1 Les matrices

1.1 Définition

Définition

On appelle A une **matrice** constituée de n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$ par un tableau d'éléments réels de taille $n \times p$. On la note

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Remarques

- L'élément a_{ij} est situé sur la ième ligne et la jème colonne. En faisant varier i dans $[\![1, n]\!]$ et j dans $[\![1, p]\!]$, on construit A
- A est une matrice de taille $n \times p$. On dit aussi qu'elle est de type (n, p)
- Si $n = p$, on dit que A est une matrice carrée d'ordre n
  Si $n = 1$, on dit que A est une matrice ligne (ou vecteur ligne) de taille $1 \times p$
  Si $p = 1$, on dit que A est une matrice colonne (ou vecteur colonne) de taille $n \times 1$
- Une matrice est un "assemblage" de vecteurs lignes ou colonnes de même taille

Notations

- On note $M_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de type (n, p) à coefficients dans $\mathbb{R}$
- On note $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$

1.2 Opérations élémentaires

Définition

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ des matrices de $M_{n,p}(\mathbb{R})$.

On définit la somme et le produit avec un réel :

1. $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$
2. $\alpha A = (\alpha a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$

Exemple

Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. On a $-2A + B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

Remarque : toute matrice A de type (n, p) se décompose de manière unique :

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} E_{ij}$$

avec E_{ij} la matrice de type (n,p) constituée d'un 1 à l'intersection de la ième ligne et de la jème colonne, et de 0 partout ailleurs.

On notera $\left(E_{ij}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ la base canonique des matrices de type (n,p). Ainsi $\dim(M_{n,p}(\mathbb{R})) = np$

1.3 Produit de matrices

Définition

Soient A et B deux matrices de, respectivement, $M_{n,p}(\mathbb{R})$ et $M_{q,m}(\mathbb{R})$.

Le **produit matriciel** (ou **produit**) $A \times B$ existe ssi $p = q$, à savoir le nombre de colonnes de A doit être égal au nombre de lignes de B. La matrice $A \times B$ est de type (n,m).

Remarques

- $(n,p) \times (p,m) \longrightarrow (n,m)$
- On note aussi le produit AB

Définition : calcul du produit

Soient $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ et $B = \left(b_{ij}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant m}}$.

Le produit AB est défini par une matrice $C = \left(c_{ij}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant m}}$ telle que

$$\forall(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!], c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

Exemple

Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. On a

$AB = \begin{pmatrix} 9 & -8 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -7 \\ -1 & 2 & 3 \\ -4 & 4 & 10 \end{pmatrix}$, mais par exemple $A^2 = A \times A$ n'existe pas.

Définition : puissance de matrice

Soit A une matrice carrée d'ordre n. On définit $A^p = A \times ... \times A$, p fois.

Définition : matrice identité

La **matrice identité** est une matrice carrée constituée uniquement de 1 sur sa diagonale et de 0 ailleurs.

A l'ordre n, on la note $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Remarques

- Par exemple, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $(I_n)^p = I_n$
- I_n est une matrice remarquable car $\forall A \in M_n\big(\mathbb{R}\big)$, $AI_n = I_nA = A$. Elle représente donc **l'élément neutre** de $M_n(\mathbb{R})$ pour le produit matriciel.

Propriétés

1. **Associativité** : $\forall (A,B,C) \in M_{n,p}(\mathbb{R}) \times M_{p,q}(\mathbb{R}) \times M_{q,m}(\mathbb{R})$, $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$
2. **Distributivité**
   - à droite : $\forall (A,B,C) \in \big(M_{n,p}(\mathbb{R})\big)^2 \times M_{p,m}(\mathbb{R})$, $(A+B) \times C = A \times C + B \times C$
   - à gauche : $\forall (A,B,C) \in M_{n,p}(\mathbb{R}) \times \big(M_{p,m}(\mathbb{R})\big)^2$, $A \times (B+C) = A \times B + A \times C$
3. **Non commutativité (en général)** : $\exists (A,B) \in \big(M_n(\mathbb{R})\big)^2$, $A \times B \neq B \times A$

Remarques

- Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $AB = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
- Si A et B dans $M_n(\mathbb{R})$, $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$, si $AB \neq BA$
- Si $C_1, C_2, ..., C_p$ désignent les vecteurs colonnes de A de type (n,p), on vérifie :

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} C_1 & \cdots & C_p \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{et } \forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p, \ AX = x_1C_1 + ... + x_pC_p :$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + ... + x_p \begin{pmatrix} a_{1p} \\ \vdots \\ a_{np} \end{pmatrix}$$

1.4 Transposition, résolution de système

1.4.1 Matrices transposées

Définition

Soit $A = \big(a_{ij}\big)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, la **transposée** de A est une matrice obtenue en échangeant les lignes avec les colonnes. Elle se note A^T telle que

$$A^T \in M_{p,n}(\mathbb{R}), \quad A^T = \big(b_{ij}\big)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}, \quad \text{avec} \quad b_{ij} = a_{ji}$$

Exemples

- Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, alors $A^T = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
- Soients $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ sont considérés comme des matrices de genre $(n, 1)$. Le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = (\overrightarrow{u}^T)\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1y_1 + ... + x_ny_n$$

Propriétés

- $\forall A, B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\forall \alpha \in \mathbb{R}$:
  1. $(A + B)^T = A^T + B^T$
  2. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
- $\forall A \in M_{n,p}(\mathbb{R}), \forall B \in M_{p,m}(\mathbb{R}),\ (AB)^T = (B)^T(A)^T$

1.4.2 Résolution de système

Méthode

Soit $A \in M_{np}(\mathbb{R})$, on note $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$

On pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$, on a

$$(1) \iff \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = y_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = y_n \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \iff AX = Y$$

La résolution d'un système d'équations peut s'effectuer à l'aide du **pivot de Gauss** qui consiste à rendre le **système d'équations triangulaire inférieur** et de remonter le calcul afin de calculer toutes les composantes de X, quand les diffŕentes égalités crées ne sont pas absurdes.

Quand la matrice est carrée et que le calcul le permet, on peut reconstruire la matrice identité à gauche afin de trouver la solution qui est alors unique. On dit que la matrice est **inversible**.

Exemple Résolution d'un système (S) avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(S): \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}. \text{ Donc } X = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Etapes de calcul : $L_1 \longleftrightarrow L2;\ L_2 \longleftarrow L2 - 2L_1;\ L_3 \longleftarrow -L_3;\ L2 \longleftarrow L2 + L_3;\ L1 \longleftarrow L_1 - L_3;\ L_1 \longleftarrow L_1 - L_2$

2 Exercices

Exercice 1

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Pour les questions ci dessous, effectuer le calcul demandé s'il existe. S'il n'existe pas expliquer pourquoi.

$$2A, \quad (A^T)A, \quad A(A^T), \quad A^2, \quad A+3, \quad AB, \quad BA, \quad (B^T)B, \quad B(B^T)+I_4$$

Exercice 2

1. Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 3 & k \end{pmatrix}$. Quelles sont les valeurs de $k \in \mathbb{R}$, s'il y en a, qui font que $AB = BA$?
2. Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que $AB = AC$ alors que $B \neq C$.
3. Trouver deux matrices non triviales A et B de genre $(2, 2)$ tel que $AB = 0$

Exercice 3

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ et $AB = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 6 & -9 & 3 \end{pmatrix}$.

Déterminer les deux premières colonnes de la matrice B.

Exercice 4

Résoudre les systèmes d'équations suivants et représenter l'ensemble des solutions graphiquement dans le plan vectoriel $\mathbb{R}^2$:

$(R) : \begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 4 \end{cases}$, $(S) : \begin{cases} -4x + y = 3 \\ 8x - 2y = -6 \end{cases}$ et $(T) : \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ -3x + 2y = 12 \end{cases}$

Exercice 5

Résoudre les systèmes d'équations suivants :

$(R) : \begin{cases} 22a + 32b + 42c = 104 \\ \qquad 47b + 62c = 186 \\ \qquad\qquad 82c = 246 \end{cases}$, $(S) : \begin{cases} x - 2y - 3z = 3 \\ 2x - y - 4z = 7 \\ 3x - 3y - 5z = 8 \end{cases}$ et $(T) : \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & -12 & -1 & -5 \\ 3 & -12 & 8 & 1 \end{bmatrix}$

Exercice 6

Résoudre les systèmes d'équations suivants :

$$(A) : \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & -4 & 2 \\ -3 & -9 & 6 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } (B) : \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 & 2 \\ 4 & -3 & 1 & 4 \\ 2 & 12 & -7 & 2 \end{bmatrix}$$

Exercice 7

Résoudre les systèmes d'équations suivants :

$$(A) : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } (B) : \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 6 & 2 \\ 5 & -4 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Exercice 8

Soit le sytème $(S) : \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & b_1 \\ -4 & 2 & -6 & b_2 \\ -3 & -2 & -7 & b_3 \end{bmatrix}$

1. Donner une relation sur les nombres b_1, b_2, b_3 pour que le système (S) admette des solutions.
2. Quel ensemble de points représente graphiquement cette relation ?
3. Résoudre alors (S)

Exercice 9

Soit $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une application linéaire telle que $T(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2, -x_1 + 3x_2, 3x_1 - 2x_2)$.
Chercher x tel que $T(x) = (-1, 4, 9)$.

Exercice 10

Soient X et Y deux produits concurrentiels. Les parts de marché de X et Y à la date t sont représentées par $M_t = \begin{pmatrix} x_t & y_t \end{pmatrix}^T$. La répartition probable à la date $t+1$ est $M_{t+1} = \begin{pmatrix} x_{t+1} & y_{t+1} \end{pmatrix}^T$.
On suppose que, pour tout naturel t : $M_{t+1} = K \times M_t$, avec $K = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 \\ 0,6 & 0,8 \end{pmatrix}$. K est dite matrice de transition.

1. Prouver que : $\forall t \in \mathbb{N}$, $x_{t+1} + y_{t+1} = x_t + y_t$. (Cela signifie qu'aucun produit nouveau n'est apparu sur le marché).
2. Dans la suite de l'exercice, on pose $M_t = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}^T$.

a. Indiquer, en pourcentage, la part de marché du produit X à la date t.

b. Calculer M_{t+1} et en déduire la part de marché de X à la date $t+1$.

3. Calculer M_{t+2} en fonction de M_t et de K.

4. a. Par généralisation des résultats précédents, proposer, pour tout naturel non nul n une relation entre M_{t+n} et M_t.

   b. En déduire le pourcentage de la part de marché de X à la date $t+3$.

Exercice 11

Chaque année, environ 5% de la population d'une ville va s'installer dans la banlieue environnante et environ 4% de la population de la banlieue déménage en ville. En 2020, ils étaient 600 000 citadins et 400 000 banlieusards. Traduire cette situation en une équation de récurrence où x_0 est la population en 2020. Estimer ensuite la population de la ville et de la banlieue deux ans plus tard, en 2022.

Exercice 12

Le réseau de la figure ci-dessous montre comment s'écoule le traffic (en nombre de véhicules par heure) dans plusieurs rues à sens unique d'un quartier de Baltimore durant une période précise de la journée.

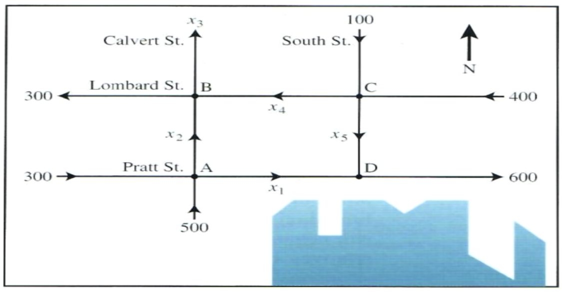

FIGURE 1 – Des rues de Baltimore

1. Ecrire les équations qui décrivent le flux et les ésoudre

2. Déterminer l'étendue des valeurs possibles de x_1 et x_2

Exercice 13

On représente le flux de trafic dans le réseau ci-dessous

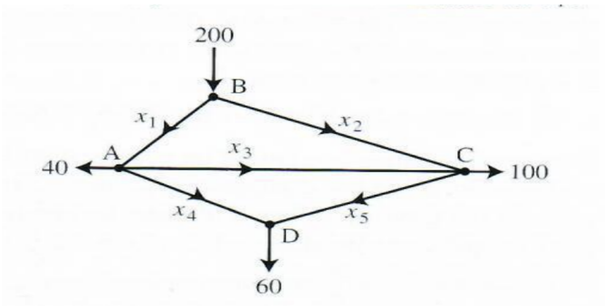

FIGURE 2 – Flux de trafic

1. Ecrire les équations qui décrivent le flux et les ésoudre
2. Que devient le schéma dans le cas où la rue qui correspond à x_4 est fermée ?
3. Quand $x_4 = 0$, quelle est la valeur minimale de x_1 ?

3 Série statistique à une variable

3.1 Vocabulaire

- **Population** : ensemble que l'on observe et dont chaque élément est appelé **individu**
- **Echantillon** : c'est une partie de la population
- Le **caractère** étudié est la propriété que l'on veut observer sur la population. Il peut être **qualitatif** ou **quantitatif**. On étudiera dans ce cours le cas quantitatif
- La **fréquence** d'une **modalité** ou d'une valeur du caractère est le quotient de l'effectif de la modalité (ou valeur) par l'effectif total

3.2 Caractéristiques

- Soit $\{(x_i, n_i),\ i = 1, ..., p\}$ une **série statistique discrète** à une variable (ou un caractère) avec x_i la valeur observée et n_i l'effectif ou si $\{([x_i, x_{i+1}[,\ n_i),\ i = 1, ..., p\}$ est une **série statistique continue** à une variable (ou un caractère), alors la **fréquence** de la modalité x_i ou de la classe $[x_i, x_{i+1}[$ est :

$$f_i = \frac{n_i}{N}, \qquad \text{où } N = \sum_{i=1}^{p} n_i$$

- La **fréquence cumulée** de la modalité x_i ou de la classe $[x_i, x_{i+1}[$ est :

$$F_i = \sum_{j=1}^{i} f_j = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{i} n_j$$

- Le **mode** d'une série statistique est la valeur du caractère qui correspond au plus grand effectif
  - Dans le cas discret, pour la série $\{(x_i, n_i),\ i = 1, ..., p\}$, c'est la valeur x_k, pour k donnant l'effectif x_k le plus grand (ou la fréquence la plus élevée)
  - Dans le cas continu, on parle de **classe modale**. Si les amplitudes des classes sont égales, la classe modale est la classe dont l'effectif est le plus grand. Si les amplitudes des classes ne sont pas constantes, on compare non pas les effectifs mais les effectifs corrigés : on les obtient en divisant les effectifs par l'amplitude de la classe.
- **Moyenne arithmétique**

  Pour la série $\{(x_i, n_i),\ i = 1, ..., p\}$

$$\overline{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{p} n_i x_i = \sum_{i=1}^{p} f_i x_i$$

  Dans le cas continu, on utilisera le centre de la classe $c_i = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$ et on utilisera la série $\{(c_i, n_i),\ i = 1, ..., p\}$

- La **médiane** d'une **série statistique ordonnée discrète** est la valeur du caractère qui partage cette série en deus sous-ensembles de même taille
  - Si l'effectif $N = 2k + 1$ impair, alors la médiane est la valeur du caractère qui partage la série en deux sous-ensembles de k éléments.
  - Si l'effectif $N = 2k$ pair, alors la médiane est la valeur du caractère qui partage la série en deux sous-ensembles de k éléments, puis $k - 1$ éléments
  - Si les résultats sont donnés sous la forme d'un tableau de fréquences cumulées, alors la médiane est la valeur du premier caractère dont la fréquence cumulée est $\geqslant 0,5$
- **Médiane** d'une **série statistique ordonnée continue :**

  On détermine la **classe médiane**, c'est à dire la classe dans laquelle les fréquences cumulées croissantes atteignent $0,5$, puis on effectue une **interpolation linéaire**. En notant $[x_i, x_{i+1}[$ la classe médiane, la médiane M_e est donnée par le théorème de Thales :

$$\frac{M_e - x_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{0,5 - F(x_i)}{F(x_{i+1} - F(x_i)} \iff M_e = x_i + (x_{i+1} - x_i)\frac{0,5 - F(x_i)}{F(x_{i+1}) - F(x_i)}$$

  Remarque : aussi bien pour les séries statistiques discrètes ou continues, la médiane est principalement utilisé pour les distributions asymétriques

- Les **quartiles** Q_i sont les valeurs des caractères qui partagent la série statistique ordonnée en quatre sous-ensembles de même taille
- Les **déciles** D_i sont les valeurs des caractères qui partagent la série statistique ordonnée en dix sous-ensembles de même taille
- Les **centiles** C_i sont les valeurs des caractères qui partagent la série statistique ordonnée en cent sous-ensembles de même taille
- **Etendue** : si la série est ordonnée par ordre croissant, c'est $x_p - x_1$
- **Variance** : moyenne des carrés des écarts à la moyenne, permettant de définir la dispersion d'une population statistique. Comme les écarts des caractères à la moyenne sont au carré, l'unité de la variance est l'unité de la variable au carré.

  En notant la $x = (x_1, ..., x_p)$ la variable, on a :

$$V(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i(x_i - \overline{x})^2 = \sum_{i=1}^{p} f_i(x_i - \overline{x})^2$$

  Remarque : dans le cas d'une série continue, on utilise les centres des classes

  Propriété :

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ V(ax) = a^2V(x) \text{ et } V(x+b) = V(x)$$

  Conséquence :

$$V(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2 - \overline{x}^2 = \sum_{i=1}^{p} f_i x_i^2 - \overline{x}^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2$$

- **écart-type** : mesure la dispersion d'une population statistique à l'unité, en utilisant la variance

$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)}$$

4 Exercices

Exercice 1

On donne la série unidimensionnelle discrète suivante :

x_i	0	1	2	3
n_i	12	24	36	28

1. Déterminer les fréquences f_i et les fréquences cumulées F_i
2. Déterminer le mode et la médiane
3. Déterminer la moyenne
4. Déterminer la variance et l'écart-type. Interpréter.

Exercice 2

Donner deux exemples de séries statistiques unidimensionnelles discrètes telles que :

1. pour la première, il est plus pertinent de calculer la médiane plutôt que la moyenne.
2. pour la seconde, il est plus pertinent de calculer la moyenne plutôt que la médiane.

Exercice 3

On donne la série unidimensionnelle continue suivante :

Classes	$[0, 10[$	$[10, 20[$	$[20, 30[$	$[30, 40[$	$[40, 50[$
Effectifs	10	44	62	30	12

Calculer la médiane et la moyenne de cette série statistique

Exercice 4

On donne la série unidimensionnelle suivante :

Classes	$[10, 20[$	$[20, 40[$	$[40, 60[$	$[60, 90[$	$[90, 95[$
Effectifs	18	22	31	15	14

1. Déterminer le mode de cette série statistique
2. Déterminer les fréquences f_i et les fréquences cumulées croissantes F_i
3. Déterminer la classe médiane puis la médiane
4. Déterminer Q_1, Q_3, D_9
5. Déterminer l'écart-type de cette série statistique

Exercice 5

La **médiale** de la série $\{([x_i, x_{i+1}[, n_i), \ i = 1, ..., p\}$ est la médiane de la série $\{([x_i, x_{i+1}[, c_i n_i), \ i = 1, ..., p\}$ où c_i est le centre de la classe $[x_i, x_i + 1[$

Remarque : La médiale trouve son utilité lorsqu'un montant global, par exemple une masse salariale représentée alors par $\sum_{i=1}^{p} c_i n_i$, est partagé par un effectif.

On donne la série unidimensionnelle suivante donnant en milliers d'euros la répartition des salaires hebdomadaires dans une équipe de football :

Salaires	$[10, 15[$	$[15, 20[$	$[20, 25[$	$[25, 30[$	$[30, 35[$
Effectifs	8	5	8	6	2

1. Calculer la médiane
2. Calculer la médiale.
3. Comparer les deux résultats et les interpréter

Exercice 6

On donne la série unidimensionnelle suivante, correspondant à la répartition des entreprises du secteur automobile en fonction de leur chiffre d'affaire en millions d'euros.

Chiffres d'affaires	$[0, 0.25[$	$[0.25, 0.5[$	$[0.5, 1[$	$[1, 2.5[$	$[2.5, 5[$	$[5, 10[$
Nombres d'entreprises	137	106	112	154	100	33

1. Calculer le chiffre d'affaire moyen et l'écart-type de la série.
2. Construire l'histogramme des fréquences.
3. Construire les polygones des fréquences cumulées croissantes et décroissantes. Que représente graphiquement le point d'intersection ?
4. Calculer la médiane, les quartiles et une approximation de la proportion d'entreprises dont le chiffre d'affaire est supérieur à 3 millions d'euros.