17 Estudiar el comportamiento en cero de la función $f: A \to \mathbb{R}$, en cada uno de los siguientes casos:

e) $A = \mathbb{R}^+$, $f(x) = x^{\operatorname{sen} x}$.

Debido al dominio, solo da lugar a estudiar $\lim_{x \to 0^+} x^{\operatorname{sen} x} = 0^0 = \text{Indet.}$

Igualamos el límite a un valor c y aplicamos logaritmos neperianos:

$$\ln c = \ln\left(\lim_{x \to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}\right) = \lim_{x \to 0^+}\left(\ln (x)^{\operatorname{sen} x}\right) = \lim_{x \to 0^+}\left(\operatorname{sen}(x) \cdot \ln x\right) = 0 \cdot \infty = \text{Indet.}$$

Buscamos el cociente para aplicar L'Hôpital:

$$\ln c = \lim_{x \to 0^+}\left(\frac{\ln x}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}\right) = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indet.}$$

Aplicamos L'Hôpital:

$$\ln c = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{-x \cdot \cos(x)} = \frac{0}{0} = \text{Indet.}$$

Volvemos a aplicar L'Hôpital:

$$\ln c = \lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{-\cos(x) + x \cdot \operatorname{sen}(x)} = \frac{0}{-1} = 0$$

Por lo tanto, $\ln c = 0 \Rightarrow c = 1$. Es decir, $\lim_{x \to 0^+} x^{\operatorname{sen} x} = 1$.