Mario Megías Mateo 1º DGIIM

1.14. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $a^2 < 3b$. Probar que la ecuación dada por $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ tiene una única solución real.

Definamos $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, continua y derivable en $\mathbb{R}$ por ser polinómica.

Como consecuencia del teorema de Rolle, por cada n soluciones distintas que tenga la ecuación $f(x) = 0$ en $\mathbb{R}$, la ecuación $f'(x) = 0$ ha de tener al menos $n-1$ soluciones distintas.

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 2ax + b = 0$

$\Delta = 4a^2 - 12b$

La ecuación $f'(x) = 0$ tiene solución $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$, es decir $4a^2 - 12b \geq 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a^2 - 3b \geq 0 \Leftrightarrow a^2 \geq 3b$, pero esto no puede darse por hipótesis, luego $\Delta < 0$ y no existe solución real, lo que implica que la ecuación $f(x) = 0$ tenga o una solución o ninguna.

Aplicamos el teorema de los ceros de Bolzano y estudiamos el comportamiento de $f(x)$ en los extremos:

$$\lim_{x \to +\infty} x^3 + ax^2 + bx + c = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^3 + ax^2 + bx + c = \lim_{x \to +\infty} -x^3 + ax^2 - bx + c = -\infty$$

Por el teorema anterior, como la función toma valores positivos y negativos en $\mathbb{R}$, ha de anularse en algún punto del intervalo, por tanto la solución de $f(x) = 0$ es única.