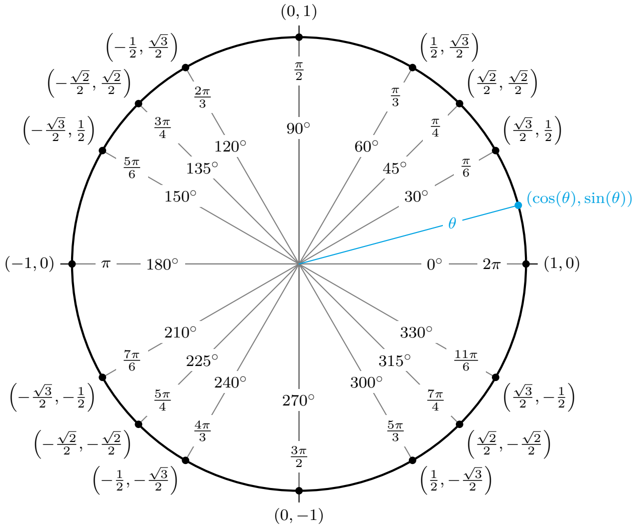
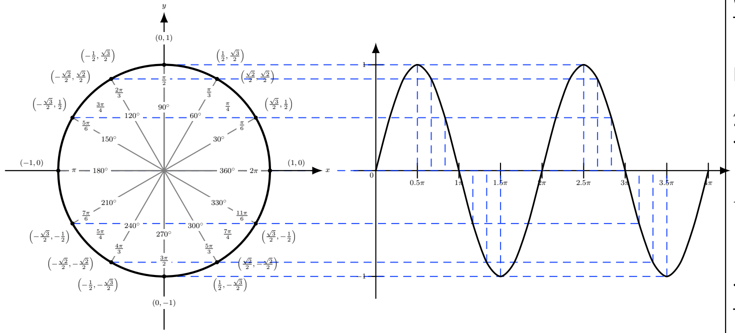
This is an example Cheatsheet you could create with this Git Repo.

Trigonometrie

Einheitskreis





Trigonometrische Funktionen

$$\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \tag{1}$$

$$\cot\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} \tag{2}$$

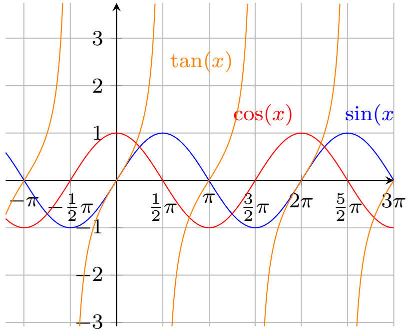
$$\sinh x = \frac{e^x e^x}{2} \tag{3}$$

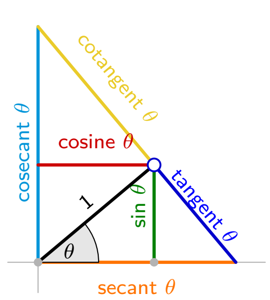
$$\cosh x = \frac{e^x + e^x}{2} \tag{4}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \tag{5}$$

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} \tag{6}$$

Sin	Cos	Tan	Cot
G	A	G	A
H	H	A	G





Additionstheoreme

$$\sin\alpha \pm \beta = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta \tag{7}$$

$$\cos\alpha \pm \beta = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta \tag{8}$$

$$\sin 2 \cdot \alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \tag{9}$$

$$\cos 2 \cdot \alpha = \cos^2\alpha \sin^2\alpha \tag{10}$$

$$\tan\alpha \pm \beta = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \cdot \tan\beta} \tag{11}$$

$$\cot\alpha \pm \beta = \frac{\cot\alpha \cdot \cot\beta \mp 1}{\cot\beta \pm \cot\alpha} \tag{12}$$

Parität

$$\sin -\varphi = -\sin\varphi \tag{13}$$

$$\cos -\varphi = +\cos\varphi \tag{14}$$

$$\tan -\varphi = -\tan\varphi \tag{15}$$

$$\cot -\varphi = -\cot\varphi \tag{16}$$

Allgemein

Geometrische Formen

Kreisformel:

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} \tag{17}$$

Trapez:

$$A = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h \tag{18}$$

Kugel:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \tag{19}$$

$$A = 4\pi R^2 \tag{20}$$

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2 \tag{21}$$

Taschenrechnen

- bei Trigonometrischen Integralen mit $\pi, \sin \cdots$ aus RAD stellen
- Für Vektorfelder 2D mit einer Variable verwende "Tableünd gib die Vektorfunktionen als f(x) und g(a) an

Funktionen

Zwei-Punkt Formel

$$f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) + y_1 \tag{22}$$

Bogenlänge

$$\int_a^b \sqrt{1 + f(x)^2}\, dx \tag{23}$$

Ableiten

Quotienten Regel

$$f(x) = \frac{z}{n} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{z' \cdot n - n' \cdot z}{n^2} \tag{24}$$

Standardableitungen

$f(x) = a^{u(x)} \Leftrightarrow f'(x) = \ln a \cdot u'(x) \cdot a^{u(x)}$

Linearität

$$f(x) \cdot a = f(x \cdot a) \qquad \forall a \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{R}^n \tag{25}$$

$$f(x) + f(y) = f(x + y) \qquad V_{x,y} \in \mathbf{R}^n \tag{26}$$

Lineares Beispiel: $f(x) = 3x$ mit $a = 3,\ x = 2,\ y = 5$

1. Homogenitätstest: $f(2 \cdot 3) \stackrel{?}{=} 3 \cdot f(2)$

   $f(6) = 6 \cdot 3 = 18$ vs. $3 \cdot 3 \cdot 2 = 3 \cdot 6 = 18 \quad \Rightarrow 18 = 18\ (\checkmark)$

2. Additivitätstest: $f(2) + f(5) \stackrel{?}{=} f(2 + 5)$

   $(3 \cdot 2) + (3 \cdot 5) = 6 + 15 = 21$ vs. $3 \cdot 7 = 21 \quad \Rightarrow 21 = 21\ (\checkmark)$

Gegenbeispiel: $f(x) = x^2$ mit $a = 2,\ x = 3,\ y = 4$

1. Homogenitätstest: $f(3 \cdot 2) \stackrel{?}{=} 2 \cdot f(3)$

   $f(6) = 6^2 = 36 \quad vs. \quad 2 \cdot 3^2 = 18 \quad \Rightarrow 36 \neq 18\ (\times)$

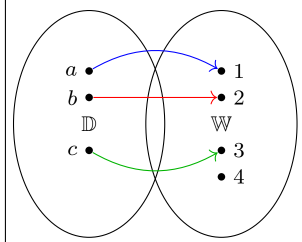
2. Additivitätstest: $f(3) + f(4) \stackrel{?}{=} f(3 + 4)$

   $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \quad vs. \quad 7^2 = 49 \quad \Rightarrow 25 \neq 49\ (\times)$

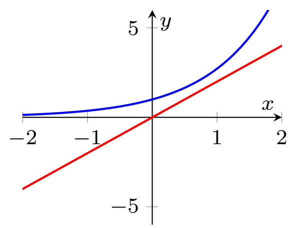
Injektiv

$\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$:

- Jedes Element der Zielmenge höchstens einmal als Funktionswert
- Alle x von $\mathbb{D}$ können genau ein y von $\mathbb{W}$ durch $f(x)$ erhalten. $\mathbb{W}$ muss nicht aber kann aber vollständig agbedeckt sein.



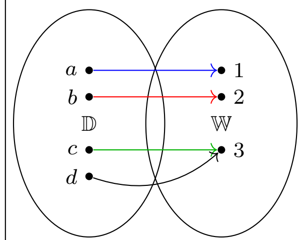
Injective (e^x)



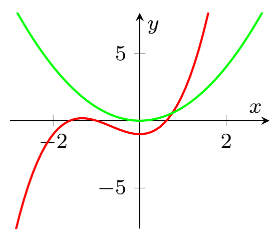
Surjektiv

$\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$:

- Jedes Element der Zielmenge mindestens einmal als Funktionswert.
- $\mathbb{W}$ kann durch $f(x)$ mit x von $\mathbb{D}$ vollständig abgedeckt werden.



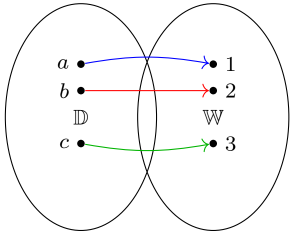
Surjective (x^3)



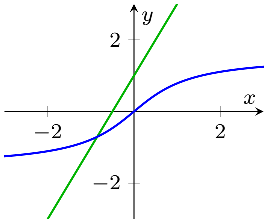
Bijektiv

$\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

- Jedes Element der Zielmenge genau einmal als Funktionswert.
- Bijektive Funktionen haben eine Inverse Funktion.



Bijective (2x + 1)



Polynome

Hornerschema

Benötigt/Wichtig

- Leitkoeffizient von $q(x)$ = 1
- Erratene Nullstelle
- grad(r) < grad(q)

Möglichkeiten

- Polynom an einer Steller auswerten
- Polynomdivision
- Zahlensystem umformen
- Taylor Reihen entwickeln noch hinzufügen

Formel

$$\frac{P(x)}{q(x)} = S(x) + \frac{r(x)}{q(x)} \tag{27}$$

Beispiel

$P(x) = -2x^5 - 3x^4 - 8x^3 - 11x^2 + 4$

$q(x) = -2x^2 + 3x - 1 = \boxed{1} - 2(x^2 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2})$

$\boxed{2}$	-2	-3	-8	-11	0	4
$\frac{1}{2}$	$\cdot$	$\cdot$	1	3	8	16
$\frac{3}{2}$	$\cdot$	-3	-9	-24	-48	$\cdot$
$\boxed{4}$	-2	-6	-16	-32	-40	20

$$\frac{P(x)}{q(x)} \Rightarrow \overbrace{-\frac{1}{2}}^{\boxed{5}} \left(\boxed{-2x^3 - 6x^2 - 16x - 32} + \frac{\boxed{-40x + 20}}{\boxed{x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}}} \right)$$

$$= x^3 + 3x^2 + 8x + 16 + \frac{-40x + 20}{-2x^2 + 3x - 1}$$

Anleitung

1. Leitkoeffizient von $q(x)$ auf 1 setzen
2. Tabelle mit den Koeffizienten und den Punkten erstellen
3. Den Pfeilen nach unten entlang addieren und nach oben mit jeweiligem Zeilenfaktor (links) multiplizieren
4. Gr($P(x)$) - Gr($q(x)$) = Grad($S(x)$). Der Rest gehört zu $r(x)$
5. Wenn Schritt 1 dann muss durch den ausgeklammerten Faktor geteilt werden. Bei $r(x)$ Faktor in den Nenner ziehen.

Nullstellen

Mitternachtsformel

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow x_1/x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{28}$$

Satz über rationale Nullstelen - Empfohlen bei kleinen Koeffizienten (a_n)

$$f(x) = a_n x^2 + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \mid a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z} \quad (\mathbf{a_n \neq 0}) \tag{29}$$

$$x_0 = \frac{P}{q}(p, q \in \mathbb{Z}, ggT(P,q) = 1) \Rightarrow a_0 \text{ durch P teilbar, } a_n \text{ durch q teilbar} \tag{30}$$

$$\Rightarrow T = \pm \frac{\text{Teiler von } a_0}{\text{Teiler von } a_n}$$

Analysis

Integrale

Integrations-Regeln

Lineare Integration

$$\int f(m \cdot x + q)\, dx = \frac{1}{m} F(m \cdot x + q) + c \tag{31}$$

$$\int (m \cdot x + q)^p\, dx = \frac{1}{m \cdot (p+1)} \cdot (m \cdot x + q)^{p+1} + c \tag{32}$$

$$\int a^{m \cdot x + q}\, dx = \frac{1}{m \cdot (p+1)} \cdot (m \cdot x + q)^{p+1} + c \tag{33}$$

$$\int y_0 \cdot a^{\frac{x - x_0}{\Sigma}}\, dx = \frac{\Sigma}{\ln a} \cdot y_0 \cdot a^{\frac{x - x_0}{\Sigma}} + c \tag{34}$$

$$\int A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)\, dt = -\frac{A}{\omega} \cdot \cos(\omega \cdot + \varphi) + c \tag{35}$$

Uneigentliche Integrale

Formeln

$$\int_{x_0}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{s \to \infty} \int_{x_0}^{s} f(x)\, dx \tag{36}$$

$$\int_{-\infty}^{x_E} f(x)\, dx = \lim_{s \to \infty} \int_{s}^{x_E} f(x)\, dx \tag{37}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{r \to \infty} \int_{-r}^{x_0} f(x)\, dx + \lim_{s \to \infty} \int_{x_0}^{s} f(x)\, dx \tag{38}$$

$$\int_{x_0}^{x_E} f(x)\, dx = \lim_{r \nearrow x_p} \int_{x_0}^{r} f(x)\, dx + \lim_{s \searrow x_p} \int_{s}^{X_E} f(x)\, dx \tag{39}$$

Substitution

Normale Substitution

$$\int_a^b f(g(x)) dx \quad | \quad u(x) = g(x) \quad | \quad u'(x) = g'(x) \quad | \quad du = u'(x) \cdot dx$$

$$\int_{u(a)}^{u(b)} u(x) \frac{1}{u'(x)}\, du \quad | \quad dx = \frac{1}{u'(x)}\, du \tag{40}$$

Wenn nach einer Substitution noch ein x in der Gleichung vorhanden ist, muss dieses in ein u umgewandelt werden.

$$\int \frac{e^{2x}}{1 + e^2}\, dx \quad | \quad u = 1 + e^x \quad | \quad u' = e^x \quad | \quad du = e^x\, dx \Leftrightarrow du = \frac{1}{e^x}$$

$$\int \frac{e^{2x}}{u} \cdot \frac{1}{e^x}\, du = \int \frac{e^x}{u}\, du \quad | \quad u = 1 + e^x \Leftrightarrow e^x = u - 1$$

$$\int \frac{u - 1}{u}\, du = \int \frac{u}{u} - \frac{1}{u}\, du = \int 1 - \frac{1}{u}\, du = \underline{\underline{u - \ln|u| + c}}$$

Umgekehrte Substitution (Example)

Substitution:

$x = \sqrt{2}u$

$\frac{dx}{du} = \sqrt{2} \Rightarrow dx = \sqrt{2}du$

$$\int_0^a \sqrt{x^2 + 2}\, dx = \int_0^a \sqrt{2(1 + \frac{x^2}{2})}\, dx$$

$$\int_0^a \sqrt{2} \sqrt{(1 + \frac{x^2}{2})}\, dx$$

$$\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \sqrt{2} \sqrt{(1 + \frac{(\sqrt{2}u)^2}{2})}\, \sqrt{2}\, du = \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} 2 \sqrt{(1 + \frac{2u^2}{2})}\, du$$

$$= 2 \cdot \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \sqrt{(1 + u^2)}\, du$$

Partielle Integration

V	D	I
+	$\sqrt{1+u^2}$	1
-	$\frac{x}{\sqrt{1+u^2}}$	x

$$\Rightarrow 2 \left(\text{"} \left[u\sqrt{1 + u^2} \right]_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \text{"} - \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \frac{u^2}{\sqrt{1 + u^2}}\, du \right)$$

$$= 2 \left(\text{""} - \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \frac{(1 + u^2) - 1}{\sqrt{1 + u^2}}\, du \right)$$

$$= 2 \left(\text{""} - \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \frac{1 + u^2}{\sqrt{1 + u^2}}\, du - \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}}\, du \right)$$

$$= 2 \left(\left[u\sqrt{1 + u^2} \right]_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} - \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \sqrt{1 + u^2}\, du - \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}}\, du \right)$$

$$\Rightarrow 2F = 2 \left(\left[u\sqrt{1 + u^2} \right]_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} - \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}}\, du \right)$$

$$= \left[u\sqrt{1 + u^2} \right]_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} - \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}}\, du = \left[u\sqrt{1 + u^2} - \arcsin u \right]_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + (\frac{a}{\sqrt{2}})^2} - \arcsin \frac{a}{\sqrt{2}} - 0 = \frac{a}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{2}a^2} - \arcsin \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Standardintegrale

Standartintegrale

$$\int m\,dx = m \cdot x + q \tag{41}$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln x} + c \tag{42}$$

$$\int e^x\,dx = e^x \tag{43}$$

$$\int x^p\,dx = \frac{1}{p+1} \cdot x^{p+1} + c \quad n \neq -1 \tag{44}$$

$$\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c \tag{45}$$

$$\int_{x_0}^{x_E} x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln\frac{x_E}{x_0} \tag{46}$$

Sinus

$$\int \sin x \cdot \cos x\,dx = \frac{1}{2} \cdot \sin^2 x + c \tag{47}$$

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cdot \cos x) + c \tag{48}$$

$$\int \sinh x\,dx = \cosh x + c \tag{49}$$

Cosinus

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int 1 + \tan^2 x$$
$$= \tan x + c \tag{50}$$

$$\int \cosh x\,dx = \sinh x + c \tag{51}$$

$$\int \cot x\,dx = \frac{1}{\tan x} + c$$
$$= \ln|\sin x| + c = \frac{\cos x}{\sin x} + c \tag{52}$$

$$\int \coth x\,dx = \frac{\cosh x}{\sinh x} + c \tag{53}$$

Tangents

$$\int \tan x\,dx = \frac{1}{\cot x} + c$$
$$= -\ln|\cos x| + c = \frac{\sin x}{\cos x} + c \tag{54}$$

$$\int \tanh x\,dx = \frac{\sinh x}{\cosh x} + c \tag{55}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x \tag{56}$$

Partialle Integration

Formel

$$\int f(x) \cdot g(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cdot f^k(x) \cdot g^{-1-k}(x) + (-1)^n \int f^n(x) \cdot g^{-n}(x)\,dx \tag{57}$$

$$\int f(x) \cdot g(x)\,dx = F(x) \cdot g(x) - \int F(x) \cdot g(x)\,dx \tag{58}$$

Vorzeichen	Differenzieren	Integrieren
+	f	g
-	f^1	g^{-1}
+	f^2	g^{-2}
$\pm$	$\vdots$	$\vdots$
$(-1)^{n-1}$	f^{n-1}	g^{-n+1}
$(-1)^n$	f^n	g^{-n}

Beispiel

$$\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \cos^2 x + x \cdot \sin x\,dx$$

V	D	I
+	$\cos x$	$\cos x$
-	$-\sin x$	$\sin x$

$$= \cos x \cdot \sin x + \int_0^{2\pi} \sin^2 x\,dx$$

$$F = \cos x \cdot \sin x + \int_0^{2\pi} 1\,dx$$

$$-\int_0^{2\pi} \cos^2 x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}(\cos x \cdot \sin x + x)$$

V	D	I
+	x	$\sin x$
-	1	$-\cos x$
+	0	$-\sin x$

$$= x \cdot -\cos x + \sin x$$

$$-\int_0^{2\pi} 0 \cdot \sin x\,dx$$

$$= x \cdot -\cos x + \sin x$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}\left[\frac{1}{2}(\cos x \cdot \sin x + x + \sin x - x \cdot \cos x)\right]_0^{2\pi}$$

Mehrfachintegrale

Beispiel hinzufügen

Satz von Fubini

$$\int_G f\,dA = \int_{y_0}^{y_E}\int_{x_0}^{x_E} f(x;y)\,dx\,dy = \int_{x_0}^{x_E}\int_{y_0}^{y_E} f(x;y)\,dy\,dx \tag{59}$$

Flächenintegral (Rechteck)

$$\int_G f\,dA = \int_{y_0}^{y_E}\int_{u(x)}^{v(x)} f(x;y)\,dx\,dy = \int_{x_0}^{x_E}\int_{u(y)}^{v(y)} f(x;y)\,dy\,dx \tag{60}$$

Flächenintegral (Dreieck)

$$\int_G f\,dA = \int_{y_0}^{y_E}\int_{x_0}^{g(x)} f(x;y)\,dx\,dy = \int_{x_0}^{x_E}\int_{y_0}^{g(y)} f(x;y)\,dy\,dx \tag{61}$$

Volumenintegral

$$\int_Q f\,dV = \int_{y_0}^{y_E}\int_{x_0}^{x_E}\int_{z_0}^{z_E} f(x;y;z)\,dx\,dy\,dz \tag{62}$$

Levelmengen

Definition

$$f^{-1}(\{L\}) = \{p \in A | f(p) = L\} \tag{63}$$

Anleitung

1. Level von L bestimmen $f(x,y) \overset{!}{=} L$
2. Nach einer Variablen auflösen (x/y)
3. Definitionsbereich $\mathbb{D}$ bestimmen
4. L definieren
5. Höhenlinien einzeichnen

Beispiel

$f(x,y) = x^2 + y^2$

$\boxed{1} : x^2 + y^2 \overset{!}{=} L$

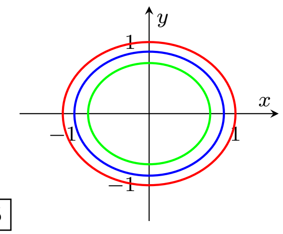
$\boxed{2} : y^2 = L - x^2$

$y = \pm\sqrt{c - x^2}$

$\boxed{3} : \mathbb{D} \Rightarrow c - x^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow c \geqslant x^2$

$\boxed{4} : L = \{0.5; 0.75; 1\}$

$\{0.5; 0.75; 1\} = \sqrt{L - x^2}$



$\boxed{5}$

Trapezformel (Numerisch)

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{h}{2}(f(x_{i-1})) + f(x_i) \tag{64}$$

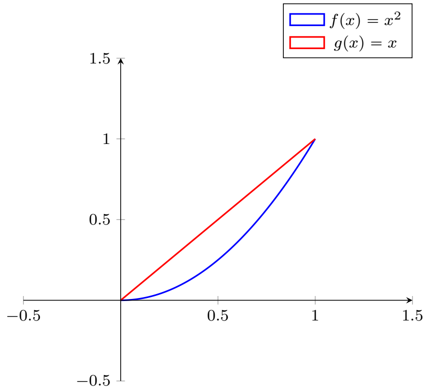
1. Stützstellen bestimmen und ausrechnen
2. Mit Taschenrechner alle Stützstellen mittels Formel 64 zusammenrechnen

Integralfläche berechnen (analytisch)

Sobald sich Funktionen schneiden, muss das Integral aufgeteilt werden. Wenn die Fläche über/unter der X-Achse berechnet werden soll, kann diese als Funktion $g(x) = 0$ angesehen werden.

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx \tag{65}$$

Scale Plot and make a better example



Anleitung

1. Funktionen gleich setzen, um Nullstellen zu berechnen
2. Integrale bilden
3. Berechnen

Volumenintegral berechnen

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx \tag{66}$$

Anleitung

1. Rotation um Y-Achse → Umkehrfunktion bestimmen
2. Mit der Formel 66 das Volumen berechnen

Schwerpunkt berechen

$$\frac{1}{V}\pi \int_a^b x \cdot f(x)^2 \, dx \tag{67}$$

Anleitung

1. Integral für Fläche erstellen
2. Volumen berechnen
3. Schwerpunkt berechnen 67

Komplexe Zahlen

Koordinaten Arten

Kartesische Koordinaten

$$z = x + iy \tag{68}$$

Polarkoordinaten

Umrechnung kartesisch → polar:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (x \neq 0)$$

Komplexe Polarform

$$\operatorname{cis}\varphi = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

$$z = r\operatorname{cis}\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{69}$$

Euler-Form

$$z = re^{i\varphi} \quad \text{(äquivalent zur Polarform)} \tag{70}$$

$$x = r \cdot \cos\phi \quad | \quad y = r \cdot \sin\phi \tag{71}$$

$$\varphi = \arctan\frac{x}{y} \tag{72}$$

$$z = re^{i\varphi} = x + iy = r \cdot \operatorname{cis}\varphi \tag{73}$$

Komplexe Zahlen

Allgemeines Komplexe Zahlen

$$i^2 = -1 \tag{74}$$

- Realteil von z : $\operatorname{Re}\{z\}$:= x
- Imaginärteil von z : $\operatorname{Im}\{z\}$:= y

Arithmetische Form

$$z = x + y \cdot i \tag{75}$$

- Betrag von z: $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$
- Komplex-Konjugierte von z : $z^* := x - y \cdot i$

Addition

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + (y_1 + y_2) \cdot i \tag{76}$$

Subtraktion

$$z_1 - z_2 = x_1 - x_2 + (y_1 - y_2) \cdot i \tag{77}$$

Multiplikation

$$z_1 \cdot z_2 = x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2 + (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) \cdot i \tag{78}$$

Division

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2} \cdot i \tag{79}$$

Betrag und Konjugation

$$z \cdot z^* = |z|^2 \tag{80}$$

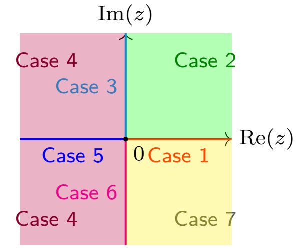
Komplexe aus dem Nenner bringen

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot z_2^*}{|z_2|^2} = \frac{(x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)}{x_2^2 + y_2^2} \tag{81}$$

- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- $|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

- **Dreiecks-Ungleichung**
  $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$
  $|z_1 - z_2| \geqslant |z_1| - |z_2|$

Arg-Funktion



$$\arg(z) = \begin{cases} 0 & \text{if } \operatorname{Re}(z) \geqslant 0 \wedge \operatorname{Im}(z) = 0 \quad | \quad \text{CASE 1} \\ \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}\right) & \text{if } \operatorname{Re}(z) > 0 \wedge \operatorname{Im}(z) > 0 \quad | \quad \text{CASE 2} \\ \frac{\pi}{2} & \text{if } \operatorname{Re}(z) = 0 \wedge \operatorname{Im}(z) > 0 \quad | \quad \text{CASE 3} \\ \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}\right) + \pi & \text{if } \operatorname{Re}(z) < 0 \quad | \quad \text{CASE 4} \\ \pi & \text{if } \operatorname{Re}(z) < 0 \wedge \operatorname{Im}(z) = 0 \quad | \quad \text{CASE 5} \\ \frac{3\pi}{2} & \text{if } \operatorname{Re}(z) = 0 \wedge \operatorname{Im}(z) < 0 \quad | \quad \text{CASE 6} \\ \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}\right) + 2\pi & \text{if } \operatorname{Re}(z) > 0 \wedge \operatorname{Im}(z) < 0 \quad | \quad \text{CASE 7} \end{cases}$$

Koordinaten Wechsel

Polarkoordinaten

Polar zu Kartesisch

$$x = r \cdot \cos\phi, \quad y = r \cdot \sin\phi \tag{82}$$

Kartesisch zu Polar

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan\phi = \frac{y}{x} \tag{83}$$

Basisvektoren

$$\begin{bmatrix} \hat{e}_r \\ \hat{e}_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{e}_x \\ \hat{e}_y \end{bmatrix} \tag{84}$$

Integration

$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \mapsto r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi \tag{85}$$

$$\tag{86}$$

Zylinderkoordinaten

Zylinder zu Kartesisch

$$x = \rho \cos\phi, \quad y = \rho \sin\phi, \quad z = z \tag{87}$$

Kartesisch zu Zylinder

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \sin\phi = \frac{y}{\rho}, \quad z = z \tag{88}$$

Basisvektoren

$$\begin{bmatrix} \hat{e}_\rho \\ \hat{e}_\phi \\ \hat{e}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{e}_x \\ \hat{e}_y \\ \hat{e}_z \end{bmatrix} \tag{89}$$

Integration

$$\mathrm{d}V \mapsto \rho\, \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\phi\, \mathrm{d}z \tag{90}$$

Kugelkoordinaten

Kugel zu Kartesisch

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \; y = r\sin\theta\sin\phi, \; z = r\cos\theta \tag{91}$$

Kartesisch zu Kugel

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \; \tan\phi = \frac{y}{x}, \; \cos\theta = \frac{z}{r} \tag{92}$$

Basisvektoren

$$\begin{bmatrix} \hat{e}_r \\ \hat{e}_\theta \\ \hat{e}_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{e}_x \\ \hat{e}_y \\ \hat{e}_z \end{bmatrix} \tag{93}$$

Integration

$$\mathrm{d}V \mapsto r^2 \sin\theta\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\phi \tag{94}$$

Lineare Algebra

Vektoranalysis

Begriffe

- Skalarfeld: Definiert was an jedem Punkt im Raum gemessen wird
- Levelmengen: Zeigen wo dieses Feld einen bestimmten Wert hat
- Gradientenfeld: Beschreibt, wie und wohin sich der Wert des Skalarfelds ändert

Vektorfelder

Einheitsvektorfeld: $\vec{v}(p) = \hat{v}(p)$ (95)

Homogenes Vektorfeld: $\vec{v}(p) = \vec{w}$ (96)

$$\vec{v} = \underbrace{\nabla\phi}_{\text{Gradientenfeld (quellenfrei)}} + \underbrace{\nabla \times \vec{A}}_{\text{Rotationsfeld (wirbelfrei)}} \tag{97}$$

- ϕ: Skalarpotential (quellenfreier Anteil)
- $\vec{A}$: Vektorpotential (wirbelfreier Anteil)
- Zerlegung nach dem Helmholtz-Theorem

Lineare Abbildung

$a(x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v}) = x \cdot a(\vec{u}) + y \cdot a(\vec{v})$

Normalenvektor / Einheitsnormalenvektor

$$\vec{n} := \vec{e_u} \times \vec{e_v} \tag{98}$$

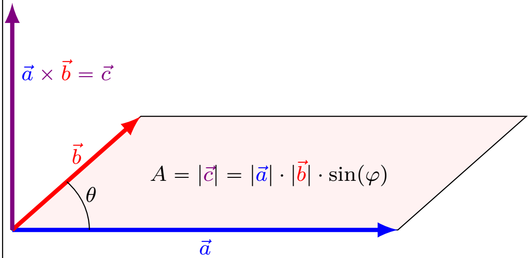
$$\hat{n} = \pm \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n} \tag{99}$$

Begriffe Vektoren

- **Skalarprodukt**
  - $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0 \Rightarrow \vec{v} \perp \vec{w}$
  - $\langle a \cdot \vec{v}, \vec{w} \rangle = a \cdot \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$
  - $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$
  - $\angle(\vec{v}, \vec{w}) = \arccos\left(\frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}\right)$

Kreuzprodukt

Nur in 3D



Parameteriesierte Kurve

Anleitung

1. Funktion zeichnen
2. τ einsetzen und Wert für jeweilige Achse bestimmen
3. Grenzen bestimmen

Formeln

$\gamma : [\tau_0, \tau_E] \Rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\tau \mapsto \vec{\gamma}(\tau) := \begin{bmatrix} \gamma_1(\tau) \\ \gamma_2(\tau) \\ \vdots \\ \gamma_n(\tau) \end{bmatrix} \tag{100}$$

- Geschwindigkeitsvektor: $\vec{v}(\tau) := \dot{\vec{\gamma}}(\tau)$
- Bahngeschwindigkeit: $\vec{v}(\tau) := |\vec{v}(\tau)|$
- Bahnvektor für $\vec{v}(\tau) \neq 0$: $\hat{e}(\tau) := \hat{v}(\tau)$
- Beschleunigungsvektor: $\vec{a}(\tau) := \dot{v}(\tau)$
- Bahnbeschleunigung: $a_B(\tau) := \langle a(\tau), \hat{e}(\tau) \rangle$
- Bahn: $B := \vec{\gamma}([\tau_0, \tau_E])$
- Ortsvektor zeigt von Ursprung auf Punkt der Bahn
- $x^2 \Rightarrow \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$

Kurven Integral

Skalares Kurvenintegral

$$\int_\gamma f \, d\vec{s} = \int_a^b f(\vec{\gamma}(t)) \cdot \left|\dot{\vec{\gamma}}(t)\right| dt \tag{101}$$

Vektorielles Kurvenintegral

$$\int_\gamma \langle \vec{v}(t), d\vec{s} \rangle = \int_a^b \langle \vec{v}(\vec{\gamma}(t)), \dot{\vec{\gamma}}(t) \rangle \, dt \tag{102}$$

Benötigt

- Funktion (Skalar) oder Vektorfeld (Vektoriell)
- Kurve
- Grenzen der Kurve

Anleitung

1. Kurve parameterisieren $\vec{v}$ oder $\vec{w}$
2. Tangentialvektor $\vec{\gamma}$
3. In
4. Sei $\langle \vec{w}, \hat{e} \rangle =: C \equiv$ konst dann gilt: $I = C \cdot \Delta s$

Bogenlänge

$$\Delta s = \int_a^b \left|\dot{\vec{\gamma}}(t)\right| dt \tag{103}$$

1. Gradient der Kurve ableiten
2. Betrag des Gradienten berechnen (Satz des Pythagoras)
3. In 103 einsetzen und integrieren

Standardkurven

Kreis mit Mittelpunkt M

$$s(\tau) = M + \begin{bmatrix} R \cdot \cos\tau \\ R \cdot \sin\tau \end{bmatrix} \tag{104}$$

Zylinder

$$P(\varphi; z) = \begin{bmatrix} R \cdot \cos\varphi \\ R \cdot \sin\varphi \\ z \end{bmatrix} \tag{105}$$

$\varphi \in [0, 2\pi[\,; z \in [0, H]$

Kugel

$$P(\theta; \varphi) = \begin{bmatrix} R \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi \\ R \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \\ R \cdot \cos\theta \end{bmatrix} \tag{106}$$

$\theta \in [0, \pi[\,; \varphi \in [0, 2\pi[$

R = Radius | r = Variable

Kegel

$$P(\varphi; r) = \begin{bmatrix} r \cdot \cos\varphi \\ r \cdot \sin\varphi \\ \frac{H}{R} \cdot r \end{bmatrix} \tag{107}$$

$\varphi \in [0, 2\pi[\,; r \in [0, R]$

Turnus

$$P(\theta; \varphi) = \begin{bmatrix} (R + r \cdot \sin\theta) \cdot \cos\varphi \\ (R + r \cdot \sin\theta) \cdot \sin\varphi \\ r \cdot \cos\theta \end{bmatrix} \tag{108}$$

$\theta, \varphi \in [0, 2\pi[$

Gradient

$$\nabla f := \begin{bmatrix} f_{,1} \\ f_{,2} \\ \vdots \\ f_{,n} \end{bmatrix} \quad (109)$$

- Faktor-Regel: $\nabla(a \cdot g(x)) = a \cdot \nabla g(x)$
- Summen-Regel: $\nabla(g(x) + h(x)) = \nabla g(x) + \nabla h(x)$
- Linearität: $\nabla(a \cdot g(x) + b \cdot h(x)) = a \cdot \nabla g(x) + b \cdot \nabla h(x)$
- Produkt-Regel: $\nabla(g(x) \cdot h(x)) = \nabla g(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot \nabla h(x)$
- Ketten-Regel $\mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$: $\nabla f = g'(h(x^1; \cdots; x^n)) \cdot \nabla h(x)$
- Ketten-Regel $\mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R} : f'(x) = \langle \nabla g(\vec{h}(x)), \vec{h}'(x) \rangle$

Hessematrix

$$H = \nabla^2 f = \begin{bmatrix} f_{,1,1} & f_{,1,2} & \cdots & f_{,1,n} \\ f_{,2,1} & f_{,2,2} & \cdots & f_{,2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{,n,1} & f_{,n,2} & \cdots & f_{,n,n} \end{bmatrix} \quad (110)$$

Schwarz-Clairaut-Young-Satz

$$H = H^T \quad (111)$$

Richtungsableitung

Formel

$$\frac{\nabla f(x_0; y_0)^T \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|} \quad (112)$$

$$|\nabla f| \quad (113)$$

$$\arctan |\nabla f| \quad (114)$$

Folgendes muss gegeben sein:

1. Richtung $\vec{r}$
2. Punkt $P(x_0; y_0)$
3. Gradient ∇f

Anleitung

1. Gradient berechnen
2. Betrag des Richtungsvektor berechnen
3. Punkt in Gradient einsetzen
4. Mit Formel 112 berechnen
5. Steilster Ansteig berechnen (Betrag des Gradienten) 113
6. Steigungswinkel 114

Divergenz

$$\nabla \cdot \vec{v} = v^1_{,1} + v^2_{,2} + \cdots + v^n_{,n} \quad (115)$$

- Quelle: $\nabla \cdot \vec{v} > 0$
- Senke: $\nabla \cdot \vec{v} < 0$
- Quellenfrei: $\nabla \cdot \vec{v} = 0$
- Faktor-Regel: $\nabla \cdot \vec{v} > 0$
- Summen-Regel: $\nabla \cdot \vec{v} + \vec{w} = \nabla \cdot \vec{v} + \nabla \cdot \vec{w}$
- Produkt-Regel: $\nabla \cdot f \cdot \vec{v} = \langle \nabla f, \vec{v} \rangle + fcdot \nabla \cdot \vec{v}$

Beispiel

$$\overrightarrow{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3xz - 4e^{2z} \\ 2z + 2xe^{-4y} \\ 3xy^2 z \end{pmatrix}$$

$$div\, \overrightarrow{v} = \overrightarrow{\nabla} \circ \overrightarrow{v}$$

1. Gradient berechnen :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 3z \qquad \frac{\partial v_y}{\partial y} = -4 \cdot 4x \cdot e^{-4y} \qquad \frac{\partial v_z}{\partial z} = 3xy^2$$

2. Divergenz Gleichung aufstellen

$$div\, \overrightarrow{v} = \overrightarrow{\nabla} \circ \overrightarrow{v} = \sum_{i=x}^{z} \partial_i v_i = 3z - 16x \cdot e^{-4y} + 3xy^2$$

3. Punkt in Gleichung einsetzen und Divergenz bestimmen: $P(x_P|y_P|z_P)$

Rotation

Wichtiges

- $\mathrm{rot}(\vec{x}) = 0 \rightarrow$ konservativ

Rotation

$$\mathrm{rot}\, \vec{v} = \vec{v}^1_{,1} - \vec{v}^1_{,2} \quad (116)$$

Rotation in 3D

$$\mathrm{rot}\, v = \begin{bmatrix} v^3_{,2} - v^2_{,3} \\ v^1_{,3} - v^3_{,1} \\ v^2_{,1} - v^1_{,2} \end{bmatrix} \quad (117)$$

Tangentialebene

$$z = f(x_0; y_0) + \nabla f_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0) + \nabla f_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0) \quad (118)$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} f_x(x_0; y_0) \\ f_y(x_0; y_0) \\ -z \end{pmatrix} \quad (119)$$

119 Normalenvektor, welcher senkrecht auf der Tangentialebene steht

Priorisierung um den Gradienten in die Tangentialebenenform zu bekommen

1. Faktorisieren
2. Additionsverfahren
3. Umstellen und Einsetzen

Beispiel

$$f(x, y) = x^3 + x^2 \cdot \ln y^2 + 1 - 3x$$

$$\nabla f(x, y) = \begin{matrix} 3x^2 - 2x \cdot \ln y^2 + 1 - 3 \\ -\frac{2x^2 y}{y^2+1} \end{matrix}$$

$$f(3; 1) = 27 - 9 \cdot \ln 2 - 9 = 18 - 9 \cdot \ln 2$$

$$\nabla f_x(3; 1) = 27 - 6 \ln 2 - 3 = 24 - 6 \ln 2$$

$$\nabla f_y(3; 1) = -9$$

$$-45 + 9 \ln 2 - 6x \ln 2 + 24x - 9y$$

Totales Differential

Formel für das Totale Differential

$$df = f_x \cdot dx + f_y + \ldots + f_n \quad (120)$$

$$df = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i} \cdot d_{x_i} \quad (121)$$

Anleitung für das Totale Differential

1. Gradient der Funktion berechnen
2. Komponenten des Gradienten addieren
3. Falls benötigt Punkt für Komponenten x,y,.. etc. einsetzen

Matrizen

Begriffe

- **Rechenregel**
  Transposition
  $\bullet (A^T)^T = a \qquad \bullet (A + B)^T = A^T + B^T \qquad \bullet (a \cdot A)^T = a \cdot A^T$
  Multiplikation
  $\bullet A^{n_1 \times m} \cdot B^{m \times n_2} \qquad \bullet (a \cdot A) \cdot B = a \cdot (B \cdot A) = A \cdot (a \cdot B)$
  $\bullet (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) \qquad \bullet A \cdot (B \cdot C) = A \cdot B + A \cdot C$
  $\bullet (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C \qquad \bullet (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
- **Spektrum**
  Menge der Eigenvektoren
- **Spur**
  Diagonale addiert $\mathrm{tr}(A) = A^1_1 + A^1_1 + \cdots + A^n_n = \sum_0^n \lambda_n$
  $\bullet\, \mathrm{tr}(A^T) = \mathrm{tr}(A) \qquad \bullet\, \mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$
  $\bullet\, \mathrm{tr}(a \cdot A) = a \cdot \mathrm{tr}(A) \qquad \bullet\, \mathrm{tr}(A \cdot B) = \mathrm{tr}(B \cdot A)$
- **Bild und Kern**
  Bild
  $\mathrm{img}(a) = a(V) = \{\vec{w} \in \mathbb{W} \,|\, \vec{v} \in \mathbb{V}$ mit $a(\vec{v}) = \vec{w}\}$
  Kern
  $\ker(a) = \{\vec{v} \in \mathbb{V} \,|\, a(\vec{v}) = 0\}$
  $A \cdot \mathrm{Kern} = \vec{0}$
  Ist $\ker(a) = 0$ dann hat a einen trivialen Kern. Eine reguläre Matrix hat einen trivialen Kern.
  Dimensionssatz
  dim(kern(A)) + dim(img(A)) = dim(A)
- **Regulärsatz**
  Einer quadratische Matrix A ist genau dann regulär, wenn gilt $\det(A) \neq 0$
- **Orthogonale Matrizen**
  $A^{-1} = A^T$
  $A^T \cdot A = \mathbb{1}$
- **Quadratische Matrizen**
  $\bullet n^2$ Komponenten
  $\bullet A^3 = A \cdot A \cdot A$ w

Extremwertstellen/Kritische Stellen

$\boxed{1}$: Nebenbedingung nach 0 umstellen

$$\det \begin{pmatrix} f_x & g_x \\ f_y & f_y \end{pmatrix} = \begin{cases} \boxed{2} : L(\vec{x}, \lambda) = f(\vec{x}) + \lambda \cdot g(\vec{x}) + \cdots \\ \boxed{3} : \nabla L \overset{!}{=} 0 \\ \boxed{4} : \lambda \text{eliminieren mit Additionsverfahren} \end{cases} \quad (122)$$

$\boxed{5}$: Gleichungssystem lösen

Definitheit

Fälle

1. Positiv definit $\Delta_k > 0$ (++++) → Minimum
2. Negativ definit $(-1)^k \cdot \Delta_k > 0$ (-+-+) → Maximum
3. Indefinit (+00+0+ | 0+-+0 | —- | +-+-) → Sattelpunkt

Anleitung

1. Kritischen Punkt in Hessematrix einsetzen
2. Definitheit mit Minorenverfahren bestimmen

Standardmatrizen

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{123}$$

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{124}$$

$$\mathbb{P}_{\curvearrowright x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{125}$$

$$\mathbb{P}_{\curvearrowright y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{126}$$

$$\mathbb{Z}_a = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \tag{127}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \tag{128}$$

$$\mathbb{S}_{\curvearrowright x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{129}$$

$$\mathbb{S}_{\curvearrowright y} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{130}$$

$$\mathbb{R}_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{131}$$

$$\mathbb{R}_{\varphi} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \tag{132}$$

$$\mathbb{R}_{-\varphi} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \tag{133}$$

- 123: Einheitsmatrix
- 124: Punktspiegelungs-matrix
- 125: Projektionsmatrix auf X-Achse
- 126: Projektionsmatrix auf Y-Achse
- 127: Zentrische Komponenten Streckungs Matrix
- 128: Komponenten Streckungs Matrix

- 129 Spiegelungs-Matrix an der X-Achse
- 130 Spiegelungs-Matrix an der Y-Achse
- 131 Rotations-Matrix um den Ursprung 180○
- 132 Rotations-Matrix mit Winkel φ
- 133 Rotations-Matrix mit Winkel φ im Gegenuhrezeigersin

Spaltenvektorkonstruktionsverfahren

noch nicht fertig Transformationsmatrix erklärung fehlt noch
Beispiel hinzufügen

1. Vektoren definieren (Einheitsvektoren)
2. Gleichung aufstellen S_{xy}
3. Erhaltene Vektoren zusammenbauen
4. Determinante berechnen

Determinante

Regeln

- $\det(A^T) = \det(A)$
- $\det(a \cdot A^T) = a^n \cdot \det(A)$
- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ falls A regulär
- Zeilen-/Spaltentausch
  $\det(A) \mapsto -\det(A)$
- Multiplikation einer Zeile/Spalte mit a
  $\det(A) \mapsto a \cdot \det(A)$
- Invarianz: Subtrahiert man von einer Zeile ein vielfaches einer anderen Zeile, so ändert sich die Determinante nicht

2x2 Matrizen

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a \cdot d) - (c \cdot b) \tag{134}$$

3x3 Matrizen

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = (a \cdot e \cdot i) + (b \cdot f \cdot g) + (c \cdot d \cdot h) \\ -(g \cdot e \cdot c) - (h \cdot f \cdot a) - (i \cdot d \cdot b) \tag{135}$$

4x4 Matrizen / nxn Matrix

$$\begin{pmatrix} a^{+} & b^{-} & c^{+} & d^{-} \\ e^{-} & f^{+} & g^{-} & h^{+} \\ i^{+} & j^{-} & k^{+} & l^{-} \\ m^{-} & n^{+} & o^{-} & p^{+} \end{pmatrix} = A^{4x4}$$

1. Spalte/Reihe mit den meisten Nullen auswählen
2. Die Vorfaktoren der Spalten/Reihenwerte mit der Vorzeichenmatrix (+, -) bestimmen

$$\det(A^{4\times4}) = \overbrace{D_a + D_e + D_i + D_m}^{\boxed{4}} = \boxed{3} \begin{cases} D_a = \boxed{+} a \cdot \det \begin{pmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{pmatrix} \\ D_e = \boxed{-} e \cdot \det \begin{pmatrix} b & c & d \\ j & k & l \\ n & o & p \end{pmatrix} \\ D_i = \boxed{+} i \cdot \det \begin{pmatrix} b & c & d \\ f & g & h \\ n & o & p \end{pmatrix} \\ D_m = \boxed{-} m \cdot \det \begin{pmatrix} b & c & d \\ f & g & h \\ j & k & l \end{pmatrix} \end{cases} \tag{136}$$

3. 3x3 Matrizen aufstellen durch abdecken der Zeilen und Spalten des jeweiligen Vorfaktors
4. Ergebnisse addieren ergibt die Determinante der 4x4 Matrix

Inverse berechnen mittels Adjunkter Matrix

Benötigt

- Det(A) $\neq 0$
- 2x2 im Kopf | 3x3 mit Taschenrechner | 3x3 - nxn mit Adjunkte Matrix

Wichtiges

- Det(A) $= 0 \not\Rightarrow A^{-1}$
  Det(A) $\neq 0 \Rightarrow A^{-1}$
- $(a \cdot A)^{-1} = \frac{1}{a} \cdot A^{-1}$
- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- $(A^{-1})^{-1} = A$

2x2 Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \tag{137}$$

Anleitung 3x3, 4x4 - nxn

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{bmatrix} \boxed{+}\det\begin{pmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{pmatrix} & \boxed{-}\det\begin{pmatrix} e & g & k \\ i & k & l \\ m & o & p \end{pmatrix} & \boxed{+}\det\begin{pmatrix} e & f & h \\ i & j & l \\ m & n & p \end{pmatrix} & \boxed{-}\det\begin{pmatrix} e & f & g \\ i & j & k \\ m & n & o \end{pmatrix} \\ \boxed{-}\det\begin{pmatrix} b & c & d \\ j & k & l \\ n & o & p \end{pmatrix} & \boxed{+}\det\begin{pmatrix} a & c & d \\ i & k & l \\ m & o & p \end{pmatrix} & \boxed{-}\det\begin{pmatrix} a & b & d \\ i & j & l \\ m & n & p \end{pmatrix} & \boxed{+}\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ i & j & k \\ m & n & o \end{pmatrix} \\ \boxed{+}\det\begin{pmatrix} b & c & d \\ f & g & h \\ n & o & p \end{pmatrix} & \boxed{-}\det\begin{pmatrix} a & c & d \\ e & g & h \\ m & o & p \end{pmatrix} & \boxed{+}\det\begin{pmatrix} a & b & d \\ e & f & h \\ m & n & p \end{pmatrix} & \boxed{-}\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ m & n & o \end{pmatrix} \\ \boxed{-}\det\begin{pmatrix} b & c & d \\ f & g & h \\ j & k & l \end{pmatrix} & \boxed{+}\det\begin{pmatrix} a & c & d \\ e & g & h \\ j & k & l \end{pmatrix} & \boxed{-}\det\begin{pmatrix} a & b & d \\ e & f & h \\ i & j & l \end{pmatrix} & \boxed{+}\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ i & j & k \end{pmatrix} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \tag{138}$$

1. Determinante von A berechnen
2. Determinanten der inneren Matrizen berechnen und das Ergebnis mit jeweiligem Vorzeichen eintragen (3x3 Spaltenweise mit TS ausrechnen)
3. Matrix transponieren
4. $A \cdot A^{-1} = \mathbb{I}$ prüfen

Eigenwerte

Formeln

Charakteristisches Polynom

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda \cdot \mathbb{1} - A) \tag{139}$$

$$p_A(\lambda) = a_n \cdot \lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot \lambda + a_0 \tag{140}$$

Eigenwertproblem

$$A\vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}, \qquad \vec{x} \neq \vec{0} \tag{141}$$

Wichtiger Satz

$$Rang(A) = n \Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A^{-1} \nexists \\ \Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{0} \leftrightarrow \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0 \notin \mathrm{EW}(A) \tag{142}$$

Wichtiges

- λ = Eigenwert
- $\vec{x}$ = Eigenvektor
- $a_n = 1$

- $a_{n-1} = -\mathrm{tr}(A)$
- $a_0 = (-1)^n \cdot \det(A)$

Anleitung

1. Gleichung des Charakteristischen Polynoms aufstellen

2. Determinante berechnen mit einer der folgenden Optionen:
   •135 3×3 Determinante - Regel von Sarü
   •136 N×N Determinante

3. 140 ⇔ Charakteristisches Polynom
   •Hinterer Teil zusammenfassen
   •Grad n •Max. n Lösungen
   •$n = 2 : p_A(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}(A) \cdot \lambda + \det(A)$
   •$n = 2$ falls $D > 0$: Mitternachtsformel 28
   •$n > 2$ Hornerschema 27

4. Prüfung der Ergebnisse der Eigenwerte
   •$\mathrm{tr}(A) = \sum_{k=n}^{n} \lambda_k$ •$\det(A) = \prod_{k=n}^{n} \lambda_k$
   •EW von $A^{-1} = \frac{1}{\lambda}$

5. Ausrechnen der Eigenvektoren ist bei den Eigenvektoren beschrieben

$\boxed{1}$: 141 $\Rightarrow A\vec{x} - \lambda\vec{x} = \vec{0}$

139 : $(\underbrace{A - \mathbb{1}\lambda}_{A})\vec{x} = \vec{0}$

$$\boxed{2} : \det\left(\overbrace{\begin{pmatrix} A_{11} - \lambda_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} - \lambda_{33} \end{pmatrix}}^{A}\right) \vec{x} \overset{!}{=} \vec{0}$$

$$\boxed{3} : 140 : p_A(\lambda) = a_n \cdot \lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot \lambda + \overbrace{a_0}^{\text{Hinterer Teil}}$$

Eigenvektoren

Notwendig für die Berechnung der Eigenvektoren

- Eigenwerte

Anleitung

1. Für jeden Eigenwert eine Tabelle aufstellen mit $A - \lambda_n$ damit es zum Rangverlust kommt
2. Mittels Gauss links unten Nullen Produzieren
3. Mittels Treppentrick freie Parameter bestimmen
4. Einsetzen
5. Faktor aus/rein multiplizieren, damit es ein ganzzahligen EW gibt

$\boxed{1}$: **Eigenvektor zu** λ_i

$$\boxed{2} : \begin{array}{c|c|c|c} x & y & z & 0 \\ \hline A_{11} - \lambda_i & A_{12} & A_{13} & 0 \\ A_{21} & A_{22} - \lambda_i & A_{23} & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} - \lambda_i & 0 \end{array}$$

$$\vdots$$

$$\boxed{3} : \begin{array}{c|c|c|c} x & y & z & 0 \\ \hline \boxed{A_{11} - \lambda_i} & A_{12} & A_{13} & 0 \\ 0 & \boxed{A_{22} - \lambda_i} & A_{23} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{A_{33} - \lambda_i} & 0 \end{array}$$

$$\boxed{4} : \begin{pmatrix} t \cdot x \\ t \cdot y \\ t \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{5} : t \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

Diagonalisierung einer Matrix

Formel

$$S^{-1}AS = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow A = SDS^{-1} \tag{143}$$

$$A \underbrace{Se_i}_{\vec{x}_i} = S(De_i) = S\lambda_i e_i = \lambda_i \cdot \underbrace{Se_i}_{\vec{x}_i}$$

$$\Rightarrow A\vec{x}_i = \lambda_i \vec{x}_i, \vec{x}_i \tag{141}$$

Wichtiges

- A: Eine Matrix
- S: Matrix mit Eigenvektoren
- D: Diagonalmatrix mit Eigen-werten
- e_i: Spalteneinheitsvektor

Anleitung

1. Eigenwerte ausrechnen 141
2. Wenn n $>$ 2: Eigenvektoren normieren
3. Matrizen D und S aufstellen
4. Inverse von S ausrechnen
   •Bei orthogonaler Matrix: $S^{-1} = S^T$
   •Wenn n $\geqslant$ 3: Mit dem Adjunkten Verfahren die Matrix berechnen (138)
   •Wenn n $>$ 3 und Matrix nicht orthogonal: Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren
5. 143 aufstellen

$\boxed{3}$

$$\frac{1}{a}\begin{pmatrix} \vec{x}_{EV_{1_1}} & \vec{x}_{EV_{2_1}} & \cdots & \vec{x}_{EV_{n_1}} \\ \vec{x}_{EV_{1_2}} & \vec{x}_{EV_{2_2}} & \cdots & \vec{x}_{EV_{n_2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{x}_{EV_{1_n}} & \vec{x}_{EV_{2_n}} & \cdots & \vec{x}_{EV_{n_n}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_{EW_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{EW_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{EW_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{x}_{EV_{1_1}} & \vec{x}_{EV_{2_1}} & \cdots & \vec{x}_{EV_{n_1}} \\ \vec{x}_{EV_{1_2}} & \vec{x}_{EV_{2_2}} & \cdots & \vec{x}_{EV_{n_2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{x}_{EV_{1_n}} & \vec{x}_{EV_{2_n}} & \cdots & \vec{x}_{EV_{n_n}} \end{pmatrix}^{-1} \tag{144}$$

Matrix Potenzieren

Benötigt

- Bei hohen Potenzen wird die Diagonalisierte Matrix benötigt 143

Formel

$$A^m = A \cdot A \cdot \ldots \cdot A = SDS^{-1} \cdot SDS^{-1} \cdot \ldots \cdot SDS^{-1} \tag{145}$$

$$A^m = SD^mS^{-1}$$

$$\frac{1}{a}\begin{pmatrix} \vec{x}_{EV_{1_1}} & \vec{x}_{EV_{2_1}} & \cdots & \vec{x}_{EV_{n_1}} \\ \vec{x}_{EV_{1_2}} & \vec{x}_{EV_{2_2}} & \cdots & \vec{x}_{EV_{n_2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{x}_{EV_{1_n}} & \vec{x}_{EV_{2_n}} & \cdots & \vec{x}_{EV_{n_n}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_{EW_1}^m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{EW_2}^m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{EW_n}^m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{x}_{EV_{1_1}} & \vec{x}_{EV_{2_1}} & \cdots & \vec{x}_{EV_{n_1}} \\ \vec{x}_{EV_{1_2}} & \vec{x}_{EV_{2_2}} & \cdots & \vec{x}_{EV_{n_2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{x}_{EV_{1_n}} & \vec{x}_{EV_{2_n}} & \cdots & \vec{x}_{EV_{n_n}} \end{pmatrix}^{-1} \tag{146}$$