4. Se inscribe un rectángulo en la elipse $\dfrac{x^2}{400} + \dfrac{y^2}{225} = 1$ con sus lados paralelos a los ejes. Hállense las dimensiones del rectángulo para que:

a) El área sea máxima.

Vamos a hallar la esquina superior derecha del rectángulo (x, y). Como la elipse está centrada en el origen de coordenadas, supongamos sin pérdida de generalidad que $x > 0, \; y > 0$. Además, la longitud del lado horizontal del rectángulo es $2x$, y la del lado vertical, $2y$. Como el punto (x, y) está en la elipse, debe cumplir que $\dfrac{x^2}{400} + \dfrac{y^2}{225} = 1$ o, equivalentemente, $y = \sqrt{225 - \dfrac{9}{16}x^2}$.

Así pues, el área del rectángulo viene dada por $4xy = 4x\sqrt{225 - \dfrac{9}{16}x^2}$. Llamemos a esta última expresión $f(x)$ y vamos a encontrar el máximo de dicha función. Su derivada viene dada por

$$f'(x) = 4\sqrt{225 - \frac{9}{16}x^2} - \frac{9}{4}\frac{x^2}{\sqrt{225 - \frac{9}{16}x^2}} = \frac{1800 - 9x^2}{2\sqrt{225 - \frac{9}{16}x^2}}$$

Tenemos que encontrar soluciones a

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow \frac{1800 - 9x^2}{2\sqrt{225 - \frac{9}{16}x^2}} = 0 \Longrightarrow 1800 - 9x^2 = 0 \Longrightarrow x = \pm 10\sqrt{2}$$

y nos quedamos con la solución positiva. Vamos a comprobar que, en efecto, es un máximo. Para ello nos tomamos un valor entre $-10\sqrt{2}$ y $10\sqrt{2}$ y observamos su signo. Por ejemplo, $f'(0) = 60 > 0$. Tomamos ahora un valor mayor que $10\sqrt{2}$. Por ejemplo, 15. $f'(15) = -\dfrac{30\sqrt{7}}{7} < 0$. Por tanto, podemos confirmar que es un máximo.

$$y = \sqrt{225 - \frac{9}{16}x^2} = \sqrt{225 - \frac{9}{16}200} = \frac{15\sqrt{2}}{2}$$

En definitiva, el rectángulo pedido es el rectángulo cuyos vértices son

$$\left(10\sqrt{2}, \frac{15\sqrt{2}}{2}\right), \left(-10\sqrt{2}, \frac{15\sqrt{2}}{2}\right), \left(-10\sqrt{2}, -\frac{15\sqrt{2}}{2}\right) \text{ y } \left(10\sqrt{2}, -\frac{15\sqrt{2}}{2}\right)$$

b) El perímetro sea máximo.

El perímetro del rectángulo que buscamos es $4x + 4y = 4x + 4\sqrt{225 - \dfrac{9}{16}x^2}$. Llamamos a esta última expresión $g(x)$ y vamos a encontrar el máximo de esta función. Su derivada viene dada por

$$g'(x) = 4 - \frac{9}{4}\frac{x}{\sqrt{225 - \frac{9}{16}x^2}}$$

Tenemos que encontrar soluciones a

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 \Longleftrightarrow 4 - \frac{9}{4}\frac{x}{\sqrt{225 - \frac{9}{16}x}} = 0 \;&\Longrightarrow\; 16\sqrt{225 - \frac{9}{16}x^2} = 9x \\ &\Longrightarrow\; 16^2\left(225 - \frac{9}{16}x^2\right) = 81x^2 \\ &\Longrightarrow\; 225x^2 = 16^2 \cdot 225 \\ &\Longrightarrow\; x = \pm 16 \end{aligned}$$

y nos quedamos con la solución positiva. Para comprobar que es un máximo, tomamos un valor entre -16 y 16, por ejemplo, el 0. $g'(0) = 4 > 0$. Tomamos ahora un valor mayor que 16. Por ejemplo, el 17. $g'(17) < 0$. Por tanto, es un máximo.

$$y = \sqrt{225 - \frac{9}{16}x^2} = \sqrt{225 - \frac{9}{16}16^2} = 9$$

En definitiva, el rectángulo pedido es el rectángulo cuyos vértices son

$$(16, 9), (-16, 9), (-16, -9) \text{ y } (16, -9)$$