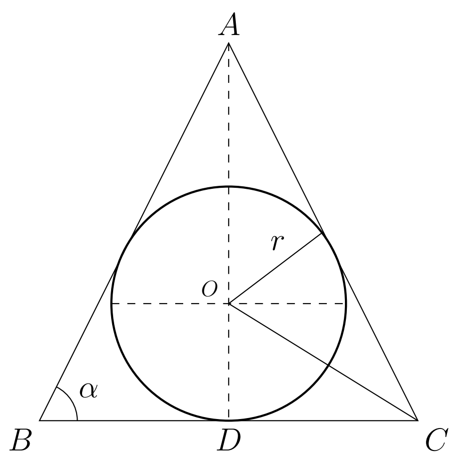
Relación Ejercicios 2

Javier Gómez López

2020/2021

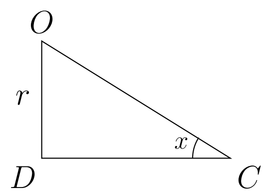
Ejercicio 12. Demuéstrese que de todos los triángulos isósceles que se pueden circunscribir a una circunferencia de radio r, el de área mínima es el equilátero de altura $3r$.



Sea α el ángulo en radianes de $\angle ABC = \angle ACB$ puesto que el triángulo es isósceles. Además, podemos afirmar que $\overline{AB} = \overline{AC}$. Ahora, recordemos que el área del triángulo es:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} \tag{1}$$

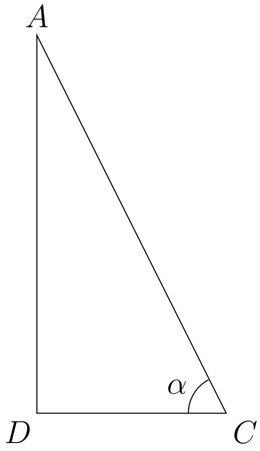
Ahora consideremos el triangulo $\triangle CDO$:



donde $x = \frac{\alpha}{2}$. Si observamos el triángulo general nos damos cuenta de que $\overline{BC} = 2 \cdot \overline{DC}$. Así,

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} = \frac{\overline{CD}}{r}$$
$$\overline{CD} = r \cdot \cot(x)$$

Por otro lado, en el triángulo $\triangle CDA$



tenemos que $\alpha = 2x$ y de aquí podemos deducir:

$$\tan(2x) = \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\cos(2x)} = \frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AD}}{r \cdot \cot(x)}$$

$$\overline{AD} = r \cdot \cot(x) \tan(2x)$$

Sustituyendo esto en (1) obtenemos que:

$$A(x) = \frac{2r\cot(x)}{2} \cdot r\cot(x)\tan(2x)$$

$$A(x) = r^2 \cdot \cot^2(x)\tan(2x) \qquad (0 < x \leq \frac{\pi}{4})$$

Si operamos:

$$A(x) = r^2 \cdot \left(\frac{1}{\tan^2(x)}\right) \cdot \left(\frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}\right) = 2r^2 \cdot \left(\frac{1}{\tan(x)(1-\tan^2(x))}\right) =$$

$$= 2r^2 \cdot \left(\frac{1}{\tan(x)-\tan^3(x)}\right) = 2r^2 \cdot (\tan(x)-\tan^3(x))^{-1}$$

Por tanto, ya tenemos una expresión del área en función del ángulo cotángulo del triángulo. Si derivamos esta función obtenemos que:

$$A'(x) = 2r^2 \cdot (-1) \cdot (\tan(x)-\tan^3(x))^{-2} \cdot (\sec^2(x) - 3\tan^2(x)\sec^2(x))$$

$$A'(x) = -2r^2 \cdot \sec^2(x)(1-3\tan^2(x))(\tan(x)-\tan^3(x))^{-2}$$

$$A'(x) = \frac{-2r^2 \cdot \sec^2(x)(1-3\tan^2(x))}{(\tan(x)-\tan^3(x))^2}$$

Si ahora buscamos hacer $A'(x) = 0$, buscaremos extremos relativos de la función $A(x)$:

$$-2r^2 \cdot \sec^2(x)(1 - 3\tan^2(x)) = 0 \Longrightarrow 1 - 3\tan^2(x) = 0$$

$$\tan^2(x) = \frac{1}{3}$$

$$\tan(x) = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$x = \tfrac{\pi}{6} \qquad \text{ó} \qquad x = -\tfrac{\pi}{6}$$

Pero antes hemos establecido que $0 < x \leq \frac{\pi}{4}$ así, la única solución posible es $x = \frac{\pi}{6}$.

Ahora estudiamos el signo de la primera derivada para determinar si el valor obtenido es máximo o es mínimo:

	$(-\infty, \frac{\pi}{6})$	$(\frac{\pi}{6}, \infty)$
$A'(x)$	$A'(\frac{\pi}{7}) = -2{,}74r^2$	$A'(\frac{\pi}{5}) = 7{,}57r^2$
$A(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

Así, podemos concluir que $x = \frac{\pi}{6}$ es mínimo de la función (pues al ser r una distancia siempre $r \geq 0$), y por tanto, $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Antes hemos demostrado que la altura

$$h = r \cdot \cot(x)\tan(2x)$$

Si sustituimos:

$$h = r \cdot \cot(\frac{\pi}{6}) \cdot \tan(\frac{\pi}{3}) = 3r$$

Y así, queda demostrado que de todos los triángulos isósceles que se pueden circunscribir en una circunferencia de radio r, el de área mínima es el equilatero de altura $3r$.