

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Cálculo I – Evaluación 3

1. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función estrictamente creciente verificando que $a < f(x) \leq b$ para todo $x \in [a, b]$. Definamos $x_1 = a$, y $x_{n+1} = f(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
 - a) Prueba que $\{x_n\}$ converge a un número $\beta \in]a, b]$.
 - b) Sea $C = \{f(x) : x \in [a, b], x < \beta\}$. Prueba que $\beta = \sup(C)$ y $\beta \leq f(\beta)$.
 - c) Si la imagen de f es un intervalo prueba que $\beta = f(\beta)$.
2. Sea $\{x_n\}$ la sucesión definida por

$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = \frac{4x_n + a}{x_n + 4} \quad (4 < a < 16)$$

- a) Estudia la convergencia de dicha sucesión.
- b) Prueba que $0 < \sqrt{a} - x_{n+1} < \frac{1}{3}(\sqrt{a} - x_n)$ y deduce que $0 < \sqrt{a} - x_{n+1} < \frac{1}{3^n}(\sqrt{a} - 2)$.