1.20)

Dados las funciones $f, g : A \to \mathbb{R}$ y un punto $a \in A$, la derivada de la función producto $f \cdot g$ en a vendría dada, si la hubiera, por:

$$(fg)'(a) = f'(a)\,g(a) + g'(a)\,f(a)$$

Aunque sabemos que f es derivable en a, no sabemos si g lo es (solo sabemos que g es continua)

Por definición, $f \cdot g : A \to \mathbb{R}$ es derivable en $a \in A$ si el $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(fg)(a+h) - (fg)(a)}{h}$ existe.

Como $f(a) = 0$ entonces:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)\,g(a+h) - f(a)\,g(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(a+h) - f(a)}{h}\right] g(a+h) =$$

$$= f'(a)\,g(a)$$

Como f es derivable en a, $f'(a)$ existe, y como g es continua en a, $g(a)$ existe. Por tanto $f \cdot g$ es derivable en a y $(fg)'(a) = f'(a)\,g(a)$.