Comportamiento asintótico en ecuaciones en diferencias de coeficientes constantes.

Sea una ecuación

$$a_k x_{n+k} + \dots + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = b_0 \qquad (*)$$

donde $a_k, \dots, a_1, a_0, b_0$ son todos números reales

y $a_k \neq 0$.

<u>Lema</u> 1 Sea x_n solución de $(*)$, con $x_n \to x^*$

entonces

$$\left[\sum_{i=0}^{k} a_i\right] x^* = b_0$$

Si suponemos

$$\sum_{i=0}^{k} a_i \neq 0 \qquad (*)\,1$$

entonces el valor x^* no depende de la solución x_n,

y queda determinado por los coeficientes.

Sea

$$P(\lambda) = a_k \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

el polinomio característico de la correspondiente ecuación homogénea, σ el espectro

$$\sigma = \{ \lambda \in \mathbb{C} \,/\, P(\lambda) = 0 \},$$

entonces $\circledast 1$ se escribe como $1 \notin \sigma$.

Supongamos que se verifica $\circledast 1$, entonces $\circledast$ se dirá convergente si $x_n \to x^*$ para cualquier solución.

Teorema: Son equivalentes:

1. $\circledast$ es convergente
2. Todas las soluciones de la correspondiente homogénea tienden a cero.
3. $\forall \lambda \in \sigma \quad |\lambda| < 1$.

$1 \Longleftrightarrow 2$ Se deduce de la relación entre las soluciones de la homogénea y la completa.

$2 \Longleftrightarrow 3$ Es similar a Lema 1 dentro del Modelo Samuelson.