Ejercicios - Geometría

1. ¿Cuáles son sistemas de ecuaciones lineales? Para los que lo sean, escribir la matriz de coeficientes y la matriz ampliada del sistema:

a) $\begin{cases} x+y+\sqrt{z}=0 \\ y-z=3x \\ x+y+z=0 \end{cases}$

No lo es ya que la primera ecuación del sistema no es una ecuación lineal (no es una ecuación lineal ya que $\sqrt{z}$ es es una aplicación de la incógnita z distinta de la identidad.

b) $\begin{cases} x+y+2z=0 \\ y-z=35 \\ x+2y+3z=2007 \end{cases}$

Sí es un sistema de ecuaciones lineales:

$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $A|B=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 35 \\ 1 & 2 & 3 & 2007 \end{array}\right)$

c) $\begin{cases} x+2z=-3y \\ \text{sen}(2)z=35-2x \\ y+x=\sqrt{3}z \end{cases}$

Sí es un sistema de ecuaciones lineales:

$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & \text{sen}(2) \\ 1 & 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ $A|B=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & \text{sen}(2) & 35 \\ 1 & 1 & -\sqrt{3} & 0 \end{array}\right)$

d) $\begin{cases} x+y+z=28 \\ z^2=35 \\ \text{sen}(x)+\cos(y)=\text{tg}(z) \end{cases}$

No lo es ya que las ecuaciones 2ª y 3ª del sistema no son ec. lineales, z^2, sen(x), cos(y) y tg(z) son aplicaciones de las incógnitas x, y, z distintas de la aplicación identidad.

2. Resolver estos sistemas de ec. lineales escalonadas:

a) $\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ y+z+t=2 \\ z+t=3 \end{cases}$

Como está escalonado y en la última ecuación hay dos incógnitas, siendo x, y, z las incógnitas principales de las 1ª, 2ª y 3ª ec. lineal respectivamente.

En este caso, se deben desplazar las incógnitas secundarias a los miembros de la derecha y expresar las incógnitas principales en función de las secundarias:

$z+t=3 \Rightarrow \boxed{z=3-t}$ | $y+z+t=2 \Rightarrow y+3-t+t=2 \Rightarrow \boxed{y=-1}$

$x+y+z+t=1 \Rightarrow x-1+3-t+t=1 \Rightarrow \boxed{x=-1}$

Sol.: $(-1,-1,3-t,t)$

b) $\begin{cases} x+y=-z-t \\ y+z+t=3 \end{cases}$ Estamos ante el mismo caso que antes, solo que al tener 4 incógnitas y 2 ecuaciones, la solución habrá que darla en función de 2 parámetros:

$$y+z+t=3 \Rightarrow \boxed{y=3-z-t}$$
$$x+y=-z-t \Rightarrow x+3-z-t=-z-t \Rightarrow \boxed{x=-3}$$

$$\text{Sol.}: (-3, 3-z-t, z, t)$$

c) $\{x-y+10z=8$
Solo tenemos una ecuación y 3 incógnitas. x es la incógnita principal y la expresaremos en función de 2 parámetros:

$$x-y+10z=8 \Rightarrow \boxed{x=8+y-10z}$$

$$\text{Sol.}: (8+y-10z, y, z)$$

3. y 4. (Mezcla) Discute y resuelve estos sistemas de ec. lineales:

a) $\begin{cases} x+2y-3z=-1 \\ 3x-y+2z=1 \rightarrow F_2-3F_1 \rightarrow \\ 5x+3y-4z=2 \rightarrow F_3-5F_1 \end{cases} \begin{cases} x+2y-3z=-1 \\ -7y+11z=4 \\ -7y+11z=7 \end{cases}$

$$\xrightarrow{F_3-F_2} \begin{cases} x+2y-3z=-1 \\ -7y+11z=4 \\ 0y+0z=3 \end{cases} \xrightarrow{\text{Sistemas equivalentes}} \begin{cases} x+2y-3z=-1 \\ -7y+11z=4 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x=-1-2y+3z \\ y=\dfrac{4-11z}{-7} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-1-2\left(\dfrac{4-11z}{-7}\right)+3z \\ y=\dfrac{4-11z}{-7} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-1+z}{-7} \\ y=\dfrac{4-11z}{-7} \end{cases} \boxed{\text{S.C.I.}}$$

$$z=\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{Sol.}: \left(\frac{-1+\lambda}{-7}, \frac{4-11\lambda}{-7}, \lambda\right)$$

b) $\begin{cases} x+2y-3z=6 \\ 2x-y+4z=2 \\ 4x+3y-2z=14 \end{cases} \xrightarrow[F_3-4F_1]{F_2-2F_1} \begin{cases} x+2y-3z=6 \\ -5y+10z=-10 \\ -5y+10z=-10 \end{cases}$ Son la misma ecuación, elimino una

$$\begin{cases} x+2y-3z=6 \\ -5y+10z=-10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=6-2y+3z \\ y=2+2z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=6-2(2+2z)+3z \\ y=2+2z \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x=2-z \\ y=2+2z \end{cases} \quad z=\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{Sol.}: (2-\lambda, 2+2\lambda, \lambda)$$

$\boxed{\text{S.C.I.}}$

c) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x-2y+z=-2 \\ -x+2y=3 \\ -4y-z=-7 \end{cases} \xrightarrow[F_3+F_2]{F_1-F_2} \begin{cases} x-2y+z=-2 \\ 3y=4 \\ z=1 \\ -4y-z=-7 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x-2y+z=-2 \\ -4y-z=-7 \\ y=4/3 \\ z=1 \end{cases}$

Sustituimos y, z en las dos primeras ecuaciones:

1ª) $x-2\cdot\frac{4}{3}+1=-2 \Rightarrow x=-\frac{1}{3}$

2ª) $-4\cdot\frac{4}{3}-1=-7 \Rightarrow 0\neq-\frac{2}{3} \Rightarrow$ Sistema incompatible

6. Las tres cifras de un número suman 21. Si a ese número se le resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras se obtiene 198. Se sabe también que la cifra de las decenas coincide con la media aritmética entre las otras dos. Calcular dicho número.

$\begin{cases} x+y+z=21 \\ 100x+10y+z-100z-10y-x=198 \\ y=\frac{x+z}{2} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x+y+z=21 \\ 99x-99z=198 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$

$\xrightarrow{F_3-F_1} \begin{cases} x+y+z=21 \\ 99x-99z=198 \\ -3y=-21 \Rightarrow y=7 \end{cases}$ $\begin{rcases} x+z=14 \\ 99x-99z=198 \end{rcases} \xrightarrow{F_2-99F_1}$

$\longrightarrow \begin{cases} x+z=14 \Rightarrow x+6=14 \Rightarrow x=8 \\ -198z=-1188 \Rightarrow z=6 \end{cases}$

El número es el 876.

8. Para la construcción de un almacén se necesita una unidad de hierro y ninguna de madera. Para construir un piso se necesita una unidad de cada material y para una torre se necesitan cuatro de hierro y una de madera. Si disponemos de 14 unidades de hierro y 4 de madera. ¿Cuántos almacenes, torres y pisos se pueden construir haciendo uso de todas las reservas?

$x\equiv$ nº almacenes $y\equiv$ nº pisos $z\equiv$ nº torres

$\begin{cases} x+y+4z=14 \text{ (Consumo hierro)} \\ y+z=4 \text{ (Consumo madera)} \end{cases}$

Es un S.C.I. ya que está formado por 3 incógnitas y 2 ec. lineales, por lo que la solución se da en función de un parámetro.

$$\begin{cases} y = 4 - z \\ x = 14 - 4z - 4 + z \Rightarrow x = 10 - 3z \end{cases}$$

Para que no salgan soluciones negativas, iguales a 0 o decimales, z debe ser 1, 2 ó 3:

$$\begin{cases} z = 1 \Rightarrow 7 \text{ almacenes, } 3 \text{ pisos y } 1 \text{ torre} \\ z = 2 \Rightarrow 4 \text{ almacenes, } 2 \text{ pisos y } 2 \text{ torres} \\ z = 3 \Rightarrow 1 \text{ almacén, } 1 \text{ piso y } 3 \text{ torres} \end{cases}$$

9. En un examen tipo test de 50 preguntas se dan 2 puntos por cada acierto y se quita medio punto por cada fallo. Para aprobar hay que obtener al menos 40 puntos y es obligatorio contestar todas las preguntas. Si se quiere aprobar, ¿cuántas preguntas hay que contestar correctamente y cuántas se pueden fallar?

$x \equiv$ nº correctas $\quad y \equiv$ nº incorrectas

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ 2x - 0.5y = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 50 \\ 4x - y = 80 \end{cases}$$

$$5x = 130 \Rightarrow x = 26 \quad y = 24$$

Como máximo se pueden fallar 24 y acertar. Si la persona comete más de 24 fallos, no aprueba.

10. En una ciudad los taxis cobran 1 euro por la bajada de bandera y 10 céntimos por cada 200m recorridos. En otra ciudad, la bajada de bandera es de 90 céntimos y por cada 200m que se recorran se cobran 12 céntimos. ¿Existe alguna distancia para la que coinciden los precios de las carreras para ambas ciudades?

$x \equiv$ metros recorridos

Ciudad A: $\left.\begin{array}{l} 0.10€ \text{ — } 200m \\ x \text{ — } 1m \end{array}\right\} x = 0.0005 €/m$

Ciudad B: $\left.\begin{array}{l} 0.12€ \text{ — } 200m \\ x \text{ — } 1m \end{array}\right\} x = 0.0006 €/m$

Tarifa A: Precio $= 1 + 0.0005x$

Tarifa B: Precio $= 0.90 + 0.006x$

Igualamos: $1 + 0.0005x = 0.90 + 0.006x$

$$x = 100m$$

Los precios de ambas ciudades coinciden para una distancia de 100m.

7. Dados tres puntos planos $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$ de forma que sus primeras coordenadas son dos a dos distintas, probar que existe una única parábola $y=ax^2+bx+c$ (incluyendo el caso límite de rectas, esto es, $a=0$) cuya gráfica contiene a dichos puntos. ¿Qué parábola se obtiene para los puntos $(2,0),(3,0)$ y $(-1,12)$?

Primero resuelvo la última pregunta:

$$\begin{cases} 0=4a+2b+c \\ 0=9a+3b+c \\ 12=a-b+c \end{cases} \xrightarrow[F_2-9F_3]{F_1-4F_3} \begin{cases} a-b+c=12 \\ 6b-3c=-48 \\ 12b-8c=-108 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{F_3-2F_2} \left.\begin{cases} a-b+c=12 \Rightarrow a=1 \\ 6b-3c=-48 \Rightarrow b=-5 \\ -2c=-12 \Rightarrow c=6 \end{cases}\right\} y=x^2-5x+6$$

5. Discutir y resolver, cuando sea posible, los SEL en función de los parámetros a y b:

a) $$\begin{cases} x+2y+z=1 \\ -x-y+z=-2 \\ x+az=-1 \end{cases} \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2+F_1} \begin{cases} x+2y+z=1 \\ y+2z=-1 \\ -2y+(a-1)z=-2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{F_3+2F_2} \begin{cases} x+2y+z=1 \\ y+2z=-1 \Rightarrow y-\frac{8}{3+a}=-1 \Rightarrow y=\frac{-a+5}{3+a} \\ (3+a)z=-4 \Rightarrow z=\frac{-4}{3+a} \end{cases}$$

$$x=1-2y-z \Rightarrow x=1+\frac{2a-10}{3+a}+\frac{4}{3+a} \Rightarrow x=\frac{3a-3}{3+a}$$

S. Incompatible $\Rightarrow a=-3$ S.C.D $\Rightarrow a\neq -3$

b) $$\begin{cases} x-3y+z=1 \\ x+y+2z=0 \\ 2x+y-z=1 \\ 2x-3z=a \end{cases} \xrightarrow[F_4-2F_1]{F_2-F_1,\ F_3-2F_1} \begin{cases} x-3y+z=1 \\ 4y+z=-1 \\ 7y-3z=-1 \\ 6y-5z=a-2 \end{cases} \xrightarrow[F_4-\frac{6}{4}F_2]{F_3-\frac{7}{4}F_2} \begin{cases} x-3y+z=1 \\ 4y+z=-1 \\ -19/4\,z=3/4 \\ -13/2\,z=a-1/2 \end{cases}$$

$z=-3/19$

$$z=\frac{-2a+1}{13} \Rightarrow \frac{-2a+1}{13}=-\frac{3}{19} \Rightarrow 19-38a=-39 \Rightarrow a=\frac{29}{19}$$

Si $a\neq 29/19$, es incompatible

Si $z = -\frac{3}{19} \Rightarrow 4y + z = -1 \Rightarrow y = \frac{-1-z}{4} = -\frac{4}{19}$

$x - 3y + z = 1 \Rightarrow x = 1 + 3y - z = \frac{10}{19}$

Si $a = \frac{29}{19}$, es un S.C.D con solución $x = \frac{10}{19}$, $y = -\frac{4}{19}$, $z = -\frac{3}{19}$

c) $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \xrightarrow{F_1 - aF_2} \begin{cases} x + y + z = 2 \\ (1-a)y + (1-a)z = 1 - 2a \end{cases}$

Como hay 3 incógnitas y 2 ecuaciones, daremos la solución en función de un parámetro $z = \lambda$:

$$y = \frac{1 - 2a + (a-1)\lambda}{1-a} \qquad x = \frac{2 - 2a - 1 + 2a + (1-a)\lambda - \lambda(1-a)}{1-a}$$

$x + y + z = 2 \Rightarrow x = 2 - y - z$

$$x = \frac{1}{1-a}$$

Si $a = 1$, es incompatible, pero si $a \neq 1$, es un S.C.I.

$$\text{Sol.: } \left(\frac{1}{1-a}, \frac{1-2a}{1-a} - \lambda, \lambda \right)$$

11. ¿Existe un SEL con dos ecuaciones y 3 incógnitas que sea compatible determinado? ¿Y si el SEL tiene 3 ecuaciones y 2 incógnitas?

En cuanto a la primera pregunta, la respuesta es no ya que al aplicar el método de Gauss a cualquier SEL de 3 incógnitas y 2 ecuaciones, siempre se llega a que es incompatible o compatible indeterminado.

En cuanto a la segunda pregunta, sí. Voy a poner un ejemplo:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ x + 2y = 5 \\ 3x + 5y = 13 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x = 1 \\ y = 2 \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ Esta última ecuación resulta de sumar la primera y la segunda