Análisis Matemático II
17 de junio de 2021

1. Enunciar los resultados referentes a la regularidad de la medida de Lebesgue, así como la caracterización de los conjuntos medibles en términos de la topología de $\mathbb{R}^N$.

2. Enunciar y demostrar el teorema de la convergencia dominada.

3. Fijado $\alpha \in \mathbb{R}^+$ se define:

$$f_n(x) = \frac{1}{n^\alpha} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{n} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Probar que la serie $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge absoluta y uniformemente en todo subconjunto acotado de $\mathbb{R}$ y que, si $\alpha > 1$, dicha serie converge absoluta y uniformemente en $\mathbb{R}$.

4. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ la región interior al triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(1,1)$. Probar que la función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \frac{x^3}{y^2}\, e^{-x^2/y} \qquad \forall (x,y) \in \Omega$$

es integrable en Ω y calcular su integral.

5. Un leñador corta una cuña de un árbol de tronco cilíndrico de radio R, mediante dos cortes de sierra, llegando hasta el eje de dicho cilindro, sin atravesarlo, uno horizontal y otro formando con la horizontal un ángulo de $60°$. Calcular el volumen de la cuña de madera así obtenida.

EXAMEN FINAL ORDINARIO de ANÁLISIS MATEMÁTICO II
2º curso del GRADO EN MATEMÁTICAS
CURSO 2020-21, SEGUNDO SEMESTRE.

1. **(2 puntos) Enunciar** el Teorema Fundamental del Cálculo y la Regla de Barrow (ambos, en la "versión integral de Lebesgue", vista en clase)

2. **(2 puntos)** Una bola de madera de radio 9 cm es taladrada con una broca de radio 1 cm. Si la apertura ha completado un eje de la bola, ¿cuánto material de la bola ha sido eliminado por la broca?

3. **(2 puntos)** Calcular, haciendo uso y mención de algún Teorema conocido, los siguientes límites:

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{n}{nx^2+\sqrt{x}}\,dx$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_1^\infty \frac{n}{nx^2+\sqrt{x}}\,dx$

4. **(4 puntos) La función "gamma" de Euler.** Considérese $\Gamma :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ definida por:

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x}\,dx, \quad \forall t \in]0,+\infty[$$

Probar que:

a) Γ está bien definida, es decir, $|\Gamma(t)| < \infty$, $\forall t \in]0,+\infty[$.
b) $\Gamma(n+1) = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
c) Γ es derivable en $]0,+\infty[$. Dar una expresión para $\Gamma'(t)$.
d) Calcular $\lim\limits_{t\to 0} \Gamma(t)$ y $\lim\limits_{t\to +\infty} \Gamma(t)$.

$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x} e^{-x}\, dx$

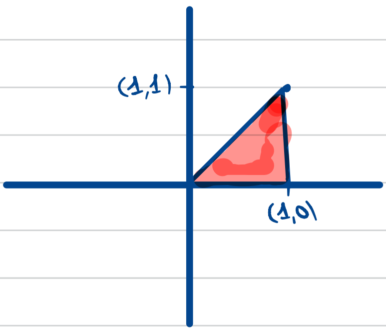
En Granada, a 15 de junio de 2021.

$\lim\limits_{n\to 0} n!$

4. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ la región interior al triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(1,1)$. Probar que la función $f:\Omega \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \frac{x^3}{y^2}\, e^{-x^2/y} \qquad \forall (x,y) \in \Omega$$

es integrable en Ω y calcular su integral.



$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1,\ y < x\}$

$A =]0,1[\times]0,x[$

Como $\operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}_0^+$, luego por Tonelli nos basta con una iterada:

$$\int_0^1 \left(\int_0^x \frac{x^3}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y}}\, dy \right) dx = \int_0^1 x^3 \left[\frac{e^{-\frac{x^2}{y}}}{x^2} \right]_0^x dx = \int_0^1 x^3 \cdot \frac{e^{-x}}{x^2}\, dx = \int_0^1 x e^{-x}\, dx =$$

$$= \left[-xe^{-x} - e^{-x} \right]_0^1 = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = 1 - \frac{2}{e}$$

$$e^{-\frac{x^2}{y}} = t \Rightarrow \frac{x^2}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y}}\, dy = dt \Rightarrow dy = \frac{y^2}{t x^2}\, dt$$

$$\int x e^{-x}\, dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}\, dx = -xe^{-x} - e^{-x}$$

2. **(2 puntos)** Una bola de madera de radio 9 cm es taladrada con una broca de radio 1 cm. Si la apertura ha completado un eje de la bola, ¿cuánto material de la bola ha sido eliminado por la broca?

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 81,\ x^2+y^2 \leq 1\}$$