 6x - 6y - 4z + 9 = 0,$$

determinar una sistema de referencia y un isomorfimo afín de $\mathbb{R}^3$ que la lleve a su ecuación reducida.

Solución: Es claro que

$$\hat{C}_0 = \left(\begin{array}{c|ccc} 9 & -3 & -3 & -2 \\ \hline -3 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \in M_{\mathcal{R}_0}(H)$$

con núcleo cuadrático asociado

$$C_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in N_{\mathcal{R}_0}(H),$$

donde $\mathcal{R}_0$ es el sistema de referencia usual de $\mathbb{R}^3$. De aquí que $R_H = r_H + 1 = 4$ y estamos en el caso (II). El polinomio característico $p(t)$ de la matriz C_0 viene dado por

$$p(t) = \det\big(C_0 - t\mathrm{I}_3\big) = 2 + 3t - t^3 = -(-2+t)(1+t)^2$$

de donde C_0 tiene por valores propios a $-1, -1 < 0, 2 > 0$ y $s_H = 1$. Análogamente el polinomio característico de $\hat{C}_0$ queda

$$\hat{p}(t) = \det\big(\hat{C}_0 - t\mathrm{I}_4\big) = -2 - 17t - 25t^2 - 9t^3 + t^4,$$

de donde por la regla de Descartes $\hat{p}(t)$ tiene una raíz > 0 y tres raíces < 0, y de aquí que $S_H = 2$. Por tanto la forma reducida o canónica de H es

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

y H es un hiperboloide de dos hojas.

Para encontrar el sistema de referencia en el que H adopta su forma canónica, primero lo que hacemos es cambiar $\hat{C}_0$ por su opuesta, e igualmente con C_0, para así lograr que las formas de Sylvester de éstas matrices se correspondan con las asociadas a la forma canónica indicada. Renombraremos a las opuestas con la misma notación:

$$\hat{C}_0 = \left(\begin{array}{c|ccc} -9 & 3 & 3 & 2 \\ \hline 3 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \in M_{\mathcal{R}_0}(H), \quad C_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in N_{\mathcal{R}_0}(H).$$

Ahora C_0 tiene por valores propios $1 > 0$ doble y $-2 < 0$ simple, y el polinomio característico de $\hat{C}_0$ tiene una raíz < 0 y tres raíces > 0.

Observemos que los subespacios propios de C_0 para los valores propios $1, -2$ son:

$$V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot (x,y,z)^{\mathrm{t}} = (0,0,0)^{\mathrm{t}}\} = L(\{(1,-1,0),(,1,-1,0)\})$$

y

$$V_{-2}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}\cdot(x,y,z)^{\mathrm{t}}=(0,0,0)^{\mathrm{t}}\}=L(\{(1,1,1)\}).$$

Bases ortonormales de los subespacios propios se generan trivialmente:

- $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0),\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)\}$ es base ortonormal de V_1.
- $\{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\}$ es base ortonormal de V_{-2}.

Por tanto,

$$B=\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0),\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2),\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\}$$

es base ortonormal de $(\mathbb{R}^3,\langle\ ,\ \rangle)$, y la forma de Sylvester $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$ de C_0 se alcanza en la base ortogonal de $(\mathbb{R}^3,\langle\ ,\ \rangle)$

$$B_1=\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0),\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2),\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\}=\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0),\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2),\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,1)\}.$$

Si denotamos $\mathcal{R}_1=\{(0,0,0),B_1\}$ sabemos que

$$\hat{C}_1:=M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2},\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_0)^{\mathrm{t}}\cdot\hat{C}_0\cdot M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2},\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_0)\in M_{\mathcal{R}_1}(H),$$

y como

$$M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3},\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_0)=\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{array}\right)$$

un cálculo inmediato nos da que

$$\hat{C}_1=\left(\begin{array}{c|ccc} -9 & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 4\sqrt{\frac{2}{3}}\\ \hline 0 & 1 & 0 & 0\\ \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 1 & 0\\ 4\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 0 & -1\end{array}\right)$$

Si $p_{\mathcal{R}_1}=(x_1,y_1,z_1)$ representan las coordenadas en $\mathcal{R}_1$ de los puntos de los puntos $p\in\mathbb{R}^3$, lo anterior significa que H viene representada en $\mathcal{R}_1$ por los ceros del polinomio

$$x_1^2+y_1^2-z_1^2+2\sqrt{\frac{2}{3}}y_1+8\sqrt{\frac{2}{3}}z_1-9=0,$$

esto es

$$x_1^2+\big(y_1+\sqrt{\frac{2}{3}}\big)^2-\big(z_1-4\sqrt{\frac{2}{3}}\big)^2+1=0.$$

Las ecuaciones analíticas

$$x_2=x_1,\quad y_2=y_1+\sqrt{\frac{2}{3}},\quad z_2=z_1-4\sqrt{\frac{2}{3}}$$

definen un cambio de $\mathcal{R}_1$ a un nuevo sistema de referencia $\mathcal{R}_2$ con $p_{\mathcal{R}_2} = (x_2, y_2, z_2)$ representando las coordenadas de los puntos $p \in \mathbb{R}^2$ en $\mathcal{R}_2$. Claramente

$$x_2^2 + y_2^2 - z_2^2 + 1 = 0$$

es la ecuación analítica de H en $\mathcal{R}_2$, y por tanto

$$\hat{C}_2 = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \in M_{\mathcal{R}_2}(H).$$

Si se quiere una determinación más explícita de $\mathcal{R}_2$, obsérvese que por definición (de las ecuaciones $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1 + \sqrt{\frac{2}{3}}$, $z_2 = z_1 - 4\sqrt{\frac{2}{3}}$) se deduce que

$$M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 1 & 0 \\ -4\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

de donde

$$M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1) = M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)^{-1} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 1 & 0 \\ 4\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Por tanto

$$M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0) = M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) \cdot M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 1 & 0 \\ 4\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 2 & 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

y esto determina el sistema de referencia $\mathcal{R}_2$ que resuelve el ejercicio.

Para la segunda parte del ejercicio, observemos que de lo anterior se sigue

$$\hat{C}_2 = M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0)^{\mathrm{t}} \cdot \hat{C}_0 \cdot M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0) = M_{\mathcal{R}_2}(H) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Por otra parte, para toda afinidad $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sabemos que

$$M(f^{-1}, \mathcal{R}_0)^{\mathrm{t}} \cdot \hat{C}_0 \cdot M(f^{-1}, \mathcal{R}_0) \in M_{\mathcal{R}_0}\big(f(H)\big).$$

Si elegimos la única f tal que

$$M(f, \mathcal{R}_0)^{-1} = M(f^{-1}, \mathcal{R}_0) = M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 2 & 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},$$

esto es

$$M(f,\mathcal{R}_0)=M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3},\mathcal{R}_2,\mathcal{R}_0)^{-1}=\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ -4\sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{array}\right),$$

tendremos que

$$M(f^{-1},\mathcal{R}_0)^{\mathrm{t}}\cdot \hat{C}_0\cdot M(f^{-1},\mathcal{R}_0)=$$

$$=M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3},\mathcal{R}_2,\mathcal{R}_0)^{\mathrm{t}}\cdot \hat{C}_0\cdot M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3},\mathcal{R}_2,\mathcal{R}_0)=\hat{C}_2=\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)\in M_{\mathcal{R}_0}(f(H)),$$

lo que acaba el ejercicio. ■

Ejercicio 4.32 *Clasifica afínmente la cuádrica en* $\mathbb{R}^3$ *dada por*

$$2x^2+3y^2+2xy-2yz+2z+2=0.$$

Solución: Es claro que

$$\hat{C}_0=\left(\begin{array}{c|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)\in M_{\mathcal{R}_0}(H)$$

con núcleo cuadrático asociado

$$C_0=\left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right)\in N_{\mathcal{R}_0}(H),$$

donde $\mathcal{R}_0$ es el sistema de referencia usual de $\mathbb{R}^3$. De aquí que $R_H=r_H+1=4$ y estamos en el caso (II). El polinomio característico $p(x)$ de la matriz C_0 viene dado por

$$p(t)=\det\big(C_0-t\mathrm{I}_3\big)=-2-4t+5t^2-t^3$$

de donde por la regla de Descartes C_0 tiene dos valores propios >0 y uno <0, por lo que $s_H=1$. Análogamente el polinomio característico de $\hat{C}_0$ queda

$$\hat{p}(t)=\det\big(\hat{C}_0-t\mathrm{I}_4\big)=-9-t+13t^2-7t^3+t^4,$$

de donde por la regla de Descartes $\hat{p}(t)$ tiene tres raíces >0 y una <0, y de aquí que $S_H=2$. Por tanto la forma reducida o canónica de H es

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

y H es un hiperboloide de dos hojas. ■

Ejercicio 4.33 *Para la cuádrica en* $\mathbb{R}^3$ *dada por*

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2x - 2z + 1 = 0$$

determinar una sistema de referencia y un isomorfimo afín de $\mathbb{R}^3$ *que la lleve a su ecuación reducida.*

SOLUCIÓN: Es claro que

$$\hat{C}_0 = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & -1 & 0 & -1 \\ \hline -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \in M_{\mathcal{R}_0}(H)$$

con núcleo cuadrático asociado

$$C_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in N_{\mathcal{R}_0}(H),$$

donde $\mathcal{R}_0$ es el sistema de referencia usual de $\mathbb{R}^3$. De aquí que $R_H = r_H + 2 = 4$ y estamos en el caso (III). El polinomio característico $p(t)$ de la matriz C_0 viene dado por

$$p(t) = \det\big(C_0 - t\mathrm{I}_3\big) = -2t + 3t^2 - t^3 = -(-2+t)(-1+t)t$$

de donde C_0 tiene por valores propios a $0, 1, 2 > 0$ y $S_H = s_H = 2$. Por tanto la forma reducida o canónica de H es

$$(1\ x\ y\ z) \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (z\ x\ y\ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x^2 + y^2 + 2z = 0$$

y H es un paraboloide elíptico.

Para encontrar el sistema de referencia en el que H adopta su forma canónica, observemos que los subespacios propios de C_0 para los valores propios $0, 1, 2$ son:

$$V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot (x,y,z)^{\mathrm{t}} = (0,0,0)^{\mathrm{t}}\} = L(\{(0,0,1))\}),$$

$$V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot (x,y,z)^{\mathrm{t}} = (0,0,0)^{\mathrm{t}}\} = L(\{(1,1,0)\}),$$

y

$$V_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot (x,y,z)^{\mathrm{t}} = (0,0,0)^{\mathrm{t}}\} = L(\{(1,-1,,0))\}).$$

Bases ortonormales de los subespacios propios se generan trivialmente:

- $\{(0,0,1)\}$ es base ortonormal de V_1.
- $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)\}$ es base ortonormal de V_2.

- $V_0 = \{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)\}$.

Por tanto,

$$\{(0,0,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)\}$$

es base ortonormal de $(\mathbb{R}^3, \langle\ ,\ \rangle)$, y la forma de Sylvester $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ de C_0 se alcanza en la base ortogonal de $(\mathbb{R}^3, \langle\ ,\ \rangle)$

$$B_1 = \{(0,0,1), \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)), (1,-1,0)\} = \{(0,0,1), \frac{1}{2}(1,1,0)), (1,-1,0)\}).$$

Nótese que el vector en B_1 proveniente de una base de V_0 es irrelevante, por eso hemos elegido el más simple para el cálculo.

Si denotamos $\mathcal{R}_1 = \{(0,0,0), B_1\}$ sabemos que

$$\hat{C}_1 := M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0)^{\mathrm{t}} \cdot \hat{C}_0 \cdot M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) \in M_{\mathcal{R}_1}(H),$$

y como

$$M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

un cálculo inmediato nos da que

$$\hat{C}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $p_{\mathcal{R}_1} = (x_1, y_1, z_1)$ representan las coordenadas en $\mathcal{R}_1$ de los puntos de los puntos $p \in \mathbb{R}^3$, lo anterior significa que H viene representada en $\mathcal{R}_1$ por los ceros del polinomio

$$x_1^2 + y_1^2 - 2x_1 - y_1 - 2z_1 + 1 = 0,$$

esto es,

$$(x_1-1)^2 + (y_1 - \frac{1}{2})^2 - 2(z_1 + \frac{1}{8}) = 0$$

Las ecuaciones analíticas

$$x_2 = x_1 - 1, \quad y_2 = y_1 - \frac{1}{2}, \quad z_2 = -z_1 - \frac{1}{8}$$

definen un cambio de $\mathcal{R}_1$ a un nuevo sistema de referencia $\mathcal{R}_2$ con $p_{\mathcal{R}_2} = (x_2, y_2, z_2)$ representando las coordenadas de los puntos $p \in \mathbb{R}^2$ en $\mathcal{R}_2$. Claramente

$$x_2^2 + y_2^2 - 2z_2 = 0$$

es la ecuación analítica de H en $\mathcal{R}_2$, y por tanto

$$\hat{C}_2 = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \in M_{\mathcal{R}_2}(H).$$

Si se quiere una determinación más explícita de $\mathcal{R}_2$, obsérvese que por definición (de las ecuaciones $x_2 = x_1 - 1$, $y_2 = y_1 - \frac{1}{2}$, $z_2 = -z_1 - \frac{1}{8}$) se deduce que

$$M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{8} & 0 & 0 & -1 \end{array}\right),$$

de donde

$$M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1) = M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)^{-1} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{8} & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Por tanto

$$M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0) = M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) \cdot M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1) =$$
$$= \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{8} & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

y esto determina el sistema de referencia $\mathcal{R}_2$ que resuelve el ejercicio.

Para la segunda parte del ejercicio, observemos que de lo anterior se sigue

$$\hat{C}_2 = M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0)^{\mathrm{t}} \cdot \hat{C}_0 \cdot M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0) = M_{\mathcal{R}_2}(H) = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Como para toda afinidad $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sabemos que

$$M(f^{-1}, \mathcal{R}_0)^{\mathrm{t}} \cdot \hat{C}_0 \cdot M(f^{-1}, \mathcal{R}_0) \in M_{\mathcal{R}_0}\big(f(H)\big),$$

si elegimos la única f tal que

$$M(f, \mathcal{R}_0)^{-1} = M(f^{-1}, \mathcal{R}_0) = M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

esto es

$$M(f, \mathcal{R}_0) = M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

tendremos que

$$M(f^{-1}, \mathcal{R}_0)^{\mathrm{t}} \cdot \hat{C}_0 \cdot M(f^{-1}, \mathcal{R}_0) =$$
$$= M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0)^{\mathrm{t}} \cdot \hat{C}_0 \cdot M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0) = \hat{C}_2 = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \in M_{\mathcal{R}_0}(f(H)),$$

lo que acaba el ejercicio. ■

Ejercicio 4.34 *Clasifica afínmente la cuádrica H del espacio afín $\mathbb{R}^3$ que en el sistema de referencia usual $\mathcal{R}_0$ viene definida por la ecuación*

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz + x + y + z + 1 = 0.$$

Solución : Es claro que

$$\hat{C}_0 = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \in M_{\mathcal{R}_0}(H)$$

con núcleo cuadrático asociado

$$C_0 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \in N_{\mathcal{R}_0}(H),$$

donde $\mathcal{R}_0$ es el sistema de referencia usual de $\mathbb{R}^3$. De aquí que $R_H = r_H + 1 = 4$ y estamos en el caso (II). El polinomio característico $p(t)$ de la matriz C_0 viene dado por

$$p(t) = \det\big(C_0 - t\mathrm{I}_3\big) = 1/2 - (9t)/4 + 3t^2 - t^3 = -\frac{1}{4}(-2+t)(-1+2t)^2$$

de donde C_0 tiene por valores propios $2 > 0$, $1/2$ doble y $s_H = 3$. Análogamente el polinomio característico $\hat{p}(t)$ de $\hat{C}_0$ viene dado por

$$\hat{p}(t) = \det\big(\hat{C}_0 - t\mathrm{I}_4\big) = \frac{5}{16} - 2t + \frac{9}{2}t^2 - 4t^3 + t^4,$$

y la regla de Descartes nos dice que $\hat{p}(t)$ tiene cuatro raíces positivas y $S_H = 4$.

Por tanto la forma reducida o canónica de H es

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

y H es vacía. ∎

Ejercicio 4.35 *Encontrar la ecuación reducida de la hipercuádrica en $\mathbb{R}^4$ de ecuación:*

$$2x^2 - y^2 + z^2 - w^2 + 2xz - 2yz + 2yw + 2x - 2y + 2w + 1 = 0.$$

Solución : Es claro que

$$\hat{C}_0 = \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \in M_{\mathcal{R}_0}(H)$$

con núcleo cuadrático asociado

$$C_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in N_{\mathcal{R}_0}(H),$$

donde $\mathcal{R}_0$ es el sistema de referencia usual de $\mathbb{R}^3$. De aquí que $R_H = r_H + 1 = 5$ y estamos en el caso (II). El polinomio característico $p(t)$ de la matriz C_0 viene dado por

$$p(t) = \det\big(C_0 - t\mathrm{I}_3\big) = 2 + 3t - 6t^2 - t^3 + t^4$$

de donde por la regla de Descartes $p(t)$ tiene tiene dos raíces positivas y dos negativas, y por tanto $s_H = 0$. Análogamente el polinomio característico $\hat{p}(t)$ de $\hat{C}_0$ viene dado por

$$\hat{p}(t) = \det\big(\hat{C}_0 - t\mathrm{I}_4\big) = 3 + t - 14t^2 + 8t^3 + 2t^4 - t^5,$$

y la regla de Descartes nos dice que $\hat{p}(t)$ tiene dos raíces positivas y tres negativas, y cambiando $\hat{C}_0$ por su opuesta, tres positivas y dos negativas. En cualquier caso $S_H = 1$ y la forma reducida o canónica de H es

$$\left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

■

Ejercicio 4.36 *Demuestra los siguientes enunciados.*

(a) *El lugar geométrico de los puntos del plano afín euclidiano $\mathbb{R}^2$ tales que la suma de las distancias a dos puntos fijos (llamados focos) es constante, es una* elipse euclidiana*.*

(b) *El lugar geométrico de los puntos del plano afín euclidiano $\mathbb{R}^2$ tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos (llamados focos) es constante, es una* hipérbola euclidiana*.*

(c) *El lugar geométrico de los puntos del plano afín euclidiano $\mathbb{R}^2$ que equidistan de una recta (llamada directriz) y de un punto exterior a la misma (llamado foco), es una* parábola euclidiana*.*

Solución: Discutamos (a). Tomemos $F_1, F_2 \in \mathbb{R}^2$ dos puntos cualesquiera (podría ser $F_1 = F_2$), consideremos

$$H = \{p \in \mathbb{R}^2 \colon d(p, F_1) + d(p, F_2) = 2b\}.$$

Como $d(F_1, F_2) \leq d(p, F_1) + d(p, F_2)$, la condición $2b < d(F_1, F_2)$ implicaría que $H = \varnothing$. Para evitar este caso degenerado supondremos $2b \geq d(F_1, F_2)$, lo que como veremos más adelante implicará que $H \neq \varnothing$.

Sea $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cualquier movimiento rígido tal que

$$f(F_1) = (-a, 0) \in \mathbb{R}^2, \quad f(F_2) = (a, 0) \in \mathbb{R}^2,$$

donde $2a = d(F_1, F_2) \leq 2b$, esto es, $a \leq b$. Excluiremos el caso $a = b$ por ser degenerado y supondremos $a < b$. Bastará con comprobar que $f(H)$ es una elipse euclídea. En efecto, la ecuación

$$d((x, y), (-a, 0)) + d((x, y), (a, 0)) = 2b \Longleftrightarrow \sqrt{(x + a)^2 + y^2} + \sqrt{(x - a)^2 + y^2} = 2b.$$

Operando
$$(x+a)^2+y^2=\left(\sqrt{(x-a)^2+y^2}-2b\right)^2,$$
y desarrollando y usando la ecuación original
$$b^2-ax+b\sqrt{(a+x)^2+y^2}=0.$$
De aquí que $b^2\big((a+x)^2+y^2\big)=\big(b^2-ax\big)^2$, esto es,
$$1-\frac{1}{b^2}x^2-\frac{1}{b^2-a^2}y^2=0,$$
lo que corresponde con una elipse euclidiana toda vez que $-\frac{1}{b^2-a^2}>0, -\frac{1}{b^2}<0$.

Discutamos (b). Tomemos $F_1,F_2\in\mathbb{R}^2$ dos puntos cualesquiera con $F_1\neq F_2$ (de otra forma el problema degenera). Consideremos
$$H=\{p\in\mathbb{R}^2\colon \big|d(p,F_2)-d(p,F_1)\big|=2b\}.$$
El caso $b=0$ se corresponde con que H sea la mediatriz del segmento $[F_1,F_2]$, caso que excluimos. Como $d(F_1,p)\leq d(F_1,F_2)+d(F_2,p)$ y $d(F_2,p)\leq d(F_2,F_1)+d(F_1,p)$, deducimos que
$$2b=\big|d(p,F_2)-d(p,F_1)\big|\leq d(F_2,F_1)$$
Sea $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ cualquier movimiento rígido tal que
$$f(F_1)=(0,-a)\in\mathbb{R}^2,\quad f(F_2)=(0,a)\in\mathbb{R}^2,$$
donde $2a=d(F_1,F_2)$. La anterior desigualdad nos da que
$$2b=\big|d(p,F_2)-d(p,F_1)\big|\leq 2a,\quad \text{esto es,}\quad b\leq a.$$

Excluiremos el caso $a=b$ por ser degenerado (generaría una recta doble), por lo que supondremos $a<b$. Bastará con comprobar que $f(H)$ es una hipérbola euclídea. En efecto, la ecuación
$$\big|d((x,y),(0,a))-d((x,y),(0,-a))\big|=2b\Longleftrightarrow \Big|\sqrt{x^2+(y-a)^2}-\sqrt{x^2+(y+a)^2}\Big|=2b.$$
Suponiendo que
$$d((x,y),(0,a))-d((x,y),(0,-a))=2b>0$$
(a la misma ecuación se llegaría si $d((x,y),(0,a))-d((x,y),(0,-a))=-2b<0$) y operando
$$(y-a)^2+x^2=\left(\sqrt{(y+a)^2+x^2}+2b\right)^2,$$
y desarrollando y usando la ecuación original
$$-4b\sqrt{(a+y)^2+x^2}-4ay-4b^2=0.$$
De aquí que $b^2\big((a+y)^2+x^2\big)=\big(b^2+ay\big)^2$, esto es,
$$1+\frac{1}{a^2-b^2}x^2-\frac{1}{b^2}y^2=0,$$
lo que corresponde con una hipérbola euclidiana toda vez que $\frac{1}{a^2-b^2}>0, -\frac{1}{b^2}<0$. La dicotomía
$$d((x,y),(0,a))-d((x,y),(0,-a))=2b>0,\quad d((x,y),(0,a))-d((x,y),(0,-a))=-2b<0$$
refleja analíticamente cada una de las dos ramas de la hipérbola. ■

Discutamos (c). Tomemos un punto $F \in \mathbb{R}^2$ y una recta $R \subset \mathbb{R}^2$, y consideremos

$$H = \{p \in \mathbb{R}^2 \colon d(p, F) = d(p, R)\}.$$

Si $p \in R$ es fácil ver que H es la recta ortogonal a R que pasa por p, caso degenerado. Supondremos pues que $p \notin R$.

Sea $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cualquier movimiento rígido tal que

$$f(F) = (0, -a) \in \mathbb{R}^2, \quad f(R) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = a\}, \quad a > 0.$$

Tras esta isometría euclidiana H se convierte en

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon \sqrt{(a + y)^2 + x^2} = |y - a|\}.$$

Calculando, $(x, y) \in H$ si y sólo si

$$(a + y)^2 + x^2 - (y - a)^2 = 0 \Longleftrightarrow 2y + \frac{1}{2a}x^2 = 0,$$

lo que corresponde con una parábola euclidiana.

Ejercicio 4.37 *Sea H una hipercuádrica en $\mathbb{R}^n$ con matriz $\hat{C}$ en el sistema de referencia usual $\mathcal{R}_0$. Diremos que H es* invariante por homotecias lineales *si para toda homotecia $h_{O,r}$ con centro el origen $O \in \mathbb{R}^n$ y razón $r \neq 0$,*

$$M(h_{O,r}^{-1}, \mathcal{R}_0)^{\mathrm{t}} \cdot \hat{C} \cdot M(h_{O,r}^{-1}, \mathcal{R}_0) = \lambda \hat{C}$$

para algún $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (dependiendo de r); en particular, $h_{O,r}(H) = H$ para todo $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Demostrar que H cumple esta propiedad si y sólo si $\hat{C} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$, donde C es simétrica y no nula. Mostrar algunos ejemplos de este tipo de cuádricas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

Solución: Escribamos $\hat{C} = \left(\begin{array}{c|c} a & z^t \\ \hline z & C \end{array}\right)$, y por tanto

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n \colon x^t \cdot C \cdot x + 2\langle z, x\rangle + a = 0\}.$$

Supongamos que $h_{0,r}(H) = H$ para todo $r \neq 0$. La condición

$$M(h_{O,r}^{-1}, \mathcal{R}_0)^{\mathrm{t}} \cdot \hat{C} \cdot M(h_{O,r}^{-1}, \mathcal{R}_0) \in M_{\mathcal{R}_0}(H)$$

en nuestras hipótesis equivale a que

$$\left(\begin{array}{c|c} a & rz^t \\ \hline rz & r^2C \end{array}\right) \in M_{\mathcal{R}_0}(H) \quad \forall r \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

esto es,

$$\left(\begin{array}{c|c} a & rz^t \\ \hline rz & r^2C \end{array}\right) \in \left\{\lambda \hat{C} = \lambda \left(\begin{array}{c|c} a & z^t \\ \hline z & C \end{array}\right) : \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\} \quad \forall r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Por tanto necesariamente $a = 0$ y $z = 0$, y de aquí se sigue lo buscado.

Ejemplos en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ son todos los del tipo (I). ■

Ejercicio 4.38 *Hacer la clasificación euclidiana de la cónica en el plano euclidiano* $(\mathbb{R}^2, \langle\, , \rangle)$ *dada por*

$$2x^2 - y^2 + 4xy + 6x - 2y + 1 = 0.$$

Dar un sistema de referencia rectangular de $(\mathbb{R}^2, \langle\, , \rangle)$ *en el que adopte su forma reducida, y un movimiento rígido que la lleva a su forma reducida en el sistema de referencia rectangulat usual* $\mathcal{R}_0$ *de* $(\mathbb{R}^2, \langle\, , \rangle)$.

Solución: Comencemos con la cónica H en (a) definida por

$$2x^2 - y^2 + 4xy + 6x - 2y + 1 = 0.$$

En el sistema de referencia rectangular usual $\mathcal{R}_0$ en el plano euclidiano $(\mathbb{R}^2, \langle\, , \rangle)$, tenemos que

$$\hat{C}_0 = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 3 & -1 \\ \hline 3 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \in M_{\mathcal{R}_0}(H)$$

con núcleo simétrico asociado

$$C_0 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \in N_{\mathcal{R}_0}(H).$$

De aquí que $R_H = r_H + 1 = 3$ y estamos en el caso (II).

El polinomio característico $p(t)$ de la matriz C_0 viene dado por

$$p(t) = \det \begin{pmatrix} 2-t & 2 \\ 2 & -1-t \end{pmatrix} = -6 - t + t^2 = (-3+t)(2+t),$$

de donde C_0 tiene por valores propios a $3 > 0, -2 < 0$ y $s_H = 0$ (esa información también se deduce de la regla de Descartes).

Análogamente el polinomio característico $\hat{p}(t)$ de la matriz $\hat{C}_0$ viene dado por

$$\hat{p}(t) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 3 & -1 \\ 3 & 2-t & 2 \\ -1 & 2 & -1-t \end{pmatrix} = -11 + 15t + 2t^2 - t^3.$$

La regla de Descartes nos dice que $\hat{p}(t)$ tiene dos raíces positivas y una negativa. Por tanto $S_H = s_H + 1 = 1$ y la forma reducida de H es

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & -\delta \end{array}\right),$$

para ciertos $\epsilon, \delta > 0$ por determinar, esto es, H es una hipérbola euclídea.

Para la clasificación euclidiana necesitamos encontrar una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ en la que diagonalice C (diagonalización ortogonal). Para ello determinamos los subespacios propios de C asociados a sus valores propios.

$$V_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} (x,y)^t = (0,0)^t\} = L(\{(2,1)\}).$$

$$V_{-2} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} (x,y)^t = (0,0)^t\} = L(\{(-1,2)\}).$$

Determinamos bases ortonormales $\{\frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)\}$ de V_3 y $\{\frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2)\}$ de V_{-2} y formamos la base ortonormal de $\mathbb{R}^2, \langle\, ,\, \rangle)$

$$B_1 = \{\frac{1}{\sqrt{5}}(2,1), \frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2)\}.$$

Consideremos el sistema de referencia rectangular $\mathcal{R}_1 = \{(0,0), B_1\}$ y observemos que

$$M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{array}\right)$$

Como $\hat{C}_1 = M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0)^t \cdot \hat{C}_0 \cdot M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) \in M_{\mathcal{R}_1}(H)$, deducimos que

$$\hat{C}_1 = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & \sqrt{5} & -\sqrt{5} \\ \hline \sqrt{5} & 3 & 0 \\ -\sqrt{5} & 0 & -2 \end{array}\right) \in M_{\mathcal{R}_1}(H).$$

Si escribimos $p_{\mathcal{R}_1} = (x_1, y_1)$ para las coordenadas de los puntos $p \in \mathbb{R}^2$ en $\mathcal{R}_1$, tenemos que H se corresponde con los puntos cuyas coordenadas en $\mathcal{R}_1$ satisfacen el polinomio

$$3x_1^2 - 2y_1^2 + 2\sqrt{5}x_1 - 2\sqrt{5}y_1 + 1 = 0.$$

Un cálculo elemental nos permite reescribir la ecuación como

$$3\big(x_1^2 + \frac{2\sqrt{5}}{3}x_1\big) - 2\big(y_1^2 + \frac{2\sqrt{5}}{2}y_1\big) + 1 = 0,$$

y completando cuadrados

$$3\big(x_1 + \frac{\sqrt{5}}{3}\big)^2 - 2\big(y_1 + \frac{\sqrt{5}}{2}\big)^2 + \frac{11}{6} = 0,$$

y dividiendo por 11/6

$$\frac{18}{11}\big(x_1 + \frac{\sqrt{5}}{3}\big)^2 - \frac{12}{11}\big(y_1 + \frac{\sqrt{5}}{2}\big)^2 + 1 = 0.$$

Las ecuaciones analíticas

$$x_2 = x_1 + \frac{\sqrt{5}}{3}, \quad y_2 = y_1 + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

modelan el cambio de sistema de referencia de $\mathcal{R}_1$ al nuevo sistema de referencia $\mathcal{R}_2$ de coordenadas (x_2, y_2). Obsérvese que $\mathcal{R}_2$ es también un sistema de referencia rectangular ya que

$$M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{\sqrt{5}}{3} & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{2} & 0 & 1 \end{array}\right),$$

$\mathcal{R}_1$ es rectangular y $M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, B_1, B_2) = \mathrm{I}_2 \in \mathrm{O}(2, \mathbb{R})$, donde B_2 es la base de direcciones de $\mathcal{R}_2$. Como los puntos $p \in H$ en coordenadas $p_{\mathcal{R}_2} = (x_2, y_2)$ se caracterizan por satisfacer

$$\frac{18}{11}x_2^2 - \frac{12}{11}y_2^2 + 1 = 0,$$

tenemos que

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{18}{11} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{12}{11} \end{array}\right) \in M_{\mathcal{R}_2}(H)$$

y en $\mathcal{R}_2$ la cónica adopta su forma reducida euclidiana con $\epsilon = \frac{18}{11}, \delta = \frac{12}{11}$.

Si se quiera explicitar $\mathcal{R}_2$ en coordenadas usuales, observemos que

$$M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1) = M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)^{-1} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{\sqrt{5}}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{5}}{2} & 0 & 1 \end{array}\right),$$

y como $M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0) = M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) \cdot M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1)$, entonces

$$M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{\sqrt{5}}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{5}}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{6} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{array}\right).$$

Para la segunda parte del ejercicio, observemos que de lo anterior se sigue

$$M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0)^{\mathrm{t}} \cdot \hat{C}_0 \cdot M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0) = \frac{11}{6} \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{18}{11} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{12}{11} \end{array}\right) \in M_{\mathcal{R}_2}(H).$$

Como en el ejercicio anterior, toda afinidad $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ satisface

$$M_{\mathcal{R}_0}\big(f(H)\big) = M(f^{-1}, \mathcal{R}_0)^{\mathrm{t}} \cdot M_{\mathcal{R}_0}(H) \cdot M(f^{-1}, \mathcal{R}_0),$$

o equivalentemente

$$M(f^{-1}, \mathcal{R}_0)^{\mathrm{t}} \cdot \hat{C}_0 \cdot M(f^{-1}, \mathcal{R}_0) \in M_{\mathcal{R}_0}\big(f(H)\big).$$

Bastará con elegir la única f tal que

$$M(f, \mathcal{R}_0)^{-1} = M(f^{-1}, \mathcal{R}_0) = M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{6} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{array}\right),$$

esto es

$$M(f, \mathcal{R}_0) = M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0)^{-1} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{6} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{\sqrt{5}}{2} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{array}\right).$$

■

Ejercicio 4.39 *Encontrar la ecuación reducida y decir de qué tipo es la cónica siguiente en función del parámetro real a:*

$$a\,x^2 + y^2 + 4a\,xy - 2x - 4y + a = 0.$$

SOLUCIÓN : Una matriz que representa a H en el sistema de referencia usual es

$$\hat{C} = \left(\begin{array}{c|cc} a & -1 & -2 \\ \hline -1 & a & 2a \\ -2 & 2a & 1 \end{array} \right),$$

con núcleo cuadrático

$$C = \begin{pmatrix} a & 2a \\ 2a & 1 \end{pmatrix},$$

Por tanto el polinomio característico de $\hat{C}$ queda,

$$\hat{p}(t) = \det(\hat{C} - t\mathrm{I}_3) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3,$$

donde

$$c_0 = (1-a)(1+a)(-1+4a), \quad c_1 = 5 - 2a + 3a^2, \quad c_2 = 1 + 2a, \quad c_3 = -1$$

Análogamente el polinomio característico de C viene dado por

$$p(t) = \det(C - t\mathrm{I}_2) = d_0 + d_1 t + d_2 t^2,$$

donde

$$d_0 = a(1-4a), \quad d_1 = -1 - a, \quad d_2 = 1.$$

■

Los valores críticos del parámetro, donde se anula alguno de los coeficientes, son pues $a = -1, -1/2, 0, 1/4, 1$. La distribución de signos de esos coeficientes queda:

	d_0	d_1	d_2	c_0	c_1	c_2	c_3
$a \in]-\infty, -1[$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$
$a = -1$	$-$	0	$+$	0	$+$	$-$	$-$
$a \in]-1, -1/2[$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$
$a = -1/2$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	0	$-$
$a \in]-1/2, 0[$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$
$a = 0$	0	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$
$a \in]0, 1/4[$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$
$a = 1/4$	0	$-$	$+$	0	$+$	$+$	$-$
$a \in]1/4, 1[$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$
$a = 1$	$-$	$-$	$+$	0	$+$	$+$	$-$
$a \in]1, +\infty[$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$

Un cálculo sencillo y la regla de Descartes nos da la siguiente tabla para los valores de R_H, r_H, S_H, s_H según los valores de a, y por tanto la clasificación final:

	R_H	r_H	S_H	s_H	
$a \in]-\infty, -1[$	3	2	1	0	hipérbola
$a = -1$	2	2	0	0	dos rectas secantes
$a \in]-1, -1/2[$	3	2	1	0	hipérbola
$a = -1/2$	3	2	1	0	hipérbola
$a \in]-1/2, 0[$	3	2	1	0	hipérbola
$a = 0$	3	1	1	1	parábola
$a \in]0, 1/4[$	3	2	1	2	elipse
$a = 1/4$	2	1	0	1	dos rectas paralelas
$a \in]1/4, 1[$	3	2	1	0	hipérbola
$a = 1$	2	2	0	0	dos rectas secantes
$a \in]1, +\infty[$	3	2	1	0	hipérbola