Antonio Martínez e Ignacio Sánchez

Recuperación

1. *a*) **(1,5 puntos)** Definid el concepto de endomorfismo autoadjunto de un espacio vectorial euclídeo (V, g). A partir de esta definición y de la de vector propio, demostrad que si $\overline{u}$, $\overline{v} \in V$ son dos vectores propios de un endomorfismo autoadjunto f, correspondientes a valores propios distintos, entonces $\overline{u}$ y $\overline{v}$ son ortogonales.

   b) Responded razonadamente si son ciertas o no las dos afirmaciones siguientes:

      1) **(1 punto)** En un espacio vectorial métrico cualquiera (V, g) dos vectores ortogonales distintos y no nulos son siempre linealmente independientes.

      2) **(1 punto)** En el plano euclídeo $\mathbb{R}^2$ con su métrica estándar consideramos el giro g_θ de ángulo $\theta \in (0, 2\pi)$ en el sentido inducido por la base usual y la simetría ortogonal h con respecto a la recta de ecuación $y = 0$. Entonces $f = g_\theta \circ h$ es la simetría ortogonal con respecto a la recta de ecuación $(\cos\theta - 1)x + (\operatorname{sen}\theta)y = 0$.

2. **(2 puntos)** Sea V un espacio vectorial tridimensional y $\mathcal{B} = (\overline{b}_1, \overline{b}_2, \overline{b}_3)$ una base de V. Consideramos el endomorfismo f del que se sabe lo siguiente:

   a) $f(\overline{b}_1) = 3\overline{b}_1 + 2\overline{b}_2 + 2\overline{b}_3, \quad f(\overline{b}_2) = 2\overline{b}_1 + 2\overline{b}_2$.

   b) $M(f, \mathcal{B})$ es simétrica.

   c) El vector $\overline{u} = 2\overline{b}_1 - 2\overline{b}_2 - \overline{b}_3$ está en el núcleo de f.

   Calculad $M(f, \mathcal{B})$ y estudia si f es diagonalizable. En caso afirmativo, obtened una base $\mathcal{C}$ de V tal que $M(f, \mathcal{C})$ sea diagonal.

3. **(1,5 puntos)** Sea $F(x, y) = xy$ la forma cuadrática asociada a la métrica g de $\mathbb{R}^2$. Encontrad una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ tal que $M(g, \mathcal{B})$ sea diagonal. Deducid de qué tipo es la métrica g.

4. En el espacio vectorial S_2 de las matrices simétricas de orden 2 consideramos la forma bilineal g, definida como:

$$g(A, C) = traza(AC),$$

   y el endomorfismo $f : S_2 \to S_2$, siguiente:

$$f\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a/\sqrt{2} \\ a/\sqrt{2} & -\sqrt{2}c \end{pmatrix}.$$

   a) **(1,5 puntos)** Demostrad que g es una métrica euclídea sobre S_2. Calculad una base ortonormal de (S_2, g).

   b) **(1,5 puntos)** Probad que f es una isometría de (S_2, g). Estudiad los subespacios propios de f y deducid que se trata de la composición de una reflexión y de un giro.

13 de septiembre 2013

2. $\dim(V)=3$ $B=(\bar{b}_1,\bar{b}_2,\bar{b}_3)$ base de V

Se considera un endomorfismo del que se sabe:

a) $f(\bar{b}_1)=3\bar{b}_1+2\bar{b}_2+2\bar{b}_3$, $f(\bar{b}_2)=2\bar{b}_1+2\bar{b}_2$

b) $M(f,B)$ es simétrica

c) $f(\vec{u})=\vec{0}$ con $\vec{u}=2\bar{b}_1-2\bar{b}_2-\bar{b}_3$

Calcular $M(f,B)$, determinar si f es diag. y, en caso de serlo, hallar una base C tal que $M(f,C)$ sea diagonal.

$$f(\bar{b}_1)=3\bar{b}_1+2\bar{b}_2+2\bar{b}_3 \qquad \underbrace{f(2\bar{b}_1-2\bar{b}_2-\bar{b}_3)=0}$$

$$f(\bar{b}_2)=2\bar{b}_1+2\bar{b}_2$$

$$f(\bar{b}_3)=2f(\bar{b}_1)-2f(\bar{b}_2)$$

$$\Rightarrow f(\bar{b}_3)=6\bar{b}_1+4\bar{b}_2+4\bar{b}_3-4\bar{b}_1-4\bar{b}_2=2\bar{b}_1+4\bar{b}_3$$

$$M(f,B)=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&2&0\\2&0&4\end{pmatrix}\Rightarrow \text{Es simétrica}$$

$$P_f(\lambda)=\det\begin{pmatrix}3-\lambda&2&2\\2&2-\lambda&0\\2&0&4-\lambda\end{pmatrix}=(\lambda^2-5\lambda+6)(4-\lambda)-8+4\lambda-16+4\lambda=$$

$$=-\lambda^3+9\lambda^2-26\lambda+24-8+4\lambda-16+4\lambda=$$

$$=-\lambda^3+9\lambda^2-18\lambda=-\lambda(\lambda^2-9\lambda+18)$$

$\lambda = \frac{9 \pm 3}{2} \begin{array}{l} \to 3 \\ \to 6 \end{array}$ $\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = 3$ $\lambda_3 = 6$

$a_{\lambda_1} = 1 = g_{\lambda_1}$ $a_{\lambda_2} = 1 = g_{\lambda_2}$ $a_{\lambda_3} = 1 = g_{\lambda_3}$

C será una base de vectores propios. Hallemos los subespacios propios y sus bases:

$$V_0 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \mathcal{L}\{(2,-2,-1)\}$$

$$2x + 2y = 0 \Rightarrow y = 2z$$
$$2x + 4z = 0 \Rightarrow x = -2z$$

$$V_3 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \mathcal{L}\{(1,2,-2)\}$$

$$2x - y = 0 \Rightarrow x = -z/2$$
$$2y + 2z = 0 \Rightarrow y = -z$$

$$V_6 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \underbrace{\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \mathcal{L}\{(2,1,2)\}$$

$$2x - 4y = 0 \Rightarrow y = \frac{z}{2}$$
$$2x - 2z = 0 \Rightarrow x = z$$

$$\boxed{C = \{(2,-2,-1), (1,2,-2), (2,1,2)\}}$$

3. $F(x,y) = xy$ forma cuadrática de una métrica. Encontrar base B de $\mathbb{R}^2$ tal que $M(g,B)$ sea diagonal. Clasificar la métrica.

$$M(g, B_u) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$ NO

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \xLeftrightarrow{F_1 : F_1 + F_2} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \xLeftrightarrow{C_1 : C_1 + C_2} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \xLeftrightarrow{F_2 : F_2 - \frac{1}{2} F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$C_2 : C_2 - \frac{1}{2} C_1 \Leftrightarrow$

$$(1,1)\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

$\Rightarrow$ Ambos son unitarios y ortogonales, por lo tanto forman base ortonormal

$$(\mathcal{L}\{(1,1)\})^\perp = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, (x,y)\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0\right\} =$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 1/2\, x + 1/2\, y = 0\} = \mathcal{L}\{(1,-1)\}$$

$$(1,-1)\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1$$

$$P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} \Rightarrow P^T\cdot M(g,B_u)\cdot P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1/2\\ 1/2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ -1/2 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow$$ Se trata de una métrica indefinida no degenerada rango 2, índice 1 y signatura (1,1)

4. Espacio vectorial S_2 de las matrices simétricas de orden 2. Se considera la forma bilineal g:

$$g(A,C)=\text{traza}(AC)$$

y el endomorfismo $f: S_2 \to S_2$ siguiente:

$$f\begin{pmatrix}a & c\\ c & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b & a/\sqrt{2}\\ a/\sqrt{2} & -\sqrt{2}c\end{pmatrix}$$

a) Demostrar que g es euclídea y calcular una base ortonormal.

$$A=\begin{pmatrix}a & c\\ c & b\end{pmatrix}$$

$$g(A,A)=tr(A\cdot A)=tr\begin{pmatrix}a^2+c^2 & ac+bc\\ ac+bc & c^2+b^2\end{pmatrix}=a^2+b^2+2c^2\geq 0$$

y la igualdad se da si $a=b=c=0$

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow \text{Matriz nula}$$

Por lo tanto, es euclídea.

$$B=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\}$$

$$tr\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)=tr\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=1$$

Gram-Schmidt:

$$tr\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)=tr\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=1$$

$$u_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$u_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\frac{g\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)}{\left\|\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\|^2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\frac{tr\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\|^2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$u_3=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}-\frac{g\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)}{1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}-\frac{g\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)}{1}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}-0-0=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\quad tr\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)=tr\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=2$$

Base ortonormal: $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & \sqrt{2}/2\\ \sqrt{2}/2 & 0\end{pmatrix}\right\}$

b) Probar que f es isometría de (S_2, g). Estudiar los subespacios propios de f y deducir que se trata de la composición de una reflexión y un giro.

$$f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \quad f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Por el anterior apartado

$$\mathcal{M}(f,B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{M}(g,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

f isometría $\Leftrightarrow$ $\mathcal{M}(g,B) = \underbrace{\mathcal{M}(f,B)^t \cdot \mathcal{M}(g,B) \cdot \mathcal{M}(f,B)}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathcal{M}(g,B) \checkmark$$

Es isometría

$$P_f(\lambda) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 - 1 = -(\lambda^3+1) = -(\lambda+1)(\lambda^2-\lambda+1)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & & -1 & 1 & -1 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$\lambda = \dfrac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \nexists$ $\qquad \det(f) = -1$

$\lambda_1 = -1 \quad a_{\lambda_1} = 1 = g_{\lambda_1}$

Como $\dim(V_{-1}) = 1$ y $\dim(V_1) = 0$, se trata de la composición de una rotación de ángulo $\theta = \arccos\left(\frac{1}{2}(tr(f)+1)\right) = \frac{\pi}{3}$ y eje V_{-1} con una simetría especular respecto de $V_{-1}^{\perp}$. Hallemos V_{-1}:

$$V_{-1} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \mathcal{L}\{(1,-1,-1)\} = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & -1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} x+y=0 \\ y-z=0 \\ x+z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y=0 \Rightarrow x=-z \\ y-z=0 \\ -y+z=0 \end{array}\right\} \; y=z$$

$$(V_{-1})^{\perp} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ (1,-1,-1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right\} = \mathcal{L}\{(1,1,0),(1,0,1)\} =$$

$$= \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$x - y - z = 0 \Rightarrow$ Sol.: $(y+z, y, z)$

1. a) Definir endomorfismo autoadjunto de un EVME. A partir de dicha definición y la de vector propio, demostrar que si $\vec{u}, \vec{v} \in V$ son vectores propios de valores propios distintos de un endomorfismo autoadjunto f, entonces $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales.

Un endomorfismo autoadjunto de un EVME es aquel tal que dados dos vectores cualesquiera $\vec{u}, \vec{v} \in V$ verifica que $g(f(\vec{u}), \vec{v}) = g(\vec{u}, f(\vec{v})) \ \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$

Sean ahora $\vec{u}, \vec{v} \in V$ vectores propios asociados a los valores propios $\lambda, \mu \in K$ respectivamente con $\lambda \neq \mu$ ($\vec{u}$ y $\vec{v}$ son no nulos por ser vectores propios):

$$g(f(\vec{u}), \vec{v}) = g(\lambda\vec{u}, \vec{v}) = \lambda g(\vec{u}, \vec{v})$$
$$g(\vec{u}, f(\vec{v})) = g(\vec{u}, \mu\vec{v}) = \mu g(\vec{u}, \vec{v})$$

Como $g(f(\vec{u}), \vec{v}) = g(\vec{u}, f(\vec{v}))$, $\lambda g(\vec{u}, \vec{v}) = \mu g(\vec{u}, \vec{v})$

$$\Downarrow$$
$$\lambda g(\vec{u}, \vec{v}) - \mu g(\vec{u}, \vec{v}) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$(\lambda - \mu) g(\vec{u}, \vec{v}) = 0$$

Como $\lambda \neq \mu$, $\lambda - \mu \neq 0$, por lo que solo puede ser que $g(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \Rightarrow \vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales ✓

b) 1) En un EVM (V, g) dos vectores ortogonales distintos y no nulos son siempre L.I. Falso.

Sea una métrica indefinida g en $\mathbb{R}^2$ que respecto de la base usual:

$$M(g, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Y sean los vectores $(1,1)$ y $(2,2)$, los cuales son distintos:

$$g((1,1),(2,2)) = (1,1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = (1,-1)\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$
$$\Downarrow$$

Son ortogonales y, sin embargo, son L.D ya que $(2,2) = 2(1,1)$

2) En EVME $\mathbb{R}^2$ consideramos el giro g_θ de ángulo θ en el sentido inducido por B_u y la simetría ortogonal h con respecto a la recta de ecuación $y = 0$. Entonces $f = g_\theta \circ h$ es la simetría ortogonal con respecto a la recta de ecuación $(\cos\theta - 1)x + (\operatorname{sen}\theta)y = 0$. Verdadero

Empecemos hallando $M(h, B_u)$. Como es simetría ortogonal con respecto a $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = 0\} = \mathcal{L}\{(1,0)\}$, $U = V_1$ y $U^\perp = V_{-1}$. Calculemos $V_{-1} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x\ y)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\} =$

$= \mathcal{L}\{(0,1)\} \Rightarrow h(0,1) = (0,-1)$

$$M(h, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Como g_θ es el giro de ángulo θ con sentido inducido por B_u, $M(g_\theta, B_u) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Ya podemos hallar $M(f, B_u) = M(g_\theta, B_u) \cdot M(h, B_u) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$p_f(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \cos\theta - \lambda & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta =$$

$$= \lambda^2 - \underbrace{(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta)}_{1} = \lambda^2 - 1 = (\lambda+1)(\lambda-1)$$

$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -1$

$a_{\lambda_1} = g_{\lambda_1} = 1 = g_{\lambda_2} = a_{\lambda_2}$

Como $M(f, B_u)$ es semejante a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 = I_2$, claramente f es simetría ortogonal respecto de V_1:

$$V_1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \begin{pmatrix} \cos\theta - 1 & \operatorname{sen}\theta \\ \underbrace{\operatorname{sen}\theta \quad -\cos\theta - 1}_{} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$\rightarrow \cos\theta x - x + \operatorname{sen}\theta y = 0$

$\Updownarrow$

$$\boxed{(\cos\theta - 1)x + \operatorname{sen}\theta y = 0}$$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (\cos\theta - 1)x + \operatorname{sen}\theta y = 0\}$

$\rightarrow$ * Se ha eliminado una fila ya que $\det \begin{pmatrix} \cos\theta - 1 & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta - 1 \end{pmatrix} = -\cos^2\theta + 1 + \cos\theta - \cos\theta - \operatorname{sen}^2\theta =$

$-(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta) + 1 = -1 + 1 = 0$