Geometría I: Tema 1
Matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales

Juan de Dios Pérez

1. Ecuaciones lineales y sistemas.

A lo largo de todo el tema K va a denotar un cuerpo en general, aunque a partir de ahora cuando apliquemos nuestros resultados consideremos que o bien $K = \mathbb{R}$ o bien $K = \mathbb{C}$.
Llamaremos ecuación lineal en K a cualquier expresión de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b, \tag{1.1}$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son elementos (conocidos y, por tanto, fijos) de K que llamaremos coeficientes de la ecuación lineal, b es también un elemento conocido de K, llamado el término independiente de la ecuación, mientras que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son símbolos que vamos a llamar las incógnitas de dicha ecuación lineal. Podemos escribir la ecuación anterior en forma compacta utilizando el símbolo del sumatorio, $\sum$, de la siguiente forma:

$$\sum_{i=1}^{n} a_ix_i = b.$$

Nótese que una ecuación lineal viene dada de la forma anterior, por lo que no pueden aparecer términos como x_i^n, siendo $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, ni x_ix_j, siendo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, ni ninguna aplicación de las incógnitas distinta de la identidad (como $\cos(x_i)$, $x_i^2 - x_j$, etc.). Así $3x_1 + ix_2 + \pi x_3 = 2$ es una ecuación lineal con coeficientes complejos (ó ecuación lineal en (ó sobre) $\mathbb{C}$), mientras que $3x_1 - ex_2 + \pi x_3 = 2$ es una ecuación lineal con coeficientes reales. Sin embargo $3e^{x_1} - ix_2 + \pi\cos(x_3) = 0$ no es una ecuación lineal (ni sobre $\mathbb{C}$ ni sobre $\mathbb{R}$).
Una solución de la ecuación lineal (1.1) es una elección de valores para las incógnitas (en el cuerpo que estemos considerando) que haga que en (1.1) se dé la igualdad; es decir, sería tomar n elemento en K, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tales que $a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_nc_n = b$.
Por ejemplo, si consideramos la ecuación anterior $3x_1 - ex_2 + \pi x_3 = 2$, los valores $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = -\frac{1}{\pi}$ nos dan una solución para la ecuación. Asimismo, $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = -\frac{1}{e}, x_3 = 0$, nos dan otra solución de la misma ecuación.

Si consideramos un conjunto de m ecuaciones lineales todas con las mismas incógnitas sobre K:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

lo vamos a llamar un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas sobre el cuerpo K (a partir de ahora vamos a suponer que está claro sobre qué cuerpo consideramos las ecuaciones y no lo mencionaremos más).

Una solución del sistema de ecuaciones lineales anterior consiste en encontrar n elementos concretos del cuerpo K, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tales que al sustituir sus valores por las incógnitas de las ecuaciones del sistema nos den una solución de todas y cada una de ellas.

Llamaremos solución general del sistema al conjunto formado por todas las soluciones del sistema.

Dos sistemas de ecuaciones lineales con las mismas incógnitas se llamarán equivalentes si tienen la misma solución general, es decir, cuando tienen, exactamente, las mismas soluciones.

Un sistema de ecuaciones lineales puede tener una única solución, más de una solución o ninguna solución.

Ejemplos:

1. Si consideramos el sistema con coeficientes en $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

   Tomando $x = 1$, $y = 0$, claramente obtenemos una solución. Si suponemos que c_1 y c_2 es otra solución tendríamos que $c_1 + c_2 = 1$ y $c_1 - c_2 = 1$. Si sumamos ambas expresiones tendríamos que $2c_1 = 2$ y, por tanto, $c_1 = 1$. Entonces tendríamos que $1 + c_2 = 1$ y, así, $c_2 = 0$. Es decir, este sistema admite una única solución.

2. Si ahora consideramos el sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

   podemos ver que no tiene solución. Si c_1, c_2, c_3 nos dieran una solución del sistema tendríamos que tener, a la vez, que $c_1 + c_2 + c_3 = 5$ y $c_1 + c_2 + c_3 = 3$. Restando ambas expresiones llegaríamos a que $0 = 2$, que es imposible.

3. El sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

   admite a $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$ como solución, pero también a $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, es decir, tiene más de una solución. De hecho, $\{(\lambda, \mu, 2 - \lambda - \mu) \,/\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ es la solución general de dicho sistema. (Nótese que como λ y μ pueden tomar cualquier valor real, de hecho aparecen infinitas soluciones).

Según el número de soluciones que admita un sistema de ecuaciones lineales podemos clasificar los sistemas de ecuaciones lineales en tres tipos: si el sistema no tiene ninguna solución, diremos que es incompatible. Por tanto, a un sistema que admita soluciones lo llamaremos compatible. Si, siendo compatible, el sistema solo tiene una solución, diremos que es compatible determinado, mientras que si admite más de una solución, lo llamaremos compatible indeterminado.
Así, el sistema del ejemplo 1 anterior sería compatible determinado, el del ejemplo 2 sería incompatible, y el del ejemplo 3 sería compatible indeterminado.

2. Método de Gauss-Jordan

Este método nos va a permitir resolver un sistema de ecuaciones lineales, transformándolo en otro equivalente (por tanto, con las mismas soluciones) pero más sencillo. Repitiendo el proceso, llegaremos a un sistema equivalente al primitivo y cuyas soluciones serán evidentes (si las tiene).
Para ello veremos que si dado un sistema de ecuaciones lineales, multiplicamos una de sus ecuaciones por un elemento no nulo del cuerpo, ó se intercambian dos ecuaciones entre si ó le sumamos a una de las ecuaciones otra multiplicada por un elemento del cuerpo, vamos a obtener un sistema de ecuaciones lineales equivalente al primitivo.

Claramente, si intercambiamos dos ecuaciones en un sistema vamos a obtener un sistema equivalente, pues recodemos que una solución del sistema ha de ser solución de todas y cada una de las ecuaciones que lo forman.

Que los sistemas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.1}$$

y

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad \vdots \\ ka_{i1}x_1 + ka_{i2}x_2 + \cdots + ka_{in}x_n = kb_i \\ \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.2}$$

donde $i \in \{1, \dots, m\}$ y $k \in K \setminus \{0\}$, son equivalentes es inmediato: si $c_1, \dots, c_n$ nos da una solución de (2.1) como, excepto la ecuación i-ésima, el resto de ecuaciones en (2.1) y (2.2) coinciden solo hemos de ver que $c_1, \dots, c_n$ es solución de la i-ésima ecuación de (2.2). Por ser solución de (2.1) tenemos que $a_{i1}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{in}c_n = b_i$. Pero como $k \neq 0$ este hecho es equivalente a que $ka_{i1}c_1 + ka_{i2}c_2 + \cdots + ka_{in}c_n = kb_i$ (recordad que todos los elementos que intervienen pertenecen al cuerpo K y en el cuerpo se verifican las propiedades distributivas del producto con respecto a la suma).

Finalmente consideremos los sistemas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad\vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ \quad\vdots \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n = b_j \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.3}$$

y

$$\left\{\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ & \vdots & & & \\ (a_{i1}+ka_{j1})x_1 & +(a_{i2}+ka_{j2})x_2 & \dots & +(a_{in}+ka_{jn})x_n & = b_i + kb_j \\ & \vdots & & & \\ a_{j1}x_1 & +a_{j2}x_2 & \dots & +a_{jn}x_n & = b_j \\ & \vdots & & & \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & \dots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{array}\right. \tag{2.4}$$

donde $i \neq j$, $i, j \in \{1, \dots, m\}$ y $k \in K$. Queremos ver que (2.3) y (2.4) son equivalentes. Supongamos, pues, que $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \dots, x_n = c_n$ es una solución de (2.3). Como todas las ecuaciones, excepto la i-ésima, de (2.3) y (2.4) son iguales, dicha solución es una solución para todas las ecuaciones de (2.4) excepto la i-ésima. Veamos que también lo es para esta. Sabemos que $a_{i1}c_1 + \cdots + a_{in}c_n = b_i$ y que $a_{j1}c_1 + \cdots + a_{jn}c_n = b_j$ (por ser solución de (2.3)). Entonces multiplicando esta segunda ecuación por k tendremos que $ka_{j1}c_1 + \dots ka_{jn}c_n = kb_j$ y si sumamos ambas ecuaciones y aplicamos la conmutatividad de la suma en K tendremos que $a_{i1}c_1 + ka_{j1}c_1 + \cdots + a_{in}c_n + ka_{jn}c_n = b_i + kb_j$. Pero si ahora aplicamos n veces la distributividad del producto con respecto de la suma en K tendremos que $(a_{i1} + ka_{j1})c_1 + \cdots + (a_{in} + ka_{jn})c_n = b_i + kb_j$ y así, nuestra solución de (2.3) es también una solución de (2.4).
Recíprocamente, sea $x_1 = d_1, x_2 = d_2, \dots, x_n = d_n$ una solución de (2.4). Tendremos que ver que es también una solución de (2.3). Como todas las ecuaciones de (2.4), excepto la i-ésima, son las mismas que las de (2.3) solo hemos de ver que nuestra solución es una solución para la i-ésima ecuación de (2.3).

Tenemos entonces que $d_1, d_2, \dots, d_n$ verifican

$$(a_{i1} + ka_{j1})d_1 + \cdots + (a_{in} + ka_{jn})d_n = b_i + kb_j, \tag{2.5}$$

y que

$$a_{j1}d_1 + \cdots + a_{jn}d_n = b_j.$$

Esta segunda ecuación nos da (por la distributividad del producto con respecto a la suma en K) que $ka_{j1}d_1 + \cdots + ka_{jn}d_n = kb_j$. Si a (2.5) le restamos esta ecuación (teniendo en cuenta la conmutatividad de la suma de elementos en K) obtenemos $a_{i1}d_1 + \cdots + a_{in}d_n = b_i$, por lo cual nuestra solución también lo es para la ecuación i-ésima de (2.3) y terminamos la demostración.
Veamos cómo, a partir de lo que acabamos de ver podemos transformar un sistema de ecuaciones lineales en otro que va a ser el más simple posible y que nos permitirá saber de qué tipo es el sistema de partida. Lo haremos mediante un finito de pasos:

★ Paso 1: Ponemos en primer lugar una ecuación cuyo coeficiente para la incógnita x_1 sea distinto de cero.

★ Paso 2: Si el coeficiente de la incógnita x_1 en la primera ecuación es 1 pasamos al siguiente paso. Si es $\neq 1$, dividimos la ecuación por dicho coeficiente.

★ Paso 3: Como en la primera ecuación el coeficiente de x_1 es 1, eliminamos esta incógnita del resto de ecuaciones restándole a cada una de ellas el producto de la primera ecuación por los correspondientes coeficientes a_{j1}, para $j \in \{2, \dots, m\}$. Conseguimos así que la incógnita x_1 solo aparezca en la primera ecuación, con lo que obtenemos, por lo visto anteriormente, un sistema equivalente al primitivo y de la forma:

$$\begin{cases} x_1 & +a_{12}x_2 & + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ & a_{22}x_2 & + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ & & \cdots \\ & a_{m2}x_2 & + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

(Tened en cuenta que escribimos los mismos a_{ij} y b_i que en el sistema primitivo simplemente por no complicar la notación aunque, en general, hayan cambiado).

A partir de ahora dejamos fija la primera ecuación y repetimos los pasos 1, 2 y 3 para el resto de ecuaciones y la incógnita x_2, obteniendo un sistema equivalente al anterior y de la forma

$$\begin{cases} x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ & x_2 & +a_{23}x_3 & + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ & & \cdots & \\ & & +a_{m3}x_3 & + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Repetiremos el proceso mientras sea posible y obtendremos un sistema escalonado (la primera incógnita de cada ecuación tiene coeficiente 1 y no aparece en el resto e ecuaciones). Si en el proceso nos aparece una ecuación del tipo $0 = 0$, cualquier conjunto de elementos de K la va a verificar y, por tanto, podemos eliminarla. Es decir, llegaremos a un sistema de ecuaciones de la forma:

$$\begin{cases} x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ & x_2 & +a_{23}x_3 & + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ & & \cdots & \\ & & x_r & + \cdots + a_{rn}x_n = b_r \end{cases}$$

Podemos hacer más simplificaciones. Vamos a llamar incógnitas principales a las que aparecen como primera incógnita de alguna de las ecuaciones de este último sistema e incógnitas secundarias a las restantes (si hay alguna). Ahora, aplicando de nuevo los pasos 1, 2 y 3 podemos eliminar la incógnita principal de una ecuación de las restantes y obtendremos así un sistema de ecuaciones escalonado reducido en el que cada incógnita principal no aparece en el resto de ecuaciones.

Una vez llegados a este punto podemos determinar, analizando cómo es este sistema escalonado reducido, de qué tipo es nuestro sistema original y, en el caso de que sea compatible, encontrar sus soluciones:

1. Puede ocurrir que en nuestro sistema compatible reducido nos aparezca una ecuación del tipo $0 = b$, para algún elemento del cuerpo K tal que $b \neq 0$. Como esta ecuación no admite solución, tampoco la tendrá el sistema de ecuaciones primitivo, por lo que será incompatible.

2. Si no aparece ninguna ecuación de tipo $0 = b$ con $b \in K \setminus \{0\}$, tendremos dos posibilidades:

   a) Todas las incógnitas son principales, con lo que nuestro sistema escalonado reducido será de la forma

   $$\begin{cases} x_1 & & & = b_1 \\ & x_2 & & = b_2 \\ & & \ddots & \\ & & & x_n = b_n \end{cases}$$

   y, por tanto, el sistema es compatible determinado y su única solución es, precisamente, $x_1 = b_1, x_2 = b_2, \ldots, x_n = b_n$.

   b) Si existen incógnitas secundarias el sistema tendrá la forma:

   $$\begin{cases} x_1 & & & +a_{1r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ & x_2 & & +a_{2r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ & & \ddots & \\ & & x_r & +a_{rr+1}x_{r+1} + \cdots + a_{rn}x_n = b_r \end{cases}$$

   En este caso, despejamos las incógnitas principales y obtenemos:

   $$\begin{cases} x_1 & & & = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{1n}x_n \\ & x_2 & & = b_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{2n}x_n \\ & & \ddots & \\ & & x_r & = b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \cdots - a_{rn}x_n \end{cases}$$

Fijaos en que cada vez que demos un valor arbitrario en K a las incógnitas secundarias $x_{r+1}, \ldots, x_n$, obtenemos un valor para cada una de las incógnitas principales y, por tanto, una solución del sistema. Así pues, en este caso nuestro sistema será compatible indeterminado y tendremos la solución general si le asignamos un parámetro (variará en todo K) a cada una de las incógnitas secundarias.

Nota 1. Si tenemos un sistema de ecuaciones lineales en el que todos los términos independientes son nulos, diremos que el sistema es homogéneo. Un sistema homogéneo en las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ siempre es compatible, ya que $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$ nos proporciona una solución del mismo. En cada caso lo que tendremos que determinar es si es determinado o indeterminado.

Ejemplo 1.
Vamos a aplicar el método de Gauss-Jordan al siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & +x_3 & = 7 \\ 2x_1 & -5x_2 & +2x_3 & = 6 \\ 3x_1 & +2x_2 & -x_3 & = 1 \end{cases}$$

Como en la primera ecuación el coeficiente de x_1 es 1, eliminaremos x_1 en las otras dos ecuaciones, sumándole a la 2^a el producto de -2 por la 1^a y sumándole a la 3^a el producto de -3 por la 1^a. Así, nuestro sistema será equivalente al siguiente:

$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & +x_3 & = 7 \\ & -x_2 & & = -8 \\ & 8x_2 & -4x_3 & = -20 \end{cases}$$

Como el coeficiente de x_2 en la 2^a ecuación es -1, multiplicamos esa segunda ecuación por -1 y nuestro sistema será equivalente al siguiente sistema:

$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & +x_3 & = 7 \\ & x_2 & & = 8 \\ & 8x_2 & -4x_3 & = -20 \end{cases}$$

Utilizamos ahora 2^a ecuación para eliminar x_2 de la 3^a ecuación; para ello, multiplicamos la 2^a ecuación por -8 y se la sumamos a la 3^a. Obtenemos como sistema equivalente:

$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & +x_3 & = 7 \\ & x_2 & & = 8 \\ & & -4x_3 & = -84 \end{cases}$$

Si dividimos la última ecuación entre -4, nuestro sistema es equivalente al sistema

$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & +x_3 & = 7 \\ & x_2 & & = 8 \\ & & x_3 & = 21 \end{cases}$$

Veamos ahora cómo hacer que este sistema, que ya es escalonado, sea escalonado reducido. Si a la 1ª ecuación le restamos la 3ª pasamos al sistema equivalente

$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & & = -14 \\ & x_2 & & = 8 \\ & & x_3 & = 21 \end{cases}$$

Y si ahora le sumamos a la 1ª ecuación el producto de la 2ª por 2 llegamos a

$$\begin{cases} x_1 & & & = 2 \\ & x_2 & & = 8 \\ & & x_3 & = 21 \end{cases}$$

Por lo tanto nuestro sistema es compatible determinado y su única solución es $x_1 = 2, x_2 = 8, x_3 = 21$.

Ejercicio 1.
Determinar por el método de Gauss-Jordan de qué tipo es el siguiente sistema de ecuaciones lineales y, si es posible, encontrar sus soluciones:

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_2 & +x_4 & = 2 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & = -2 \\ 3x_1 & -x_2 & +3x_3 & -x_4 & = 2 \\ 7x_1 & -5x_2 & +7x_3 & -5x_4 & = -6 \end{cases}$$

3. Matrices y transformaciones elementales.

Consideremos un cuerpo K (como dijimos anteriormente, aunque lo que vamos a desarrollar servirá para un cuerpo arbitrario, consideraremos fundamentalmente los casos $K = \mathbb{C}$ ó $K = \mathbb{R}$). Una matriz de orden $m \times n$ con coeficiente en K (ó sobre K) es un conjunto de $m \cdot n$ elemento de K dispuestos en forma de caja con m filas y n columnas de la siguiente manera:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Los elementos $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$, $\forall\, 1 \leq i \leq m$, constituyen la fila i-ésima de la matriz A y los elementos $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}$, $\forall\, 1 \leq j \leq n$, diremos que forman la columna j-ésima de dicha matriz. Por tanto, a_{ij}, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, denota el elemento que está en la fila i y la columna j de la matriz A. A veces, para simplificar la notación, escribiremos $A = (a_{ij})_{i,j}$, donde debemos entender que i varía en el conjunto de filas de A y j en el de columnas, es decir, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Si está claro, no haremos esta puntualización.

Ejemplo 2 (Ejemplos de matrices).

- La matriz
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$
es una matriz de orden 3×4 con coeficientes reales.

- La matriz
$$\begin{pmatrix} i & 2+i \\ 0 & -3i \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$
es una matriz de orden 3×2 con coeficientes complejos.

En el caso de que una matriz tenga solo una fila, la llamaremos matriz fila y será de la forma
$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$
Si una matriz tiene solo una columna, la llamaremos matriz columna y será de la forma
$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$
Dos matrices serán iguales cuando tengan el mismo orden y en cada una de sus posiciones los mismos elementos. Así,
$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$
no pueden ser iguales porque no tienen el mismo orden. Pero, aunque
$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$
tienen el mismo orden no son iguales pues en el lugar $1, 3$ de la primera aparece un 0 y en el mismo lugar de la segunda tenemos un 1.

Una matriz con el mismo número de filas que columnas, es decir, de orden $n \times n$, para algún número natural n, diremos que es una matriz cuadrada de orden n.

Vamos a denotar por $\mathcal{M}_{m\times n}(K) = \{A \,/\, A \text{ es una matriz de orden } m \times n \text{ con coeficientes en } K\}$. En el caso en que consideremos matrices cuadradas, es decir, cuando $m = n$, al conjunto de matrices cuadradas de orden m con coeficientes en K, lo vamos a notar $\mathcal{M}_m(K)$.

Si tenemos una matriz A y en ella suprimimos un cierto número de filas y/o columnas, la matriz que obtendremos la llamaremos submatriz de A. Así,
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

es una submatriz de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \\ -3 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

obtenida eliminando en A la 3ª fila y las columnas 2ª y 4ª. Asimismo,

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

es una submatriz de A.

Supongamos que tenemos una matriz cuadrada $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(K)$ (en este caso, $1 \leq i, j \leq n$). Los elementos para los que $i = j$, es decir, $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ forman la diagonal principal de A.

Diremos que una matriz cuadrada A es diagonal si todos sus elementos, excepto los de la diagonal principal, son nulos, es decir si $a_{ij} = 0$, $\forall\, 1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$.

Una matriz cuadrada A es triangular superior si todos los elementos que están debajo de los de su diagonal principal son nulos, es decir, si $a_{ij} = 0$, $\forall\, 1 \leq i, j \leq n$ con $j < i$.

Diremos que es triangular inferior si todos los elementos que están por encima de los de su diagonal principal son nulos; es decir, si $a_{ij} = 0$, $\forall\, 1 \leq i, j \leq n$, con $i < j$.

Ejemplo 3.

La matriz cuadrada de orden 3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

es diagonal. Por otro lado, la siguiente matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

es triangular superior. Por último, la siguiente matriz es triangular inferior:

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & -2 \end{pmatrix}$$

La matriz identidad de orden n, que notaremos I_n, es la matriz diagonal tal que todos los elementos de su diagonal principal son iguales a 1. Esto es:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Para $n = 1, 2, 3, 4$ la matriz identidad es, en cada caso:

$$I_1 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si utilizamos la función Delta de Kronecker, $\delta : \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\} \longrightarrow \{0, 1\}$ dada por

$$\delta(i, j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

podemos escribir la matriz identidad $I_n = (\delta_{ij})_{i,j}$ (entendiendo que $1 \leq i, j \leq n$).
Si tenemos una matriz cuadrada $A = (a_{ij})_{i,j}$, definimos su traza como la suma de los elementos de su diagonal principal. Lo notaremos $\text{tr}(A)$ y, así, $\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$.

Sea $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$. Llamaremos el pivote de una fila (ó una columna) de A al primer elemento no nulo de dicha fila (ó dicha columna), siempre que tal fila (ó columna) no esté compuesta únicamente de ceros. Se dice que la matriz A es escalonada por filas si verifica las siguientes condiciones:

1. Si A tiene filas cuyos elementos son todos nulos (filas nulas), dichas filas están todas en la parte inferior de la matriz.

2. El pivote de cada fila no nula es 1.

3. El pivote de cada fila no nula está a la derecha del pivote de la fila anterior.

4. Los elementos que aparecen en la misma columna que el pivote de una fila y debajo de él son todos nulos.

Diremos que A es escalonada reducida por filas si es escalonada por filas y, además, verifica

5. Los elementos que aparecen en la misma columna que el pivote de una fila son todos nulos.

Ejemplo 4.
La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

no es escalonada por filas, puesto que el pivote de la 1ª fila no es 1. Por otro lado,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

no es escalonada por filas, ya que el elemento por debajo del pivote de la 2ª fila no es nula;

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

es escalonada por filas, pero no es escalonada reducida por filas, porque los elementos encima de los pivotes de la 2ª y 3ª filas no son nulos. Finalmente,

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

sí es escalonada reducida por filas.

Análogamente, podemos definir los conceptos de <u>matriz escalonada por columnas</u> y de <u>matriz escalonada reducida por columnas</u>: una matriz A es escalonada por columnas si verifica:

1'. Si A tiene columnas nulas (todos sus elementos son ceros), están a la derecha de la matriz.

2'. El pivote de cada columna no nula es 1.

3'. El pivote de cada columna no nula está más abajo que el de la columna anterior.

4'. Los elementos que aparecen en la misma fila en que se encuentra el pivote de una columna y a la derecha del mismo son todos nulos.

Si, además, se verifica que

5'. Los elementos en la misma fila en que se encuentra el pivote de una columna y distintos de él son todos nulos.

Entonces diremos que A es una matriz <u>escalonada reducida por columnas</u>.
Así, la matriz

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

no es escalonada por columnas, pues el pivote de la segunda columna no está más abajo que el de la primera.

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es escalonada por columnas, pero no es escalonada reducida por columnas, pues en las filas donde aparecen los pivotes de las columnas 2ª y 3ª aparecen elementos distintos de ellos no nulos. Sin embargo,

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sí es escalonada reducida por columnas.

4. Forma normal de Hermite de una matriz

Intentaremos ahora obtener una matriz escalonada reducida a partir de una matriz arbitraria, utilizando cierto tipo de transformaciones. Para simplificar el lenguaje a cada elemento del cuerpo K que consideremos lo vamos a llamar un <u>escalar</u>.
Vamos a llamar <u>transformaciones elementales</u> por filas a cada una de los tipos siguientes:

1. Intercambiar la posición de dos filas en la matriz.
2. Multiplicar todos los elementos de una fila por un escalar no nulo.
3. Sumarle a una fila el producto de un escalar por otra fila (esto lo haremos sumando a cada elemento de la primera fila que consideremos el elemento de la segunda fila que esté en el mismo lugar multiplicado por el escalar).

Si $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ diremos que A y B son equivalentes por filas, y lo escribiremos $A \sim_f B$ si podemos obtener B a partir de A mediante una sucesión (finita) de transformaciones elementales por filas. Notemos que el proceso inverso de cada transformación elemental vuelve a ser una transformación elemental (del mismo tipo), es fácil ver que esta relación es una relación de equivalencia sobre $\mathcal{M}_{m\times n}$ puesto que:

- $A \sim_f A$,
- $A \sim_f B$ si y solo si $B \sim_f A$,
- si $A \sim_f B$ y $B \sim_f C$ entonces $A \sim_f C$.

Tomemos entonces la situación siguiente:

Proposición 1.
Si A y $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ son dos matrices escalonadas por filas, entonces si $A \sim_f B$ se tiene $A = B$.

Demostración. Para demostrar este hecho, dado que n es siempre un número natural, vamos a aplicar un proceso de inducción sobre n. (En este proceso, veremos que lo que queremos demostrar es cierto si $n = 1$, lo supondremos cierto para $n-1 \in \mathbb{N}$, siendo $n \geq 2$, y a partir de este hecho lo demostraremos para el siguiente número natural n. Si el campo de variación de n no fuera el de los números naturales (por ejemplo, si n variara en $\mathbb{Q}$ ó en $\mathbb{R}$) no podríamos aplicar este método en nuestra demostración).

Así, en el caso de que $n = 1$, si $A = 0$, como A y B son equivalentes por filas, necesariamente $B = 0$. Si $A, B \neq 0$, como ambas son escalonadas reducidas por filas, tenemos una única posibilidad:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = B.$$

Así, vemos que si $n = 1$, nuestro resultado es cierto.
Supongamos, pues, que dicho resultado es cierto si consideramos $n-1$, siendo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ y veamos que sigue siendo cierto para n. Sean A_1 y B_1 las submatrices de A y B que se obtienen quitándoles la última columna a A y B. Como $A \sim_f B$, es inmediato que $A_1 \sim_f B_1$. Además, como A_1 y B_1 siguen siendo escalonadas reducidas por filas y ahora el número de columnas tanto de A_1 como de B_1 es $n-1$, por lo que hemos supuesto, tendríamos que $A_1 = B_1$. Por tanto, para ver que $A = B$ bastará con comprobar que sus últimas columnas son iguales.
Tenemos, entonces, dos posibilidades: la primera es que la última columna de A contenga un pivote y, como A es escalonada reducida por filas, necesariamente esa columna será

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pero como B es también escalonada reducida por filas, necesariamente su última columna tendrá también un pivote y, al ser $A \sim_f B$, esa última columna también ha de ser

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

y así, $A = B$.
La otra posibilidad es que las últimas columnas de A y B no contengan ningún pivote. Como $A \sim_f B$, A y B tendrán el mismo número de pivotes $r \leq n-1$ y, por tanto, como $A_1 = B_1$, tendrán que estar en las mismas posiciones de las r primeras filas. Como, además, en la última columna de cada matriz solo pueden aparecer elementos distintos de 0 en las filas que contengan pivotes y estos están en las r primeras,

tendremos que las últimas columnas de A y B serán, respectivamente,

$$\begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{rn} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} b_{1n} \\ \vdots \\ b_{rn} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como obtenemos B a partir de A por transformaciones elementales de filas, cada fila no nula de B será igual a una suma de las filas no nulas de A multiplicada cada una por un escalar (alguno de estos se puede anular); por tanto $\forall\, i \,/\, 1 \leq i \leq r$, tendremos

$$b_{ij} = k_1 a_{1j} + \cdots + k_r a_{rj}, \quad j \in \{1, \ldots, n\} \tag{4.1}$$

Si j_i es la columna que contiene al pivote de la fila i, entonces todos los elementos en esa columna, excepto el pivote $a_{ij_i} = b_{ij_i} = 1$, serán nulos y así, de la igualdad anterior, deducimos que

$$1 = b_{ij_i} = k_1 \cdot 0 + \cdots + k_i \cdot a_{ij_i} + \cdots + k_r \cdot 0 = k_i \cdot 1 = k_i$$

Además, para cada columna $j \neq j_i$ en la que se encuentre el pivote de alguna fila l $(1 \leq l \leq r)$ tendremos que a_{lj} y b_{lj} serán 1 (los pivotes) y el resto de elementos se anularán. Luego $\forall\, l \neq i$ tendremos que

$$0 = b_{ij} = k_1 \cdot 0 + \cdots + k_l \cdot a_{lj} + \cdots + k_r \cdot 0 = k_l \cdot 1 = k_l.$$

Así, hemos obtenido que $k_i = 1$ y que $k_l = 0$, $\forall\, l \neq i$, $1 \leq l \leq r$.
Si sustituimos esto es (4.1) obtenemos que $b_{in} = 0 \cdot a_{1n} + \cdots + 1 \cdot a_{in} + \cdots + 0 \cdot a_{rn} = a_{in}$, $\forall\, i \;/ 1 \leq i \leq r$ y por tanto $A = B$. $\square$

A partir de este resultado podemos demostrar que cada matriz va a ser equivalente por filas a una <u>única</u> matriz escalonada reducida por filas.

Demostración. Para ello, ponemos como primera fila una fila cuyo primer elemento no sea nulo (si los primeros elementos de todas las filas son nulos, consideramos los segundos elementos y así sucesivamente). Si la nueva fila tiene como pivote el escalar a (que no será 0), la multiplicamos por a^{-1} y así conseguimos que el pivote sea ahora 1.
Entonces hacemos que los correspondientes elementos del resto de filas sean 0, sumándole a cada una de dichas filas el producto del opuesto de su primer elemento por la primera fila.
En el siguiente paso nos olvidamos de la primera fila y aplicamos lo anterior al resto de las filas de A tantas veces como sea necesario para obtener una matriz escalonada por filas. Finalmente, como el pivote de cada fila no nula es ahora 1, lo utilizamos para hacer 0 cada elemento de su columna que esté por encima de él y conseguir una matriz escalonada reducida por filas.
Como queremos que esta matriz sea única, si suponemos que A es equivalente por filas a dos matrices escalonadas reducidas por filas, digamos $A \sim_f H_1$ y $A \sim_f H_2$, como $\sim_f$ es una relación de equivalencia,

tendremos que $H_1 \sim_f A$ (hemos aplicado la propiedad simétrica) y $A \sim_f H_2$. Por tanto, la propiedad transitiva nos da $H_1 \sim_f H_2$ y, como ambas son escalonadas reducidas por filas, según lo visto anteriormente, $H_1 = H_2$, como queríamos demostrar. $\square$

Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$, llamaremos forma normal de Hermite por filas de A a la única matriz escalonada reducida por filas que obtenemos a partir de A mediante transformaciones elementales por filas. (Pensad que podemos definir de manera análoga la forma normal de Hermite por columas de A, que existe y también es única).

Definición 1 (Rango de una matriz)**.**
Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$, vamos a llamar rango de A y lo vamos a notar $rg(A)$ al número de filas no nulas de la forma normal de Hermite por filas de A. Entonces tendremos que $rg(A) \leq \text{mín}\{m, n\}$, ya que por su propia definición $rg(A) \leq m$. Además, si $rg(A) = r$, A tiene r pivotes cada uno de los cuales ha de estar en una columna distinta de A y así, $rg(A) \leq n$.

Veamos, mediante un ejemplo, cómo calcular la forma normal de Hermite por filas de una matriz y su rango.
Sea
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
Lo primero que hacemos es colocar como primera fila la tercera de A, pues su pivote es 1. Es decir
$$A \sim_f \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$
y ahora con ese 1 hacemos nulos los primeros elementos de las filas 2ª y 3ª, sumándoles a cada una el producto de la primera fila y -2. Luego
$$A \sim_f \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$
Ahora mantendremos fija la 1ª fila y multiplicamos la 2ª por -1 para conseguir que su pivote sea 1. Por tanto,
$$A \sim_f \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$
A partir de esta matriz, haremos 0 el segundo elemento de la 3ª fila, sumándole el producto de la 2ª fila y 3, es decir, tendremos
$$A \sim_f \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Hacemos que el pivote de la 3ª fila sea 1, dividiéndola por 12 de modo que:

$$A \sim_f \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (*)$$

y obtenemos una matriz escalonada por filas. Para obtener la forma normal de Hermite por filas utilizamos cada pivote para hacer nulos los elementos de su correspondiente columna y

$$A \sim_f \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_f \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta última matriz es la forma normal de Hermite por filas de A y, como el número de filas con pivote es 3, concluimos que $\mathrm{rg}(A) = 3$. Como el rango de una matriz es el número de filas no nulas de su forma normal de Hermite, no habría sido necesario llegar a esta última matriz, sino a una escalonada por filas equivalente por filas a la matriz original, es decir, la matriz $(*)$ (o la anterior) ya nos diría que el rango es 3.

5. Matrices y sistemas de ecuaciones.

Si tenemos un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas sobre el cuerpo K

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

llamaremos matriz de coeficientes de dicho sistema a la matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

llamaremos matriz de términos independientes $B \in \mathcal{M}_{m\times 1}(K)$ a la matriz columna

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

y llamaremos la matriz ampliada del sistema a la matriz $(A|B) \in \mathcal{M}_{m\times(n+1)}(K)$ dada por

$$(A|B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, el sistema

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 5 \\ 3x_1 - 8x_2 - 3x_3 + 8x_4 = 18 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 19 \end{cases}$$

tiene a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 4 \\ 3 & -8 & -3 & 8 \\ 2 & -3 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

como matriz de coeficientes, a

$$B = \begin{pmatrix} 5 \\ 18 \\ 19 \end{pmatrix}$$

como matriz de términos independientes, y a

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 4 & 5 \\ 3 & -8 & -3 & 8 & 18 \\ 2 & -3 & 5 & -4 & 19 \end{pmatrix}$$

como matriz ampliada.

Tenemos entonces que si consideramos un sistema de ecuaciones lineales cuya matriz ampliada es $(A|B)$, si H es la forma normal de Hermite por filas de esta matriz $(A|B)$, entonces el sistema de ecuaciones lineales cuya matriz ampliada es H es un sistema escalonado reducido equivalente al de partida. Para ver esto, como H se obtiene de $(A|B)$ mediante transformaciones elementales por filas, tendremos que ver que las transformaciones elementales por filas no afectan a la solución general del sistema, pero si aplicamos una transformación elemental de tipo 1 lo que hacemos es intercambiar dos ecuaciones (o varias), si aplicamos una transformación elemental del tipo 2, multiplicamos una ecuación por un escalar no nulo, y si lo que aplicamos es una transformación elemental de tipo 3, le estamos sumando a una ecuación el producto de un escalar por otra ecuación. Como en cada caso obtenemos un sistema de ecuaciones lineales equivalente al primitivo, el resultado es cierto.

Por ejemplo, para nuestro sistema anterior, cuya matriz ampliada es

$$A|B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 4 & 5 \\ 3 & -8 & -3 & 8 & 18 \\ 2 & -3 & 5 & -4 & 19 \end{pmatrix}$$

Su forma normal de Hermite por filas (calculadla siguiendo los pasos del ejemplo anterior) es:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -8 & 14 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

esto nos da que el sistema que consideramos es equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x_1 & & +7x_3 & -8x_4 & = 14 \\ & x_2 & +3x_3 & -4x_4 & = 3 \end{cases}$$

Por tanto, es un sistema compatible indeterminado y su solución general será $x_1 = -7x_3 + 8x_4 + 14$, $x_2 = -3x_3 + 4x_4 + 3$ (así, cada vez que x_3 y x_4 tomen valores reales arbitrarios, tendremos una solución particular del sistema; por ejemplo, si $x_3 = x_4 = 0$, tendríamos que $x_1 = 14$, $x_2 = 3$; si $x_3 = 1$, $x_4 = 0$ entonces $x_1 = 7$ y $x_2 = 0$ serían otra solución).

Teorema 1 (Rouché-Frobenius)**.**
Dado un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas sobre el cuerpo K, con matriz de coeficientes A y matriz ampliada $(A|B)$, tenemos:

1. *El sistema es compatible si y solo si $rg(A) = rg(A|B)$.*

2. *El sistema es compatible determinado si y solo si $rg(A) = rg(A|B) = n$.*

Demostración. Supongamos que H es la forma normal de Hermite por filas de $(A|B)$. Entonces la forma normal de Hermite por filas de A es la submatriz de H, H', que obtenemos eliminando la última columna de H. Sabemos que el sistema es compatible si y solo si en su forma escalonada reducida no aparece una ecuación como $0 = b$, con $b \in K \setminus \{0\}$, es decir, si H y H' tienen el mismo número de filas no nulas, lo que es equivalente a que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|B)$, lo que demuestra 1.
Si suponemos que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|B) = r$ (ya partimos de que el sistema es compatible), tendremos r incógnitas principales y sabemos que será compatible determinado cuando no haya incógnitas secundarias, esto es, si y solo si $r = n$, lo que demuestra 2. $\square$

6. Operaciones con matrices.

6.1. Suma de matrices.

Supongamos que $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$, $A = (a_{ij})_{i,j}$, $B = (b_{ij})_{i,j}$. Definimos su suma como la matriz $A + B \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ dada por

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{i,j} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Es decir, el elemento de $A+B$ que está en el lugar ij lo obtenemos sumando los elementos de A y de B que están en dicho lugar (tened en cuenta que si las matrices tienen órdenes distintos no las podremos sumar). Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hemos de señalar, de nuevo, que tenemos un abuso de notación: la suma de matrices es una operación distinta de la suma de los escalares que aparecen en cada matriz, aunque para simplificar la notación, ambas las vamos a escribir con el mismo signo $+$. Precisamente, a partir de las propiedades que tiene la suma en K, obtendremos las siguientes propiedades para la suma de matrices:

1. Asociativa: $\forall\, A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$, $(A+B)+C = A+(B+C)$. Si notamos $A = (a_{ij})_{i,j}$, $B = (b_{ij})_{i,j}$, $C = (c_{ij})_{i,j}$ (recordad que $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$), tendremos que $(A+B)+C = (a_{ij}+b_{ij})_{i,j}+(c_{ij})_{i,j} = ((a_{ij}+b_{ij})+c_{ij})_{i,j} \overset{(*)}{=} (a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij}))_{i,j} = (a_{ij})_{i,j}+(b_{ij}+c_{ij})_{i,j} = A+(B+C)$, donde en $*$ aplicamos la asociatividad de la suma en K.

2. Conmutativa: $\forall\, A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$, $A+B = B+A$. Con la notación anterior, $A+B = (a_{ij}+b_{ij})_{i,j} \overset{(**)}{=} (b_{ij}+a_{ij})_{i,j} = B+A$; ahora $**$ es simplemente aplicar la propiedad conmutativa de la suma de K.

3. Existencia de elemento neutro: llamemos $0 \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ tal que todos sus elementos son el $0 \in K$. Entonces $\forall\, A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$, $A+0 = 0+A = A$. (Volvemos a abusar de la notación; la matriz 0 y el cero de K son elementos no comparables, aunque los notemos de la misma manera). Es claro que $A+0 = (a_{ij}+0)_{i,j} = (a_{ij})_{i,j} = A$. Como sabemos que la suma de matrices es conmutativa, no tenemos que demostrar que $0+A = A$.

4. Existencia de elementos simétricos: sea $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$. Llamemos $-A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ a la matriz dada por $-A = (-a_{ij})_{i,j}$; es decir, cada elemento de $-A$ es el opuesto en K del correspondiente elemento de A. Entonces $A+(-A) = (-A)+A = 0$. Como sabemos que la suma de matrices es conmutativa, nos bastará con ver una de las igualdades. Así, $A+(-A) = (a_{ij})_{i,j}+(-a_{ij})_{i,j} = (a_{ij}+(-a_{ij}))_{i,j} = (0)_{i,j} = 0$.

Hemos demostrado, pues, que $(\mathcal{M}_{m\times n}(K), +)$ es un grupo abeliano.

6.2. Producto de un escalar por una matriz.

Definición 2 (Producto de un escalar por una matriz)**.**
Sea $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ y sea $\alpha \in K$ un escalar. Definimos el producto de α y A y lo notaremos $\alpha A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ como la matriz dada por

$$\alpha A = (\alpha a_{ij})_{i,j} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Es decir, en cada lugar ij el elemento de αA que ocupa dicho lugar es el producto por α del elemento que ocupa el lugar ij en A. Como estamos suponiendo que K es un cuerpo conmutativo ($\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$), tendremos que $\alpha a_{ij} = a_{ij}\alpha$ y, por tanto, $\alpha A = A\alpha$.

Ejemplo 5 (Producto de un escalar por un matriz)**.**

$$3\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 15 \\ 0 & 3 & 9 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

De nuevo, teniendo en cuenta las propiedades del producto en K, este producto de escalares por matrices cumple las siguientes propiedades

1. Distributiva respecto de la suma de escalares: es decir, $\forall\, \alpha, \beta \in K$ y $\forall\, A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$, tendremos que $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$, dado que $(\alpha+\beta)A = (\alpha+\beta)(a_{ij})_{i,j} = ((\alpha+\beta)a_{ij})_{i,j} \overset{(*)}{=} (\alpha a_{ij} + \beta a_{ij})_{i,j} = (\alpha a_{ij})_{i,j} + (\beta a_{ij})_{i,j} = \alpha A + \beta A$, donde en $*$ hemos aplicado una de las propiedades distributivas del producto respecto de la suma en K.

2. Distributiva respecto de la suma de matrices: $\forall\, \alpha \in K$, $\forall\, A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$, $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$: notemos $A = (a_{ij})_{i,j}$ y $B = (b_{ij})_{i,j}$. Entonces $\alpha(A+B) = \alpha(a_{ij}+b_{ij})_{i,j} = (\alpha(a_{ij}+b_{ij}))_{i,j} \overset{(**)}{=} (\alpha a_{ij} + \alpha b_{ij})_{i,j} = (\alpha a_{ij})_{i,j} + (\alpha b_{ij})_{i,j} = \alpha A + \alpha B$, donde en $**$ hemos aplicado la otra propiedad distributiva del producto respecto de la suma en K.

3. Pseudoasociativa: $\forall\, \alpha, \beta \in K$, $\forall\, A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$, $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$, ya que $(\alpha\beta)A = ((\alpha\beta)a_{ij})_{i,j} \overset{(*)}{=} (\alpha(\beta a_{ij}))_{i,j} = \alpha(\beta a_{ij})_{i,j} = \alpha(\beta A)$, donde en $*$ aplicamos la asociatividad del producto en K.

4. Ley de identidad: $\forall\, A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$, $1 \cdot A = 1 \cdot (a_{ij})_{i,j} = (1 \cdot a_{ij})_{i,j} = (a_{ij})_{i,j} = A$.

6.3. Producto de matrices.

Vamos a introducir un producto de matrices que no siempre podremos realizar. Dadas dos matrices $A \in \mathcal{M} \times \backslash(K)$, $B \in \mathcal{M}_{p\times q}(K)$, únicamente podremos definir AB si el número de columnas de A, n, coincide con el número de filas de B, p.
Sean, pues, $A = (a_{ik})_{i,k} \in \mathcal{M}_{m\times p}(K)$ y $B = (b_{kj})_{k,j} \in \mathcal{M}_{p\times n}(K)$. Definimos el producto de A y B, $AB = C = (c_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ tal que

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}.$$

Observad que si A es de orden $m \times p$ y B es de orden $p \times n$, entonces AB es de orden $m \times n$. También que, aunque podamos definir AB, si m y n no coinciden, no podremos definir BA lo que implica que, en general, el producto de matrices no será conmutativo. Si $m = p = n$, es decir, si partimos de dos matrices cuadradas del mismo orden, $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$, sí podremos considerar AB y BA, que volverán a ser matrices cuadradas de orden, pero incluso así, no podremos afirmar que, en general, $AB = BA$.

Ejemplo 6 (Producto de matrices)**.**
Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

entonces

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

donde el elemento 11 del producto, rodeado por un círculo lo hemos obtenido considerando los elementos de la fila 1 de A y de la columna 1 de B (aquí es donde necesitamos que $n = p$ en nuestra definición) multiplicándolos uno a uno y sumando los resultados: $1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 1$.
El 5 redondeado de la matriz producto, que está en el lugar 23, lo obtendríamos considerando la 2ª fila de A y la 3ª columna de B y repitiendo lo anterior: $1 \cdot 0 + 1 \cdot 5 + 0 \cdot 8 = 5$.
Si ahora hacemos BA obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

y comprobamos fácilmente que $AB \neq BA$.

Basándonos ahora en las propiedades del producto en K, tenemos las siguientes propiedades del producto de matrices:

1. Si $A \in \mathcal{M}_{m\times p}(K)$, $B \in \mathcal{M}_{p\times q}(K)$, $C \in \mathcal{M}_{q\times n}(K)$, entonces $A(BC) = (AB)C$.
   Para verlo, supongamos que $A = (a_{ik})_{i,k}$, $B = (b_{kl})_{k,l}$, $C = (c_{lj})_{l,j}$ con $1 \leq i \leq m$, $1 \leq k \leq p$, $1 \leq l \leq q$, $1 \leq j \leq n$.
   Entonces

$$A(BC) = (a_{ik})_{i,k} \left(\sum_l b_{kl} c_{lj} \right)_{k,j} = \left(\sum_k a_{ik} \left(\sum_l b_{kl} c_{lj} \right) \right)_{i,j} = \left(\sum_{k,l} a_{ik} b_{kl} c_{lj} \right)_{i,j} =$$

$$= \left(\sum_l \left(\sum_k a_{ik} b_{kl} \right) c_{lj} \right)_{i,j} = \left(\sum_k a_{ik} b_{kl} \right)_{i,l} (c_{lj})_{l,j} = (AB)C,$$

   (donde hemos aplicado la conmutatividad de la suma en K y la distributividad del producto con respecto de la suma).

2. Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$, $I_m A = A$, $AI_n = I_n$. Recordad que $I_m = (\delta_{ki})_{k,i}$, donde $\delta_{lm} = 0$ si $l \neq m$ y $\delta_{ll} = 1$ (la Delta de Kronecker que ya definimos) tendremos que el elemento en el lugar kj de $I_m A$

es

$$\sum_i \delta_{ki} a_{ij} = \delta_{k1} a_{ij} + \cdots + \delta_{kk} a_{kj} + \ldots \delta_{km} a_{mj} = a_{kj},$$

pues, excepto $\delta_{kk} = 1$, los demás δ_{ab} se anulan. Luego $I_m A = A$. La otra igualdad se demuestra de forma análoga.

3. Si $A \in \mathcal{M}_{m\times p}(K)$, $B, C \in \mathcal{M}_{p\times n}(K)$, tenemos que $A(B+C) = AB + AC$.
   Supongamos, pues, que $A = (a_{ik})_{i,k}$, $B = (b_{kj})_{k,j}$, $C = (c_{kj})_{k,j}$. Entonces

$$A(B+C) = (a_{ik})_{i,k}(b_{kj} + c_{kj})_{k,j} = \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj})\right)_{i,j} \overset{(*)}{=} \left(\sum_{k=1}^{p} (a_{ik}b_{kj} + a_{ik}c_{kj})\right)_{i,j} \overset{(**)}{=}$$

$$\overset{(**)}{=} \left(\left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}\right) + \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}c_{kj}\right)\right)_{i,j} = \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}\right)_{i,j} + \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}c_{kj}\right)_{i,j} = AB + AC,$$

   donde en $*$ aplicamos la distributividad del producto con respecto de la suma en K y en $**$ la conmutatividad de la suma en K.

4. Si $A, B \in \mathcal{M}_{m\times p}(K)$, $C \in \mathcal{M}_{p\times n}(K)$, entonces $(A+B)C = AC + BC$. La demostración de esta propiedad se deja como **ejercicio** pues es completamente similar a la anterior.

5. $\forall\, A \in \mathcal{M}_{m\times p}(K)$, $\forall\, B \in \mathcal{M}_{p\times n}(K)$ y $\forall\, \alpha \in K$, se tiene que $\alpha(AB) = (\alpha A)B$. (Por lo que dijimos al introducir el producto de escalares por matrices también $\alpha(AB) = A(\alpha B)$, dado que suponemos que K es un cuerpo conmutativo).
   Si suponemos $A = (a_{ik})_{i,k}$, $B = (b_{kj})_{k,j}$, tendremos que

$$(\alpha A)B = (\alpha a_{ik})_{i,k}(b_{kj})_{k,j} = \left(\sum_{k=1}^{p} (\alpha a_{ik}) b_{kj}\right)_{i,j} = \left(\sum_{k=1}^{p} \alpha(a_{ik}b_{kj})\right)_{i,j} = \left(\alpha \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}\right)_{i,j} = \alpha(AB).$$

6.4. Matriz traspuesta.

Sea $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$. Se llama matriz traspuesta de A, que denotamos A^t, a la matriz $A^t = (a_{ij})_{j,i}$, es decir, a la matriz que obtenemos a partir de A cuyas filas son las columnas de A y cuyas columnas son las filas de A. Así, si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}(K),$$

entonces

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times m}(K).$$

Ejemplo 7 (Matriz traspuesta)**.**
Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

entonces

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & -3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Propiedades:

1. $(A + B)^t = A^t + B^t$, $\forall\, A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$.

   Demostración. Si suponemos que $A = (a_{ij})_{i,j}$, $B = (b_{ij})_{i,j}$ con $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ entonces:

   $$(A + B)^t = [(a_{ij} + b_{ij})_{i,j}]^t = (a_{ij} + b_{ij})_{j,i} = (a_{ij})_{j,i} + (b_{ij})_{j,i} = A^t + B^t.$$

   □

2. $(AB)^t = B^t A^t$, $\forall\, A \in \mathcal{M}_{m\times p}(K)$, $\forall\, B \in \mathcal{M}_{p\times n}(K)$.

   Demostración.

   $$B^t A^t = (b_{kj})_{j,k}(a_{ik})_{k,i} = \left(\sum_{k=1}^{n} b_{kj}a_{ik}\right)_{j,i} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)_{j,i} = \left(\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)_{i,j}\right)^t = (AB)^t.$$

   □

3. $(\alpha A)^t = \alpha A^t$, $\forall\, \alpha \in K$, $\forall\, A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$.

Demostración.

$$(\alpha A)^t = ((\alpha a_{ij})_{i,j})^t = (\alpha a_{ij})_{j,i} = \alpha(a_{ij})_{j,i} = \alpha A^t.$$

□

Definición 3 (Matriz simétrica)**.**
Sea $A \in \mathcal{M}_n(K)$, diremos que es simétrica si $A^t = A$, luego $\forall\, i, j \in \{1, \ldots, n\}$ se verifica $a_{ij} = a_{ji}$.

Por ejemplo, la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es simétrica mientras que la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ no lo es.

Diremos que A es antisimétrica si $A^t = -A$, es decir, si $\forall\, i, j \in \{1, \ldots, n\}$ se verifica $a_{ji} = -a_{ij}$. Nótese que, en particular, si $i = j$ tendremos que $a_{ii} = -a_{ii}$. Por tanto $a_{ii} = 0$, $\forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$. Esto nos da una condición <u>necesaria</u> para que la matriz A sea antisimétrica, aunque no suficiente: la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

no es antisimétrica, aunque la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

tampoco lo es. La matriz

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

sí es antisimétrica.

Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$. Entonces $\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$, ya que si $a_{11}, \ldots, a_{nn}, b_{11}, \ldots, b_{nn}$ son, respectivamente, los elementos de las diagonales principales de A y B, los elementos de la diagonal principal de $A+B$ son $a_{11}+b_{11}, a_{22}+b_{22}, \ldots, a_{nn}+b_{nn}$. Luego $\mathrm{tr}(A+B) = a_{11}+b_{11}+a_{22}+b_{22}+\cdots+a_{nn}+b_{nn} \overset{(*)}{=} (a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})+(b_{11}+b_{22}+\cdots+b_{nn}) = \mathrm{tr}(A)+\mathrm{tr}(B)$, donde en $*$ hemos aplicado la conmutatividad y asociatividad de la suma en K.

Si, además, $k \in K$, $\mathrm{tr}(kA) = k\mathrm{tr}(A)$, ya que los elementos de la diagonal principal de kA son $ka_{11}, ka_{22}, \ldots$, ka_{nn}. Así, $\mathrm{tr}(kA) = ka_{11}+ka_{22}+\cdots+ka_{nn} \overset{(**)}{=} k(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}) = k\mathrm{tr}(A)$, donde en $**$ aplicamos la distributividad del producto respecto de la suma en K.

Además, si $A = (a_{ij})_{i,j}$ y $B = (b_{ij})_{i,j}$ son matrices cuadradas de orden n sobre K $(i, j \in \{1, \ldots, n\})$, se verifica que $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Demostración. Para esta demostración, llamemos $C = BA$. Los elementos de la diagonal principal de C son:

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1},$$
$$\vdots$$
$$c_{nn} = a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{2n} + \cdots + a_{nn}b_{nn}.$$

Por tanto,

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ji} \overset{(*)}{=} \sum_{j,i=1}^{n} b_{ji}a_{ij} = \operatorname{tr}(BA).$$

Fijaos que en $*$ necesitamos la hipótesis de que el cuerpo sea conmutativo. $\square$

7. Matrices regulares.

Vamos a ver cómo aplicar las transformaciones elementales a una matriz se puede considerar como el resultado de multiplicar dicha matriz por ciertas matrices. Llamaremos matrices elementales de orden n a las matrices que obtenemos al aplicarle una <u>única</u> transformación elemental por filas a la matriz identidad de orden n, I_n. Como hay tres tipos de transformaciones elementales por filas, tendremos tres tipos de matrices elementales:

- <u>Matrices elementales de tipo I:</u> llamaremos E_{ij} a la matriz que obtenemos de I_n intercambiando las filas i-ésima y j-ésima, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$. Así,

$$E_{ij} = \begin{array}{r} \\ \\ \text{fila } i \\ \\ \text{fila } j \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \ldots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \ldots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

- <u>Matrices elementales de tipo II:</u> llamamos $E_i(k)$ a la matriz que se obtiene de la matriz I_n al multiplicar por $k \in K \setminus \{0\}$ la fila i-ésima. Luego:

$$E_i(k) = \begin{array}{r} \\ \\ \text{fila } i \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & k & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

- <u>Matrices elementales de tipo III:</u> notaremos $E_{ij}(k)$ a la matriz que se obtiene de I_n al sumarle a la fila i-ésima el producto por k de la fila j-ésima, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$. Por tanto,

$$E_{ij}(k) = \begin{array}{r} \\ \\ \text{fila } i \\ \\ \text{fila } j \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \ldots & k & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Nótese que estas matrices también se pueden obtener de I_n aplicándole transformaciones elementales por columnas. De hecho, si en I_n se intercambian las columnas i-ésima y j-ésima se obtiene E_{ij}, si se multiplica por $k \in K \setminus \{0\}$ la columna i-ésima se obtiene $E_i(k)$ y si se le suma a la columna j-ésima el producto por k de la columna i-ésima se obtiene $E_{ij}(k)$.
Así, en $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ tenemos:

$$E_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2(5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_{13}(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es inmediato ver que si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$, E es una matriz elemental de orden m y F es una matriz elemental de orden n, entonces:

1. EA es la matriz que se obtiene de A aplicándole a sus filas la misma transformación elemental que nos permite obtener E a partir de I_m.
2. AF es la matriz que se obtiene de A al aplicarle a sus columnas la misma transformación elemental que nos da F a partir de I_n.

Por tanto si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ y H es la forma normal de Hermite por filas de A, mientras que C es la forma normal de Hermite por columnas de A, tendremos:

1. $H = E_k E_{k-1} \ldots E_1 A$ para ciertas matrices elementales de orden m, $E_1, E_2, \ldots, E_k$.
2. $C = AF_1F_2 \ldots F_s$, para ciertas matrices elementales de orden n, $F_1, F_2, \ldots, F_s$.

8. Matriz inversa.

Sean dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$. Diremos que B es una <u>matriz inversa</u> de A si $AB = BA = I_n$. Si nos fijamos en la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ no tiene una matriz inversa, porque sea cual sea la matriz

$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(K)$, el producto

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y el 0 que aparece redondeado nos da que esta matriz nunca es la matriz identidad.

Así, no toda matriz cuadrada admite una matriz inversa. Diremos que la matriz $A \in \mathcal{M}_n(K)$ es invertible si existe una matriz inversa de A. Veamos que si A es invertible solo podemos encontrar una única matriz inversa para A, pues si suponemos que B y C son matrices inversas de A, se verificaría que $AB = BA = I_n$ y que $AC = CA = I_n$. Entonces $B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C$.

Luego si $A \in \mathcal{M}_n(K)$ es una matriz invertible, tiene una única matriz inversa que notaremos A^{-1} (nótese que A^{-1} también será invertible con $(A^{-1})^{-1} = A$).

Por ejemplo, la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ es invertible y su inversa es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ pues

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$. Se va a verificar que:

1. Si A y B son invertibles, AB es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

2. Si $A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{M}_n(K)$ son invertibles, $A_1 \ldots A_m$ es invertible y $(A_1 \ldots A_m)^{-1} = A_m^{-1} \ldots A_1^{-1}$.

3. Si A es invertible, entonces A^t es invertible y $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Demostración.

1. $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = (AI)A^{-1} = AA^{-1} = I_n$ y $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}(I_nB) = B^{-1}B = I_n$.

2. Para demostrar esta propiedad utilizaremos una inducción sobre el índice m. El caso $m = 2$ lo hemos visto en el punto 1. Supongamos que el resultado es cierto para $m - 1 \in \mathbb{N}$ con $m \geq 4$, es decir que $A_1 \ldots A_{m-1}$ es invertible y $(A_1 \ldots A_{m-1})^{-1} = A_{m-1}^{-1} \ldots A_1^{-1}$. Sean entonces $A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{M}_n(K)$ invertibles. Como, por hipótesis de inducción, $A_1 \ldots A_{m-1}$ es invertible y A_m también lo es entonces $(A_1 \ldots A_{m-1})A_m = A_1 \ldots A_{m-1}A_m$ es invertible. Además, por el punto 1, $(A_1 \ldots A_{m-1}A_m)^{-1} = ((A_1 \ldots A_{m-1})A_m)^{-1} = A_m^{-1}(A_1 \ldots A_{m-1})^{-1} \stackrel{(*)}{=} A_m^{-1}A_{m-1}^{-1} \ldots A_1^{-1}$, donde en $*$ hemos aplicado la hipótesis de inducción.

3. Para demostrar esta propiedad, si suponemos que A es invertible y tomamos $A^t(A^{-1})^t = (A^{-1}A)^t = I_n^t = I_n$ y $(A^{-1})^tA^t = (AA^{-1})^t = I_n^t = I_n$, lo que nos permite afirmar que A^t es invertible y tiene como inversa a $(A^{-1})^t$.

$\square$

Es inmediato ver que cada matriz elemental es invertible y que su inversa es otra matriz elemental, pues $E_{ij}E_{ij} = I_n$, y así $E_{ij}^{-1} = E_{ij}$, $E_i(k)E_i\left(\frac{1}{k}\right) = E_i\left(\frac{1}{k}\right)E_i(k) = I_n$, luego $\forall\, k \in K \setminus \{0\}$ se tiene $(E_i(k))^{-1} = E_i(k^{-1})$ y también se tiene que $(E_{ij}(k))^{-1} = E_{ij}(-k)$, $\forall\, k \in K$.
A partir de estos hechos tenemos el siguiente resultado:

Teorema 2.
Sea $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Entonces los siguientes hechos son equivalentes entre sí:

a) *A es invertible.*

b) *A es regular a la derecha (si $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ tal que $BA = 0$, entonces $B = 0$).*

b') *A es regular a la izquierda (si $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(K)$ tal que $AB = 0$, entonces $B = 0$).*

c) *$rg(A) = n$.*

d) *La forma normal de Hermite por filas de A es I_n.*

d') *La forma normal de Hermite por columnas de A es I_n.*

e) *A es un producto de matrices elementales.*

Demostración. Para ver que todas estas condiciones son equivalentes veremos que $a) \Longrightarrow b) \Longrightarrow c) \Longrightarrow d) \Longrightarrow e) \Longrightarrow a)$ con lo que si se da alguna de ellas se da cualquiera de ellas.
Como el hecho de que A es invertible es equivalente a que lo sea A^t, a partir de lo que veremos en las implicaciones anteriores se obtiene que $a) \Longrightarrow b') \Longrightarrow d') \Longrightarrow e)$.
Empezamos, por tanto:

- $a) \Longrightarrow b)$: si A es invertible y $BA = 0$, multiplicamos esa igualdad por A^{-1} por la derecha y tendremos que $0A^{-1} = 0 = (BA)A^{-1} = B(AA^{-1}) = BI_n = B$.

- $b) \Longrightarrow c)$: lo haremos demostrando el contrarrecíproco (es decir, supondremos que $\mathrm{rg}(A) < n$ y entonces encontraremos una matriz $D \neq 0$ tal que $DA = 0$).
  Si $\mathrm{rg}(A) < n$ y H es la forma normal de Hermite por filas de A, nos aseguramos que la última fila de H es nula. Sea entonces $D \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ dada por:
$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
  El único elemento no nulo de D es el 1 en la posición mn. Como la última fila de H es nula claramente $DH = 0$. Como $H = E_k \dots E_1 A$ para ciertas matrices elementales $E_1, \dots, E_k$, tendremos $0 = DH = D(E_k \dots E_1 A) = (DE_k \dots E_1)A$ y así, la matriz $DE_k \dots E_1$ no es nula (al no serlo D, si suponemos que $DE_k \dots E_1 = 0$ entonces $DE_k \dots E_1 E_1^{-1} \dots E_k^{-1} = D = 0E_1^{-1} \dots E_k^{-1} = 0$), lo que nos da una contradicción.

- $c) \implies d)$: Si el rango de A es n, la forma normal de Hermite por filas H de A es una matriz escalonada reducida, de orden $n \times n$ y con n pivotes que son 1 y cada uno situado a la derecha del anterior. Así, necesariamente, $H = I_n$.

- $d) \implies e)$: si $H = I_n$, sabemos que $\exists\, E_1, \ldots, E_k$ matrices elementales, tales que $H = I_n = E_k \ldots E_1 A$. Como cada matriz elemental es invertible $E_1^{-1} \ldots E_k^{-1} = E_1^{-1} \ldots E_k^{-1} I_n = E_1^{-1} \ldots E_k^{-1} E_k \ldots E_1 A = A$, y como la inversa de cada matriz elemental es otra matriz elemental, tenemos el resultado.

- $e) \implies a)$: es inmediato, pues si A es un producto de matrices elementales y cada una de ellas es invertible, lo es A.

$\square$

Por este Teorema a una matriz que sea invertible la vamos a llamar también matriz regular. Si una matriz no es regular, la llamaremos matriz singular.
Recordad que para que B sea inversa de A exigíamos que $AB = BA = I_n$. Veamos que basta con una de las igualdades para que A sea regular. Es decir, si $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ verifican que $AB = I_n$, entonces A es invertible y $B = A^{-1}$.
Por el Teorema anterior, bastará ver que se verifica la condición $b)$ (que es equivalente a la nuestra). Supongamos, entonces que $X \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ tal que $XA = 0$. Entonces, $X = XI_n = X(AB) = (XA)B = 0B = 0$, con lo que A es invertible. Supongamos que A^{-1} es su inversa. Entonces como $AB = I_n$, $A^{-1}(AB) = A^{-1}I_n = A^{-1} = (A^{-1}A)B = I_nB = B$. Luego, efectivamente $B = A^{-1}$.

Otra consecuencia del Teorema anterior es que si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ y H es la forma normal de Hermite por filas de A, podemos encontrar una matriz regular $Q \in \mathcal{M}_m(K)$ tal que $H = QA$, ya que hemos visto que $H = E_k \ldots E_1 A$ para ciertas matrices elementales $E_1, \ldots, E_k$. Si llamamos $Q = E_k \ldots E_1$, como cada E_i, $1 \le i \le k$, es regular, Q será una matriz regular y, efectivamente, $H = QA$.
La matriz Q es fácil de calcular, como $Q = E_k \ldots E_1 = E_k \ldots E_1 I_m$, Q se obtiene aplicando a I_m las mismas operaciones elementales que hemos de aplicar a A para obtener H. Así, tomamos la matriz

$$(A|I_m) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array}\right)$$

y aplicando transformaciones elementales por filas a esta matriz, llegaremos a la matriz $(H|Q)$.
En particular, si A es regular, sabemos que su forma normal de Hermite por filas es I_n. En este caso, la matriz Q anterior verificará que $I_n = QA$, con lo que $Q = A^{-1}$. Si aplicamos lo anterior a $(A|I_n)$ llegaremos a $(I_n|Q = A^{-1})$ y podremos calcular la inversa de A. Apliquémoslo a la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Tenemos

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Utilizando el pivote 1 de la 1ª fila haremos nulos los primeros elementos de la 2ª y 3ª filas, obteniendo:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Cambiamos de signo las filas 2ª y 3ª y tenemos la matriz:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Ahora con el pivote de la 2ª fila hacemos cero el segundo elemento de la tercera fila y obtenemos:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

Si cambiamos de signo la última fila pasamos a

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

(Ya sabemos que el $\mathrm{rg}(A) = 3$ y que es regular). Con el pivote de la 3ª fila hacemos nulos los elementos de la 3ª columna que está sobre él

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 0 & -2 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

y, finalmente, con el pivote de la 2ª fila anulamos el 2 que hay sobre él obteniendo:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

de modo que concluimos $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Matrices equivalentes.

Recordad que dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ son equivalentes por filas ($A \sim_f B$) si podemos pasar de A a B mediante una sucesión finita de transformaciones elementales por filas y que son equivalentes por columnas ($A \sim_c B$) si podemos pasar de A a B mediante una sucesión finita de transformaciones elementales por columnas. Para la equivalencia por filas, tenemos que si $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$, los siguientes hechos son equivalentes:

1. $A \sim_f B$,
2. A y B tienen la misma forma normal de Hermite por filas,
3. $\exists\, Q \in \mathcal{M}_m(K)$, <u>regular</u>, tal que $B = QA$.

Demostración. Si llamamos H_1 a la forma normal de Hermite por filas de A y H_2 a la de B, sabemos que $A \sim_f H_1$ y que $B \sim_f H_2$.
Vamos a demostrar que 1.) $\Longleftrightarrow$ 2.): tenemos que $A \sim_f B$ si y solo si $H_1 \sim_f H_2$ (la relación $\sim_f$ es de equivalencia) lo que es equivalente a que $H_1 = H_2$, ya que ambas matrices son escalonadas reducidas por filas y la igualdad se da por un resultado ya visto.
Veamos ahora que 1.) $\Longleftrightarrow$ 3.) : tenemos que $A \sim_f B$ si y solo si obtenemos B a partir de A mediante una sucesión finita de transformaciones elementales por filas, lo que es equivalente a que existan matrices elementales $E_1, \ldots, E_k$, tales que $B = E_k \ldots E_1 A$, y esto equivale a que $\exists\, Q = E_k \ldots E_1$ (y, por tanto, regular) tal que $B = QA$. $\square$

Cuando consideremos la equivalencia por columnas tendremos análogamente la equivalencia de las siguientes afirmaciones:

1. $A \sim_c B$,
2. A y B tienen la misma forma normal de Hermite por columnas,
3. $\exists\, P \in \mathcal{M}_n(K)$, regular, tal que $B = AP$.

A partir de estos resultados introducimos una nueva definición: sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$. Decimos que A y B son equivalentes y lo notamos $A \sim B$ si podemos obtener B a partir de A con una sucesión finita de transformaciones elementales por filas y por columnas. Así, si $A \sim_f B$, entonces $A \sim B$, pero el recíproco no es cierto, es decir, $A \sim B \not\Longrightarrow A \sim_f B$, pues para pasar de A a B puede que necesitemos una transformación elemental por columnas y, si este es el caso, no podremos afirmar que $A \sim_f B$.
Uniendo los resultados que hemos visto anteriormente tenemos que $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ son equivalentes si y solo si existen matrices regulares $Q \in \mathcal{M}_m(K)$ y $P \in \mathcal{M}_n(K)$ tales que $B = QAP$, donde Q será el producto de las matrices elementales que corresponden a las transformaciones elementales por filas que hay que aplicarle a A, mientras que P será el producto de las matrices elementales correspondientes a las

transformaciones elementales por columnas que debemos aplicarle a A.
Tenemos entonces que dada $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$, $\mathrm{rg}(A) = r$ si y solo si $A \sim J$, donde

$$J = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

pues si H es la forma de Hermite por filas de A, si suponemos que $\mathrm{rg}(A) = r$, H solo tiene r filas no nulas y ahora aplicándole a H transformaciones elementales por columnas obtenemos J, pues el pivote de cada fila permite anular todos los demás elementos de dicha fila.
Recíprocamente, si $A \sim J$, podemos obtener A de J aplicando primero transformaciones elementales por columnas y luego transformaciones elementales por filas. El rango de J es claramente r y cada matriz que obtengamos de ella mediante transformaciones elementales por columnas seguirá teniendo rango r (el número de filas no nulas de una matriz no queda afectado por estas transformaciones). Como sabemos que las transformaciones elementales por filas no afectan al tango, concluimos que $\mathrm{rg}(A) = r$.
Podemos demostrar ahora que $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ son equivalentes si y solo si tienen el mismo rango: si $\mathrm{rg}(A) = r$, y $\mathrm{rg}(B) = s$, $A \sim \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$, $B \sim \left(\begin{array}{c|c} I_s & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$. Así,

$$A \sim B \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c|c} I_s & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \Longleftrightarrow r = s.$$

Concluimos probando que $\forall\, A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ se tiene que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^t)$.

Demostración. Si $\mathrm{rg}(A) = r$, $A \sim \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ y $\exists\, Q \in \mathcal{M}_m(K), P \in \mathcal{M}_n(K)$ <u>regulares</u> tales que $J = QAP$. Si transponemos en esa igualdad, tenemos $J^t = (QAP)^t = P^tA^tQ^t$. Ahora $J^t \in \mathcal{M}_{n\times m}(K)$ es

$$J^t = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

(no tiene por qué coincidir con J si $m \neq n$). Como además sabemos que P^t y Q^t también son regulares, obtenemos que J^t y A^t son equivalentes. Así, $\mathrm{rg}(A^t) = \mathrm{rg}(J^t) = r = \mathrm{rg}(A)$, con lo que podemos afirmar que el rango de una matriz coincide también con el número de columnas no nulas de su forma normal de Hermite por columnas. $\square$

10. Determinante de una matriz cuadrada.

Este concepto lo definiremos mediante la siguiente inducción sobre el orden de la matriz (que, recordad, es un número natural):
Si la matriz es cuadrada de orden 1, $A = (a_{11})$, siendo $a_{11} \in K$. Entonces definimos el determinante de A como $\det(A) = a_{11}$.

Supongamos conocido el valor del determinante de cualquier matriz $B \in \mathcal{M}_{n-1}(K)$. Sea entonces $A \in \mathcal{M}_n(K)$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Llamamos el ij-ésimo menor adjunto de A a $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$, siendo A_{ij} la submatriz de A obtenida al eliminar en A la fila i-ésima y la columna j-ésima, $\forall\, i, j \in \{1, \dots, n\}$, A_{ij} es una matriz cuadrada de orden $n-1$ y, por la hipótesis de inducción, conocemos $\det(A_{ij})$ y, por tanto, α_{ij}. Entonces definimos:

$$\det(A) = a_{11}\alpha_{11} + a_{21}\alpha_{21} + \cdots + a_{n1}\alpha_{n1} = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}\alpha_{i1}.$$

Esta fórmula se llama el desarrollo de Laplace del determinante de A por su primera columna.

Ejemplo 8.

Consideremos I_n, la matriz identidad de orden n. Veamos que $\det(I_n) = 1$. Como $I_1 = (1)$, claramente $\det(I_1) = 1$. Supongamos ahora que $\forall\, n-1 > 1$, $n \in \mathbb{N}$, $\det(I_{n-1}) = 1$. Entonces como podemos escribir $I_n = (\delta_{ij})_{i,j}$, si aplicamos el desarrollo de Laplace por la primera columna al $\det(I_n)$ obtenemos que

$$\det(I_n) = \delta_{11}\alpha_{11} + \cdots + \delta_{n1}\alpha_{n1}.$$

Pero $\delta_{j1} = 0$, $\forall\, j \in \{2, \dots, n\}$. Así, $\det(I_n) = \delta_{11}\alpha_{11} = \alpha_{11}$ y $\alpha_{11} = (-1)^{1+1}\det(A_{11}) = \det(A_{11})$. Pero A_{11} es la matriz obtenida de I_n al quitarle la primera fila y la primera columna. Es decir, $A_{11} = I_{n-1}$ y, por la hipótesis de inducción, $\det(I_{n-1}) = 1$, con lo que, efectivamente, $\det(I_n) = 1$.

También escribiremos el determinante de la matriz A de la forma

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \left|A\right|.$$

Así, si $A \in \mathcal{M}_2(K)$ tendremos

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1}\det(A_{11}) + a_{12}(-1)^{2+1}\det(A_{21}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Si $A \in \mathcal{M}_3(K)$ se tiene

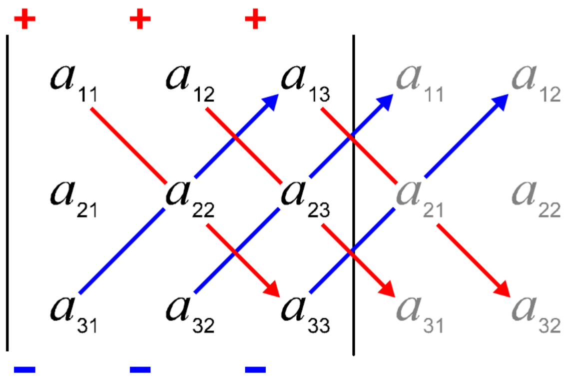
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1}\det(A_{11}) + a_{21}(-1)^{2+1}\det(A_{21}) + a_{31}(-1)^{3+1}\det(A_{31}) =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

donde hemos usado que el cuerpo K es conmutativo. Se obtiene la llamada regla de Sarrus que nos da gráficamente dos sumando positivos y negativos para el determinante de una matriz de orden 3



Así, $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 12 = 15$, y $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 16 - 6 - 4 = 18 - 10 = 8.$

Hay que tener cuidado, pues para una matriz de orden $n \geq 4$ no tenemos reglas como la de Sarrus para poder obtener fácilmente su determinante.

Sin embargo, las propiedades de los determinantes que vamos a ver a continuación nos permitirán ir reduciendo el cálculo del determinante de una matriz cuadrada a los de matrices de orden inferior y, repitiendo el proceso, al cálculo de los determinantes de matrices de orden 3, que serán muy fáciles de obtener.

Propiedades de los determinantes:

1. Si tres matrices cuadradas A, A' y A'' son idénticas, excepto en que la i-ésima fila (o columna) de A es la suma de las correspondientes filas (o columnas) de A' y A'', entonces $\det(A) = \det(A') + \det(A'')$. Es decir:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 + y_1 & x_2 + y_2 & \dots & x_n + y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Demostración. Solo demostraremos esta propiedad y las siguientes para el saco en que consideramos filas. Más adelante veremos por qué. Lo que hacemos es una inducción sobre el orden n de las matrices:

Si $n = 1$ es evidente pues $|x_1 + y_1| = x_1 + y_1 = |x_1| + |y_1|$.

Supongamos que la propiedad es cierta para $n - 1 > 1$, $n \in \mathbb{N}$. Demostrémosla para n. Notaremos

$\alpha_{ij}, \alpha'_{ij}, \alpha''_{ij}$, respectivamente, a los adjuntos del elemento que ocupa el lugar ij en A, A' y A'', respectivamente. Así,

$$\det(A) = a_{11}\alpha_{11} + \cdots + (x_1 + y_1)\alpha_{i1} + \cdots + a_{n1}\alpha_{n1}.$$

Además, $\alpha_{i1} = \alpha'_{i1} = \alpha''_{i1}$ pues para su cálculo eliminamos la fila i-ésima en las matrices A, A' y A'' y esa fila es la única en la que difieren dichas matrices. Además, si $t \neq i$, $t \in \{1, \ldots, n\}$, la hipótesis de inducción nos dice que $\alpha_{t1} = \alpha'_{t1} + \alpha''_{t1}$. Trasladando esto a la igualdad anterior tendremos

$$\det(A) = a_{11}(\alpha'_{11} + \alpha''_{11}) + \cdots + (x_1 + y_1) + \cdots + a_{n1}(\alpha'_{n1} + \alpha''_{n1}) =$$

$$= (a_{11}\alpha'_{11} + \cdots + a_1\alpha'_{i1} + \cdots + a_{n1}\alpha'_{n1}) + (a_{11}\alpha''_{11} + \cdots + y_1\alpha''_{i1} + \cdots + a_{n1}\alpha''_{n1}) = \det(A') + \det(A'').$$

$\square$

2. Si una matriz $A \in \mathcal{M}_n(K)$ tiene dos filas (ó dos columnas) iguales, entonces su determinante se anula, $\det(A) = 0$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

3. Si se intercambian dos filas (ó dos columnas) de la matriz A su determinante cambia de signo:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Demostración. Vamos a demostrar las dos propiedades anteriores a la vez: primero en el caso particular de dos filas consecutivas. Vamos a ver que si una matriz tiene dos filas consecutivas iguales su determinante se anula. De nuevo lo haremos por inducción sobre el orden de la matriz, n. Tenemos que empezar en $n = 2$ (para $n = 1$, estas propiedades no tienen sentido). En ese caso

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12} - a_{11}a_{12} = 0.$$

Vamos a suponer que la propiedad es cierta para un número natural $n-1 \geq 2$, y lo demostraremos para n. Si las filas consecutivas que son iguales son la i-ésima y la $(i+1)$-ésima, tenemos que:

$$\det(A) = a_{11}\alpha_{11} + \cdots + x_1\alpha_{i1} + x_1\alpha_{i+11} + \cdots + a_{n1}\alpha_{n1}.$$

Supongamos que $t \neq i, i+1$. Por la hipótesis de inducción $\alpha_{t1} = (-1)^{t+1}\det(A_{t1}) = 0$, pues la matriz A_{t1} es de orden $n-1$ y tiene dos filas consecutivas iguales. Luego

$$\det(A) = x_1\alpha_{i1} + x_1\alpha_{i+11}.$$

Como $A_{i1} = A_{i+11}$, pues las obtenemos eliminando en A la primera columna y las filas i-ésima e $(i+1)$-ésima (respectivamente), que son iguales, tendremos que $|A_{i1}| = |A_{i+11}|$. Entonces $\alpha_{i1} = (-1)^{i+1}\det(A_{i1})$ mientras que $\alpha_{i+11} = (-1)^{i+2}\det(A_{i1})$ son claramente opuesto entre sí. Por tanto, efectivamente, $\det(A) = 0$.

A continuación vamos a demostrar que si en una matriz intercambiamos entre sí dos filas consecutivas, el determinante cambia de signo. Esto es consecuencia de la Propiedad 1 y la que acabamos de ver, pues

$$0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1+y_1 & x_2+y_2 & \dots & x_n+y_n \\ x_1+y_1 & x_2+y_2 & \dots & x_n+y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1+y_1 & x_2+y_2 & \dots & x_n+y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ x_1+y_1 & x_2+y_2 & \dots & x_n+y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} (*).$$

Pero los determinantes de las matrices 1ª y 4ª se anulan ya que en ambos casos hay dos filas contiguas iguales. Así,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Vamos ya al caso general:

Podemos deducir la Propiedad 2 de los resultados anteriores: si A tiene dos filas iguales no consecutivas (la i-ésima y la j-ésima), intercambiando la fila j-ésima con cada una de las filas anteriores a ella y posteriores a la i-ésima, cambiamos el signo un cierto número de veces, pero llegamos a una matriz con dos filas consecutivas iguales y sabemos que su determinante es 0, que no se ve afectado por los cambios de signo que hayamos hecho.

Ahora la Propiedad 3 se deduce de la Propiedad 2 por el mismo método seguido en $(*)$. □

4. Si se multiplican todos los elementos de una fila (ó de una columna) de la matriz A por un escalar k, el determinante de la nueva matriz es $k\det(A)$.

   Demostración. Aplicaremos, de nuevo, una inducción sobre el orden n de la matriz: si $n = 1$ entonces $\det(ka_{11}) = ka_{11} = k\det(a_{11})$. Supongamos cierto el resultado para $n - 1 \geq 1$ y consideremos que $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Llamaremos A' a la matriz que obtenemos multiplicando una fila de A por el escalar k y α_{ij} y α'_{ij}, respectivamente, a los menores adjuntos de los elementos que están en el lugar ij en A y A' (respectivamente). Entonces $\det(A') = a_{11}\alpha'_{11} + \dots + kx_1\alpha'_{i1} + \dots + a_{n1}\alpha'_{n1}$. Como $\alpha'_{i1} = \alpha_{i1}$, pues en ambos casos quitamos la fila i-ésima y la columna primera en A y las matrices que nos quedan son iguales, y como, por la hipótesis de inducción cada α'_{t1} con $t \neq i$ verifica $\alpha'_{t1} = k\alpha_{t1}$, ya que en las matrices A'_{t1} con $t \neq 1$ una fila es el resultado de multiplicar por k la correspondiente fila de A_{t1}, tendremos

$$\det(A') = a_{11}k\alpha_{11} + \dots + kx_1\alpha_{i1} + \dots + a_{n1}k\alpha_{n1} =$$

$$= k(a_{11}\alpha_{11} + \dots + x_1\alpha_{i1} + \dots + a_{n1}\alpha_{n1}) = k\det(A).$$

□

   En particular, esta propiedad nos dice que si A tiene una fila (ó una columna) cuyos elementos son todos nulos, entonces su determinante es cero.

5. Si a una fila (ó una columna) de una matriz cuadrada A le sumamos el producto por un escalar de

otra fila, entonces su determinante no varía. Es decir,

$$(*)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1+ky_1 & x_2+ky_2 & \dots & x_n+ky_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} (**).$$

Demostración. Esta propiedad se deduce fácilmente de las Propiedades 1 y 4 pues

$$(*) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (**).$$

Ya que, por la Propiedad 2 el segundo determinante de la expresión anterior se anula. □

6. Una matriz cuadrada A es regular si y solo si $\det(A) \neq 0$.

   Demostración. Si le aplicamos las propiedades 3, 4 y 5 anteriores a la matriz identidad I_n, deducimos que los determinantes de las matrices elementales vienen dados por $\det(E_{ij}) = -1$, $\det(E_i(k)) = k$ $(k \in K \setminus \{0\})$ y $\det(E_{ij}(k)) = \det(I_n) = 1$.
   Por tanto, esas propiedades 3, 4 y 5 se resumen en que si ahora E es una matriz elemental entonces $\det(EA) = \det(E)\det(A)$. Así, es inmediato comprobar que si $E_1, \dots, E_k$ son matrices elementales, entonces $\det(E_k \dots E_1 A) = \det(E_k)\dots\det(E_1)\det(A)$. Entonces, sabemos que si A es una matriz regular, es un producto de matrices elementales, $A = E_k \dots E_1$ y, entonces $\det(A) = \det(E_k)\dots\det(E_1) \neq 0$ pues cada uno de ellos es no nulo.
   Recíprocamente, supongamos que A no es regular. Sabemos que $\mathrm{rg}(A) < n$ y, por tanto, su forma normal de Hermite por filas H tiene, al menos, una fila de ceros. Luego $\det(H) = 0$ por la Propiedad 4. Sabemos que $H = E_k \dots E_1 A$ para ciertas matrices elementales E_i, $i \in \{1, \dots, k\}$. Así, $0 = \det(H) = \det(E_k \dots E_1 A) = \det(E_k)\dots\det(E_1)\det(A)$ y como $\det(E_i) \neq 0$, $\forall\, i \in \{1, \dots, k\}$, necesariamente $\det(A) = 0$. □

7. El determinante de un producto de matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ verifica $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Demostración. Supongamos, en primer lugar, que $\det(A) = 0$ ó $\det(B) = 0$. Entonces A ó B es singular, con lo que AB es singular. Si ahora $\det(A) \neq 0$ y $\det(B) \neq 0$; entonces, por la Propiedad 6 ambas son regulares y, por tanto son producto de matrices elementales: $A = E_1 \dots E_k$, $B = E'_1 \dots E'_l$. Entonces

$$\det(AB) = \det((E_1 \dots E_k)(E'_1 \dots E'_l)) = \det(E_1 \dots E_k)\det(E'_1 \dots E'_l) = \det(A)\det(B).$$

□

8. El determinante de una matriz cuadrada coincide con el de su traspuesta.

   Demostración. De nuevo consideramos dos casos: si $\det(A) = 0$, entonces es singular. Sabemos que, entonces, A^t también es singular y, por tanto, $\det(A^t)) = 0$. Si $\det(A) \neq 0$, A es regular y podemos encontrar matrices elementales $E_1, \dots, E_k$ tales que $A = E_1 \dots E_k$. Entonces $A^t = E^t_k \dots E^t_1$ y para cada matriz elemental E, $\det(E) = \det(E^t)$. Así, $\det(A^t) = \det(E^t_k) \dots \det(E^t_1) = \det(E_k) \dots \det(E_1) = \det(A)$. □

   A partir de aquí, todas las Propiedades de los determinantes referidas a filas son válidas también para columnas.

9. El determinante de una matriz se puede obtener desarrollando por cualquier de sus filas ó columnas, es decir,

   $$\det(A) = a_{i1}\alpha_{i1} + a_{i2}\alpha_{i2} + \dots + a_{in}\alpha_{in} = a_{1j}\alpha_{1j} + a_{2j}\alpha_{2j} + \dots + a_{nj}\alpha_{nj},$$

   $\forall\, i, j \in \{1, \dots, n\}$.

   Demostración. La propiedad se obtiene como consecuencia de las Propiedades 3 y 8. □

Veamos, con un ejemplo, cómo calcular el determinante de una matriz:

Ejemplo 9.
Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 12 & 123 & 1234 \\ 2 & 23 & 234 & 2341 \\ 3 & 34 & 341 & 3412 \\ 4 & 41 & 412 & 4123 \end{pmatrix}$$

Para calcular su determinante multiplicamos la 1ª columna por 12 y se la restamos a la 2ª y así,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 123 & 1234 \\ 2 & -1 & 234 & 2341 \\ 3 & -2 & 341 & 3412 \\ 4 & -7 & 412 & 4123 \end{vmatrix}.$$

Ahora multiplicamos la 1ª columna por 123 y se la restamos a la 3ª y luego por 1234 y se la restamos a la cuarta, obteniendo:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -12 & -127 \\ 3 & -2 & -28 & -290 \\ 4 & -7 & -80 & -813 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -12 & -127 \\ 3 & 2 & -28 & -290 \\ 4 & 7 & -80 & -813 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 12 & 127 \\ 3 & 2 & 28 & 290 \\ 4 & 7 & 80 & 813 \end{vmatrix}$$

donde hemos aplicado 3 veces la Propiedad 4. Si ahora desarrollamos por la 1ª fila obtenemos que:

$$\det(A) = - \begin{vmatrix} 1 & 12 & 127 \\ 2 & 28 & 290 \\ 7 & 80 & 813 \end{vmatrix}.$$

Multiplicando ahora la 1ª fila por 2 y restándola a la 2ª y luego por 7 y restándosela a la 3ª tenemos

$$\det(A) = - \begin{vmatrix} 1 & 12 & 127 \\ 0 & 4 & 36 \\ 0 & -4 & -76 \end{vmatrix}.$$

Aplicando de nuevo la Propiedad 4 en la 3ª fila tenemos

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 12 & 127 \\ 0 & 4 & 36 \\ 0 & 4 & 76 \end{vmatrix}.$$

Desarrollando por la 1ª columna tenemos $\det(A) = \begin{vmatrix} 4 & 36 \\ 4 & 76 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 1 & 18 \\ 1 & 38 \end{vmatrix} = 8(38 - 19) = 8 \cdot 20 = 160.$

11. Matriz inversa y determinantes.

Veamos cómo podemos utilizar los determinantes para el cálculo de la matriz inversa. Sea $A \in \mathcal{M}_n(K)$, llamaremos matriz adjunta de $A = (a_{ij})_{i,j}$ a la matriz $A^* = (\alpha_{ij})_{i,j}$, que en cada lugar tiene el correspondiente menor adjunto de A.

Así, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ entonces $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Veamos que si $A \in \mathcal{M}_n(K)$ y A^* es su matriz adjunta, se verifica que $AA^{*t} = \det(A)I_n$.

Para ello, llamemos $C = (c_{ij})_{i,j}$ a la matriz $C = AA^{*t}$. Por tanto, $\forall\, i, j \in \{1, \dots, n\}$ tendremos que

$$c_{ij} = a_{i1}\alpha_{j1} + a_{i2}\alpha_{j2} + \cdots + a_{in}\alpha_{jn}.$$

Por tanto, si $i = j$,

$$c_{ii} = a_{i1}\alpha_{i1} + a_{i2}\alpha_{i2} + \cdots + a_{in}\alpha_{in} = \det(A),$$

ya que la expresión para c_{ii} es el desarrollo del $\det(A)$ por la fila i-ésima.
Si $i \neq j$ entonces

$$c_{ij} = a_{i1}\alpha_{j1} + \cdots + a_{in}\alpha_{jn} \underset{(*)}{=} \begin{array}{|cccc|l} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} & \text{fila } i) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} & \text{fila } j) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & \end{array}$$

$*$ nos da el desarrollo del determinante de la derecha por la fila j-ésima y, como la matriz a la que calculamos el determinante tiene dos filas iguales, $c_{ii} = 0$.
Hemos obtenido que

$$AA^{*t} = \begin{pmatrix} \det(A) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det(A) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \det(A) \end{pmatrix} = \det(A)I_n.$$

Si suponemos, entonces que la matriz $A \in \mathcal{M}_n(K)$ es regular, tenemos que $\det(A) \neq 0$. Si en la igualdad anterior dividimos por $\det(A)$, ya que no anula, tendremos que

$$A\left(\frac{1}{\det(A)}A^{*t}\right) = I_n, \quad \text{luego} \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}A^{*t}.$$

Por ejemplo, para la matriz que hemos considerado antes, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, tiene determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1,$$

mientras que $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, A es regular y $A^{-1} = -\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

12. Rango y determinantes.

A partir de la definición de determinante obtendremos un nuevo método para calcular el rango de una matriz: sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$. Entonces, $\mathrm{rg}(A)$ es el mayor orden de una submatriz cuadrada y regular de A.
Para demostrar esto, sea $r = \mathrm{rg}(A)$ y sea H la forma normal de Hermite por filas de A. Por tanto, H contiene una submatriz regular de orden r (la que contiene los r pivotes) y como, además, en H hay

exactamente r filas no nulas, el determinante de cualquier submatriz cuadrada de orden $r+1$ de H se anula, pues tendrá una fila de ceros. Así, todas las submatrices cuadradas de orden $r+1$ de H son singulares. Como esta propiedad se mantiene por cada transformación elemental por filas, se verificará que A tiene una submatriz cuadrada regular de r y todas sus submatrices cuadradas de orden $r+1$ serán singulares. Esto nos proporcionará un método para calcular el rango de una matriz.

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 8 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, el elemento a_{11} de A es $1 \neq 0$, luego $\mathrm{rg}(A) \geq 1$. Si consideramos la submatriz que contiene a a_{11} obtenida eliminando en A la 2ª fila y la 3ª y 4ª columnas, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. Esa submatriz es regular y, por tanto, $\mathrm{rg}(A) \geq 2$. Para obtener submatrices cuadradas de A a partir de esa submatriz añadiremos la 2ª fila y, ó bien la 3ª columna y la 4ª. Si alguno de los determinantes de las submatrices así obtenidas no es nulo, el $\mathrm{rg}(A) = 3$, y si ambos se anulan $\mathrm{rg}(A) = 2$.

Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 4 + 4 - 4 = 8 \neq 0$, podemos asegurar que $\mathrm{rg}(A) = 3$.

13. Regla de Cramer.

Dado un sistema de ecuaciones lineales sobre K

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Denotamos $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$ y la llamamos matriz de coeficientes del sistema. Notamos asimismo $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times 1}(K)$ y la llamamos matrix incógnita y $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m \times 1}(K)$ que llamaremos matriz de términos independientes. A la matriz $(A|B)$ la llamaremos matriz ampliada del sistema.

Con estas notaciones el sistema anterior lo podemos escribir matricialmente como $AX = B$. Dicho sistema será de Cramer si A es una matriz cuadrada (hay, por tanto, tantas ecuaciones como incógnitas) y regular. Si aplicamos el Teorema de Rouché-Frobenius todo sistema de Cramer es compatible determinado (ya que, al ser A regular, su forma normal de Hermite por filas es I_n). La regla de Cramer nos permite obtener la solución para los sistemas de Cramer:

Si el sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

es de Cramer su solución (única) viene dada por:

$$x_1 = \frac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, x_j = \frac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots,$$

$$x_n = \frac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix},$$

ya que, matricialmente, escribiremos el sistema $AX = B$ y, como A es regular, $\exists\, A^{-1}$ y $A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = I_nX = X = A^{-1}B$. Luego

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{n1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1i} & \alpha_{2i} & \dots & \alpha_{ni} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Así, $\forall\, 1 \leq i \leq n$, tendremos que

$$x_i = \frac{1}{\det(A)}(b_1\alpha_{1i} + \cdots + b_n\alpha_{ni}) = \frac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Veamos, finalmente, cómo aplicar la regla de Cramer para resolver cualquier sistema compatible:
En primer lugar nos aseguramos de que para nuestro sistema se verifica que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|B)$, pues en caso contrario el sistema es incompatible.
Si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|B) = n =$ número de incógnitas, nuestro sistema es compatible determinado. Si $m > n$, y suponemos que el $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|B)$ lo alcanzamos para las primeras n filas de A (y, por tanto, de $(A|B)$), el resto de filas las podemos obtener multiplicando cada una de las primeras n filas por un escalar, luego restándole a cada una de las filas de la $n+1$ a la m, la correspondiente suma de escalar multiplicados por las n primeras filas, logramos que en $(A|B)$ y, por lo tanto, en A, esas últimas filas sean nulas.
Esto se traduce en que en nuestro sistema hemos conseguido que las ecuaciones desde la $n+1$ a la m sean ahora $0 = 0$, y las podemos quitar. Ahora tenemos un sistema de n ecuaciones y n incógnitas que es de

Cramer, pues el rango de su matriz de coeficientes es n y lo resolvemos.

Si $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|B) = r < n$, en A podemos encontrar una submatriz cuadrada de orden r cuyo determinante es distinto de cero, mientras que el determinante de cualquier submatriz de A de orden superior a r se anula. Con esta submatriz alcanzamos también el rango de $(A|B)$. Por notación consideremos que tal submatriz de A se obtiene considerando las r primeras filas y columnas de A (si no, aplicaríamos transformaciones elementales de Tipo I al sistema hasta conseguir poner las filas correspondientes a la submatriz como las primeras ecuaciones del sistema y cambiaríamos en cada ecuación resultante el orden de las incógnitas para que las r primeras correspondan a las columnas de la submatriz de A). Por el mismo procedimiento de antes, podremos eliminar en nuestro sistema las $n-r$ últimas ecuaciones y escribirlo de la forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1r}x_r + a_{1r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2r}x_r + a_{2r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \\ a_{r1}x_1 + \cdots + a_{rr}x_r + a_{rr+1}x_{r+1} + \cdots + a_{rn}x_n = b_r \end{cases}$$

donde $\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$

Nuestro sistema es equivalente al siguiente:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{2n}x_n \\ \quad \vdots \\ a_{r1}x_1 + \cdots + a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \cdots - a_{rn}x_n \end{cases}$$

que ahora es de Cramer y podemos resolver por la regla de Cramer. (Nótese ahora que cada variable $x_1, \dots, x_r$, dependerá de los valores de $x_{r+1}, \dots, x_n$. Si cada una de estas $n-r$ incógnitas toma un valor concreto, tendremos valores concretos para $x_1, \dots, x_r$ y, por tanto, una solución de nuestro sistema primitivo).

Como ejemplo, consideremos el sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ 5x_1 + 12x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 7 \end{cases}$$

que tiene por matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 5 & -2 & 1 \\ 5 & 12 & -7 & 6 \end{pmatrix}$$

y por matriz aumentada

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & -2 & 1 & 1 \\ 5 & 12 & -7 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Calculemos $\mathrm{rg}(A)$. Como la submatriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ tiene determinante igual a 1, $\mathrm{rg}(A) \geq 2$. Para ver si es 3 calculamos

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -2 \\ 5 & 12 & -7 \end{vmatrix} = -35 - 72 - 20 + 75 + 24 + 28 = -127 + 127 = 0.$$

Tomamos entonces

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ 5 & 12 & 6 \end{vmatrix} = 30 + 96 + 10 - 100 - 12 - 24 = 136 - 136 = 0.$$

Como estos dos determinantes se anulan entonces $\mathrm{rg}(A) = 2$. Para calcular el rango de la matriz aumentada tenemos que la submatriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ tiene determinante $\neq 0$, pero si le añadimos a esa matriz la 3^{a} fila y la 3^{a} o 4^{a} columnas, hemos visto que los correspondientes determinantes se anulan. Entonces $\mathrm{rg}(A|B) = 3$ si y solo si $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 5 & 12 & 7 \end{vmatrix} \neq 0$. Como

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 5 & 12 & 7 \end{vmatrix} = 35 + 48 + 10 - 50 - 12 - 28 = 93 - 90 = 3,$$

obtenemos que $\mathrm{rg}(A|B) = 3$ y el sistema es, por tanto, incompatible.