
Cálculo II
(Grupo 1º A)
Relación de Ejercicios nº 3

Ejercicio 3.1: Sea $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n$. Dado $a \in \mathbb{R}$, expresar el polinomio $p(x)$ en potencias de $(x - a)$. Como aplicación, expresar en potencias de $(x - 2)$ el polinomio $p(x) = 6 + 7x - 3x^2 - 5x^3 + x^4$.

Ejercicio 3.2: Sea $f(x)$ una función cuyo polinomio de Taylor de grado 3 centrado en el origen es $P_{3,0}^f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$. Calcular el polinomio de Taylor de grado 3 centrado en el origen de la función $g(x) = xf(x)$.

Ejercicio 3.3: Si el polinomio de Taylor de grado 3, centrado en el origen, de la función $f(x)$ es $P_{3,0}(x) = 1 - x + x^2 - x^3$, calcular el polinomio de Taylor del mismo orden y centro de la función $g(x) = e^{f(x)}$.

Ejercicio 3.4: Calcular el polinomio de Taylor de orden n , en el punto $= 0$ (desarrollo de Maclaurin) de las siguientes funciones:

- | | | |
|--------------------|---|-------------------|
| (i) e^x | (ii) $(1 + x)^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) | (iii) $\cos x$ |
| (iv) $\sin(x)$ | (v) $\tan(x)$ | (vi) $\arcsin(x)$ |
| (vii) $\ln(1 + x)$ | (viii) $\arctg(x)$ | |

Ejercicio 3.5: Sean $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ funciones $(n + 1)$ veces derivables en el punto $a \in I$. Sea $h(x) = f(x)g(x)$ para cada $x \in I$. Demostrar que $P_{n,a}^h(x)$ se obtiene del polinomio producto $P_{n,a}^f(x)P_{n,a}^g(x)$ eliminando los términos de orden mayor estricto que n .

Ejercicio 3.6: Sea $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una función $(n + 1)$ veces derivable en el punto $x = 0$ (que es interior a I). Sea $k \in \mathbb{N}$ y $h(x) = f(x^k)$. Demostrar que $P_{nk,0}^h(x) = P_{n,0}^f(x^k)$.

Ejercicio 3.7: Calcular los siguientes límites (utilizando el desarrollo de Taylor):

- | | |
|---|--|
| (i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} (2x^3 \sqrt{1+x^3} + 2\sqrt{1+x^2} - 2 - 2x - x^2)$ | (ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tan x - \sin x) \sin x - \frac{x^4}{2}}{x^6}$ |
| (iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) \sin x - x^2 + x^3}{x^3}$ | (iv) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(1+x) - \sin^2(x)}{1 - e^{-x^2}}$ |
| (v) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}}{x^n}$ | (vi) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}}{x^n}$ |
| (vii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}}{x^4}$ | (viii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin(x)}{e^x - 1 - x - x^2}$ |

Ejercicio 3.8: Estudiar el comportamiento en 0 y $\pm\infty$ de la función $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{x - \sin x}{x^6} \left(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} \right)$, para cada $x \in \mathbb{R}^*$.

Ejercicio 3.9: Probar que $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$, para todo $x \in [0, \pi]$.

Ejercicio 3.10: Calcular el polinomio de Taylor de orden 8 en el punto $x = 0$ de la función $\ln(1 + x^4)$.

Ejercicio 3.11: Calcular un valor aproximado, con un error menor que 10^{-2} , de los siguientes números reales: (i) $\sqrt[3]{7}$, (ii) $\sin \frac{1}{2}$, (iii) $\ln 3$, (iv) \sqrt{e} .

Ejercicio 3.12: Probar que la función $\ln x$ es cóncava hacia abajo. Deducir la Desigualdad de Young: si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, siendo $p > 1$, entonces $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$, para cada $a, b \in \mathbb{R}^+$.

Ejercicio 3.13: Sean I y J intervalos, y $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ funciones cóncavas hacia arriba tales que $f(I) \subseteq J$. Probar que si g creciente entonces $g \circ f$ es cóncava hacia arriba. Deducir que la función $h: I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(x) = e^{f(x)}$ es cóncava hacia arriba.

Ejercicio 3.14: Dar un ejemplo que muestre que la composición de dos funciones cóncavas hacia arriba puede no ser cóncava hacia arriba.

Ejercicio 3.15: En cada uno de los siguientes casos, determinar los intervalos en los que la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo:

- (i) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 10$, (ii) $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + 1}$,
(iii) $f(x) = \ln(1 + x^2)$, (iv) $f(x) = \sin(x)$

Ejercicio 3.16: Demostrar que toda función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cóncava hacia abajo y acotada es constante.

Ejercicio 3.17: Calcular los puntos de inflexión (si los hay) de las funciones

- (i) $f(x) = \sqrt[3]{x + 2}$ (ii) $f(x) = 2x^3 + 9x^2 + 2x + 1$

Ejercicio 3.18: Sea $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una función cóncava hacia arriba. Probar que:

- (i) Si f tiene un mínimo relativo en $x_0 \in I$ entonces f tiene un mínimo absoluto en x_0 .
(ii) Si f es derivable en I y $x_0 \in I$ es un punto crítico de f entonces f alcanza un mínimo absoluto en x_0 .