Ejercicio 2.6: Demuestra que la suma de un número positivo y su inverso es mayor o igual a 2.

Por el criterio de la derivada segunda: Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función n veces derivable en $a \in I^o$ con $n \geq 2$. Supongamos que $f'(a) = 0$ y $f''(a) \neq 0$:
- Si $f''(a) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en $x = a$.
- Si $f''(a) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en $x = a$.

En nuestro caso, $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ y $f(x) = x + \frac{1}{x}$ (la suma de un número y su inverso).

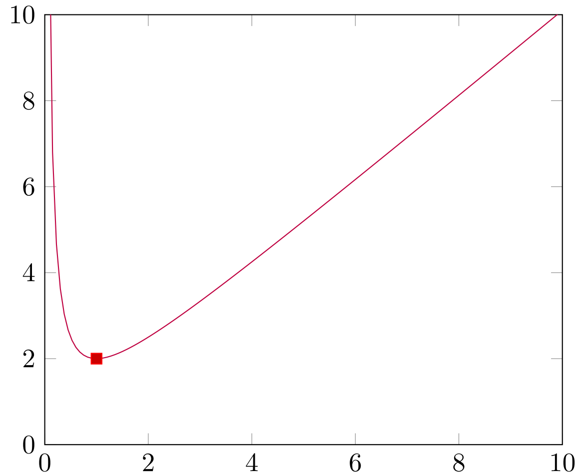
Sabemos que f es al menos dos veces derivable. Hacemos su primera derivada para ver dónde se anula, es decir, buscamos $a \in I^o$ tal que f'(a) = 0.

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 0.$
$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} = 0 \to x^2 - 1 = 0 \to x^2 = 1 \to x = \pm 1 \to a = 1$ ya que $I = (0, +\infty)$ y no cogemos la solución negativa.
En x=a=1 hay un extremo relativo.

Hacemos la segunda derivada de f para comprobar si en x=1 hay un máximo o un mínimo relativo.
$f''(x) = \frac{2}{x^3}$
$f''(1) = \frac{2}{1} = 2 \to$ Hay un mínimo relativo en x=1, ya que la segunda derivada de f en a es positiva.

Tenemos que $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$.
Vemos qué valor toma la derivada para un $x \in (0, 1)$.
$f'(0.5) = -3 < 0$. Por lo tanto $f'(x) < 0, \forall x \in (0, 1)$, por lo tanto, la función f es decreciente en dicho intervalo.

Hacemos lo mismo para un $x \in (1, +\infty)$.
$f'(2) = 0.75 > 0$. Por lo tanto $f'(x) > 0, \forall x \in (1, +\infty)$, por lo que la función f es creciente en dicho intervalo.



Vemos así que $\forall x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$, $f(x) > 2$, y $f(1) = 2$. Por lo tanto, la suma de un número positivo y su inverso siempre es igual o mayor a 2.