Ejercicio 3.4 rel 3

Lorenax Caceres

April 2021

Ejercicio 3.4 Calcular el polinomio de Taylor de orden n, en el punto (desarrollo de Maclaurin) de las siguientes funciones:

1. vii) $\mathbf{ln(1+x)}$

   Sabemos que el polinomio de Taylor en 0 de orden n va a ser de la forma:

$$\mathbf{p_n^f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, (k = 0, 1, ..., n)}$$

   Por ello tenemos que determinar de una forma genérica $f^{(k)}$. Vemos las primeras derivadas: $f'(x) = \frac{1}{x+1}$, $f''(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$, $f'''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$, $f^{(4)}(x) = \frac{-6}{(x+1)^4}$.
   Con esto, podemos pensar que hay un patrón , el cual podemos expresar como

$$f^{(k)} = \frac{(-1)^{(k+1)}(k-1)!}{(1+x)^k}, \forall k \in N$$

   Esto es una primera intuición, y es necesario probarlo, para lo cual nos apoyamos en la inducción.Definimos el conjunto $A = \{n \in N | f^{(n)} = \frac{(-1)^{(n+1)}(n-1)!}{(1+x)^n}\}$. Empezamos por n=1.

$$f'(x) = \frac{1}{x+1}$$

   Vemos que se cumple, luego solo nos falta ver si se cumple que cuando n pertenece al conjunto A, también lo hará n+1. Si $n \in A \Rightarrow f^{(n)} = \frac{(-1)^{(n+1)}(n-1)!}{(1+x)^n}$, luego sabiendo esto, derivamos para pasar de $f^{(n)}$ a $f^{(n+1)}$.

$$f^{(n+1)} = (-1)^{(n+1)}(n-1)!(1+x)^{-n-1}(-n) = (-1)^{n+2}(n)!(1+x)^{-n-1} = \frac{(-1)^{(n+2)}(n)!}{(1+x)^{n+1}}$$

   Como podemos ver se verifica, luego queda demostrado por inducción que $f^{(k)} = \frac{(-1)^{(k+1)}(k-1)!}{(1+x)^k}, \forall k \in N$.
   Teniendo todo esto en cuenta, ya podemos dar el polinomio de Taylor:

$$p_n^f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{(k+1)} x^k}{k}$$

2. viii) $\mathbf{arctg(x)}$

   De nuevo, comenzamos recordando la expresión general:

$$\mathbf{p_n^f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, (k = 0, 1, ..., n)}$$

   En clase hemos visto el desarrollo de $\frac{1}{1+x}$:

$$g(x) = \frac{1}{1+x} \Rightarrow P^g_{n,0}(x) = 1 - x + x^2 - x^3 ... = \sum_{k=0}^{n} (-x)^k$$

Por el ejercicio 6 sabemos que $P^h_{n+k,0}(x) = P^f_{n,0}(x^k)$ y por tanto, $P^g_{n+2,0}(x) = P^h_{n,0}(x^2)$, siendo $h = \frac{1}{1+x^2}$:

$$P^h_{n,0}(x^2) = P^g_{n+2,0}(x) \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k - 1}{-2} x^k = 1 - x^2 + x^4 - x^6 ...$$

Recordemos que si conocemos el desarrollo de la derivada de una función, conocemos el de la función, y tenemos:

$$P^f_{n,0} = \int (P^{f\prime}{}_{n,0}) dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} ...$$