Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Cálculo I – Evaluación 4 – Soluciones

Ejercicio 1. Sea $\{x_n\}$ una sucesión mayorada y pongamos

$$A_n = \{x_k : k \geqslant n\}, \quad \beta_n = \sup(A_n).$$

Sea $A = \{n\in\mathbb{N} : \beta_n \in A_n\}$. Prueba que:

i) Si el conjunto A es finito entonces $\{x_n\}$ tiene una sucesión parcial estrictamente creciente.

ii) Si el conjunto A es infinito entonces $\{x_n\}$ tiene una sucesión parcial decreciente.

Solución. i) Teniendo en cuenta que $\beta_n \in A_n$ significa que A_n tiene máximo, es claro que el conjunto $B = \{n\in\mathbb{N} : x_n = \text{máx}(A_n)\}$ está contenido en A por lo que es finito. Si $B = \emptyset$ pongamos $m_0 = 1$, en otro caso $m_0 = \text{máx}(B) + 1$. Para todo $n \geqslant m_0$ se verifica que x_n no es máximo de A_n por lo que existe $p > n$, tal que $x_n < x_p$. Definimos $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ por:

$$\sigma(1) = m_0, \quad \sigma(n+1) = \text{mín}\,\{p\in\mathbb{N} : p > \sigma(n),\ x_\sigma(n) < x_p\}$$

Con ello tenemos que $\{x_{\sigma(n)}\}$ es una sucesión parcial estrictamente creciente de $\{x_n\}$.

ii) Para cada $n\in\mathbb{N}$, como A es infinito, existe $p\in A$ con $p > n$ y $q \geqslant p$ tal que $x_q = \text{máx}(A_p)$. Como $A_q \subset A_p$ se verifica que x_q es un mayorante de A_q, es decir, $x_q = \text{máx}(A_q)$. Hemos probado así que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $q > n$ tal que $x_q = \text{máx}(A_q)$, por tanto el conjunto $B = \{n\in\mathbb{N} : x_n = \text{máx}(A_n)\}$ es infinito. Sea $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una aplicación estrictamente creciente con $\sigma(\mathbb{N}) = B$. Con ello tenemos que $\{x_{\sigma(n)}\}$ es una sucesión parcial de $\{x_n\}$, y como $x_{\sigma(n)} = \text{máx}(A_{\sigma(n)})$ y $x_{\sigma(n+1)} \in A_{\sigma(n)}$, se verifica que $x_{\sigma(n)} \geqslant x_{\sigma(n+1)}$, es decir, la sucesión $\{x_{\sigma(n)}\}$ es decreciente. ☺

Comentarios. La forma en que he hecho este ejercicio es la que me parece más directamente relacionada con lo que hemos visto en clase. La clave del punto i) es probar que hay un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant n_0$ se verifica que hay algún $p > n$ con $x_n < x_p$. Podemos probar esto como sigue. Como A es finito, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant n_0$ se tiene que $n \notin A$, es decir, A_n no tiene máximo, por lo que $x_n \in A_n$ no puede ser mayorante de A_n, es decir, existe $p > n$ tal que $x_n < x_p$. O también, como para $n \geqslant n_0$ $\beta_n \notin A_n$, se tiene que $x_n < \beta_n$ y, por definición de supremo, debe existir algún $p > n$ tal que $x_n < x_p$. Algunos razonáis esto de una forma algo diferente, como sigue. Decís:

> Como $\beta_{n_0} \notin A_{n_0}$ entonces para todo $n \geqslant n_0$ se tiene que $x_n < \beta_{n_0}$ por lo que existe $p > n$ tal que $x_n < x_p$.

Esa afirmación no es del todo evidente, lo que sí es evidente es que existe algún $p \geqslant n_0$ tal que $x_n < x_p$. Se me ocurre la siguiente justificación: si $n \geqslant n_0$, el conjunto $\{p\in\mathbb{N} : p \geqslant n_0, x_n < x_p\}$ no puede ser finito porque si lo fuera A_{n_0} tendría máximo, luego existe $p > n$ tal que $x_n < x_p$.

Donde hay bastantes errores es en el punto ii) porque algunos razonáis como sigue.

> Como A es infinito, sea $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una aplicación estrictamente creciente tal que $\sigma(\mathbb{N}) = A$, entonces $\{\beta_{\sigma(n)}\}$ es una sucesión parcial de $\{x_n\}$, y como $A_{\sigma(n+1)} \subset A_{\sigma(n)}$ se tiene que $\beta_{\sigma(n)} \geqslant \beta_{\sigma(n+1)}$ y la sucesión $\{\beta_{\sigma(n)}\}$ es decreciente.

El error está en afirmar que $\{\beta_{\sigma(n)}\}$ es una parcial de $\{x_n\}$. Claro está que como $\beta_{\sigma(n)} = \text{máx}(A_{\sigma(n)})$, hay números $p \geqslant \sigma(n)$ tales que $\beta_{\sigma(n)} = x_p$ ¿cómo elegimos uno de ellos? Si no lo especificamos no estamos definiendo una parcial de $\{x_n\}$. La elección más razonable es quedarse con el primer término de $A_{\sigma(n)}$ que sea igual a su máximo, esto lleva a definir una aplicación $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ como sigue

$$\varphi(n) = \text{mín}\left\{p\in\mathbb{N} : p \geqslant \sigma(n), x_p = \beta_{\sigma(n)}\right\} \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

Pero no está nada claro que esa aplicación φ sea estrictamente creciente (intenta probarlo o dar un contraejemplo). Un arreglo que se me ocurre es modificar la definición como sigue:

$$\begin{aligned} \varphi(1) &= \text{mín}\left\{p\in\mathbb{N} : p \geqslant \sigma(1), x_p = \beta_{\sigma(1)}\right\} \\ \varphi(n+1) &= \text{mín}\left\{p\in\mathbb{N} : p \geqslant \sigma(\varphi(n)+1), x_p = \beta_{\sigma(\varphi(n)+1)}\right\} \quad \forall n\in\mathbb{N} \end{aligned}$$

Con ello nos aseguramos de que al ser $\varphi(n+1) \geqslant \sigma(\varphi(n)+1) \geqslant \varphi(n)+1 > \varphi(n)$, la aplicación φ es estrictamente creciente y por tanto $\{x_{\varphi(n)}\}$ es una parcial de $\{x_n\}$. Además para todo $n\in\mathbb{N}$ con $n \geqslant 2$ se tiene que $x_{\varphi(n+1)} = \beta_{\sigma(\varphi(n)+1)} \leqslant \beta_{\sigma(\varphi(n-1)+1)} = x_{\varphi(n)}$; y $x_{\varphi(2)} = \beta_{\sigma(\varphi(1)+1)} \leqslant \beta_{\sigma(1)} = x_{\varphi(1)}$, luego la sucesión $\{x_{\varphi(n)}\}$ es decreciente.

Si esto te parece complicado trata de encontrar una solución más sencilla, a mí no se me ocurre. El problema está en la consideración de la sucesión $\{\beta_{\sigma(n)}\}$ que lo complica todo. También hay algunos que tratan de atajar y consideran la sucesión $\{x_{\sigma(n)}\}$ pero esa sucesión no tiene por qué ser decreciente, claro quienes hacen eso posiblemente piensan que $x_{\sigma(n)} = \beta_{\sigma(n)}$ lo que no tiene por qué ser así.

Hay quien prueba que si el conjunto A es infinito entonces $A = \mathbb{N}$. Y es cierto. Dado $q\in\mathbb{N}$, por ser A infinito, existe $n \in A$ con $n > q$. Como $A_n \subset A_q$ se tiene que $\beta_n \in A_q$ y como $\beta_n \geqslant x_k$ para todo $k \geqslant n$, deducimos que $\text{máx}\left\{ \{x_k : q \leqslant k \leqslant n-1\} \cup \{\beta_n\} \right\} = \text{máx}(A_q)$, luego $q \in A$. Por tanto, la aplicación σ antes considerada es la identidad, lo que simplifica un poco las cosas.

También hay quien prueba que si el conjunto A es finito entonces la sucesión $\{\beta_n\}$ es constante a partir de un término en adelante. En efecto, sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geqslant n_0$ se tiene que $n \notin A$. Para $n > n_0$ se tiene que $\beta_n \leqslant \beta_{n_0}$. Si fuera $\beta_n < \beta_{n_0}$ entonces como $A_{n_0} = A_n \cup \{x_k : n < k \leqslant n_0\}$, se verifica que $\beta_{n_0} = \text{máx}\left\{\beta_n, \text{máx}\{x_k : n < k \leqslant n_0\}\right\}$, por lo que si $\beta_n < \beta_{n_0}$ debe ser $\beta_{n_0} = \text{máx}\{x_k : n < k \leqslant n_0\}$, luego $\beta_{n_0}\in A_{n_0}$, esto es $n_0\in A$, lo que es contradictorio, luego $\beta_n = \beta_{n_0}$. Este resultado es bastante evidente si tienes en cuenta que la sucesión parcial, $\{x_{\sigma(n)}\}$, definida en el punto i) verifica que es estrictamente creciente y para todo $n \geqslant m_0$ es $x_n \leqslant x_{\sigma(n)}$ de donde se deduce enseguida que para $n \geqslant m_0$ es $\beta_n = \beta_{m_0} = \sup\left\{x_{\sigma(n)} : n\in\mathbb{N}\right\}$.

Lo que tienes que sacar en claro de este ejercicio es que si quieres probar la existencia de una sucesión parcial $\{x_{\sigma(n)}\}$ tienes que definir la aplicación σ, con frecuencia ello obliga a probar que ciertos conjuntos de números naturales no son vacíos.

Ejercicio 2. Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada y α, β, números reales. Se verifica entonces que:

i) $\alpha = \underline{\text{lím}}\{x_n\}$ si, y sólo si, para todo $\varepsilon > 0$ el conjunto $\{n\in\mathbb{N}: x_n < \alpha-\varepsilon\}$ es finito y el conjunto $\{n\in\mathbb{N}: x_n < \alpha+\varepsilon\}$ es infinito.

ii) $\beta = \overline{\text{lím}}\{x_n\}$ si, y sólo si, para todo $\varepsilon > 0$ el conjunto $\{n\in\mathbb{N}: x_n > \beta+\varepsilon\}$ es finito y el conjunto $\{n\in\mathbb{N}: x_n > \beta-\varepsilon\}$ es infinito.

Solución. i) Sea $A_n = \{x_k : k \geqslant n\}$ y $\alpha_n = \text{ínf}(A_n)$. Sabemos que la sucesión $\{\alpha_n\}$ es creciente y $\text{lím}\{\alpha_n\} = \sup\{\alpha_n : n\in\mathbb{N}\} = \underline{\text{lím}}\{x_n\}$. Pongamos $\alpha = \underline{\text{lím}}\{x_n\}$. Dado $\varepsilon > 0$, por definición de supremo, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $\alpha-\varepsilon < \alpha_{n_0} \leqslant \alpha$, luego para todo $n \geqslant n_0$ se verifica $x_n \geqslant \alpha_{n_0} > \alpha-\varepsilon$, por tanto el conjunto $\{n\in\mathbb{N}: x_n < \alpha-\varepsilon\}$ es finito. Dado $n\in\mathbb{N}$ como $\alpha_n < \alpha+\varepsilon$, por la definición de ínfimo, debe existir $p \geqslant n$ tal que $x_p < \alpha+\varepsilon$. Por tanto el conjunto $\{n\in\mathbb{N}: x_n < \alpha+\varepsilon\}$ es infinito.

Recíprocamente, dado $\varepsilon > 0$, como el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n < \alpha - \varepsilon\}$ es finito, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant n_0$ se verifica que $\alpha - \varepsilon \leqslant x_n$, luego $\alpha - \varepsilon \leqslant \alpha_{n_0}$ y, como $\{\alpha_n\}$ es creciente, para todo $n \geqslant n_0$ tenemos que $\alpha_n \geqslant \alpha - \varepsilon$, lo que implica que $\text{lím}\{\alpha_n\} \geqslant \alpha - \varepsilon$. Ahora, como el conjunto $\{n\in\mathbb{N}: x_n < \alpha+\varepsilon\}$ es infinito, deducimos que cualquiera sea $n\in\mathbb{N}$ hay algún $p > n$ tal que

$x_p < \alpha + \varepsilon$ lo que implica que $\alpha_n < \alpha + \varepsilon$ y deducimos que $\lim\{\alpha_n\} \leqslant \alpha + \varepsilon$. Hemos probado así que para todo $\varepsilon > 0$, se verifica que $\alpha - \varepsilon \leqslant \lim\{\alpha_n\} \leqslant \alpha + \varepsilon$, lo que implica que $\lim\{\alpha_n\} = \alpha$, es decir, $\alpha = \underline{\lim}\{x_n\}$.

La segunda parte de este ejercicio se hace de forma muy parecida. ☺

Comentarios. Sería demasiado extenso recoger aquí todas las cosas extrañas que he leído en este ejercicio. Algunos afirman que la sucesión $\{\alpha_n\}$ es decreciente, otros confunden A_n con α_n y escriben cosas como $\alpha - \varepsilon < A_n < \alpha + \varepsilon$. Por supuesto, algunos afirman que el conjunto $\{x_n : x_n < \alpha + \varepsilon\}$ es infinito, porque no saben distinguir entre ese conjunto y el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n < \alpha + \varepsilon\}$. En un ejercicio como este, y en muchos otros, el anterior sin ir más lejos, es muy conveniente considerar algunas sucesiones particulares sencillas para comprobar nuestras afirmaciones; por ejemplo, conviene considerar una sucesión constante, y una sucesión estrictamente monótona creciente o decreciente, o la sucesión $\{(-1)^n\}$, así pueden evitarse muchos errores. También puedes considerar sucesiones en las que un mismo término se repite un número finito de veces. Por ejemplo, definamos

$$x_{2^k} = x_{2^k+1} = \cdots = x_{2^{k+1}-1} = 1 + \frac{1}{k+1} \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Se trata de una sucesión decreciente y el término x_{2^k} aparece repetido 2^k veces. Ahora podemos definir $z_{2n} = x_{2n}$ y $z_{2n-1} = -x_{2n-1}$. La sucesión $\{z_n\}$ tiene una parcial creciente y otra decreciente y los términos de la primera son menores que los de la segunda. Pongo este ejemplo porque creo que tenéis una idea demasiado simple de las sucesiones.

Me ha llamado la atención la forma tan extraña en que muchos habláis de los conjuntos de números naturales. Si A es un conjunto de números naturales no vacío, las expresiones *A está acotado* o *A está mayorado* no se usan, sino que se dice que A es finito, la expresión *supremo de A* tampoco se usa sino máximo de A.

Ejercicio 3. Calcula los límites de las sucesiones:

$$a)\ x_n = \left(1 + \log \frac{n^2+1}{n^2+n+1}\right)^n; \quad b)\ y_n = \frac{\frac{1}{2\log 2} + \frac{1}{3\log 3} + \cdots + \frac{1}{n\log n}}{\log(\log(n+1))}$$

Solución. a) Se trata de una sucesión de la forma $x_n = u_n^{v_n}$ donde $u_n = 1 + \log \dfrac{n^2+1}{n^2+n+1}$ y $v_n = n$. Puesto que $\dfrac{n^2+1}{n^2+n+1} \to 1$, se tiene que $u_n \to 1$, por lo que el límite pedido es una indeterminación del tipo 1^∞. Usaremos el criterio de equivalencia logarítmica según el cual $x_n = u_n^{v_n} \to \mathrm{e}^L$ donde $L = \lim v_n(u_n - 1)$. Tenemos:

$$v_n(u_n - 1) = n \log \frac{n^2+1}{n^2+n+1} \sim n\left(\frac{n^2+1}{n^2+n+1} - 1\right) = -\frac{n^2}{n^2+n+1} \to -1$$

Concluimos que $\lim\{x_n\} = 1/\mathrm{e}$.

b) Puesto que la sucesión $\{\log(\log(n+1))\}$ es estrictamente creciente y divergente podemos aplicar el criterio de Stolz. Pongamos $y_n = \dfrac{a_n}{b_n}$. Tenemos:

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{\dfrac{1}{(n+1)\log(n+1)}}{\log(\log(n+2)) - \log(\log(n+1))} = \frac{1}{(n+1)\log(n+1)\log\left(\dfrac{\log(n+2)}{\log(n+1)}\right)}$$

Puesto que $\dfrac{\log(n+2)}{\log(n+1)} \to 1$, tenemos que:

$$(n+1)\log(n+1)\log\left(\frac{\log(n+2)}{\log(n+1)}\right) \sim (n+1)\log(n+1)\left(\frac{\log(n+2)}{\log(n+1)} - 1\right) =$$
$$(n+1)(\log(n+2) - \log(n+1)) = (n+1)\log\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \sim (n+1)\left(\frac{n+2}{n+1} - 1\right) = 1$$

Obtenemos así que $\dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \to 1$ y, por el criterio de Stolz, $\{y_n\} \to 1$. ☺

Comentario. Nada nuevo hay en este ejercicio. Hemos hecho algunos parecidos. Los criterios de equivalencia logarítmica y de Stolz los hemos usado para calcular límites. La equivalencia asintótica $\log(z_n) \sim z_n - 1$, válida cuando $\{z_n\} \to 1$, la hemos usado repetidas veces. Llama la atención la forma en que muchos de vosotros os las arregláis para hacer complicado lo que es sencillo. Por ejemplo, hay quien para justificar que $\dfrac{n^2+1}{n^2+n+1} \to 1$ (algo que no necesita ninguna justificación) ¡aplica el criterio de Stolz! Alguno incluso utiliza derivadas y la ¡regla de l'Hôpital! debe pensar que todo vale. Bastantes siguen sin enterarse de que solamente pueden hacerse sustituciones por equivalencias asintóticas en productos. Insisto: solamente en productos. Por ejemplo, no es cierto en general que si $a_n \sim b_n \sim 1$ y $c_n \to +\infty$ se verifique que $(a_n)^{c_n} \sim (b_n)^{c_n}$. Basta considerar:

$$\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^{n^2} = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \to \mathrm{e}, \qquad \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \to +\infty$$

Y claramente $\dfrac{n^2+1}{n^2} \sim \dfrac{n+1}{n} \sim 1$. Tampoco es cierto que si $\{x_n\} \sim \{y_n\}$ se verifique que $\{\mathrm{e}^{x_n}\} \sim \{\mathrm{e}^{y_n}\}$. Por ejemplo, $\{n^2\} \sim \{n^2+n\}$, pero $\frac{\mathrm{e}^{n^2+n}}{\mathrm{e}^{n^2}} = \mathrm{e}^n \to +\infty$. Tampoco pueden hacerse equivalencias asintóticas en diferencias. Por ejemplo, aunque $\log\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^4}\right) \sim \frac{1}{n} + \frac{1}{n^4}$ y $\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$, no es verdad que $\log\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^4}\right) - \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ sea asintóticamente equivalente a $\frac{1}{n^4}$.

Para terminar, quiero que sepáis que soy consciente de que los dos primeros ejercicios tienen *cierto grado de dificultad* porque para hacerlos no basta con usar una regla más o menos mecánica, como puede ser una equivalencia asintótica, sino que *hay que pensar un poco*. En general, vuestra respuesta ha sido buena. Creo que muchos de vosotros sois ya conscientes del alto nivel de exigencia que tienen las matemáticas, de la necesidad de ser rigurosos en los razonamientos y claros y precisos en la exposición, lo que no debe extrañaros porque, eso debéis de saberlo bien vosotros que estudiáis Informática y Matemáticas, la programación es un arte que no permite absolutamente ningún error, ni más ni menos que como hacer matemáticas.