Relación de Problemas 6: Algunos modelos de distribuciones discretas

Estadística Descriptiva e Introducción a la Probabilidad

Primer curso del Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

---

1. La probabilidad de que cada enfermo de cierto hospital reaccione favorablemente después de aplicarle un calmante es 0.01. Si se aplica el calmante a 200 enfermos, determinar:

   a) La distribución de probabilidad del número de enfermos que reaccionan favorablemente, la media y la varianza.

   b) Probabilidad de que a lo sumo 2 enfermos reaccionen favorablemente.

   c) Probabilidad de que más de 3 enfermos reaccionen favorablemente.

2. Cada vez que una máquina dedicada a la fabricación de comprimidos produce uno, la probabilidad de que sea defectuoso es 0.01.

   a) Si los comprimidos se colocan en tubos de 25, ¿cuál es la probabilidad de que en un tubo todos los comprimidos sean buenos?

   b) Si los tubos se colocan en cajas de 10, ¿cuál es la probabilidad de que en una determinada caja haya exactamente 5 tubos con un comprimido defectuoso?

3. Se capturan 100 peces de un estanque que contiene 10000. Se les marca con una anilla y se devuelven al agua. Transcurridos unos días se capturan de nuevo 100 peces y se cuentan los anillados.

   a) Calcular la probabilidad de que en la segunda captura se encuentre al menos un pez anillado.

   b) Calcular el número esperado de peces anillados en la segunda captura.

4. Un comerciante de bombillas las recibe en lotes de 20 unidades. Sólo acepta un lote si, al seleccionar aleatoriamente 5 bombillas del mismo, no encuentra ninguna defectuosa.

   Si un determinado lote tiene dos bombillas defectuosas, calcular la probabilidad de que el comerciante lo acepte, y el número esperado de bombillas defectuosas entre las seleccionadas, en cada uno de los siguientes casos:

   - Las bombillas se seleccionan con reemplazamiento.
   - Las bombillas se seleccionan sin reemplazamiento.

5. Se estudian las plantas de una determinada zona donde ha atacado un virus. La probabilidad de que cada planta esté contaminada es 0.35.

   a) Definir la variable que modeliza el experimento de elegir una planta al azar y comprobar si está contaminada. Dar su ley de probabilidad.

   b) ¿Cuál es el número medio de plantas contaminadas que se pueden esperar en 5 plantas analizadas?

   c) Calcular la probabilidad de encontrar 8 plantas contaminadas en 10 exámenes.

   d) Calcular la probabilidad de encontrar entre 2 y 5 plantas contaminadas en 9 exámenes.

   e) Hallar la probabilidad de que en 6 análisis se encuentren 4 plantas no contaminadas.

6. Cada página impresa de un libro contiene 40 líneas, y cada línea contiene 75 posiciones de impresión. Se supone que la probabilidad de que en cada posición haya error es $1/6000$.

   a) ¿Cuál es la distribución del número de errores por página?

   b) Calcular la probabilidad de que una página no contenga errores y de que contenga como mínimo 5 errores.

   c) ¿Cuál es la probabilidad de que un capítulo de 20 páginas no contenga ningún error?

7. Se lanzan cuatro monedas 48 veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener exactamente 4 caras cinco veces?

8. Un pescador desea capturar un ejemplar de sardina que se encuentra siempre en una determinada zona del mar con probabilidad 0.15. Hallar la probabilidad de que tenga que pescar 10 peces de especies distintas de la deseada antes de:

   a) pescar la sardina buscada,

   b) pescar tres ejemplares de la sardina buscada.

9. Un científico necesita 5 monos afectados por cierta enfermedad para realizar un experimento. La incidencia de la enfermedad en la población de monos es siempre del 30 %. El científico examinará uno a uno los monos de un gran colectivo, hasta encontrar 5 afectados por la enfermedad.

   a) Calcular el número medio de exámenes requeridos.

   b) Calcular la probabilidad de que tenga que examinar por lo menos 20 monos.

   c) Calcular la probabilidad de que encuentre 10 monos sanos antes de encontrar los 5 afectados.

10. Para controlar la calidad de un determinado artículo que se fabrica en serie, se inspecciona diariamente el 5 % de la producción. Un día la máquina sufre una avería y, de los 1000 artículos fabricados ese día, produce k defectuosos.

    a) Dar la expresión de la probabilidad de no obtener más de un artículo defectuoso en la inspección de ese día.

    b) Si $k = 90$, calcular la probabilidad de obtener menos de 6 artículos defectuosos en la inspección.

11. En una central telefónica de una ciudad se recibe un promedio de 480 llamadas por hora. Se sabe que el número de llamadas se distribuye según una ley de Poisson. Si la central sólo tiene capacidad para atender a lo sumo doce llamadas por minuto, ¿cuál es la probabilidad de que en un minuto determinado no sea posible dar línea a todos los clientes?

12. Cierta compañía de seguros ha determinado que una de cada 5000 personas fallecen al año por accidente laboral. La compañía tiene hechos 50000 seguros de vida en toda la nación y, en caso de accidente, debe abonar 3000 euros por póliza. ¿Cuál es la probabilidad de que la compañía tenga que pagar en un año por lo menos 36000 euros en concepto de primas?

13. Suponiendo que, en cada parto, la probabilidad de que nazca una niña es 0.51, y prescindiendo de nacimientos múltiples, calcular:

    a) Probabilidad de que un matrimonio tenga tres hijos varones antes de tener una niña.

    b) Probabilidad de que tenga tres hijos varones antes de tener la segunda niña.

    c) ¿Cuál es el número medio de hijos que debe tener un matrimonio para conseguir dos niñas?

14. El 60 % de los clientes de un almacén paga con dinero, el 30 % con tarjeta y el 10 % con cheque.

    a) Calcular la probabilidad de que, de diez clientes, cuatro paguen con dinero.

    b) Calcular la probabilidad de que el décimo cliente sea el cuarto en pagar con dinero.

15. En un departamento de control de calidad se inspeccionan las unidades terminadas que provienen de una línea de ensamble. La probabilidad de que cada unidad sea defectuosa es 0.05.

    a) ¿Cuál es la probabilidad de que la vigésima unidad inspeccionada sea la segunda que se encuentra defectuosa?

    b) ¿Cuántas unidades deben inspeccionarse por término medio hasta encontrar cuatro defectuosas?

    c) Calcular la desviación típica del número de unidades inspeccionadas hasta encontrar cuatro defectuosas.

16. Se supone que la demanda de un cierto fármaco en una farmacia sigue una ley de Poisson con una demanda diaria media de 8 unidades. ¿Qué stock debe tener el farmacéutico al comienzo del día para tener, como mínimo, probabilidad 0.99 de satisfacer la demanda durante el día?

17. Los números 1,2,3,...,10 se escriben en diez tarjetas y se colocan en una urna. Las tarjetas se extraen una a una y sin devolución. Calcular las probabilidades de los siguientes sucesos:

    a) Hay exactamente tres números pares en cinco extracciones.

    b) Se necesitan cinco extracciones para obtener tres números pares.

    c) Obtener el número 7 en la cuarta extracción.

18. Supongamos que el número de televisores vendidos en un comercio durante un mes se distribuye según una Poisson de parámetro 10, y que el beneficio neto por unidad es 30 euros.

    a) ¿Cuál es la probabilidad de que el beneficio neto obtenido por un comerciante durante un mes sea al menos de 360 euros?

    b) ¿Cuántos televisores debe tener el comerciante a principio de mes para tener al menos probabilidad 0.95 de satisfacer toda la demanda?

19. El número de accidentes que se producen semanalmente en una fábrica sigue una ley de Poisson, y se sabe que la probabilidad de que ocurran cinco accidentes en una semana es 16/15 de la probabilidad de que ocurran dos. Calcular:

    a) Media del número de accidentes por semana.

    b) Número máximo de accidentes semanales que pueden ocurrir con probabilidad no menor que 0.9.

Relación 6 EDIP

1. 200 enfermos
   $P(\text{Éxito}) = 0.01$

   a) $X \equiv$ nº enfermos que reaccionan favorablemente a un calmante.

   $P(\text{Éxito}) = 0.01$ Distribución binomial: $X \rightsquigarrow B(200, 0.01)$

   Media $= E[X] = n \cdot p = 200 \cdot 0.01 = 2$ enfermos
   Varianza $= Var[X] = np(1-p) = 200 \cdot 0.01(1-0.01) = 1.98$

   b) Prob. como máximo 2 reaccionan favorablemente.

   $$P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) =$$
   $$= \binom{200}{0} 0.01^0 (0.99)^{200} + \binom{200}{1} 0.01 \cdot 0.99^{199} + \binom{200}{2} 0.01^2 \cdot 0.99^{198} =$$
   $$= 0.13398 + 0.27067 + 0.27203 = 0.676683$$

   c) Prob. más de 3 enfermos reaccionen favorablemente.

   $$\cancel{P(X>3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0.676683 = 0.323317}$$
   $$P(X>3) = 1 - P(X \leq 2) - P(X=3) = 1 - 0.676683 - \binom{200}{3} 0.01^3 0.99^{197} =$$
   $$= 1 - 0.676683 - 0.181355 = 0.14196$$

2. Fabricación de comprimidos. Probabilidad defectuoso 0.01

   a) Tubos de 25. ¿Prob. de que en un tubo todos los comprimidos sean buenos?

   $n = 25$
   $X \equiv$ nº comprimidos defectuosos $\quad p = 0.01$
   Éxito $\equiv$ comprimido no defectuoso

   $$P(X=0) = \binom{25}{0} 0.01^0 \, 0.99^{25} = 0.77782$$

   b) Tubos en cajas de 10. ¿Prob. en una caja haya exact. 5 tubos con un comprimido defectuoso?

   $$P(X=1) = \binom{25}{1} 0.01 \cdot 0.99^{24} = 0.1964195 = p$$

   $Y \equiv$ nº tubos de 25 con 1 comprimido defectuoso que se organizan en 10 tubos por caja

   $Y \rightsquigarrow B(10, 0.19642)$

   $$P(Y=5) = \binom{10}{5} 0.19642^5 \cdot (1-0.19642)^5 = 0.024687$$

3. 100 peces se cogen de 10000. Se marcan con una anilla y son devueltos al agua. Tras varios días, se toman 100 peces y se cuentan los anillados.

a) Prob. segunda captura se encuentre al menos un pez anillado.

Dos categorías $\rightarrow N_1 \equiv$ peces anillados
$\rightarrow N-N_1 \equiv$ peces no anillados

$n=100 \quad N=10000 \quad N_1=100$

$X \equiv$ nº peces anillados

$X \sim H(10000, 100, 100)$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \frac{\binom{100}{0}\binom{9900}{100}}{\binom{10000}{100}} = \frac{\frac{9900!}{100!(9800)!}}{\frac{10000!}{100!(9900)!}} =$$

$$= \frac{\frac{9900!}{9800!}}{\frac{10000!}{9900!}} = \frac{9900!\,9900!}{9800!\,10000!} = 1 - 0.3641945 = 0.6358055$$

b) Nº esperado de peces anillados en la 2ª captura.

$$E[X] = n \cdot \frac{N_1}{N} = 100 \cdot \frac{100}{10000} = 1 \text{ pez anillado}$$

4. Bombillas en lotes de 20 unidades. Se acepta un lote si al seleccionar 5 bombillas aleatoriamente no hay ninguna defectuosa. Un determinado lote tiene 2 bombillas defectuosas ¿Prob. de que sea aceptado?
¿Esperanza bombillas defectuosas en... $\rightarrow$ Con reemplazamiento ?
$\rightarrow$ Sin " " ?

Sin reemplazamiento

20 unidades de las cuales 2 defectuosas $\rightarrow$ 18 buenas
$\rightarrow$ 2 malas

$n=5 \quad N_1=2 \quad N=20$

$X \equiv$ nº bombillas defectuosas en la muestra tomada

$X \sim H(20, 2, 5)$

$$P(\text{Aceptar}) = P(X=0) = \frac{\binom{2}{0}\binom{18}{5}}{\binom{20}{5}} = \frac{8568}{15504} = \frac{21}{38} = 0.55263$$

$$E[X] = n \cdot \frac{N_1}{N} = 5 \cdot \frac{2}{20} = 0.5 \text{ bombillas}$$

Con reemplazamiento

$p = \frac{2}{20} = 0.1 \quad X \equiv$ nº bombillas defectuosas en la muestra

$X \sim B(5, 0.1)$

$$P(X=0) = \binom{5}{0} 0.1^0 \cdot 0.9^5 = 0.59049 = P(\text{Aceptar})$$

$$E[X] = n \cdot p = 5 \cdot 0.1 = 0.5 \text{ bombillas}$$

5. Prob. planta contaminada 0.35

a) $E \equiv$ esté contaminada $\Omega = \{E, \bar{E}\}$

Variable aleatoria con distribución de Bernoulli:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si ocurre } E \\ 0 & \text{si no ocurre } E \end{cases} \quad \left.\begin{array}{l} P(X=0) = 1-p \\ P(X=1) = p \end{array}\right\} \boxed{P(X=x) = p^x (1-p)^{1-x}}$$

$X \equiv$ nº plantas cont. $\quad X \sim B(1, 0.35)$

$E[X] = 0.35$ plantas cont. $E[X^2] = 0.35 \quad Var[X] = p(1-p) = 0.2275$

b) ¿Nº medio plantas contaminadas si se analizan 5?

$X \equiv$ nº plantas cont. $P(\text{Éxito}) = 0.35 = p$

$X \sim B(\underset{n}{5}, 0.35) \quad E[X] = n \cdot p = 5 \cdot 0.35 = 1.75$ plantas contaminadas se espera obtener

c) 8 plantas contaminadas en 10 exámenes (Prob.)

$X \sim B(10, 0.35)$

$P(X=8) = \binom{10}{8} 0.35^8 \, 0.65^2 = 0.00428$

d) Prob. encontrar entre 2 y 5 plantas en 9 exámenes.

$X \sim B(9; 0.35)$

$P(2 \le X \le 5) = P(X \le 5) - P(X \le 1) =$

$= \binom{9}{2} 0.35^2 \, 0.65^7 + \binom{9}{3} 0.35^3 \, 0.65^6 + \binom{9}{4} 0.35^4 \, 0.65^5 + \binom{9}{5} 0.35^5 \, 0.65^4 =$

$= 0.21619 + 0.27162 + 0.21939 + 0.11813 = 0.82533$

e) Prob. encontrar 4 plantas no contaminadas en 6 análisis.

$P(4 \text{ plantas no cont.}) = P(2 \text{ plantas cont.}) = P(X=2) = \binom{6}{2} 0.35^2 \cdot 0.65^4 =$

$= 0.32801$

$X \sim B(6, 0.35)$

6. Páginas de 40 líneas

Líneas de 75 posiciones de impresión

$P(\text{Error en una posición de impresión}) = \frac{1}{6000}$

¿Distribución del nº errores por página?

a) Primero hallamos la probabilidad de error en una línea:

$X \equiv$ nº errores en una ~~línea~~ página $\quad p = 1/6000 \quad n = 40 \cdot 75 = 3000$

$X \sim B(3000, 1/6000)$

b) Prob. 0 errores y prob. como mínimo 5 errores

$P(X=0) = \binom{3000}{0} \left(\frac{5999}{6000}\right)^{3000} = 0.6065$

$P(X \ge 5) = 1 - P(X \le 4) = 1 - 0.6065 - \binom{3000}{1} \frac{1}{6000} \cdot \left(\frac{5999}{6000}\right)^{2999} - \binom{3000}{2} \left(\frac{1}{6000}\right)^2 \left(\frac{5999}{6000}\right)^{2998}$

$- \binom{3000}{3} \left(\frac{1}{6000}\right)^3 \left(\frac{5999}{6000}\right)^{2997} - \binom{3000}{4} \left(\frac{1}{6000}\right)^4 \left(\frac{5999}{6000}\right)^{2996} =$

$1-0.6065-0.303303-0.07581-0.012629-0.00158=$

$=0.000178$

c) ¿Prob. capítulo 20 páginas no contenga ningún error?

$X \sim \mathcal{P}(3000, 1/6000)$

$P(\text{Página sin error}) = P(X=0) = \binom{3000}{0}\left(\frac{1}{6000}\right)^0\left(\frac{5999}{6000}\right)^{3000} = 0.6065$

$Y \equiv$ nº páginas con error entre 20 $\quad P(\text{Página con error}) = 1-0.6065 = 0.3935$

~~$Y \sim B(20, 0.6065)$~~ $Y \sim B(20, 0.3935)$

$P(Y=0) = \binom{20}{0} 0.3935^0 \cdot 0.6065^{20} = 0.000045354$

7. 4 monedas 48 veces. ¿Prob. 4 caras 5 veces?

$X \sim$ nº caras en 4 monedas $\quad p(\text{Cara}) = 0.5$

$X \sim B(4, 0.5)$

$P(X=4) = \binom{4}{4} 0.5^4 \cdot 0.5^0 = 0.0625$

$Y \sim$ nº veces que han salido 4 caras en 48 lanzamientos

$Y \sim B(48, 0.0625)$

$P(Y=5) = \binom{48}{5} 0.0625^5 \cdot 0.9375^{43} = 0.1018$

8. $p=0.15$

Se desea capturar un ejemplar de sardina concreto
Hallar prob. de que tenga que pescar 10 peces de otras especies antes de:

a) Pescar la sardina buscada

b) Pescar 3 ejemplares de la sardina buscada.

a) $X \equiv$ nº fracasos (pescar otros peces) antes de que aparezca el primer éxito (pescar la sardina)

$X \sim BN(1, 0.15)$

$P[X=10] = \binom{10}{10}(1-0.15)^{10} 0.15 = 0.0295312$

b) $X \equiv$ nº fracasos antes de que aparezca el tercer éxito $\quad X \sim BN(3, 0.15)$

$P[X=10] = \binom{12}{10}(1-0.15)^{10} 0.15^3 = 0.04385377$

9. $p=0.3$ Se necesitan 5 monos afectados

Se examinan monos uno a uno de un colectivo hasta encontrar 5 afectados por la enfermedad

a) Número medio de exámenes requeridos

$X \equiv$ nº fracasos (monos no afectados) hasta encontrar 5 afectados

$X \sim BN(5, 0.3)$

* Serán necesarios los exámenes fallidos + 5 exámenes con éxito, por lo que hay que calcular $E[X+5]$

$$E[X+5] = E[X] + E[5] = \frac{r(1-p)}{p} + 5 = 16.\widehat{6}$$

b) Prob. examinar al menos 20 monos

Que haya que examinar a 20 monos quiere decir que como mínimo hay 15 sanos entre esos 20, es decir, $P(X \geq 15)$. Definimos una nueva variable aleatoria: $Y \equiv$ nº monos afectados de los 19 primeros con prob. enfermo constante $p=0.3$. Es evidente que entre los 19 primeros habrá como mucho 4 monos afectados, por lo que $P(X \geq 15) =$

$= P(Y \leq 4)$: $Y \sim B(19, 0.3)$

$$P(Y \leq 4) = P(Y=0) + \dots + P(Y=4) = \binom{19}{0} 0.7^0 \cdot 0.3^{19} + \binom{19}{1} 0.7 \cdot 0.3^{18} + \binom{19}{2} 0.7^2 \, 0.3^{17} + \binom{19}{3} 0.7^3 \cdot 0.3^{16} + \binom{19}{4} 0.7^4 \, 0.3^{15} =$$

$$= 1.16226 \cdot 10^{-10} + 5.15 \cdot 10^{-9} + 1.082 \cdot 10^{-7} + 1.43 \cdot 10^{-6} + 1.335 \cdot 10^{-5} =$$

$$= 0.000014897$$

?

$$P(Y \leq 4) = P(Y=0) + \dots + P(Y=4) = \binom{19}{0} 0.3^0 \, 0.7^{19} + \binom{19}{1} 0.3 \cdot 0.7^{18} + \binom{19}{2} 0.3^2 \cdot 0.7^{17} + \binom{19}{3} 0.3^3 \cdot 0.7^{16} + \binom{19}{4} 0.3^4 \cdot 0.7^{15} = 0.0011399 +$$

$$+ 0.009282 + 0.0358 + 0.08695 + 0.14905 = 0.282244$$

c) Prob. 10 monos sanos antes de encontrar los 5 afectados.

$$P(X=10) = \binom{14}{10} 0.7^{10} \cdot 0.3^5 = 0.06871$$

10. Se producen 1000 artículos de los cuales k son defectuosos. Se inspecciona 5% de la producción

a) Prob. no obtener más de un artículo defectuoso en la inspección. 5% de 1000 = 50 artículos se toman de la muestra

$X \equiv$ nº artículos defectuosos de la muestra

$N_1 = k$ $N = 1000$ $n = 50$ $\boxed{X \sim H(1000, k, 50)}$

$$P(X\leq 1)=P(X=0)+P(X=1)=\frac{\binom{k}{0}\binom{1000-k}{50}}{\binom{1000}{50}}+\frac{\binom{k}{1}\binom{1000-k}{49}}{\binom{1000}{50}}=$$

b) $k=90$, prob. obtener menos de 6 artículos defectuosos en la inspección $X \rightsquigarrow D(1000,90,50)$

$P(X\leq 6)=$ (Aplicamos la fórmula en Máxima) ≈ 0.7

11. 480 llamadas por hora

Nº de llamadas se distribuye según una ley de Poisson

Solo se pueden atender a lo sumo 12 llamadas por minuto

¿Prob. de que en un minuto determinado no se pueda dar línea a todos los clientes?

$\frac{480}{60}=8$ llamadas por minuto en promedio

$X\equiv$ nº llamadas recibidas en 1 minuto con frecuencia media $\lambda=8$

Que no se pueda atender a un cliente significa que hay más de 12 llamadas, por lo que debemos calcular:

$$P(X>12)=1-P(X\leq 12)=1-\sum_{i=0}^{12}e^{-8}\frac{8^i}{i!}=1-0.9362=$$

$=0.0638$

12. 1 de cada 5000 personas fallecen por accidente laboral. 50000 seguros de vida. En caso de accidente, abonar 3000 euros por póliza. ¿Prob. compañía tenga que abonar por lo menos 36000 euros en concepto de primas?

$\frac{36000}{3000}=12$ accidentes laborales por lo menos

$p(\text{Accidente})=\frac{1}{5000}$

$X\equiv$ nº accidentes laborales $\quad X\rightsquigarrow B(50000, 1/5000)$

$P(X\geq 12)=1-P(X\leq 11)\approx 1-0.69=0.31$

Usando Máxima

13. $p=0.51$ No hay nacimientos múltiples

a) Prob. 3 niños antes de tener una niña

$X\equiv$ nº fracasos (niños) hasta tener un éxito (una niña)

$X\rightsquigarrow BN(1,0.51)$

$$P(X=3)=\binom{3}{3}0.49^3\cdot 0.51=0.06000099$$

b) Prob. 3 hijos antes de tener 2 niñas

$X \equiv$ nº hijos hasta tener la 2ª hija $X \rightsquigarrow BN(2, 0.51)$

$P(X=3) = \binom{4}{3} 0.49^3 \cdot 0.51^2 = 0.122402$

c) ¿Nº medio de hijos que debe tener un matrimonio para conseguir 2 niñas?

Se nos está pidiendo la esperanza de la distribución del apartado anterior:

$E[X] = \frac{r(1-p)}{p} = \frac{2(1-0.51)}{0.51} = 1.92157$ hijos de media para conseguir 2 niñas

14. 60% clientes paga con dinero, 30% tarjeta y 10% cheque

a) Prob. de que entre 10 clientes, 4 paguen con dinero.

$p = 0.6$ $\quad X \equiv$ nº clientes que pagan con dinero entre un total de 10

$X \rightsquigarrow B(10, 0.6)$

$P(X=4) = \binom{10}{4} 0.6^4 \cdot 0.4^6 = 0.11148$

b) Prob. de que el 10º cliente sea el 4º en pagar con dinero.

$X \equiv$ nº fracasos (no pagan con dinero) hasta el 4º éxito (pagar con dinero) $\quad X \rightsquigarrow BN(4, 0.6)$

Si el 4º de 10 que paga con dinero, el número de fracasos (no pagan con dinero) será 6:
es

$P(X=6) = \binom{9}{6} 0.4^6 \cdot 0.6^4 = 0.0445907$

15. Se inspeccionan las unidades que provienen de una línea de ensamble. $p(\text{Defectuosa}) = 0.05$

a) ¿Prob. 20ª unidad sea la segunda defectuosa?

$X \equiv$ nº fracasos (uds. no defect.) hasta el 2º éxito (unidad defectuosa) $\quad X \rightsquigarrow BN(2, 0.05)$

Si la 20ª unidad es defectuosa, eso significa que debe haber 18 fracasos:

$P(X=18) = \binom{19}{18} 0.95^{18} \cdot 0.05^2 = 0.01887$

b) ¿Nº medio de unidades que se deben inspeccionar hasta encontrar 4 defectuosas?

$X =$ lo mismo que antes pero hasta el 4º éxito

$X \rightsquigarrow BN(4, 0.05) \Rightarrow$ Se nos está pidiendo la esperanza de esta distribución

$E[X] = \frac{r(1-p)}{p} = \frac{4(1-0.05)}{0.05} = 76$ uds. se esperan inspeccionar

c) Desv. típica de la distribución del anterior apartado.

$$Var[X] = \frac{r(1-p)}{p^2} = \frac{4(1-0.05)}{0.05^2} = 1520 \text{ unidades defectuosas}^2$$

$$\text{Desv. típica} = \sqrt{Var[X]} = 38.987 \text{ unidades defectuosas}$$

16. Demanda diaria media de un fármaco de 8 unidades (Sigue una ley de Poisson) ¿Stock que se debería tener para satisfacer la demanda del día con una probabilidad de 0.99?

$\lambda = 8$ $X \equiv$ ~~nº demandas~~ stock del fármaco tico durante un día con ~~frecuencia~~ demanda media $\lambda = 8$

$P(X \geq k) = 0.99 \Rightarrow \cancel{\sum_{i=0}^{k} e^{-8} \cdot \frac{8^k}{k!}}$

$$P(X \geq k) = 1 - \underbrace{P(X < k)}_{\sum_{i=0}^{k} e^{-8} \cdot \frac{8^k}{k!}} = 0.99 \Rightarrow \underbrace{P(X<k) < 0.01}_{}$$

Mirando la tabla, vemos el k que cumple esto es k = 15 (se coge este valor ya que al menos se deberá tener 8 en stock que es la media)

17. Números del 1 al 10 colocados en una urna. Se extraen 1 a 1 sin devolución. Calcular las siguientes probabilidades:

a) Hay 3 números pares en 5 extracciones.

$X \equiv$ nº de números pares extraídos en 5 extracciones de la urna en concreto $X \sim H(10,5,5)$

$$P(X=3) = \frac{\binom{5}{3}\binom{5}{2}}{\binom{10}{5}} = 0.\overline{396825}$$

b) Se necesitan 5 extracciones para obtener 3 números pares.

_ _ _ _ P

$A \equiv$ salgan 2 pares y 2 impares

$B \equiv$ salir par en 5ª posición

$$P(\text{5 extr. para 3 pares}) = P(A \cap B) = P(B/A) \cdot P(A)$$

$$P(B/A) = 3/6 = 1/2 = 0.5$$

$X \equiv$ nº de números pares en las 4 primeras extracciones
$X \sim H(10,5,4)$

$$P(A) = P(X=2) = \frac{\binom{5}{2}\binom{5}{2}}{\binom{10}{4}} = 0.\overline{476190}$$

Prob. pedida: $P(B/A) \cdot P(A) = 0.\overline{238095}$

c) Obtener 7 en la cuarta extracción.

~~Éxito ≡ Obtener 7~~

~~$X \equiv$ nº fracasos (no obtener 7) hasta que sale 7 (éxito)~~

~~Como sale 7 en la 4ª extracción, habrá 3 fracasos:~~

~~$X \sim BN(1, 1/7)$~~

$$\_\ \_\ \_\ 7$$

A ≡ no salir 7 hasta la 4ª extracción

B ≡ salir 7 en la 4ª extracción

$$P(A\cap B) = \underbrace{P(B/A)}_{1/7} \cdot \underbrace{P(A)}_{\frac{\binom{9}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{7}{10}} = 0.1$$

18. Nº televisores vendidos en un mes sigue una ley de Poisson de parámetro $\lambda = 10$ y el beneficio por unidad es de 30 euros.

a) ¿Prob. el beneficio sea al menos 360€?

$\frac{360}{30} = 12$ televisores se venden al menos

$X \equiv$ nº televisores vendidos en un mes con $\lambda = 10$

$$P(X \geq 12) = 1 - P(X \leq 11) = 1 - \sum_{i=0}^{11} e^{-10} \cdot \frac{10^i}{i!} =$$

$$= 1 - 0.69677 = 0.30322$$

b) ¿Nº televisores necesarios para tener probabilidad 0.95 de satisfacer toda la demanda?

~~$X \equiv$ nº televisores en stock~~

~~$P(X \leq k) = 0.95$~~

$$P(X \leq k) = 0.95 \Longrightarrow \text{Para } k = 14,\ P(X \leq k) = 0.91654$$

$$\Longrightarrow \text{Para } \boxed{k = 15},\ P(X \leq k) = 0.9513$$

Inmediatamente mayor a 0.95, es el k que buscábamos

19. Nº accidentes en una fábrica sigue una ley de Poisson. Prob. 5 accidentes en una semana es 16/15 de la prob. de que ocurran 2. Calcular:

a) Media del nº accidentes por semana.

$\lambda \equiv$ frecuencia de accidentes por semana.

$$P(X=5) = \frac{16}{15} P(X=2) \Longleftrightarrow \underbrace{e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^5}{5!} = \frac{16}{15} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^2}{2!}}$$

$$\lambda^3 = \frac{16}{15} \cdot \frac{5!}{2!} \Longrightarrow \boxed{\lambda = 4}$$

$E[X] = \lambda = 4$ accidentes de media por semana.

6) Nº máximo de accidentes semanales que pueden ocurrir con probabilidad no menor que 0.9.

$$P(X \leq k) \geq 0.9 \Rightarrow k=6,\ P(X \leq 6) = 0.889326$$
$$\Rightarrow k=7,\ P(X \leq 7) = \underbrace{0.9489}_{}$$

Inmediatamente mayor. 7 accidentes como máximo pueden ocurrir con probabilidad ≥ 0.9.