Examen Modelos Matemáticos I

Septiembre 2014

1) Dados dos números complejos x_0, x_1, se construye una sucesión $\{x_n\}$ donde el término general se obtiene restando los dos números anteriores, es decir, $x_2 = x_1 - x_0$, $x_3 = x_2 - x_1$ y así sucesivamente.

   a) Escribe la ecuación en diferencias y da una expresión de la solución general.

   Solución. La ecuación en diferencias está definida por la expresión

$$x_{n+2} = x_{n+2} - x_{n+1} \Leftrightarrow x_{n+2} - x_{n+1} + x_n = 0.$$

   Para encontrar una expresión de su solución general vamos a calcular su polinomio característico.

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + 1 = \left(\lambda - \frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(\lambda - \frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)$$

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}, \qquad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$$

   Por tanto, el conjunto de soluciones será

$$\Sigma = \left\{ \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^n \right\}_{n\geq 0}, \left\{ \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^n \right\}_{n\geq 0} \right\}$$

   y entonces las soluciones de la ecuación serán de la forma

$$x_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^n, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

□

   b) Calcula la solución particular con condiciones iniciales $x_0 = 2$ y $x_1 = 1$.

Solución. Tenemos que

$$x_0 = 2 \Rightarrow 2 = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^0 + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^0 \Rightarrow \boxed{c_1 + c_2 = 2}$$

$$x_1 = 1 \Rightarrow 1 = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^1 + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^1 \Rightarrow$$

$$2 = c_1(1+\sqrt{3}i) + (2-c_1)(1-\sqrt{3}i) \Rightarrow$$

$$2 = c_1 + c_1\sqrt{3}i + 2 - 2\sqrt{3}i - c_1 + c_1\sqrt{3}i$$

$$0 = 2c_1\sqrt{3}i - 2\sqrt{3}i \Rightarrow c_1 - 1 = 0$$

Por tanto, podemos afirmar que $c_1 = 1$ y $c_2 = 1$. □

2) La evolución de una población estructurada en tres grupos viene dada por

$$X_{n+1} = AX_n, \quad X_n \in \mathbb{R}^3_+$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 6 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

a) Discute si el modelo cumple o no el modelo de Leslie.

Solución. La matriz del sistema no cumple el modelo de Leslie dado que una matriz (3×3) que represente dicho modelo es de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 \end{pmatrix},$$

donde $a_i \geq 0$ para $i \in \{1,2,3\}$ representa la tasa de natalidad de cada uno de los 3 grupos y $0 < b_i \leq 1$ para $i \in \{1,2\}$ representa la tasa de supervivencia de dicho grupo. Por lo tanto, podría ser una matriz de Leslie si el elemento $a_{33} = 1/2$ fuera nulo. □

b) Demuestra que la matriz A tiene valor propio dominante $\lambda_1 > 1$.

Solución. Calculemos el polinomio característico de la matriz.

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 + \frac{11}{4}\lambda - \frac{3}{2} = -(\lambda - 2)(\lambda + 1,5)(\lambda - 0,5)$$

Verificando así que 2 es valor propio cumpliendo que el valor absoluto de 2 es mayor que el de los otros dos valores propios. □

c) Estudia la evolución a largo plazo. ¿Hay extinción? ¿Hay crecimiento ilimitado?

Solución. Por lo comprobado en el apartado anterior, dado que $\lambda = 2 > 1$, podemos afirmar que habrá crecimiento ilimitado de la población.

$$V_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} -3/2 & 6 & 0 \\ 1/2 & -2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{cases} x - 4y = 0 \to x = 4y \\ y - 3z = 0 \to y = 3z \end{cases} \Rightarrow V_2 = \langle v = (12, 3, 1) \rangle$$

$$\frac{1}{\|v\|_1} v = \begin{pmatrix} 0,75 \\ 0,1875 \\ 0,0625 \end{pmatrix} \begin{matrix} \to \text{El primer grupo se estabilizará en un } 75\,\% \\ \to \text{El segundo grupo se estabilizará en un } 19\,\% \\ \to \text{El tercer grupo se estabilizará en un } 6\,\% \end{matrix}$$

□