5.10 Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua y $\alpha\in\mathbb{R}$. Demostrar que $\alpha=\int_a^b f(x)dx$

$\iff \forall P\in\mathcal{P}[a,b]$ existe al menos una $\sigma(f,P)$ tal que $\alpha=\sigma(f,P)$

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua, por el teorema de la integral de Cauchy $I(f)=S(f)$

~~Ahora~~ $\forall P\in\mathcal{P}[a,b]$ $\quad I(f,P)\leq\sigma(f,P)\leq S(f,P)$ $\quad$ y $\quad I(f,P)\leq I(f)=S(f)\leq S(f,P)$

Como f continua y toma valores en $\mathbb{R}$, $\sigma(f,P)$ toma valores en $[I(f,P),S(f,P)]$, de modo que sea cual sea $I(f)$, como $I(f)\in[I(f,P),S(f,P)]$, $\exists\,\sigma(f,P)$ tal que $\sigma(f,P)=I(f)=$

$=\alpha=\int_a^b f(x)dx$