Capítulo 2

Recurrencias

2.1. Introducción.

Es usual en el trabajo matemático y en las aplicaciones de sus resultados, necesitar construir un “objeto de tamaño $n+1$” a partir de otro similar de tamaño n, una vez determinado el objeto para un tamaño primero. En el presente capítulo, y en este orden de ideas, se abordará el estudio de funciones numéricas $a(n)$, $0 \leq n$ —o mejor a_n— donde a_n depende de algunos términos de entre $a_0, \ldots, a_{n-1}$. Este estudio se ha denominado clásicamente con el título de *Ecuaciones de Recurrencia* o *Ecuaciones de Diferencias* y supone en el fondo la versión discreta de la idea de ecuación diferencial ordinaria. No obstante, nuestro enfoque no recurre explícitamente a dicha teoría.

El estudio de las relaciones de recurrencia puede rastrearse hasta la relación de *Fibonacci*: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ y $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ $(n \geq 0)$, investigada por *Leonardo de Pisa* (1175-1250) en 1202. En su libro *Liber Abaci* se ocupó de un problema sobre el número de conejos que resultan en un año, si se comienza con una sola pareja que cría otra al final de cada mes.[1] Cada nueva pareja comienza a reproducirse de igual manera al cabo de un mes del nacimiento, y se supone que ningún conejo muere durante el año dado. Así, al final del primer mes hay dos parejas de conejos, tres a los dos meses, cinco a los tres meses y así sucesivamente.

Esta misma sucesión aparece en los trabajos del matemático alemán *Johannes Kepler* (1571-1630), quién la utilizó en sus estudios sobre cómo pueden ordenarse las hojas de una planta o flor alrededor de su tallo. En 1844, el matemático francés *Gabriel Lamé* (1795-1870) utilizó la sucesión en su análisis de la eficiencia del *Algoritmo de Euclides*. Más tarde, *François Lucas* (1842-1891) dedujo varias propiedades de esta sucesión y fue el primero en llamarla *Sucesión de Fibonacci.*

Una *definición recursiva* de una sucesión especifica requiere uno o varios términos iniciales y una regla para calcular el resto en función de un número de términos anteriores. Esta forma de definir una sucesión resulta útil para resolver problemas de conteo. La regla que define unos términos en función de los que preceden se llama *relación de recurrencia.*

Más concretamente, una relación de recurrencia para la sucesión $\{u_n\}$ es una relación que determina el término u_n en función de los términos anteriores, es decir, $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$, para todos los números naturales n tales que $n \geq n_0$ siendo n_0 un número natural. Una sucesión es una *solución* de una relación

[1] Para este enfoque sería más coherente plantear la sucesión como $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ y $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ $(n \geq 0)$ lo que de hecho no hace sino reportar una sucesión truncada.

de recurrencia si sus términos satisfacen la relación para todo natural n involucrado en el problema inicial.

Supongamos que nos enfrentamos al siguiente problema: un banco incrementa el capital depositado en un $6\,\%$ anual y compone mensualmente el interés. Si un depositario deposita 1000 euros en determinada fecha, ¿a cuánto ascenderá su depósito un año después?

Consideremos la situación abstracta que es modelada en el ejemplo 2.1.1 que sigue.

Ejemplo 2.1.1. Supongamos que a y c son constantes conocidas y consideremos las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} u_0 = c \\ u_{n+1} - au_n = 0, \quad \text{para todo } n \geq 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

La sucesión $\{x_n\}$ sugerida por:

$$\begin{aligned} x_0 &= c \\ x_1 &= ax_0 = ac \\ x_2 &= ax_1 = a(ac) = a^2c \\ x_3 &= ax_2 = a(a^2c) = a^3c \\ &\vdots \qquad \vdots \end{aligned}$$

es una solución a la relación de recurrencia 2.1. Es fácil conjeturar que la solución debe ser $\{x_n\}$, donde para todo natural n se cumple $x_n = c \cdot a^n$. Desmostremos por inducción que esto es así. En efecto, (paso base) para $n = 0$, $x_0 = ca^0 = c \cdot 1 = c$. Supongamos el resultado cierto para $k \geq 0$ y demostremos que también lo es para $k + 1$. En efecto,

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= ax_k && \text{por ser } \{x_n\} \text{ sol. de } (2,1) \\ &= a(ca^k) && \text{por la hip. de inducción} \\ &= ca^{k+1} && \text{agrupando factores.} \end{aligned}$$

Observación 2.1.1. Obsérvese que trivialmente la constante a puede ser traída a colación por ser la única raíz de $p(x) = x - a$, es decir, por ser la única solución de $x - a = 0$. En cuanto a c, es una constante arbitrariamente fijada o que viene dada por las condiciones de un problema concreto.

Ahora podemos abordar el problema introductorio en los siguientes términos.

Ejemplo 2.1.2. Un banco incrementa el capital depositado en un $6\,\%$ anual y compone mensualmente el interés. Si un depositario deposita 1000 euros en determinada fecha, ¿a cuánto ascenderá su depósito un año después?

Solución. La tasa de ingreso mensual será $6/12 = 0{,}5$, es decir, $0{,}5\,\%$. Entonces, el tanto por uno será 0,005. Para $0 \leq n \leq 11$, representaremos por u_n el valor del depósito del depositario al cabo de n meses. Entonces, $u_{n+1} = u_n + 0{,}005u_n$ con lo que el problema que se plantea es:

$$\begin{cases} u_0 = 1000 \\ u_{n+1} = 1{,}005u_n, \quad \text{para todo } 0 \leq n \end{cases} \tag{2.2}$$

Según lo dicho en el ejemplo 2.1.1, la solución al problema (2.2) es $x_n = 1000 \cdot 1{,}005^n$ medido en euros. Al cabo de un año, el capital del depositario será $x_{11} = 1000 \cdot 1{,}005^{11} = 1056{,}3958$ euros y, según se entienda, $x_{12} = 1000 \cdot 1{,}005^{12} = 1061{,}6778$ euros. □

Ejemplo 2.1.3. Resolver la relación $u_n = u_{n-1} + 3n^2$, para todo $n \geq 1$. Particularizar la solución al caso $u_0 = 7$.

Solución. Sea $f(i) = 3i^2$ tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
u_1 &= u_0 + f(1) \\
u_2 &= u_1 + f(2) = u_0 + f(1) + f(2) \\
u_3 &= u_2 + f(3) = u_0 + f(1) + f(2) + f(3) \\
&\vdots \\
u_n &= u_{n-1} + f(n) = u_0 + \sum_{i=1}^{n} f(i)
\end{aligned}$$

En este caso tenemos:

$$\begin{aligned}
u_n &= u_0 + \sum_{i=1}^{n} f(i) \\
&= u_0 + 3\sum_{i=1}^{n} i^2 \\
&= u_0 + 3\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \\
&= u_0 + \frac{1}{2}(2n^3 + 3n^2 + n)
\end{aligned}$$

En el caso $u_0 = 7$, tenemos:

$$u_n = 7 + \frac{1}{2}(2n^3 + 3n^2 + n)$$

□

2.2. Teoría de la Recurrencia Lineal Homogénea

Definición 2.2.1. Sea k un número natural. Una relación de *recurrencia lineal homogénea* es cualquier igualdad de la forma:

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \cdots + a_k u_{n-k}, \text{ para todo } n \geq k \tag{2.3}$$

donde $a_1, \ldots, a_k$ son constantes. Si $a_k \neq 0$, el número k es denominado el *orden* de la relación de recurrencia 2.3. El polinomio:

$$p(x) = x^k - a_1 x^{k-1} - a_2 x^{k-2} - \cdots - a_k \tag{2.4}$$

es denominado *polinomio característico* de la relación de recurrencia 2.3. La ecuación $p(x) = 0$, es decir,

$$x^k - a_1 x^{k-1} - a_2 x^{k-2} - \cdots - a_k = 0 \tag{2.5}$$

es denominada *ecuación característica* de la relación de recurrencia 2.3. Una sucesión $\{x_n\}$ satisface la relación de recurrencia 2.3 sii, por definición, para todo $n \geq k$ se cumple $x_n = \sum_{i=1}^{k} a_i x_{n-i}$. Solucionar la relación de recurrencia 2.3 es encontrar una sucesión que la satisfaga y entonces la misma se denomina *solución* de la relación de recurrencia lineal homogénea.

Ejemplo 2.2.1.

- Para el ejemplo de la relación de recurrencia:

$$u_n = 1{,}005u_{n-1}$$

  se tiene:

  - orden: $k = 1$
  - coeficientes: $a_1 = 1{,}005$
  - polinomio característico: $p(x) = x - 1{,}005$
  - ecuación característica: $x - 1{,}005 = 0$
  - solución: $\{c \cdot 1{,}005^n\}$

  Obsérvese que 1,005 es la única solución de la ecuación característica.

- Para el ejemplo:

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$$

  se tiene:

  - orden: $k = 2$
  - coeficientes: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$
  - polinomio característico: $p(x) = x^2 - x - 1$
  - ecuación característica: $x^2 - x - 1 = 0$
  - solución: $\{f_n\}$ donde

$$f_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

    para todo $n \geq 0$.

  Obsérvese que $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ son las dos soluciones de la ecuación característica.

Teorema 2.2.1. *Sea la relación de recurrencia 2.3, supongamos que:*

- *su ecuación característica (ecuación 2.5) tiene t raíces distintas: $r_1, \ldots, r_t$,*
- *para todo $1 \leq i \leq t$, la mulptiplicidad de r_i es m_i y $1 \leq m_i$,*
- $m_1 + \ldots + m_t = k$
- *y $\{x_n\}$ una sucesión.*

Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1. *$\{x_n\}$ es una solución de la relación de recurrencia 2.3.*
2. *Para todo $1 \leq i \leq t$ y $0 \leq j \leq m_i - 1$, existen constantes α_{ij}, tales que para todo natural n:*

$$\begin{aligned} x_n = &(\alpha_{10} + \alpha_{11}n + \cdots + \alpha_{1(m_1-1)}n^{m_1-1})r_1^n \\ &+ (\alpha_{20} + \alpha_{21}n + \cdots + \alpha_{2(m_2-1)}n^{m_2-1})r_2^n \\ &\vdots \\ &+ (\alpha_{t0} + \alpha_{t1}n + \cdots + \alpha_{t(m_t-1)}n^{m_t-1})r_t^n \end{aligned} \tag{2.6}$$

Ejemplo 2.2.2. Supongamos que las raíces de la ecuación característica de una relación de recurrencia lineal homogénea con coeficientes constantes son: 2, 2, 2, 5, 5 y 9; es decir, hay tres raíces distintas: la raíz 2 con multiplicidad 3, la raíz 5 con multiplicidad 2 y la raíz 9 con multiplicidad 1.

Solución. Según el Corolario 2.2.1 la forma general de la solución es:

$$(\alpha_{10} + \alpha_{11}n + \alpha_{12}n^2)2^n + (\alpha_{20} + \alpha_{21}n)5^n + \alpha_{30}9^n$$

□

2.3. Ejemplos de Recurrencia Lineal Homogénea

En la presente sección abordamos el estudio y resolución de ejemplos concretos de relaciones de recurrencia lineales homogéneas. El estudio será llevado a cabo como aplicación del Corolario 2.2.1

Observación 2.3.1. Supongamos estar en el ambiente del Corolario 2.2.1 y revisemos los caso elementales:

- En el caso $k = 1$, el polinomio característico de la relación de recurrencia no tendrá más que una raíz, digamos r. Así, la expresión 2.6 se concreta en:

  $$x_n = \alpha r^n$$

  para todo natural n.

- En el caso $k = 2$, si el polinomio característico tiene coeficientes reales, respecto a sus raíces caben las siguientes posibilidades:

  - r_1 y r_2 son ambas reales y distintas; la expresión 2.6 se concreta en:

    $$x_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$$

    para todo natural n.

  - Si $r_1 = r_2$ y llamamos r a r_1, la expresión 2.6 se concreta en:

    $$x_n = (c_1 + c_2 n) r^n$$

    para todo natural n.

  - r_1 y r_2 complejas (y conjugadas); si expresadas en forma polar r_1 y r_2 son:

    $$\begin{aligned} r_1 &= r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ r_2 &= r(\cos\theta - i\sin\theta) \end{aligned}$$

    entonces, según expresión 2.6:

    $$\begin{aligned} x_n &= c_1 r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) + c_2 r^n(\cos(n\theta) - i\sin(n\theta)) \\ &= r^n(c_1(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) + c_2(\cos(n\theta) - i\sin(n\theta))) \\ &= r^n((c_1 + c_2)\cos(n\theta) + (c_1 - c_2)i\sin(n\theta)) \\ &= r^n(k_1\cos(n\theta) + k_2\sin(n\theta)) \end{aligned}$$

    donde $k_1 = c_1 + c_2$ y $k_2 = (c_1 - c_2)i$.

    Son reales

- En el caso en que la ecuación característica (ecuación 2.5) tenga k raíces distintas: $r_1, \ldots, r_k$, la expresión 2.6 se concreta en:
$$x_n = \alpha_1 r_1^n + \cdots + \alpha_k r_k^n$$
para todo natural n.

Ejemplo 2.3.1. Resuelva la relación de recurrencia $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $n \geq 0$. Particularice el resultado suponiendo que $F_0 = 0$ y $F_1 = 1$ (esta relación es conocida como *relación de Fibonacci* y su solución *sucesión de Fibonacci*).

Solución. La ecuación característica para este ejemplo es $r^2 - r - 1 = 0$ y sus raíces son $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Como se tienen dos raíces reales distintas entonces:

$$F_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \tag{2.7}$$

es la solución general, donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias. Si conocemos los valores de los dos primeros términos de la sucesión solución será posible determinar los valores de c_1 y c_2:

$$\begin{aligned} 0 &= F_0 = c_1 + c_2 \\ 1 &= F_1 = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \end{aligned}$$

Por tanto, $-c_1 = c_2$ y entonces:

$$\begin{aligned} 2 &= c_1(1+\sqrt{5}) - c_1(1-\sqrt{5}) \\ &= 2\sqrt{5}c_1 \end{aligned}$$

de donde

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

y en definitiva se tiene que la solución general será:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right)$$

□

Observación 2.3.2. En la solución del Ejemplo 2.3.1 quedó de manifiesto que la solución general de la relación $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $n \geq 0$, es de la forma que refleja (2.7). Pero, ¿qué valores iniciales hay que tomar para que $c_1 = c_2 = 1$?. Es fácil encontrar que éstos son $F_0 = 2$ y $F_1 = 1$. La solución particular que surge de estos valores iniciales es conocida como *números de Lucas*.

Ejemplo 2.3.2. Resuelva la relación de recurrencia dada por $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$, para todo $n \geq 0$. Particularice el resultado suponiendo que $n \geq 0$, $u_0 = 1$, $u_1 = 3$.

Solución. La relación de recurrencia dada es:

$$u_{n+2} - 4u_{n+1} + 4u_n = 0$$

para la que $k = n + 2 - n = 2$ y la ecuación característica es:

$$0 = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$$

por lo que la solución general, según el Corolario 2.2.1, es de la forma:

$$(c_1 + c_2 n)2^n$$

Para particularizar la solución al caso de las condiciones iniciales dadas consideraremos lo siguiente:

$$\begin{aligned} 1 &= u_0 = (c_1 + 0c_2)2^0 = c_1 1 = c_1 \\ 3 &= u_1 = (c_1 + 1c_2)2^1 = (1 + c_2)2 & \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

lo que nos lleva a:

$$\begin{aligned} x_n &= (1 + \frac{1}{2}n)2^n \\ &= 2^n + \frac{1}{2}n2^n \\ &= 2^n + n2^{n-1} \end{aligned}$$

por lo que la solución particular es para todo natural n:[2]

$$x_n = 2^n + n2^{n-1}$$

que es más conveniente expresar como:

$$x_n = 2^{n-1}(2 + n)$$

□

Observación 2.3.3. En el que caso $k = 2$, suponiendo que el polinomio característico de la relación de recurrencia —que tendrá coeficientes reales— es irreducible, entonces no tendrá raíces reales y sí las dos complejas y distintas (si tiene una compleja, la otra debe ser la conjugada). En este caso aún es posible la resolución de la recurrencia, basta considerar que el cuerpo en el que se formula es el de los números complejos.

Antes de abordar el siguiente ejemplo debemos recordar algo sobre los número complejos:

1. Dado un número complejo $z = x + iy$, definimos $|z|$ por la siguiente igualdad:
$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$
2. Dado un número complejo $z = x + iy$, definimos $\mathrm{Re}(z)$ e $\mathrm{Im}(z)$ con las siguientes igualdades:
$$\mathrm{Re}(z) = x \qquad \mathrm{Im}(z) = y$$
3. Para todo número complejo z no nulo existen un número real r_z y un ángulo θ_z, expresado en radianes, tal que:
$$z = r_z(\cos\theta_z + i\sin\theta_z)$$
4. Dado un número complejo z no nulo,
$$\begin{aligned} r_z &= |z| \\ \theta_z &= \begin{cases} 2\arctan\frac{\mathrm{Im}(z)/|z|}{1+(\mathrm{Re}(z)/|z|)} & \text{, si } z \notin \mathbb{R}^- \\ \pi & \text{, si } z \in \mathbb{R}^- \end{cases} \end{aligned}$$

[2] Observar que para $n = 0$ aún tiene sentido $2^0 + 0 \cdot 2^{-1}$ y es $1 + 0 \cdot \frac{1}{2} = 1$.

5. Si z es un número complejo no nulo y $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ entonces:

$$\begin{aligned}\bar{z} &= \overline{r(\cos\theta + i\sin\theta)}\\ &= \bar{r}(\overline{\cos\theta + i\sin\theta})\\ &= r(\cos\theta - i\sin\theta)\end{aligned}$$

6. El *Teorema de de Moivre* que dice que si $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ y n es un número natural, entonces:

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

y recordar también la fórmula trigonométrica:

$$\operatorname{tg}(\frac{a}{2}) = \frac{\sin a}{1+\cos a}$$

Ejemplo 2.3.3. Calcule $(1 + i\sqrt{3})^{10}$

Solución. Sea $z = 1 + i\sqrt{3}$. Se tiene que $r_z = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$. Por otra parte, dado que $z \notin \mathbb{R}^-$:

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{Im}(z)/|z|}{1+\operatorname{Re}(z)/|z|} &= \frac{\sqrt{3}/2}{1+1/2}\\ &= \operatorname{tg}(\frac{\pi/3}{2})\end{aligned}$$

y así

$$2\arctan\frac{\operatorname{Im}(z)/|z|}{1+\operatorname{Re}(z)/|z|} = \pi/3$$

y por tanto $\theta_z = \pi/3$. Entonces:

$$1 + i\sqrt{3} = 2(\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3))$$

y por tanto

$$\begin{aligned}(1+i\sqrt{3})^{10} &= 2^{10}(\cos(10\pi/3) + i\sin(10\pi/3))\\ 10 &= 3\cdot 3 + 1\\ &= (2\cdot 1 + 1)3 + 1\\ &= (2+1)3+1\\ &= 2\cdot 3 + 3 + 1\\ &= 2\cdot 3 + 4\\ 10/3 &= (4/3) + 2\\ &= 2^{10}(\cos((4+2\cdot 3)\pi/3) + i\sin((4+2\cdot 3)\pi/3))\\ &= 2^{10}(\cos(4\pi/3 + 2\pi) + i\sin(4\pi/3 + 2\pi))\\ &= 2^{10}(\cos(4\pi/3) + i\sin(4\pi/3))\\ &= 2^{10}((-1/2) - i(\sqrt{3}/2))\\ &= -2^9(1 + i\sqrt{3})\end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.3.4. Encuentre la expresión polar de $z = 1 + i$

Solución. Sea $z = 1 + i$. Entonces: $|z| = \sqrt{2}$, $\mathrm{Re}(z) = 1$ e $\mathrm{Im}(z) = 1$. Se tiene lo siguiente:

$$\frac{\mathrm{Im}(z)/|z|}{1+\mathrm{Re}(z)/|z|} = \frac{1/\sqrt{2}}{1+1/\sqrt{2}}$$

luego $\pi/4 = 2\arctan\frac{\mathrm{Im}(z)/|z|}{1+\mathrm{Re}(z)/|z|}$. Por tanto:

$$1 + i = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4))$$

□

Ejemplo 2.3.5. Resuelva la relación de recurrencia dada por $u_n = 2(u_{n-1} - u_{n-2})$, para todo $n \geq 2$. Particularice el resultado suponiendo que $u_0 = 1$, $u_1 = 2$.

Solución. La recurrencia propuesta es de orden 2 y su ecuación característica es:

$$0 = x^2 - 2x + 2$$

que tiene por soluciones $1 \pm i$. Según sabemos:

$$1 + i = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4))$$

De lo detallado en la observación 2.3.1 resulta entonces que:

$$x_n = (\sqrt{2})^n(k_1\cos(n\pi/4) + k_2\sin(n\pi/4))$$

Ahora bien:

$$\begin{aligned}
1 = u_0 &= k_1\cos 0 + k_2\sin 0 = k_1 && \Rightarrow k_1 = 1\\
2 = u_1 &= \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + k_2\sin(\pi/4)) &&\\
&= 1 + k_2 && \Rightarrow k_2 = 1
\end{aligned}$$

Así pues, la solución general está dada por:

$$x_n = (\sqrt{2})^n(\cos(n\pi/4) + \sin(n\pi/4))$$

para todo número natural n. Observe que esta solución no contiene números complejos. Esto se debe a que los valores c_1 y c_2 de la observación 2.3.1 son complejos conjugados, y por tanto k_1 y k_2 son entonces reales. □

Ejemplo 2.3.6. Halle u_{12} si $u_{n+1}^2 = 5u_n^2$, $u_n \geq 0$, $n \geq 0$ y $u_0 = 2$.

Solución. No se trata de una relación de recurrencia lineal en u_n, pero se puede tratar como tal. Para ello hagamos un cambio de variable, a saber, $b_n = u_n^2$. Entonces la nueva relación es $b_{n+1} = 5b_n$, $n \geq 0$, $b_0 = 4$. La solución es entonces, $b_n = 4\cdot 5^n$ y por tanto $u_n = 2\sqrt{5}^n$, $n \geq 0$. Así $u_{12} = 31250$. □

Ejemplo 2.3.7. Resuelva la relación de recurrencia:

$$u_n = nu_{n-1}, \text{ para todo } n \geq 1.$$

y particularice el resultado suponiendo $u_0 = 1$.

Solución. Se trata de una relación (lineal homogénea), pero **no** de coeficientes constantes. La resolveremos usando la inducción. Se tiene:

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 \\ x_1 &= 1 \cdot x_0 = 1 \\ x_2 &= 2x_1 = 2 \cdot 1 \\ x_3 &= 3x_2 = 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ x_4 &= 4x_3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ \vdots & \qquad \vdots \end{aligned}$$

Es muy fácil demostrar por inducción que $x_n = n!$, o sea $\{x_n\}$ es la sucesión que cuenta el número de permutaciones de n objetos. □

2.4. Teoría de la Recurrencia Lineal No Homogénea

Definición 2.4.1. Sea k un número natural. Una relación de *recurrencia lineal no homogénea* de orden k es cualquier igualdad de la forma:

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \cdots + a_k u_{n-k} + f(n), \text{ para todo } n \geq k \tag{2.8}$$

donde $a_1, \ldots, a_k$ son constantes y $f(n)$ es una función no idénticamente nula que depende únicamente de n, que denominaremos *función de ajuste*. Su relación de recurrencia lineal homogénea asociada es:

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \cdots + a_k u_{n-k} \tag{2.9}$$

El orden, el polinomio caracterítico y la ecuación característica de la relación de recurrencia 2.8 es el de la relación de recurrencia 2.9.

Teorema 2.4.1. *Si $\{x_n^{(p)}\}$ es una solución particular de la relación de recurrencia lineal no homogénea:*

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \cdots + a_k u_{n-k} + f(n),$$

entonces toda solución es de la forma $\{x_n^{(p)} + x_n^{(h)}\}$, donde $\{x_n^{(h)}\}$ es una solución de la relación de recurrencia lineal homogénea asociada.

Demostración. Como $\{x_n^{(p)}\}$ es una solución particular de la relación de recurrencia lineal no homogénea, sabemos que

$$x_n^{(p)} = a_1 x_{n-1}^{(p)} + a_2 x_{n-2}^{(p)} + \cdots + a_k x_{n-k}^{(p)} + f(n)$$

Si $\{y_n\}$ es otra solución de la relación de recurrencia lineal no homogénea, sabemos que:

$$y_n = a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + \cdots + a_k y_{n-k} + f(n)$$

Restando la primera de esta igualdades de la segunda, obtenemos que:

$$y_n - x_n^{(p)} = a_1(y_{n-1} - x_{n-1}^{(p)}) + a_2(y_{n-2} - x_{n-2}^{(p)}) + \cdots + a_k(y_{n-k} - x_{n-k}^{(p)})$$

Por tanto, $\{y_n - x_n^{(p)}\}$ es una solución de la relación de recurrencia lineal homogénea asociada, que denotamos por $\{x_n^{(h)}\}$. Por tanto, $y_n = x_n^{(p)} + x_n^{(h)}$ para todo natural n. □

Corolario 2.4.2. *Sea la relación de recurrencia lineal no homogénea:*

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \cdots + a_k u_{n-k} + q(n)s^n, \tag{2.10}$$

donde, $a_k \neq 0$, s es una constante y $q(n)$ es un polinomio. Entre las soluciones de la recurrencia 2.10 tiene una, $\{x_n^{(p)}\}$, de la forma:

$$x_n^{(p)} = n^m p(n)s^n \tag{2.11}$$

para todo natural n, donde m es la multiplicidad de s como raíz del polinomio característico de la recurrencia 2.10 y $p(n)$ es un polinomio de grado menor o igual que el grado de $q(n)$.

Observación 2.4.1. Téngase en cuenta que:

- Podríamos dar una expresión general de los coeficientes de $p(n)$ en la solución particular de la igualdad 2.11, pero sería complicada. Para conocer el polinomio $p(n)$ en los casos prácticos, se lleva la solución 2.11 —con sus coeficientes indeterminados— a la ecuación de recurrencia y, efectuadas las operaciones, se llega a una igualdad entre polinomio del mismo grado: uno conocido y el otro desconocido. Ello produce un sistema de ecuaciones en los coeficientes indeterminados de $p(n)$ que, resuelto, permite conocerlos.

- La solución particular de la expresión 2.11 no puede adaptarse a condiciones iniciales arbitrarias; así pues, podría no ser la solución que se estuviese buscando.

- En ese caso sería imprescindible encontrar *todas* las soluciones mediante lo indicado por el Teorema 2.4.1 y luego seleccionar la específica cumpliendo las condiciones iniciales.

Teorema 2.4.3. *Sean las relaciones de recurrencia no homogénea siguientes:*

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \cdots + a_k u_{n-k} + f(n), \tag{2.12}$$
$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \cdots + a_k u_{n-k} + g(n), \tag{2.13}$$
$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \cdots + a_k u_{n-k} + f(n) + g(n), \tag{2.14}$$

Si $\{x_n\}$ es una solución de la relación 2.12 e $\{y_n\}$ es una solución de la relación 2.13, entonces $\{x_n + y_n\}$ es una solución de la relación 2.14.

Demostración. Si $\{x_n\}$ es una solución de la relación 2.12 entonces.

$$y_n = a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + \cdots + a_k y_{n-k} + f(n)$$

y si $\{u_n\}$ es una solución de la relación 2.13 entonces.

$$y_n = a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + \cdots + a_k y_{n-k} + g(n)$$

Sumando ambas igualdades se tiene:

$$x_n + y_n = a_1(x_{n-1} + y_{n-1}) + a_2(x_{n-2} + y_{n-2}) + \cdots + a_k(x_{n-k} + y_{n-k}) + f(n) + g(n) = 0$$

De donde, $\{x_n + y_n\}$ es una solución de la relación 2.14. □

2.5. Ejemplos de Recurrencia Lineal No Homogénea

Observación 2.5.1. Considere lo siguiente:

1. Cuando $f(n) = b_t n^t + b_{t-1} n^{t-1} + \cdots + b_1 n + b_0$ estamos en el caso particular $s = 1$ de $f(n) = (b_t n^t + b_{t-1} n^{t-1} + \cdots + b_1 n + b_0) s^n$.
2. Cuando $f(n) = s^n$, estamos en el caso particular $b_i = 0$, para todo $1 \le i \le t$ y $b_0 = 1$.
3. En lo sucesivo a la solución particular la representaremos por $\{x_n^{(p)}\}$.

Ejemplo 2.5.1. Considere la relación de recurrencia:

$$u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2} + f(n)$$

La ecuación característica de su relación de recurrencia homogénea asociada es:

$$0 = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

1. Si $f(n) = 2n^2$, entonces $x_n^{(p)} = c_2 n^2 + c_1 n + c_0$. $s = 1$, $q(n) = 2n^2$, $m = 0$ $n^0 \cdot p(n) \cdot 1^n = p(n)$
2. Si $f(n) = 5^n(3n^2 + 2n + 1)$, entonces $x_n^{(p)} = 5^n(c_2 n^2 + c_1 n + c_0)$. $s = 5$ $q(n) = 3n^2 + 2n + 1$ $m = 0$ $n^0 \cdot p(n) \cdot s^n = 5^n \cdot p(n)$ Grado 2
3. Si $f(n) = 5^n$, entonces $x_n^{(p)} = c5^n$ (¿por qué?). $s = 5$ $q(n) = 1$ $m = 0$ $n^0 \cdot p(n) \cdot 5^n = c \cdot 5^n$ Grado 0
4. Si $f(n) = 2^n(3n+1)$, entonces $x_n^{(p)} = 2^n n(c_1 n + c_2)$ (¿por qué?). $s = 2$ $m = 1$ $q(n) = 3n + 1$
$n \cdot p(n) \cdot 2^n = n \cdot (c_1 n + c_0) \cdot 2^n$ Grado 1

Ejemplo 2.5.2. Considere la relación de recurrencia:

$$u_n = 6u_{n-1} - 9u_{n-2} + f(n)$$

La ecuación característica de su relación de recurrencia homogénea asociada es:

$$0 = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$$

1. Si $f(n) = 3^n$, entonces $x_n^{(p)} = 3^n c n^2$. $s = 3$ $m = 2$ $q(n) = 1$ $n^2 \cdot p(n) \cdot 3^n = 3^n \cdot n^2 \cdot c$
2. Si $f(n) = 3^n(5n+1)$, entonces $x_n^{(p)} = 3^n n^2(c_1 n + c_0)$. $s = 3$ $m = 2$ $q(n) = 5n + 1$ $n^2 \cdot p(n) \cdot 3^n = 3^n \cdot n^2 \cdot (c_1 n + c_2)$
3. Si $f(n) = 2^n(5n+1)$, entonces $x_n^{(p)} = 2^n(c_1 n + c_0)$. $s = 2$ $m = 0$ $q(n) = 5n + 1$ $n^0 \cdot p(n) \cdot 2^n = 2^n \cdot (c_1 n + c_0)$

Ejemplo 2.5.3. Resuelva la relación $u_n = u_{n-1} + 3n^2$, para todo $n \ge 1$.

Solución. La ecuación característica de la recurrencia es $x - 1 = 0$, por lo que no tiene más que la solución 1 y es de multiplicidad 1. Para poder aplicar el Corolario 2.4.2 identifiquemos los valores s y t. Como $f(n) = 3n^2 = (3n^2)1^n$, entonces: $s = 1$ (que es raíz de mutiplicidad 1 de la ecuación característica) y $t = 2$, por lo que para todo natural n se tiene:

$$\begin{aligned}
x_n^{(p)} &= n^1(c_2 n^2 + c_3 n + c_4) \\
&= c_2 n^3 + c_3 n^2 + c_4 n \\
x_{n-1}^{(p)} &= c_2(n-1)^3 + c_3(n-1)^2 + c_4(n-1) \\
&= c_2(n^3 - 3n^2 + 3n - 1) + c_3(n^2 - 2n + 1) + c_4(n-1) \\
&= c_2 n^3 + (c_3 - 3c_2)n^2 + (3c_2 - 2c_3 + c_4)n + c_3 - c_2 - c_4 \\
x_n^{(p)} - x_{n-1}^{(p)} &= c_2 n^3 + c_3 n^2 + c_4 n - c_2 n^3 - (c_3 - 3c_2)n^2 - (3c_2 - 2c_3 + c_4)n - c_3 + c_2 + c_4 \\
&= 3c_2 n^2 + (2c_3 - 3c_2)n - c_3 + c_2 + c_4
\end{aligned}$$

Al ser $\{x_n^{(p)}\}$ solución de la ecuación, se debe cumplir:

$$3c_2n^2 + (2c_3 - 3c_2)n - c_3 + c_2 + c_4 = 3n^2$$

de lo que surge el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}
3c_2 &= 3 & &\Rightarrow c_2 = 1\\
2c_3 - 3c_2 &= 0 & \Rightarrow 2c_3 = 3 \quad &\Rightarrow c_3 = \frac{3}{2}\\
c_4 + c_2 - c_3 &= 0 & \Rightarrow c_4 = c_3 - c_2 = \frac{3}{2} &- 1 = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

En definitiva, para todo n:

$$\begin{aligned}
x_n^{(p)} &= n(n^2 + \frac{3}{2}n + \frac{1}{2})\\
&= n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n\\
&= \frac{1}{2}(2n^3 + 3n^2 + n)
\end{aligned}$$

Por otra parte $\{x_n^{(h)}\}$ está definida por $x_n^{(h)} = c_1 1^r = c_1$, para todo natural n. Del Teorema 2.4.1 tenemos que la solución general es $\{x_n\}$ definida por $\{x_n^{(p)} + x_n^{(h)}\}$, es decir

$$x_n = c_1 + \frac{1}{2}(2n^3 + 3n^2 + n)$$

para todo número natural n. □

Ejemplo 2.5.4. Resuelva la relación de recurrencia $u_n = 3u_{n-1} + 5 \cdot 7^n$ y particularice la solución general según el valor de contorno $u_0 = 2$.

Solución. La solución de la relación homogénea asociada es $u_n^{(h)} = c_1 \cdot 3^n$. Puesto que $f(n) = 5 \cdot 7^n$, buscamos una solución particular $u_n^{(p)}$ de la forma $c_2 \cdot 7^n$. Como $u_n^{(p)}$ debe ser una solución de la relación no homogénea dada, sustituimos $u_n^{(p)} = c_2 \cdot 7^n$ en la relación dada resultando:

$$c_2 \cdot 7^n - 3c_2 \cdot 7^{n-1} = 5 \cdot 7^n, \quad n \geq 1$$

Si dividimos entre 7^{n-1}, vemos que $7c_2 - 3c_2 = 5 \cdot 7$ por lo que $c_2 = 35/4$ y

$$a_n^{(p)} = \frac{35}{4}7^n = \frac{5}{4}7^{n+1}, \quad n \geq 0$$

La solución general es

$$x_n = c \cdot 3^n + \frac{5}{4}7^{n+1}$$

y ahora buscamos la particular de nuestro problema con la ayuda del valor de contorno. Si $2 = x_0 = c_1 + \frac{5}{4}7$, entonces $c = -\frac{27}{4}$ y

$$x_n = \frac{5}{4}7^{n+1} - \frac{1}{4}3^{n+3}, \quad n \geq 0.$$

□

Ejemplo 2.5.5. Resuelva la relación de recurrencia $u_n = 3u_{n-1} + 5 \cdot 3^n$, donde $n \geq 1$ y $u_0 = 2$

Ec. característica: $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ Raíz

$s = 3$ $q(n) = 5$ $m = 1$ $n^1 \cdot p(n) \cdot 3^n = 3^n \cdot n \cdot c$

$3^n \cdot n \cdot c - 3^n \cdot (n-1) \cdot c = 5 \cdot 3^n$

$\Rightarrow n \cdot c - n \cdot c + c = 5 \Rightarrow c = 5$

Sol. general:

$x_n = d \cdot 3^n + 5 \cdot 3^n \cdot n$

Si $u_0 = 2$: $d = 2$

$x_n = 2 \cdot 3^n + 5n \cdot 3^n =$

$= (5n+2) \cdot 3^n$

Solución. Como en ejercicios anteriores, $x_n^{(h)} = c_1 3^n$, pero en este caso $x_n^{(h)}$ y $f(n)$ no son linealmente independientes. Como resultado, buscamos una solución particular $x_n^{(p)}$ de la forma $c_2 n 3^n$ (¿Qué ocurre si sustituimos $x_n^{(p)} = c_2 3^n$ en la relación dada?). Al sustituir $x_n^{(p)} = c_2 n 3^n$ en la relación dada obtenemos

$$\begin{aligned} c_2 n 3^n - 3c_2(n-1)3^{n-1} &= 5 \cdot 3^n \\ c_2 n - c_2(n-1) &= 5 \\ c_2 &= 5 \end{aligned}$$

Por lo tanto, para todo natural n se tiene $x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)} = (c_1 + 5n)3^n$. Si $x_0 = 2$, la solución general queda particularizada en $x_n = (2 + 5n)3^n$, para todo natural n. □

Ejemplo 2.5.6. Dé el número de pasos mínimos necesarios para completar un juego de las *Torres de Hanoi* en función del número de discos n con los que cuente.

Solución. Para $n \geq 0$, sea u_n el número de movimientos necesarios para pasar los n discos del vástago 1 al vástago 3. Entonces para $n+1$ discos hacemos lo siguiente:

1. Pasamos los n discos de arriba desde el vástago 1 al vástago 2. Esto se realiza en u_n pasos.
2. Pasamos el disco más grande (el que hace de base de la torre) del vástago 1 al vástago 3. Esto se hace en un paso.
3. Por último pasamos, de nuevo, los n discos del vástago 2 sobre el disco mayor, que ahora está en la vástago 3. Esto requiere otros u_n movimientos.

Lo dicho sugiere la relación $u_{n+1} = 2u_n + 1$, donde $n \geq 0$ y $u_0 = 0$. Para $u_{n+1} - 2u_n = 1$, $x_n^{(h)} = c_1 2^n$. Como $f(n) = 1$ no es solución de $u_{n+1} - 2u_n = 0$, tomamos $x_n^{(p)} = c_2 \cdot 1^n = c_2$. De la relación anterior vemos que $c_2 = 2c_2 + 1$, por lo que $c_2 = -1$ y $x_n = c_1 2^n - 1$. De $0 = u_0 = c_1 - 1$ concluimos que $c_1 = 1$ y que $x_n = 2^n - 1$, $n \geq 0$. □

$f(n)$	$u_n^{(p)}$ de tanteo
c, constante	a, constante
cn	$c_0 n + c_1$
cn^2	$c_0 n^2 + c_1 n + c_2$
cn^t, t entero postivo	$c_t n^t + c_{t-1} n^{t-1} + \cdots + c_0$
cr^n, r constante	ar^n
$cn^t r^n$	$r^n(c_t n^t + c_{t-1} n^{t-1} + \cdots + c_0)$
$c \sin \alpha n$	$a \sin \alpha n + b \cos \alpha n$
$c \cos \alpha n$	$a \sin \alpha n + b \cos \alpha n$
$cr^n \sin \alpha n$	$r^n(a \sin \alpha n + b \cos \alpha n)$
$cr^n \cos \alpha n$	$r^n(a \sin \alpha n + b \cos \alpha n)$

Figura 2.1: Elecciones de $u_n^{(p)}$ según $f(n)$, si r no es sol. de la ecuación característica.

Ejercicio 2.5.1. Encuentre una expresión no recurrente para la sucesión definida por las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} u_0 &= 2, \\ u_1 &= 2, \\ u_n &= u_{n-2} + 2^n + (-1)^n, \text{ siempre que } n \geq 2. \end{aligned}$$

Solución. La recurrencia planteada en el enunciado es lineal no homogénea y, en este caso, $f(n) = 2^n + (-1)^n$. La ecuación característica asociada es:

$$x^2 - 1 = 0$$

que tiene como soluciones ± 1. Dado que -1 es solución de la ecuación característica, en parte según afirma el Corolario 2.4.2, tenemos que $\{x_n^{(p)}\}$, donde $x_n^{(p)} = c_3 2^n + c_4 n(-1)^n$ para todo natural n, es una solución particular de la recurrencia (-1 es raíz de la ecuación característica a la vez que parte de $f(n)$). También sabemos que $\{x_n^{(h)}\}$, donde $x_n^{(h)} = c_1(-1)^n + c_2$ para todo natural n, es una solución de la recurrencia homogénea asociada. Nuestra labor consiste ahora en encontrar los coeficientes involucrados, haciendo notar que el cálculo de los coeficientes c_3 y c_4 no requiere las condiciones iniciales (también llamadas "de frontera"). Para ello consideremos lo siguiente:

$$\begin{aligned} x_{n+2}^{(p)} &= c_3 2^{n+2} + c_4(n+2)(-1)^n \\ &= 4c_3 2^n + c_4(n+2)(-1)^n \end{aligned}$$

Por una parte $\{x_n^{(p)}\}$, al ser solución de la recurrencia, cumplirá:

$$x_{n+2}^{(p)} - x_n^{(p)} = 2^{n+2} + (-1)^{n+2}$$

Por otra, se tiene:

$$\begin{aligned} x_{n+2}^{(p)} - x_n^{(p)} &= 4c_3 2^n + c_4(n+2)(-1)^n - c_3 2^n - c_4 n(-1)^n \\ &= (4c_3 - c_3)2^n + (c_4(n+2) - c_4 n)(-1)^n \\ &= 3c_3 2^n + 2c_4(-1)^n \end{aligned}$$

y uniendo los dos resultados concluimos que:

$$3c_3 2^n + 2c_4(-1)^n = 4 \cdot 2^n + (-1)^n$$

Así pues, basta tomar $c_3 = \frac{4}{3}$ y $c_4 = \frac{1}{2}$ y en definitiva:

$$x_n^{(p)} = \tfrac{4}{3}2^n + \tfrac{1}{2}n(-1)^n$$

Ahora, según Teorema 2.4.1 compondremos la solución $\{x_n\}$ como suma, se decir, para todo número natural n: $x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)}$. Según esto,

$$\begin{aligned} x_n &= x_n^{(h)} + x_n^{(p)} \\ &= c_1(-1)^n + c_2 + \frac{4}{3}2^n + \frac{1}{2}n(-1)^n \\ &= c_2 + \frac{4}{3}2^n + (\frac{1}{2}n + c_1)(-1)^n \end{aligned} \tag{2.15}$$

La expresión 2.15 representa la solución general de la relación de recurrencia. El cálculo de c_1 y c_2 requiere el uso de las condiciones iniciales. En efecto:

$$\begin{aligned} 2 = x_0 &= c_2 + \frac{4}{3} + c_1 \\ 2 = x_1 &= c_2 + \frac{4}{3} \cdot 2 + (\frac{1}{2} + c_1)(-1) \\ &= c_2 + \frac{8}{3} - \frac{1}{2} - c_1 \\ &= c_2 - c_1 + \frac{13}{6} \end{aligned}$$

y de aquí al siguiente sistema:

$$\begin{cases} c_1 & + & c_2 = \frac{2}{3} \\ c_2 & - & c_1 = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

que resuelto aporta $c_1 = \frac{5}{12}$ y $c_2 = \frac{1}{4}$. Llevando estos valores a la expresión 2.15 resulta:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{4}{3}2^n + (\frac{1}{2}n + \frac{5}{12})(-1)^n + \frac{1}{4} \\ &= \frac{2^{n+2}}{3} + (\frac{6n+5}{12})(-1)^n + \frac{1}{4} \\ &= \frac{2^{n+4}+3}{12} + (\frac{6n+5}{12})(-1)^n \end{aligned}$$

y entonces la **solución** es:

$$x_n = \frac{2^{n+4}+3}{12} + (\frac{6n+5}{12})(-1)^n$$

para todo número natural n. □

Ejercicio 2.5.2. Obtener dos soluciones distintas del problema de recurrencia lineal no homogénea siguiente:

$$x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2} + (-2)^n$$

Solución. El enunciado plantea resolver la siguiente recurrencia lineal no homogénea:

$$x_n - 2x_{n-1} + x_{n-2} = (-2)^n$$

La ecuación característica de esta recurrencia es $x^2 - 2x + 1 = 0$, es decir, $(x-1)^2 = 0$. Por tanto, la ecuación tiene como raíz a 1 con multiplicidad 2. Así $\{x_n^{(h)}\}$ y $\{x_n^{(p)}\}$ vienen definidas para todo n según:

$$\begin{aligned} x_n^{(h)} &= c_1 + nc_2 \\ x_n^{(p)} &= c_3(-2)^n \end{aligned}$$

En esta situación está claro que:

$$\begin{aligned} x_{n+2}^{(p)} &= c_3(-2)^{n+2} \\ &= 4c_3(-2)^n \\ x_{n+1}^{(p)} &= c_3(-2)^{n+1} \\ &= -2c_3(-2)^n \end{aligned}$$

de donde:

$$x_n^{(p)} - 2x_{n-1}^{(p)} + x_{n-2}^{(p)} = (-2)^{n+2}$$

y por tanto:

$$\begin{aligned} 4(-2)^n &= (-2)^{n+2} \\ &= 4c_3(-2)^n - 2(-2c_3(-2)^n) + c_3(-2)^n \\ &= 9c_3(-2)^n \end{aligned}$$

de donde $c_3 = \frac{4}{9}$. Ahora, según Teorema 2.4.1 compondremos la solución $\{x_n\}$ como suma, se decir, para todo número natural n: $x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)}$. Según esto, la solución general $\{x_n\}$ es la que viene definida para todo natural n por:

$$x_n = \frac{4}{9}(-2)^n + nc_2 + c_1$$

Para concluir el ejercicio ofrecemos dos soluciones particulares elegidas al azar, digamos, la que cumple $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ y la que cumple $x_0 = 1$, $x_1 = 0$:

- $x_0 = 0$, $x_1 = 1$; tenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{4}{9} + 0c_2 + c_1 && \Rightarrow c_1 = -\frac{4}{9} \\ 1 &= \frac{4}{9}(-2) + c_2 - \frac{4}{9} && \Rightarrow c_2 = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

y por tanto, para todo número natural n:

$$x_n = \frac{4}{9}(-2)^n + \frac{7}{3}n - \frac{4}{9}$$

- $x_0 = 1$, $x_1 = 0$; tenemos:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{4}{9} + 0c_2 + c_1 && \Rightarrow c_1 = \frac{5}{9} \\ 0 &= \frac{4}{9}(-2) + c_2 - \frac{5}{9} && \Rightarrow c_2 = \frac{3}{9} \end{aligned}$$

y por tanto, para todo número natural n:

$$x_n = \frac{4}{9}(-2)^n + \frac{3}{9}n + \frac{5}{9}$$

□

2.6. Ejemplos

Ejemplo 2.6.1. Solucione la recurrencia:

$$u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n + 3^{n+1} + 3 \tag{2.16}$$

Solución. La ecuación característica de la recurrencia (2.16) es:

$$0 = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$$

por lo que tenemos las soluciones homogénea y particular son:

$$\begin{aligned} x_n^{(h)} &= c_0 + c_1 3^n \\ x_n^{(p)} &= nc_2 3^n + nc_3 \end{aligned}$$

Nuestro trabajo ahora es encontrar el valor de los coeficientes c_2 y c_3; para ello tegamos en cuenta que:

$$\begin{aligned} 3^{n+1} + 3 &= u_{n+2} - 4u_{n+1} + 3u_n \\ x_{n+1}^{(p)} &= (n+1)(c_2 3^{n+1} + c_3) = (n+1)(3c_2 3^n + c_3) \\ x_{n+2}^{(p)} &= (n+2)(c_2 3^{n+2} + c_3) = (n+2)(9c_2 3^n + c_3) \end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{aligned}
3\cdot 3^n+3 &= (n+2)(9c_2 3^n+c_3)\\
&\quad -4(n+1)(3c_2 3^n+c_3)\\
&\quad +3n(c_2 3^n+c_3)\\
&= (9(n+2)-12(n+1)+3n)c_2 3^n\\
&\quad +(n+2-4(n+1)+3n)c_3\\
&= (9n+18-12n-12+3n)c_2 3^n\\
&\quad +(n+2-4n-4+3n)c_3\\
&= 6c_2 3^n-2c_3
\end{aligned}$$

por lo que basta con considerar:

$$\begin{aligned}
3 &= 6c_2 && \Rightarrow && c_2=\frac{1}{2}\\
3 &= -2c_3 && \Rightarrow && c_3=-\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Como consecuencia:

$$x_n^{(p)}=n(\frac{1}{2}3^n-\frac{3}{2})$$

y por tanto:

$$\begin{aligned}
x_n &= x_n^{(h)}+x_n^{(p)}\\
&= c_0+c_1 3^n+n(\frac{1}{2}3^n-\frac{3}{2})\\
&= c_0-\frac{3n}{2}+(\frac{n}{2}+c_1)3^n
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.6.2. Solucione la recurrencia:

$$u_{n+2}=4u_{n+1}-3u_n+3^{n+2}+3 \tag{2.17}$$

y una vez hecho, si es $\{x_n\}$ la solución obtenida, encuentre los valores que dar a los coeficientes indeterminados que figuran en ella de forma que x_0 valga 0 y x_1 valga 1.

Solución. La ecuación característica de la recurrencia (2.17) es:

$$0=x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$$

por lo que tenemos las soluciones homogénea y particular son:

$$\begin{aligned}
x_n^{(h)} &= c_0+c_1 3^n\\
x_n^{(p)} &= nc_2 3^n+nc_3
\end{aligned}$$

Nuestro trabajo ahora es encontrar el valor de los coeficientes c_2 y c_3; para ello tegamos en cuenta que:

$$\begin{aligned}
3^{n+2}+3 &= u_{n+2}-4u_{n+1}+3u_n\\
x_{n+1}^{(p)} &= (n+1)(c_2 3^{n+1}+c_3)=(n+1)(3c_2 3^n+c_3)\\
x_{n+2}^{(p)} &= (n+2)(c_2 3^{n+2}+c_3)=(n+2)(9c_2 3^n+c_3)
\end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{aligned}9\cdot 3^n + 3 &= (n+2)(9c_2 3^n + c_3)\\ &-4(n+1)(3c_2 3^n + c_3)\\ &+3n(c_2 3^n + c_3)\\ &= (9(n+2) - 12(n+1) + 3n)c_2 3^n\\ &+(n+2-4(n+1)+3n)c_3\\ &= (9n+18-12n-12+3n)c_2 3^n\\ &+(n+2-4n-4+3n)c_3\\ &= 6c_2 3^n - 2c_3\end{aligned}$$

por lo que basta con considerar:

$$\begin{aligned}9 = 6c_2 &\qquad \Rightarrow \qquad c_2 = \frac{3}{2}\\ 3 = -2c_3 &\qquad \Rightarrow \qquad c_3 = -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

Como consecuencia:

$$x_n^{(p)} = n(\frac{3}{2}3^n - \frac{3}{2}) = \frac{3n}{2}(3^n - 1)$$

y por tanto:

$$\begin{aligned}x_n &= x_n^{(h)} + x_n^{(p)}\\ &= c_0 + c_1 3^n + \frac{3n}{2}(3^n - 1)\\ &= c_0 - \frac{3n}{2} + (\frac{3n}{2} + c_1)3^n\end{aligned}$$

En definitiva tenemos:

$$x_n = c_0 - \frac{3n}{2} + (\frac{3n}{2} + c_1)3^n$$

Para la segunda parte, usaremos las condiciones impuestas por el enunciado:

$$\begin{aligned}0 &= x_0\\ &= c_0 - \frac{3\cdot 0}{2} + (\frac{3\cdot 0}{2} + c_1)3^0\\ &= c_0 + c_1\\ 1 &= x_1\\ &= c_0 - \frac{3\cdot 1}{2} + (\frac{3\cdot 1}{2} + c_1)3^1\\ &= c_0 + 3c_1 + 3\end{aligned}$$

Esto nos lleva al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}0 &= c_0 + c_1\\ -2 &= c_0 + 3c_1\end{aligned}$$

cuya única solución es $c_0 = 1$ y $c_1 = -1$. Por tanto, la solución pedida es:

$$x_n = 1 - \frac{3n}{2} + (\frac{3n}{2} - 1)3^n$$

y en definitiva:

$$x_n = (\frac{3n}{2} - 1)(3^n - 1)$$

□

Ejemplo 2.6.3. Resuelva la recurrencia:

$$u_{n+2} + 4u_n = 0$$

y los problemas:

1. $u_n = 2u_{n-1} - u_{n-2} + 2^n + 2$ $(n \geq 2)$, $u_0 = 7$ y $u_1 = 19$.
2. $u_n = 2u_{n-1} - u_{n-2} + 2^n + 2$ $(n \geq 3)$, $u_1 = 7$ y $u_2 = 19$.

Solución. Consideremos en primer lugar la relación de recurrencia:

$$u_{n+2} + 4u_n = 0$$

cuya ecuación característica es $0 = x^2 + 4 = (x - 2i)(x + 2i)$. Al tener dos raíces complejas y conjugadas $\lambda_1 = 2i$ y $\lambda_1 = -2i$ la solución general es:

$$\begin{aligned}
x_n &= b_1(2i)^n + b_2(-2i)^n \\
&= 2^n(b_1 i^n + b_2(-i)^n) \\
&= 2^n(b_1(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})^n + b_2(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2})^n) \\
&= 2^n(b_1(\cos\frac{n\pi}{2} + i\sin\frac{n\pi}{2}) + b_2(\cos\frac{n\pi}{2} - i\sin\frac{n\pi}{2})) \\
&= 2^n(b_1(\cos\frac{n\pi}{2} + i\sin\frac{n\pi}{2}) + b_2(\cos\frac{n\pi}{2} - i\sin\frac{n\pi}{2})) \\
&= 2^n((b_1 + b_2)\cos\frac{n\pi}{2} + i(b_1 - b_2)\sin\frac{n\pi}{2}) \qquad b_1 + b_2 = c_1 \\
&= 2^n(c_1\cos\frac{n\pi}{2} + c_2\sin\frac{n\pi}{2}) \qquad b_1 - b_2 = c_2
\end{aligned}$$

Consideremos en primer lugar el problema:

$$u_n = 2u_{n-1} - u_{n-2} + 2^n + 2 \ (n \geq 2), \ u_0 = 7, \ u_1 = 19$$

La relación de recurrencia tiene por ecuación característica: $0 = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$. Así pues las soluciones homogénea y particular tienen los siguientes patrones:

$$\begin{aligned}
x_n^{(h)} &= (c_0 + c_1 n)(1)^n = c_0 + c_1 n \\
x_n^{(p)} &= c_2 2^n + n^2 c_3(1)^n = c_2 2^n + c_3 n^2 \rightarrow s=1 \ m=2 \ q(n)=1 \Rightarrow n^m \cdot p(n) \cdot s^n = c_3 \cdot n^2
\end{aligned}$$

$\hookrightarrow s=2 \ m=0 \ q(n)=1 \Rightarrow n^m \cdot p(n) \cdot s^n = 1 \cdot c_2 \cdot 2^n$

Como equivalentemente tenemos:

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + 2^{n+2} + 2 \ (n \geq 0)$$

entonces:

Aquí se emplea que $2^{n+2} + 2 = u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n$ y en cada u_i se sustituye por la expresión hallada de $x_n^{(p)}$

$$\begin{aligned}
2^{n+2} + 2 &= c_2 2^{n+2} + c_3(n+2)^2 - 2(c_2 2^{n+1} + c_3(n+1)^2) + c_2 2^n + c_3 n^2 \\
&= 4c_2 2^n + c_3(n^2 + 4n + 4) - 2(2c_2 2^n + c_3(n^2 + 2n + 1)) + c_2 2^n + c_3 n^2 \\
&= 4c_2 2^n + c_3 n^2 + 4c_3 n + 4c_3 - 4c_2 2^n - 2c_3 n^2 - 4c_3 n - 2c_3 + c_2 2^n + c_3 n^2 \\
&= c_2 2^n + 2c_3
\end{aligned}$$

Así pues, tenemos $4 \cdot 2^n + 2 = c_2 2^n + 2c_3$ de donde basta con que $c_2 = 4$ y $c_3 = 1$. Por tanto:

$$x_n = c_0 + c_1 n + 2^{n+2} + n^2$$

Pero como:

$$\begin{aligned} 7 &= x_0 = c_0 + 4 & &\Rightarrow \quad c_0 = 7 - 4 = 3 \\ 19 &= x_1 = 3 + c_1 \cdot 1 + 2^{1+2} + 1^2 = c_1 + 12 & &\Rightarrow \quad c_1 = 19 - 12 = 7 \end{aligned}$$

y en definitiva la solución general es:

$$x_n = 3 + 7n + n^2 + 2^{n+2}$$

El problema:

$$u_n = 2u_{n-1} - u_{n-2} + 2^n + 2 \ (n \geq 2), \ u_1 = 7, \ u_2 = 19$$

tiene la misma solución particular, siendo la general:

$$x_n = c_0 + c_1 n + 2^{n+2} + n^2$$

Pero como:

$$\begin{aligned} 7 &= x_1 = c_0 + c_1 \cdot 1 + 2^{1+2} + 1^2 = c_0 + c_1 + 9 & &\Rightarrow \quad c_0 + c_1 = 7 - 9 = -2 \\ 19 &= x_2 = c_0 + c_1 \cdot 2 + 2^{2+2} + 2^2 = c_0 + 2c_1 + 20 & &\Rightarrow \quad c_0 + 2c_1 = 19 - 20 = -1 \end{aligned}$$

de donde deducimos que $c_0 = -3$ y $c_1 = 1$. y en definitiva la solución general es:

$$x_n = -3 + n + n^2 + 2^{n+2}$$

□

Ejemplo 2.6.4. Sea $u_n = \sum_{k=0}^{n}(k2^k)$.

1. Encuentre una expresión recurrente para u_n.
2. Encuentre una fórmula explícita para calcular u_n.

Solución. Para todo número natural no nulo, n, se cumple:

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=0}^{n}(k2^k) & &\text{(definición)} \\ &= (\sum_{k=0}^{n-1}(k2^k)) + n2^n & &\text{(asociatividad de la suma)} \\ &= u_{n-1} + n2^n \end{aligned}$$

Por tanto, la expresión recurrente solicitada es:

$$u_n = u_{n-1} + n2^n$$

y como

$$u_0 = \sum_{k=0}^{0}(k2^k) = 0 \cdot 2^0 = 0 \cdot 1 = 0$$

Encontrar la fórmula explícita para poder calcular u_n supone resolver el siguiente problema de recurrencia:

$$u_0 = 0 \tag{2.18}$$
$$u_n = u_{n-1} + n2^n, \quad n \geq 1 \tag{2.19}$$

La ecuación característica de (2.19) es $x - 1 = 0$, por lo que según lo conocido:

$$\begin{aligned} u_n^{(h)} &= c_0 \cdot 1^n \\ u_n^{(p)} &= n^0(c_1 + c_2 n)2^n \end{aligned}$$

y en definitiva:

$$\begin{aligned} u_n^{(h)} &= c_0 \\ u_n^{(p)} &= (c_1 + c_2 n)2^n \end{aligned}$$

Al ser $u_n^{(p)}$ solución de (2.19), se tiene que $u_n^{(p)} - u_{n-1}^{(p)} = n2^n$, o sea:

$$\begin{aligned} 2n2^{n-1} &= n2^n \\ &= (c_1 + c_2 n)2^n - (c_1 + c_2(n-1))2^{n-1} \\ &= 2(c_1 + c_2 n)2^{n-1} - (c_1 + c_2(n-1))2^{n-1} \\ &= (2c_1 + 2c_2 n - c_1 - c_2(n-1))2^{n-1} \\ &= (2c_1 + 2c_2 n - c_1 - c_2 n + c_2)2^{n-1} \\ &= (c_1 + c_2 + c_2 n)2^{n-1} \end{aligned}$$

por lo que basta tomar:

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ c_2 &= 2 \end{aligned}$$

sistema que tiene las soluciones: $c_1 = -2$ y $c_2 = 2$. Ello supone que $u_n^{(p)} = (-2 + 2n)2^n$ y en definitiva que:

$$u_n^{(p)} = (n-1)2^{n+1}$$

Al ser $u_n^{(h)} + u_n^{(h)}$ solución del problema inicialmente planteado, se cumplirá

$$\begin{aligned} 0 &= u_0 \\ &= c_0 + (-2 + 2 \cdot 0)2^0 \\ &= c_0 - 2 \end{aligned}$$

por lo que $c_0 = 2$ y, en definitiva, la fórmula solicitada es:

$$u_n = 2 + (n-1)2^{n+1}$$

□

Ejemplo 2.6.5. Resuelva el problema de recurrencia:

$$u_{n+2} + 4u_n = 6\cos\frac{n\pi}{2} + 3\sin\frac{n\pi}{2} \tag{2.20}$$

Solución. En el ejercicio 2.6.3 pudimos determinar que:

$$x_n^{(h)} = 2^n(c_1 \cos\frac{n\pi}{2} + c_2 \sin\frac{n\pi}{2})$$

Según lo indicado en la tabla de la Figura 2.1 buscaremos ahora una solución particular de la forma:

$$x_n^{(p)} = c_3 \cos\frac{n\pi}{2} + c_4 \sin\frac{n\pi}{2}$$

Entonces:

sen(α+β) = senα · cosβ + cosα · senβ
cos(α+β) = cosα · cosβ − senα · senβ
$\alpha = \frac{n\pi}{2}$ $\beta = \pi$

$$
\begin{aligned}
x_{n+2}^{(p)} &= c_3 \cos\frac{(n+2)\pi}{2} + c_4 \sin\frac{(n+2)\pi}{2} \\
&= c_3(\cos\frac{n\pi}{2}\cos\pi - \sin\frac{n\pi}{2}\sin\pi) + c_4(\sin\frac{n\pi}{2}\cos\pi + \cos\frac{n\pi}{2}\sin\pi) \\
&= -c_3\cos\frac{n\pi}{2} - c_4\sin\frac{n\pi}{2}
\end{aligned}
$$

y se tiene pues:

$$
\begin{aligned}
6\cos\frac{n\pi}{2} + 3\sin\frac{n\pi}{2} &= x_{n+2}^{(p)} + 4x_n^{(p)} \\
&= -c_3\cos\frac{n\pi}{2} - c_4\sin\frac{n\pi}{2} + 4(c_3\cos\frac{n\pi}{2} + c_4\sin\frac{n\pi}{2}) \\
&= 3c_3\cos\frac{n\pi}{2} + 3c_4\sin\frac{n\pi}{2}
\end{aligned}
$$

y siendo así, basta tomar $c_3 = 2$ y $c_4 = 1$. Así pues, la solución del problema (2.20) es:

$$
\begin{aligned}
x_n &= x_n^{(h)} + x_n^{(p)} \\
&= 2^n(c_1\cos\frac{n\pi}{2} + c_2\sin\frac{n\pi}{2}) + 2\cos\frac{n\pi}{2} + \sin\frac{n\pi}{2}
\end{aligned}
$$

□

Ejemplo 2.6.6. Resuelva el problema de recurrencia:

$$u_{n+2} + 4u_{n+1} + 16u_n = 4^{n+2}\cos\frac{n\pi}{2} - 4^{n+3}\sin\frac{n\pi}{2} \tag{2.21}$$

Solución. El problema de recurrencia homogéneo asociado a (2.21) es

$$u_{n+2} + 4u_{n+1} + 16u_n = 0 \tag{2.22}$$

cuya ecuación característica es $x^2 + 4x + 16 = 0$, de raíces $x_1 = -2 + 2\sqrt{3}i$ y $x_2 = -2 - 2\sqrt{3}i$. Busquemos la expresión porlar de $z = x_1$ y para ello consideremos:

- En cuanto al módulo de z: $|z| = 4$
- En cuanto al argumento principal:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{Im}(z)/|z|}{1 + \mathrm{Re}(z)/|z|} &= \frac{\sqrt{3}/2}{1 - 1/2} \\
&= \mathrm{tg}(\frac{2\pi/3}{2})
\end{aligned}
$$

  y así

$$2\arctan\frac{\mathrm{Im}(z)/|z|}{1 + \mathrm{Re}(z)/|z|} = 2\pi/3$$

de donde:

$$x_n^{(h)} = 4^n(c_1\cos\frac{2n\pi}{3} + c_2\sin\frac{2n\pi}{3})$$

Como solución particular buscaremos una (cfr. Figura 2.1) con el patrón:

$$x_n^{(p)} = 4^n(c_3\cos\frac{n\pi}{2} + c_4\sin\frac{n\pi}{2})$$

Entonces:

$$\begin{aligned} x_{n+1}^{(p)} &= 4^{n+1}(c_3 \cos\frac{(n+1)\pi}{2} + c_4 \sin\frac{(n+1)\pi}{2}) \\ &= 4^n(4c_4 \cos\frac{n\pi}{2} - 4c_3 \sin\frac{n\pi}{2}) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} x_{n+2}^{(p)} &= 4^{n+2}(c_3 \cos\frac{(n+2)\pi}{2} + c_4 \sin\frac{(n+2)\pi}{2}) \\ &= 4^n(-16c_3 \cos\frac{n\pi}{2} - 16c_4 \sin\frac{n\pi}{2}) \end{aligned}$$

Deducimos entonces que:

$$\begin{aligned} 4^n(16\cos\frac{n\pi}{2} - 64\sin\frac{n\pi}{2}) &= 4^{n+2}\cos\frac{n\pi}{2} - 4^{n+3}\sin\frac{n\pi}{2} \\ &= x_{n+2}^{(p)} + 4x_{n+1}^{(p)} + 16x_n^{(p)} \\ &= 4^n(16c_4\cos\frac{n\pi}{2} - 16c_3\sin\frac{n\pi}{2}) \end{aligned}$$

bastando tomar $c_4 = 1$ y $c_3 = 4$, de donde la solución de (2.21) es:

$$x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)} = 4^n(c_1\cos\frac{2n\pi}{3} + c_2\sin\frac{2n\pi}{3} + 4\cos\frac{n\pi}{2} + \sin\frac{n\pi}{2})$$

□

Ejemplo 2.6.7. Encuentre una relación de recurrencia lineal homogénea equivalente a la relación:

$$u_n = 3u_{n-1} + 3^n - 2 \tag{2.23}$$

y resuelva el problema para la condición de contorno $u_0 = 2$

Solución. De (2.23) se deduce:

$$\begin{aligned} u_n &= 3u_{n-1} + 3^n - 2 \\ u_{n-1} &= 3u_{n-2} + 3^{n-1} - 2 \\ u_n - 3u_{n-1} &= 3u_{n-1} + 3^n - 2 - 3(3u_{n-2} + 3^{n-1} - 2) \\ &= 3u_{n-1} + 3^n - 2 - 9u_{n-2} - 3^n + 6 \\ &= 3u_{n-1} - 9u_{n-2} + 4 \end{aligned}$$

Así pues:

$$4 = u_n - 6u_{n-1} + 9u_{n-2} \tag{2.24}$$
$$4 = u_{n-1} - 6u_{n-2} + 9u_{n-3} \tag{2.25}$$

Restando (2.25) de (2.24) se tiene:

$$u_n - 7u_{n-1} + 15u_{n-2} - 9u_{n-3} = 0 \tag{2.26}$$

La relación de recurrencia lineal homogénea (2.26) tiene de ecuación característica:

$$0 = x^3 - 7x^2 + 15x - 9 = (x-1)(x-3)^2$$

por lo que su solución a (2.26), y por tanto a (2.23), es:

$$x_n = (c_1 + nc_2)3^n + c_3$$

Para resolver el problema derivado de la condición de contorno tengamos en cuenta:

$$\begin{aligned} x_0 &= 2 \quad \Rightarrow c_1 + c_3 = 2 \\ x_1 &= 7 \quad \Rightarrow 3c_2 - 2c_3 = 1 \\ x_1 &= 28 \quad \Rightarrow 9c_1 + 18c_2 + c_3 = 28 \end{aligned}$$

de lo que se deduce que $c_1 = 1 = c_2 = c_3$ y por tanto la solución al problema inicial de contorno es:

$$x_n = (n+1)3^n + 1$$

□

Ejemplo 2.6.8. Son dadas las sucesiones recurrentes:

$$\begin{cases} u_n = 3u_{n-1} + 3v_{n-1} \\ v_n = 5u_{n-1} + v_{n-1} \end{cases}$$

con $u_0 = 1$ y $v_0 = 1$. Halle las expresiones de u_n y v_n en función de n.

Solución. Obsérvese que:

$$\begin{pmatrix} u_n & v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix}$$

Si llamamos U_n (resp. A) a la matriz:

$$\begin{pmatrix} u_n & v_n \end{pmatrix} \qquad (\text{resp. } \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix})$$

Tenemos que para todo número natural n, vale la igualdad $U_n = A^n U_0$. Así pues, el problema se reduce a hallar la potencia n-ésima de la matriz A y esto es entonces un problema de diagonalización de matrices. La matriz A es diagonalizable y para tener su diagonalización seguiremos los siguientes pasos:

- Calculemos el polinomio característico de A, $p_A(\lambda)$.

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 5 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (3-\lambda)(1-\lambda) - 3\cdot 5 \\ &= \lambda^2 - 6\lambda + 2\lambda - 12 \\ &= (\lambda - 6)(\lambda + 2) \end{aligned}$$

- Disponemos de dos valores propios, a saber: $\lambda_1 = 6$ y $\lambda_2 = -2$, de multiplicidades algebraicas $\alpha_1 = 6$ y $\alpha_2 = -2$. De esto deducimos que la matriz es diagonalizable, pues las multiplicidades geométricas son $d_1 = 1 = d_2$. Resta calcular la matriz de paso en la diagonalización de A.

- Para el subespacio propio asociado a $\lambda_1 = 6$, V_6, tenemos:

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_f} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  y así, las ecuaciones de V_6 son:

$$x - y = 0$$

y una base de V_6 es $B_{V_6} = \langle\langle 1, 1\rangle\rangle$. En cuanto **subespacio propio** correspondiente a $\lambda = \mathbf{-2}$, V_{-2}, tenemos:

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_f} \begin{pmatrix} 1 & 3/5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y así, las ecuaciones de V_{-2} son:

$$5x \quad - \quad 3y \quad = \quad 0$$

y una base de V_6 es $B_{V_6} = \langle\langle 3, -5\rangle\rangle$.

- Una de las formas diagonales de A es:

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

con matriz de paso:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$$

cuya inversa es:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 5/8 & 3/8 \\ 1/8 & -1/8 \end{pmatrix}$$

y efectivamente

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} &= P^{-1}AP \\ &= \begin{pmatrix} 5/8 & 3/8 \\ 1/8 & -1/8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y entonces:

$$\begin{aligned} A &= PDP^{-1} \\ &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Así pues:

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 5 \cdot 6^n + 3(-2)^n & 3 \cdot 6^n - 3(-2)^n) \\ 5 \cdot 6^n - 5(-2)^n) & 3 \cdot 6^n + 5(-2)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De lo anterior se deduce que:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_n & v_n \end{pmatrix} &= A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 5 \cdot 6^n + 3(-2)^n & 3 \cdot 6^n - 3(-2)^n) \\ 5 \cdot 6^n - 5(-2)^n) & 3 \cdot 6^n + 5(-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6^n \\ 6^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En consecuencia, los términos generales de las sucesiones especificadas al principio son:

$$u_n = 6^n \quad \text{y} \quad u_n = 6^n$$

□

Ejemplo 2.6.9. Considere las siguientes recurrencias:

$$
\begin{aligned}
s_n &= 2s_{n-1} + s_{n-2} + 4t_{n-1}, \quad n \geq 2 \\
t_n &= s_{n-1} + t_{n-1}, \quad n \geq 2
\end{aligned}
$$

y resuelva la primera.

$s_n - s_{n-1} = 2s_{n-1} - s_{n-2} - s_{n-3} + 4t_{n-1} - 4t_{n-2}$

Solución. Tenemos lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
s_n &= 2s_{n-1} + s_{n-2} + 4t_{n-1} \\
s_{n-1} &= 2s_{n-2} + s_{n-3} + 4t_{n-2}
\end{aligned}
$$

Si restamos la segunda igualdad de la primera tenemos:

$$
\begin{aligned}
s_n - s_{n-1} &= (2s_{n-1} + s_{n-2} + 4t_{n-1}) - (2s_{n-2} + s_{n-3} + 4t_{n-2}) \\
&= 2s_{n-1} - s_{n-2} - s_{n-3} + 4t_{n-1} - 4t_{n-2} \\
s_n &= 3s_{n-1} - s_{n-2} - s_{n-3} + 4t_{n-1} - 4t_{n-2} \\
&= 3s_{n-1} - s_{n-2} - s_{n-3} + 4(t_{n-1} - t_{n-2})
\end{aligned}
$$

Por otra parte tenemos:

$$
\begin{aligned}
t_n &= s_{n-1} + t_{n-1} \\
t_{n-1} &= s_{n-2} + t_{n-2} \\
t_{n-1} - t_{n-2} &= s_{n-2}
\end{aligned}
$$

Ahora:

$$
\begin{aligned}
s_n &= 3s_{n-1} - s_{n-2} - s_{n-3} + 4(t_{n-1} - t_{n-2}) \\
&= 3s_{n-1} - s_{n-2} - s_{n-3} + 4s_{n-2} \\
&= 3s_{n-1} + 3s_{n-2} - s_{n-3}
\end{aligned}
$$

En definitiva:

$$
s_n = 3s_{n-1} + 3s_{n-2} - s_{n-3}
$$

recurrencia que tiene por ecuación característica:

$$
\begin{aligned}
0 = x^3 - 3x^2 - 3x + 1 &= (x+1)(x^2 - 4x + 1) \\
&= (x+1)(x - 2 + \sqrt{3})(x - 2 - \sqrt{3})
\end{aligned}
$$

y por tanto, sus soluciones son: -1, $2 \pm \sqrt{3}$. Así pues,

$$
s_n = c_1(2+\sqrt{3})^n + c_2(2-\sqrt{3})^n + c_3(-1)^n
$$

Abordando el problema matricialmente, tenemos que la recurrencia propuesta puede ser expresada mediante la igualdad siguiente:

$$
\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \\ t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \\ t_{n-1} \end{pmatrix}
$$

Si A es la matrix:

$$
\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Resulta que el polinomio característico de A es:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 \\ &= (\lambda+1)(\lambda - 2 + \sqrt{3})(\lambda - 2 - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

Por lo que A es diagonalizable y existen una matriz regular P y una matriz diagonal D tal que $D = P^{-1}AP$. En realidad:

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2+\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ 2 & -1-\sqrt{3} & -1+\sqrt{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{12}(1-\sqrt{3}) & \frac{1}{12}(-1-\sqrt{3}) & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{12}(1+\sqrt{3}) & \frac{1}{12}(-1+\sqrt{3}) & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

y por tanto:

$$A^n = PD^nP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (2-\sqrt{3})^n & 0 \\ 0 & 0 & (2+\sqrt{3})^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

□

Ejemplo 2.6.10. Un ciudadano pide un préstamo por cantidad S de dinero a pagar en T plazos. Si I es el interés del préstamo por plazo en tanto por uno, ¿qué pago constante P debe realizar al final de cada plazo?

Demostración. Sea u_n la cantidad del préstamos que todavía debe el ciudadano al final del n-ésimo plazo, es decir, a continuación del n-ésimo pago. Entonces para todo $0 \le n \le T-1$, $u_{n+1} = u_n + Iu_n - P$ y el problema de recurrencia a resolver es:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (1+I)u_n - P \ (0 \le n \le T-1), \\ u_0 &= S \\ u_T &= 0 \end{aligned}$$

La ecuación característica de este problema es $x - (1+I) = 0$, por lo que $x_n^{(h)} = c(1+I)^n$. Pueden darse dos casos:

- $I = 0$; en tal caso $x_n^{(h)} = c$ y $x_n^{(p)} = nA$. Como $x_n^{(p)}$ es solución de $u_{n+1} = u_n - P$ entonces:

$$\begin{aligned} -P &= (n+1)A - nA \\ &= nA + A - nA \\ &= A \end{aligned}$$

  Por consiguiente, $x_n = c - nP$. Dado que debe darse $S = x_0$, tendremos que $S = c - 0P = c$ y así, en realidad, $x_n = S - nP$. Ahora bien, debe cumplirse $x_T = 0$, o sea, $0 = S - TP$ de donde

$$P = \frac{S}{T}$$

- $I \neq 0$; en este caso $x_n^{(p)} = A$. Así pues, $x_{n+1}^{(p)} = x_n^{(p)} = A$ y tendremos que:

$$\begin{aligned} -P &= x_{n+1}^{(p)} - (1+I)x_n^{(p)} \\ &= A - (1+I)A \\ &= (1-1-I)A \\ &= -IA \end{aligned}$$

de lo que deducimos que para todo número natural n,

$$x_n^{(p)} = \frac{P}{I}$$

La solución al problema será pues $x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)}$; ahora bien:

$$S = x_0 = c(1+I)^0 + \frac{P}{I} \quad \Rightarrow \quad c = S - \frac{P}{I}$$

de lo que se deduce que

$$x_n = (S - \frac{P}{I})(1+I)^n + \frac{P}{I} \qquad (0 \leq n \leq T)$$

Ahora bien,

$$0 = x_T = (S - \frac{P}{I})(1+I)^T + \frac{P}{I}$$

y entonces:

$$\begin{aligned}
\frac{P}{I} &= (\frac{P}{I} - S)(1+I)^T \quad \Rightarrow \\
P &= (P - SI)(1+I)^T \\
&= P(1+I)^T - SI(1+I)^T \quad \Rightarrow \\
P(1-(1+I)^T) &= -SI(1+I)^T \quad \Rightarrow \\
P &= \frac{SI(1+I)^T}{(1+I)^T - 1}
\end{aligned}$$

y así obtenemos como respuesta el valor de P en la popular expresión:

$$P = SI(1-(1+I)^{-T})^{-1}$$

□

Ejemplo 2.6.11. Para el número natural n no nulo, sea C un conjunto que contiene 2^n números reales. ¿Cuántas comparaciones deben efectuarse entre pares de números de C para determinar los elementos máximo y mínimo de C?

Solución. Llamemos u_n al número de comparaciones necesarias. Se tiene que $u_1 = 1$ y para u_2, razonamos como sigue: C será igual —sin pérdida de generalidad— a $C_1 \cup C_2$, donde $C_1 = \{x_0, x_1\}$ e $C_2 = \{y_0, y_1\}$; en cada uno de los C_i operamos al efecto con una comparación, terminado lo cual habrá que hacer dos comparaciones (una entre máximos y otra entre mínimos) para determinar el máximo y el mínimo y entonces $u_2 = 2u_1 + 2 = 4$. Conjeturamos, que para todo $n \geq 2$:

$$u_n = 2u_{n-1} + 2$$

lo cual podría ser demostrado por inducción. Deducimos que el problema a resolver es:

$$\begin{aligned}
u_1 &= 1 \\
u_{n+1} &= 2u_n + 2 \quad (n \geq 1)
\end{aligned}$$

Por tanto, $x_n^{(h)} = c_0 2^n$ y $x_n^{(p)} = c_1$ y entonces:

$$x_n = c_0 2^n + c_1 \tag{2.27}$$

Como $x_{n+1}^{(p)}$ es solución:

$$\begin{aligned} 2 &= x_{n+1}^{(p)} - 2x_n^{(p)} \\ &= c_1 - 2c_1 \\ &= -c_1 \end{aligned}$$

de lo que deducimos que $c_1 = -2$. Llevando este resultado a la igualdad (2.27), se tendrá:

$$x_n = c_0 2^n - 2 \tag{2.28}$$

Ahora bien:

$$\begin{aligned} 1 &= x_1 \\ &= c_0 2^1 - 2 \\ &= 2c_0 - 2 \end{aligned}$$

de donde $c_0 = 3/2$. En defintiva:

$$x_n = \frac{3}{2}2^n - 2 = 3 \cdot 2^{n-1} - 2$$

□

Ejemplo 2.6.12. Para todo número natural n mayor que 1, supongamos que hay n personas en una fiesta y que cada una de ellas da la mano (exactamente una vez) a todas las demás personas (y nadie estrecha su propia mano). Si u_n es el número de apretones de mano en esas condiciones, dar una expresión suya.

Solución. Sea n un número natural cualquiera a condición de ser mayor que 1 y llamemos por u_n al número de apretones de mano. Para imaginar el experimento, pensemos que la reunión es de $n+1$ personas y que una de ellas se ha ausentado momentáneamente justo cuando se va a producir el aprentón; los presentes lo efectúan, ocurriendo u_n, y al entrar el ausente para tener u_{n+1} bastará con n nuevos apretones de mano. De ello se deduce que:

$$\begin{aligned} u_2 &= 1 \\ u_{n+1} &= u_n + n \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

En tal caso la ecuación característica será $x - 1 = 0$ y la función de ajuste $f(n) = n(1)^n$. Se tendrá:

$$\begin{aligned} x_n^{(h)} &= c_0 \\ x_n^{(p)} &= n(c_1 + c_2 n)(1)^n \\ &= c_2 n^2 + c_1 n \end{aligned}$$

de lo que deducimos que:

$$\begin{aligned} n &= x_{n+1}^{(p)} - x_n^{(p)} \\ &= c_2(n+1)^2 + c_1(n+1) - c_2 n^2 - c_1 n \\ &= c_2(n^2 + n + 1) + c_1(n+1) - c_2 n^2 - c_1 n \\ &= c_2 n^2 + c_2 n + c_2 + c_1 n + c_1 - c_2 n^2 - c_1 n \\ &= 2c_2 n + c_2 + c_1 \end{aligned}$$

Así pues, basta con tomar $2c_2 = 1$, es decir $c_2 = 1/2$, y $0 = c_1 + c_2$, es decir $c_1 = -1/2$. Tenemos hasta ahora que:

$$x_n^{(p)} = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}n(n-1)$$

Dado que:

$$
\begin{aligned}
x_n &= x_n^{(h)} + x_n^{(p)} \\
&= c_0 + \frac{1}{2}n(n-1)
\end{aligned}
$$

tendremos en particular:

$$
\begin{aligned}
1 &= x_2 \\
&= c_0 + \frac{1}{2}2(2-1) \\
&= c_0 + 1 & \Rightarrow c_0 = 0
\end{aligned}
$$

En definitiva:

$$u_n = \frac{1}{2}n(n-1)$$

□

$u = t \quad du = 1\,dt$
$dv = e^{-t} \quad v = -e^{-t}$

$$\int_0^\infty t e^{-t}\,dt = \underbrace{-te^{-t}\Big|_0^\infty}_{0} + \int_0^\infty e^{-t} =$$

$$= -e^{-t}\Big|_0^\infty = -\frac{1}{e^\infty} + \frac{1}{e^0} = 1 = \Gamma(1)$$

Ejemplo 2.6.13. Calcule el valor de la integral:

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^n e^{-t}\, dt$$

Solución. Efectuaremos el cálculo de la integral basándonos en un cambio de variable, cual es:

$$
\begin{array}{rclrcl}
u & = & t^n & du & = & nt^{n-1}dt \\
dv & = & e^{-t}dt & v & = & -e^{-t}
\end{array}
$$

Dado que $\lim_{t\to\infty} t^n e^{-t} = 0$ y $-0^n\frac{1}{e^0} = 0$, se tiene

$$
\begin{aligned}
\Gamma(n+1) &= \int_0^\infty t^n e^{-t}\, dt \\
&= -t^n e^{-t}\Big|_0^\infty + n\int_0^\infty t^{n-1}e^{-t}\, dt \\
&= 0 + n\Gamma(n)
\end{aligned}
$$

de lo que deducimos que:

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$$

y por tanto:

$$
\begin{aligned}
\Gamma(n+1) &= n!\Gamma(1) \\
&= n! \cdot 1 \\
&= n!
\end{aligned}
$$

□

Ejemplo 2.6.14. Sea n cualquier número natural y considere x_n definido por:

$$x_n = \sum_{i=0}^{n} 2^{n-i}3^i$$

Encuentre el valor de x_n.

Solución. Para efectuar lo que se pide encontraremos una expresión recurrente de x_n. Se tiene:

$$\begin{aligned} x_n &= \sum_{k=0}^{n} 2^{n-k}3^k \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} 2^{n-k}3^k\right) + 2^0 3^n \\ &= 2\left(\sum_{k=0}^{n-1} 2^{n-1-k}3^k\right) + 3^n \\ &= 2x_{n-1} + 3^n \end{aligned}$$

Así pues, $\{x_n\}_n$ cumple la recurrencia $x_n - 2x_{n-1} = 3^n$ y además $x_0 = 1$. Resolvamos este problema. Se tiene que $x_n^{(p)} = c3^n$, de lo que resulta $c = 3$ y, por tanto, $x_n^{(p)} = 3^{n+1}$; por otra parte, $x_n^{(h)} = a2^n + 3^{n+1}$ y como $x_0 = 1$ resulta $a = -2$. Así pues, la solución es:

$$x_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}, \qquad n \geq 0$$

□

Ejemplo 2.6.15. Sea n un número natural y tracemos n rectas en plano con las siguientes reglas:

- por cualquier punto del plano pasan a lo sumo dos de ellas y
- ninguna es paralela a cualquier otra distinta a ella

Si u_n es el número de regiones en las que queda dividido el plano con un juego cualquiera de n rectas cumpliendo las condiciones anteriores, encuentre una expresión de u_n es función de n.

Solución. Para $n = 1$, tenemos una recta que divide al plano —obviamente— en dos regiones. Para $n = 2$ (resp. $n = 3$, $n = 4$) aparecen 4 (resp. 7, 11) regiones. Si llamamos u_n al número de regiones cuando hay n rectas, se tiene:

$$\begin{aligned} u_1 &= 1 \\ u_{n+1} &= u_n + n \end{aligned}$$

Ahora tenemos una forma de resolver el problema mediante la teoría de recurrencias, ello nos proporciona:

$$u_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$$

Otro enfoque sería el siguiente:

$$\begin{aligned} u_n &= u_n - u_1 + 1 \\ &= 1 + \sum_{i=2}^{n} (u_i - u_{i-1}) \\ &= 1 + \sum_{i=2}^{n} i \\ &= 1 + \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.6.16. Para todo número natural n, sea $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k}$. Haga lo siguiente:

1. Calcule una expresión recurrente para u_n.
2. Calcule una expresión cerrada para u_n.
3. Demuestre que para todo número natural superior a 2 se cumple $u_{n-3} = 5u_{n-2} - 8u_{n-1} + 4u_n$.

Solución.

1. Tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{k}{2^k} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k}\right) + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\ &= u_n + (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

2. El problema planteado es por tanto:

$$\begin{aligned} u_0 &= 0 \\ u_{n+1} &= u_n + (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \end{aligned} \qquad (2.29)$$

y pasamos a resolverlo. La ecuación característica de (2.29) es $x - 1 = 0$; así pues

$$\begin{aligned} x_n^{(h)} &= c_0 \\ x_n^{(p)} &= (c_1 + c_2 n)\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

Así pues:

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n &= x_{n+1}^p - x_n^p \\ &= (c_1 + c_2(n+1))\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - (c_1 + c_2 n)\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \left(\frac{c_1 + c_2 + c_2 n}{2} - c_1 - c_2 n\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \left(\frac{c_1 + c_2 + c_2 n - 2c_1 - 2c_2 n}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \left(\frac{-c_1 + c_2 - c_2 n}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

por lo que basta con que:

$$\begin{aligned} 1 &= c_2 - c_1 \\ 1 &= -c_2 \end{aligned}$$

de donde $c_2 = -1$ y $c_1 = -2$. De ello se deduce que la solución es:

$$x_n = c_0 - \frac{n+2}{2^n}$$

Ahora bien, como $u_0 = 0$ y x_n es solución, entonces $c_0 = 2$ por lo que definitivamente la solución es:

$$x_n = 2 - \frac{n+2}{2^n} \tag{2.30}$$

Se tiene:

$$\begin{aligned}
u_{n+1} = u_n + \frac{n+1}{2^{n+1}} &\Rightarrow 2u_{n+1} = 2u_n + \frac{n+1}{2^n} \\
u_n = u_{n-1} + \frac{n}{2^n} &\Rightarrow 2u_{n+1} - u_n = 2u_n - u_{n-1} + \frac{1}{2^n} \\
&\Rightarrow 4u_{n+1} - 2u_n = 4u_n - 2u_{n-1} + \frac{1}{2^{n-1}} \qquad (2.31) \\
&\Rightarrow 2u_n - u_{n-1} = 2u_{n-1} - u_{n-2} + \frac{1}{2^{n-1}} \qquad (2.32)
\end{aligned}$$

Restando miembro a miembro las igualdades (2.31) y (2.32) concluimos que:

$$2u_n - u_{n-1} - 4u_{n+1} + 2u_n = 2u_{n-1} - u_{n-2} - 4u_n + 2u_{n-1}$$

de donde

$$\begin{aligned}
u_{n-2} &= 2u_{n-1} - 4u_n + 2u_{n-1} - (2u_n - u_{n-1} - 4u_{n+1} + 2u_n) \\
&= 4u_{n+1} - 8u_n + 5u_{n-1}
\end{aligned}$$

y desplazando los índices deducimos que:

$$u_{n-3} = 5u_{n-2} - 8u_{n-1} + 4u_n$$

como se pedía demostrar para $n \geq 3$. □

Ejemplo 2.6.17. Para cada número natural n, sea $f(n)$ el número de secuencias de longitud n que pueden ser construidas a partir de las letras a, b, c, de modo que en ninguna de tales secuencias aparezca la subsecuencia aab ni la subsecuencia aac. Defina $f(n)$ mediante una recurrencia y encuentre una expresión cerrada para ella.

Solución. Supongamos construidas las secuencias legítimas de longitud $n-1$ que, como se ha dicho, están en cantidad igual a $f(n-1)$. Añadiendo a cualquiera de ellas un símbolo escogido entre a, b y c obtendremos $3f(n-1)$ secuencia de n símbolos; pero entre todas ellas, $f(n)$ no cuenta ninguna de las contadas por $f(n-3)$ y que luego fueran completadas con las secuencias proscritas (aab y aac), es decir, no cuenta $2f(n-3)$ secuencias. El balance total es, por tanto, $3f(n-1) - 2f(n-3)$ y esto implica que:

$$f(n) = 3f(n-1) - 2f(n-3)$$

Para poder resolver la recurrencia necesitaremos conocer los tres primeros valores:[3]

$$\begin{aligned}
f(0) &= 1 \\
f(1) &= 3 \\
f(2) &= 3 \cdot 3 = 9
\end{aligned}$$

[3]El número de secuencias de longitud 0 debe ser 1, correspondiendo a la secuencia vacía. Si hubiéramos partido de valores iniciales: $f(1) = 3$, $f(2) = 9$ y $f(3)$=25, habríamos obtenido el mismo resultado (2.33) y, por tanto, $f(0) = 1$ vendría impuesto.

y así, por ejemplo:

$$\begin{aligned} f(3) &= 3 \cdot 3 \cdot 3 - 2 \\ &= 25 \\ &= 3f(2) - 2f(0) \\ f(4) &= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 - 3 \cdot 2 - 3 \cdot 2 \\ &= 69 \\ &= 3 \cdot 25 - 2 \cdot 3 \\ &= 3f(3) - 2f(1) \end{aligned}$$

El polinomio característico de la recurrencia es:

$$\begin{aligned} p(x) &= x^3 - 3x^2 + 2 \\ &= (x-1)(x^2 - 2x - 2) \\ &= (x-1)(x - (1+\sqrt{3}))(x - (1-\sqrt{3})) \end{aligned}$$

Por tanto, la solución general de la recurrencia es:

$$f(n) = c_0(1-\sqrt{3})^n + c_1(1+\sqrt{3})^n + c_2$$

y teniendo en cuenta los valores iniciales, resulta:

$$f(n) = -\frac{(\sqrt{3}-3)(1-\sqrt{3})^n - (9+5\sqrt{3})(1+\sqrt{3})^n + 3 + \sqrt{3}}{3(3+\sqrt{3})} \tag{2.33}$$

□

Ejemplo 2.6.18. Considere el problema de recurrencia no homogéneo:

$$\begin{aligned} x_0 &= 2 \\ x_n &= 3x_{n-1} + 3^n - 2 \end{aligned}$$

y redúzcalo a otro homogéneo.[4]

Solución. Por variación de índices y multiplicación tenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{rl} x_n & = 3x_{n-1} + 3^n - 2 \\ 3x_{n-1} & = 9x_{n-2} + 3^n - 6 \\ \hline x_n - 3x_{n-1} & = 3x_{n-1} - 9x_{n-2} + 4 \end{array}$$

y por tanto:

$$x_n = 6x_{n-1} - 9x_{n-2} + 4$$

de donde:

$$\begin{array}{rl} x_n - 6x_{n-1} + 9x_{n-2} & = 4 \\ x_{n-1} - 6x_{n-2} + 9x_{n-3} & = 4 \\ \hline x_n - 7x_{n-1} + 15x_{n-2} - 9x_{n-3} & = 0 \end{array}$$

Factorizamos el polinomio $p(x) = x^3 - 7x^2 + 15x - 9$ obteniendo $p(x) = (x-1)(x-3)^2$, de donde:

$$x_n = (c_0 + nc_1)3^n + c_2$$

[4]Este "método" tiene varios inconvenientes: oculta que algunos de los coeficientes son independientes de los valores de contorno, no evita encontrar las raíces de un un polinomio mientras que eleva el grado del polinomio a estudiar, no es algorítmico, el cálculo de los coeficientes indeterminados es efectuado mediante un sitema de mayor orden, etc.; no obstante el método es algebraicamente bello.

Imponiendo que: $x_0 = 2$, $x_1 = 7$ y $x_2 = 28$, deducimos que: $c_0 = 1 = c_2 = c_3$, de donde la solución al problema de recurrencia del enunciado es:

$$x_n = (n+1)3^n + 1$$

□

Ejemplo 2.6.19. Considere el problema de recurrencia:

$$\begin{aligned} u_0 &= 0 \\ u_n &= u_{n-1} + n2^n \end{aligned}$$

y resuélvalo reduciéndolo a un problema homogéneo.

Solución. Tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} u_n &= u_{n-1} + n2^n \\ u_{n-1} &= u_{n-2} + (n-1)2^{n-1} \\ 2u_{n-1} &= 2u_{n-2} + (n-1)2^n \\ &= 2u_{n-2} + n2^n - 2^n \\ u_n - 2u_{n-1} &= u_{n-1} - 2u_{n-2} + n2^n - n2^n + 2^n \\ u_n &= 3u_{n-1} - 2u_{n-2} + 2^n \\ 2u_{n-1} &= 6u_{n-2} - 4u_{n-3} + 2^n \\ u_n &= 5u_{n-1} - 8u_{n-2} + 4u_{n-3} \end{aligned}$$

El polinomio característico de

$$u_n = 5u_{n-1} - 8u_{n-2} + 4u_{n-3}$$

es $p(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-2)^2(x-1)$ y, por tanto, la solución general es:

$$x_n = c_0 + (c_1 + nc_2)2^n$$

Utilizando ahora que $\{x_n\}$ es solución del problema, debe ocurrir que $x_0 = 0$, $x_1 = 2$ y $x_2 = 10$. Ello permite calcular los coeficientes indeterminados, obteniendo: $c_0 = 2$, $c_1 = -2$ y $c_2 = 2$ y por tanto:

$$x_n = 2 + (n-1)2^{n+1}$$

□

Ejemplo 2.6.20. Para cada número natural $n \geq 1$, consideremos el siguiente determinante $n \times n$:

$$\Delta_n(a,b,c) = \begin{vmatrix} a & c & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b & a & c & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b & a & c & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b & a \end{vmatrix}$$

donde $a \in \mathbb{R}$ y $b, c \in \mathbb{R}^*$. Defina $\Delta_n(a,b,c)$ mediante una recurrencia lineal homogénea y haga lo siguiente:

1. Obtenga una fórmula cerrada real para $\Delta_n(3, 1/2, 9)$.

2. Caracterice los $n \geq 1$ tales que $\Delta_n(3, 1/2, 9) = 0$.

Solución. Desarrollando el determinante por la primer columna se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\Delta_n(a,b,c) &= a\Delta_{n-1}(a,b,c) - b \begin{vmatrix} c & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b & a & c & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & c \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b & a \end{vmatrix} \\
&= a\Delta_{n-1}(a,b,c) - bc \begin{vmatrix} a & c & \cdots & 0 & 0 \\ b & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & c \\ 0 & 0 & \cdots & b & a \end{vmatrix} \\
&= a\Delta_{n-1}(a,b,c) - bc\Delta_{n-2}(a,b,c)
\end{aligned}$$

La recurrencia lineal homogénea es:

$$u_n = au_{n-1} - bcu_{n-2}$$

que particularizada según el enunciado es:

$$u_n = 3u_{n-1} - \frac{9}{2}u_{n-2}$$

Su ecuación característica es:

$$x^2 - 3x + \frac{9}{2} = 0$$

cuyas soluciones son

$$\begin{aligned}
x &= \frac{3}{2} \pm \frac{3}{2}i \\
&= \frac{3\sqrt{2}}{2}(\cos(\pi/4) \pm i\sin(\pi/4))
\end{aligned}$$

Así pues:

$$x_n = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^n (k_1\cos(n\pi/4) + k_2\sin(n\pi/4))$$

Tengamos ahora en cuenta que $\Delta_1(3, 1/2, 9) = 3$ y $\Delta_2(3, 1/2, 9) = 9/2$; concluiremos entonces que $k_1 = 1 = k_2$. En efecto:

$$\begin{aligned}
3 &= \frac{3\sqrt{2}}{2}(k_1\cos(\pi/4) + k_2\sin(\pi/4)) \\
&= \frac{3\sqrt{2}}{2}(k_1\frac{\sqrt{2}}{2} + k_2\frac{\sqrt{2}}{2}) \\
\frac{9}{2} &= \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^n (k_1\cos(n\pi/4) + k_2\sin(n\pi/4)) \\
&= \frac{9}{2}(k_1\cos(\pi/2) + k_2\sin(\pi/2)) \\
&= \frac{9}{2}k_2
\end{aligned}$$

o sea, el sistema es:

$$\begin{aligned} 2 &= k_1 + k_2 \\ 1 &= k_2 \end{aligned}$$

por lo que:

$$x_n = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^n (\cos(n\pi/4) + \sin(n\pi/4))$$

Se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} x_n = 0 \text{ sii } & \cos(n\pi/4) = -\sin(n\pi/4) \\ & \text{sii existe un número entero } k \text{ tal que } \frac{n}{4} = \frac{3}{4} + k \\ & \text{sii existe un número entero } k \text{ tal que } n = 3 + 4k \\ & \text{sii } n \equiv 3 \pmod{4} \end{aligned}$$

Así pues, $\Delta_n(3, 1/2, 9) = 0$ sii $n \equiv 3 \pmod 4$. □

Ejemplo 2.6.21. Encuentre una fracción que represente al número real:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{10^{k+1}}$$

y otra que represente al número real:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{10^{3k+3}}$$

Solución. Para encontrar la fracción que se nos pide, seguiremos los siguientes pasos:

1. Planteamiento de un problema de recurrencia; sea α un número real distinto de 1 and $\{u_n\}$ la sucesión definida recurrentemente por las igualdades:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ x_n &= x_{n-1} + n\alpha^{n+1} \end{aligned}$$

demostremos en primer lugar que para todo número natural n:

$$x_n = \frac{\alpha^2 - \alpha^{n+2} - n\alpha^{n+2} + n\alpha^{n+3}}{(1-\alpha)^2}$$

En efecto, ...

2. Cálculo de límite; sea α un número real tal que $0 \leq \alpha < 1$. Entonces:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2$$

En efecto,

3. Búsqueda de la fracción; sea $\alpha = 10^{-3}$

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{10^{3(k+1)}}$$

Si $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ entonces:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{1-\alpha} &= \frac{10^{-3}}{1-10^{-3}} \\ &= \frac{10^{-3}}{(10^3-1)10^{-3}} \\ &= \frac{1}{10^3-1} \\ &= \frac{1}{999} \end{aligned}$$

por tanto:

$$x = \frac{1}{999^2} = \frac{1}{998001}$$

y así:

$$\begin{aligned} \frac{1}{998001} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{10^{3(k+1)}} \\ &= 0{,}000001002003004005006007\ldots \end{aligned}$$

□

2.7. Ejercicios

1. Resuelva la relación de recurrencia:

$$u_n = u_{n-1} + d$$

X

y encuentre la solución particular que cumple $u_0 = a$, donde a es una constante (*progresión artimética*). (sol. $x_n = dn + a$)

2. Resuelva la relación de recurrencia:

$$u_n = ku_{n-1}$$

y encuentre la solución particular que cumple $u_0 = a$, donde a es una constante (*progresión geométrica*). (sol. $x_n = ak^n$)

3. Resuelva la relación de recurrencia:

$$u_{n+2} - 6u_{n+1} + 9u_n = 0, \text{ para todo } n \geq 0.$$

y encuentre la solución particular que cumple: $u_0 = 1$ y $u_1 = 6$.

4. Resuelva el problema de recurrencia:

$$u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n, \text{ para todo } n \geq 0.$$

X

y encuentre la solución particular que cumple: $u_0 = 2$, $u_1 = 5$ y $u_2 = 15$.