Examen Álgebra I, Doble Grado Informática Matemáticas, Febrero 2020

Nombre::____________________________________________________________

**1.** Considera el conjunto $X = \{a, b, c\}$ y el subconjunto suyo $Y = \{a, b\}$. Da explícitamente la aplicación $f : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X)$ definida por $f(Z) := Z \cap Y$. ¿Es $f$ inyectiva, sobreyectiva o biyectiva? Calcula $f^*(Y)$. ¿Cuantos elementos tiene el conjunto cociente $\mathscr{P}(X)/\sim_f$?

**2.** Encuentra un entero $x$ que a la quinta sea congruente con 415 módulo 931 y que su doble sea congruente con 232 módulo 777.

**3.** Considera el anillo cociente $A = \frac{\mathbb{Z}}{(12\mathbb{Z}\cap 28\mathbb{Z})+15\mathbb{Z}}$ y el polinomio $f(x) = x^5 + x + 1 \in A[x]$. Calcula la característica de $A$ ¿Es el anillo cociente $\frac{A[x]}{\langle f(x)\rangle}$ un dominio de integridad? En caso negativo encuentra un divisor de cero. ¿Es el polinomio $g(x) = x^4 - x + 1 \in A[x]$ una unidad módulo $f(x)$? En caso afirmativo encuentra su inverso.

**4.** Estudia si el polinomio $f(x) = x^6 + 4x^5 + 3x^4 + 3x^3 - x^2 + 3x + 1$ es irreducible sobre $\mathbb{Z}$.

**5.** Factoriza como producto de irreducibles $11 + 42i$ en $\mathbb{Z}[i]$. Encuentra un divisor de cero y una unidad (que no sea unidad en $\mathbb{Z}[i]$) en el anillo cociente $\mathbb{Z}[i]/\langle 11 + 42i\rangle$.

**6.** ¿Cuales de las siguientes asignaciones son aplicaciones y entre las que son cuales de ellas son morfismos de anillos?

- $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}_7;\ f(\frac{n}{m}) = n * m \mod 7, \forall n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0.$
- $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}_7;\ g(\frac{n}{m}) = n * m^{-1} \mod 7, \forall n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0.$
- $h : \mathbb{Z}_{14} \to \mathbb{Z}_7; h(n) = n \mod 7, \forall n = 1, \ldots, 14.$
- $j : \mathbb{Z}_7 \to \mathbb{Z}_{14}; j(n) = n \mod 7, \forall n = 1, \ldots, 7.$
- $k : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}_2; k(n + mi) = (n + m)^2 \mod 2, \forall n, m \in \mathbb{Z}.$

## Ejercicio Extraordinaria

$x^6+4x^5+3x^4+3x^3-x^2+3x+1$

Posibles raíces: $\pm 1 \Rightarrow$ No lo anulan $\Rightarrow$ No tiene factores lineales ni de grado 5

### Módulo 2

$x^6+x^4+x^3+x^2+x+1$

$f(1)=0$

$$
\begin{array}{l|l}
x^6+x^4+x^3+x^2+x+1 & x+1 \\ \hline
x^6+x^5 & x^5+x^4+x^2+1 \\ \hline
x^5+x^4+x^3+x^2+x+1 & \\
x^5+x^4 & \\ \hline
x^3+x^2+x+1 & \\
x^3+x^2 & \\ \hline
x+1 & \\
x+1 & \\ \hline
0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
x^5+x^4+x^2+1 & x+1 \\ \hline
x^5+x^4 & x^4+x+1 \\ \hline
x^2+1 & \\
x^2+x & \\ \hline
x+1 & \\
x+1 & \\ \hline
0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
x^4+x+1 & x^2+x+1 \\ \hline
x^4+x^3+x^2 & x^2+x \\ \hline
x^3+x^2+x+1 & \\
x^3+x^2+x & \\ \hline
1 &
\end{array}
$$

No tiene factores irred. de grado 2 ni 4 en $\mathbb{Z}_2[x]$, tampoco en $\mathbb{Z}[x]$

$$
\begin{array}{l|l}
x^4+x+1 & x^3+x+1 \\ \hline
x^4+x^2+x & x \\ \hline
x^2+1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
x^4+x+1 & x^3+x^2+1 \\ \hline
x^4+x^3+x & x+1 \\ \hline
x^3+1 & \\
x^3+x^2+1 & \\ \hline
x^2 &
\end{array}
$$

Tampoco tiene de grado 3, por lo que es irreducible en $\mathbb{Z}[x]$

Ejercicio Extraordinaria

Factoriza $11+42i$ en $\mathbb{Z}[i]$. Encontrar un divisor de 0 y una unidad en $\mathbb{Z}[i]/\langle 11+42i\rangle$

$N(11+42i) = 1885 = 5\cdot 13\cdot 29$

Elementos de norma 5

$a+bi \Rightarrow a=\pm 1 \quad b=\pm 2 \Rightarrow 1+2i, -1-2i, -2+i, 2-i$

$a=\pm 2 \quad b=\pm 1 \Rightarrow 2+i, -2-i, -1+2i, 1-2i$

$\dfrac{11+42i}{2+i} = \dfrac{64+73i}{5} \Rightarrow$ No da exacto

$\dfrac{11+42i}{2-i} = \dfrac{-20+95i}{5} = -4+19i$

Elementos de norma 13

$a+bi \Rightarrow a=\pm 3 \quad b=\pm 2 \quad 3+2i, -3-2i, -2+3i, 2-3i$

$a=\pm 2 \quad b=\pm 3 \quad 2+3i, -2-3i, -3+2i, +3-2i$

$\dfrac{-4+19i}{3+2i} = \dfrac{26+65i}{13} = 2+5i$

$11+42i = (2-i)(3+2i)(2+5i)$

Una unidad en $\dfrac{\mathbb{Z}[i]}{\langle 11+42i\rangle}$ será un elemento de $\mathbb{Z}[i]$ primo relativo con $11+42i$. Por ejemplo, $1+i$:

$\dfrac{11+42i}{1+i} = \dfrac{53+31i}{2} \simeq 26+16i$ Resto $=1$

$\Downarrow$

m.c.d.$(1+i, 11+42i) = 1$

Un divisor de cero será un elemento de $\mathbb{Z}[i]$ que no es primo relativo con $11+42i$, como por ejemplo, $2-i$.

Ejercicio Extraordinaria

$A = \dfrac{\mathbb{Z}}{(12\mathbb{Z}\cap 28\mathbb{Z})+15\mathbb{Z}}$

$12\mathbb{Z}\cap 28\mathbb{Z} = [12,28]\mathbb{Z} = 84\mathbb{Z}$

m.c.d$(12,28)=4$

m.c.m.$(12,28) = 84$

$84\mathbb{Z}+15\mathbb{Z} = (84,15)\mathbb{Z}$

$\hookrightarrow 3\mathbb{Z} \Rightarrow A = \dfrac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_3$

$f(x) = x^5+x+1$

¿Es $\dfrac{A[x]}{\langle f(x)\rangle}$ un D.I.?

$\dfrac{A[x]}{\langle f(x)\rangle} = \dfrac{\mathbb{Z}_3[x]}{x^5+x+1}$

Para ello, debe ser un cuerpo. Veamos si $x^5+x+1$ es irred. en $\mathbb{Z}_3[x]$

$f(1)=0 \Rightarrow$ No es irreducible en $\mathbb{Z}_3[x]$, pues tiene raíces. No es un D.I. Un divisor de 0 será cualquier polinomio cuyo m.c.d. $(p(x), x^5+x+1) \neq 1$. Por ejemplo, $x+2$

$$
\begin{array}{l|l}
x^5+x+1 & x+2 \\ \hline
2x^5+x^4 & x^4+x^3+x^2+x+2 \\
x^4+x+1 & \\
2x^4+x^3 & \\
x^3+x+1 & \\
2x^3+x^2 & \\
x^2+x+1 & \\
2x^2+x & \\
2x+1 & \\
x+2 & \\
0 &
\end{array}
$$

¿Es $x^4+2x+1 \in A[x]$ unidad módulo $f(x)$? Si lo es, da su inverso

$$
\begin{array}{l|l}
x^5+x+1 & x^4+2x+1 \\ \hline
2x^5+x^2+2x & x \\
x^2+1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
x^4+2x+1 & x^2+1 \\ \hline
2x^4+2x^2 & x^2+2 \\
2x^2+2x+1 & \\
+x^2 \quad +1 & \\
2x+2 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
x^2+1 & 2x+2 \\ \hline
+2x^2+2x & 2x+1 \\
2x+1 & \\
x+1 & \\
2 &
\end{array}
$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $x^5+x+1$ | $1$ | $0$ |
| | $x^4+2x+1$ | $0$ | $1$ |
| $x$ | $x^2+1$ | $1$ | $-x$ |
| $x^2+2$ | $2x+2$ | $2x^2+1$ | $x^3+2x+1$ |
| $2x+1$ | $2$ | $2x^3+x^2+x+1$ | $x^4+2x^3+2x^2+x+2$ |

$(2x^2+1)(2x+1)=x^3+2x^2+2x+2$

$-(\quad)=2x^3+x^2+x+1$

$-(2x+1)(x^3+2x+1)=-(2x^4+x^2+2x+x^3+2x+1)=-(2x^4+x^3+x^2+x+1)=$

$=x^4+2x^3+2x^2+2x+2$

$(x^5+x+1)(2x^3+x^2+x+1)+(x^4+2x+1)(x^4+2x^3+2x^2+x+2)=2$

$\boxed{\text{Inverso de } x^4+2x+1 = 2x^4+x^3+x^2+2x+1}$

Ejercicio Extraordinaria

a) $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}_7$; $f\left(\frac{n}{m}\right)=n*m \bmod 7$, $\forall n,m\in\mathbb{Z}, m\neq 0$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=1\cdot 2=2$ $\quad f\left(\frac{2}{4}\right)=2\cdot 4=8=1$ Mal definida

b) $g: \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}_7$, $g\left(\frac{n}{m}\right) = n * m^{-1} \mod 7$, $\forall n, m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$

$g\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \cdot 2^{-1} = 1 \cdot 4 = 4$ $\quad g\left(\frac{2}{4}\right) = 2 \cdot 4^{-1} = 2 \cdot 2 = 4$

$g\left(\frac{2}{6}\right) = 2 \cdot 6^{-1} = 2 \cdot 6 = 5$ $\quad g\left(\frac{1}{3}\right) = 1 \cdot 3^{-1} = 5$