Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física

EN BUSCA DE UN MUNDO FELIZ A TRAVÉS DE LA GEOMETRÍA DIFERENCIAL

Fulano de Tal

Asesorado por Mengano Pérez

Guatemala, septiembre de 2015

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

EN BUSCA DE UN MUNDO FELIZ A TRAVÉS DE LA GEOMETRÍA DIFERENCIAL

TRABAJO DE GRADUACIÓN
PRESENTADO A LA JEFATURA DEL
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
POR

FULANO DE TAL

ASESORADO POR MENGANO PÉREZ

AL CONFERÍRSELE EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN FÍSICA APLICADA

GUATEMALA, SEPTIEMBRE DE 2015

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

CONSEJO DIRECTIVO

DIRECTOR	M.Sc. Edgar Anibal Cifuentes Anléu
SECRETARIO ACADÉMICO	Ing. José Rodolfo Samayoa Dardón

TRIBUNAL QUE PRACTICÓ EL EXAMEN GENERAL PRIVADO

EXAMINADOR	Perengano
EXAMINADOR	Zutano
EXAMINADOR	Fulano 2

Este archivo pdf es una muestra

Fecha

datos

cuerpo

despedida

firma

nombre

ÍNDICE GENERAL

1. Tsunamis en Guatemala

1.1. Tsunamis

Un tsunami es, en términos generales, una serie de olas generadas a partir de un movimiento abrupto de gran magnitud en el fondo del mar, el cual se propaga verticalmente hasta la superficie[3]. En la mayoría de los casos, este movimiento es ocasionado por un sismo de poca profundidad en una placa oceánica, pero también puede ser causado por otras fuentes, como distintos tipos de sismicidad (incluyendo sismos en placas continentales), actividad volcánica, un deslizamiento en el relieve oceánico o el impacto de un meteorito en el océano[6, 4, 7]. La amplitud de estas olas, al llegar a las costas, puede variar de entre algunos centímetros hasta varios metros. Dependiendo de la magnitud del evento, estas olas pueden traer consigo varios escombros; tales como embarcaciones, grandes volúmenes de arena y objetos arrastrados por el agua en su trayectoria[3].

Estas olas pueden recorrer grandes distancias, pudiendo llegar a recorrer mares completos[3]. El tiempo de arribo de dichas olas a las costas puede variar entre algunos minutos y unas cuántas horas. En Guatemala, aunque el dato no está concensuado, se estima que este tiempo de arribo, en los peores escenarios, puede ser del orden de 15 minutos. Con este tiempo es factible realizar alertas tempranas para la evacuación de comunidades.

En Guatemala, estas alertas son recibidas del Centro de Alerta de Tsunamis del Pacífico (PTWC, por sus siglas en inglés) y del Centro de Asesoramiento de Tsunami para América Central (CATAC), y posteriormente transmitidas a la población. La autoevacuación es siempre recomendada[1]: al sentir un sismo de gran intensidad, correr hacia puntos seguros previamente identificados. De no ser posible evacuar hacia puntos con suficiente elevación, se recomienda buscar edificaciones altas con cimientos fuertes, o incluso trepar un árbol con tronco fuerte[8, 2].

La simulación de tsunamis se hace en tres etapas: generación, propagación e inundación.

1.1.1. Propagación: ecuaciones de agua poco profunda

Consideramos un cuerpo finito de agua con volumen Ω, densidad ρ y velocidad $\vec{v}$ dada por

$$\vec{v} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k} = (u, v, w).$$

El cuerpo se encuentra aislado, de manera que su masa (m) se conserva, siguiendo la ecuación:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \tag{1.1}$$

Demostración. **To do** (1) Consideremos un flujo de masa en un volumen infinitesimal dV dentro de Ω, dado por $\frac{dm}{dt} = \frac{\partial m}{\partial V}\frac{dV}{dt}$. Para un volumen infinitesimal, podemos considerar que el fluído se mueve en una sola dirección $\hat{n}$, de manera que el volumen de fluido desplazado en el tiempo dt es $Ad\vec{s} \cdot \hat{n}$, y $\frac{dm}{dt} = \int_\Omega \frac{\partial m}{\partial V}\frac{d\vec{s}}{dt} \cdot \hat{n} dA = \int_\Omega \rho \vec{v} \cdot \hat{n} dA$, donde ρ representa la densidad del fluído, A el área transversal de dV, y $\vec{v}$ la velocidad del fluído en dV.
Esta ecuación es similar a la del flujo total de una cantidad q dada por una densidad de flujo $\vec{j}$: $\frac{dq}{dt} = \int_{d\Omega} \vec{j} \cdot \hat{n} dA$. En este caso, $q = m$ y $\vec{j} = \rho\vec{v}$. **To do** (2)
Expresando $\frac{dm}{dt}$ como $\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho dV$ y convirtiendo la integral $\int_{d\Omega} \vec{j} \cdot \hat{n} dA$ a una integral volumétrica por medio del teorema de Gauss, llegamos a la conocida ecuación de continuidad: [1]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

□

El cuerpo está sujeto a una fuerza gravitacional $\int_\Omega \rho \vec{g} dV$, y su propia presión como fuerza de contacto: $\int_{d\Omega} -\vec{p} \cdot \hat{n} dA$; de manera que, siguiendo la ley de conservación de momentum lineal, obtenemos las ecuaciones clásicas de Navier-Stokes: **To do** (4)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{v}) + (\vec{v} \cdot \nabla)(\rho\vec{v}) = -\nabla p + \rho\vec{g} + \rho\vec{v}(\nabla \cdot (\vec{v})) - 2\vec{\Omega} \times \vec{v} \tag{1.2}$$

Para el caso del mar, puede considerarse que sigue un flujo incompresible; es decir, para un volumen infinitésimal que se mueve con el fluído, se cumple que $\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \rho = 0$. **To do** (5)

---

[1] Aquí hay un paso oculto, puesto que $\frac{d\Omega}{dt} \neq 0$, en cuyo caso (ver teorema de Reynolds): $\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho dV = \int_\Omega \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{v})\right) dV$, así que hay que demostrar que $\nabla \cdot (\rho\vec{v}) = 0$ para llegar a la ecuación citada. Esto se demuestra más adelante. **To do** (3)

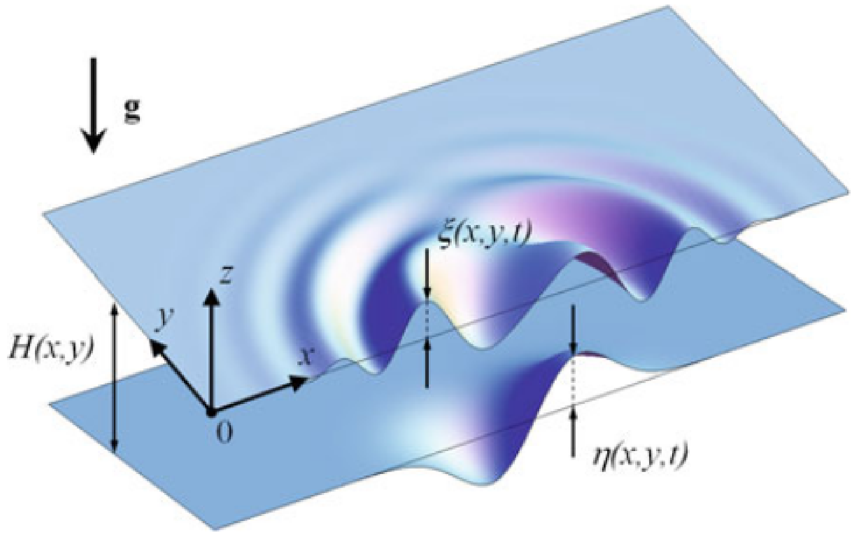

Figura 1.1. Desplazamiento vertical η en el fondo del mar, generando un desplazamiento ξ de la superficie con respecto a su altura en estado estable H. Fuente: [5]

Considerando esto en la ecuación de continuidad (1.1), legamos a:

$$\nabla \cdot (v) = 0 \tag{1.3}$$

Así, según (1.2):

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = \frac{-\nabla p}{\rho} + \vec{g} - \frac{2\vec{\Omega} \times \vec{v}}{\rho} \tag{1.4}$$

1.1.1.1. Condiciones de frontera

Consideremos ahora el caso de un desplazamiento vertical en el fondo del mar dado por η con respecto a su profundidad en estado estable H, el cual genera un desplazamiento vertical en la superficie dado por ξ. Ver figura 1.1.

La superficie del mar será siempre una función continua de (x, y, t): $z_{\text{surface}} = \xi(x, y, t)$, de manera que el flujo superficial cumple la condición

$$\frac{d}{dt} z_{\text{surface}} = w\,\big|_{z=\xi} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + u\frac{\partial \xi}{\partial x} + v\frac{\partial \xi}{\partial y}.$$

Además, por continuidad, la presión en la superfice debe ser igual a la presión atmosférica:

$$p\big|_{z=\xi} = p_{\text{atm}} \tag{1.5}$$

Mientras, en el fondo del mar, el único cambio en z estará dado por η: $z_{\text{bottom}} = z_b = -H(x,y) + \eta(x,y,t)$, de manera que el flujo normal cumple la condición

$$\frac{d}{dt}z_b = w\big|_{z=z_b} = -u\frac{\partial H}{\partial x} - v\frac{\partial H}{\partial y} + \frac{d\eta}{dt}$$

Para un proceso instantáneo, podemos considerar únicamente deformaciones residuales. En este caso:

$$w\big|_{z=z_b} = -u\frac{\partial H}{\partial x} - v\frac{\partial H}{\partial y}$$

Y, dado que en z_b no puede haber movimiento vertical además de η, se debe cumplir la condicón:

$$\vec{v}\cdot\hat{n} = \vec{v}_\eta\cdot\hat{n}$$

Donde $\vec{v}_\eta = \frac{dz_b}{dt}$.

1.1.1.2. Ecuación de continuidad promedio

Integrando la ecuación (1.3) verticalmente:

$$\begin{aligned}
\int_{z_b}^{\xi} \nabla\cdot(v)\,dz &= \int_{z_b}^{\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)dz + w\big|_{z=\xi} - w\big|_{z=z_b} \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\int_{z_b}^{\xi} u\,dz + \frac{\partial}{\partial y}\int_{z_b}^{\xi} v\,dz - \left(u\big|_{z=\xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + u\big|_{z=z_b}\frac{\partial z_b}{\partial x}\right) \\
&\quad - \left(-v\big|_{z=\xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + v\big|_{z=z_b}\frac{\partial z_b}{\partial y}\right) + w\big|_{z=\xi} - w_{\text{bottom}}
\end{aligned}$$

Identificamos los primeros términos entre paréntesis de la ecuación anterior como $w\big|_{z=z_b}$, y los segundos como $w\big|_{z=\xi} + \frac{\partial z_b}{\partial t}$; de modo que, definiendo $\hat{u} = \frac{1}{z_b}\int_{z_b}^{\xi} u\,dz$ y $\hat{v} = \frac{1}{z_b}\int_{z_b}^{\xi} v\,dz$, llegamos a la ecuación de continuidad promedio:

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} + \frac{\partial z_b\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial z_b\bar{v}}{\partial y} = 0$$

1.1.1.3. Long wave approximation

Expandiendo la ecuación (1.3):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Si asumimos $u \sim v$, en media longitud de onda 0.5λ, correspondiente a un desplazamiento vertical H, notamos que

$$\frac{\Delta u}{0.5\lambda} + \frac{\Delta u}{0.5\lambda} + \frac{\Delta w}{H} = 0 \Rightarrow |\Delta w| \sim \frac{H}{\lambda}|\Delta u|$$

De modo que, si $H << \lambda$, Δw puede ser descartado al estar acompañado por trémino del orden de Δu.

Además, consideremos la fuerza de Coriolis en la ecuación (1.4); en el caso de la rotación de la Tierra, $\Omega = (0, \omega co(\phi), \omega sin(\phi)$, donde ω represena la rapidez de rotación y ϕ la latitud del punto en consideración,

$$\begin{aligned} 2\vec{\Omega} \times \vec{v} = & \quad 2\omega(v \sin\phi - w\cos\phi, -u\sin\phi, u\cos\phi) \\ \approx & \qquad\qquad 2\omega(v\sin\phi, -u\sin\phi, 0) \end{aligned}$$

El término $\omega w \cos\phi$ es despreciado en comparación con $\omega v \sin\phi$, y el término de aceleración vertical $(\omega u \cos\phi)$ es despreciado en comparación con $\vec{g}$. Definiendo $f = 2\omega\sin\phi$, reescribimos la fuerza de Coriolis como:

$$2\vec{\Omega} \times \vec{v} \approx 2\omega(fv, -fu)$$

Veamos ahora la componente vertical de (1.4). El término $(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$ puede ser descartado en comparación con , al igual que el térmno de la ecuación de Coriolis. Así, para la componente vertical del movimiento del agua, se cumple la ecuación

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

De modo que, integrando de z a ξ, considerando la ecuación (1.1.1.1), la presión está dada por

$$p(x,y,z,t) = p_{atm} + \rho g(\xi - z)$$

Y $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p_{atm}}{\partial x} + \rho g \frac{\partial \xi}{\partial x}$, y similarmente para y.

Con esto, las componentes horizontales de la ecuación (1.4) se convierten en:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} &= -g\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + fv \\
\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} &= -g\frac{\partial \xi}{\partial x} - g\frac{\partial \xi}{\partial x} - fu
\end{aligned}$$

Que son conocidas como ecuaciones de aguas poco profundas (*shallow water equations*) o aproximación de ondas largas (*long wave approximation*).

BIBLIOGRAFÍA

[1] Coordinadora Nacional para la Reducción de Desastres, Guatemala: *Plan Nacional de Respuesta*, Mar. 2019. https://conred.gob.gt/site/Plan-Nacional-de-Respuesta, Sección 4.7.1.2: "Responsabilidad ciudadana".

[2] Intergovernmental Oceanographic Commission: *Surviving a tsunami: lessons from chile, hawaii, and japan.* IOC Brochure 2014-2 Rev., 2014 edition. https://www.wcdrr.org/wcdrr-data/uploads/857/Surviving%20a%20Tsunami.pdf.

[3] Intergovernmental Oceanographic Commission: *Tsunami Glossary.* United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization, 4ª ed., 2019. (English, French, Spanish, Arabic, Chinese).

[4] L. Kong y N. Arcos: *Tsunamis Históricos (desde 1530 hasta el año 2016) Caribe, Centroamérica, México y Regiones Adyacentes.* Poster publicado por UNESCO/IOC - NOAA, 2017. ftp://ftp.ngdc.noaa.gov/hazards/publications/CCAMAR-2017-esp-low-res.pdf.

[5] B. W. Levin y M. A. Nosov: *Physics of Tsunamis.* Springer International Publishing, 2ª ed., 2016, ISBN 9783319240374. https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-24037-4.

[6] National Geophysical Data Center / World Data Service: *NCEI/WDS global historical tsunami database.* Maps showing tsunami events and tsunami runups and locations, 2019. https://doi.org/10.7289/V5PN93H7.

[7] K. F. O'Loughlin y J. F. Lander: *Caribbean Tsunamis: A 500-Year History from 1498-1998*, vol. 20 de *Advances in Natural and Technological Hazards Research.* Springer Netherlands, 2013, ISBN 978-90-481-6467-7. https://books.google.com.gt/books?id=gqNfBgAAQBAJ.

[8] E. Yulianto, F. Kusmayanto, N. Supriyatna y M. Dirhamsyah: *Where the first wave arrives in minutes, indonesian lessons on surviving tsunamis near their sources*. Published by UNESCO/IOC, IOC Brochure 2010-4, 2010. http://iotic.ioc-unesco.org/images/xplod/resources/material/tsunami_arrives_in_minutes.pdf.

To do...

- ☐ 1 (p. 2): A esto le falta mucho para ser una demostración formal. Quisiera hacer una, pero me puede tomar mucho tiempo, aunque considero que vale la pena. Me hace sentr más seguro de lo que digo, me ayuda a simplificar la redacción y me permite hacer cambios sin afectar la continuidad del tema.
- ☐ 2 (p. 2): En realidad hay un signo mal en algún lugar de aquí, ¿$\vec{j}$ va hacia adentro o hacia afuera de dV? Creo que en la ecuación de flujo va hacia adentro, y en la de continuidad va hacia afuera.
- ☐ 3 (p. 2): En realidad no tiene sentido tener que demostrar eso antes, porque ese es precisamente el resultado que se quiere obtener de esa ecuación. Podría escribir la ecuación como $\frac{\partial \rho}{\partial t} + 2\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$, pero no encuentro eso en ninguna referencia, así que me da miedo ponerlo. En todo caso, si la escribiera así, tendría que cambiar la expresión "...la conocida ecuación...".
- ☐ 4 (p. 2): ¿Quitar el paréntesis? Tendría que cambiar $\nabla \cdot (v)$ por la expresión completa
- ☐ 5 (p. 2): buscar referencia