Determina (forma de Lagrange) el único polinomio $p \in \mathbb{P}_3$ de forma que

$$p(0)=3, \quad p(2)=7, \quad p(-2)=-9, \quad p(-1)=-\frac{1}{2}.$$

SOLUCIÓN

Los polinomios de Lagrange para el problema de interpolación anterior son:

$$\ell_0(x) = \frac{(x-2)(x+2)(x+1)}{(-2)\cdot 2\cdot 1} = -\frac{x^3+x^2-4x-4}{4},$$

$$\ell_1(x) = \frac{x(x+2)(x+1)}{2\cdot 4\cdot 3} = \frac{x^3+3x^2+2x}{24},$$

$$\ell_2(x) = \frac{x(x-2)(x+1)}{(-2)(-4)(-1)} = -\frac{x^3-x^2-2x}{8}$$

y

$$\ell_3(x) = \frac{x(x-2)(x+2)}{(-1)(-3)\cdot 1} = \frac{x^3-4x}{3}.$$

Por tanto, el polinomio p buscado es

$$\boxed{p(x) = 3\ell_0(x) + 7\ell_1(x) - 9\ell_2(x) - \frac{1}{2}\ell_3(x)}$$

$$+ \frac{9}{8}(x^3 - x^2 - 2x) - \frac{1}{6}(x^3 - 4x)$$

$$= \left(-\frac{3}{4} + \frac{7}{24} + \frac{9}{8} - \frac{1}{6}\right)x^3 + \left(-\frac{3}{4}\right.$$

$$+ \left(3 + \frac{7}{12} - \frac{9}{4} + \frac{2}{3}\right)x + 3$$

$$\boxed{= \frac{x^3}{2} - x^2 + 2x + 3}$$