UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática y Telecomunicaciones

Examen final Lógica y Métodos Discretos

Doble Grado Ingeniería Informática y Matemáticas

Autores:
Jose Alberto Hoces Castro
Javier Gómez López
Lorena Cáceres Arias
Elsa Rodríguez Macmichael

Grupo 13

27 de junio de 2022

1. Considere el problema de recurrencia:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= 0 \\ a_n &= a_{n-1} + a_{n-2} + 2^{n-2}, \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

y demuestre que su solucion $\{a_n\}_{n\geq 0}$ puede ser expresada como sigue:

$$a_n = \frac{1}{2}(-3F_n - L_n + 2^{n+1})$$

donde $\{F_n\}_{n\geq 0}$ (resp. $\{L_n\}_{n\geq 0}$) es la sucesión de los números de Fibonacci (resp. Lucas).

Nos encontramos ante una recurrencia lineal no homogénea, donde la parte homogénea viene dada por

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

y la función de ajuste viene dada por $f(n) = \frac{1}{4} \cdot 2^n$. Por el teorema 2.4.1, la solución general vendrá dada por $\{a_n^{(h)} + a_n^{p)}\}$, siendo $a_n^{(h)}$ la solución de la recurrencia lineal homogénea asociada y siendo $a_n^{(p)}$ una solución particula de la recurrencia lineal no homogeénea.

Comenzemos hallando $a_n^{(h)}$ resolviendo la ecuación característica:

$$a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0$$

$$x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \tfrac{1+\sqrt{5}}{2} \quad x = \tfrac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$a_n^{(h)} = c_1 \cdot \left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \cdot \left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Con c_1 y c_2 constantes.

Para el cálculo de la solución particular, por el colorario 2.4.2, $a_n^{(p)}$ será e la forma $n^m \cdot p(n) \cdot s^n$, siendo s la constante elevada a n que aparece en la función de ajuste $f(n)$, en nuestro caso $s = 2$. m es la multiplicidad de s en la ecuación característica ya resuelta. $p(n)$ será un polinomio de grado 0, es decir, una constante c_3:

$$a_n^{(p)} = n^0 \cdot c_3 \cdot 2^n = c_3 \cdot 2^n$$

Luego la solución general $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$ será de la forma:

$$a_n = c_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_3 \cdot 2^n$$

Ahora aprovechamos las condiciones iniciales:

$$a_0 = 0 \Rightarrow 0 = c_1 + c_2 + c_3$$

$$a_1 = 0 \Rightarrow 0 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) c_2 + c_3 \cdot 2$$

Como tenemos 3 incógnitas, necesitamos alguna condición adicional. Hallemos a_2:

$$a_2 = a_1 + a_0 + \frac{1}{4} \cdot 2^2 = 1$$

$$a_2 = 1 \Rightarrow 1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 c_1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 c_2 + c_3 \cdot 4$$

Y ya resolvemos el sistema que obtenemos de las 3 ecuaciones:

$$c_1 = \frac{-5-3\sqrt{5}}{10} \qquad c_2 = \frac{-5+3\sqrt{5}}{10} \qquad c_3 = 1$$

Por tanto,

$$a_n = \left(\frac{-5-3\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{-5+3\sqrt{5}}{10}\right)^n + 2^n$$

Pasemos a la segunda parte del ejercicio. Vamos a hallar la expresión general de F_n (sucesión de Fibonacci) y L_n (sucesión de Lucas).

- Cálculo de F_n

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad F_0 = 1 = F_1 \qquad n \geq 2$$

Y esta recurrencia ya la tenemos resuelta de antes:

$$F_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$\left.\begin{array}{l} F_0 = 0 \Rightarrow 1 = c_1 + c_2 \\ F_1 = 1 \Rightarrow 1 = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \end{array}\right\} \begin{array}{l} c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{array}$$

- Cálculo de L_n

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \qquad L_0 = 2 \qquad L_1 = 1 \qquad n \geq 2$$

Y esta recurrencia ya la tenemos resuelta de antes:

$$L_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$L_0 = 2 \Rightarrow 2 = c_1 + c_2 L_1 = 1 \Rightarrow 1 = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \ \Big\} \ c_1 = 1 c_2 = 1$$

Ahora que ya tenemos la expresión de F_n y L_n, vamos a desarrolar $\frac{1}{2}(-3F_n - L_n + 2^{n+1})$ para ver que coincide con la expresión de a_n ya hallada:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{-3}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{3}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + 2^{n+1}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(-\left(\frac{5+3\sqrt{5}}{5}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{-5+3\sqrt{5}}{5}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + 2^{n+1}\right) =$$

$$\left(\frac{-5-3\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{-5+3\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + 2^n$$

que es justo la expresión general de a_n y hemos terminado.

2. Demuestre que para cualesquiera fórmulas proposicionales φ y ψ tales que: ni φ es una contradicción ni ψ es una tautología y $\models \varphi \to \psi$, existe una fórmula proposicional ρ tal que:

   a) ρ no es una contradicción,

   b) $\operatorname{atm}(\rho) \subseteq \operatorname{atm}(\varphi) \cap \operatorname{atm}(\psi)$,

   c) $\models \varphi \to \rho$,

   d) $\models \rho \to \psi$.

   Usaremos los siguientes lemas para la demostración:

   Lema 1. *Si ϕ es una fórmula entonces atm$(\varphi) \neq \emptyset$.*

   Demostración. Por el principio de lectura única, sabemos que una fórmula proposicional puede expresarse de una de las siguientes formas: (a), $(\alpha \to \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\neg\alpha)$. Procedemos por inducción, suponiendo para el caso base que $\varphi = a$, donde a es un símbolo de variable proposicional. En este caso está claro que $\operatorname{atm}(\varphi) = a \neq \emptyset$.

   Si φ toma alguna de las otras cuatro expresiones, como hipótesis de inducción tenemos que $\operatorname{atm}(\alpha) \neq \emptyset$ y $\operatorname{atm}(\beta) \neq \emptyset$. En el paso de inducción probaremos que $\operatorname{atm}(\varphi) \neq \emptyset$. Para ello, realizamos una distinción de casos según la expresión de φ como sigue:

   - $\operatorname{atm}(\varphi) = \operatorname{atm}(\alpha \to \beta) = \operatorname{atm}(\alpha) \cup \operatorname{atm}(\beta) \neq \emptyset$
   - $\operatorname{atm}(\varphi) = \operatorname{atm}(\alpha \vee \beta) = \operatorname{atm}(\neg\alpha \to \beta) = \operatorname{atm}(\neg\alpha) \cup \operatorname{atm}(\beta) = \operatorname{atm}(\alpha) \cup \operatorname{atm}(\beta) \neq \emptyset$

- $\text{atm}(\varphi) = \text{atm}(\alpha \wedge \beta) = \text{atm}(\neg(\alpha \to \neg\beta)) = \text{atm}(\alpha \to \neg\beta) = \text{atm}(\alpha) \cup \text{atm}(\neg\beta) = \text{atm}(\alpha) \cup \text{atm}(\beta) \neq \emptyset$
- $\text{atm}(\alpha \leftrightarrow \beta) = \text{atm}((\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)) = \text{atm}(\neg((\alpha \to \beta) \to \neg(\beta \to \alpha))) = \text{atm}(\alpha \to \beta) \cup \text{atm}(\beta \to \alpha) = \text{atm}(\alpha) \cup \text{atm}(\beta) \cup \text{atm}(\beta) \cup \text{atm}(\alpha) = \text{atm}(\alpha) \cup \text{atm}(\beta) \neq \emptyset$
- $\text{atm}(\varphi) = \text{atm}(\neg\alpha) = \text{atm}(\alpha) \neq \emptyset$

Concluimos por tanto que $\text{atm}(\varphi) \neq \emptyset$. ■

Lema 2. *Sean φ y ϕ fórmulas proposicionales tales que ni φ es una contradicción ni ϕ es una tautología. Si $\models \varphi \to \phi$ entonces $atm(\varphi) \cap atm(\phi) \neq \emptyset$.*

Demostración. Vamos a proceder por reducción al absurdo, tomando como cierto $\models \varphi \to \phi$ y suponiendo que $\text{atm}(\varphi) \cap \text{atm}(\phi) = \emptyset$.

Como $\varphi \to \phi$ es tautología, para cualquier valoración v que tomemos, $\nu(\varphi \to \phi) = \nu(\varphi)\nu(\phi) + \nu(\varphi) + 1 = 1$.

Como φ no es contradicción, $\exists \nu_\varphi | \nu_\varphi(\varphi) = 1$, y como ϕ no es tautología, tenemos que $\exists \nu_\phi | \nu_\phi(\phi) = 0$.

Podemos definir ahora una nueva valoración $\nu_\emptyset$ de la forma:

$$\nu_\emptyset(\alpha) = \begin{cases} \nu_\varphi(\alpha) & \text{if } \alpha \in \text{atm}(\varphi) \\ \nu_\phi(\alpha) & \text{if } \alpha \in \text{atm}(\phi) \end{cases}$$

Es claro que esto está bien definido, pues por hipótesis $\text{atm}(\varphi) \cap \text{atm}(\phi) = \emptyset$, luego no puede haber elementos que estén en ambos conjuntos y no se generarían ambigüedades.

Pero ahora tendríamos $\nu_\emptyset(\varphi \to \phi) = \nu_\emptyset(\varphi)\nu_\emptyset(\phi) + \nu_\emptyset(\varphi) + 1 = \nu_\varphi(\varphi)\nu_\phi(\phi) + \nu_\varphi(\varphi) + 1 = 0 + 1 + 1 = 0$. Sin embargo, esto es una contradicción, pues $(\varphi \to \phi)$ es tautología todas sus valoraciones dan 1. Luego hemos demostrado lo que queríamos $\models \varphi \to \phi \Rightarrow \text{atm}(\varphi) \cup \text{atm}(\phi) \neq \emptyset$ ■

$\cap$!!!

Lema 3. *Sean a un símbolo de variable y ψ una fórmula proposicional que no es tautología . Si $\models a \to \psi$ entonces $a \in atm(\psi)$.*

Demostración. Para la demostración emplearemos el lema anterior, pues las condiciones iniciales se cumplen. Por ser a un símbolo de variable, no será una contradicción ya que basta con que tomemos cualquier asignación v tal que $v(a) = 1$. También, al igual que en el Lema 2, tenemos que la fórmula ψ no es una tautología. Por dicho lema, si $\models a \to \psi$, entonces $atm(a) \cap atm(\psi) \neq \emptyset$. Pero a es un símbolo de variable, luego esta desigualdad implica que $a \in atm(\psi)$. ■

Lema 4. *Sea φ una fórmula proposicional y v, w asignaciones de variables. Si $v \upharpoonright atm(\varphi) = w \upharpoonright atm(\varphi)$ entonces $v(\varphi) = w(\varphi)$.*

Demostración. Podemos hacer una demostración por inducción. Si φ es una proposición atómica, $\varphi \equiv a$, la hipótesis nos permite afirmar que $v(\varphi) = v(a) = w(a) = w(\varphi)$.

Supongamos que φ no es atómica y que el resultado es cierto para toda fórmula ϕ de complejidad menor que la de φ, es decir, que cumpla $com(\phi) < com(\varphi)$.

Como φ tiene la forma $(\neg\alpha), (\alpha \to \beta), (\alpha \vee \beta), (\alpha \wedge \beta), (\alpha \leftrightarrow \beta)$ el resultado es inmediato por el contenido de la hipótesis de inducción y la definición 3.2.1 de los apuntes. ■

Lema 5. *Sean a un símbolo de variable y tanto φ como ψ fórmulas; sea también ν una asignación de variables. Si $\nu(\psi) = \nu(a)$ entonces $\nu(\varphi[\psi/a]) = \nu(\varphi)$.*

Demostración. De nuevo haremos una demostración por inducción sobre la complejidad de φ. El caso base será $com(\varphi) = 0$. Se tiene que o bien $\varphi \equiv a$, en cuyo caso $\nu(\varphi[\psi/a]) = \nu(\psi) = \nu(a) = \nu(\varphi)$, o bien $\varphi \equiv c$ donde c es un símbolo de variable distinto de a por lo que $\nu(\varphi[\psi/a]) = \nu(c) = \nu(\varphi)$.

Supongamos que φ tiene alguna de las expresiones que mencionamos en el Lema 1 en función de α y β, y que $\nu(\alpha[\psi/a]) = \nu(\alpha)$ y $\nu(\beta[\psi/a]) = \nu(\beta)$. Realizamos una distinción de casos:

- Si $\varphi = (\alpha \to \beta)$, entonces $\nu(\varphi[\psi/a]) = \nu(\alpha[\psi/a] \to \beta[\psi/a]) = \nu(\alpha[\psi/a])\nu(\beta[\psi/a]) + \nu(\alpha[\psi/a]) + 1 = \nu(\alpha)\nu(\beta) + \nu(\alpha) + 1 = \nu(\varphi)$.
- Si $\varphi = (\alpha \vee \beta)$, entonces $\nu(\varphi[\psi/a]) = \nu(\neg\alpha[\psi/a] \to \beta[\psi/a]) = \nu(\neg\alpha[\psi/a])\nu(\beta[\psi/a]) + \nu(\neg\alpha[\psi/a]) + 1 = (\nu(\alpha) + 1)\nu(\beta) + \nu(\alpha) + 1 + 1 = \nu(\alpha)\nu(\beta) + \nu(\beta) + \nu(\alpha) = \nu(\varphi)$.

Aquí se come el uno y desarrolla lo de la izquierda

- Si $\varphi = (\alpha \wedge \beta)$, entonces $\nu(\varphi[\psi/a]) = \nu(\neg(\alpha[\psi/a] \to \neg\beta[\psi/a])) = \nu(\alpha[\psi/a] \to \neg\beta[\psi/a]) + 1 = \nu(\alpha[\psi/a])\nu(\neg\beta[\psi/a]) + \nu(\alpha[\psi/a]) + 1 = \nu(\alpha)(\nu(\beta) + 1) + \nu(\alpha) + 1 = \nu(\alpha)\nu(\beta) = \nu(\varphi)$.
- Si $\varphi = (\alpha \leftrightarrow \beta) = ((\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha))$, y basta usar lo que hemos probado en los casos anteriores.
- Si $\varphi = (\neg\alpha)$, entonces $\nu(\varphi[\psi/a]) = \nu(\neg(\alpha[\psi/a])) = \nu(\alpha[\psi/a] + 1 = \nu(\alpha) + 1 = \nu(\varphi)$

Concluimos por tanto que en cualquier caso obtenemos que $\nu(\varphi[\psi/a]) = \nu(\varphi)$, como queríamos. ■

Lema 6. *Sean φ y ψ fórmulas proposicionales tales que φ es una contradicción o ψ es una tautología. Entonces $\models \varphi \to \psi$ y existe una fórmula φ' tal que*

a) $\models \varphi \to \varphi'$

b) $\models \varphi' \to \psi$

Demostración. Vamos a estudiar tres casos diferentes para cada apartado. Vemos primero la primera consecuencia:

- Si φ fuese una contradicción, para cualquier asignación ν se evaluaría φ como falsa, es decir, ($\nu(\varphi) = 0$).

  Aplicando ahora el teorema 3.3.7, $\models \varphi \to \psi$ equivale a que $\varphi \models \psi$, y por el teorema 3.3.10, hemos de ver que $\{\varphi, \neg\psi\}$ es insatisfacible por ser φ una contradicción.
- Si ψ fuese una tautología, desarrollando de la misma forma que antes, hemos de ver que $\{\varphi, \neg\psi\}$ es insatisfacible, pero esto es claro pues por ser ψ tautología, $\neg\psi$ es contradiccion.
- Si φ es contradicción y ψ es tautología, por lo ya explicado, $\{\varphi, \neg\psi\}$ es una contradicción.

Con esto podemos ver que se cumplen tanto a como b.

- Si φ es contradicción, es claro que se verifica a). Para que b) se verifique, la fórmula φ' puede ser cualquier contradicción y por lo ya visto, $\models \varphi' \to \psi$.

- Si ψ es tautología, es claro que se verifica b). Para que a) se verifique podemos tomar φ' como una tautología cualquiera, y por lo ya visto, $\models \varphi \to \varphi'$

- Si φ es una contradicción y ψ tautología, todas las fórmulas cumples a y b.

■

Lema 7. *Sean φ y ψ fórmulas proposicionales tales que $\models \varphi \to \psi$ y ni φ es una contradicción ni ψ es una tautología. Supongamos que n es un número natural, que $\#(atm(\varphi) \setminus atm(\psi)) = n + 1$ y que $a \in atm(\varphi) \setminus atm(\psi)$. Sea $b \in atm(\varphi) \cap atm(\psi)$ y*

Esto es $\vee$

$$\varphi' = \varphi[\top(b)/a] \wedge \varphi[\bot(b)/a]$$

Entonces se cumple lo siguiente:

a) $\models \varphi \to \varphi'$

b) $\models \varphi' \to \psi$

c) *φ' no es una contradicción*

d) $atm(\varphi') = atm(\varphi) \setminus \{a\}$

e) $atm(\varphi') \setminus atm(\psi) = (atm(\varphi) \setminus atm(\psi)) \setminus \{a\}$

f) $\#(atm(\varphi') \setminus atm(\psi)) = n$

g) $atm(\varphi') \cap atm(\psi) = atm(\varphi) \cap atm(\psi)$

Demostración. a). Sea ν una asignación tal que $\nu(\varphi) = 1$. Por la definición de φ', vemos que esta fórmula se obtiene de la disyunción de reemplazar todas las apariciones de a por $\top(b)$ por un lado, y por $\perp(b)$ por otro.

Si $\nu(a) = 1 = \nu(\top(b))$, entonces del Lema 5 obtenemos que $\nu(\varphi[\top(b)/a]) = \nu(\varphi)$, mientras que $\nu(\varphi[\perp(b)/a]) = \nu(\perp(b))$. Usando nuestra hipótesis y la definición de φ' obtenemos que $\nu(\varphi') = 1$. Para mí esto sobra

En el caso en el que $\nu(a) = 0 = \nu(\perp(b))$ razonamos análogamente, obteniendo también que $\varphi' = 1$.

Por tanto, si $\nu(\varphi) = 1$ entonces $\nu(\varphi') = 1$, es decir, $\models \varphi \to \varphi'$.

b). Supongamos que $\nu(\varphi') = 1$, entonces o bien $\nu(\varphi[\top(b)/a]) = 1$, o bien $\nu(\varphi[\perp(b)/a]) = 1$. Este era el que no tenemos

c). Se deduce del apartado a) y de la hipótesis: φ no es una contradicción. Pues una contradicción no puede ser consecuencia de una fórmula satisfacible.

d). En el apartado a) hemos explicado la fórmula φ'. Se obtiene de la disyunción de dos fórmulas: una de ellas reemplazando todas las apariciones de a, que no aparecen en ψ por $\neg b \vee b$, y la otra reemplazándola por $\neg b \wedge b$. Como $b \in atm(\varphi)$, obtenemos que $atm(\varphi') = atm(\varphi) \setminus \{a\}$.

e). Para probar esta igualdad aplicamos el apartado anterior y que $a \notin atm(\psi)$, obteniendo que: $atm(\varphi') \setminus atm(\psi) = (atm(\varphi \setminus \{a\}) \setminus atm(\psi) = (atm(\varphi) \setminus atm(\psi) \setminus \{a\}$.

f). Usamos de nuevo los apartados anteriores: $\#(atm(\varphi') \setminus atm(\psi)) = \#(atm(\varphi) \setminus atm(\psi) \setminus \{a\}) = n + 1 - \#\{a\} = n$.

g). A partir de la hipótesis $a \notin atm(\psi)$ y el apartado d) deducimos lo siguiente: $atm(\varphi') \cap atm(\psi) = (atm(\varphi) \setminus \{a\}) \cap atm(\psi) = atm(\varphi) \cap atm(\psi)$.

■

Teorema 1 (Interpolación de Craig)**.** *Si $\models \varphi \to \psi$ entonces hay un ρ (el interpolante) tal que $\models \varphi \to \rho$ y $\models \rho \to \psi$, donde $atm(\rho) \subseteq atm(\varphi) \cap atm(\psi)$. Aquí los $atm(\varphi)$ es el conjunto de variables proposicionales que ocurren en φ, y $\models$ es la relación de implicación semántica para la lógica proposicional.*

Demostración. Razonamos por inducción sobre el número de variables proposicionales que ocurren en φ que no ocurren en ψ.

- Supongamos como caso base que $\mathrm{atm}(\varphi) = \mathrm{atm}(\psi) \neq \emptyset$. Esto lo podemos suponer gracias al Lema 1 y Lema 2. Deducimos que $\mathrm{atm}(\varphi) \subseteq \mathrm{atm}(\varphi) \cap \mathrm{atm}(\psi)$. Además tenemos que $\models \varphi \to \varphi$ y $\models \varphi \to \psi$ y como por hipótesis φ no es una contradicción, podemos tomar $\rho = \varphi$.
- Para el paso inductivo suponemos que se ha demostrado el resultado para todo x donde $\#(\mathrm{atm}(x) \setminus \mathrm{atm}(\psi)) = n$ y que $\#(\mathrm{atm}(\varphi) \setminus \mathrm{atm}(\psi)) = n + 1$. Por el Lema 1 podemos tomar $q \in \mathrm{atm}(\varphi)$ con $q \notin \mathrm{atm}(\psi)$ y definir:

  $$\varphi' := \varphi[\top/q] \vee \varphi[\perp/q]$$

  donde $\varphi[\top/q]$ es lo mismo que φ con cada aparición de q reemplazada por $\top$ y $\varphi[\perp/q]$ reemplaza de la misma forma q con $\perp$. Hemos de notar que hemos tomado unas condiciones de partida que coinciden con las hipótesis del Lema 7, es por ello que tenemos que las siguientes tres afirmaciones son ciertas (1 se debe a b), 2 se debe a f) y 3 se debe a a)):

  $$\models \varphi' \to \psi \tag{1}$$

  $$\#(\mathrm{atm}(\varphi') - \mathrm{atm}(\psi)) = n \tag{2}$$

  $$\models \varphi \to \varphi' \tag{3}$$

  Del Lema 7 sabemos que φ' no es una contradicción, por lo que usando (1), (2) y el paso inductivo tenemos que existe ρ que no es una contradicción y tal que:

  $$\models \varphi' \to \rho \tag{4}$$

  $$\models \rho \to \psi \tag{5}$$

Pero de (3) y (4) por la transitividad de $\to$ deducimos que

$$\models \varphi \to \rho \tag{6}$$

Por tanto, ya hemos encontrado el ρ que buscábamos para φ y ψ.

$\blacksquare$

3. Componga un programa en Python que dada una expresión booleana encuentre su polinonio de Zhegalkine. El programa deberá ser entregado al menos en formato `.ipynb` para `Jupyter`.

   El Jupyter notebook se adjunta en el `.zip` del exámen.

4. Considere la función booleana $f : B^4 \to B$ definida por:

$$f(x, y, z, u) = \sum m(0, 2, 3, 6, 7, 10, 11, 14)$$

   a) Utilizando el método de Quine-McCluskey, calcule una expresión minimal de f a condición de ser suma de productos de literales.

   Primero escribimos los minterm en binario:

$$\begin{array}{ll} 0)_{10} = 0000)_2 & 7)_{10} = 0111)_2 \\ 2)_{10} = 0010)_2 & 10)_{10} = 1010)_2 \\ 3)_{10} = 0011)_2 & 11)_{10} = 1011)_2 \\ 6)_{10} = 0110)_2 & 14)_{10} = 1110)_2 \end{array}$$

   Ahora encontramos los implicantes primos esenciales:

0000
0010
0011
0110
1010
0111
1011
1110

$\longrightarrow$

00_0	{0,2}*
001_	{2,3} ✓
0_10	{2,6} ✓
_010	{2,10} ✓
0_11	{3,7} ✓
_011	{3,11} ✓
011_	{6,7} ✓
_110	{6,14} ✓
101_	{10,11} ✓
1_10	{10,14} ✓

$\longrightarrow$

0_1_	{2,3,6,7} *
_01_	{2,3,10,11} *
__10	{2,6,10,14} *

   Ahora generamos la tabla del algoritmo:

	0	2	3	6	7	10	11	14
00_0	●	●						
0_1_		●	●	●	●			
_01_		●	●			●	●	
__10		●		●		●		●

   Y obtenemos que la expresión que buscamos es:

$$f(x, y, z, u) = \bar{x}\bar{y}\bar{u} + \bar{x}z + \bar{y}z + z\bar{u}$$

b) Utilizando el método de Quine-McCluskey, calcule una expresión minimal de f a condición de ser producto de sumas de literales.

Volvemos a generar los números necesarios en binario, ahora teniendo en cuenta que trabajamos con maxterms:

$$\left.\begin{array}{ll} 1)_{10} = 0001)_2 & 9)_{10} = 1001)_2 \\ 4)_{10} = 0100)_2 & 12)_{10} = 1100)_2 \\ 5)_{10} = 0101)_2 & 13)_{10} = 1101)_2 \\ 8)_{10} = 1000)_2 & 15)_{10} = 1111)_2 \end{array}\right\} f(x,y,z,u) = \prod M(1,4,5,8,9,12,13,15)$$

Ahora encontramos los implicantes primos esenciales:

		0_01	{1,5} ✓		
0001		_001	{1,9} ✓		
0100		010_	{4,5} ✓		
1000		_100	{4,12} ✓		
0101	$\longrightarrow$	100_	{8,9} ✓	$\longrightarrow$	_ _01 {1,5,9,13}*
1001		1_00	{8,12} ✓		_10_ {4,5,12,13} *
1100		_101	{5,13} ✓		1_0_ {8,9,12,13} *
1101		1_01	{9,13} ✓		
1111		110_	{12,13} ✓		
		11_1	{13,15} *		

Ahora generamos la tabla del algoritmo: $f(x,y,z,u) = (\bar{x}+\bar{y}+\bar{u})(z+\bar{u})(\bar{y}+z)(\bar{x}+z)$

	1	4	5	8	9	12	13	15
{13, 15}							●	●
{1, 5, 9, 13}	●		●		●		●	
{4, 5, 12, 13}		●	●			●	●	
{8, 9, 12, 13}				●	●	●	●	

c) Calcule el coste de cada una de las expresiones encontradas para f en los apartados 4*b*) y 4*a*) y señale cuál es la del menor.

En la función obtenida en el apartado 4*a*), tenemos un total de 4 productos distintos (puertas AND), todos sumados (puerta OR) y un total de 13 entradas entre todas las puertas lógicas, obteniendo que:

$$4\cdot, 1+, 13 \text{ ejes} \Rightarrow 18$$

En la función obtenida en el apartado 4*b*), tenemos un total de 4 sumas distintas (puertas OR), todos multiplicados (puerta AND) y un total de 13 entradas entre todas las puertas lógicas, obteniendo que

$$4+, 1\cdot, 13 \text{ ejes} \Rightarrow 18$$

Concluimos que ambas funciones tienen el mismo coste.

d) Diga razonadamente si es o no f una función autodual.

Por el teorema 4.13.3, f es autodual si es neutra y ninguna pareja de los minterm que la describen es una pareja de minterm mutuamente exclusivos. Una pareja de minterm mutuamente exclusivos $< m_1, m_2 >$ es aquella que $m_1 + m_2 = 2^n - 1$, donde $n = 4$ es el número de variables. Como tenemos 4 variables, las parejas de minterm mutuamente exclusivos son:

$$< 0,15 >, < 1,14 >, < 2,13 >, < 3,12 >, < 4,11 >, < 5,10 >, < 6,9 >, < 7,8 >$$

Pero por la expresión de f como suma de minterms (respectivamente la expresada como producto de maxterms), vemos que nunca están ambos minterm en la expresión. También es neutra ya que f viene descrita por el mismo número de minterm que de maxterm, en este caso 8 y 8.

5. Usando exclusivamente lo que conocemos de resolución, diga razonadamente si son ciertas las siguientes afirmaciones:

   a) El conjunto de cláusulas:

$$\begin{aligned}\Sigma_1 = \{&p(f(x),z) \vee \neg q(y,z,x),\\ &\neg p(y,b),\\ &q(g(a),x,a)\}\end{aligned}$$

   es satisfacible.

   Sean $\Sigma' = \{\neg p(y,b), q(g(a),x,a)\}$ y $\sigma_0 = p(f(x),z) \vee \neg q(y,z,x)$.

   Vemos que Σ' es satisfacible si podemos definir una interpretación I_A^s tal que $I_A^s(\neg p(y,b)) = I_A^s(q(g(a),x,a)) = 1$, en cuyo caso podemos aplicar el Teorema 5.16.2 que nos asegura que existe una Σ_1-demostración lineal de la cláusula vacía. Si no existiese ninguna interpretación verificando lo anterior, alguna de las fórmulas (o ambas) de Σ' serían una contradicción luego Σ sería insatisfacible. También por el teorema 5.16.1 sabemos que si existe una demostración por resolución de la cláusula vacía a partir de Σ, entonces existe una Σ_1-demostración lineal de la cláusula vacía. Bien pues, vamos a encontrarla:

$$\begin{aligned}&\gamma_0 : p(f(x),z) \vee \neg q(y,z,x)\\ &\beta_0 = q(g(a),x,a)\\ &\gamma_1 = p(f(a),z) \qquad \psi = (x|x_1), \qquad \Psi = (y|g(a))(x_1|z)(x|a)\\ &\beta_1 = \neg p(y,b)\\ &\gamma_2 = \square \qquad \psi = \varepsilon \qquad \Psi = (y|f(a))(z|b)\end{aligned}$$

   Así pues, Σ_1 es insatisfacible luego esta afirmación es falsa.

   b) El conjunto de cláusulas:

$$\begin{aligned}\Sigma_2 = \{&p(x,y,z) \vee q(x,z,y),\\ &p(y,z,x) \vee \neg q(z,x,y),\\ &\neg p(z,x,y) \vee q(x,y,z),\\ &\neg p(y,z,x) \vee \neg q(y,x,z)\}\end{aligned}$$

   es insatisfacible.

   La siguiente es una $\Sigma-$demostración por preferencia de cláusulas simples. Para pasar de Σ_i a Σ_{i+1}, unimos la cláusula más corta entre las que se pueden obtener con Σ_i. Sabemos que esta técnica es correcta, pero no completa. Sin embargo, en este caso sí que nos conduce a la solución que buscamos.

$$\begin{aligned}&\Sigma_0 = \{\underline{p(x.y,z) \vee q(x,z,y)}, \underline{p(y,z,x) \vee \neg q(z,x,y)}, \underline{\neg p(z,x,y) \vee q(x,y,z)},\\ &\underline{\neg p(y,z,x) \vee \neg q(y,x,z)}\}\\ &\Sigma_1' = \Sigma_0 \cup \{\neg q(z,x,y) \vee \neg q(y,x,z)\} \quad \text{Disminución}\\ &\Sigma_1 = \Sigma_0 \cup \{\neg q(y,x,y)\}\\ &\Sigma_2' = \Sigma_1 \cup \{q(z,y,x) \vee q(x,y,z)\} \quad (x|z)(y|x)(z|y)\\ &\Sigma_2 = \Sigma_1 \cup \{q(x,y,x)\} = \Sigma_0 \cup \{\neg q(y,x,y), q(x,y,x)\}\\ &\Sigma_3 = \Sigma_0 \cup \{\square\}\end{aligned}$$

   Para obtener Σ_i' hemos aplicado resolución de las cláusulas de Σ_{i-1}, y para obtener Σ_i a partir de Σ_i' hemos efectuado disminuciones.

   Por tanto, el conjunto es insatisfacible así que esta afirmación es verdadera.

6. Considere las siguientes fórmulas:

   - $\varphi_1 \equiv \exists x(q(x) \wedge \forall y(p(y) \to r(x,y)))$
   - $\varphi_2 \equiv \forall x(q(x) \to \exists y(o(x,y) \wedge p(y)))$
   - $\varphi_3 \equiv \forall x(\exists y(o(x,y) \wedge r(x,y)) \to s(x))$
   - $\psi \equiv \exists x(q(x) \wedge s(x))$

Diga razonadamente si es cierta o no la afirmación $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \models \psi$.

Buscamos llegar a una lista de claúsulas ordenadas para aplicar la resulución lineala ordenada. Por ello, primero hacemos:

$\varphi_1 = \exists x(q(x) \wedge \forall y(p(y) \to r(x,y))) = \exists x \forall y(q(x) \wedge (\neg p(y) \vee r(x,y)))$

$\varphi_2 = \forall x(q(x) \to \exists y(o(x,y) \wedge p(y))) = \forall x \exists y((\neg q(x) \vee o(x,y)) \wedge (\neg q(x) \vee p(y)))$

$\varphi_3 = \forall x(\exists y(o(x,y) \wedge r(x,y)) \to s(x)) = \forall x \forall y(\neg o(x,y) \wedge \neg r(x,y) \wedge s(x))$

Está mal, son ∨

Como queremos demostrar que $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \models \psi$, escribimos también $\neg\psi = \neg\exists x(q(x) \wedge s(x))$

Escribimos su forma de Skolem

Esto es una r

$\varphi_1^s \equiv \forall y(q(a) \wedge (\neg p(y) \vee v(a,y))) \equiv q(a) \wedge \forall y(r(a,y) \vee \neg p(y))$

$\varphi_2^s \equiv \forall x((\neg q(x) \vee o(x, f(x)) \wedge (\vee q(x) \vee p(f(x))))$

$\varphi_3^s \equiv \forall x \forall y(\neg o(x,y) \vee \neg v(x,y) \vee s(x))$

Esto es una r

Tenemos entonces la lista de cláusulas:

- $q(a)$
- $r(a,y) \vee \neg p(y)$
- $o(x, f(x)) \vee \neg q(x)$
- $p(f(x)) \vee \neg q(x)$
- $s(x) \vee \neg o(x,y) \vee \neg r(x,y)$
- $\neg q(x) \vee \neg s(x)$

Teorema 5.5.1

Luego, en términos de cláusulas este problema es equivalente a saber si es insatisfacible o no $\Sigma = \Sigma' \cup \{\sigma_0\}$ donde:

p(f(x))

$$\Sigma' = \{q(a), r(a,y) \vee \neg p(y), o(x, f(x)) \vee \neg q(x), o(\cancel{x, f(x)}) \vee \neg q(x), s(x) \vee \neg o(x,y) \vee \neg r(x,y)\}$$

y tomamos como raíz:

$$\sigma_0 = \neg q(x) \vee \neg s(x)$$

$\gamma_0 : \neg q(x) \vee \neg s(x)$

$\beta_0 : q(a)$ sustitución $(x|a)$

$\gamma_1 : s(a)$

$\beta_1 : s(x) \vee \neg o(x,y) \vee \neg r(x,y)$ sustitución $(x|a)$

$\gamma_2 : \neg o(a,y) \vee \neg r(a,y)$

$\beta_2 : o(x, f(x)) \vee \neg q(x)$ sustitución $((x|a),(y|f(a)))$

$\gamma_3 : \neg q(a) \vee \neg r(a, f(a))$

$\beta_3 : q(a)$

$\gamma_4 : \neg r(a, f(a))$

$\beta_4 : r(a,y) \vee \neg p(y)$ sustitución $(y|f(a))$

$\gamma_5 : \neg p(f(a))$

$\beta_5 : p(f(x)) \vee \neg q(x)$ sustitución $(x|a)$

$\gamma_6 : \neg q(a)$

$\beta_6 : q(a)$

Luego concluimos que $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \models \psi$.

7. Sea G un grafo y A su matriz de adyacencia. Sabemos que:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

a) ¿Es G conexo?

Observamos que efectivamente, el grafo es conexo. Sabemos que la matriz de adyacencia de un grafo elevada a n nos da el número de caminos que hay entre un vértice y otro de longitud n. También es claro que al ser las matrices simétricas, estamos ante un grafo no dirigido. Así, el vértice v_1 está unido a los vértices v_2 y v_6 por caminos de longitud 2, como nos indica la matriz A^2. De manera análoga, vemos que v_1 está unido a v_3, v_4 y v_5 por caminos de longitud 3, como nos indica la matriz A^3. Por tanto, al estar v_1 unido a cada uno de los vértices, y ser un grafo no dirigido, el grafo es conexo.

b) ¿Es G un grafo de Euler?

Calculemos A:

$$A^{-2} \cdot A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Observamos que no tenemos lados paralelos (de haber tendríamos coeficientes mayores que 1). Así, el número de caminos de longitud 2 de un vértice a él mismo es igual al grado de ese vértice. Esto se debe a que para cada lado o arista que incide en un vértice, tenemos un camino que sale por ese vértice y vuelve a él mismo. Vemos entonces que el grado de cada vértice es 2.

Al ser un grafo conexo, y todos los vértices tener grado par, el teorema 3.4.1 del tema de grafos nos asegura que tiene un circuito de Euler y por tanto es un grafo de Euler.

Es por la proposición 5.4.1.

c) ¿Es G un árbol?

Al tener un circuito de Euler, podemos asegurar que no es un árbol.

Teorema 5.6.1.

Se puede separar en 2 subconjuntos de vértices de forma que cada lado incide en un vértice de cada subconjunto

d) ¿Es G bipartido?

Para ver si es un grafo bipartito, comprobaremos si tiene ciclos o no de longitud impar. Con A^3 observamos que no tiene, pues todos los elementos de la diagonal valen 0. Solo nos faltaría comprobar si tiene ciclos de longitud 5, pues al tener 6 vértices no tiene sentido considerar grados mayores.

Por definición de ciclo (Definición 57)

Calculemos A^5:

$$A^2 \cdot A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 11 & 10 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 11 & 10 & 0 \\ 11 & 11 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 10 & 11 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 11 & 10 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 10 & 11 & 11 & 0 \end{pmatrix}$$

Como todos los elementos de la diagonal de A^5 son 0, no hay ciclos de longitud 5 y concluimos que el grafo es bipartido.

e) ¿Cuántos caminos de longitud 5 hay de v_1 a v_5? ¿Y de v_1 a v_6?

Usando los cálculos del apartado anterior, concluimos que hay 11 caminos de v_1 a v_5 y no hay caminos de longitud 5 de v_1 a v_6.