Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Cálculo I – Cuestiones teóricas

Explica si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas. Cuando sean ciertas indica el resultado de teoría que lo justifica o proporciona una prueba y, cuando sean falsas indica un contraejemplo.

1. Toda función $f : A \to \mathbb{R}$, inyectiva en A y cuya imagen es un intervalo, es continua.
2. Toda función definida en un intervalo cuya imagen es un intervalo es continua.
3. Toda función polinómica no constante o se anula en algún punto o alcanza un máximo o un mínimo absolutos en $\mathbb{R}$.
4. Si f es una función estrictamente monótona y definida en un intervalo entonces su función inversa f^{-1} es continua.
5. Si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función inyectiva, I es un intervalo y $J = f(I)$ es un intervalo entonces su función inversa f^{-1} es continua en J.
6. Si $f : A \to \mathbb{R}$ es una función inyectiva, $f(A)$ es un intervalo, y f^{-1} es continua, entonces f es continua.
7. Toda función continua en un intervalo alcanza en algún punto de dicho intervalo un valor mínimo.
8. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y verifica que $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{Q}$ entonces f es constante.
9. Si f es continua en a y g es discontinua en a entonces $f + g$ puede ser continua o discontinua en a.
10. Si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones continuas tales que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{Q}$, entonces $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
11. Si $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ es continua y $f(x) > 0$ para todo $x \in [0, 1]$ entonces existe $\alpha > 0$ tal que $f(x) > \alpha$ para todo $x \in [0, 1]$.
12. Si $\{x_n\}$ es una sucesión estrictamente creciente tal que $\{x_{n+1} - x_n\} \to 0$, entonces $\{x_n\}$ es convergente.
13. Si la serie $\sum_{n \geqslant 1} |a_{n+1} - a_n|$ es convergente entonces $\{a_n\}$ es convergente.
14. Una sucesión de números reales está acotada si, y sólo si, admite una sucesión parcial convergente.
15. Si $\sum_{n \geqslant 1} x_n$ es una serie convergente de números reales positivos, entonces la sucesión $\{x_n\}$ es decreciente.
16. Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función real de variable real. Si f es continua en A y no está mayorada ni minorada, entonces $f(A) = \mathbb{R}$.
17. Una sucesión no acotada no puede tener una sucesión parcial convergente.
18. Si una sucesión monótona $\{x_n\}$ tiene una sucesión parcial convergente entonces $\{x_n\}$ es convergente.

19. Una sucesión que no tiene ninguna sucesión parcial convergente tampoco tiene ninguna sucesión parcial acotada.

20. Toda sucesión estrictamente creciente verifica la condición de Cauchy.

21. Si $\{x_n\}$ es una sucesión acotada de números reales, entonces $\{x_n\}$ tiene la siguiente propiedad: para cada $\delta > 0$, pueden encontrarse $m, n \in \mathbb{N}$, con $m \neq n$, tales que $|x_n - x_m| < \delta$.

22. Si un conjunto no vacío de números reales no tiene supremo tampoco tiene máximo.

23. Hay un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ que no es vacío y cuyo conjunto de minorantes es un intervalo del tipo $]-\infty, a[$.

24. Hay una función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ que es continua y verifica que $f([0, 1]) = [2, 3[$.

25. Si f y g son discontinuas en a entonces fg es discontinua en a.

26. Una función f es continua en a si, y sólo si, $|f|$ es continua en a.

27. Si una función f está definida en un intervalo $[a, b]$ y toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces es continua en $[a, b]$.

28. Una sucesión no está mayorada si, y sólo si, tiene alguna sucesión parcial positivamente divergente.

29. Toda serie mayorada es convergente.

30. Si un conjunto de números reales no tiene máximo entonces tiene supremo.

31. Existe una sucesión acotada de números reales $\{x_n\}$ que verifica que $|x_n - x_m| \geqslant 10^{-10}$ siempre que $n \neq m$.

32. Toda serie convergente es una sucesión acotada.

33. Sea A un conjunto de números reales no vacío y mayorado y $\beta = \sup A$. Dado $\varepsilon > 0$ existe algún $a \in A$ tal que $\beta - \varepsilon < a < \beta$.

34. Toda sucesión tiene una sucesión parcial convergente o una sucesión parcial divergente.

35. Si $x_n \leqslant y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\sum_{n\geqslant 1} y_n$ es convergente, entonces $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ también es convergente.