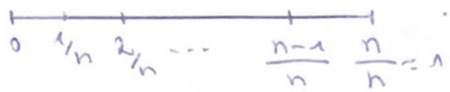
5.1. Calcular usando el Teorema de Cauchy para integrales que $\int_0^1 x^p \, dx = \frac{1}{p+1}$, $(p \in \mathbb{N} \cup \{0\})$.

Para emezar, pongamos $P_N = \{x_0 = 0, x_1 = 1/n, \dots, x_n = \frac{n}{n} = 1\}$.



Sea $f(x) = x^p$, de donde

$f'(x) = p \cdot x^{p-1} > 0$, por lo que f es estrictamente creciente.

(*)

Suma superior de f respecto de la partición P_N:

$$S(f, P_N) = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot \frac{1}{n} = f(1/n)(x_1 - x_0) + \dots$$

Suma inferior de f respecto de la partición P_N:

$$I(f, P_N) = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) \cdot \frac{1}{n} = f(0) \cdot (x_1 - x_0) + \dots$$

(*) $\left\{ \begin{array}{l} \text{De donde, } M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k[\,\} = f(x_k) \text{ y} \\ m_k = \inf\{f(x) : x \in \,]x_{k-1}, x_k]\} = f(x_{k-1}). \end{array} \right.$

Por lo que: $S(f, P_N) = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n}\right)^p + \frac{1}{n} \left(\frac{2}{n}\right)^p + \dots + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n}{n}\right)^p$, y

$I(f, P_N) = \frac{1}{n} \cdot 0^p + \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n}\right)^p + \dots + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^p$.

La suma superior de f respecto de la partición P_N ~~sea~~ nos quedaría de la siguiente forma:

$$S(f, P_N) = \frac{1}{n^{p+1}} \cdot \left(1^p + 2^p + \dots + n^p\right) = \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}}.$$

Buscamos su límite cuando $n \to \infty$; ya que es igual a $\int_0^1 x^p \, dx$.

$\lim_{n \to \infty} S(f, P_N) = \lim_{n \to \infty} \frac{1^p + 2^p + \dots n^p}{n^{p+1}}$; aplicamos el criterio de Stolz: $\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^p}{(n+1)^p - n^{p+1}}$.

Gerardo Arenas Nasrawin

Sabemos que $(n+1)^{p+1} = \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} n^k = n^{p+1} + \frac{(p+1)!}{1!\,p!} \cdot n^p + \dots + \binom{p+1}{p+1} n^0$

$$(n+1)^{p+1} - n^{p+1} = \frac{(p+1)!}{1!\,p!} \cdot n^p + \frac{(p+1)!}{2!\,p!} \cdot n^{p-1} + \dots + 1 =$$

$= (p+1) \cdot n^p + g(n)$, de donde g es un polinomio de grado $p-1$.

Si volvemos al límite: $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^p}{(p+1)\cdot n^p + g(n)} = \frac{\frac{(n+1)^p}{n^p}}{(p+1)\cdot \frac{n^p}{n^p} + \frac{g(n)}{n^p}} =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{(1+1/n)^p}{p+1 + \frac{g(n)}{n^p}} = \underline{\underline{\frac{1}{p+1}}}$.