Análisis Matemático II

Soluciones a los ejercicios del examen final

1. Enunciar y demostrar el Test de Weierstrass.
2. Enunciar y demostrar el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue.

3. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, estudiar la integrabilidad en $\mathbb{R}^+$ de la función dada por

$$f(x) = x^a e^{bx} \log x \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Solución

Como f es continua, luego localmente integrable en $\mathbb{R}^+$, también es localmente integrable en los intervalos $I =]0, 1]$ y $J = [1, +\infty[$, lo que nos permite usar en ambos el criterio de comparación.

En I la intuición nos dice que f debe comportarse como la potencia $x \mapsto x^a$, y efectivamente lo vamos a comprobar. Tomando $g_1(x) = x^a$ para todo $x \in I$, tenemos que g_1 es localmente integrable y no se anula en I, verificando que

$$\frac{|f(x)|}{|g_1(x)|} = e^{bx} |\log x| \to +\infty \quad (x \to 0)$$

Si $a \leq -1$ sabemos que g_1 no es integrable en I, luego el criterio de comparación nos dice que f tampoco lo es.

En el caso $a > -1$, como g_1 es integrable en I, no obtenemos información. Sin embargo, fijado $c \in \mathbb{R}$ con $a > c > -1$, tomamos ahora $g_2(x) = x^c$ para todo $x \in I$, con lo que g_2 es integrable y no se anula en I. Puesto que

$$\lim_{x \to 0} \frac{|f(x)|}{|g_2(x)|} = \lim_{x \to 0} x^{a-c} |\log x| = 0$$

el criterio de comparación nos dice que f es integrable en I. Así pues, hemos probado que f es integrable en $[0, 1[$ si, y sólo si, $a > -1$.

Tomamos ahora $g_3(x) = e^{bx/2}$ para todo $x \in J$, con lo que g_3 es localmente integrable y no se anula en J, siendo integrable en J si, y sólo si, $b < 0$. Entonces, cuando $b < 0$ tenemos

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{|f(x)|}{|g_3(x)|} = \lim_{x \to +\infty} x^a e^{bx/2} |\log x| = 0$$

y como g_3 es integrable en J, el criterio de comparación nos dice que f también lo es.

En cambio, cuando $b > 0$, tenemos

$$\frac{|f(x)|}{|g_3(x)|} = x^a e^{bx/2} |\log x| \to +\infty \quad (x \to +\infty)$$

y como g_3 no es integrable en J, el criterio nos dice que f tampoco lo es.

Finalmente, en el caso $b = 0$ volvemos a tomar $g_1(x) = x^a$ para todo $x \in J$. De nuevo g_1 es localmente integrable y no se anula en J. Además tenemos

$$\frac{|\,f(x)\,|}{|\,g_1(x)\,|} = |\,\log x\,| \;\to\; +\infty \qquad (x \to +\infty)$$

Por el estudio hecho en el intervalo I, sólo nos interesa el caso $a > -1$, en el que g_1 no es integrable en J y el criterio de comparación nos dice que f tampoco lo es.

En resumen, f en integrable en $\mathbb{R}^+$ si, y sólo si, $a > -1$ y $b < 0$. ∎

4. Probar que el conjunto

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2 + y^2 \leq 1\,, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \right\}$$

es medible y calcular su volumen.

Solución

Claramente, E es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^3$, luego es medible. Calculamos su volumen como una integral triple, usando un cambio de variable a coordenadas cilíndricas. Si para $(\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^+ \times\,]-\pi\,,\,\pi\,[\, \times \mathbb{R}$ tomamos $x = \rho \cos\theta$ e $y = \rho \operatorname{sen}\theta$, tenemos $x^2 + y^2 \leq 1$ si, y sólo si, $\rho \leq 1$, mientras que $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ si, y sólo si $\rho^2 + z^2 \leq 4$. Por tanto, considerando el conjunto

$$B = \left\{ (\rho\,,\,\theta\,,\,z) \in \mathbb{R}^+ \times\,]-\pi\,,\,\pi\,[\, \times \mathbb{R} \;:\; \rho < 1\,, \quad \rho^2 + z^2 \leq 4 \right\}$$

el teorema de cambio de variable nos dice que el volumen de E viene dado por

$$\lambda_3(E) = \int_E d\,(x, y, z) = \int_B \rho\; d\,(\rho, \theta, z)$$

Para esta integral usamos el teorema de Tonelli. Dados $\rho \in \mathbb{R}^+$ y $\theta \in]-\pi\,,\,\pi\,[$, la sección horizontal $B_{(\rho,\theta)} = \left\{ z \in \mathbb{R} \,:\, (\rho, \theta, z) \in B \right\}$ es vacía si $\rho > 1$, mientras que

$$E_{(\rho,\theta)} = \left[\, -\sqrt{4-\rho^2}\,,\, \sqrt{4-\rho^2}\,\right] \qquad \forall\,(\rho, \theta) \in]\,0\,,\,1\,] \times\,]-\pi\,,\,\pi\,[$$

Por tanto, el teorema de Tonelli nos dice que

$$\begin{aligned}
\int_B \rho\; d\,(\rho, \theta, z) &= \int_0^1 \left[\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\sqrt{4-\rho^2}}^{\sqrt{4-\rho^2}} \rho\; dz \right) d\theta \right] d\rho \\
&= \int_0^1 \left(\int_{-\pi}^{\pi} 2\,\rho\,\sqrt{4-\rho^2}\, d\theta \right) d\rho \;=\; 4\,\pi \int_0^1 \rho\,\sqrt{4-\rho^2}\, d\rho \\
&= 4\,\pi \left[-\frac{\left(4-\rho^2\right)^{3/2}}{3} \right]_0^1 = \frac{4\,\pi}{3}\left(8 \,-\, 3\sqrt{3}\right)
\end{aligned}$$

Así pues, el volumen de E viene dado por $\lambda_3(E) = \dfrac{4\,\pi}{3}\left(8 \,-\, 3\sqrt{3}\right)$. ∎

5. Sea $A = \{ (x,y,z) \in\in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2+z^2 > 1 \}$ y $g : A \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$g(x,y,z) = \frac{|\,x\,y\,|}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3} \qquad \forall\,(x,y,z) \in A$$

Probar que g es integrable en A y calcular su integral.

Solución

Usaremos el cambio de variable a coordenadas esféricas. Por tanto, para $r \in \mathbb{R}^+$, junto con $\theta \in]-\pi\,,\,\pi[$ y $\varphi \in]-\pi/2\,,\,\pi/2[$ tomamos

$$x = r\,\cos\varphi\,\cos\theta\,, \quad y = r\,\cos\varphi\,\operatorname{sen}\theta \ \text{ y } \ z = r\,\operatorname{sen}\varphi$$

Se tiene claramente $r^2 = x^2+y^2+z^2$, luego $x^2+y^2+z^2 > 1$ si, y sólo si, $r > 1$. Por tanto, el recinto de integración en coordenadas esféricas es el intervalo no acotado

$$B =]\,1\,,\,+\infty\,[\,\times\,]-\pi\,,\,\pi\,[\,\times\,]-\pi/2\,,\,\pi/2\,[$$

sobre el que integraremos la función $h : B \to \mathbb{R}$ definida, para todo $(r,\theta,\varphi) \in B$, por

$$h(r,\theta,\varphi) = r^2\,\cos\varphi\,\frac{r^2\,\cos^2\varphi\;|\,\cos\theta\,\operatorname{sen}\theta\,|}{r^6} = \frac{1}{2\,r^2}\,\cos^3\varphi\;|\,\operatorname{sen}(2\theta)\,|$$

El teorema de cambio de variable nos dice que g será integrable en A si, y sólo si, h es integrable en B, en cuyo caso, ambas integrales coinciden.

Como h no toma valores negativos, el teorema de Tonelli nos permite escribir

$$\int_B h(r,\theta,\varphi)\;d\,(r,\theta,\varphi) = \int_1^{+\infty}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{2\,r^2}\,\cos^3\varphi\,|\,\operatorname{sen}(2\theta)\,|\;d\varphi\right)d\theta\right]dr$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_1^{+\infty}\frac{dr}{r^2}\right)\left(\int_{-\pi}^{\pi}|\,\operatorname{sen}(2\theta)\,|\;d\theta\right)\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^3\varphi\;d\varphi\right)$$

Calculamos ahora por separado las tres integrales simples que han aparecido. En primer lugar tenemos:

$$\int_1^{+\infty}\frac{dr}{r^2} = \left[-\frac{1}{r}\right]_1^{+\infty} = 1$$

Por otra parte como la función $\theta \mapsto |\,\operatorname{sen}(2\theta)\,|$ tiene periodo $\pi/2$, obtenemos

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\,\operatorname{sen}(2\theta)\,|\,d\theta = 4\int_0^{\pi/2}|\,\operatorname{sen}(2\theta)\,|\,d\theta = 4\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}(2\theta)\,d\theta$$

$$= 4\left[-\frac{1}{2}\cos(2\theta)\right]_0^{\pi/2} = 4$$

Finalmente tenemos

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^3\varphi\;d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(1-\operatorname{sen}^2\varphi\right)\,\cos\varphi\;d\varphi = \left[\operatorname{sen}\varphi - \frac{\operatorname{sen}^3\varphi}{3}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{4}{3}$$

De esta forma obtenemos finalmente que

$$\int_B h(r,\theta,\varphi)\;d\,(r,\theta,\varphi) = \frac{8}{3} < \infty$$

con lo que h es integrable en B. Deducimos que g es integrable en A con

$$\int_A g(x,y,z)\;d\,(x,y,z) = \int_B h(r,\theta,\varphi)\;d\,(r,\theta,\varphi) = \frac{8}{3}$$

■