Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Cálculo I – Evaluación 1. Soluciones

Ejercicio 1. Sean A y B conjuntos no vacíos y mayorados de números reales positivos. Prueba que el conjunto

$$C = \left\{ab - c^2 \;:\; a\in A,\; b\in B,\; c\in B\right\}$$

está mayorado y minorado y calcula su supremo y su ínfimo.

Solución. En estos ejercicios hay que partir de los datos que nos dan. Nos dicen que A y B son conjuntos no vacíos mayorados, y por tanto podemos considerar sus supremos. También nos dicen que $A \subset \mathbb{R}^+$ y $B \subset \mathbb{R}^+$ por lo que están minorados, y podemos considerar sus extremos inferiores. Como nos piden calcular el supremo y el ínfimo de C tenemos que conjeturar su posible valor. Para ello podemos guiarnos por lo que pasaría en el caso de que A y B tuvieran máximo y mínimo. En tal caso está claro que C tendría máximo igual a $\operatorname{máx}(A)\operatorname{máx}(B) - \operatorname{mín}(B)^2$, y mínimo igual $\operatorname{mín}(A)\operatorname{mín}(B) - \operatorname{máx}(B)^2$. Como no sabemos si A o B tienen máximo o mínimo, la conjetura razonable es que el supremo de C debería ser $\sup(A)\sup(B) - \operatorname{ínf}(B)^2$ y el ínfimo $\operatorname{ínf}(A)\operatorname{ínf}(B) - \sup(B)^2$. Vamos a demostrarlo partiendo de los datos del ejercicio sin suponer nada más.

Pongamos $\alpha = \sup(A)$, $\beta = \sup(B)$, $\gamma = \operatorname{ínf}(B)$. Como α es un mayorante de A, para todo $a\in A$ tenemos que $a \leqslant \alpha$. Como para todo $b\in B$ es $b > 0$, deducimos que $ab \leqslant \alpha b$. Como $b \leqslant \beta$ y $\alpha > 0$, deducimos que $\alpha b \leqslant \alpha\beta$. Por tanto $ab \leqslant \alpha\beta$ para todos $a\in A$, $b\in B$. Como $B \subset \mathbb{R}^+$, se verifica que 0 es un minorante de B por lo que $\gamma \geqslant 0$. Para todo $c\in B$ tenemos que $0 \leqslant \gamma \leqslant c$ y por tanto $\gamma^2 \leqslant c^2$. Hemos probado que para todos $a\in A$, $b, c\in B$ se verifica que $ab - c^2 \leqslant \alpha\beta - \gamma^2$. Por tanto $\alpha\beta - \gamma^2$ es un mayorante de C. Ahora que ya sabemos que C está mayorado, podemos considerar su supremo. Sea $\delta = \sup(C)$. Por definición de supremo, mínimo mayorante, tenemos que $\delta \leqslant \alpha\beta - \gamma^2$.

Para probar la desigualdad contraria partimos ahora de δ. Observa que ya hemos usado que δ es el mínimo mayorante de C pero no hemos usado todavía que α y β sean los mínimos mayorantes de A y de B ni que γ sea el máximo minorante de B. Partiendo de δ, tenemos que para todos $a\in A$, $b, c\in B$ se verifica que $ab - c^2 \leqslant \delta$ y, teniendo en cuenta que $b > 0$, deducimos que $a \leqslant \frac{1}{b}(\delta + c^2)$. Esta desigualdad nos dice que para cada par de números $b, c\in B$ el número $\frac{1}{b}(\delta + c^2)$ es un mayorante de A y, por tanto, $\alpha \leqslant \frac{1}{b}(\delta + c^2)$ (fíjate que ahora sí usamos que α es el mínimo mayorante de A). Deducimos ahora que para todos $b, c\in B$ se verifica que $b \leqslant \frac{1}{\alpha}(\delta + c^2)$, lo que nos dice que para cada $c\in B$ el número $\frac{1}{\alpha}(\delta + c^2)$ es un mayorante de C y, por tanto, $\beta \leqslant \frac{1}{\alpha}(\delta + c^2)$ (fíjate que ahora sí usamos que β es el mínimo mayorante de B). Deducimos que $c^2 \geqslant \alpha\beta - \delta$ para todo $c\in B$. Para tomar raíces cuadradas en esta desigualdad debemos asegurarnos de que $\alpha\beta - \delta \geqslant 0$, pero ello es consecuencia de que, por la primera desigualdad antes obtenida $\delta \leqslant \alpha\beta - \gamma^2$, se verifica que $\alpha\beta - \delta \geqslant \gamma^2$ (también podemos razonar: como $\alpha\beta$ es evidentemente un mayorante de C debe ser $\alpha\beta \geqslant \delta$). Por tanto podemos tomar raíces cuadradas y obtenemos $c \geqslant \sqrt{\alpha\beta - \delta}$, lo que nos dice que el número $\sqrt{\alpha\beta - \delta}$ es un minorante de C por lo que $\sqrt{\alpha\beta - \delta} \leqslant \gamma$ (fíjate que ahora sí usamos que γ es el máximo minorante de B). Hemos probado que $\alpha\beta - \delta \leqslant \gamma^2$, esto es, $\delta \geqslant \alpha\beta - \gamma^2$. Concluimos que $\delta = \alpha\beta - \gamma^2$.

Para probar que el ínfimo de C es $\operatorname{ínf}(A)\operatorname{ínf}(B) - \sup(B)^2$ se razona de forma parecida. $\square$

Comentarios. Como tantas veces he repetido en clase, comprender muy bien los conceptos de supremo e ínfimo y saber usarlos es imprescindible para progresar en el Análisis Matemático. Y ése es un trabajo que hay que hacer en este curso porque después ya es tarde. Hemos hecho ejercicios parecidos a este y, salvo alguna excepción, casi todos lo hacéis correctamente. Hay un detalle que es importante y quiero comentarlo. En el razonamiento anterior podríamos haber procedido como sigue:

> Para todos $a\in A$, $b, c\in B$ se verifica que $ab - c^2 \leqslant \delta$. *Fijamos* $a\in A$ y $b\in B$ y deducimos que $ab - \delta \leqslant c^2$,de donde, $\sqrt{ab - \delta} \leqslant c$ *etcétera*. ¿Te das cuenta de que aquí hay algo que

no es correcto? A saber, el número $ab - \delta$ podría ser negativo para algunos valores de $a \in A$ y de $b \in B$.

Antes de aplicar la función “raíz cuadrada” a un número debes asegurarte de que no es negativo.

Ejercicio 2. Sean A y B conjuntos no vacíos de números reales tales que $B \subset \mathbb{R}^+$ y A está mayorado. Sea $\alpha = \sup(A)$ y $\beta = \inf(B)$. Supongamos que $\alpha < \beta^2$. Definamos:

$$C = \left\{ \frac{1}{b^2 - a} \, : \, b \in B, \, a \in A \right\}$$

Prueba que $\sup(C) = \dfrac{1}{\beta^2 - \alpha}$. ¿Qué puedes decir del ínfimo de C?

Solución. Para todo $a \in A$ y para todo $b \in B$ se verifica que:

$$\left. \begin{array}{c} a \leqslant \alpha \\ 0 \leqslant \beta \leqslant b \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{c} -\alpha \leqslant -a \\ \beta^2 \leqslant b^2 \end{array} \right\} \implies 0 < \beta^2 - \alpha \leqslant b^2 - a \implies 0 < \frac{1}{b^2 - a} \leqslant \frac{1}{\beta^2 - \alpha}$$

Hemos probado así que $\dfrac{1}{\beta^2 - \alpha}$ es un mayorante de C. Sea $\gamma = \sup(C) > 0$. Por definición de supremo, tenemos que $\gamma \leqslant \dfrac{1}{\beta^2 - \alpha}$.

Por otra parte, para todo $a \in A$ y para todo $b \in B$ se verifica que:

$$0 < \frac{1}{b^2 - a} \leqslant \gamma \implies \frac{1}{\gamma} \leqslant b^2 - a \implies a \leqslant b^2 - \frac{1}{\gamma}$$

Esta última desigualdad nos dice que para cada $b \in B$ el número $b^2 - \dfrac{1}{\gamma}$ es un mayorante de A, luego, por definición de supremo, ha de ser $\alpha \leqslant b^2 - \dfrac{1}{\gamma}$.

Deducimos que para todo $b \in B$ se verifica que $\alpha + \dfrac{1}{\gamma} \leqslant b^2$. Como $\alpha + \dfrac{1}{\gamma} \geqslant \alpha + \beta^2 - \alpha = \beta^2 \geqslant 0$, deducimos que $\sqrt{\alpha + \dfrac{1}{\gamma}} \leqslant b$. Lo que nos dice que el número $\sqrt{\alpha + \dfrac{1}{\gamma}}$ es un minorante de B, luego, por definición de ínfimo, ha de de ser $\sqrt{\alpha + \dfrac{1}{\gamma}} \leqslant \beta$, es decir, $\alpha + \dfrac{1}{\gamma} \leqslant \beta^2$. Hemos probado así que $\dfrac{1}{\gamma} \leqslant \beta^2 - \alpha$, es decir, $\gamma \geqslant \dfrac{1}{\beta^2 - \alpha}$. Esta desigualdad y la anterior prueban la igualdad del enunciado.

Puesto que $C \subset \mathbb{R}^+$ tenemos que $\inf(C) \geqslant 0$. Es claro que el valor de $\inf(C)$ depende de cómo sean los conjuntos A y B.

- B no mayorado. En este caso, dado $\varepsilon > 0$, y fijado un elemento $a_0 \in A$, existe $b_0 \in B$ tal que $b_0^2 > a_0 + \frac{1}{\varepsilon}$ lo que implica que $\frac{1}{b_0^2 - a_0} < \varepsilon$. Concluimos que $\inf(C) = 0$.
- A no está minorado. En este caso, dado $\varepsilon > 0$, y fijado un elemento $b_0 \in B$, existe $a_0 \in A$ tal que $a_0 < b_0^2 - \frac{1}{\varepsilon}$, y por tanto $\frac{1}{\varepsilon} < b_0^2 - a_0$ lo que implica que $\frac{1}{b_0^2 - a_0} < \varepsilon$. Concluimos que $\inf(C) = 0$.
- Si B está mayorado y A minorado, entonces puede probarse que $\inf(C) = \dfrac{1}{\sup(B)^2 - \inf(A)}$.

Comentario. Creo que la gran mayoría del curso ha entendido los conceptos de supremo e ínfimo y sabe trabajar con ellos. Es un buen logro para empezar. Por otra parte, hay detalles que muchos no tenéis en cuenta como, por ejemplo, antes de usar la raíz cuadrada de un número asegurarse de que dicho número no es negativo, o asegurarse de que un número es distinto de cero antes de dividir por él. Los matemáticos siempre tenemos muy presentes estas cosas. He querido darle a esos detalles la importancia que merecen y eso ha hecho que las calificaciones sean un poco más bajas. No creo que a nadie perjudique mucho tener un 7 en vez de un 8. Calificar no es una ciencia exacta y creo que merece la pena dar un toque de atención sobre la importancia que tiene en Matemáticas estar muy atento a lo que se hace y justificar cualquier paso que no sea más o menos evidente.