Análisis Matemático I

Tema 3: Continuidad y límite funcional

Motivación

Continuidad de funciones reales de variable real

$$E \subset \mathbb{R}, \quad f : E \to \mathbb{R}, \quad x \in E$$

f es continua en el punto x si, y sólo si

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \; : \; \Big[y \in E, \;\; |y - x| < \delta \;\; \Rightarrow \;\; |f(y) - f(x)| < \varepsilon \Big]$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \;\; : \;\; f\Big(B(x,\delta)\Big) \subset B\Big(f(x),\varepsilon\Big)$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall\, V \in \mathcal{U}\Big(f(x)\Big) \;\; \exists\, U \in \mathcal{U}(x) \; : \; f(U) \subset V$$

$$\Updownarrow$$

$$V \in \mathcal{U}\Big(f(x)\Big) \quad \Longrightarrow \quad f^{-1}(V) \in \mathcal{U}(x)$$

Notación

E, F espacios métricos cuyas distancias se denotan ambas por d

Continuidad en un punto

Función continua en un punto

Se dice que una función $f : E \to F$ es continua en un punto $x \in E$ cuando

$$V \in \mathcal{U}\big(f(x)\big) \implies f^{-1}(V) \in \mathcal{U}(x)$$

Caracterizaciones

Para $f : E \to F$ y $x \in E$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) f es continua en el punto x

(2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ : \ y \in E, \ d(y,x) < \delta \ \Rightarrow \ d\big(f(y), f(x)\big) < \varepsilon$

(3) $x_n \in E \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \{x_n\} \to x \ \Rightarrow \ \{f(x_n)\} \to f(x)$

Carácter local

$$f : E \to F, \quad \emptyset \neq A \subset E, \quad x \in A$$

- f continua en $x \implies f\big|_A$ continua en x
- $f\big|_A$ continua en x, $A \in \mathcal{U}(x) \implies f$ continua en x

(1) f es continua en el punto x

(2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : y \in E, \ d(y,x) < \delta \ \Rightarrow \ d\big(f(y), f(x)\big) < \varepsilon$

(3) $x_n \in E \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \{x_n\} \to x \ \Rightarrow \ \{f(x_n)\} \to f(x)$

$(1) \Rightarrow (2)$ $\varepsilon > 0$ $B(f(x), \varepsilon) \in \mathcal{U}(f(x))$

$(1) \Rightarrow f^{-1}(B(f(x), \varepsilon)) \in \mathcal{U}(x)$

$\exists \delta > 0 : B(x, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$

$y \in E$ $d(y,x) < \delta$ $y \in B(x, \delta)$ $f(y) \in B(f(x), \varepsilon)$

$d(f(y), f(x)) < \varepsilon$

$(2) \Rightarrow (3)$ Fijamos $\varepsilon > 0$ (2) $\exists \delta : \ldots$

$\exists m \in \mathbb{N} : n \geq m$ $d(x_n, x) < \delta$ $d(f(x_n), f(x)) < \varepsilon$

$(3) \Rightarrow (1)$ Sea f no continua en x. Entonces, existe $V \in \mathcal{U}(f(x)) \,/\, f^{-1}(V) \notin \mathcal{U}(x)$. Si fijamos un $n \in \mathbb{N}$, $B(x, 1/n) \not\subset f^{-1}(V)$. $\exists x_n \in B(x, 1/n) \,/\, f(x_n) \notin V$ (Hemos razonado por el contrarecíproco).

Continuidad global

Funciones continuas

Una función $f : E \to F$ es continua en un conjunto no vacío $A \subset E$ cuando

f es continua en todo punto $x \in A$

Si f es continua en E, se dice simplemente que f es continua

Caracterizaciones

Para $f : E \to F$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) f es continua

(2) Para todo abierto $V \subset F$, $f^{-1}(V)$ es abierto

(3) Para todo cerrado $C \subset F$, $f^{-1}(C)$ es cerrado

(4) f preserva la convergencia de sucesiones: para toda sucesión convergente $\{x_n\}$ de puntos de E, la sucesión $\{f(x_n)\}$ es convergente

Conjuntos definidos por funciones continuas

$f : E \to \mathbb{R}$ continua

$\{x \in E : f(x) > 0\} = f^{-1}(\mathbb{R}^+)$ y $\{x \in E : f(x) < 0\} = f^{-1}(\mathbb{R}^-)$ abiertos

$\{x \in E : 0 \leqslant f(x) \leqslant 1\} = f^{-1}\big([0,1]\big)$ cerrado

Carácter local

De la continuidad en un punto

$$f : E \to F, \quad \emptyset \neq A \subset E, \quad x \in A$$

- f continua en $x \implies f\big|_A$ continua en x
- $f\big|_A$ continua en x, $A \in \mathcal{U}(x) \implies f$ continua en x

De la continuidad global

- $\emptyset \neq A = A^\circ \subset E$

$$f \text{ es continua en } A \iff f\big|_A \text{ es continua}$$

- $E = U \cup V$ donde $U = U^\circ$ y $V = V^\circ$

$$f \text{ es continua} \iff f\big|_U \text{ y } f\big|_V \text{ son continuas}$$

- f es continua $\iff \forall\, x \in E \;\; \exists\, U \in \mathcal{U}(x) \; : \; f\big|_U$ es continua

Límite funcional

Funciones reales de variable real

$$\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}, \quad f : A \to \mathbb{R}, \quad \alpha \in A', \quad L \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = L \iff \Big[\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : x \in A, 0 < |x - \alpha| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon\Big]$$

Límite de una función en un punto

E, F espacios métricos, $\emptyset \neq A \subset E$, $f : A \to F$, $\alpha \in A'$

Se dice que f tiene límite en el punto α cuando existe $L \in F$ verificando:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, \delta > 0 \ : \ x \in A, \ \ 0 < d(x, \alpha) < \delta \ \Rightarrow \ d\big(f(x), L\big) < \varepsilon$$

Entonces L es único, decimos que L es el límite de f en α y escribimos:

$$L = \lim_{x \to \alpha} f(x)$$

Caracterizaciones

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = L \iff \forall\, V \in \mathcal{U}(L) \ \ \exists\, U \in \mathcal{U}(\alpha) \ : \ f\Big(U \cap (A \setminus \{\alpha\})\Big) \subset V$$

$$\iff \Big[x_n \in A \setminus \{\alpha\} \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \{x_n\} \to \alpha \ \Rightarrow \ \{f(x_n)\} \to L\Big]$$

Veamos que L es único. Supongamos que existen dos límites: L_1 y L_2.

$$\varepsilon > 0 \qquad \exists\, \delta_1 > 0 \quad x \in A \quad 0 < d(x,\alpha) < \delta_1 \quad d(f(x), L_1) < \varepsilon$$

$$\exists\, \delta_2 > 0 \quad x \in A \quad 0 < d(x,\alpha) < \delta_2 \quad d(f(x), L_2) < \varepsilon$$

$$d(L_1, L_2) \leq d(L_1, f(x)) + d(L_2, f(x)) < 2\varepsilon$$

Carácter local y relación con la continuidad

Carácter local

$B = \{x \in A : 0 < d(x,\alpha) < r\}$, que verifica $\alpha \in B'$. Entonces:

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = L \iff \lim_{x\to\alpha} f\big|_B(x) = L$$

Relación con la continuidad

- Si $a \in A \setminus A'$, entonces f es continua en a
- Si $a \in A \cap A'$, entonces: f continua en $a \iff \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$
- Si $\alpha \in A' \setminus A$, entonces f tiene límite en α si, y sólo si, existe $g : A \cup \{\alpha\} \to F$, continua en α, con $g(x) = f(x)$ para todo $x \in A$.

  En tal caso g es única: $g(\alpha) = \lim_{x\to\alpha} f(x)$

Composición de funciones y cambio de variable

Continuidad de la composición

$$G, E, F \text{ espacios métricos}, \quad \varphi : G \to E\,, \quad f : E \to F\,, \quad f \circ \varphi : G \to F$$

$$\left.\begin{array}{r} \varphi \;\text{ continua en }\; z \in G \\ f \;\text{ continua en }\; x = \varphi(z) \end{array}\right\} \implies f \circ \varphi \;\text{ continua en }\; z$$

$$\varphi \;\text{ y }\; f \;\text{ continuas} \implies f \circ \varphi \;\text{ continua}$$

Cambio de variable para calcular un límite

$$E, F \text{ espacios métricos}, \quad \emptyset \neq A \subset E\,, \quad f : A \to F\,, \quad \alpha \in E$$

$$G \text{ espacio métrico}, \quad T \subset G\,, \quad \varphi : T \to E\,, \quad z \in T' \quad \text{cumpliendo:}$$

$$\lim_{t \to z} \varphi(t) = \alpha \in E \quad \text{y} \quad \varphi(t) \in A \setminus \{\alpha\} \;\; \forall t \in T \setminus \{z\}$$

Entonces $\alpha \in A'$ y se verifica la siguiente implicación:

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = L \in F \implies \lim_{t \to z} f\big(\varphi(t)\big) = L$$

Primeros ejemplos de funciones continuas

En espacios métricos

- E, F métricos. $f : E \to F$ constante $\Longrightarrow$ f continua
- $\emptyset \neq F \subset \mathbb{R}$, $F^\circ = \emptyset$, $f : \mathbb{R} \to F$ continua $\Longrightarrow$ f constante
- E subespacio métrico de F. Inclusión:

$$I : E \to F, \quad I(x) = x \quad \forall x \in E \quad \Longrightarrow \quad I \text{ continua}$$

- Identidad. $I : E \to E$, $I(x) = x \ \forall x \in E$ $\Longrightarrow$ I continua
- Función distancia. $d : E \times E \to \mathbb{R}$ es continua

En espacios normados

Para todo espacio normado X, las siguientes funciones son continuas:

- La norma: $x \mapsto \|x\|$, de X en $\mathbb{R}$
- La suma: $(x, y) \mapsto x + y$, de $X \times X$ en X
- El producto por escalares: $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$, de $\mathbb{R} \times X$ en X

Funciones con valores en un producto

Proyecciones y componentes

$F = F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_M \neq \emptyset$. Proyecciones coordenadas:

$$\pi_k : F \to F_k\,, \quad \pi_k(y) = y(k) \quad \forall y \in F \quad \forall k \in \Delta_M$$

$E \neq \emptyset$, $f : E \to F$. Componentes de f: $\quad f_k = \pi_k \circ f : E \to F_k \quad \forall k \in \Delta_M$

$$f = (f_1, f_2, \ldots, f_M) \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad f(x) = \big(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_M(x)\big) \quad \forall x \in E$$

Caracterización de continuidad y límite funcional

- $F = F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_M$ producto de espacios métricos. Entonces:
  $\pi_k : F \to F_k$ es continua para todo $k \in \Delta_M$
- E espacio métrico, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_M) : E \to F$ y $x \in E$. Entonces:
  f continua en $x \iff f_k$ continua en $x \quad \forall k \in \Delta_M$
- $A \subset E$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_M) : A \to F$, $\alpha \in A'$, $y \in F$. Entonces:
  $$\lim_{x \to \alpha} f(x) = y \iff \lim_{x \to \alpha} f_k(x) = y(k) \quad \forall k \in \Delta_M$$

Operaciones con funciones

Suma, producto por escalares, producto y cociente

$E, Y \neq \emptyset$. $\mathcal{F}(E,Y)$ conjunto de todas las funciones de E en Y

$$\mathcal{F}(E) = \mathcal{F}(E,\mathbb{R})$$

Y espacio vectorial, $f, g \in \mathcal{F}(E,Y)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

- Suma: $\big(f+g\big)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in E$
- Producto por escalares: $\big(\lambda g\big)(x) = \lambda g(x) \quad \forall x \in E$

$\mathcal{F}(E,Y)$ espacio vectorial

$g \in \mathcal{F}(E,Y)$ y $\Lambda \in \mathcal{F}(E)$

$\mathcal{F}(E)$ anillo conmutativo con unidad

$f, g \in F(E)$, $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in E$

- Cociente: $\big(f/g\big)(x) = f(x)/g(x) \quad \forall x \in E$

Operaciones con funciones continuas

Preservación de la continuidad

E espacio métrico, Y espacio normado, $f, g \in \mathcal{F}(E,Y)$, $\Lambda \in \mathcal{F}(E)$

$$\Lambda, f, g \text{ continuas en } x \in E \quad \Longrightarrow \quad f+g, \Lambda g \text{ continuas en } x$$

Cuando $Y = \mathbb{R}$:

$$f, g \text{ continuas en } x \in E, \quad g(E) \subset \mathbb{R}^* \quad \Longrightarrow \quad f/g \text{ continua en } x$$

Espacios de funciones continuas

E espacio métrico, Y espacio normado

$\mathcal{C}(E,Y)$ conjunto de todas las funciones continuas de E en Y

$$\mathcal{C}(E) = \mathcal{C}(E,\mathbb{R})$$

- $\mathcal{C}(E,Y)$ subespacio vectorial de $\mathcal{F}(E,Y)$
- $\mathcal{C}(E)$ subanillo y subespacio vectorial $\mathcal{F}(E)$
- $f, g \in \mathcal{C}(E)$, $\quad g(E) \subset \mathbb{R}^* \quad \Longrightarrow \quad f/g \in \mathcal{C}(E)$

Cálculo de límites

Reglas básicas

E espacio métrico, $A \subset E$ y $\alpha \in A'$

$$f, g \in \mathcal{F}(A, Y), \quad \Lambda \in \mathcal{F}(A)$$

Supongamos que f, g y Λ tienen límite en el punto α:

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = y \in Y, \quad \lim_{x \to \alpha} g(x) = z \in Y, \quad \lim_{x \to \alpha} \Lambda(x) = \lambda \in \mathbb{R}$$

Entonces: $\lim\limits_{x \to \alpha} \big(f + g\big)(x) = y + z$ y $\lim\limits_{x \to \alpha} \big(\Lambda\, g\big)(x) = \lambda\, z$

Caso $Y = \mathbb{R}$: $g(A) \subset \mathbb{R}^*$, $z \in \mathbb{R}^*$ $\implies$ $\lim\limits_{x \to \alpha} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{y}{z}$

Campos escalares y vectoriales

Campo escalar

Un campo escalar es una función $f : A \to \mathbb{R}$ donde $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^N$

También se dice que f es una función real de N variables reales

Campo vectorial

Un campo vectorial es una función $f : A \to \mathbb{R}^M$ con $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^N$ y $M > 1$

También se dice que f es una función vectorial de N variables reales

Componentes de un campo vectorial

Proyecciones coordenadas en $\mathbb{R}^M$: $\quad \pi_k(y) = y(k) \quad \forall y \in \mathbb{R}^M, \quad \forall k \in \Delta_M$

Componentes de un campo vectorial $f : A \to \mathbb{R}^M$

$f = (f_1, f_2, \ldots, f_M)$ donde $f_k = \pi_k \circ f \quad \forall k \in \Delta_M$

$f_1, f_2, \ldots, f_M$ son campos escalares

- f continuo en $x \in A \iff f_k$ continuo en $x \quad \forall k \in \Delta_M$
- Para $\alpha \in A'$:

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = y \in \mathbb{R}^M \iff \lim_{x \to \alpha} f_k(x) = y(k) \quad \forall k \in \Delta_M$$

Operaciones y ejemplos

Operaciones con campos escalares o vectoriales

En todo lo que sigue: $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^N$, $\quad M \in \mathbb{N} \quad M > 1$

- $\mathcal{C}(A,\mathbb{R}^M)$ (campos vectoriales continuos en A) subespacio vectorial de $\mathcal{F}(A,\mathbb{R}^M)$ (campos vectoriales en A)
- $\mathcal{C}(A)$ (campos escalares continuos en A) subanillo y subespacio vectorial de $\mathcal{F}(A)$ (campos escalares en A)

Los campos escalares más sencillos

- $f \in \mathcal{F}(A)$, f constante $\implies$ $f \in \mathcal{C}(A)$
- $k \in \Delta_N$, $\pi_k(x) = x(k) \ \forall x \in A \implies \pi_k \in \mathcal{C}(A)$

Funciones polinómicas

$\mathcal{P}(A)$ subanillo de $\mathcal{F}(A)$ engendrado por las constantes y $\{\pi_k : k \in \Delta_N\}$

Los elementos de $\mathcal{P}(A)$ son las funciones polinómicas en A

$\mathcal{P}(A)$ también es subespacio vectorial de $\mathcal{F}(A)$ y $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{C}(A)$

Funciones polinómicas y funciones racionales

Descripción de las funciones polinómicas

$f : A \to \mathbb{R}$ es una función polinómica cuando:

$$f(x) = \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_N = 0}^{p} \lambda_{j_1 j_2 \ldots j_N} \; x_1^{j_1} \, x_2^{j_2} \cdots x_N^{j_N} \quad \forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in A$$

con $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $\lambda_{j_1 j_2 \ldots j_N} \in \mathbb{R} \;\; \forall j_1, j_2, j_N \in \{0, 1, \ldots, p\}$

Funciones racionales

$h : A \to \mathbb{R}$ es una función racional en A cuando:

$$\exists \; f, g \in \mathcal{P}(A) \; : \; g(x) \neq 0 \quad \text{y} \quad h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \forall x \in A$$

$\mathcal{R}(A)$ conjunto de las funciones racionales en A

$$\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{R}(A) \subset \mathcal{C}(A) \subset \mathcal{F}(A)$$

Cada conjunto es subanillo y subespacio vectorial de los que le siguen