TEMA 2

Cuando un sistema $N\times N$ unisolvente, N grande, la regla de Cramer es ineficiente porque requiere un orden de operaciones de ¡¡¡$(N+1)!N-1$!!!

Sistemas triangulares

$Ux=b$ $U\in\mathbb{R}^{N\times N}$ triangular superior con diagonal no nula

$x\in\mathbb{R}^N$ vector de incógnitas

b vector de términos independientes

Sustitución hacia atrás: $x_N=\frac{b_N}{u_{NN}}$ $i=N-1,\dots,1\Rightarrow \underbrace{x_i=\frac{1}{u_{ii}}\left(b_i-\sum_{j=i+1}^{N}u_{ij}x_j\right)}_{\text{Consiste en un simple despeje}}$

$Lx=b$

$L\in\mathbb{R}^{N\times N}$ triangular inferior con diagonal no nula

Sustitución hacia delante: $x_1=\frac{b_1}{l_{11}}$ $i=2,\dots,N\Rightarrow \underbrace{x_i=\frac{1}{l_{ii}}\left(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}l_{ij}x_j\right)}_{\text{También se deduce del despeje}}$

La resolución por sustitución es mucho más eficiente ya que requiere un orden de operaciones de N^2.

Métodos directos

Método de Gauss

El primer paso siempre es restar cada fila $\frac{a_{i1}}{a_{11}}(a_{11}x_1+\dots+a_{1N}x_N=b_1)$ y se obtiene la matriz:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & \tilde{a}_{N2} & \cdots & \tilde{a}_{NN} \end{bmatrix}$$

Y la llamaremos $A^{(2)}$

Si $\tilde{a}_{22}\neq 0$, eliminamos x_2 de las ecuaciones inferiores. $\tilde{a}_{22}=a_{22}^{(2)}$

- Datos: $N\geq 1$, $A\in\mathbb{R}^{N\times N}$, $b\in\mathbb{R}^N$
- $A^{(1)}:=A$
- $a_{kk}^{(k)}\neq 0$ $\forall k\in\{1,\dots,N\}\Rightarrow$ De lo contrario, se termina y no se puede llegar a un sistema triangular equivalente

Los multiplicadores son de la forma $m_{ik}=\frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$

Y se llega a un sistema triangular superior equivalente:

$$Ux=c,\ U:=A^{(N)},\ c:=b^{(N)}$$

Que se resuelve por sustitución hacia atrás.

$k=1,\dots,N$

$$A^{(k)}=\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & & a_{1N}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & & a_{2N}^{(2)} \\ \vdots & 0 & \ddots & & \\ & \vdots & & a_{kk}^{(k)} & \cdots\ a_{kN}^{(k)} \\ 0 & 0 & & a_{Nk}^{(k)} & \cdots\ a_{NN}^{(k)} \end{bmatrix}$$

Proposición. Afirmaciones equivalentes:

i) El método de Gauss puede completarse hasta el N-ésimo paso.

ii) $\forall k \in \{1, \dots, N\}$ la k-ésima submatriz principal de A:

$$A_k = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix} \text{ es regular}$$

1)* Dem.

i) $\boxed{\Longrightarrow}$ ii) $k = 1, \dots, N$ (Se está haciendo $\overset{no}{ii) \Rightarrow}$ no i))

$$\det(A_k) = \det \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1k}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2k}^{(2)} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{kk}^{(k)} \end{bmatrix} = a_{11}^{(1)} a_{22}^{(2)} \cdots a_{kk}^{(k)} \neq 0$$

$\Downarrow$ Es regular

Cada A_k tendrá el determinante $a_{11}^{(1)} \cdots a_{kk}^{(k)}$, y si se puede hacer Gauss n veces es porque cada $a_{ii}^{(i)}$ es no nulo, de ahí que

ii) $\boxed{\Longrightarrow}$ i) $\quad k = \min\{I \in \{1, \dots, N\} : a_{ii}^{(i)} = 0\}$

Se halla $A^{(k)}$ y nos quedamos con su submatriz A_k que será:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1N}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2N}^{(2)} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad \det(A^{(k)})_k = 0 = \det(A_k)$$

$a_{kk}^{(k)} = 0$

Por las propiedades de los determinantes, el determinante no varía al restar unas filas a otras

Concluimos que A_k no es regular.

Este método de Gauss requiere un orden de operaciones de $\frac{4N^3 + 9N^2 - 7N}{6}$

¿Cómo se reducen los errores de redondeo que afectan al método de Gauss?

¿Se puede modificar el método de forma que se evite el problema generado cuando $a_{kk}^{(k)} = 0$?

Respuesta simultánea. Nos será muy útil Gauss con pivotaje:

Método de Gauss con pivotaje

En el paso k del método de Gauss, intercambiar las filas de forma que en la columna $\begin{bmatrix} a_{kk}^{(k)} \\ \vdots \\ a_{Nk}^{(k)} \end{bmatrix}$ tiene mayor valor absoluto $a_{kk}^{(k)}$.

Este método siempre tiene sentido hasta el N-ésimo paso si A es regular.

Mirar comparación Gauss normal (diap. 28, 29) y Gauss con pivotaje (diap. 33)

Métodos de factorización

Sea $Ax=b$ un sistema compatible determinado, y existen L triangular inferior, U triangular superior tales que:

$$A = LU \quad LUx = b$$

Y resolvemos dos sistemas triangulares auxiliares:

i) $y := Ux \Rightarrow Ly = b$ (Sustitución hacia adelante)

ii) $Ux = y \Rightarrow$ (Sustitución hacia atrás) Ver ejemplo diapositiva 38

¿Cuándo se puede obtener una factorización LU para A regular?
¿Algoritmo?
¿Unicidad?

$$\left.\begin{matrix} L,U \text{ regulares} \\ A=LU \end{matrix}\right\} \Rightarrow a_{11} = l_{11}u_{11} \neq 0 \Rightarrow \text{No siempre}$$

Proposición.
$N \geq 1$, $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $b \in \mathbb{R}^N$, aplicando Gauss a $Ax=b$ se obtiene una matriz triangular superior $A^{(N)}$ y un vector $b^{(N)}$ de forma que $A^{(N)}x = b^{(N)}$ es equivalente al de partida. $A=LU$. $U \stackrel{?}{=} A^{(N)}$

Proposición
$A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ regular. Equivalen:

i) A admite una factorización LU.

ii) Las N submatrices principales de A son regulares.

2)* Dem.

i) $\Rightarrow$ ii) $L, U \in \mathbb{R}^{N\times N}$ triang. inf. y sup.
Como A regular, L y U también. Además tenemos que:

$$A_k = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ l_{k1} & l_{k2} & \cdots & l_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1k} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2k} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{kk} \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A_k) = \underbrace{l_{11}\cdots l_{kk}u_{11}\cdots u_{kk} \neq 0}_{\text{Pues todos son no nulos}}$$

Y esto ocurre $\forall k \in \{1,\dots,N\}$, por lo que se cumple ii)

ii) $\Rightarrow$ i) Dos proposiciones anteriores (Si las N subm. son regulares, Gauss se puede completar hasta el final y $A^{(N)}x = b^{(N)}$ con $A^{(N)}$ triang. sup. y eso ya factoriza como una LU.

Teorema
$A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ matriz regular. Afirmaciones equivalentes:

i) $\forall b \in \mathbb{R}^N$, Gauss puede completarse hasta el final.

ii) A admite una factorización LU.

iii) Todas las submatrices principales de A son regulares.

Esto surge de unir la última proposición con la primera de este resumen.

Proposición.
$A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ matriz regular entonces hay una matriz $\tilde{A}$ que se obtiene permutando eventualmente algunas de las filas de A y que admite una factorización LU.
Esto se debe a que si A es regular e intercambiamos sus filas de forma que Gauss se pueda aplicar hasta el final y por el teorema anterior, admitirá una factorización LU.

Teorema.

A matriz regular. Entonces:

i) Gauss con pivotaje es factible para todo sistema con A como matriz de coeficientes.

ii) Salvo la eventual permutación de algunas de sus filas, A admite una factorización LU.

La factorización LU se puede realizar de dos formas:
- $\to$ Doolittle: $l_{11} = \dots = l_{NN} = 1$
- $\to$ Crout: $u_{11} = \dots = u_{NN} = 1$

Ejemplo de Crout en diapositivas 55-57

Existe un perfeccionamiento adicional de la factorización LU para matrices simétricas definidas positivas tal que $L = U^T$.

$A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ definida positiva $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \Rightarrow x^T A x > 0$

Factorización tipo Cholesky: $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ matriz simétrica y definida positiva, entonces $\exists U \in \mathbb{R}^{N\times N}$ triang. sup. con coef. pos. en su diagonal principal tal que $A = U^T U$

Ejercicio Diapositiva 66

1) A cuadrada es simétrica y def. pos. $\Leftrightarrow$ A admite Cholesky

$\boxed{\Leftarrow}$ A admite Cholesky, entonces $\exists U \in \mathbb{R}^{N\times N}$ triang. sup. con diagonal positiva tal que $A = U^T U$. Hemos de notar que $A^T = U^T (U^T)^T = U^T U \Rightarrow$ Es simétrica. Ahora veamos que es definida positiva:

$\forall x \in \mathbb{R}^N \quad x^T A x = x^T U^T U x = (Ux)^T (Ux) \overset{\text{Es la suma de las coordenadas al cuadrado de } Ux}{=} \|Ux\|_2^2 \Rightarrow$ Deducimos que $x^T A x \geq 0$

Si $x^T A x = 0 \Leftrightarrow \|Ux\|_2^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$, ya que U es regular y $\det(U) \neq 0$ al tener su diagonal de coeficientes positivos

$\boxed{\Rightarrow}$ Por inducción

Métodos iterativos: Jacobi y Gauss-Seidel

La solución de un SEL cuadrado y compatible determinado será el límite de una sucesión. Son muy útiles para sistemas de grandes dimensiones. Cada término de la sucesión se genera recursivamente a partir del anterior.

$Ax = b$ cuadrado y unisolvente con $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ regular, $b \in \mathbb{R}^N$

$$\left| \begin{array}{l} x_0 \text{ dado} \\ n \geq 1 \Rightarrow x_n = Bx_{n-1} + \overset{*}{C} \end{array} \right. \quad \text{con } B \in \mathbb{R}^{N\times N}, x_0, C \in \mathbb{R}^N$$

Si el sistema tiene solución, como esta es un límite: $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, si sustituimos ese límite en * tenemos que $x = Bx + C$, que significa que el método es consistente con el sistema.

Esto es equivalente a: $x = Bx + c \Leftrightarrow c = x - Bx \Leftrightarrow \boxed{c = (I-B)x = (I-B)A^{-1}b}$

Observación: Convergencia a la solución del sistema $\Rightarrow$ Consistencia del método con el sistema

Ejemplo. Sea el sistema $2Ix = b$ y $\begin{cases} x_0 \text{ dado} \\ n \geq 1 \Rightarrow x_n = -x_{n-1} + c \end{cases}$ $\not\Leftarrow$

$c = (I-B)A^{-1}b \Leftrightarrow c = 2I \cdot \frac{1}{2}Ib \Leftrightarrow \boxed{c = b} \Rightarrow$ Para que se dé la consistencia

$c = (I-B)A^{-1}b \Leftrightarrow c = (I-B)x \Leftrightarrow \boxed{c = 2Ix_0 = 2x_0} \Rightarrow$ Converge a la solución cuando se da esto

Proposición

$N \geq 1$, $A, B \in \mathbb{R}^{N \times N}$ con A regular, $x_0, b, c \in \mathbb{R}^N$ y el método iterativo

$$\begin{cases} x_0 \text{ dado} \\ n \geq 1 \Rightarrow x_n = Bx_{n-1} + c \end{cases}$$ consistente con el sistema unisolvente $Ax = b$.

Entonces el método iterativo converge a la solución del sistema $\forall x_0 \in \mathbb{R}^N \Leftrightarrow \rho(B) < 1$ 3)*

$\boxed{\Rightarrow}$ Hipótesis de consistencia. Tomamos $x_n = Bx_{n-1} + c$ y restamos x a ambos lados: $x_n - x = Bx_{n-1} + c - x$, y como es consistente, $c = (I-B)x$, por lo que $x_n - x = Bx_{n-1} + (I-B)x - x$ y $x_n - x = Bx_{n-1} - Bx$ y $x_n - x = B(x_{n-1} - x)$. Repetimos lo mismo para $x_{n-1} = Bx_{n-2} + c$, $B(Bx_{n-2} + c - x) = B(Bx_{n-2} + (I-B)x - x) = B(Bx_{n-2} - Bx) = B^2(x_{n-2} - x)$. Si repetimos esto n veces llegamos a que $\boxed{x_n - x = B^n(x_0 - x)}$

Como lo suponemos convergente, $\lim_{n\to\infty}(x_n - x) = 0 = \lim_{n\to\infty} B^n(x_0 - x)$ y como $\lim_{n\to\infty} B^n(x_0 - x) = 0$ y "$x_0 - x$" es un vector fijo, no afecta a la convergencia y entonces, $\lim_{n\to\infty} B^n = 0$. Por un teorema del tema 1, ~~como B es regular~~ y $\lim_{n\to\infty} B^n = 0$, $\rho(B) < 1$.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\rho(B) < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} B^n$

Por la relación de recurrencia antes demostrada sabemos que $x_n - x = B^n(x_0 - x)$. Aplicando una norma matricial inducida en $\mathbb{R}^{N \times N}$ se tiene que:

$$\|x_n - x\| = \|B^n(x_0 - x)\| \leq \|B^n\| \|x_0 - x\|$$

$$\|B^n\| = \sup_{x_0 - x \in \mathbb{R}^N} \frac{\|B^n(x_0 - x)\|}{\|x_0 - x\|} \Leftrightarrow \|B^n\| \|x_0 - x\| \geq \|B^n(x_0 - x)\|$$

Y tomando límites $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| \leq \lim_{n\to\infty} \|B^n\| \|x_0 - x\| = 0 \text{ pues } \lim_{n\to\infty} B^n = 0$$

Y como $\|\cdot\| \geq 0$, $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x \Rightarrow$ Hemos llegado a que es convergente.

Generación de métodos iterativos. Gauss-Seidel

Vamos a generar métodos automáticamente consistentes. Sea

$$Ax=b \text{ con } A\in\mathbb{R}^{N\times N} \text{ regular}, b\in\mathbb{R}^N$$

$$A=M-N \text{ con } M \text{ regular y } N \text{ no nula}$$

$Ax=b \iff (M-N)x=b \iff Mx-Nx=b \iff Mx=Nx+b$

$\iff \boxed{x=M^{-1}Nx+M^{-1}b}$ De donde se deduce que $B=M^{-1}N$ y $c=M^{-1}b$

Aquí la consistencia es gratis:

$(I-B)A^{-1}b=(I-M^{-1}N)A^{-1}b=(M^{-1}M-M^{-1}N)A^{-1}b=$

$=M^{-1}(M-N)A^{-1}b=M^{-1}AA^{-1}b=M^{-1}\cdot I\cdot b=M^{-1}b=c \Rightarrow$ Consistencia verificada

Corolario. Es lo mismo que la proposición anterior sólo que $B=M^{-1}N$ y por lo tanto $\rho(M^{-1}N)<1$ (ya no hace falta la hipótesis de convergencia ya que si $A=M-N$ con A y M regulares, acabamos de ver que la consistencia es gratis).

Proposición.

$Ax=b$ con $A\in\mathbb{R}^{N\times N}$ regular, $b,c\in\mathbb{R}^N$ y el método

$$\begin{cases} x_0 \text{ dado} \\ n\geq 1 \Rightarrow x_n=Bx_{n-1}+c \end{cases}$$

que converge a la solución del sistema $Ax=b$ $\forall x_0\in\mathbb{R}^N$, entonces $A=M-N$ con M regular, $M,N\in\mathbb{R}^{N\times N}$, y $B=M^{-1}N$, $c=M^{-1}b$.

La demostración no entra en el examen, lo dijo.

Por comodidad, los métodos iterativos los pondremos de la forma $\begin{cases} x_0 \text{ dado} \\ n\geq 1 \Rightarrow Mx_n=Nx_{n-1}+b \end{cases}$, lo cual es equivalente a resolver un sistema y por comodidad tomaremos M como triangular.

Métodos iterativos:
- $\to$ Jacobi: $A=M-N$ con $M:=D$ y $N:=E+F$
- $\to$ Gauss-Seidel: $A=M-N$ con $M:=D-E$ y $N:=F$

$D\equiv$ diagonal con todos los elementos no nulos, pues en ambos casos $\det(A)=a_{11}\cdots a_{NN}\neq 0$ ya que A es regular.

$E\equiv$ triangular inferior de opuestos

$F\equiv$ triangular superior de opuestos

Sustituyendo en $\begin{cases} x_0 \text{ dado} \\ n\geq 1 \Rightarrow x_n=Bx_{n-1}+c \end{cases}$
- $\to$ Jacobi: $\begin{cases} x_0 \text{ dado} \\ n\geq 1 \Rightarrow Dx_n=(E+F)x_{n-1}+b \end{cases}$
- $\to$ Gauss Seidel: $\begin{cases} x_0 \text{ dado} \\ n\geq 1 \Rightarrow (D-E)x_n=Fx_{n-1}+b \end{cases}$

*Diferencia: en Jacobi el vector en cada iteración se calcula a partir del anterior mientras que en Gauss-Seidel, el vector en cada iteración usa las coordenadas calculadas en la iteración actual.

La velocidad y convergencia de Jacobi son independientes de los de Gauss-Seidel. (Ejemplos en diapositivas 97 y 98)

Por la última proposición vista, sabemos que dado un sistema y un método consistente con este y $\rho(B)<1$, entonces:

$$\|x_n - x\| \leq \|B\|^n \|x_0 - x\|$$

Y cuanto menor sea $\|B\|$, menos interaciones serán necesarias para llegar a la solución del sistema (cuanto menor sea $\rho(B)$).

$A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ diagonalmente estrictamente dominante si

$\forall i \in \{1,\dots,N\} \Rightarrow \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} |a_{ij}| < |a_{ii}|$ Ej: $\begin{bmatrix} 7 & -1 & 5 \\ 1 & 8 & 6 \\ 1 & 2 & 9 \end{bmatrix}$

Proposición.

$A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ diag. estr. dominante. Cualquier SEL con matriz de coeficientes A, los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel convergen a su solución $\forall x_0 \in \mathbb{R}^N$.

Observaciones

•) Intercambiar dos ecuaciones y al usar el mismo método sobre dicho sistema, es posible que uno converja a la solución y el otro no.

•) Nº operaciones por interación N^2 (para un sistema de N ecuaciones y N incognitas).