CONTINUIDAD UNIFORME

Cuando δ depende de ε pero no de x, llegamos a la siguiente definición.

Definición. Una función $f : A \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua en A si para cada cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ (que dependerá de ε) verificando que si $x, y \in A$ son tales que $|y - x| < \delta$, entonces $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$.

El siguiente resultado es obvio.

Proposición. Si $f : A \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua en A entonces es continua en A.

El recíproco del resultado anterior no se verifica.

Puesto que $f : A \to \mathbb{R}$ **no** es uniformemente continua en A si existe $\varepsilon_0 > 0$, tal que para cada $\delta > 0$ encontramos $x_\delta, y_\delta \in A$ tales que $|y_\delta - x_\delta| < \delta$, y $|f(y_\delta) - f(x_\delta)| \geq \varepsilon_0$, podemos probar lo siguiente:

Proposición. Una función $f : A \to \mathbb{R}$ **no** es uniformemente continua en A si, y solo si, existe $\varepsilon_0 > 0$, para el que podemos encontrar sucesiones x_n e y_n en A tales que $y_n - x_n \to 0$ pero $|f(y_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon_0$.

Una propiedad más fuerte que la continuidad uniforme pero más fácil de verificar es la siguiente:

Definición. Se dice que $f : A \to \mathbb{R}$ es lipschitziana en A si existe $M > 0$ tal que

$$|f(y) - f(x)| \leq M|y - x|,$$

para cada $x, y \in A$.

Rudolf Lipschitz (1832-1903)

Observación. Si $f : A \to \mathbb{R}$ es es lipschitziana en A entonces, la constante M más pequeña que podamos poner en la desigualdad anterior es la llamada constante de Lipschitz, que viene dada por

$$M_0 := \sup\left\{\frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|} : x, y \in A \text{ con } x \neq y\right\}.$$

Proposición. Si $f : A \to \mathbb{R}$ es lipschitziana en A entonces f es uniformemente continua en A.

Observación. Si para $M > 0$ verifica se que $|f(y) - f(x)| \leq M|y - x|$, para cada $x, y \in A$, entonces dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ para concluir que si $|y - x| < \delta$ entonces $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$.

Teorema. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua en I y derivable I^o. Son equivalentes:

(i) f es lipschitziana en I.

(ii) f' está acotada en I^o.

En caso de que se verifiquen (i) e (ii) (que son equivalentes) la constante de Lipschitz de f viene dada por

$$M_0 := \sup\{\, |f'(x)| : x \in I^o\}.$$

Dem. (i) ⇒ (ii). Puesto que f es lipschitziana en I ha de existir $M > 0$ tal que $\frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|} \leq M$, si $x, y \in I$, con $x \neq y$. De ahí que $|f'(x)| \leq M$ para cada $x \in I^o$.

(ii) ⇒ (i). Por el TVM si $x, y \in I$, con $x \neq y$ entonces existe c entre x e y tal que $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$, de donde, si $M > 0$ es tal que $|f'(x)| \leq M$ para $x \in I^o$, entonces $|f(y) - f(x)| \leq M|y - x|$. El resto es claro. ■

Por tanto las funciones que son derivables en un intervalo son lipschitzianas en dicho intervalo si y solo si, su derivada está acotada en el intervalo. En particular:

Corolario. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es de clase $C^1([a,b])$ entonces f es lispschitziana con constante de Lipschitz

$$M_0 := \sup\{\, |f'(x)| : \; x \in]a,b[\, \}.$$

Observación. Las funciones uniformemente continuas son continuas, pero sabemos que hay funciones continuas, definidas en un intervalo, que no son uniformemente continuas. En este caso podríamos afirmar que el intervalo sobre el que hemos definido la función no es cerrado y acotado. De hecho, para funciones definidas en un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$, la continuidad y la continuidad uniforme son propiedades equivalentes como demostramos a continuación.

Eduard Heine (1821-1881)

Teorema de Heine. Una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua en $[a,b]$ si, y solo si, es continua en $[a,b]$.

Dem. Supongamos que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua pero no es uniformemente continua en $[a,b]$. Entonces, existe $\varepsilon_0 > 0$, para el que podemos encontrar sucesiones x_n e y_n en A tales que $y_n - x_n \to 0$ pero $|f(y_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon_0$. Por el Teorema de Bolzano-Weierstrass, como x_n e y_n están acotadas, existe una parcial $\sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $x_{\sigma(n)} \to x$ y $y_{\sigma(n)} \to y$ (primero se obtiene una parcial $y_{\tilde{\sigma}(n)} \to y$. Luego se obtiene una parcial convergente $x_{\sigma(n)} \to x$ de $x_{\tilde{\sigma}(n)}$, y esta última es la parcial - que es una parcial de la parcial – es la sucesión parcial buscada).

Puesto que $y_n - x_n \to 0$ e $y_{\sigma(n)} - x_{\sigma(n)} \to y - x$, concluimos que $y = x$. Pero, por la continuidad de f, ha de ser $f(y_{\sigma(n)}) - f(x_{\sigma(n)}) \to f(y) - f(x) = 0$ (por ser $x = y$), lo que contradice que $|f(y_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon_0$. Esto prueba que si f es continua en $[a,b]$ entonces es uniformemente continua en $[a,b]$, y el recíproco es obvio. ∎