Mannigfaltigkeiten

Markus Röser
Für Richtigkeit und Vollständigkeit wird keine Garantie übernommen.
Hinweise auf Fehler bitte an markus.roeser@math.uni-hannover.de

30. Juni 2016

1 Mannigfaltigkeiten

In diesem Kapitel führen wir das Konzept der differenzierbaren Mannigfaltigkeit ein. Wir orientieren uns dabei größtenteils am Skript von Nigel Hitchin [1].

1.1 Karten und Atlanten

Definition 1.1 (Karte)**.** Sei M eine Menge und $n \in \mathbb{N}$. Eine *n-dimensionale Karte* auf M ist ein Paar (U, ϕ) bestehend aus einer Teilmenge $U \subset M$ und einer injektiven Abbildung

$$\phi : U \to \mathbb{R}^n,$$

sodass $\phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ offen ist. Wir nennen U das *Kartengebiet* der Karte (U, ϕ).

Bemerkung 1.2. a) Ist $p \in M$ und (U, ϕ) eine Karte mit $p \in U$, dann sagen wir (U, ϕ) ist *eine Karte um p*.

b) Wir schreiben für $u \in \mathbb{R}^n$

$$u = (u^1, \dots, u^n),$$

falls $u = \sum_{i=1}^n u^i e_i$ gilt, wobei $e_1, \dots, e_n$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Ist (U_α, ϕ_α) eine Karte auf der Menge M, so schreiben wir

$$\phi_\alpha(p) = (x^1_\alpha(p), \dots, x^n_\alpha(p)) \in \mathbb{R}^n$$

und nennen $x^i_\alpha(p)$ die *Koordinaten von p bezüglich ϕ_α*.

Definition 1.3 (Atlas)**.** Sei M eine Menge, I eine Indexmenge und $n \in \mathbb{N}$. Ein *n-dimensionaler differenzierbarer Atlas* auf M ist eine Familie $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha) \mid \alpha \in I\}$ von Karten, mit folgenden Eigenschaften:

(A1) Die Mengen U_α bilden eine Überdeckung von M, das heißt $M = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$.

(A2) Für alle $\alpha, \beta \in I$ ist die Menge $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n$ offen.

(A3) Für alle $\alpha, \beta \in I$ ist die Abbildung

$$\phi_{\alpha\beta} = \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta),$$

sowie ihr Inverses beliebig oft differenzierbar (wir sagen auch *glatt* oder C^∞). Die Abbildungen $\phi_{\alpha\beta}$ heißen *Kartenwechsel* oder auch *Koordinatentransformationen*.

Bemerkung 1.4. a) Zwei Karten, die die Eigenschaften (A2) und (A3) erfüllen, heißen *glatt verträglich*.

b) Analog kann man reell analytische, C^k, beziehungsweise topologische Atlanten definieren, indem man die Eigenschaften (A1) und (A2) fordert und entsprechend verlangt, dass die Kartenwechsel in (A3) reell analytisch, k-mal stetig differenzierbar, beziehungsweise stetig sind. Ersetzt man in Definition 1.1 $\mathbb{R}^n$ durch $\mathbb{C}^n$, und verlangt in (A3), dass die Kartenwechsel holomorph sind, dann landet man beim Begriff des komplexen (oder holomorphen) Atlas.

1.2 Beispiele

Beispiel 1.5 (Standard-Atlas auf $U \subset \mathbb{R}^n$)**.** Ist $M = U \subset \mathbb{R}^n$ offen, so haben wir den *Standard-Atlas* $\mathcal{A}_{std} = \{(U, \mathrm{id})\}$. Da $\mathcal{A}_{std}$ nur eine einzige Karte enthält, deren Kartengebiet ganz M ist, sind die Axiome aus Definition 1.3 erfüllt.

Beispiel 1.6 (Stereographische Projektion, die Sphäre S^n)**.** Betrachte die Sphäre

$$S^n = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|p\|^2 = \sum_{i=1}^{n+1} (p^i)^2 = 1\}.$$

Sei $N = e_{n+1} = (0, \ldots, 0, 1)$ der *Nordpol* und $S = -N$ der *Südpol*. Setze

$$\phi_N \colon U_N = S^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n, \quad \phi_N(p) = \frac{1}{1 - p^{n+1}}(p^1, \ldots, p^n)$$

und

$$\phi_S \colon U_S = S^n \setminus \{S\} \to \mathbb{R}^n, \quad \phi_S(p) = \frac{1}{1 + p^{n+1}}(p^1, \ldots, p^n).$$

Diese Karten nennt man die *stereographischen Projektionen* (vom Nord- beziehungsweise Südpol). Die Abbildung ϕ_N (bzw. ϕ_S) erhält man, indem man $p \in U_N$ (bzw. $p \in U_S$) mit N (bzw. S) verbindet und dann $\phi_N(p)$ (bzw. $\phi_S(p)$) als den (eindeutigen) Schnittpunkt der jeweiligen Geraden mit $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ definiert.

Wir sehen aus der Konstruktion, dass ϕ_N und ϕ_S jeweils Bijektionen sind. Insbesondere gilt $\phi_N(U_N) = \phi_S(U_S) = \mathbb{R}^n$, was offen ist. Indem man für $t \in \mathbb{R}$ die Gleichung

$$\|(1-t)u + tN\|^2 = 1$$

löst, erhält man für die Umkehrabbildung ϕ_N^{-1} die Formel

$$\phi_N^{-1}(u) = \frac{1}{1 + \|u\|^2}(2u^1, \ldots, 2u^n, \|u\|^2 - 1)$$

und analog

$$\phi_S^{-1}(u) = \frac{1}{1 + \|u\|^2}(2u^1, \ldots, 2u^n, 1 - \|u\|^2).$$

Wir zeigen, dass dies ein glatter Atlas von S^n ist:

(A1) Es gilt $S^n = U_N \cup U_S$.

(A2) Wegen $\phi_N(S) = 0$ und $\phi_S(N) = 0$ gilt $\phi_N(U_N \cap U_S) = \mathbb{R}^n \setminus \{0\} = \phi_S(U_N \cap U_S)$ und $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ ist offen.

(A3) Es gilt für $u = (u^1, \ldots, u^n) \in \mathbb{R}^n$

$$\phi_S \circ \phi_N^{-1}(u^1, \ldots, u^n) = \phi_S\left(\frac{1}{1 + \|u\|^2}(2u^1, \ldots, 2u^n, \|u\|^2 - 1)\right) = \frac{u}{\|u\|^2}.$$

Dies ist ein Diffeomorphismus $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und man kann nachrechnen, dass $\phi_N \circ \phi_S^{-1} = \phi_S \circ \phi_N^{-1}$. Also sind die Kartenwechsel Diffeomorphismen.

Das folgende Beispiel definiert einen glatten Atlas auf einer Menge, die man sich nicht in natürlicher Weise als Teilmenge eines Vektorraums vorstellen kann.

Beispiel 1.7 (Die Menge der Geraden in $\mathbb{R}^2$)**.** Sei M die Menge aller Geraden in $\mathbb{R}^2$. Jede solche Gerade lässt sich als Lösungsmenge einer linearen Gleichung der Form $ax + by - c = 0$ schreiben, wobei $a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a, b) \neq (0, 0)$. Wir erhalten die gleiche Gerade, wenn wir (a, b, c) durch $(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$, wobei $\lambda \in \mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ersetzen. Also gilt

$$M = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid (a, b) \neq (0, 0)\}/\sim = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid (a, b) \neq (0, 0)\}/\mathbb{R}^\times.$$

Wir definieren nun U_y als die Menge aller Geraden mit $b \neq 0$, d.h. U_y ist die Menge aller Geraden, die nicht parallel zur y-Achse sind. Eine solche Gerade kann in der Form $y = mx + c$ schreiben, mit eindeutig bestimmten $m, c \in \mathbb{R}$. Wir definieren daher eine injektive Abbildung

$$\phi_y : U_y \to \mathbb{R}^2, \quad \phi_y(\{y = mx + c\}) = (m, c).$$

Analog definieren wir U_x durch die Bedingung $a \neq 0$ und eine Bijektion

$$\phi_x : U_x \to \mathbb{R}^2, \quad \phi_x(\{x = ny + d\}) = (n, d).$$

Wir behaupten, dass $\mathcal{A} = \{(U_x, \phi_x), (U_y, \phi_y)\}$ ein Atlas für M ist.

(A1): Es ist nach Konstruktion klar, dass $M = U_x \cup U_y$.

(A2): Es gilt $\phi_x(U_x \cap U_y) = \{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 \mid u^1 \neq 0\} = \phi_y(U_x \cap U_y)$, und dies ist eine offene Menge in $\mathbb{R}^2$.

(A3): Wir müssen die Übergangsfunktionen $\phi_x \circ \phi_y^{-1}$ und $\phi_y \circ \phi_x^{-1}$ berechnen. Es gilt wegen $y = mx + c \iff x = m^{-1}y - m^{-1}c$

$$\phi_x \circ \phi_y^{-1}(u^1, u^2) = \phi_x(\{y = u^1 x + u^2\}) = \phi_x(\{x = (u^1)^{-1} y - (u^1)^{-1} u^2\}) = ((u^1)^{-1}, -(u^1)^{-1} u^2),$$

was eine glatte Abbildung ist mit glatter Inverser $\phi_y \circ \phi_x^{-1} : (u^1, u^2) \mapsto ((u^1)^{-1}, -(u^1)^{-1} u^2)$.

Beispiel 1.8 (Der Projektive Raum $\mathbb{P}(V)$)**.** Sei V ein reeller Vektorraum der Dimension $n + 1$. Der Projektive Raum zu V ist die Menge aller ein-dimensionalen Untervektorräume von V, das heißt

$$\mathbb{P}(V) = \{L \subset V \mid L \text{ Unterraum}, \dim L = 1\}.$$

In dem wir eine Basis wählen, können wir V mit $\mathbb{R}^{n+1}$ identifizieren und wollen nun auf

$$\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1}) =: \mathbb{RP}^n$$

einen Atlas konstruieren.

Jeder eindimensionale Unterraum $L \subset \mathbb{R}^{n+1}$ wird von einem Vektor $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $v \neq 0$ aufgespannt. Zwei nichtverschwindende Vektoren $v, v' \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ spannen genau dann den gleichen Unterraum auf, wenn sie linear abhängig sind, das heißt, wenn $v' = \lambda v$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}^\times$. In diesem Fall schreiben wir $v \sim v'$. Dies definiert eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$.

Es folgt

$$\mathbb{RP}^n = \left(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}\right)/\sim = \left(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}\right)/\mathbb{R}^\times.$$

Für $v = (v^0, \ldots, v^n) \in \mathbb{R}^{n+1} \cong V$ schreiben wir $[v] \in \mathbb{RP}^n$ für die von v aufgespannte Gerade . Wir konstruieren einen Atlas auf $\mathbb{RP}^n$. Sei dazu $\alpha \in \{0, \ldots, n\}$

$$U_\alpha = \{[v] \in \mathbb{RP}^n \mid v^\alpha \neq 0\}.$$

Wir definieren nun eine Bijektion $\phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ wie folgt:

$$\phi_\alpha([v]) = \frac{1}{v^\alpha}(v^0, \ldots, \widehat{v^\alpha}, \ldots, v^n) \in \mathbb{R}^n.$$

Die Notation $\widehat{v^\alpha}$ bedeutet hierbei, dass der Eintrag v^α weggelassen wird. Dann ist ϕ_α wohldefiniert, denn ist $\lambda \in \mathbb{R}^\times$ und $v' = \lambda v$ ein weiterer Repräsentant von $[v]$, so gilt

$$\phi_\alpha([v']) = \phi_\alpha([\lambda v]) = \frac{1}{\lambda v^\alpha}(\lambda v^0, \ldots, \widehat{\lambda v^\alpha}, \ldots, \lambda v^\alpha) = \frac{1}{v^\alpha}(v^0, \ldots, \widehat{v^\alpha}, \ldots, v^\alpha) = \phi_\alpha([v]).$$

Wir zeigen, dass ϕ_α bijektiv ist, indem wir die Umkehrabbildung angeben:

$$\phi_\alpha^{-1} \colon \mathbb{R}^n \to U_\alpha \quad \phi_\alpha^{-1}(u^1, \ldots, u^n) = [(u^1, \ldots, u^\alpha, 1, u^{\alpha+1}, \ldots, u^n)].$$

Also ist (U_α, ϕ_α) eine Karte auf $\mathbb{RP}^n$. Wir behaupten, dass $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha) \mid \alpha = 0, \ldots, n\}$ ein n-dimensionaler differenzierbarer Atlas von $\mathbb{RP}^n$ ist. Wir gehen die Axiome der Reihe nach durch.

(A1): Dies ist klarerweise erfüllt, da jeder nichtverschwindende Vektor mindestens einen Eintrag besitzt, der nicht Null ist. Die zugehörige Äquivalenzklasse liegt also in einer Menge der Form U_α.

(A2): Es gilt $U_\alpha \cap U_\beta = \{[v] \in \mathbb{RP}^n \mid v^\alpha \neq 0 \neq v^\beta\}$ und daher $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) = \{u \in \mathbb{R}^n \mid u^\beta \neq 0\}$, falls $\alpha < \beta$ und $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) = \{u \in \mathbb{R}^n \mid u^{\beta+1} \neq 0\}$ falls $\alpha > \beta$ und diese Mengen sind jeweils offen.

(A3): Sei $\alpha < \beta$. Dann gilt für $x \in \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) = \{u \in \mathbb{R}^n \mid u^{\alpha+1} \neq 0\}$

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}(u) = \phi_\alpha([u^1, \ldots, u^\beta, 1, u^{\beta+1}, \ldots, u^n]) = \frac{1}{u^{\alpha+1}}(u^1, \ldots, \widehat{u^{\alpha+1}}, \ldots, u^\beta, 1, u^{\beta+1}, \ldots, u^n).$$

Dies ist eine glatte Abbildung $\phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$. Analog sieht man, dass auch im Fall $\alpha > \beta$ der Kartenwechsel glatt ist. Da die Umkehrabbildung zu $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ gerade durch die glatte Abbildung $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ gegeben ist, ist jeder Kartenwechsel also ein Diffeomorphismus.

Insgesamt haben wir also einen differenzierbaren Atlas auf $\mathbb{RP}^n \cong \mathbb{P}(V)$ konstruiert.

Beispiel 1.9 (Der Torus T^n)**.** Betrachte $\mathbb{R}^n$ als additive Gruppe $(\mathbb{R}^n, +)$. Die Untergruppe $\mathbb{Z}^n$ operiert auf $\mathbb{R}^n$ durch Translation: $\lambda.x = x + \lambda$ für $x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{Z}^n$. Dies induziert auf $\mathbb{R}^n$ eine Äquivalenzrelation: $x \sim x'$, falls ein $\lambda \in \mathbb{Z}^n$ existiert mit $x' = x + \lambda$. Wir wollen auf dem zugehörigen Quotienten

$$T^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n = \mathbb{R}^n /_\sim,$$

einen Atlas definieren. Wähle dazu $u \in \mathbb{R}^n$ fest und betrachte den offenen Würfel mit Zentrum u und Kantenlänge 1:

$$W_u = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y^i - u^i| < \frac{1}{2}\}.$$

Wir bemerken, dass falls $y \in W_u$ und ist $\lambda \in \mathbb{Z}^n$ mit $\lambda \neq 0$, so gilt $y + \lambda \notin W_u$, d.h. keine zwei verschiedenen Punkte in W_u sind äquivalent. Sei

$$\pi : \mathbb{R}^n \to T^n, \quad \pi(u) = [u]$$

die Quotientenabbildung. Dann ist also $\pi : W_u \to \pi(W_u)$ bijektiv. Wir setzen nun

$$U_u = \pi(W_u) \subset T^n, \quad \phi_u = (\pi|_{W_u})^{-1} : U_u \to \phi_u(U_u) = W_u \subset \mathbb{R}^n.$$

Das Paar (U_u, ϕ_u) ist eine Karte auf T^n, da $\phi_u(U_u) = W_u \subset \mathbb{R}^n$ offen ist. Sei nun

$$\mathcal{A} = \{(U_u, \phi_u) \mid u \in \mathbb{R}^n\}.$$

Wir zeigen, dass dies ein Atlas für T^n ist.

(A1) Es gilt $\mathbb{R}^n = \bigcup_{u \in \mathbb{R}^n} W_u$ und daher auch $T^n = \pi(\mathbb{R}^n) = \bigcup_{u \in \mathbb{R}^n} \pi(W_u) = \bigcup_{u \in \mathbb{R}^n} U_x$.

(A2) Wir bemerken zunächst, dass für $U \subset \mathbb{R}^n$ gilt

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} (U + \lambda).$$

Damit folgt

$$\phi_u(U_u \cap U_v) = (\pi|_{W_u})^{-1}(\pi(W_u) \cap \pi(W_v)) = W_u \cap (\pi^{-1}(\pi(W_v)) = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} (W_u \cap (W_v + \lambda))$$

und dies ist als Vereinigung offener Mengen offen.

(A3) Wir berechnen einen beliebigen Kartenwechsel

$$\phi_v \circ \phi_u^{-1} \colon \phi_u(U_u \cap U_v) \to \phi_v(U_u \cap U_v).$$

Es gilt für $a \in W_u \cap (W_v + \lambda) \subset \phi_u(U_u \cap U_v)$

$$\phi_v \circ \phi_u^{-1}(a) = \phi_v([a]) = a - \lambda \in W_v \cap (W_u - \lambda) \subset \phi_v(U_u \cap U_v)$$

und dies ist ein Diffeomorphismus.

1.3 Der Begriff der glatten Mannigfaltigkeit

Wir sind nun fast beim Begriff der glatten Mannigfaltigkeit angelangt, es gibt allerdings noch eine Sache, die wir beachten wollen.

Wenn wir uns das Beispiel $\mathbb{P}(V)$ noch einmal genauer anschauen, so bemerken wir, dass der von uns definierte Atlas von der Wahl einer Basis von V abhängt. Wählen wir eine andere Basis für V, so erhalten wir einen neuen Atlas $\tilde{\mathcal{A}} = \{(\tilde{U}_\alpha, \tilde{\phi}_\alpha) \mid i = 0, \ldots, n\}$. Die Karten in $\mathcal{A}$ und $\tilde{\mathcal{A}}$ sind allerdings alle paarweise verträglich, d.h. $\mathcal{A} \cup \tilde{\mathcal{A}}$ bildet auch einen Atlas von $\mathbb{P}(V)$. Wir wollen aber von $\mathbb{P}(V)$ als der Menge der eindimensionalen Unterräume von V reden und nicht zwischen $(\mathbb{P}(V), \mathcal{A})$, $(\mathbb{P}(V), \tilde{\mathcal{A}})$ und $(\mathbb{P}(V), \mathcal{A} \cup \tilde{\mathcal{A}})$ unterscheiden. Dies motiviert die folgende Definition.

Definition 1.10 (Verträglichkeit von Atlanten)**.** Sei M eine Menge. Zwei n-dimensionale Atlanten $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ auf M heißen *verträglich*, falls die Vereinigung $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ wieder ein n-dimensionaler Atlas von M ist, d.h. jede Karte aus $\mathcal{A}$ ist mit jeder Karte aus $\mathcal{B}$ verträglich im Sinne von Definition 1.3.

Lemma 1.11. *Sei M eine Menge. Dann induziert Verträglichkeit eine Äquivalenzrelation auf der Menge der n-dimensionalen glatten Atlanten auf M und die Äquivalenzklasse $[\mathcal{A}]$ eines n-dimensionalen Atlas ist gegeben durch den maximalen Atlas für M, der $\mathcal{A}$ enthält.*

Beweis. Übungsblatt 1. □

Definition 1.12 (Differenzierbare Struktur)**.** Sei M eine Menge. Eine *n-dimensionale differenzierbare Struktur* auf M ist eine Äquivalenzklasse $[\mathcal{A}]$ n-dimensionaler glatter Atlanten.

Definition 1.13 (Differenzierbare Mannigfaltigkeit)**.** Eine *n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit* ist ein Paar $(M, [\mathcal{A}])$ bestehend aus einer Menge M und einer n-dimensionalen differenzierbaren Struktur $[\mathcal{A}]$.

Bemerkung 1.14. a) Wir schreiben auch $(M^n, [\mathcal{A}])$ statt $(M, [\mathcal{A}])$ um anzuzeigen, dass M die Dimension n hat.

b) Um eine Menge M mit der Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit zu versehen, reicht es also aus, einen Atlas $\mathcal{A}$ anzugeben. Wenn wir $(M, [\mathcal{A}])$ betrachten, nehmen wir alle weiteren Karten hinzu, die mit den Karten aus $\mathcal{A}$ verträglich sind.

1.4 Die Topologie einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit

Wir haben den zenralen Begriff dieser Veranstaltung - differenzierbare Mannigfaltigkeiten - definiert. Um auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten Analysis betreiben zu können, führen wir nun das Konzept einer *offenen Teilmenge* ein. Es stellt sich heraus, dass ein differenzierbarer Atlas auf natürliche Weise eine Topologie auf M induziert. Zunächst erinnnern wir an die Definition eines topologischen Raums.

Definition 1.15. Sei M eine Menge. Eine *Topologie* auf M ist eine Familie $\mathcal{T}$ von Teilmengen von M, die folgende Eigenschaften erfüllt:

(T1) $M \in \mathcal{T}$, $\emptyset \in \mathcal{T}$,

(T2) Falls $\{O_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset \mathcal{T}$, so gilt auch $\bigcup_{\alpha \in I} O_\alpha \in \mathcal{T}$,

(T3) Falls $O_1, \ldots, O_N \in \mathcal{T}$ für ein $N \in \mathbb{N}$, so gilt auch $\bigcap_{\alpha=1}^{N} O_\alpha \in \mathcal{T}$.

Das Paar $(M, \mathcal{T})$ heißt dann *topologischer Raum*. Die Elemente von $\mathcal{T}$ werden *offene Mengen in* M genannt. Eine Teilmenge $A \subset M$ heißt *abgeschlossen*, falls $M \setminus A$ offen ist, also $M \setminus A \in \mathcal{T}$.

Das Axiom $(T1)$ besagt also, dass die Menge M und die leere Menge offen sind, $(T2)$ besagt, dass beliebige Vereinigungen offener Mengen offen sind und $(T3)$ verlangt, dass endliche Schnitte offener Mengen wieder offen sind.

Beispiel 1.16. Sei (M, d) ein metrischer Raum. Wir nennen eine Menge $O \subset M$ offen, falls zu jedem $p \in O$ ein $\epsilon > 0$ existiert, sodass die offene Kugel um p mit Radius ϵ, $B_\epsilon(p) = \{q \in M \mid d(p,q) < \epsilon\}$, in O enthalten ist. Dies definiert also eine Topologie auf M.

Definition 1.17. Ein Abbildung $F : M \to N$ zwischen topologischen Räumen heißt *stetig*, falls für jede offene Menge $O \subset N$ das Urbild $F^{-1}(O) \subset M$ offen ist ("Urbilder offener Mengen sind offen.").

Ist $F : M \to N$ stetig, bijektiv und die Umkehrabbildung F^{-1} ebenfalls stetig, so heißt F ein *Homöomorphismus.*

Bemerkung 1.18. a) Wir wissen aus Analysis II, dass für metrische Räume diese Definition der Stetigkeit äquivalent zum (ϵ, δ)-Kriterium ist.

b) Sind $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F : U \to V$ ein Diffeomorphismus, so ist F auch ein Homöomorphismus, da differenzierbare Abbildungen stetig sind.

Wir zeigen nun, dass ein Atlas auf natürliche Weise eine Topologie auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit induziert.

Definition und Satz 1.19 (Die Topologie einer Mannigfaltigkeit)**.** *Sei $(M, [\mathcal{A}])$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Wir definieren eine Familie von Teilmengen $\mathcal{T}_M$ wie folgt:*

$$O \in \mathcal{T}_M \iff \phi_\alpha(O \cap U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n \textit{ ist offen für alle } (U_\alpha, \phi_\alpha) \in \mathcal{A}.$$

Dann definiert $\mathcal{T}_M$ eine Topologie auf M, welche nicht von der Wahl des Repräsentanten $\mathcal{A}$ abhängt.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $\mathcal{T}_M$ eine Topologie definiert.

(T1) Sei $(U_\alpha, \phi_\alpha) \in \mathcal{A}$ beliebig. Wegen $\phi_\alpha(\emptyset \cap U_\alpha) = \emptyset$ ist $\emptyset \in \mathcal{T}_M$. Außerdem ist $\phi_\alpha(M \cap U_\alpha) = \phi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ offen nach Definition, also auch $M \in \mathcal{T}_M$.

(T2) Sei $(U_\alpha, \phi_\alpha) \in \mathcal{A}$ beliebig. Da für jede Karte (U_α, ϕ_α) die Abbildung $\phi_\alpha : U_\alpha \to \phi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ bijektiv ist, gilt

$$\phi_\alpha\Big(\bigcup_{j \in J} O_j \cap U_\alpha\Big) = \bigcup_{j \in J} \phi_\alpha(O_j \cap U_\alpha).$$

Die Menge auf der rechten Seite ist eine Vereinigung offener Mengen, also offen in $\mathbb{R}^n$. Es folgt $\bigcup_{j \in J} O_j \in \mathcal{T}_M$.

(T3) Dies beweist man analog zu (T2).

Sei nun $\mathcal{B}$ ein zu $\mathcal{A}$ verträglicher Atlas. Wir müssen zeigen, dass für jedes $O \in \mathcal{T}_M$ und für jede Karte $(V_\beta, \psi_\beta) \in \mathcal{B}$ die Menge $\psi_\beta(O \cap V_\beta) \subset \mathbb{R}^n$ offen ist. Wähle Karten $(U_\alpha, \phi_\alpha) \in \mathcal{A}$, $\alpha \in I$, sodass

$$O \cap V_\beta = \bigcup_{\alpha \in I} (O \cap U_\alpha \cap V_\beta).$$

Dann gilt

$$\psi_\beta(O \cap V_\beta) = \bigcup_{\alpha \in I} \psi_\beta(O \cap U_\alpha \cap V_\beta).$$

Nun gilt

$$\psi_\beta(O \cap U_\alpha \cap V_\beta) = (\psi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}) \circ \phi_\alpha(O \cap U_\alpha \cap V_\beta) = (\psi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})(\phi_\alpha(O \cap U_\alpha) \cap \phi_\alpha(U_\alpha \cap V_\beta)).$$

Die Menge $\phi_\alpha(O \cap U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ ist offen, da $O \in \mathcal{T}_M$ und da (U_α, ϕ_α) und (V_β, ψ_β) verträglich sind, ist $\phi_\alpha(U_\alpha \cap V_\beta) \subset \mathbb{R}^n$ auch offen. Damit ist also

$$\psi_\beta(O \cap U_\alpha \cap V_\beta) = (\psi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})(\phi_\alpha(O \cap U_\alpha) \cap \phi_\alpha(U_\alpha \cap V_\beta))$$

offen, weil $(\psi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})$ ein Diffeomorphismus ist. Insgesamt können wir also $\psi_\beta(V_\beta \cap O)$ als Vereinigung offener Mengen schreiben, daher ist $\psi_\beta(V_\beta \cap O)$ selbst offen. Der Satz ist bewiesen. □

Wir zeigen als nächstes, dass $\mathcal{T}_M$ die eindeutig bestimmte Topologie auf M ist, bezüglich derer alle Karten Homöomorphismen sind.

Proposition 1.20 (Charakterisierung der Mannigfaltigkeitstopologie)**.** *Sei $(M^n, [\mathcal{A}])$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und sei $\mathcal{T}$ eine Topologie auf M. Dann gilt $\mathcal{T} = \mathcal{T}_M$ genau dann, wenn für jede Karte $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ die Abbildung*

$$\phi : U \to \phi(U) \subset \mathbb{R}^n$$

ein Homöomorphismus ist.

Beweis. Sei $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ eine Karte und sei $O \subset M$ offen (bezüglich $\mathcal{T}_M$). Dann gilt

$$(\phi^{-1})^{-1}(O) = \phi(U \cap O)$$

und dies ist offen in $\mathbb{R}^n$ nach Definition von $\mathcal{T}_M$. Damit ist also die Umkehrabbildung ϕ^{-1} stetig und insbesondere ist $U_\alpha \subset M$ offen. Wir zeigen nun, dass ϕ auch stetig ist. Sei dazu $V \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann müssen wir also zeigen, dass für eine beliebige Karte $(U_\alpha, \phi_\alpha) \in \mathcal{A}$ die Menge $\phi_\alpha(\phi^{-1}(V) \cap U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ offen ist. Es ist nun

$$\phi_\alpha(\phi^{-1}(V) \cap U_\alpha) = \phi_\alpha \circ \phi^{-1}(V \cap \phi(U \cap U_\alpha)).$$

Da $(U, \phi), (U_\alpha, \phi_\alpha)$ verträglich sind, ist die Menge $V \cap \phi(U \cap U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ der Schnitt zweier offener Mengen, also offen. Außerdem ist $\phi_\alpha \circ \phi^{-1}$ ein Diffeomorphismus, also ist auch $\phi_\alpha \circ \phi^{-1}(V \cap \phi(U \cap U_\alpha))$ offen.

Sei nun $\mathcal{T}$ eine Topologie auf M, sodass alle Kartenabbildungen $\phi : U \to \phi(U)$ Homöomorphismen sind. Da $\phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ offen ist, muss also auch $U \subset M$ offen sein bezüglich $\mathcal{T}$. Wir zeigen $\mathcal{T} = \mathcal{T}_M$.

Sei nun $V \subset M$ eine offene Menge bezüglich $\mathcal{T}$. Dann ist $U \cap V$ offen und damit auch $\phi(U \cap V)$ für jede Karte (U, ϕ). Es folgt $V \in \mathcal{T}_M$.

Ist andererseits $W \subset M$ offen bezüglich $\mathcal{T}_M$, so ist $\phi_\alpha(U_\alpha \cap W)$ offen für jede Karte (U_α, ϕ_α). Da ϕ_α stetig ist (bzgl. $\mathcal{T}$), muss also auch $U_\alpha \cap W$ offen sein bezüglich $\mathcal{T}$. Man kann aber W schreiben als

$$W = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \cap W.$$

Also ist W als Vereinigung offener Mengen offen bezüglich $\mathcal{T}$.

Damit haben wir gezeigt, dass die Topologien $\mathcal{T}$ und $\mathcal{T}_M$ die gleichen offenen Mengen definieren, also sind sie gleich. □

Definition 1.21. Sei $(M, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

a) Eine Teilmenge $U \subset M$ heißt *Umgebung von* $p \in M$ falls $p \in U$ und ein $O \in \mathcal{T}$ existiert mit $p \in O \subset U$.

b) Wir nennen $(M, \mathcal{T})$ einen *Hausdorffraum*, falls für alle $x, y \in M$ mit $x \neq y$ Umgebungen U_x von x und U_y von y existieren mit $U_x \cap U_y = \emptyset$.

Definition 1.22. Sei $(M, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

a) Eine *Basis für die Topologie* $\mathcal{T}$ ist eine Familie von Teilmengen $\{O_i : i \in I\}$ mit $O_i \in \mathcal{T}$, sodass jede offene Menge $O \in \mathcal{T}$ in der Form

$$O = \bigcup_{j \in J} O_j$$

geschrieben werden kann für eine geeignete Indexmenge $J \subset I$.

b) Ein topologischer Raum erfüllt das *zweite Abzählbarkeitsaxiom*, falls eine abzählbare Basis für die Topologie existiert.

Beispiel 1.23. Ist $M = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum, so macht die von der Norm induzierte Topologie M zu einem Hausdorffraum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Eine abzählbare Basis der Topologie ist gegeben durch die offenen Kugeln mit rationalem Radius um Punkte, die rationale Koordinaten haben.

Ab jetzt betrachten wir nur noch Mannigfaltigkeiten, deren Mannigfaltigkeitstopologie Hausdorff ist und das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.

1.5 Einige Konzepte aus der Topologie

Die meisten der folgenden Konzepte sollten für metrische Räume aus der Analysis bekannt sein.

Definition 1.24. Ein topologischer Raum $(M, \mathcal{T})$ heißt *zusammenhängend*, falls M nicht als disjunkte Vereinigung von zwei nicht-leeren offenen Mengen geschrieben werden kann, das heißt, für $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$ mit $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ implizert $M = O_1 \cup O_2$, dass $M = O_1$ oder $M = O_2$ gelten muss.

Lemma 1.25. *Ist $F : (M, \mathcal{T}) \to (N, \mathcal{T}_N)$ eine stetige surjektive Abbildung zwischen topologischen Räumen und ist M zusammenhängend, dann ist auch N zusammenhängend. „Stetige Bilder zusammenhängender topologischer Räume sind zusammenhängend."*

Ist $M = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $N = [F(a), F(b)]$, so ist dies gerade der Zwischenwertsatz aus Analysis I.

Beweis. Angenommen N ist nicht zusammenhängend. Dann existieren disjunkte nicht-leere offene Mengen $U, V \in \mathcal{T}_N$, sodass $N = U \cup V$. Dann gilt aber auch

$$M = F^{-1}(N) = F^{-1}(U) \cup F^{-1}(V).$$

Die Mengen $F^{-1}(U), F^{-1}(V)$ sind disjunkt und, da F stetig ist, offen. Da M zusammenhängend ist, muss eine der beiden Mengen, o.b.d.A. $F^{-1}(V)$, leer sein. Dann gilt aber $M = F^{-1}(U)$ und damit also auch

$$N = F(M) = F(F^{-1}(U)) = U,$$

ein Widerspruch. □

Definition 1.26. a) Sei $(M, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine *Kurve* in M ist eine stetige Abbildung $\gamma : J \to M$, wobei $J \subset \mathbb{R}$ ein zusammenhängendes offenes Intervall ist

b) Ein topologischer Raum $(M, \mathcal{T})$ heißt *wegzusammenhängend*, falls zu jedem Punktepaar $p, q \in M$ eine Kurve $\gamma : J \to \mathbb{R}$ existiert mit $p, q \in \gamma(J)$.

Definition 1.27. Sei $(M, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $N \subset M$ eine Teilmenge. Die *Teilraumtopologie* auf N ist gegeben durch

$$\mathcal{T}_N = \{O \cap N \mid O \in \mathcal{T}\}.$$

Eine Teilmenge von N ist also offen, genau dann wenn man sie als Schnitt einer offenen Menge aus M mit N schreiben kann.

Lemma 1.28. *Wegzusammenhängende Räume sind zusammenhängend.*

Beweis. Sei M ein wegzusammenhängender topologischer Raum. Angenommen $M = U \cup V$ mit $U, V \subset M$ offen und $U \cap V = \emptyset$. Sei nun $p \in U$ und $q \in V$. Dann existiert nach Voraussetzung eine Kurve $\gamma : [0, 1] \to M$ sodass $\gamma(0) = p$ und $\gamma(1) = q$. Dann ist also $\gamma([0, 1]) \subset M$ zusammenhängend bezüglich der Teilraumtopologie. Andererseits gilt aber $\gamma([0, 1]) = (\gamma([0, 1]) \cap U) \cup (\gamma([0, 1]) \cap V)$, das heißt wir können den Teilraum $\gamma([0, 1])$ als nicht-triviale disjunkte Vereinigung offener Mengen schreiben - Widerspruch. □

Lemma 1.29. *a) Ist $(M, \mathcal{T})$ ein Hausdorff-Raum, dann ist auch jeder Teilraum Hausdorff.*

b) Erfüllt $(M, \mathcal{T})$ das zweite Abzählbarkeitsaxiom, dann erfüllt dies auch jeder Teilraum.

Beweis. a) Sei $(M, \mathcal{T})$ ein Hausdorff-Raum, und $N \subset M$ ein Teilraum. Sind $p \neq q \in N$, so gilt insbesondere $p, q \in M$ und wir können offene Mengen U_p, U_q finden, sodass $p \in U_p$, $q \in U_q$ und $U_p \cap U_q = \emptyset$. Nach Definition der Teilraumtopologie sind $N \cap U_p \subset N$ und $N \cap U_q \subset N$ offene Umgebungen von p bzw. q, die p und q trennen.

b) Sei $N \subset M$ und sei $\{O_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Basis für die Topologie von M. Dann ist nach Definition $\{O_i \cap N \mid i \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Basis für den Teilraum $N \subset M$.

□

Beispiel 1.30. a) $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist nicht zusammenhängend.

b) $\mathbb{C}^\times = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist zusammenhängend.

c) $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n) \mid \det A \neq 0\}$ ist nicht zusammenhängend, da $\det : \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^\times$ stetig und surjektiv ist.

Definition 1.31. Sei $(M, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Dann heißt M *(überdeckungs-)kompakt*, falls jede offene Überdeckung von M eine endliche Teilüberdeckung besitzt, d.h. ist $\mathcal{O} = \{O_i \mid i \in I\}$ eine Familie von offenen Mengen in M mit $M = \bigcup_{i \in I} O_i$, dann existieren endlich viele Mengen $O_{i_1}, \ldots, O_{i_N} \in \mathcal{O}$ mit $M = \bigcup_{j=1}^{N} O_{i_j}$.

Lemma 1.32. *Ist $F : (M, \mathcal{T}) \to (N, \mathcal{T}_N)$ eine stetige surjektive Abbildung zwischen topologischen Räumen und ist M kompakt, dann ist auch N kompakt. („Stetige Bilder kompakter topologischer Räume sind kompakt.")*

Beweis. Sei $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ eine offene Überdeckung für N. Da F stetig ist, ist $F^{-1}(\mathcal{U}) = \{F^{-1}(U_i) \mid i \in I\}$ eine offene Überdeckung für den kompakten Raum M. Also existieren $U_1, \ldots, U_N \in \mathcal{U}$, sodass $M = \bigcup_{i=1}^{N} F^{-1}(U_i)$. Das bedeutet aber gerade, dass $N = \bigcup_{i=1}^{N} U_i$. Also hat jede offene Überdeckung von N eine endliche Teilüberdeckung und N ist somit kompakt. □

Lemma 1.33. *Ist $(M, \mathcal{T})$ Hausdorff und ist $K \subset M$ kompakt, dann ist K abgeschlossen.*

Beweis. Übungsblatt 2. □

Lemma 1.34. *Ist M ein kompakter topologischer Raum und $A \subset M$ abgeschlossen, dann ist A kompakt (mit der Teilraumtopologie).*

Beweis. Sei $\mathcal{O} = \{O_i \mid i \in I\}$ eine offene Überdeckung von A, dann ist $\tilde{\mathcal{O}} = \mathcal{O} \cup \{M \setminus A\}$ eine offene Überdeckung von M, besitzt also eine endliche Teilüberdeckung $\{O_1, \ldots, O_N, M \setminus A\}$ und damit ist $\{O_1, \ldots, O_N\}$ eine endliche Überdeckung für A. □

1.6 Weitere Beispiele glatter Mannigfaltigkeiten

Bisher haben wir nur ein Verfahren kennen gelernt, mit dem wir eine Menge mit der Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit versehen können: Wir müssen mehr oder weniger explizit einen Atlas angeben. Oft sind Mannigfaltigkeiten als Lösungsmengen nicht-linearer Gleichungssysteme gebeben. In diesem Fall können wir mithilfe des Satzes über implizite Funktionen die Existenz eines glatten Atlas beweisen.

Satz 1.35 (Geometrische Interpretation des Satzes über Implizite Funktionen)**.** *Sei $F : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ eine glatte Abbildung und sei $M = F^{-1}(0)$ das Nullstellengebilde von F. Falls $0 \in \mathbb{R}^m$ ein regulärer Wert von F ist, d.h. für alle $p \in M$ hat die Ableitung $dF_p : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ maximalen Rang (nämlich m), dann existiert auf M ein glatter n-dimensionaler Atlas, sodass die induzierte Topologie die Teilraumtopologie ist und M das zweite Abzähbarkeitsaxiom erfüllt.*

Beweis. Sei $p \in M$. Indem wir gegebenenfalls die Koordinaten $u^1, \ldots, u^{m+n}$ auf $\mathbb{R}^{n+m}$ umordnen, können wir annehmen, dass die Matrix

$$d_1F_p = \left(\partial_j F^i(p)\right)_{i,j=1,\ldots,m}$$

invertierbar ist. Betrachte nun

$$G : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^{n+m}, \quad G(u) = (F^1(u), \ldots, F^m(u), u^{m+1}, \ldots, u^{n+m}).$$

Falls $u \in M$, so gilt $G(u) = (0, \ldots, 0, u^{m+1}, \ldots, u^{n+m})$, das heißt mit $\{0\} \times \mathbb{R}^n = \{u \in \mathbb{R}^{n+m} \mid u^k = 0, k = 1, \ldots, m\}$ gilt

$$M \subset G^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R}^n).$$

Das Differential von G hat im Punkt p folgende Blockgestalt:

$$dG_p = \begin{pmatrix} d_1F_p & * \\ 0 & \mathrm{id}_n \end{pmatrix} : \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^n$$

und ist daher invertierbar. Wir wenden den Satz über die Umkehrabbildung auf G an und erhalten offene Umgebungen $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^{n+m}$ von p, $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^{n+m}$ von $G(p)$ und eine glatte Umkehrabbildung $G^{-1} : \tilde{V} \to \tilde{U}$.

Wir identifizieren nun $\{0\} \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ und definieren nun eine Karte um p durch $U = \tilde{U} \cap M$ und

$$\phi = G|_U : U \to V = \tilde{V} \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^n) \qquad \phi(q) = (q^{m+1}, \ldots, q^{m+n}).$$

Dies ist injektiv, weil G injektiv ist und die Umkehrabbildung ϕ^{-1} ist gegeben durch $G^{-1}|_V$. Außerdem ist die Menge $\phi(U) = V \subset \mathbb{R}^n$ offen, da $\tilde{V}$ offen ist.

Wir erhalten auf diese Weise um jeden Punkt in $p \in M$ eine Karte (U, ϕ) gegeben durch eine offene Umgebung $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^{n+m}$ von p mit $U = \tilde{U} \cap M$ und $\phi = G|_U$, wobei $G : \tilde{U} \to \tilde{V} \subset \mathbb{R}^{n+m}$ ein Diffeomorphismus ist, sodass $G(\tilde{U} \cap M) = \tilde{V} \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^n)$.

Die Kartenwechsel sind von der Gestalt

$$\phi \circ \psi^{-1} = G \circ H^{-1}|_{V_1 \cap V_2} : \phi(U_1 \cap U_2) \to \psi(U_1 \cap U_2).$$

Dies sind Einschränkungen von Verkettungen glatter Abbildungen, also glatt. Daher ist M eine glatte Mannigfaltigkeit.

Da die Abbildungen $G : \tilde{U} \to \tilde{V}$ Homöomorphismen sind, sind die Kartenabbildungen $\phi = G|_{\tilde{U} \cap M}$ Homoömorphismen bezüglich der Teilraumtopologie. Deshalb ist die Mannigfaltigkeitstopologie die Teilraumtopologie und M ist deshalb insbesondere Hausdorff und erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom, da $\mathbb{R}^{n+m}$ dies erfüllt. □

Beispiel 1.36. Wir haben $S^n = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|p\|^2 = 1\} = F^{-1}(0)$, wobei $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ gegeben ist durch $F(p) = \sum_{i=1}^{n+1} (p^i)^2 - 1$. Es gilt für $p \in S^n$

$$dF_p = 2(p^1, \ldots, p^{n+1}) \neq 0.$$

Also hat dF_p vollen Rang (nämlich 1) und S^n ist eine glatte Mannigfaltigkeit. Sei $p \in S^n$ mit $p^\alpha \neq 0$. Der Beweis des obigen Satzes sagt, dass eine Teilmenge $p \in U \subset S^n$ existiert, sodass $p \mapsto (p^1, \dots, \widehat{p^\alpha}, \dots, p^{n+1})$ eine Karte auf U ist. Dies ist liefert genau den Atlas von S^n, der uns auf Blatt 1 begegnet ist.

Außerdem ist S^n kompakt, da die Mannigfaltigkeitstopologie auf S^n die Teilraumtopologie ist und $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ abgeschlossen und beschränkt ist. Weiter ist S^n wegzusammenhängend, also zusammenhängend. Man kann zum Beispiel jeden Punkt durch eine stetige Kurve mit dem Nordpol verbinden.

Beispiel 1.37 (Die orthogonale Gruppe)**.** Sei $\mathrm{O}(n) = \{A \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n) \mid AA^T = 1_n\}$ und sei $\mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ der Vektorraum der symmetrischen $n \times n$-Matrizen. Wir betrachten die Funktion

$$F : \mathrm{End}(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R}) \quad F(A) = AA^T - 1_n.$$

Dann gilt $\mathrm{O}(n) = F^{-1}(0)$. Wir berechnen die Ableitung von F in einem Punkt A in Richtung $B \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$:

$$dF_A(B) = \frac{d}{dt}|_{t=0} F(A + tB) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(AA^T + tAB^T + tBA^T + t^2BB^T) = AB^T + BA^T.$$

Wir müssen nun zeigen, dass $dF_A : \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \to \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ surjektiv ist für alle $A \in \mathrm{O}(n) = F^{-1}(0)$. Sei also $S \in \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$. Wir setzen nun $B = \frac{1}{2}SA$. Dann gilt wegen $AA^T = I_n$ und $S = S^T$

$$dF_A(B) = A\left(\frac{1}{2}SA\right)^T + \left(\frac{1}{2}SA\right)A^T = \frac{1}{2}\left(AA^TS^T + SAA^T\right) = \frac{1}{2}\left(S + S^T\right) = S.$$

Also ist dF_A surjektiv und $\mathrm{O}(n)$ ist eine glatte Mannigfaltigkeit.

1.7 Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten

Definition 1.38 (Glatte Abbildungen, glatte Funktionen)**.** Seien $(M^m, [\mathcal{A}]), (N^n, [\mathcal{B}])$ differenzierbare Mannigfaltigkeiten.

a) Eine Abbildung $F : M \to N$ heißt *differenzierbar im Punkt* $p \in M$ (wir sagen auch *glatt* oder C^∞), falls für jede Karte $(U_\alpha, \phi_\alpha) \in \mathcal{A}$ mit $p \in U_\alpha$ und $(V_\beta, \psi_\beta) \in \mathcal{B}$ mit $F(p) \in V_\beta$ die Menge $F^{-1}(V_\beta) \subset M$ eine Umgebung von p ist und die Verkettung

$$\psi_\beta \circ F \circ \phi_\alpha^{-1} \colon \phi_\alpha(U_\alpha \cap F^{-1}(V_\beta)) \subset \mathbb{R}^m \to \psi_\beta(V_\beta) \subset \mathbb{R}^n$$

im Punkt $\phi_\alpha(p)$ beliebig oft stetig differenzierbar ist. Wir nennen $F : M \to N$ *differenzierbar*, falls F in jedem Punkt $p \in U$ differenzierbar ist. Wir schreiben auch $F \in C^\infty(U, N)$.

b) Ein *Diffeomorphismus* ist eine glatte bijektive Abbildung $F : M \to N$, sodass $F^{-1} : N \to M$ ebenfalls glatt ist.

c) Eine *glatte Funktion* auf M ist eine glatte Abbildung $f : M \to \mathbb{R}$, wobei wir $\mathbb{R}$ mit der Standardstruktur $[\mathcal{A}_{std}]$ ausstatten. Wir schreiben $C^\infty(M)$ für den Raum der glatten Funktionen auf M.

Bemerkung 1.39. Diese Definition merkt man sich am besten anhand des folgenden kommutativen Diagramms

$$\begin{array}{ccc} U_\alpha \subset M & \xrightarrow{\quad F \quad} & V_\beta \subset N \\ \downarrow{\scriptstyle \phi_\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_\beta} \\ \phi_\alpha(U_\alpha \cap F^{-1}(V_\beta)) & \xrightarrow{\psi_\beta \circ F \circ \phi_\alpha^{-1}} & \psi(V_\beta). \end{array}$$

Die Abbildung in der unteren Zeile ist eine Abbildung zwischen offenen Mengen in $\mathbb{R}^m$ bzw. $\mathbb{R}^n$. Wir nennen F also glatt, wenn für alle möglichen Wahlen von (U_α, ϕ_α) und (V_β, ψ_β) die Abbildung in der unteren Zeile glatt ist im Sinne von Analysis II.

In der Praxis ist diese Definition etwas unhandlich, da wir normalerweise nicht in der Lage sind zu überprüfen, dass die Bedingungen für alle möglichen Wahlen von Karten (U_α, ϕ_α) und (V_β, ψ_β) um p und $F(p)$ erfüllt sind. Das folgende Lemma besagt, dass es reicht dies für ein einziges Paar $(U_\alpha, \phi_\alpha), (V_\beta, \psi_\beta)$ zu testen.

Lemma 1.40. *Seien $(M, [\mathcal{A}]), (N, [\mathcal{B}])$ glatte Mannigfaltigkeiten und sei $F : M \to N$ eine Abbildung. Dann ist F glatt im Punkt $p \in M$ genau dann, wenn für eine feste Karte $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ um $p \in M$ und eine feste Karte $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ um $F(p) \in N$ die Menge $F^{-1}(V)$ eine Umgebung von p ist und die Verkettung*

$$\psi \circ F \circ \phi^{-1} \colon \phi(U \cap F^{-1}(V)) \to \psi(V)$$

glatt im Punkt $\phi(p)$ ist.

Beweis. Sind beliebige Karten $(\tilde{U}, \tilde{\phi}) \in \mathcal{A}$ um $p \in M$ und $(\tilde{V}, \tilde{\psi}) \in \mathcal{B}$ um $F(p) \in N$ gegeben, so gilt auf der offenen Menge $\tilde{\phi}(\tilde{U} \cap U \cap F^{-1}(V))$

$$\tilde{\psi} \circ F \circ \tilde{\phi}^{-1} = (\tilde{\psi} \circ \psi^{-1}) \circ \psi \circ F \circ \phi^{-1} \circ (\phi \circ \tilde{\phi}^{-1})$$

und dies ist glatt im Punkt $\tilde{\phi}(p)$ als Verkettung glatter Abbildungen. □

Seien $\mathcal{A}' \in [\mathcal{A}]$ und $\mathcal{B}' \in [\mathcal{B}]$ verträgliche Atlanten auf M und N. Wählt man nun im Beweis von Lemma 1.40 $(\tilde{U}, \tilde{\phi}) \in \mathcal{A}'$ um $p \in M$ und $(\tilde{V}, \tilde{\psi}) \in \mathcal{B}'$ so folgt, dass die Definition der Glattheit nicht von der Wahl der Atlanten $\mathcal{A} \in [\mathcal{A}]$ und $\mathcal{B} \in [\mathcal{B}]$ abhängt.

Beispiel 1.41. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und (U, ϕ) eine Karte. Dann ist die Abbildung $\phi : U \to \phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ glatt, sogar ein Diffeomorphismus.

Beispiel 1.42. Sei $A \in \mathrm{O}(n+1)$ eine orthogonale Matrix. Wir behaupten, dass dann die induzierte Abbildung

$$A : S^n \to S^n, \quad p \mapsto Ap$$

glatt ist.

Sei dazu $p \in S^n$. Dann gilt $\epsilon p^\alpha > 0$ für ein $\alpha \in \{1, \dots, n+1\}$, $\epsilon \in \{\pm 1\}$. Der Punkt p liegt also im Kartengebiet $U_{\alpha,\epsilon}$ mit Kartenabbildung $\phi_{\alpha,\epsilon}(q) = (q^1, \dots, \widehat{q^\alpha}, \dots, q^{n+1})$ (Notation wie auf Blatt 1). Sei $y = Ap$. Dann gilt $\delta y^\beta > 0$ für ein $\beta \in \{1, \dots, n+1\}$, $\delta \in \{\pm 1\}$, d.h. $y \in U_{\beta,\delta}$. Da die lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ ein Homöomorphismus ist, existiert $r > 0$, sodass für $B_r(p) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | \, \|x - p\| < r\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$

$$A(B_r(p)) \subset \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \delta x^\beta > 0\}$$

gilt. Dann folgt für $u \in \phi_{\alpha,\epsilon}(U_{\alpha,\epsilon} \cap B_r(p)) \subset B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
\phi_{\beta,\delta} \circ A \circ \phi_{\alpha,\epsilon}^{-1}(u) &= \phi_{\beta,\delta}(A(u^1, \dots, u^{\alpha-1}, \sqrt{1 - \|u\|^2}, u^\alpha, \dots, u^n)) \\
&= \phi_{\beta,\delta}(v^1, \dots, v^{n+1}) \\
&= (v^1(u), \dots, \widehat{v^\beta}, \dots, v^{n+1}(u)),
\end{aligned}$$

wobei

$$v^i(u) = \sum_{j=1}^{\alpha-1} A^i_j u^j + A^i_\alpha \sqrt{1 - \|u\|^2} + \sum_{j=\alpha+1}^{n+1} A^i_j u^{j-1}.$$

Diese Funktionen sind glatt auf der offenen Menge $\phi_{\alpha,\epsilon}(U_{\alpha,\epsilon} \cap B_r(p))$ und also insbesondere an der Stelle $\phi(p)$.

Beispiel 1.43. Wir betrachten die nicht-verträglichen Atlanten $\mathcal{A}_{std} = \{(\mathbb{R}, \mathrm{id})\}$ und $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}, \psi(x) = x^3)\}$ auf $M = \mathbb{R}$. Dann ist die Abbildung $F : (M, \mathcal{A}_{std}) \to (M, \mathcal{A})$ $F(x) = x^{1/3}$ ein Diffeomorphismus.

Lemma 1.44. *Seien $(M, [\mathcal{A}]), (N, [\mathcal{B}]), (P, [\mathcal{C}])$ glatte Mannigfaltigkeiten.*

a) Ist $F : M \to N$ glatt, dann ist F stetig bezüglich der Mannigfaltigkeitstopologien auf $(M, [\mathcal{A}])$ und $(N, [\mathcal{B}])$.

b) Sind $F : M \to N$, sowie $G : N \to P$ glatte Abbildungen, dann ist auch die Verkettung

$$G \circ F : M \to P$$

glatt.

Beweis. Übung. $\square$

Definition 1.45 (Lie-Gruppe)**.** Eine *Lie-Gruppe* ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit $(G, [\mathcal{A}])$ mit einer Gruppenstruktur, sodass die Abbildungen

$$m : G \times G \to G, \quad (g, h) \mapsto gh, \qquad i : G \to G, \quad g \mapsto g^{-1}$$

glatt sind.

Beispiel 1.46. Die Gruppe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \subset \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ ist eine offene Teilmenge (es gilt $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}\backslash\{0\})$ und die Abbildung $A \mapsto \det A$ ist stetig) und daher insbesondere eine glatte Mannigfaltigkeit mit der Standardstruktur $[\mathcal{A}_{std}]$. Matrizenmultiplikation ist eine polynomiale Abbildung und daher glatt. Außerdem ist die Abbildung $A \mapsto A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^\sharp$ nach der Cramerschen Regel rational, also glatt (hier bezeichnet $A^\sharp$ ist die Kofaktor-Matrix von A).

1.8 Existenz glatter Funktionen, Teilung der Eins

Proposition 1.47 (Existenz glatter Funktionen)**.** *Ist $(M^n, [\mathcal{A}])$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, so existieren auf M nicht-konstante glatte Funktionen.*

Beweis. Wir haben in den Übungen (Blatt 3) gesehen, dass für $\epsilon > 0$ eine glatte Funktion h auf $\mathbb{R}^n$ existiert mit $h \equiv 1$ auf $\overline{B_\epsilon(0)}$ und $h \equiv 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus B_{2\epsilon}(0)$. Sei nun (U, ϕ) eine Karte auf M und sei $\epsilon > 0$ so gewählt, dass $\overline{B_{2\epsilon}(0)} \subset \phi(U)$. Definiere nun $f : M \to \mathbb{R}$ durch

$$f(p) = \begin{cases} h(\phi(p)) & p \in U \\ 0 & p \notin U. \end{cases}$$

Dies definiert eine glatte Funktion auf U, die auf dem Komplement der kompakten Menge $\phi^{-1}(\overline{B_{2\epsilon}(0)}) \subset U$ verschwindet.

Ist nun $y \notin U$, dann können wir wegen der Hausdorff-Eigenschaft von M eine Umgebung U_y finden, sodass $U_y \cap \phi^{-1}(\overline{B_{2\epsilon}(0)}) = \emptyset$. Also ist f glatt im Punkt y, da f auf einer Umgebung von y verschwindet. Insgesamt ist f in jedem Punkt $p \in M$ glatt, also $f \in C^\infty(M)$. $\square$

Definition 1.48. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und sei $f \in C^\infty(M)$. Der *Träger von f* ist die Menge

$$\mathrm{supp}(f) = \overline{\{p \in M \mid f(p) \neq 0\}}.$$

Definition 1.49 (Teilung der Eins)**.** Sei $(M, [\mathcal{A}])$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und sei $\mathcal{V} = \{V_i \mid i \in I\}$ eine offene Überdeckung von M, also $M = \bigcup_{i \in I} V_i$. Eine *Teilung der Eins bezüglich der Überdeckung* $\mathcal{V}$ ist eine Familie glatter Funktionen $\{\psi_j \in C^\infty(M) \mid j \in J\}$ sodass

a) $\psi_j(p) \geq 0$ für alle $p \in M$ und alle $j \in J$.

b) Zu jedem $j \in J$ existiert ein $i(j) \in I$, sodass $\mathrm{supp}(\psi_j) \subset V_{i(j)}$.

c) Die Familie $\{\mathrm{supp}(\psi_j) \mid j \in J\}$ ist *lokal endlich*, d.h. zu jedem Punkt $p \in M$ existiert eine Umgebung U, sodass die Menge der $j \in J$ sodass $U \cap \mathrm{supp}(\psi_j) \neq \emptyset$ endlich ist.

d) $\sum_{j \in J} \psi_j \equiv 1$.

Die Summe in d) ist wegen c) wohldefiniert, da für festes $p \in M$ die Summe $\sum_{j\in J} \psi_j(p)$ endlich ist.

Satz 1.50. *Sei $(M, [\mathcal{A}])$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, deren Topologie Hausdorff ist und das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Sei $\mathcal{V} = \{V_i \mid i \in I\}$ eine beliebige offene Überdeckung. Dann existiert eine Teilung der Eins bezüglich $\mathcal{V}$.*

Beweis. Wir beweisen den Satz nur für den Spezialfall, dass M kompakt ist (für den allgemeinen Fall siehe [4], Theorem 1.11 und [1], Appendix). Wir wählen für jedes $p \in M$ und $V_i \in \mathcal{V}$ mit $p \in V_i$ eine Kartenumgebung $U_{i,p} \subset V_i$, eine offene Umgebung $\tilde{U}_{i,p}$ von p und eine Funktion $\tilde{\psi}_{i,p}$ mit kompaktem Träger $\tilde{U}_{i,p} \subset \operatorname{supp}(\psi_{i,p}) \subset U_{i,p}$. Insbesondere gilt $\psi_{i,p}(p) \neq 0$. Da M kompakt ist, können wir endlich viele Punkte $p_1, \ldots, p_N$ mit zugehörigen Kartenumgebungen $U_{1,p_1}, \ldots, U_{N,p_N}$ und Funktionen $\tilde{\psi}_{1p_1}, \ldots, \tilde{\psi}_{N,p_N}$ auswählen, sodass die $\tilde{U}_{j,p_j}$'s M überdecken. Setze dann

$$\psi_j = \frac{\tilde{\psi}_{j,p_j}}{\sum_{i=1}^N \tilde{\psi}_{i,p_i}}.$$

Diese Funktionen definieren die gewünschte Teilung der Eins. □

Wir werden dieses Resultat oft benutzen um Objekte, die lokal (etwa in einem festen Kartengebiet) auf einer Mannigfaltigkeit definiert sind, zu globalen Objekten fortzusetzen und umgekehrt.

Eine unmittelbare Folgerung aus der Existenz einer Teilung der Eins ist etwa das folgende Resultat über die Fortsetzbarkeit glatter Funktionen.

Korollar 1.51. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $U \subset M$ offen, $A \subset U$ abgeschlossen. Sei $f \in C^\infty(U)$. Dann existiert eine glatte Funktion $\tilde{f} \in C^\infty(M)$, sodass f und $\tilde{f}$ auf A übereinstimmen.*

Beweis. Betrachte die Überdeckung $\{V_0 = U, V_1 = M \setminus A\}$ und wähle eine zugehörige Teilung der Eins $\{\psi_0, \psi_1\}$. Dann ist $\psi_1|_A \equiv 0$ und daher muss wegen $\psi_0 + \psi_1 \equiv 1$ also $\psi_0|_A \equiv 1$ gelten. Setze nun

$$\tilde{f}(p) = \begin{cases} \psi_0(p) f(p) & p \in U \\ 0 & p \in M \setminus U. \end{cases}$$

Dann sieht man wie im Beweis von Proposition 1.47, dass $\tilde{f} \in C^\infty(M)$. Nach Konstruktion gilt $\tilde{f}|_A = f|_A$, da $\psi_0|_A \equiv 1$ ist. □

2 Der Tangentialraum

Wir haben nun Mannigfaltigkeiten und glatte Abbildungen eingeführt. Als Nächstes wollen wir nun das Differential bzw. die Ableitung einer glatten Abbildung erklären. Für eine Abbildung $F : U \to V$ zwischen offenen Mengen $U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^m$ ist das Differential am Punkt $p \in U$ eine lineare Abbildung $dF_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Um dieses Konzept auf Mannigfaltigkeiten übertragen zu können, brauchen wir den Begriff des *Tangentialraums*. Für eine Fläche in $M \subset \mathbb{R}^3$ haben wir eine intuitive Vorstellung der Tangentialebene an einen Punkt. Da wir aber abstrakte Mannigfaltigkeiten betrachten, brauchen wir ein Konzept, das nicht von einem umgebenden Vektorraum Gebrauch macht. Eine zentrale Idee ist dabei, dass man Vektoren in $\mathbb{R}^n$ mit Differentialoperatoren identifizieren kann - wir können glatte Funktionen *in Richtung $v \in \mathbb{R}^n$ ableiten.*

2.1 Der Zugang über Kurven

Zur Motivation studieren wir zunächst das folgende Beispiel. Wir betrachten die Einheitssphäre $S^2 = \{(p^1, p^2, p^3) \in \mathbb{R}^3 : \|p\|^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$. Und sei $n = (0, 0, 1)$ der Nordpol. Wir können uns die Tangentialebene an S^2 am Punkt n intuitiv als das orthogonale Komplement des Vektors n vorstellen:

$$T_n S^2 = \{v \in \mathbb{R}^3 : \langle n, v\rangle = 0\} = \{v = (v^1, v^2, v^3) \in \mathbb{R}^3 : v^3 = 0\}.$$

Zu jedem $v = (v^1, v^2, 0) \in T_nS^2$ mit $v \neq 0$ können wir die folgende Kurve betrachten:

$$\gamma_v : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^3 \quad \gamma_v(t) = (\sin(t\|v\|)\frac{v^1}{\|v\|}, \sin(t\|v\|)\frac{v^2}{\|v\|}, \cos(t\|v\|)).$$

Setzen wir weiter $\gamma_0(t) = n$ für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, so erhalten wir zu jedem $v \in T_nS^2$ eine Kurve $\gamma_v : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^3$, sodass:

$$\gamma_v(0) = n, \quad \gamma(t) \in S^2 \; \forall t \in (-\epsilon, \epsilon), \quad \dot{\gamma}(0) = v.$$

Ist nun $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^3$ eine beliebige glatte Kurve mit $\gamma(0) = n$ und $\gamma(t) \in S^2$ für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Dann gilt wegen $\|\gamma(t)\|^2 = 1$

$$0 = \frac{d}{dt}|_{t=0}\|\gamma(t)\|^2 = 2\langle n, \dot{\gamma}(0)\rangle,$$

und damit

$$\dot{\gamma}(0) \in T_nS^2.$$

Wir sehen also

$$T_nS^2 = \{\dot{\gamma}(0) | \gamma\colon (-\epsilon, \epsilon) \to S^2, \gamma(0) = n\}.$$

Wir können dies auch wie folgt interpretieren: Seien $\gamma_1, \gamma_2 : (-\epsilon, \epsilon) \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$ zwei glatte Kurven. Wir sagen γ_1 und γ_2 mit $\gamma_1(0) = n = \gamma_2(0)$ *stimmen zur ersten Ordnung in $n \in S^2$ überein*, falls $\dot{\gamma}_1(0) = \dot{\gamma}_2(0)$ und schreiben in diesem Fall $\gamma_1 \sim \gamma_2$. Dies definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\{\gamma\colon (-\epsilon, \epsilon) \to S^2 \subset \mathbb{R}^3 \mid \gamma(0) = n\}$, und man erhält eine Bijektion

$$T_nS^2 \cong \{\gamma\colon (-\epsilon, \epsilon) \to S^2 \subset \mathbb{R}^3 \mid \gamma(0) = n\}/_\sim \quad [\gamma] \mapsto \dot{\gamma}(0).$$

Die obigen Konstruktionen benutzen in essentieller Weise, dass wir S^2 als Teilmenge von $\mathbb{R}^3$ darstellen können. Wollen wir für eine beliebige differenzierbare Mannigfaltigkeit den Tangentialraum an einen Punkt erklären, so können wir diese Strategie leider nicht verfolgen, da wir M normalerweise nicht auf natürliche Weise als Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ realisieren können.

Wir bemerken nun aber, dass im obigen Beispiel $\gamma_1 \sim \gamma_2$ genau dann gilt, wenn für jede glatte Funktion $f : U \to \mathbb{R}$, wobei $U \subset S^2$ eine offene Umgebung von n ist, die Gleichheit

$$(f \circ \gamma_1)'(0) = (f \circ \gamma_2)'(0)$$

gilt. Diese letzte Relation ist ergibt Sinn, ohne dass wir die Einbettung $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ benutzen müssen. Dies motiviert die folgende Definition.

Definition 2.1 (Tangentialraum, erste Version)**.** Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und sei $p \in M$. Der *Tangentialraum von M im Punkt p* ist die Menge

$$T_pM = \{\gamma\colon J \to M \mid 0 \in J \subset \mathbb{R} \text{ offenes Intervall, } \gamma \text{ ist glatt,} \gamma(0) = p\}/_\sim,$$

wobei

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l}(f \circ \gamma_1)'(0) = (f \circ \gamma_2)'(0) \text{ für alle offenen Umgebungen } p \in U \subset M \\ \text{und alle } f \in C^\infty(U, M).\end{array}$$

Wir bezeichnen die von einer Kurve γ definierte Äquivalenzklasse in T_pM mit $[\gamma]$.

Diese Definition ist vom geometrischen Standpunkt sehr intuitiv, allerdings sieht man nicht direkt, dass T_pM ein Vektorraum ist. Um mit Tangentialvektoren rechnen zu können, brauchen wir also eine handlichere Definition. Diese zu entwickeln ist das Ziel des folgenden Abschnitts.

2.2 Derivationen

Definition 2.2 (Derivation im Punkt p)**.** Sei M^n eine glatte Mannigfaltigkeit und sei $p \in M$. Eine *Derivation im Punkt* p ist eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\delta : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$, welche die Leibnizregel erfüllt:

$$\delta(fg) = \delta(f)g(p) + f(p)\delta(g), \quad \forall f, g \in C^\infty(M).$$

Wir schreiben $\mathcal{D}_p(M)$ für den Vektorraum der Derivationen im Punkt p.

Beispiel 2.3. Sei M^n eine glatte Mannigfaltigkeit und sei (U, ϕ) eine Karte um $p \in M$. Dann erhalten wir für $i = 1, \ldots, n$ eine Derivation $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p \in \mathcal{D}_p(M)$ durch

$$\frac{\partial}{\partial x^i}|_p \colon C^\infty(M) \to \mathbb{R}, \qquad \frac{\partial}{\partial x^i}|_p(f) := \frac{\partial f}{\partial x^i}|_p := \partial_i(f \circ \phi^{-1})_{\phi(p)}.$$

Hier haben wir $\partial_i(f \circ \phi^{-1})_{\phi(p)} = d(f \circ \phi^{-1})_{\phi(p)}(e_i)$ für die i-te partielle Ableitung der Funktion $f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ geschrieben. Die Produktregel aus Analysis II zeigt, dass $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$ eine Derivation ist.

Beispiel 2.4. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Sei J ein offenes Intervall um $0 \in \mathbb{R}$ und sei $\gamma : J \to M$ eine glatte Kurve mit $\gamma(0) = p$. Dann erhalten wir eine Derivation im Punkt p, $\delta_\gamma : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ durch die Vorschrift

$$\delta_\gamma(f) := (f \circ \gamma)'(0) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(\gamma(t)).$$

Ziel dieses Abschnitts ist es zu zeigen, dass die Abbildung $\gamma \mapsto \delta_\gamma$ eine Bijektion $T_pM \to \mathcal{D}_p(M)$ induziert.

Lemma 2.5. *Sei $\delta \in \mathcal{D}_p(M)$ eine Derivation im Punkt p.*

a) Ist $c \in C^\infty(M)$ eine konstante Funktion, so gilt $\delta(c) = 0$.

b) Seien $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$ zwei glatte Funktionen, die in einer offenen Umgebung U von p übereinstimmen. Dann gilt $\delta(f_1) = \delta(f_2)$.

Beweis. a) Es gilt wegen der Leibnizregel und der Linearität von δ:

$$\delta(c) = c\delta(1) = c\delta(1 \cdot 1) = c(1\delta(1) + 1\delta(1)) = 2\delta(c),$$

was $\delta(c) = 0$ impliziert.

b) Betrachte $g = f_1 - f_2 \in C^\infty(M)$. Dies ist eine glatte Funktion, die auf U verschwindet. Sei $h \in C^\infty(M)$ eine glatte Funktion mit Träger in U und $h(p) = 1$. Setze $\psi = 1 - h$. Dann ist $\psi(p) = 0$ und $\psi g = g$, da g auf U verschwindet und $\psi \equiv 1$ auf $M \setminus U$. Dann gilt nach der Leibnizregel

$$\delta(g) = \delta(\psi g) = \delta(\psi)g(p) + \psi(p)\delta(g) = 0.$$

Wir haben also gezeigt, dass wenn eine glatte Funktion g in einer Umgebung von p verschwindet, so gilt $\delta(g) = 0$.

□

Lemma 2.5 erlaubt es uns, Derivationen auf Funktionen anzuwenden, die nur auf einer Teilmenge von M definiert sind:

Korollar 2.6. *Sei M^n eine glatte Mannigfaltigkeit, $p \in M$, $U \subset M$ eine offene Umgebung von p und $\delta \in \mathcal{D}_p(M)$ eine Derivation am Punkt p. Für $f \in C^\infty(U)$ wähle eine offene Umgebung V von p mit $p \in \overline{V} \subset U$ und eine glatte Funktion $\tilde{f} \in C^\infty(M)$ mit $f|_V = \tilde{f}|_V$. Setze*

$$\delta(f) := \delta(\tilde{f}).$$

Dann ist dies wohldefiniert, hängt also nicht von der Wahl von V und $\tilde{f}$ ab.

Beweis. Sind V_1 und V_2 zwei offene Umgebungen von p und $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2$ zwei solche Funktionen, so stimmen $\tilde{f}_1$ und $\tilde{f}_2$ wegen

$$f_1|_{V_1 \cap V_2} = f_2|_{V_1 \cap V_2} = f|_{V_1 \cap V_2}$$

auf der offenen Umgebung $V_1 \cap V_2$ überein. Mit Lemma 2.5 folgt also die Wohldefiniertheit von $\delta(f)$. □

Lemma 2.7. *Sei M^n eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und sei (U, ϕ) eine Karte mit $p \in U$, sodass $\phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ konvex ist. Ist $f \in C^\infty(M)$ eine glatte Funktion, so existieren glatte Funktionen $g_1, \ldots, g_n \in C^\infty(U)$, sodass für alle $q \in U$*

$$f(q) = f(p) + \sum_{i=1}^{n} g_i(q)(x^i(q) - x^i(p)),$$

wobei wir mit $x^i \in C^\infty(U)$ die Komponenten von ϕ bezeichnen, also $\phi = (x^1, \ldots, x^n) \colon U \to \mathbb{R}^n$. Die Funktionen $g_1, \ldots, g_n \in C^\infty(U)$ erfüllen außerdem $g_i(p) = \frac{\partial f}{\partial x^i}|_p$.

Beweis. Sei $q \in U$. Betrachte die Kurve $c_q \colon [0,1] \to \phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$c_q(t) = \phi(p) + t(\phi(q) - \phi(p)).$$

Dann ist $t \mapsto f(\phi^{-1}(c_q(t)))$ eine glatte Funktion auf $[0,1]$ mit $f(\phi^{-1}(c_q(0))) = f(p)$ und $f(\phi^{-1}(c_q(1))) = f(q)$. Nach dem Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung und der Kettenregel gilt also mit $\dot{c}_q(t) = \phi(q) - \phi(p)$

$$\begin{aligned} f(q) - f(p) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} f(\phi^{-1}(c_q(t)))dt \\ &= \int_0^1 d(f \circ \phi^{-1})_{c_q(t)}(\dot{c}_q(t))dt \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \partial_i (f \circ \phi^{-1})_{c_q(t)}(x^i(q) - x^i(p))dt \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}|_{\phi^{-1}(c_q(t))} dt \right) (x^i(q) - x^i(p)). \end{aligned}$$

Wir definieren nun für $i = 1, \ldots, n$ glatte Funktionen g_i auf U durch

$$g_i(q) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}|_{\phi^{-1}(c_q(t))} dt.$$

Dann gilt

$$f(q) = f(p) + \sum_{i=1}^{n} g_i(q)(x^i(q) - x^i(p))$$

und außerdem, wegen $c_p(t) = \phi(p) + t(\phi(p) - \phi(p)) \equiv \phi(p)$

$$g_i(p) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}|_p dt = \frac{\partial f}{\partial x^i}|_p.$$

□

Satz 2.8. *Sei M^n eine glatte Mannigfaltigkeit und sei $p \in M$. Dann ist die Abbildung*

$$\Phi : T_pM \to \mathcal{D}_p(M), \qquad [\gamma] \mapsto \delta_\gamma = \left(f \mapsto \frac{d}{dt}|_{t=0} f(\gamma(t)) \right)$$

eine wohldefinierte Bijektion. Insbesondere trägt T_pM die Struktur eines Vektorraums.

Beweis. Sei $0 \in J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und sei $\gamma : J \to M$ eine glatte Kurve mit $\gamma(0) = p$. Dann hängt die Derivation $\delta_\gamma : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\delta_\gamma(f) := (f \circ \gamma)'(0) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(\gamma(t))$$

nur von der Äquivalenzklasse von γ in T_pM ab. Wir erhalten also eine wohldefinierte Abbildung

$$\Phi : T_pM \to \mathcal{D}_p(M) \qquad [\gamma] \mapsto \delta_\gamma.$$

Wir behaupten nun, dass Φ *injektiv* ist. Dazu müssen wir zeigen, dass $\delta_{\gamma_1} = \delta_{\gamma_2}$ die Äquivalenz $\gamma_1 \sim \gamma_2$ impliziert.

Sei dazu U eine offene Umgebung von p und $f \in C^\infty(U)$. Wähle eine glatte Funktion $h \in C^\infty(M)$ mit Träger in U, sodass $h \equiv 1$ auf einer offenen Umgebung V von p mit $V \subset \bar{V} \subset U$ gilt. Wir erhalten eine glatte Funktion $\tilde{f} \in C^\infty(M)$, indem wir $\tilde{f} = hf$ auf U und $\tilde{f} \equiv 0$ außerhalb von U setzen. Dann gilt $f = \tilde{f}$ auf V und damit folgt mit Korollar 2.6

$$\begin{aligned}
0 &= \delta_{\gamma_1}(\tilde{f}) - \delta_{\gamma_2}(\tilde{f}) \\
&= \delta_{\gamma_1}(f) - \delta_{\gamma_2}(f) \\
&= \frac{d}{dt}|_{t=0}(h(\gamma_1(t))f(\gamma_1(t))) - \frac{d}{dt}|_{t=0}(h(\gamma_2(t))f(\gamma_2(t))) \\
&= \frac{d}{dt}|_{t=0} f(\gamma_1(t)) - \frac{d}{dt}|_{t=0} f(\gamma_2(t)) \\
&= (f \circ \gamma_1)'(0) - (f \circ \gamma_2)'(0).
\end{aligned}$$

Dies bedeutet aber gerade $\gamma_1 \sim \gamma_2$.

Als Nächstes zeigen wir, dass Φ *surjektiv* ist. Sei dazu eine beliebige Derivation im Punkt p, $\delta \in \mathcal{D}_p(M)$, gegeben. Wir müssen zeigen, dass eine Kurve γ durch p existiert, sodass $\delta = \delta_\gamma$. Sei dazu U eine offene Umgebung von p und $\phi = (x^1, \dots, x^n) : U \to \mathbb{R}^n$ eine Karte um p mit $\phi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$ und $\phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ konvex.

Sei nun $f \in C^\infty(M)$. Dann existieren nach Lemma 2.7 glatte Funktionen $g_1, \dots, g_n \in C^\infty(U)$, sodass auf U die Gleichung $f = f(p) + \sum_{i=1}^n g_i x^i$ mit $g_i(p) = \partial_i(f \circ \phi^{-1})_{\phi(p)}$ gilt. Dann gilt mit Korollar 2.6

$$\delta(f) = \delta(f(p) + \sum_{i=1}^n g_i x^i) = \sum_{i=1}^n (\delta(g_i)x^i(p) + g_i(p)\delta(x^i)) = \sum_{i=1}^n g_i(p)\delta(x^i) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}|_p \delta(x^i).$$

wobei wir Lemma 2.5 a) und $\phi(p) = 0$ benutzt haben.

Setze $c^i = \delta(x^i) \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$. Wir definieren nun eine Kurve

$$\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M, \qquad \gamma(t) = \phi^{-1}(tc^1, \dots, tc^n),$$

wobei wir $\epsilon > 0$ so wählen, dass $(tc^1, \dots, tc^n) \in \phi(U)$ für jedes $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ gilt. Dann gilt $\gamma(0) = \phi^{-1}(0) = p$ und wegen $\phi(\gamma(t)) = \phi \circ \phi^{-1}(tc^1, \dots, tc^n) = (tc^1, \dots, tc^n)$ folgt

$$x^i(\gamma(t)) = tc^i,$$

was $(x^i \circ \gamma)'(0) = c^i$ impliziert. Wegen $\gamma(0) = p$ und $x^i(p) = 0$ folgt nun für beliebiges $f \in C^\infty(M)$

$$\delta_\gamma(f) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(f(p) + \sum_{i=1}^n g_i(\gamma(t))x^i(\gamma(t))) = \sum_{i=1}^n (g_i \circ \gamma)'(0)x^i(p) + g_i(p)(x^i \circ \gamma)'(0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}|_p c^i.$$

Also gilt $\delta = \delta_\gamma$, was die Surjektivität von Φ zeigt. □

Ab jetzt werden wir T_pM mit $\mathcal{D}_p(M)$ identifizieren, das heißt, Tangentialvektoren sind für uns ab sofort Derivationen.

Korollar 2.9. *Sei (U,ϕ) eine Karte um $p \in M$. Dann bilden die Derivationen $\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p$ eine Basis für $T_pM \cong \mathcal{D}_p(M)$. Insbesondere ist die Abbildung*

$$\Psi : \mathbb{R}^n \to T_pM \quad (v^1, \dots, v^n) \mapsto \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$$

ein linearer Isomorphismus.

Beweis. Die Abbildung Ψ ist klarerweise linear. Die Rechnung im Beweis von Satz 2.8 zeigt, dass für $\delta \in \mathcal{D}_p(M)$ und $f \in C^\infty(M)$ folgende Relation gilt:

$$\delta(f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}|_p \delta(x^i).$$

Mit $v = (v^1, \dots, v^n) \in \mathbb{R}^n$, wobei $v^i = \delta(x^i)$, erhalten wir also

$$\delta = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p = \Psi(v).$$

Damit ist Ψ also surjektiv.

Um zu zeigen, dass Ψ injektiv ist, nehmen wir an, dass $v \in \mathbb{R}^n$ existiert mit $\delta_v := \Psi(v) = 0$. Das bedeutet, dass für beliebiges $f \in C^\infty(M)$

$$\delta_v(f) = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}|_p = 0$$

gilt. Insbesondere folgt wegen $\frac{\partial x^i}{\partial x^j}|_p = \delta^i_j$

$$v^i = \delta_v(x^i) = 0.$$

Damit ist $v = 0$, d.h. Ψ injektiv und daher ein Isomorphismus. □

Beispiel 2.10. Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ offen mit der Standardkarte $\phi = \mathrm{id}$, so folgt also $T_pM = T_p\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$, und der Isomorphismus ist gegeben durch $v = (v^1, \dots, v^n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$, d.h. die zu v gehörige Derivation ist gerade die Richtungsableitung längs v im Punkt p.

Proposition 2.11 (Transformationsverhalten)**.** *Sei $(M^n, [\mathcal{A}])$ eine glatte Mannigfaltigkeit. Seien $(U_\alpha, \phi_\alpha = (x^1_\alpha, \dots, x^n_\alpha))$ und $(U_\beta, \phi_\beta = (x^1_\beta, \dots, x^n_\beta))$ zwei Karten um $p \in M$. Dann gilt die Relation*

$$\frac{\partial}{\partial x^i_\beta}|_p = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^j_\alpha}{\partial x^i_\beta}|_p \frac{\partial}{\partial x^j_\alpha}|_p.$$

Das heißt, die Basiswechselmatrix zwischen den Basen $\{\frac{\partial}{\partial x^i_\beta}|_p\}$ und $\{\frac{\partial}{\partial x^j_\alpha}|_p\}$ ist gerade durch die Jacobi-Matrix des Kartenwechsels $\phi_{\alpha\beta} = \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ im Punkt $\phi_\beta(p)$gegeben.

Beweis. Es gilt für $f \in C^\infty(M)$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x^i_\beta}|_p &= \partial_i(f \circ \phi_\beta^{-1})_{\phi_\beta(p)} \\
&= \partial_i(f \circ \phi_\alpha^{-1} \circ \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1})_{\phi_\beta(p)} \\
&= \sum_{j=1}^n \partial_j(f \circ \phi_\alpha^{-1})_{\phi_\alpha(p)} \partial_i(x^j_\alpha \circ \phi_\beta^{-1})_{\phi_\beta(p)} \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j_\alpha}|_p \frac{\partial x^j_\alpha}{\partial x^i_\beta}|_p.
\end{aligned}$$

□

2.3 Das Differential einer Abbildung

Definition 2.12. Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $F : M \to N$ eine glatte Abbildung. Das *Differential von F im Punkt $p \in M$* ist die lineare Abbildung

$$dF_p \colon T_pM \to T_{F(p)}N \qquad dF_p(\delta)(g) = \delta(g \circ F),$$

wobei $g \in C^\infty(N)$.

Ist $\delta = \delta_\gamma$ für eine Kurve $\gamma : J \subset \mathbb{R} \to M$ mit $\gamma(0) = p$ so gilt nach Definition von δ_γ

$$dF_p(\delta_\gamma)(g) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\, g(F(\gamma(t))).$$

Das heißt also

$$dF_p(\delta_\gamma) = \delta_{F\circ\gamma}.$$

Satz 2.13 (Kettenregel)**.** *Seien M, N, P differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $F : M \to N$, $G : N \to P$ glatt. Dann gilt für das Differential von $G \circ F$ im Punkt $p \in M$:*

$$d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p : T_pM \to T_{G(F(p))}P.$$

Beweis. Sei $h \in C^\infty(P)$ und $\delta \in T_pM$. Dann gilt

$$d(G \circ F)_p(\delta)(h) = \delta(h \circ (G \circ F)) = \delta((h \circ G) \circ F) = dF_p(\delta)(h \circ G) = dG_{F(p)}(dF_p(\delta))(h).$$

$\square$

Bemerkung 2.14. Sei nun $(U, \phi = (x^1, \ldots, x^m))$ eine Karte um $p \in M^m$ und $(V, \psi = (y^1, \ldots, y^n))$ eine Karte um $F(p) \in N^n$ und $f \in C^\infty(N)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} dF_p\left(\frac{\partial}{\partial x^i}|_p\right)(f) &= \frac{\partial}{\partial x^i}|_p(f \circ F) \\ &= \partial_i(f \circ F \circ \phi^{-1})_{\phi(p)} \\ &= \partial_i(f \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ F \circ \phi^{-1})_{\phi(p)} \\ &= \sum_{j=1}^n \partial_j(f \circ \psi^{-1})_{\psi(F(p))}\partial_i(\psi \circ F \circ \phi^{-1})^j_{\phi(p)} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial y^j}|_{F(p)}\partial_i(\psi \circ F \circ \phi^{-1})^j_{\phi(p)} \\ &= \left(\sum_{j=1}^n \partial_i(\psi \circ F \circ \phi^{-1})^j_{\phi(p)} \frac{\partial}{\partial y^j}|_{F(p)}\right)(f). \end{aligned}$$

Die Matrix von dF_p bezüglich der Basen $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ und $\{\frac{\partial}{\partial y^j}\}$ ist also die Jacobi-Matrix der lokalen Darstellung $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$ von F.

Beispiel 2.15. Sei $F : S^n \to \mathbb{RP}^n$ gegeben durch $F(p) = [p]$. Sei $p \in S^n$ mit $p^0 > 0$, also $p \in U_{0,1}$. Dann gilt $F(p) = [p] \in V_0 \subset \mathbb{RP}^n$. In den Karten $(U_{0,1}, \phi_{0,1})$ und (V_0, ψ_0) auf S^n bzw. $\mathbb{RP}^n$ erhalten wir also für die lokale Darstellung von F

$$\psi_0 \circ F \circ \phi_{0,1}^{-1}(u) = \psi_0([(\sqrt{1 - \|u\|^2}, u^1, \ldots, u^n)]) = \frac{1}{\sqrt{1 - \|u\|^2}}(u^1, \ldots, u^n)$$

Die Matrix von dF_p bezüglich dieser Koordinaten ist also mit $u = \phi_{0,1}(p)$ gegeben durch

$$\partial_i(\psi_0 \circ F \circ \phi_{0,1}^{-1})^j_{\phi_{0,1}(p)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \|u\|^2}}\left(\delta_i^j - \frac{u^i u^j}{1 - \|u\|^2}\right) = \frac{1}{p^0}\left(\delta_i^j - \frac{p^i p^j}{(p^0)^2}\right).$$

Bemerkung 2.16. Ist $f \in C^\infty(M)$ eine glatte Funktion, dann können wir das Differential $df_p : T_pM \to T_{f(p)}\mathbb{R} = \operatorname{span}_\mathbb{R}\left(\frac{d}{dt}|_{f(p)}\right) \cong \mathbb{R}$ als Element des Dualraumraums T_p^*M von T_pM interpretieren.

Definition 2.17. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Der *Kotangentialraum an M im Punkt p* ist der Dualraum von T_pM, also

$$T_p^*M = \operatorname{Hom}(T_pM, \mathbb{R}).$$

Proposition 2.18. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $(U, \phi = (x^1, \ldots, x^n))$ eine Karte. Dann erfüllen die Differentiale $dx_p^1, \ldots, dx_p^n \in T_p^*M$*

$$dx_p^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}|_p\right) = \delta_j^i = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

Die Differentiale $dx_p^1, \ldots, dx_p^n$ bilden also die zu $\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p$ duale Basis des Kotangentialraums T_p^*M.

Beweis. Wir berechnen das Differential der glatten Abbildung $x^i : U \to \mathbb{R}$. Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Dann gilt

$$dx_p^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}|_p\right)(f) = \frac{\partial}{\partial x^j}|_p(f \circ x^i) = \partial_j(f \circ x^i \circ \phi^{-1})_{\phi(p)} = \delta_j^i \frac{d}{dt}|_{x^i(p)}(f).$$

□

Korollar 2.19. *Ist $f \in C^\infty(M)$, $p \in M$ und (U, ϕ) eine Karte um p, dann gilt für das Differential von f im Punkt p:*

$$df_p = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j}|_p dx_p^j.$$

Beweis. Es gilt für $g \in C^\infty(\mathbb{R})$

$$df_p\left(\frac{\partial}{\partial x^j}|_p\right)(g) = \frac{\partial}{\partial x^j}|_p(g \circ f) = \partial_j(g \circ f \circ \phi^{-1})_{\phi(p)} = g'(f(p))\partial_j(f \circ \phi^{-1}) = \frac{\partial f}{\partial x^j}|_p \frac{d}{dt}|_{f(p)}(g)$$

und damit also

$$df_p = \sum_{j=1}^n df_p\left(\frac{\partial}{\partial x^j}|_p\right) dx_p^j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j}|_p dx_p^j.$$

□

Korollar 2.20 (Transformationsverhalten)**.** *Sei M^n eine glatte Mannigfaltigkeit. Seien $(U_\alpha, \phi_\alpha = (x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n))$ und $(U_\beta, \phi_\beta = (x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n))$ zwei Karten um $p \in M$. Dann gilt die Relation*

$$d(x_\beta^i)_p = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_\beta^i}{\partial x_\alpha^j} dx_\alpha^j.$$

Das heißt, die Basiswechselmatrix zwischen den Basen $\{\frac{\partial}{\partial x_\beta^i}|_p\}$ und $\{\frac{\partial}{\partial x_\alpha^j}|_p\}$ ist gerade durch die Inverse der Jacobi-Matrix des Kartenwechsels $\phi_{\alpha\beta} = \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ im Punkt $\phi_\beta(p)$gegeben.

Beweis.

$$d(x_\beta^i)_p = \sum_{j=1}^n d(x_\beta^i)_p\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha^j}|_p\right) dx_\alpha^j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_\beta^i}{\partial x_\alpha^j} dx_\alpha^j.$$

□

Korollar 2.21. *Ist $0 \in J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\gamma : J \to M$ eine Kurve mit $\gamma(0) = p$ und versehen wir J mit der Standardkarte, so können wir den Geschwindigkeitsvektor von γ im Punkt p durch $\gamma'(0) = d\gamma_0\left(\frac{d}{dt}|_0\right)$ definieren. Mit dieser Interpretation gilt*

$$T_pM = \{\gamma'(0) \mid \gamma : J \to M \text{ glatt, } 0 \in J \subset \mathbb{R} \text{ offenes Intervall }\}.$$

Beweis. Sei $f \in C^\infty(M)$. Dann gilt

$$\gamma'(0) \cdot f = d\gamma_0\left(\frac{d}{dt}|_0\right)(f) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(f \circ \gamma) = \delta_\gamma(f).$$

Und wir haben schon gesehen, dass die Zuordnung $T_pM \to \mathcal{D}_p(M)$, $[\gamma] \mapsto \delta_\gamma = \gamma'(0)$ eine wohldefinierte Bijektion ist. □

2.4 Der Rang einer Abbildung

Definition 2.22. Seien M^m, N^n glatte Mannigfaltigkeiten und $F : M \to N$ eine glatte Abbildung.

a) Der *Rang von F im Punkt $p \in M$*, geschrieben $\mathrm{rk}_p(F)$ ist der Rang der linearen Abbildung $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ (es gilt also $k \leq \min(m, n)$).

b) F ist im Punkt p eine *Immersion*, falls $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ injektiv ist (in diesem Fall muss also $m \leq n$ gelten).

c) F ist im Punkt p eine *Submersion*, falls $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ surjektiv ist (in diesem Fall muss also $m \geq n$ gelten).

d) Wir sagen F hat Rang k, ist eine Immersion bzw. Submersion, falls dies für jedes $p \in M$ gilt.

Bemerkung 2.23. Wir erinnern uns an den folgenden Normalformensatz aus der linearen Algebra: Sind V, W Vektorräume der Dimension m, n und ist $A : V \to W$ eine lineare Abbildung vom Rang k, existieren Basen von V und W bezüglich derer die Matrix von A gegeben ist durch

$$A = \begin{pmatrix} 1_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei 1_k die $(k \times k)$-Einheitsmatrix bezeichnet. Diese findet man wie folgt: Wähle eine Basis $\{v_{k+1}, \dots, v_m\}$ von $\ker A$ und vervollständige diese zu einer Basis $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_m\}$ von V. Nach Konstruktion ist $\{Av_1, \dots, Av_k\}$ eine Basis für das Bild $\mathrm{Im}(A) \subset W$. Eine gewünschte Basis von W erhalten wir, indem wir diese zu einer Basis von W vervollständigen.

Im Folgenden werden wir dieses Resultat für glatte (nicht-lineare) Abbildungen vom Rang k verallgemeinern. Insbesondere wollen wir in der Lage sein, die lokale Gestalt von Immersionen und Submersionen zu verstehen.

Satz 2.24 (Satz vom konstanten Rang)**.** *Seien M^m, N^n glatte Mannigfaltigkeiten, $p \in M$ und $\tilde{U} \subset M$ eine Umgebung von p. Sei weiter $k \leq \min(m, n)$ und $F : M \to N$ eine glatte Abbildung, sodass $\mathrm{rk}_q(F) = k$ für alle $q \in \tilde{U}$ gilt. Dann existiert eine Karte (U, ϕ) um p mit $U \subset \tilde{U}$ und eine Karte (V, ψ) um $F(p) \in N$, sodass $F(U) \subset V$ und*

$$\psi \circ F \circ \phi^{-1} : \phi(U) \subset \mathbb{R}^m \to \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$$

gegeben ist durch

$$(\psi \circ F \circ \phi^{-1})(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0).$$

Beweis. (siehe auch [2], Proposition II.7.1) Wähle Karten (U_1, ϕ_1) um $p \in \tilde{U} \subset M$ und (V_1, ψ_1) um $F(p) \in N$ mit $\phi_1(p) = 0$ und $\psi_1(F(p)) = 0$, sowie $F(U_1) \subset V_1$. Indem wir gegebenenfalls ϕ_1 und ψ_1 mit geeigneten linearen Isomorphismen verketten, können wir außerdem annehmen, dass die Jacobi-Matrix von $F_1 := \psi_1 \circ F \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1) \to \psi_1(V_1)$ im Punkt 0 die Gestalt

$$(dF_1)_0 = \begin{pmatrix} 1_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

hat. Es gilt außerdem nach Konstruktion $F_1(0) = 0$.

Wir schreiben F_1 in Komponenten $F_1 = (F_1^1, \dots, F_1^n)$. Betrachte nun

$$G : \phi_1(U_1) \to \mathbb{R}^m, \quad G(u^1, \dots, u^m) = (F_1^1(u^1, \dots, u^m), \dots, F_1^k(u^1, \dots, u^m), u^{k+1}, \dots, u^m).$$

Dann gilt für die Jacobi-Matrix von G im Punkt $0 \in \mathbb{R}^m$

$$dG_0 = \begin{pmatrix} 1_k & 0 \\ 0 & 1_{m-k} \end{pmatrix}.$$

Also ist G ein lokaler Diffeomorphismus, d.h. indem wir U_1 gegebenenfalls verkleinern, können wir annehmen, dass $G : \phi(U_1) \to G(\phi_1(U_1))$ ein Diffeomorphismus ist mit Inverser G^{-1}. Es folgt außerdem aus der Definition und der Injektivität von G, dass für $v = G(u) \in G(\phi_1(U_1))$

$$F_1(G^{-1}(v^1, \dots, v^m)) = F_1(u) = (v^1, \dots, v^k, F_1^{k+1}(G^{-1}(v)), \dots, F_1^n(G^{-1}(v))).$$

Ist F eine Submersion (also $k = n$), dann sind wir an dieser Stelle fertig.

Ist $k < n$, so betrachten wir die Jacobi-Matrix von $F_1 \circ G^{-1}$ im Punkt $v \in G(\phi(U_1))$:

$$d(F_1 \circ G^{-1})_v = \begin{pmatrix} 1_k & 0 \\ * & \tilde{A} \end{pmatrix},$$

wobei $\tilde{A}^i_j = \partial_{k+j}(F^{k+i} \circ G^{-1})(v)$. Nach Voraussetzung hat F_1 Rang k auf $\phi_1(U_1)$ und da G ein Diffeomorphismus ist, muss also auch $F_1 \circ G^{-1}$ Rang k haben. Dies impliziert $\tilde{A} = 0$. Die Funktionen $F^{k+i} \circ G^{-1}(v)$ hängen nur von $v^1, \dots, v^k$ ab.

Wähle nun eine geeignete Umgebung $W \subset \mathbb{R}^n$ von $0 \in \mathbb{R}^n$ und betrachte die Abbildung

$$H : W \to \psi_1(V_1) \subset \mathbb{R}^n$$

gegeben durch

$$H(w^1, \dots, w^n) = (w^1, \dots, w^k, w^{k+1} + F_1^{k+1}(G^{-1}(w^1, \dots, w^k)), \dots, w^n + F_1^n(G^{-1}(w^1, \dots, w^k))).$$

Die Jacobi-Matrix von H im Punkt $w = 0$ hat die Gestalt

$$dH_0 = \begin{pmatrix} 1_k & 0 \\ * & 1_{n-k} \end{pmatrix}.$$

Also können wir nach eventueller Verkleinerung von W und V_1 annehmen, dass H ein Diffeomorphismus $H : W \to \psi_1(V_1)$ ist. Es gilt weiter für die Inverse H^{-1}

$$\begin{aligned} H^{-1}(F_1(G^{-1}(v))) &= H^{-1}(v^1, \dots, v^k, F_1^{k+1}(G^{-1}(v)), \dots, F_1^n(G^{-1}(v))) \\ &= H^{-1}(H(v^1, \dots, v^k, 0, \dots, 0) \\ &= (v^1, \dots, v^k, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

Setzen wir also $U = U_1$ und $V = V_1$ sowie $\phi = G \circ \phi_1$, $\psi = H^{-1} \circ \psi_1$, so folgt

$$(\psi \circ F \circ \phi^{-1})(u^1, \dots, u^m) = (H^{-1} \circ \psi_1 \circ F \circ \phi_1^{-1} \circ G^{-1})(u) = (H^{-1} \circ F_1 \circ G^{-1})(u) = (u^1, \dots, u^k, 0, \dots, 0).$$

□

Korollar 2.25 (Normalformensatz für Immersionen und Submersionen, Satz von der lokalen Umkehrbarkeit). *Seien M^m, N^n glatte Mannigfaltigkeiten, $p \in M$ und $F : M \to N$ eine glatte Abbildung.*

a) Ist F im Punkte p eine Submersion, dann existiert eine Karte (U, ϕ) um p und eine Karte (V, ψ) um $F(p) \in N$, sodass $F(U) \subset V$ und

$$(\psi \circ F \circ \phi^{-1})(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^n).$$

b) Ist F im Punkte p eine Immersion, dann existiert eine Karte (U, ϕ) um p und eine Karte (V, ψ) um $F(p) \in N$, sodass $F(U) \subset V$ und

$$(\psi \circ F \circ \phi^{-1})(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^m, 0, \dots, 0).$$

c) Ist $m = n$ und ist das Differential von F im Punkte $p \in M$ invertierbar, dann existieren Umgebungen U von p und V von $F(p)$ sodass $F : U \to V$ ein Diffeomorphismus ist.

Beweis. Wähle beliebige Karten (U_1, ϕ_1) um p und (V_1, ψ_1) um $F(p)$ und setze $F_1 = \psi_1 \circ F \circ \phi_1^{-1}$. In beiden Fällen hat F maximalen Rang $k = \min(m, n)$. Das bedeutet, dass die Jacobi-Matrix $(dF_1)_{\phi_1(p)}$ eine $(k \times k)$-Untermatrix besitzt, deren Determinante nicht verschwindet. Da die Funktion $\det : \mathrm{Mat}(k, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ stetig ist, existiert also eine Umgebung $\tilde{U}$ von $\phi_1(p)$ auf der die Determinante dieser Untermatrix nicht Null wird. Das heißt, F hat konstanten Rang auf $\phi_1^{-1}(\tilde{U})$. Alle Behauptungen folgen nun aus Satz 2.24. □

3 Untermannigfaltigkeiten

Definition 3.1. Sei N eine glatte Mannigfaltigkeit und $M \subset N$ eine Teilmenge. Wir nennen M eine *Untermannigfaltigkeit*, falls zu jedem Punkt $p \in M$ eine *angepasste Karte* (V, ψ) von N existiert, d.h. $\psi(V \cap M) = \psi(V) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}) \subset \mathbb{R}^n$.

Beispiel 3.2. Sei $M = S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ die Sphäre und sei $p = (p^0, \dots, p^n) \in S^n$ mit $p^n \neq 0$. Betrachte

$$\psi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}, \quad \psi(q) = (q^0, \dots, q^{n-1}, \|q\|^2 - 1)$$

Da $p^n \neq 0$ ist das Differential von ψ an der Stelle p invertierbar, d.h. ψ ist auf einer Umgebung von p ein Diffeomorphismus, also eine Karte auf $\mathbb{R}^{n+1}$ um p. Für $q \in S^n$ gilt $\psi(q) = (q^0, \dots, q^{n-1}, 0)$, also liefert ψ ein angepasste Karte für $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Lemma 3.3. *Sei $(N^n, [\mathcal{A}])$ eine glatte Mannigfaltigkeit und $M \subset N$ eine Untermannigfaltigkeit. Dann induzieren die angepassten Karten auf natürliche Weise einen glatten Atlas $\mathcal{A}_M$ auf M, sodass die induzierte Topologie die Teilraumtopologie ist.*

Beweis. Sei $p \in M$ und (V, ψ) eine angepasste Karte. Definiere $(V \cap M, \psi_M)$ durch

$$\psi_M : V \cap M \to \mathbb{R}^m, \quad \psi_M(q) = (x^1(q), \dots, x^m(q)).$$

Da $\psi = (x^1, \dots, x^n) : V \to \mathbb{R}^n$ injektiv ist, ist ψ_M auch injektiv. Mit der Projektion $\pi_{\mathbb{R}^m} : \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^m$ können wir ψ_M schreiben als

$$\psi_M = \pi_{\mathbb{R}^m} \circ \psi|_{V \cap M}.$$

Das Bild von ψ_M ist die offene Mengen $\psi_M(V \cap M) = \pi_{\mathbb{R}^m}(\psi(V)) \subset \mathbb{R}^m$. Wir erhalten also eine Familie von Karten

$$\mathcal{A}_M = \{(V \cap M, \psi_M) \mid (V, \psi) \text{ ist eine angepasste Karte}\}.$$

Es gilt nun mit der Inklusion $\mathrm{inc} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$

$$\psi_M^{-1} = \psi^{-1} \circ \mathrm{inc} : \pi_{\mathbb{R}^m}(\psi(V)) \to V \cap M$$

Sind nun $(U \cap M, \phi_M), (V \cap M, \psi_M)$ zwei solche Karten für M so ergibt sich für den Kartenwechsel

$$\phi_M \circ \psi_M^{-1} = \pi_{\mathbb{R}^m} \circ \phi \circ \psi^{-1} \circ \mathrm{inc} : \pi_{\mathbb{R}^m}(\psi(U \cap V)) \to \pi_{\mathbb{R}^m}(\phi(U \cap V))$$

Dies ist eine glatte Abbildung, die auf einer offenen Menge in $\mathbb{R}^m$ definiert ist. Also bildet $\mathcal{A}_M$ einen glatten Atlas für M.

Da die Abbildungen ψ_M als Einschränkungen von Homöomorphismen gegeben sind, sind sie Homöomorphismen bezüglich der Teilraumtopologie. Also muss nach Proposition 1.20 die von der differenzierbaren Struktur $[\mathcal{A}_M]$ auf M induzierte Topologie die Teilraumtopologie sein. □

Korollar 3.4. *Seien $M_1 \subset (N_1, [\mathcal{A}_1])$ und $M_2 \subset (N_2, [\mathcal{A}_2])$ Untermannigfaltigkeiten und $F : N_1 \to N_2$ eine glatte Abbildung mit $F(M_1) \subset M_2$. Dann ist die Einschränkung $F : M_1 \to M_2$ glatt als Abbildung von $(M_1, [\mathcal{A}_{M_1}])$ nach $(M_2, [\mathcal{A}_{M_2}])$.*

Beweis. Dies folgt direkt aus der Konstruktion der Atlanten $\mathcal{A}_{M_1}$ nach $\mathcal{A}_{M_2}$ aus angepassten Karten. Sind (U, ϕ) und (V, ψ) angepasste Karten, dann gilt

$$\psi_{M_2} \circ F \circ \phi_{M_1}^{-1} = \pi_{\mathbb{R}^{m_2}} \circ \psi \circ F \circ \phi^{-1} \circ \mathrm{inc} : \pi_{\mathbb{R}^{m_1}}(\phi(U)) \to \pi_{\mathbb{R}^{m_2}}(\psi(U))$$

und dies ist als Verkettung glatter Abbildungen glatt. □

Korollar 3.5. *Sei $M^m \subset N^n$ eine Untermannigfaltigkeit, $p \in M$ und $(V, \psi = (x^1, \ldots, x^n))$ eine angepasste Karte um p. Dann ist $\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^m}|_p$ eine Basis von T_pM.*

Beweis. Folgt direkt aus der Definition der Karte $(V \cap M, \psi_M)$ für M. □

Sei N^n eine glatte Mannigfaltigkeit. Viele Teilmengen $M \subset N$ erlauben eine Beschreibung der Gestalt $M = F(M')$ wobei M' eine glatte Mannigfaltigkeit ist und $F : M' \to N$ eine glatte Abbildung ist. Wir geben im Folgenden ein Kriterium, wann eine solche Teilmenge eine Untermannigfaltigkeit ist.

Definition 3.6. Seien M, N glatte Mannigfaltigkeiten und $F : M \to N$ glatt. Dann heißt F eine *Einbettung*, falls $F : M \to F(M)$ ein Homöomorphismus bezüglich der Teilraumtopologie auf $F(M) \subset N$ ist.

Korollar 3.7. *Sei $M^m \subset N^n$ eine Untermannigfaltigkeit. Dann ist die Inklusionsabbildung*

$$\iota : (M, [\mathcal{A}_M]) \to (N, [\mathcal{A}]), \quad \iota(p) = p$$

eine Einbettung.

Beweis. Dies ist eine äquivalente Art zu sagen, dass die Topologie auf M die Teilraumtopologie ist. □

Wir haben das folgende wichtige Kriterium, anhand dessen wir Einbettungen erkennen können.

Satz 3.8. *Seien M^m und N^n glatte Mannigfaltigkeiten, M kompakt und $F : M \to N$ eine injektive Immersion. Dann ist $F\colon M \to N$ eine Einbettung.*

Beweis. Da F injektiv ist, existiert die Umkehrabbildung $F^{-1} : F(M) \to M$. Wir müssen zeigen, dass F^{-1} stetig ist. Ist $A \subset M$ abgeschlossen, dann ist A kompakt. Da F stetig ist, ist auch $F(A) = (F^{-1})^{-1}(A)$ kompakt, also abgeschlossen, weil N Hausdorff ist. Also ist die Umkehrabbildung $F^{-1} : F(M) \to M$, stetig und F daher ein Homöomorphismus. □

Satz 3.9. *Seien M^m, N^n glatte Mannigfaltigkeiten und $F : M \to N$ eine injektive Immersion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

a) $F : M \to N$ *ist eine Einbettung.*

b) Zu jedem $p \in M$ *existiert eine Umgebung* $V \subset N$ *um* $F(p)$ *und eine Submersion* $G : V \to \mathbb{R}^{n-m}$*, sodass* $G^{-1}(0) = F(M) \cap V$ *gilt.*

c) Das Bild $F(M) \subset N$ *ist eine Untermannigfaltigkeit, d.h. um jeden Punkt* $F(p) \in F(M)$ *existiert eine angepasste Karte* (V, ψ) *von* N*, d.h.* $\psi(V \cap F(M)) = \psi(V) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}) \subset \mathbb{R}^n$*.*

Beweis. *a)* $\Longrightarrow$ *b)* : Nach Voraussetzung ist F eine Einbettung. Sei p in M. Wähle nach Korollar 2.25 eine Karte (U, ϕ) um p und eine Karte (V_1, ψ) um $F(p)$ mit $F(U) \subset V_1$, sodass

$$(\psi \circ F \circ \phi^{-1})(u^1, \dots, u^m) = (u^1, \dots, u^m, 0, \dots, 0).$$

Da F eine Einbettung ist, ist die Menge $F(U) \subset F(M)$ offen bzgl. der Teilraumtopologie. Also existiert eine offene Menge $V_2 \subset N$, sodass $F(U) = V_2 \cap F(M)$. Setze nun $V = V_1 \cap V_2$ und schreiben $\psi = (x^1, \dots, x^n)$. Dann ist

$$G : V \to \mathbb{R}^{n-m}, \quad G(q) = (x^{m+1}(q), \dots, x^n(q))$$

die gewünschte beschreibende Submersion.

b) $\Longrightarrow$ *c)* : Sei $p \in M$, sei $V \subset N$ eine Umgebung von $F(p)$ und sei $G : V \to \mathbb{R}^{n-m}$ eine beschreibende Submersion, also $G^{-1}(0) = V \cap F(M)$. Nach Korollar 2.25 können wir nach eventueller Verkleinerung von V eine Karte (V, ψ) um $F(p)$ finden, sodass

$$G \circ \psi^{-1}(u^1, \dots, u^n) = (u^{m+1}, \dots, u^n).$$

Dann ist (V, ψ) eine angepasste Karte.

c) $\Longrightarrow$ *a)* Sei nun (U, ϕ) eine Karte um $p \in M$ und (V, ψ) eine angepasste Karte um $F(p) \in N$. Dann gilt für die lokale Darstellung von $F : M \to F(M)$ bezüglich (U, ϕ) und $(V \cap F(M), \psi_M)$

$$\psi \circ F \circ \phi^{-1}(u) = (\psi_M \circ F \circ \phi^{-1}(u), 0) \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^{n-m}.$$

Da F glatt ist, ist dies eine glatte Abbildung von $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m \oplus \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ mit konstantem Rang m, also ein lokaler Diffeomorphismus. Damit ist F ein lokaler Diffeomorphismus und da F bijektiv ist, muss F also ein Diffeomorphismus sein. Insbesondere ist $F : M \to F(M)$ ein Homöomorphismus, und daher eine Einbettung.

□

Bemerkung 3.10. Das Bild $F(M) \subset N$ einer injektiven Immersion $F : M \to N$ wird in der Literatur auch *immersierte Untermannigfaltigkeit* genannt. Ist $F : M \to N$ eine Einbettung, so nennt man $F : M \to N$ eine eingebettete Untermannigfaltigkeit.

Mit Korollar 2.25 kann und Satz 3.9 kann man leicht zeigen, dass wenn $F : M \to N$ eine Immersion ist, dann ist $F : M \to N$ *lokal* eine eingebettete Untermannigfaltigkeit in dem Sinne, dass zu jedem Punkt $p \in M$ eine Umgebung U existiert, sodass $F : U \to F(U) \subset N$ eine eingebettete Untermannigfaltigkeit ist.

Korollar 3.11 (Satz vom Regulären Wert)**.** *a) Sei* N *eine glatte Mannigfaltigkeit. Eine Teilmenge* $M \subset N$ *ist genau dann eine Untermannigfaltigkeit, wenn zu jedem* $p \in M$ *eine Umgebung* $V \subset N$ *und eine Submersion* $G : V \to \mathbb{R}^{n-m}$ *existiert, sodass* $G^{-1}(0) = M \cap V$ *gilt.*

b) Seien $N^n, N_1^{n_1}$ *glatte Mannigfaltigkeiten und sei* $F : N \to N_1$ *glatt. Sei* $c \in N_1$ *ein regulärer Wert von* F *(d.h.* dF_q *ist surjektiv für alle* $q \in F^{-1}(c)$*). Dann ist* $M = F^{-1}(c)$ *eine glatte Untermannigfaltigkeit von* N*.*

Beweis. a) Ist $M \subset N$ eine Untermannigfaltigkeit, dann ist die Inklusion $\iota : M \to N$ eine Einbettung und die Aussage folgt aus Satz 3.9. Existiert andererseits um jeden Punkt p eine beschreibende Submersion, so liefert der Beweis von $b) \implies c)$ in Satz 3.9 die notwendigen angepassten Karten.

b) Wähle eine Karte (V, ψ) um $c \in N_1$ mit $\psi(c) = 0$ und wende den Schritt $b) \implies c)$ aus dem Beweis von Satz 3.9 auf die Teilmenge $(\psi \circ F)^{-1}(0)$ an.

□

Korollar 3.12 (Tangentialraum an eine Untermannigfaltigkeit)**.** *Sei $F : M^m \to F(M) \subset N^n$ eine Einbettung, $V \subset N$ offen und $G : U \to \mathbb{R}^{n-m}$ eine Submersion mit $G^{-1}(0) = F(M) \cap V$. Dann gilt für $p \in F^{-1}(V) \subset M$*

$$T_pM \cong T_{F(p)}F(M) = \ker(dG_{F(p)}) \subset T_{F(p)}N.$$

Beweis. Der erste Isomorphismus ist durch das Differential $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}F(M)$ gegeben. Es gilt $\dim \ker(dG_p) = m = \dim F(M)$. Damit genügt es zu zeigen, dass $T_pM \subset \ker(dG_p)$. Sei $0 \in J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\gamma : J \to M$ eine Kurve mit $\gamma(0) = p$. Dann gilt für $f \in C^\infty(\mathbb{R}^k)$

$$dG_{F(p)}dF_p(\gamma'(0))(f) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(G \circ F \circ \gamma(t))) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(0) = 0.$$

Es folgt also $T_{F(p)}F(M) \subset \ker(dG_p)$. □

4 Vektorfelder

4.1 Das Tangentialbündel

Definition und Satz 4.1. *Sei M^n eine glatte Mannigfaltigkeit. Das* Tangentialbündel TM *von M ist disjunkte Vereinigung aller Tangentialräume,*

$$TM = \coprod_{p \in M} T_pM = \{(p, \delta) \mid p \in M, \delta \in T_pM\}.$$

Die Menge TM trägt die Struktur einer $2n$-dimensionalen Mannigfaltigkeit, sodass die Projektion $\pi : TM \to M, (p, \delta) \mapsto p$ eine surjektive Submersion ist.

Beweis. Wir müssen einen glatten Atlas auf TM konstruieren. Sei dazu $\mathcal{A}$ ein Atlas für M und wähle eine Karte $(U_\alpha, \phi_\alpha = (x^1_\alpha, \dots, x^n_\alpha)) \in \mathcal{A}$. Nach Korollar 2.9 ist für festes $q \in U$ die Abbildung

$$\Psi_\alpha(q) : \mathbb{R}^n \to T_qM \quad v \mapsto \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_q$$

ein linearer Isomorphismus. Wir betrachten nun die Bijektion

$$\Psi_\alpha : \phi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(U_\alpha) \subset TM, \quad (\phi_\alpha(q), v) \mapsto \left(q, \sum_{k=1}^n v^k \frac{\partial}{\partial x^k_\alpha}|_q\right)$$

und definieren

$$\phi^{TM}_\alpha = \Psi^{-1}_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to \phi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}, \quad (q, \delta) \mapsto (\phi_\alpha(p), (\delta(x^1_\alpha), \dots, \delta(x^n_\alpha)).$$

Da $\phi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$ offen ist, liefert dies also eine Familie von Karten $\tilde{\mathcal{A}} = \{(\pi^{-1}(U_\alpha), \phi^{TM}_\alpha) \mid (U_\alpha, \phi_\alpha) \in \mathcal{A}\}$. Wir behaupten, dass dies ein Atlas für TM ist.

(A1): Dies ist klarerweise erfüllt, weil die U_α's M überdecken und π surjektiv ist.

(A2): Es gilt $\phi_\alpha^{TM}(\pi^{-1}(U_\alpha)\cap\pi^{-1}(U_\beta)) = \phi_\alpha^{TM}(\pi^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta)) = \phi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\times\mathbb{R}^n$ und dies ist eine offene Menge in $\mathbb{R}^{2n}$.

(A3): Wir müssen zeigen, dass die Übergangsfunktionen glatt sind. Seien dazu $\phi_\alpha^{TM}:\pi^{-1}(U_\alpha)\to U_\alpha\times\mathbb{R}^n$ und $\phi_\beta^{TM}:\pi^{-1}(U_\beta)\to U_\beta\times\mathbb{R}^n$ zwei Karten aus $\tilde{\mathcal{A}}$. Dann gilt nach Lemma 2.11

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta^k}|_p = \sum_{l=1}^n \frac{\partial x_\alpha^l}{\partial x_\beta^k}|_p \frac{\partial}{\partial x_\alpha^l}|_p.$$

Damit können wir rechnen

$$\begin{aligned}
\phi_\alpha^{TM}\circ(\phi_\beta^{TM})^{-1}(u,v) &= \phi_\alpha^{TM}\left(\phi_\beta^{-1}(u),\sum_{k=1}^n v^k\frac{\partial}{\partial x_\beta^k}|_{\phi_\beta^{-1}(u)}\right)\\
&= \phi_\alpha^{TM}\left(\phi_\beta^{-1}(u),\sum_{k,l=1}^n v^k\frac{\partial x_\alpha^l}{\partial x_\beta^k}|_{\phi_\beta^{-1}(u)}\frac{\partial}{\partial x_\alpha^l}|_{\phi_\beta^{-1}(u)}\right)\\
&= \left(\phi_\alpha\circ\phi_\beta^{-1}(u),\sum_{k,l=1}^n \partial_k(x_\alpha^l\circ\phi_\beta^{-1})_u v^k\right)\\
&= \left(\phi_{\alpha\beta}(u),\sum_{k,l=1}^n \partial_k(\phi_\alpha\circ\phi_\beta^{-1})_u^l v^k\right)\\
&= (\phi_{\alpha\beta}(u), d(\phi_{\alpha\beta})_u v)\,.
\end{aligned}$$

Die Karten sind also glatt verträglich, da die Kartenwechsel auf M glatt sind. Damit haben wir also TM mit der Struktur einer $2n$-dimensionalen Mannigfaltigkeit versehen.

Ist nun $(p,\delta)\in TM$ und wir wählen Karten (U,ϕ) um $p=\pi(p,\delta)$ und $(\pi^{-1}(U),\phi^{TM})$ um (p,δ), dann gilt für die lokale Darstellung $\phi\circ\pi\circ(\phi^{TM})^{-1}:\phi(U)\times\mathbb{R}^n\to\phi(U)$

$$\phi\circ\pi\circ(\phi^{TM})^{-1}(u,v) = \phi\circ\pi\left(\phi^{-1}(u),\sum_{k=1}^n v^k\frac{\partial}{\partial x^k}|_{\phi^{-1}(u)}\right) = \phi(\phi^{-1}(u)) = u.$$

Damit ist π also eine Submersion, da die lokale Darstellung von π durch die Projektion $(u,v)\mapsto u$ gegeben ist. □

Lemma 4.2. *Sind M,N glatte Mannigfaltigkeiten und $F:M\to N$ glatt, dann definiert das Differential von F eine glatte Abbildung*

$$dF: TM\to TN,$$

sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} TM \arrow[r, "dF"] \arrow[d, "\pi"] & TN \arrow[d, "\pi"] \\ M \arrow[r, "F"] & N \end{tikzcd}$$

Beweis. Übung. □

Definition 4.3 (Vektorfeld)**.** Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $U\subset M$ offen. Ein *Vektorfeld auf U* ist eine glatte Abbildung $X:U\to TM$ mit $\pi\circ X=\mathrm{id}$ (also $X_p:=X(p)\in T_pM$ für jedes $p\in U$). Wir bezeichnen mit $\Gamma(U,TM)$ die Menge aller Vektorfelder auf U und schreiben $\Gamma(M,TM)=\Gamma(TM)$. Wir sagen auch X ist ein *Schnitt* von $\pi:TM\to M$ über U.

4.2 Vektorfelder und Derivationen

Definition 4.4. Eine *Derivation* auf $C^\infty(M)$ ist eine lineare Abbildung $\delta : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ sodass $\delta(fg) = \delta(f)g + f\delta(g)$ gilt für alle $f, g \in C^\infty(M)$.

Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, dann bezeichnen wir mit $\mathcal{D}(M)$ den Raum der Derivationen auf $C^\infty(M)$.

Satz 4.5. *Die Abbildung $X \mapsto [f \mapsto X(f)]$, wobei $X(f)(p) := X_p(f) = df_p(X)$, ist ein Isomorphismus $\Gamma(TM) \to \mathcal{D}(M)$.*

Beweis. Ist $X \in \Gamma(TM)$, so ist $X_p \in T_pM = \mathcal{D}_p(M)$ eine Derivation im Punkt p. Wir müssen noch zeigen, dass für $f \in C^\infty(M)$ dann auch $X(f) \in C^\infty(M)$ gilt. Sei dazu $p \in M$ und (U, ϕ) eine Karte um p. Dann gilt für die lokale Darstellung von X bezüglich ϕ und ϕ^{TM}

$$\phi^{TM} \circ X \circ \phi^{-1}(u) = \phi^{TM}\left(\phi^{-1}(u), \sum_{k=1}^n X^k(\phi^{-1}(u)) \frac{\partial}{\partial x^k}|_{\phi^{-1}(u)}\right) = (u, (X^1 \circ \phi^{-1}(u), \ldots, X^n \circ \phi^{-1}(u)))$$

und wir sehen, dass wir also für $q \in U$

$$X_q(f) = \sum_{k=1}^n X^k(q) \frac{\partial f}{\partial x^k}|_q$$

schreiben können mit glatten Funktionen $X^k : U \to \mathbb{R}$. Wegen $\frac{\partial f}{\partial x^k}|_q = \partial_k(f \circ \phi^{-1})_{\phi(q)}$ ist die Funktion $q \mapsto \frac{\partial f}{\partial x^k}|_q$ ebenfalls glatt. Also ist die Funktion $q \mapsto X_q(f) = X(f)(q)$ glatt in einer Umgebung von p. Da p beliebig war, ist also $X(f) \in C^\infty(M)$.

Ist nun δ eine Derivation $C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, dann ist $\delta_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R}, f \mapsto \delta(f)(p)$ eine Derivation im Punkt p. Damit erhalten wir eine Abbildung $X^\delta : M \to TM, X^\delta_p = \delta_p$ mit $X^\delta_p \in T_pM$ und wir behaupten, dass X^δ ein Vektorfeld, also glatt ist.

Sei dazu $p \in M$ und (U, ϕ) eine Karte um p. Dann können wir für $q \in U$

$$X^\delta_q = \sum_{k=1}^n X^k(q) \frac{\partial}{\partial x^k}|_q$$

schreiben. Wir müssen zeigen, dass die X^k's glatt im Punkt p sind. Wähle nun eine Hutfunktion ψ mit kompaktem Träger in U, die konstant gleich 1 ist in einer Umgebung von p. Dann können wir wieder ψx^i als glatte Funktion auf M auffassen, indem wir sie außerhalb U durch Null fortsetzen. Dann gilt für $q \in U$

$$X^\delta_q(\psi x^i) = \delta(\psi x^i)(q) = \sum_{k=1}^n X^k(q) \frac{\partial(\psi x^i)}{\partial x^k}|_q = \sum_{k=1}^n X^k(q)\delta_{ik} = X^i(q).$$

Die linke Seite ist glatt nach Voraussetzung, und daher ist auch X^i glatt. □

Beispiel 4.6. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und (U, ϕ) eine Karte. Dann ist $\frac{\partial}{\partial x^i} \in \Gamma(U, TM)$ gegeben durch

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \frac{\partial f}{\partial x^i}|_p = \partial_i(f \circ \phi^{-1})_{\phi(p)}.$$

Wir schreiben daher

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \partial_i(f \circ \phi^{-1}) \circ \phi.$$

Definition und Satz 4.7 (Lie-Klammer)**.** *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und seien $X, Y \in \Gamma(TM) = \mathcal{D}(C^\infty(M))$. Definiere für $f \in C^\infty(M)$*

$$[X, Y](f) = (X \circ Y - Y \circ X)(f) = X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

Dies definiert eine Abbildung

$$[\cdot,\cdot]\colon \Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\to\Gamma(TM),$$

sodass für $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ folgende Eigenschaften erfüllt sind:

a) $[\cdot,\cdot]$ *ist* $\mathbb{R}$*-bilinear.*

b) $[X,Y]=-[Y,X]$ *(Schiefsymmetrie)*

c) $[X,[Y,Z]]=[[X,Y],Z]+[Y,[X,Z]]$ *(Jacobi-Identität)*

d) $[X,fY]=X(f)Y+f[X,Y]$

Ein Paar $(V,[\cdot,\cdot])$ bestehend aus einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V zusammen mit einer Abbildung $[\cdot,\cdot]$: $V\times V\to V$, die die Eigenschaften a), b), c) erfüllt, heißt Lie-Algebra.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $[X,Y]\in\Gamma(TM)$ gilt, also dass $[X,Y]$ eine Derivation ist. Seien dazu $f,g\in C^\infty(M)$. Dann gilt

$$X(Y(fg)=X(fY(g)+gY(f))=fX(Y(g))+gX(Y(f))+2X(f)Y(g)$$

und analog

$$Y(X(fg)=fY(X(g))+gY(X(f))+2X(f)Y(g).$$

Subtraktion der beiden Gleichungen liefert dann

$$[X,Y](fg)=X(Y(fg))-Y(X(fg))=fX(Y(g))+gX(Y(f))-fY(X(g))-gY(X(f))=f[X,Y](g)+g[X,Y](f).$$

Wir überprüfen nun die Eigenschaften.

a) Klar.

b) Ist ebenfalls direkt aus der Definition ersichtlich.

c) Kann man direkt nachrechnen:

$$\begin{aligned}
[X,[Y,Z]]-[[X,Y],Z]-[Y,[X,Z]] &= X(YZ-ZY)-(YZ-ZY)X-(XY-YX)Z\\
&\quad +Z(XY-YX)-Y(XZ-ZX)+(XZ-ZX)Y\\
&= XYZ-XZY-YZX+ZYX-XYZ+YXZ\\
&\quad +ZXY-ZYX-YXZ+YZX+XZY-ZXY\\
&= 0.
\end{aligned}$$

d) Seien $f,g\in C^\infty(M)$. Dann gilt

$$[X,fY](g)=X(fY(g))-f(Y(X(g))=X(f)Y(g)+fX(Y(g))-f(Y(X(g))=(X(f)Y+f[X,Y])(g).$$

□

Korollar 4.8. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und sei (U,ϕ) eine Karte. Seien $X,Y\in\Gamma(U,TM)$ zwei Vektorfelder über U mit lokalen Darstellungen*

$$X_q=\sum_{k=1}^n X^k(q)\frac{\partial}{\partial x^k}|_q,\quad Y_q=\sum_{k=1}^n Y^k(q)\frac{\partial}{\partial x^k}|_q.$$

Dann gilt für die lokale Darstellung von $[X,Y]$

$$[X,Y]_q=\sum_{k,l=1}^n\left(X^k(q)\frac{\partial Y^l}{\partial x^k}|_q-Y^k(q)\frac{\partial X^l}{\partial x^k}|_q\right)\frac{\partial}{\partial x^l}|_q.$$

Beweis. Wir benutzen die Rechenregeln aus 4.7 und rechnen:

$$\begin{aligned}
[X,Y] &= \left[\sum_{k=1}^n X^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \sum_{l=1}^n Y^l \frac{\partial}{\partial x^l}\right] \\
&= \sum_{k,l=1}^n \left[X^k \frac{\partial}{\partial x^k}, Y^l \frac{\partial}{\partial x^l}\right] \\
&= \sum_{k,l=1}^n X^k \frac{\partial Y^l}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial x^l} + Y^l \left[X^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right] \\
&= \sum_{k,l=1}^n X^k \frac{\partial Y^l}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial x^l} - Y^l \left[\frac{\partial}{\partial x^l}, X^k \frac{\partial}{\partial x^k}\right] \\
&= \sum_{k,l=1}^n X^k \frac{\partial Y^l}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial x^l} - Y^l \frac{\partial X^k}{\partial x^l}\frac{\partial}{\partial x^k} - Y^l X^k \left[\frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right].
\end{aligned}$$

Wenn wir also zeigen können, dass $\left[\frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right] = 0$ gilt, so ist der Beweis vollständig. Sei dazu $f \in C^\infty(U)$ eine glatte Funktion. Dann gilt

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right](f) = \frac{\partial}{\partial x^l}(\partial_k(f\circ\phi^{-1})\circ\phi) - \frac{\partial}{\partial x^k}(\partial_l(f\circ\phi^{-1})\circ\phi) = (\partial_l\partial_k(f\circ\phi^{-1}))\circ\phi - (\partial_k\partial_l(f\circ\phi^{-1}))\circ\phi = 0,$$

da $f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ glatt ist und partielle Ableitungen auf $\mathbb{R}^n$ kommutieren. □

Definition 4.9. Seien M, N glatte Mannigfaltigkeiten und $F : M \to N$ glatt. Zwei Vektorfelder $X \in \Gamma(TM), Y \in \Gamma(TN)$ heißen *F-verwandt*, geschrieben $X \sim_F Y$ falls das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd}
TM \arrow[r, "dF"] & TN \\
M \arrow[u, "X"] \arrow[r, "F"] & N, \arrow[u, "Y"']
\end{tikzcd}$$

also wenn

$$Y(f) \circ F = X(f \circ F) = dF(X)(f)$$

gilt für alle $f \in C^\infty(N)$.

Satz 4.10. *Seien M, N glatte Mannigfaltigkeiten, $F : M \to N$ eine glatte Abbildung und seien $X_1, X_2 \in \Gamma(TM), Y_1, Y_2 \in \Gamma(TN)$ Vektorfelder mit $X_i \sim_F Y_i$ für $i = 1, 2$. Dann sind die Lie-Klammern $[X_1, X_2]$ und $[Y_1, Y_2]$ auch F-verwandt.*

Beweis. Übung. □

4.3 Die Lie-Algebra einer Lie-Gruppe

Definition 4.11. Sei nun G eine Liegruppe. Dann definiert jedes $g \in G$ einen Diffeomorphismus $L_g : G \to G$, die Linkstranslation um g, gegeben durch

$$L_g(h) = gh.$$

Ein Vektorfeld $X \in \Gamma(TG)$ heißt *links-invariant*, falls für jedes $g \in G$

$$(dL_g)_h(X_h) = X_{gh},$$

das heißt X ist L_g-verwandt zu sich selbst für alle $g \in G$.

Es folgt nun direkt aus 4.10, dass falls X, Y links-invariant sind, so ist die Lie-Klammer $[X, Y]$ auch wieder links-invariant. Der Raum der links-invarianten Vektorfelder ist also eine Lie-Unteralgebra von $(\Gamma(TM), [\cdot, \cdot])$.

Definition 4.12. Sei G eine Lie-Gruppe. Wir definieren die *Lie-Algebra* $\mathfrak{g}$ *von* G als

$$\mathfrak{g} = \{X \in \Gamma(TG) \mid X \text{ ist links-invariant}\}.$$

Proposition 4.13. *Sei G eine Lie-Gruppe und betrachte T_1G den Tangentialraum an $1 \in G$. Sei $v \in T_1G$, dann ist X^v gegeben durch*

$$X_h^v = (dL_h)_1(v)$$

ein glattes links-invariantes Vektorfeld und die Zuordnung $v \mapsto X^v$ definiert einen linearen Isomorphismus $T_1G \cong \mathfrak{g}$.

Beweis. Sei $v \in T_1G$ und $g \in G$. Da das Differential $(dL_g)_1$ T_1G auf T_gG abbildet, gilt $X_g^v = (dL_g)_1(v) \in T_gG$. Wir müssen noch zeigen, dass X^v glatt ist. Sei $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to G$ eine Kurve mit $\gamma(0) = 1, \gamma'(0) = v$. Dann gilt

$$(dL_g)_1(v) = (dL_g)_1(\gamma'(0)) = (L_g \circ \gamma)'(0).$$

Weiter können wir mit der glatten Multiplikationsabbildung $\mu : G \times G \to G, (g_1, g_2) \mapsto g_1g_2$ die Kurve $L_g \circ \gamma$ wie folgt umschreiben:

$$(L_g \circ \gamma)(t) = \mu(g, \gamma(t)).$$

Wir sehen also, dass $L_g \circ \gamma$ glatt von g abhängt. Damit hängt auch die Ableitung bezüglich t glatt von g ab und wir sehen also, dass $X^v : g \mapsto (dL_g)_1(v)$ glatt von g abhängt.

Als Nächstes weisen wir nach, dass X^v links-invariant ist. Dazu bemerken wir, dass $L_{g_1} \circ L_{g_2} = L_{g_1g_2}$ gilt. Damit folgt die Linksinvarianz aus der Kettenregel:

$$(dL_g)_h(X_h^v) = (dL_g)_h(dL_h)_1(v) = (dL_{gh})_1(v) = X_{gh}^v.$$

Die Abbildung $v \mapsto X^v$ ist linear, da für jedes $g \in G$ die Ableitung $(dL_g)_1 : T_1G \to T_gG$ linear ist. Außerdem ist die Abbildung ein Isomorphismus, da die Umkehrabbildung $\mathfrak{g} \to T_1G$ durch $X \mapsto X_1$ gegeben ist. Die Proposition ist bewiesen. $\square$

Proposition 4.13 erlaubt es uns also eine Lie-Klammer auf dem Vektorraum T_1G zu definieren via

$$[v, w] = [X^v, X^w]_1, \quad v, w \in T_1G.$$

Beispiel 4.14. Wir betrachten $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \subset \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ mit der Standardkarte. Dann ist für $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ die Linkstranslation durch die lineare Abbildung $L_A(B) = AB$ gegeben. Das Differential ist also

$$(dL_A)_1 : T_1\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \cong \mathrm{End}(\mathbb{R}^n) \to T_A\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \cong \mathrm{End}(\mathbb{R}^n), b \mapsto Ab.$$

Das links-invariante Vektorfeld X^b zu $b \in T_1\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \cong \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ ist also

$$X^b : \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \to T\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \cong \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \times \mathrm{End}(\mathbb{R}^n), \quad X^b(A) = (dL_A)_1(B) = \sum_{i,j=1}^{n} (AB)_j^i \frac{\partial}{\partial A_j^i}|_A.$$

Wegen $\frac{\partial A_l^k}{\partial A_j^i} = \delta_{ik}\delta_{lj}$ folgt nun für $b, c \in T_1\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \cong \mathrm{End}(\mathbb{R}^k)$

$$\begin{aligned}
[X^b, X^c]_A &= \sum_{i,j,k,l=1}^{n} \left((Ab)_j^i \frac{\partial (Ac)_l^k}{\partial A_j^i}|_A - (Ac)_j^i \frac{\partial (Ab)_l^k}{\partial A_j^i}|_A \right) \frac{\partial}{\partial A_l^k}|_A \\
&= \sum_{j,k,l=1}^{n} ((Ab)_j^k c_l^j - (Ac)_j^k b_l^j) \frac{\partial}{\partial A_l^k}|_A \\
&= \sum_{k,l=1}^{n} (A[b,c])_l^k \frac{\partial}{\partial A_l^k}|_A \\
&= X_A^{[b,c]},
\end{aligned}$$

wobei $[b,c] = bc - cb$. Für $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ (und allgemeiner jede Matrix-Lie-Gruppe) ist also die induzierte Lie-Klammer auf der Lie-Algebra $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \cong T_1\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \cong \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ die gewöhnliche Lie-Klammer für Matrizen.

4.4 Der Fluss eines Vektorfeldes

Definition 4.15. Sei M^n eine glatte Mannigfaltigkeit, $X \in \Gamma(TM)$ ein Vektorfeld, $p \in M$. Ist $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, das $0 \in \mathbb{R}$ enthält, so nennen wir $\gamma : J \to M$ eine *Integralkurve* von X mit Anfangswert p, falls

$$\gamma'(t) = X_{\gamma(t)}, \quad \forall t \in J, \qquad \gamma(0) = p.$$

Wir wollen uns anschauen, was die Gleichung $\gamma'(t) = X_{\gamma(t)}$ in lokalen Koordinaten bedeutet. Sei dazu (U, ϕ) eine Karte um p. Dann gilt für die lokale Darstellung von $\gamma'(t) = d\gamma_t(\frac{d}{dt})$ durch $(\phi \circ \gamma)'(t)$ gegeben. Also gilt

$$\gamma'(t) = \sum_{i=1}^{n} (c^i)'(t) \frac{\partial}{\partial x^i}|_{\gamma(t)}$$

mit $\phi \circ \gamma(t) = c(t) = (c^1(t), \ldots, c^n(t))$. Außerdem gilt

$$X_{\gamma(t))} = \sum_{i=1}^{n} X^i(\gamma(t)) \frac{\partial}{\partial x^i}|_{\gamma(t)}.$$

Die Gleichung $\gamma'(t) = X_{\gamma(t)}$ hat also lokal die Gestalt

$$c'(t) = (X^1(\phi^{-1}(c(t))), \ldots, X^n(\phi^{-1}(c(t)))), \qquad c(0) = \phi(p).$$

Beispiel 4.16. Sei $M = \mathbb{R}^2$.

a) Sei $q \in \mathbb{R}$ fest gewählt und sei $X(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} + q\frac{\partial}{\partial y}$. Dann ist $\gamma(t) = (c^1(t), c^2(t))$ eine Integralkurve, falls
$$(c^1)'(t) = 1, \qquad (c^2)'(t) = q$$
gilt. Es folgt, dass
$$\gamma(t) = (x_0 + t, y_0 + qt)$$
die Integralkurve zu X ist mit $\gamma(0) = (x_0, y_0)$.

b) Sei $X(x,y) = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$. Dann ist $\gamma(t) = (c^1(t), c^2(t))$ eine Integralkurve, falls
$$(c^1)'(t) = -c^2(t), \qquad (c^2)'(t) = c^1(t)$$
gilt. Es folgt, dass
$$\gamma(t) = (-y_0 \sin(t) + x_0 \cos(t), x_0 \sin(t) + y_0 \cos(t))$$
die Integralkurve zu X ist mit $\gamma(0) = (x_0, y_0)$.

c) Sei $X(x,y) = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$. Dann ist $\gamma(t) = (c^1(t), c^2(t))$ eine Integralkurve, falls

$$(c^1)'(t) = c^1(t), \qquad (c^2)'(t) = c^2(t)$$

gilt. Es folgt, dass

$$\gamma(t) = e^t(x_0, y_0)$$

die Integralkurve zu X ist mit $\gamma(0) = (x_0, y_0)$.

Um Integralkurven zu finden, müssen wir also *(autonome) gewöhnliche Differentialgleichungen* lösen. Der folgende Satz aus Analysis II(wobei Teil b) normalerweise nicht in Analysis II behandelt wird), sagt unter welchen Voraussetzungen dies möglich ist.

Satz 4.17 (Analysis II). *a) (Lokale Existenz und Eindeutigkeit) Sei $f : [-a,a] \times \overline{B_r(x_0)} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, die einer Lipschitz-Bedingung genüge, d.h. es existiert $L > 0$ mit*

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|.$$

Dann hat die gewöhnliche Differentialgleichung

$$c'(t) = f(t, c(t)), \quad c(0) = x_0$$

eine eindeutige Lösung $c : J \to \mathbb{R}^n$ mit $J = (-\epsilon, \epsilon)$, wobei $\epsilon = \min(a, \frac{r}{ML})$ und $M = \sup |f|$.

b) Ist f glatt in beiden Variablen, und ist $\Phi : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung zu

$$\frac{d}{dt}\Phi(t,x) = f(t, \Phi(t,x)), \quad \Phi(0,x) = x,$$

so ist auch Φ glatt in beiden Variablen t, x. (Glatte Abhängigkeit von Anfangswerten)

Beweisskizze. (Siehe [1], Appendix).

a) Falls c eine Lösung mit $c(0) = x_0$, so gilt

$$c(t) = x_0 + \int_0^t c'(s)ds = x_0 + \int_0^t f(s, c(s))ds = T(c)(t).$$

Dann ist c also ein *Fixpunkt* des Operators T. Die Konstante ϵ ist nun genauso gewählt, dass T auf einem geeigneten abgeschlossenen Unterraum von $C([-\epsilon, \epsilon], \mathbb{R}^n)$ eine Kontraktion ist. Wir können also den Banachschen Fixpunktsatz anwenden um die Existenz eines eindeutigen Fixpunktes nachzuweisen.

b) Man kann durch eine Modifikation des Arguments aus Teil a) zeigen, dass Φ in beiden Variablen stetig ist. Wäre Φ in beiden Variablen stetig differenzierbar, dann würde $\lambda(t,x) := d_x\Phi_{(t,x)}$, (d.h., wir betrachten für festes t die Jacobi-Matrix der Abbildung $x \mapsto \Phi(t,x)$ an der Stelle (x,t)) nach der Kettenregel die Gleichung

$$\frac{d\lambda}{dt} = d_x f_{(t,\Phi(t,x))}\lambda$$

lösen. Man zeigt nun zunächst mittels Teil a), dass diese Gleichung eine Lösung hat und kann dann zeigen, dass diese Lösung tatsächlich mit der Ableitung von Φ bezüglich der x-Variablen übereinstimmt.

□

Satz 4.18. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $X \in \Gamma(TM)$ und $p \in M$. Dann existiert eine eindeutige auf einem maximalen offenen Intervall J_p (mit $0 \in J_p$) definierte Integralkurve $\gamma_p : J_p \to M$ mit Anfangswert p.*

Beweis. Sei (U, ϕ) eine Karte um p. Dann können wir wie in der obigen Diskussion zur lokalen Darstellung übergehen und die zugehörige gewöhnliche Differentialgleichung auf $\mathbb{R}^n$ eindeutig lösen. Wir erhalten also ein $\epsilon > 0$ und eine Integralkruve $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to U \subset M$ mit $\gamma(0) = p$.

Seien nun $J_1, J_2 \subset \mathbb{R}$ offene Intervalle mit $0 \in J_i, i = 1, 2$ und $\gamma_i : J_i \to M, i = 1, 2$ zwei Integralkurven für X mit $\gamma_i(0) = p, i = 1, 2$. Sei nun $S = \{t \in J_1 \cap J_2 \mid \gamma_1(t) = \gamma_2(t)\}$. Wir behaupten $S = J_1 \cap J_2$.

Nach Konstruktion ist S nicht leer, da $0 \in S$.

Außerdem ist S abgeschlossen, da $S = F^{-1}(\Delta)$, wobei $F = \gamma_1 \times \gamma_2 : J_1 \cap J_2 \to M \times M, t \mapsto (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ stetig ist und $\Delta = \{(p, p) \in M \times M \mid p \in M\} \subset M \times M$ abgeschlossen.

Sei nun $t_0 \in S$ und wähle eine Karte (U, ϕ) um $q = \gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$. Dann lösen $c_1 = \phi \circ \gamma_1$ und $c_2 = \phi \circ \gamma_2$ dasselbe Anfangswertproblem und müssen deshalb nach Satz 4.17, *a)* auf einem offenen Intervall J, das t_0 enthält, mit der eindeutigen Lösung dieses Anfangswertproblems übereinstimmen. Also stimmen γ_1 und γ_2 auf diesem Intervall J überein. Es folgt, dass S offen ist.

Damit haben wir gezeigt, dass S nicht-leer, abgeschlossen und offen ist. Weil $J_1 \cap J_2$ zusammenhängend ist, muss $S = J_1 \cap J_2$ gelten.

Wir definieren nun J_p als die Vereinigung aller offenen Intervalle $J \subset \mathbb{R}$, mit $0 \in J$, sodass eine Integralkurve $\gamma^J : J \to M$ für X mit $\gamma^J(0) = p$ existiert und setzen

$$\gamma_p : J_p \to M, \quad t \in J \mapsto \gamma_p(t) = \gamma^J(t).$$

Nach der obigen Diskussion ist dies eine wohldefinierte Integralkurve für X mit $\gamma_p(0) = p$, die klarerweise maximal ist. □

Beispiel 4.19. Sei $M = (0, 1) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ und $X(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}$. Dann gilt

$$\gamma_{(x,y)}(t) = (x + t, y).$$

Diese Abbildung ist auf dem maximalen Intervall

$$J_{(x,y)} = (-x, 1 - x)$$

definiert.

Definition und Satz 4.20. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und sei $X \in \Gamma(TM)$ ein Vektorfeld. Der* Flussbereich *von X ist die offene Menge*

$$D^X = \{(t, p) \in \mathbb{R} \times M \mid t \in J_p\} \subset \mathbb{R} \times M$$

Der Fluss von X *ist die glatte Abbildung*

$$\Phi^X : D^X \to M \qquad \Phi^X(t, p) := \Phi^X_t(p) = \gamma_p(t),$$

wobei $\gamma_p : J_p \to M$ die Integralkurve zu X mit $\gamma_p(0) = p$ bezeichnet. Der Fluss Φ^X erfüllt die folgenden Eigenschaften:

a) $\Phi^X_0 = \mathrm{id}_M$, *also* $\Phi^X(0, p) = p$ *für jedes* $p \in M$.

b) $\Phi^X_s \circ \Phi^X_t(p) = \Phi^X_{s+t}(p)$, *d.h.* $\Phi^X(s, \Phi^X(t, p)) = \Phi^X(s + t, p)$, *für alle* $s, t \in \mathbb{R}, p \in M$, *sodass zumindest einer der beiden Ausdrücke definiert ist.*

c) $J_{\Phi^X_t(p)} = J_p - t$ *für alle* $(t, p) \in D^X$.

d) $(d\Phi^X_t)_p(X_p) = X_{\Phi^X_t(p)}$ *für alle* $(t, p) \in D^X$, *das heißt X ist Φ^X_t-invariant.*

e) Sei $t \in \mathbb{R}$ fest und sei $M_t = \{p \in M \mid (t, p) \in D^X\}$ nicht leer. Dann ist die Abbildung $\Phi^X_t : M_t \to M_{-t}$ ein Diffeomorphismus mit Inverser Φ^X_{-t}.

Beweis. a) Es ist $\Phi^X_0(p) = \gamma_p(0) = p$ für jedes $p \in M$.

b) $\gamma_1(s) = \Phi_s^X(\Phi_t^X(p))$ ist der Wert der Integralkurve durch $\Phi_t^X(p))$ zur Zeit s, erfüllt also $\gamma_1'(s) = X_{\gamma_1(s)} = X_{\Phi_s^X(\Phi_t^X(p))}$ und $\gamma_1(0) = \Phi_t^X(p)$. Andererseits ist $\gamma_2(s) = \Phi_{s+t}^X(p)$ ebenfalls eine Integralkurve für X und erfüllt $\gamma_2(0) = \Phi_t^X(p)$. Wegen der Eindeutigkeit der Integralkurven folgt also $\gamma_1 = \gamma_2$.

c) Da $\gamma_2(s) = \gamma_p(t+s)$ eine Integralkurve zu X mit $\gamma_2(0) = \gamma_p(t) = \Phi^X(t,p)$ ist, die auf $J_p - t$ definiert ist, folgt $J_p - t \subset J_{\Phi_t^X(p)}$. Andererseits ist $\gamma_3(s) = \gamma_{\Phi_t^X(p)}(-t+s)$ für $s \in J_{\Phi_t^X(p)} + t$ eine Integralkurve zu X durch p, was $J_{\Phi_t^X(p)} + t \subset J_p$ und damit $J_{\Phi_t^X(p)} \subset J_p - t$ impliziert.

Man kann zeigen (siehe Blatt 7), dass man den Flussbereich von X wie folgt schreiben kann:

$$D^X = \{(t,p) \in \mathbb{R} \times M \mid \exists J \subset \mathbb{R}, U \subset M \text{ offen, mit } t \in J, p \in U,, \ \Phi^X : J \times U \to M \text{ ist glatt}\}.$$

Die Menge auf der rechten Seite ist klarerweise offen und die Abbildung $\Phi^X : D^X \to M$ glatt wegen der glatten Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen.

d) Wegen *b)* gilt für $f \in C^\infty(M)$

$$\begin{aligned}
(d\Phi^X)_{(t,p)}(X_p)(f) &= X_p(f \circ \Phi_t^X) \\
&= \frac{d}{ds}|_{s=0} f(\Phi_t^X(\gamma_p(s)) \\
&= \frac{d}{ds}|_{s=0} f(\gamma_p(s+t)) \\
&= \gamma_p'(t)(f) \\
&= X_{\gamma_p(t)}(f) \\
&= X_{\Phi^X(t,p)}(f).
\end{aligned}$$

e) Die Mengen $M_t \subset M$ ist offen, weil $D^X \subset \mathbb{R} \times M$ offen ist. Wegen $J_{\Phi^X(t,p)} = J_p - t$ gilt $\Phi_t^X(M_t) \subset M_{-t}$ und $\Phi_{-t}^X(M_{-t}) \subset M_t$. Die Aussage folgt nun aus *a)* und *b)*.

□

Beispiel 4.21. Sei wieder $M = (0,1) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ und $X(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}$. Dann gilt

$$\Phi^X(t,(x,y)) = (x+t, y).$$

Diese Abbildung ist auf dem Flussbereich

$$D^X = \{(t,(x,y)) \in \mathbb{R} \times M \mid t \in (-x, 1-x)\} \subset \mathbb{R} \times M$$

definiert.

Definition 4.22. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und sei $X \in \Gamma(TM)$ ein Vektorfeld. Dann heißt X *vollständig*, falls alle Integralkurven von X für alle Zeiten existieren, also $D^X = \mathbb{R} \times M$ gilt.

Proposition 4.23. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und sei $X \in \Gamma(TM)$ ein Vektorfeld. Sei $\gamma_p : J_p = (a,b) \to M$ die maximale Integralkurve durch $p \in M$ und sei $b < \infty$. Ist $K \subset M$ kompakt und $p \in K$, dann existiert ein $t \in (a,b)$ mit $\gamma(t) \notin K$.*

Mit anderen Worten: Falls die maximale Integralkurve für X durch p nicht für alle Zeiten existiert, so muss sie jedes Kompaktum verlassen.

Beweis. Sei $K \subset M$ kompakt und sei $p \in K$. Dann ist K abgeschlossen, weil M Hausdorff ist, und daher ist auch $\gamma^{-1}(K) \subset (a,b)$ abgeschlossen. Wir behaupten, dass $t_0 \in (a,b)$ existiert mit $t_0 = \max(\gamma^{-1}(K))$. Falls nicht, dann gilt $b = \sup(\gamma_p^{-1}(K))$. Sei nun (t_n) eine Folge in $\gamma_p^{-1}(K)$, die gegen b konvergiert. Da K kompakt ist, hat die Bildfolge $(\gamma_p(t_n))$ eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert $q \in K$. Da der Flussbereich D^X offen ist, existiert ein $\epsilon > 0$ und eine offene Umgebung

U von q, sodass der Fluss Φ^X auf $(-\epsilon, \epsilon) \times U$ definiert und glatt ist. Für n hinreichend groß gilt nun $b - \epsilon < t_n < b$ und $q_n = \gamma_p(t_n) \in U$. Die Integralkurve durch $\gamma_p(t_n)$ ist also auf $(-\epsilon, \epsilon)$ definiert. Definiere nun $\tilde{\gamma} : (a, t_n + \epsilon) \to M$ durch

$$\tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} \gamma_p(t) & t \in (a, b) \\ \gamma_{q_n}(t - t_n) & t \in (t_n - \epsilon, t_n + \epsilon) \end{cases}.$$

Dies ist eine Integralkurve zu X durch p, die auf $(a, t_n + \epsilon)$ definiert ist, wobei $b < t_n + \epsilon$ gilt - Widerspruch zur Maximalität des Intervalls $J_p = (a, b)$.

Also gilt $t_0 \in (a, b)$. Wähle nun $t \in (a, b)$ mit $t > t_0$. Dann gilt $\gamma(t) \notin K$. □

Korollar 4.24. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und sei $X \in \Gamma(TM)$. Ist M kompakt, dann ist X vollständig.*

Definition 4.25. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Eine *Ein-Parameter-Gruppe von Diffeomorphismen* ist eine glatte Abbildung

$$\Phi : \mathbb{R} \times M \to M, \quad (t, p) \mapsto \Phi(t, p) = \Phi_t(p)$$

sodass für jedes $p \in M$ und $s, t \in \mathbb{R}$

$$\Phi(0, p) = p, \qquad \Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s}.$$

Eine Ein-Parameter-Gruppe von Diffeomorphismen ist also das Gleiche wie eine glatte Wirkung der Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ auf M.

Äquivalent kann man die Abbildung

$$\Phi : \mathbb{R} \times M \to M$$

als einen Gruppenhomomorphismus

$$\Phi : \mathbb{R} \to \mathrm{Diff}(M), \quad t \mapsto \Phi_t$$

interpretieren. Hier bezeichnet $\mathrm{Diff}(M) = \{F : M \to M \mid F \text{ ist ein Diffeomorphismus}\}$ die Diffeomorphismengruppe von M. Die Gruppenoperation auf $\mathrm{Diff}(M)$ ist durch Komposition gegeben $(F, G) \mapsto F \circ G$.

Korollar 4.26 (Vollständige Vektorfelder = 1PS)**.** *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Dann gibt es eine Bijektion*

$$\{\textit{vollständige Vektorfelder}\} \leftrightarrow \{\textit{Ein-Parameter-Gruppen von Diffeomorphismen}\}$$

Beweis. Ist X ein vollständiges Vektorfeld, dann definiert der Fluss Φ^X eine Ein-Parameter-Gruppe von Diffeomorphismen.

Ist andererseits Φ eine Ein-Parameter-Gruppe von Diffeomorphismen, dann erhält man für festes p eine Kurve $\gamma_p : \mathbb{R} \to M, \gamma_p(t) = \Phi(t, p)$. Wir definieren nun ein Vektorfeld X^Φ durch die Vorschrift

$$X^\Phi_p := \gamma_p'(0) = d\Phi_{(0,p)} \left(\frac{d}{dt}|_0 \right).$$

Dann ist Φ der Fluss zu X^Φ. Die beiden Zuordnungen $X \mapsto \Phi^X$ und $\Phi \mapsto X^\Phi$ sind also invers zu einander. □

Satz 4.27. *Seien M, N glatte Mannigfaltigkeiten, $F : M \to N$ glatt und seien $X \in \Gamma(TM)$ und $Y \in \Gamma(TN)$. Dann sind X und Y genau dann F-verwandt, wenn für die Flüsse $F(\Phi^X(t, p)) = \Phi^Y(t, F(p))$ für alle $(t, p) \in D^X \subset \mathbb{R} \times M$ gilt.*

Beweis. Sei $p \in M$ fest und sei $\gamma_p(t) = \Phi_t^X(p)$ die maximale Integralkurve durch p. Dann gilt

$$(F \circ \gamma_p)'(t) = dF_{\gamma_p(t)}(\gamma_p'(t)) = dF_{\gamma_p(t)}(X_{\gamma_p(t)}) = Y_{F(\gamma_p(t))}.$$

Also ist $F \circ \gamma_p$ eine Integralkurve für Y durch $F(p)$, die auf J_p definiert ist.

Gelte nun für die Flüsse $F(\Phi^X(t,p)) = \Phi^Y(t, F(p))$. Dann folgt aus der Kettenregel für $f \in C^\infty(N)$

$$Y_{F(p)}(f) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(\Phi^Y(t, F(p)) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(F(\Phi^X(t,p)) = dF_p(X_p)(f).$$

□

Korollar 4.28. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $X \in \Gamma(TM)$ und $F : M \to M$ glatt. Dann ist X genau dann F-invariant (d.h. $X \circ F = dF \circ X$), wenn der Fluss Φ^X folgende Relation erfüllt:*

$$F(\Phi^X(t,p)) = \Phi^X(t, F(p)).$$

4.5 Die Exponentialabbildung einer Lie-Gruppe

Proposition 4.29. *Sei G eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g} \cong T_{1_G}G$. Dann ist jedes links-invariante Vektorfeld vollständig.*

Beweis. Sei $X^v \in \mathfrak{g}$ und sei $\gamma_g : (a,b) \to G$ die maximale Integralkurve für X^v durch $g \in G$. Angenommen $b < \infty$. Sei $\epsilon > 0$ und sei $\gamma_1 : (-\epsilon, \epsilon)$ eine Integralkurve durch 1_G. Wähle $t_0 \in (a,b)$ mit $b - \epsilon < t_0$ und setze $g_0 = \gamma_g(t_0)$. Definiere nun

$$\tilde{\gamma} : (a, t_0 + \epsilon) \to G, \quad \tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} \gamma_g(t), & t \in (a, t_0] \\ g_0\gamma_1(t - t_0), & t \in [t_0, t_0 + \epsilon). \end{cases}$$

Da X links-invariant und insbesondere L_{g_0}-invariant ist, ist $\tilde{\gamma}$ eine Integralkurve durch g mit $\tilde{\gamma} = \gamma_g$ auf (a,b). Es gilt aber $t_0 + \epsilon > b$. Widerspruch. □

Beispiel 4.30. Sei $G = \mathbb{R}_{>0}$ die multiplikative Lie-Gruppe der positiven reellen Zahlen. Dann gilt $\mathfrak{g} = T_1\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$. Das links-invariante Vektorfeld zu $v \in \mathfrak{g}$ ist an der Stelle $\tau \in G = (0, \infty)$ gegeben durch

$$X_\tau^v = \tau v \in T_\tau G \cong \mathbb{R}.$$

Eine "Kurve"$\gamma : J \to G = (0,\infty)$ ist eine Integralkurve, falls

$$\gamma'(t) = X_{\gamma(t)}^v = \gamma(t)v, \qquad \gamma(0) = 1$$

für alle $t \in J \subset \mathbb{R}$ gilt. Das bedeutet also

$$\gamma(t) = \exp(tv).$$

und insbesondere

$$\exp(v) = \gamma(1).$$

Wir können die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty) = \mathbb{R}_{>0}$ also wie folgt interpretieren:

Die Exponentialfunktion ist $\exp : \mathbb{R} = \mathfrak{g} \to G = (0, \infty)$ ist gegeben wie folgt. Die Zahl $\exp(v)$ für $v \in \mathbb{R}$ ist gleich $\gamma_1(1)$, wobei γ_1 die Integralkurve des zu v assoziierten links-invarianten Vektorfeldes auf $G = \mathbb{R}_{>0}$ durch $\tau = 1$ ist.

Definition 4.31. Sei G eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g} \cong T_{1_G}G$. Die *Exponentialabbildung* ist gegeben durch

$$\exp : \mathfrak{g} \to M, \qquad \exp(v) = \Phi^{X^v}(1, 1_G).$$

Das bedeutet also: $\exp(v)$ ist der Wert der Integralkurve von X^v durch 1_G zur Zeit $t = 1$.

Lemma 4.32. *Die Exponentialabbildung* $\exp : \mathfrak{g} \to G$ *ist glatt.*

Beweis. Betrachte das glatte Vektorfeld $Y_{(v,g)} = (0, X^v_g)$ auf $\mathfrak{g} \times G$ mit Fluss

$$\Phi^Y : \mathbb{R} \times \mathfrak{g} \times G \to \mathfrak{g} \times G, \Phi^Y(t,(v,g)) = (v, \Phi^{X^v}(t,g)).$$

Mit der Projektion $\mathrm{pr}_2 : \mathfrak{g} \times G \to G, \mathrm{pr}_2(v,g) = g$ kann man exp nun als Komposition glatter Abbildungen schreiben:

$$\exp(v) = \Phi^{X^v}_1(1_G) = \mathrm{pr}_2(\Phi^Y_1(v, 1_G)).$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite hängt glatt von v ab. □

Definition 4.33. Sei G eine Lie-Gruppe. Dann definiert jedes $g \in G$ einen Diffeomorphismus

$$R_g : G \to G, \quad h \mapsto hg,$$

die *Rechts-Translation um g*.

Korollar 4.34. *Sei G eine Lie-Gruppe und* $v \in T_1G \cong \mathfrak{g}$. *Dann ist der Fluss des durch v definierten links-invarianten Vektorfeldes* X^v *gegeben durch*

$$\Phi : \mathbb{R} \times G \to G, \quad \Phi^{X^v}(t,g) = g\exp(tv) = R_{\exp(tv)}(g).$$

Insbesondere gilt $\exp((s+t)v) = \Phi^{X^v}(s+t, 1_G) = \Phi^{X^v}(t, \Phi^{X^v}(s, 1_G)) = \exp(sv)\exp(tv)$ *für alle* $s,t \in \mathbb{R}$. *Die Abbildung* $\mathbb{R} \to G, \quad t \mapsto \exp(tv)$ *ist also ein Gruppenhomomorphismus und damit ist die Teilmenge* $\{\exp(tv) \mid t \in \mathbb{R}\}$ *eine Untergruppe von G, genannt eine Ein-Parameter-Untergruppe.*

Beweis. Wir wissen schon, dass X^v vollständig ist. Außerdem haben wir im Beweis von Proposition 4.29 gesehen, dass die Integralkurve von X^v durch $g \in G$ gegeben ist durch $\gamma_g(t) = g\gamma_1(t)$, wobei γ_1 die Integralkurve zu X^v durch $1_G \in G$ ist.

Sei nun Y das auf $\mathfrak{g} \times G$ definierte Vektorfeld aus dem Beweis von Lemma 4.32. Wegen $X^{\lambda v} = \lambda X^v$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ folgt $\Phi^{X^{\lambda v}}(t,p) = \Phi^X(\lambda t, p)$ und damit

$$\Phi^Y(t,(\lambda v, g)) = (\lambda v, \Phi^{X^v}(\lambda t v, g)).$$

Damit gilt für $t \in \mathbb{R}$

$$\exp(tv) = \mathrm{pr}_2(\Phi^Y_1(tv, 1_G)) = \Phi^{X^v}(t, 1_G).$$

Also ist $\gamma_1(t) = \exp(tv)$ die Integralkurve zu X^v durch $1_G \in G$.

Es folgt nun

$$\exp(sv)\exp(tv) = \Phi^{X^v}(t, \exp(sv)) = \Phi^{X^v}(t, \Phi^{X^v}(s, 1_G)) = \Phi^{X^v}(s+t, 1_G) = \exp((s+t)v).$$

□

4.6 Geometrische Interpretation der Lie-Klammer für Vektorfelder - Die Lie-Ableitung

Definition 4.35. Seien M, N glatte Mannigfaltigkeiten, $F : M \to N$ ein Diffeomorphismus und sei $Y \in \Gamma(TN)$ ein Vektorfeld. Der *Pull-Back von Y unter F* ist das Vektorfeld F^*Y auf M gegeben durch

$$(F^*Y)_p = (dF_p)^{-1}(Y_{F(p)}).$$

Insbesondere gilt $dF_p((F^*Y)_p) = Y_{F(p)}$, also sind F^*Y und Y F-verwandt.

Definition 4.36. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und sei $X \in \Gamma(TM)$ ein Vektorfeld mit Fluss $\Phi^X : D^X \to M$. Sei $Y \in \Gamma(TM)$. Betrachte die Familie von Vektorfeldern $(\Phi^X_t)^*Y : M_t \to TM$ gegeben durch

$$(\Phi^*_t Y)_p = d\Phi_{-t}(Y_{\Phi_t(p)}) \in T_pM.$$

Die *Lie-Ableitung von Y längs X* ist das Vektorfeld $\mathcal{L}_X Y$ gegeben durch

$$(\mathcal{L}_X Y)_p = \frac{d}{dt}|_{t=0}(\Phi^*_t Y)_p.$$

Lemma 4.37. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und sei $X \in \Gamma(TM)$ ein Vektorfeld mit Fluss $\Phi^X : D^X \to M$. Sei $Y \in \Gamma(TM)$ ein weiteres Vektorfeld. Dann gilt*

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y].$$

Beweis. Nach Konstruktion sind für festes t die Vektorfelder $Y, \tilde{Y}(t) = (\Phi_t^X)^* Y \in \Gamma(TM_t)$ Φ_t-verwandt:

$$d\Phi_t(\tilde{Y}(t)) = Y \circ \Phi_t.$$

Für $f \in C^\infty(M)$ gilt also für $p \in M_t$

$$\tilde{Y}(t)_p(f \circ \Phi_t) = Y(f)(\Phi_t(p)) = Y_{\Phi_t(p)}(f)$$

Damit folgt für $p \in M$

$$X_p(Y(f)) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(Y(f)(\Phi_t^X(p)) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\tilde{Y}(t)_p(f \circ \Phi_t^X).$$

Es ergibt sich aber wegen der Produktregel und $\tilde{Y}(0)_p = Y_p, (\mathcal{L}_X Y)_p = (\tilde{Y}'(0))_p$

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}(\tilde{Y}(t)(f \circ \Phi_t)) = (\tilde{Y}'(0))_p(f) + Y_p(X(f)).$$

Insgesamt haben wir also gezeigt

$$X(Y(f)) = (\mathcal{L}_X Y)(f) + Y(X(f)).$$

□

Satz 4.38 (Kommutierende Flüsse)**.** *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und seien $X, Y \in \Gamma(TM)$ zwei vollständige Vektorfelder. Dann gilt*

$$[X, Y] = 0 \iff \Phi_s^X \circ \Phi_t^Y = \Phi_t^Y \circ \Phi_s^X, \textit{ für alle } s, t \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Sei $p \in M$ fest. Betrachte die Abbildung $\gamma : \mathbb{R}^2 \to M$ gegeben durch

$$\gamma(s, t) = \Phi^X(s, \Phi^Y(t, p)) = \Phi_s^X(\Phi_t^Y(p)).$$

Für festes $t \in \mathbb{R}$ ist dann

$$\gamma_t(s) = \gamma(s, t)$$

die Integralkurve für X mit Anfangswert $\Phi^Y(t, p)$. Es gilt also $\Phi_s^X \circ \Phi_t^Y(p) = \Phi_t^Y \circ \Phi_s^X(p)$ genau dann wenn für festes $s \in \mathbb{R}$

$$\eta_s(t) = \gamma(s, t)$$

die Integralkurve zu Y ist mit Anfangswert $\Phi^X(s, p)$ ist.

Die Flüsse kommutieren also genau dann wenn für alle $t \in \mathbb{R}$ und s beliebig die Gleichung

$$\eta_s'(t) = Y_{\eta_s(t)}$$

erfüllt ist.

Betrachte nun für festes $t \in \mathbb{R}$ die Kurve

$$Z : \mathbb{R} \to T_{\Phi^Y(t,p)}M, \qquad Z(s) = d(\Phi_s^X)^{-1}_{\Phi^Y(t,p)}(\eta_s'(t) - Y_{\eta_s(t)}).$$

Dann gilt $\eta_s'(t) = Y_{\eta_s(t)}$ genau dann, wenn $Z(s) = 0$ ist für alle $s \in \mathbb{R}$. Für $s = 0$ ist $\eta_0(t) = \gamma(0, t) = \Phi^Y(t, p)$ und dies ist die Integralkurve zu Y durch $p = \Phi^X(0, p)$, also gilt $Z(0) = 0$. Damit ist $\Phi_s^X \circ \Phi_t^Y = \Phi_t^Y \circ \Phi_s^X$ äquivalent zu $Z'(s) = 0$ für alle $s \in \mathbb{R}$.

Wir berechnen nun mit der Kettenregel

$$\eta_s'(t) = \frac{d}{dt}\Phi_s^X(\Phi_t^Y(p)) = d(\Phi_s^X)_{\Phi^Y(t,p)}\eta_0'(t) = d(\Phi_s^X)_{\Phi^Y(t,p)}Y_{\Phi^Y(t,p)}.$$

Damit haben wir mit $\eta_s(t) = \Phi_s^X(\Phi_t^Y(p))$ und $\eta_0(t) = \Phi_t^Y(p)$

$$Z(s) = Y_{\Phi^Y(t,p)} - d(\Phi_s^X)^{-1}_{\Phi^Y(t,p)}Y_{\eta_s(t)} = Y_{\Phi^Y(t,p)} - d(\Phi_s^X)^{-1}_{\Phi^Y(t,p)}Y_{\Phi_s^X(\Phi_t^Y(p))} = Y_{\eta_0(t)} - (\Phi_s^X)^*(Y)_{\eta_0(t)}.$$

Wir wollen im Folgenden für beliebiges $s_0 \in \mathbb{R}$ die Ableitung $Z'(s_0) = \frac{d}{ds}|_{s=0}Z(s_0+s)$ berechnen.

Wir bemerken zunächst, dass für beliebige Mannigfaltigkeiten M, N, P, Diffeomorphismen $F : M \to N, G : N \to P$ und Vektorfelder $X \in \Gamma(TP)$ die Relation

$$(G \circ F)^*X = F^*(G^*X)$$

gilt. Sei nämlich $p \in M$, dann gilt nach der Kettenregel

$$\begin{aligned}
(G\circ F)^*(X)_p &= d(G\circ F)_p^{-1}(X_{G(F(p))})\\
&= (dF_p)^{-1}(dG_{F(p)})^{-1}(X_{G(F(p))})\\
&= (dF_p)^{-1}((G^*X)_{F(p)})\\
&= F^*(G^*(X))_p.
\end{aligned}$$

Damit gilt wegen $\Phi^X_{s+s_0} = \Phi^X_s \circ \Phi^X_{s_0} = \Phi^X_{s_0} \circ \Phi^X_s$ die Relation

$$(\Phi^X_{s+s_0})^*(Y)_{\eta_0(t)} = (\Phi^X_{s_0})^*(\Phi^X_s)^*(Y)_{\eta_0(t)}$$

Damit folgt also mit $\Phi^X_{s_0}(\eta_0(t)) = \eta_{s_0}(t)$

$$\begin{aligned}
Z'(s_0) &= \frac{d}{ds}|_{s=0}Z(s_0+s)\\
&= \frac{d}{ds}|_{s=0}(Y_{\eta_0(t)} - (\Phi^X_{s+s_0})^*(Y)_{\eta_0(t)})\\
&= -\frac{d}{ds}|_{s=0}(\Phi^X_{s_0})^*(\Phi^X_s)^*(Y)_{\eta_0(t)}\\
&= -\frac{d}{ds}|_{s=0}\left((d\Phi^X_{s_0})^{-1}_{\eta_0(t)}((\Phi^X_s)^*(Y)_{\eta_{s_0}(t)})\right)\\
&= -(d\Phi^X_{s_0})^{-1}_{\eta_0(t)}\left(\frac{d}{ds}|_{s=0}(\Phi^X_s)^*(Y)_{\eta_{s_0}(t)}\right)\\
&= -(d\Phi^X_{s_0})^{-1}_{\eta_0(t)}\left((\mathcal{L}_XY)_{\eta_{s_0}(t)}\right)\\
&= -(d\Phi^X_{s_0})^{-1}_{\eta_0(t)}\left([X,Y]_{\eta_{s_0}(t)}\right)
\end{aligned}$$

Dabei haben wir die Relation $\mathcal{L}_XY = [X,Y]$ aus Lemma 4.37 benutzt. Da $d\Phi^X_{s_0}$ ein Isomorphismus ist, gilt also

$$\Phi^X_s \circ \Phi^Y_t = \Phi^Y_t \circ \Phi^X_s \iff Z = 0 \iff [X,Y] = 0.$$

Der Satz ist bewiesen. □

Korollar 4.39. *Sei G eine Lie-Gruppe und seien $v, w \in \mathfrak{g}$ mit $[v,w] = 0$. Dann gilt*

$$\exp(v)\exp(w) = \exp(w)\exp(v) = \exp(v+w).$$

Beweis. Für $s, t \in \mathbb{R}$ gilt $\exp(tv)\exp(sw) = \Phi_s^{X^w} \circ \Phi_t^{X^v}$ und nach Voraussetzung $[X^v, X^w] = 0$. Daher folgt die Gleichung $\exp(tv)\exp(sw) = \exp(sw)\exp(tv)$ direkt aus Satz 4.38.

Für die Relation $\exp(v)\exp(w) = \exp(v+w)$ zeigen wir, dass $\gamma(t) = \exp(tv)\exp(tw)$ die Integralkurve für X^{v+w} mit Anfangswert 1_G ist.

Wir bemerken zunächst, dass das Differential der Multiplikationsabbildung

$$m : G \times G \to G$$

an der Stelle $(1_G, 1_G) \in G \times G$ gegeben ist durch

$$dm_{(1_G,1_G)}(v, w) = v + w.$$

Dazu betrachten wir die Abbildungen $i_1 : G \to G \times G, g \mapsto (g, 1)$ und $j_1 : G \to G \times G, g \mapsto (1, g)$. Mit der Identifikation $T_{(1_G,1_G)}(G \times G) = T_{1_G}G \oplus T_{1_G}G$ können wir nun rechnen

$$\begin{aligned}
dm_{1,1}(v, w) &= d(m \circ i_1)_1(v) + d(m \circ j_1)_1(w) \\
&= \frac{d}{dt}|_{t=0} m(\exp(tv), 1) + \frac{d}{dt}|_{t=0} m(1, \exp(tw)) \\
&= \frac{d}{dt}|_{t=0} \exp(tv) + \frac{d}{dt}|_{t=0} \exp(tw) \\
&= v + w.
\end{aligned}$$

Damit folgt nun für beliebiges t aus der Kettenregel und wegen $\exp(tv)\exp(sw) = \exp(sw)\exp(tv)$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}|_{t=t_0} \exp(tv)\exp(tw) &= \frac{d}{dt}|_{s=0} \exp((t_0 + s)v)\exp((t_0 + s)w) \\
&= \frac{d}{dt}|_{s=0} \exp(t_0 v)\exp(sv)\exp(t_0 w)\exp(sw) \\
&= \frac{d}{dt}|_{s=0} \exp(t_0 v)\exp(t_0 w)\exp(sv)\exp(sw) \\
&= (dL_{\exp(t_0 v)\exp(t_0 w)})_{1_G} \left(\frac{d}{dt}|_{s=0} \exp(sv)\exp(sw) \right) \\
&= (dL_{\exp(t_0 v)\exp(t_0 w)})_{1_G} (v + w) \\
&= X^{v+w}_{\exp(t_0 v)\exp(t_0 w)}
\end{aligned}$$

Also ist $\gamma(t) = \exp(tv)\exp(tw)$ die Integralkurve für X^{v+w} mit Anfangswert 1_G. Es folgt nun wegen der Eindeutigkeit der Integralkurven $\exp(tv)\exp(tw) = \exp(t(v + w))$. □

4.7 Der Satz von Frobenius

Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $X \in \Gamma(TM)$ ein Vektorfeld. Wir haben in den obigen Kapiteln gesehen, dass wir zu jedem $p \in M$ immer eine maximale Integralkurve $\gamma_p : J_p \to M$ finden können mit $\gamma_p(0) = p$. Falls X nirgends verschwindet gilt insbesondere $\gamma_p'(t) = X_{\gamma_p(t)} \neq 0$. Also ist $\gamma_p :' J_p \to M$ eine Immersion. Wir können die Resultate aus den obigen Abschnitten also so interpretieren, dass wir ein nirgends verschwindendes Vektorfeld lokal um jeden Punkt p zu einer eingebetteten eindimensionalen Untermannigfaltikeit "aufintegrieren" können. Global müssen die Integralkurven eines Vektorfeldes allerdings keine eingebetteten Untermannigfaltigkeiten sein, sondern sind im Allgemeinen nur immersiert, wie etwa das Beispiel einer Kurve mit irrationaler Steigung auf T^2 zeigt.

Der Satz von Frobenius beschäftigt sich mit der Frage, unter welchen Voraussetzungen man k punktweise linear unabhängige Vektorfelder zu einer k-dimensionalen Untermannigfaltigkeit aufintegrieren kann.

Definition 4.40. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und sei $E = \{E_p\}_{p \in M}$ eine Familie von k-dimensionalen Vektorräumen, sodass für jedes $p \in M$ $E_p \subset T_pM$ ein Unterraum ist. Dann heißt E eine *Distribution auf M vom Rang k* (wir sagen auch *Unterbündel von TM vom Rang k*), falls zu jedem Punkt $p \in M$ eine Umgebung U und punktweise linear unabhängige Vektorfelder $X_1, \ldots, X_k \in \Gamma(U, TM)$ existieren mit

$$X_i|_q \in E_q \quad \forall q \in U.$$

Wir nennen $\{X_1, \dots, X_k\}$ einen *lokalen Rahmen für E über U*.

Wir schreiben $\Gamma(E)$ für den Raum der Vektorfelder $X \in \Gamma(TM)$ sodass $X_q \in E_q$ für alle $q \in M$ gilt.

Beispiel 4.41. Sei $X \in \Gamma(TM)$ ein nirgends verschwindendes Vektorfeld. Dann definiert also $E_p = \operatorname{span}(X_p)$ eine Distribution auf M vom Rang 1.

Wir verallgemeinern nun den Begriff der Integralkurve.

Definition 4.42. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $E \subset TM$ eine Distribution vom Rang k. Eine *Integralmannigfaltigkeit zu E durch $p \in M$* ist eine k-dimensionale immergierte Untermannigfaltigkeit $\iota : N \to M$, sodass $p \in \iota(N)$ und $d\iota_q(T_qN) = E_{\iota(q)}$ für alle $q \in N$ gilt.

Wir nennen das Unterbündel E *integrabel*, falls durch jeden Punkt $p \in M$ eine Integralmannigfaltigkeit zu E existiert.

Wir wollen im Folgenden das Problem der lokalen Existenz von Integralmannigfaltigkeiten studieren: Seien $X_1, \dots, X_k \in \Gamma(TM)$ Vektorfelder, die im Punkt p linear unabhängig sind. Unter welchen Voraussetzungen existiert eine Integralmannigfaltigkeit, d.h. eine immersierte Untermannigfaltigkeit N, die p enthält, sodass die $X_1, \dots, X_k$ auf einer Umgebung von p eine Basis für TN bilden?

Sei zunächst $M = U \subset \mathbb{R}^n$ offen (indem wir eine Karte um p wählen, können wir den allgemeinen Fall auf diese Situation zurückführen). Wir können die Vektorfelder $X_1, \dots, X_k$ also als Abbildungen $U \to \mathbb{R}^n$ auffassen.

Um die Frage nach der Existenz einer Integralmannigfaltigkeit durch p zu beantworten, könnten wir versuchen eine *simultane Lösung*

$$\gamma : (-\epsilon, \epsilon)^k \subset \mathbb{R}^k \to U \subset \mathbb{R}^n$$

des *Systems*

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t^i} = X_i \circ \gamma, \quad i = 1, \dots, k, \quad \gamma(0) = p$$

zu finden (Für $k = 1$ wäre dies eine Integralkurve für $X = X_1$ durch p).

Falls ein solches γ existiert, dann muss γ eine Immersion sein, und daher können wir durch eventuelle Verkleinerung von ϵ erreichen, dass γ eine Einbettung ist mit $d\gamma(T_p\mathbb{R}^k) = E_{\gamma(p)}$.

Das obige System ist allerdings im Allgemeinen *überbestimmt*, das heißt, die n Komponenten von γ müssen insgesamt kn viele Gleichungen erfüllen. Da γ glatt sein soll, muss beispielsweise nach dem Schwarzschen Vertauschungssatz für alle i, j

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^i \partial t^j} = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^j \partial t^i}$$

gelten. Diese Bedingung kann nur erfüllt werden, wenn die Vektorfelder X_i paarweise kommutieren. Eine notwendige Bedingung, damit die obige Strategie zum Erfolg führt, also eine Lösung γ existiert, ist also, dass die Distribution E lokale Rahmen besitzen muss, die aus paarweise kommutierenden Vektorfeldern bestehen.

Die nächste Definition liefert eine notwendige Bedingung für die Integrabilität.

Definition und Satz 4.43. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und sei $E^k \subset TM$ eine Distribution. Falls E integrabel ist, so muss $\Gamma(E) \subset \Gamma(TM)$ abgeschlossen unter der Lie-Klammer sein, d.h. falls $X, \tilde{X} \in \Gamma(E)$, so muss auch $[X, \tilde{X}] \in \Gamma(E)$ gelten. Wir nennen E in diesem Fall* involutiv *und schreiben $[\Gamma(E), \Gamma(E)] \subset \Gamma(E)$.*

Beweis. Sei $p \in M$. Sei U eine offene Umgebung von p und seien $X, \tilde{X} \in \Gamma(U, E)$. Sei weiter $\iota : N \to M$ eine Integralmannigfaltigkeit zu E durch $p \in M$. Dann ist ι lokal eine Einbettung, also existieren Vektorfelder $Y, \tilde{Y} \in \Gamma(V, TN)$ für eine geeignete Umgebung V von $y = \iota^{-1}(p)$ sodass $d\iota(Y) = X \circ \iota, d\iota(\tilde{Y}) = \tilde{X} \circ \iota$ gilt, d.h. Y ist ι-verwandt zu X und $\tilde{Y}$ ist ι-verwandt zu $\tilde{X}$. Dann ist aber auch die Lie-Klammer $[Y, \tilde{Y}]$ ι-verwandt zu $[X, \tilde{X}]$, also muss

$$[X, \tilde{X}]_p = d\iota_y([Y, \tilde{Y}]_y) \in E_p$$

gelten, d.h. es muss $[X, \tilde{X}] \in \Gamma(E)$ gelten. □

Der Satz von Frobenius besagt, dass die notwendige Bedingung, dass E involutiv sein muss, auch hinreichend für die Integrabilität ist.

Satz 4.44 (Frobenius). *Sei M^n eine glatte Mannigfaltigkeit. Ein Unterbündel $E \subset TM$ vom Rang k ist genau dann integrabel, wenn es involutiv ist.*

Zunächst beweisen wir den Satz von Frobenius in dem Spezialfall, dass E lokale Rahmen aus paarweise kommutierenden Vektorfeldern erlaubt. Dazu wenden wir die Strategie, die wir am Anfang dieses Abschnitts skizziert haben. Den allgemeinen Fall führen wir dann auf diesen Spezialfall zurück.

Proposition 4.45. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und seien $X_1, \dots, X_k \in \Gamma(TM)$ Vektorfelder, sodass $[X_i, X_j] = 0$ für alle i, j. Sei außerdem $p \in M$, sodass $X_1(p), \dots, X_k(p) \in T_pM$ linear unabhängig sind. Dann existiert eine Karte (U, ϕ) um p, sodass für jedes $q \in U$*

$$X_i(q) = \frac{\partial}{\partial x^i}|_q.$$

Beweis. Seien $X_1, \dots, X_k$ im Punkt p linear unabhängig mit $[X_i, X_j] = 0$ und sei Sei $(V, \psi = (y^1, \dots, y^n)$ eine Karte um p mit $\psi(p) = 0$.

Indem wir gegebenenfalls ψ durch $A \circ \psi$ ersetzen, wobei $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein geeigneter linearer Isomorphismus ist, können wir annehmen, dass

$$X_1(p), \dots, X_k(p), \frac{\partial}{\partial y^{k+1}}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n}|_p$$

eine Basis von T_pM bilden.

Sei Φ^{X_i} der Fluss zu X_i. Wir behaupten, dass ein $\epsilon > 0$ und eine Umgebung W von p existieren, sodass die *simultane Flussabbildung*

$$(-\epsilon, \epsilon)^k \times W \to V, \qquad (t, q) \mapsto \Phi^{X_1}_{t^1} \circ \cdots \circ \Phi^{X_k}_{t^k}(q)$$

wohldefiniert und glatt ist.

Dazu gehen wir induktiv vor. Zunächst existiert nach Theorem 4.17 ein $\epsilon_1 > 0$ und eine Umgebung W_1, sodass $\Phi^{X_1} : (-\epsilon_1, \epsilon_1) \times W_1 \to V$ wohldefiniert und glatt ist. Induktiv sehen wir, dass ein ϵ_l existiert und eine Umgebung W_l existiert, sodass $\Phi^{X_l} : (-\epsilon_l, \epsilon_l) \times W_l \to W_{l-1}$ wohldefiniert und glatt ist. Wir wenden dieses Argument nun k mal an, und sehen, dass $\epsilon = \min_l\{\epsilon_l\}$ und $W = W_k$ die gewünschten Eigenschaften haben.

Sei nun $S \subset \mathbb{R}^{n-k}$ die offene Teilmenge gegeben durch

$$S = \{(u^{k+1}, \dots, u^n) \in \mathbb{R}^{n-k} \,|\psi^{-1}(0, \dots, 0, u^{k+1}, \dots, u^n) \in W\}.$$

Betrachte nun die Abbildung

$$F : (-\epsilon, \epsilon)^k \times S \to V \subset M, F(t, u) = \Phi^{X_1}_{t^1} \circ \cdots \circ \Phi^{X_k}_{t^k}(\psi^{-1}(0, u)).$$

Da die Vektorfelder $X_1, \dots, X_k$ paarweise kommutieren, kommutieren nach Satz 4.38 auch die zugehörigen Flüsse, d.h. in der Definition von F spielt die Reihenfolge der $\Phi^{X_j}_{t^j}$ keine Rolle. Es gilt nun für $(t, u) \in (-\epsilon, \epsilon)^k \times S$ und $f \in C^\infty(M)$

$$\begin{aligned}
dF_{(t,u)}(\frac{\partial}{\partial t^j})(f) &= \frac{\partial}{\partial t^j}|_{(t,u)}(f \circ F) \\
&= \frac{\partial}{\partial t^j}|_{(t,q)} f(\Phi^{X_1}_{t^1} \circ \cdots \circ \Phi^{X_j}_{t^j} \circ \cdots \circ \Phi^{X_k}_{t^k}(\psi^{-1}(0, u))) \\
&= \frac{\partial}{\partial t^j}|_{(t,u)} f(\Phi^{X_j}_{t^j} \circ \Phi^{X_1}_{t^1} \circ \cdots \circ \widehat{\Phi^{X_j}_{t^j}} \circ \cdots \circ \Phi^{X_k}_{t^k}(\psi^{-1}(0, u))) \\
&= X^j_{F(t,u)}(f).
\end{aligned}$$

und für $i > k$
$$dF_{(0,q)}\left(\frac{\partial}{\partial u^i}|_q\right)(f) = \frac{\partial}{\partial u^i}|_q(f \circ \psi^{-1}(0,u)) = \frac{\partial f}{\partial y^i}|_{\psi^{-1}(0,u)}.$$

Da die Vektoren $X_1(p), \ldots, X_k(p), \frac{\partial}{\partial y^{k+1}}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^n}|_p$ linear unabhängig sind, ist das Differential von F invertierbar im Punkt $(0,0)$ und es gibt eine Umgebung U von $p \in M$ und einen Diffeomorphismus $\phi = F^{-1} : U \to \phi(U) \subset (-\epsilon, \epsilon) \times S \subset \mathbb{R}^n$. Dann ist (U, ϕ) die gewünschte Karte um p. □

Korollar 4.46. *Sei $E \subset TM$ ein Unterbündel, sodass um jeden Punkt ein lokaler Rahmen $(X_1, \ldots, X_k)$ existiert mit $[X_i, X_j] = 0$. Sei $p \in M$ beliebig, dann existiert eine Integralmannigfaltigkeit durch p. Genauer existiert eine Karte (U, ϕ) um p, sodass die Niveauflächen $\{x^{k+1} = c^{k+1}, \ldots, x^n = c^n\}$ eingebettete Integralmannigfaltigkeiten für E sind und die Koordinatenvektorfelder $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^k}$ einen lokalen Rahmen für E über U bilden.*

Beweis von Satz 4.44. Sei E eine involutive Distribution auf M. Wenn wir zeigen können, dass für E lokale Rahmen aus paarweise kommutierenden Vektorfeldern existieren, können wir Proposition 4.45 anwenden und sind fertig.

Wir starten also mit einem beliebigen lokalen Rahmen
$$\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_k : U \to E$$
um $p \in M$. Nach eventueller Verkleinerung von U können wir eine Karte (U, ϕ) wählen, sodass für $i = 1, \ldots, k$
$$\tilde{X}_i(p) = \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$$
gilt. Indem wir U gegebenenfalls noch einmal verkleinern können wir außerdem annehmen, dass für jedes $q \in U$ die Vektorfelder
$$\tilde{X}_1(q), \ldots, \tilde{X}_k(q), \frac{\partial}{\partial x^{k+1}}|_q, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_q$$
eine Basis von T_qM bilden. Insbesondere können wir also für $q \in U$ den Tangentialraum T_qM als direkte Summe schreiben:
$$T_qM = E_q \oplus \operatorname{span}\left(\frac{\partial}{\partial x^{k+1}}|_q, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_q\right).$$
Sei dazu $P = (x^1, \ldots, x^k) : U \to \mathbb{R}^k$ die Projektion auf die ersten k Koordinaten. Dann gilt
$$dP_q\left(\frac{\partial}{\partial x^j}|_q\right) = \begin{cases} \partial_j & j \leq k \\ 0 & j > k \end{cases}.$$
Das bedeutet
$$\ker(dP_q) = \operatorname{span}\left(\frac{\partial}{\partial x^{k+1}}|_q, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_q\right),$$
und somit auch
$$T_qM = E_q \oplus \ker(dP_q).$$
Die lineare Abbildung
$$A_q = (dP_q)|_{E_q} : E_q \to T_{\mathrm{pr}_k(q)}\mathbb{R}^k = \mathbb{R}^k$$
ist daher invertierbar. Wir setzen $B_q = A_q^{-1}$ und definieren Vektorfelder $X_i : U \to E$ durch
$$X_i|_q = B_q(\partial_i).$$
Dann bilden $X_1, \ldots, X_k$ einen lokalen Rahmen für E über U.

Wir behaupten, dass sie paarweise kommutieren. Es gilt nun nach Konstruktion

$$dP(X_i) = \partial_i \circ P.$$

Also sind die X_i P-verwandt zu den partiellen Ableitungen ∂_i auf $\mathbb{R}^k$. Dann sind die entsprechenden Lie-Klammern auch P-verwandt, d.h. für $i, j = 1, \ldots, k$ gilt

$$dP([X_i, X_j]) = [\partial_i, \partial_j] \circ P = 0,$$

das heißt $[X_i, X_j]_q \in \ker(dP_q)$.

Da E nach Voraussetzung involutiv ist, muss aber auch $[X_i, X_j]_q \in E_q$ gelten, also

$$[X_i, X_j]_q \in E_q \cap \ker(dP_q) = \{0\}.$$

Also ist $[X_i, X_j] = 0$ und der Satz von Frobenius ist bewiesen. $\square$

Beispiel 4.47. Sei $M = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Wir betrachten die Vektorfelder $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z} \in \Gamma(T\mathbb{R}^3)$ gegeben durch

$$\tilde{X}(x,y,z) = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}, \quad \tilde{Y}(x,y,z) = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}, \quad \tilde{Z}(x,y,z) = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}.$$

Man kann leicht zeigen, dass durch $E_p = \operatorname{span}(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z})$ eine Distribution auf M vom Rang 2 definiert wird.

Sei nun $p = (0,0,1)$. Dann gilt

$$\tilde{X}(0,0,1) = -\frac{\partial}{\partial y}, \quad \tilde{Y}(0,0,1) = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \tilde{Z}(0,0,1) = 0.$$

Man kann nun direkt nachrechnen, dass die Vektorfelder $\tilde{X}, \tilde{Y}, \frac{\partial}{\partial z}$ auf $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$ linear unabhängig sind. Nehmen wir also für ψ die Standardkarte auf U, so ist die Abbildung P gegeben durch

$$P : U \to \mathbb{R}^2, \qquad P(x,y,z) = (x,y),$$

und das Differential $dP_q : \mathbb{R}^3 = T_qM \to \mathbb{R}^2 = T_{P(q)}\mathbb{R}^2$ an der Stelle $q \in U$ ist gegeben durch

$$dP_q\left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + c\frac{\partial}{\partial z}\right) = a\partial_1 + b\partial_2.$$

Es folgt mit $q = (x,y,z) \in U$

$$dP(\tilde{X}(q)) = -z\partial_2, \quad dP(\tilde{Y}(q)) = z\partial_1.$$

Wir sehen also, dass

$$X(x,y,z) = -\frac{1}{z}\tilde{X}(x,y,z) = -\frac{y}{z}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y}, \quad Y(x,y,z) = \frac{1}{z}\tilde{Y}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{x}{z}\frac{\partial}{\partial z}$$

jeweils $Y \sim_P \partial_1, X \sim_P \partial_2$ erfüllen und daher kommutieren müssen. Klarerweise bilden X, Y einen Rahmen für E über U. Die von X, Y definierten Anfangswertprobleme auf M mit Startwert $(x_0, y_0, z_0) \in U$ sind mit $\gamma(t) = (c^1(t), c^2(t), c^3(t))$

$$\begin{aligned}
\gamma'(t) = X(\gamma(t)) \quad &\iff \quad (c^1)'(t) = 0 \implies c^1(t) = x_0 \\
& \quad (c^2)'(t) = 1 \implies c^2(t) = y_0 + t \\
& \quad (c^3)'(t) = -\frac{c^2(t)}{c^3(t)} \implies (c^3(t))^2 = z_0^2 - 2\int (y_0 + t)dt = z_0^2 - 2y_0t - t^2 \\
\gamma'(t) = Y(\gamma(t)) \quad &\iff \quad (c^1)'(t) = 1 \implies c^1(t) = x_0 + t \\
& \quad (c^2)'(t) = 0 \implies c^2(t) = y_0 \\
& \quad (c^3)'(t) = -\frac{c^1(t)}{c^3(t)} \implies (c^3(t))^2 = z_0^2 - 2x_0t - t^2.
\end{aligned}$$

Also sind mit $q = (x_0, y_0, z_0) \in U$ die Flüsse gegeben durch

$$\Phi^X(t,q) = (x_0, y_0 + t, \sqrt{z_0^2 - 2y_0 t - t^2}), \quad \Phi^Y(t,q) = (x_0 + t, y_0, \sqrt{z_0^2 - 2x_0 t - t^2}).$$

Die simultane Flussabbildung ist dann gegeben durch

$$\Phi^X(s, \Phi^Y(t, (x_0, y_0, z_0)) = \Phi^X(s, (x_0+t, y_0, \sqrt{z_0^2 - 2x_0 t - t^2})) = (x_0+t, y_0+s, \sqrt{z_0^2 - 2x_0 t - t^2 - 2y_0 s - s^2}).$$

Mit $\epsilon = \frac{1}{4}$ und $W = \{z > \frac{1}{2}, x + y < \frac{1}{4}\}$ gilt dann $\Phi^X(s, \Phi^Y(t,q) \in U$, falls $(s,t,q) \in (-\epsilon, \epsilon)^2 \times W$.

Die Abbilung F ist mit $S = (1/2, \infty)$ damit gegeben durch

$$F : \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}, \infty\right) \to U, \quad F(s,t,z_0) = \Phi^X(s, \Phi^Y(t, (0,0,z_0)) = (t, s, \sqrt{z_0^2 - t^2 - s^2}).$$

Die Karte $\phi = F^{-1}$ aus dem Beweis von Proposition 4.45 ist also gegeben durch

$$\phi(x,y,z) = (y, x, \sqrt{z^2 + x^2 + y^2})$$

und die Integralmannigfaltigkeiten sind dann in den Hemisphären

$$N_{z_0} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0, x^2 + y^2 + z^2 = z_0^2\} \subset M$$

vom Radius z_0 enthalten.

Wir haben auf Blatt 7 gesehen, dass die Vektorfelder $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}$ von der Wirkung von $\mathrm{O}(3)$ auf $\mathbb{R}^3$ erzeugt werden. Die Orbiten dieser Wirkung sind gerade die Sphären.

Letzteres gilt auch allgemeiner: Ist G eine Lie-Gruppe, die auf einer Mannigfaltigkeit M wirkt, dann definieren die fundamentalen Vektorfelder eine Distribution auf M, deren Integralmannigfaltigkeiten gerade die Orbiten der Gruppenwirkung sind.

Wir haben bisher die *lokale* Existenz von Integraluntermannigfaltigkeiten gezeigt. Man kann nun zeigen, dass für eine integrable Distribution durch jeden Punkt $p \in M$ eine maximale Integralmannigfaltigkeit existiert und man M in die disjunkte Vereinigung dieser maximalen Integralmannigfaltigkeiten zerlegen kann. Dies führt zum Begriff der *Blätterung*. Aus dem Satz von Frobenius folgt außerdem der folgende Satz:

Satz 4.48. *Sei G eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ und sei $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Lie-Unteralgebra. Dann existiert eine zusammenhängende immergierte Untermannigfaltigkeit $H \subset G$ mit der Eigenschaft, dass H selbst eine Lie-Gruppe ist mit Lie-Algebra $\mathfrak{h}$.*

Beweisskizze. Man sieht direkt, dass die links-invarianten Vektorfelder in $\mathfrak{h}$ eine integrable Distribution definieren und man kann dann zeigen, dass die zugehörige maximale Integralmannigfaltigkeit durch 1_G die gewünschten Eigenschaften hat. □

Beispiel 4.49. a) $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ und $\mathfrak{o}(n) = \{a \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid a^T = -a\}$. Dann folgt $H = \mathrm{SO}(n) = \{A \in \mathrm{O}(n) \mid \det A = 1\}$, die Zusammenhangskomponente von $O(n)$, die $1_n \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ enthält. Dies ist eine eingebettete Untermannigfaltigkeit.

b) $G = T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ mit Lie-Algebra $\mathfrak{t}^2 = \mathbb{R}^2$. Wir betrachten $\mathfrak{h} = \mathrm{span}((1,q))$ mit $q \notin \mathbb{Q}$. Dann ist die zugehörige Integralmannigfaltigkeit gegeben durch $H = \{[t, tq] \in T^2 \mid t \in \mathbb{R}\}$ und wir haben gesehen, dass dies dicht in T^2 liegt, also keine eingebettete Untermannigfaltigkeit ist. H ist aber eine Untergruppe von T^2.

5 Differentialformen

5.1 Multilineare Algebra

Wir beginnen mit einer Erinnerung aus der linearen Algebra. Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Der *Dualraum* V^* ist der Raum der linearen Abbildungen auf V mit Werten in $\mathbb{R}$:

$$V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{R}).$$

Elemente von V^* heißen *Linearformen* oder 1-*Formen* auf V. Ist $e_1, \dots, e_n$ eine Basis von V, so bilden die Linearformen $\omega^1, \dots, \omega^n$ gegeben durch

$$\omega^i(e_j) = \delta^i_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

eine Basis von V^*, die *zu* $e_1, \dots, e_n$ *duale Basis* und wir können $\omega \in V^*$ in der Form

$$\omega = \sum_{i=1}^n \omega(e_i)\omega^i$$

schreiben. Die Vektorräume V, V^* sind daher isomorph, allerdings ist der Isomorphismus nicht kanonisch, sondern hängt von der Wahl einer Basis von V ab.

Beispiel 5.1. Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit und $f \in C^\infty(M)$, dann können wir für $p \in M$ das Differential $df_p : T_pM \to T_{f(p)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ als ein Element von $T^*pM \cong T_pM^*$ interpretieren.

Sei weiter $(U, \phi = (x^1, \dots, x^n))$ eine Karte um p. Dann ist $\{\frac{\partial}{\partial x^i}|_p \mid i = 1, \dots, n\}$ eine Basis von T_pM mit dualer Basis $\{dx^1_p, \dots, dx^n_p \mid i = 1, \dots, n\}$.

Im Gegensatz dazu ist V^{**} *kanonisch* isomorph zu V vermöge der Zuordnung

$$V \to V^{**}, \quad v \mapsto \mathrm{ev}_v,$$

wobei

$$\mathrm{ev}_v : V^* \to \mathbb{R}, \quad \mathrm{ev}_v(\omega) = \omega(v).$$

Definition 5.2. Seien $V_1, \dots, V_k, W$ endlich-dimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume. Eine Abbildung

$$\omega : V_1 \times \cdots \times V_k \to W, \quad (v_1, \dots, v_k) \mapsto \omega(v_1, \dots, v_k)$$

heißt *multilinear*, falls für jedes $i = 1, \dots, k$ und jede feste Wahl von Vektoren $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_k$ die Abbildung

$$V_i \to W, \quad v \mapsto \omega(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_k)$$

linear ist. Wir schreiben $\mathrm{Mult}^k(V_1, \dots, V_k; W)$ für den Raum der multilinearen Abbildungen $V_1 \times \cdots \times V_k \to W$. Die Dimension von $\mathrm{Mult}^k(V; W)$ ist $(\dim V)^k(\dim W)$.

Falls $V_i = V$ für alle $i = 1, \dots, k$ ist, dann nennen wir ω eine *k-Multilinearform auf V mit Werten in W* und schreiben

$$\omega \in \mathrm{Mult}^k(V; W).$$

Wir nennen $\omega \in \mathrm{Mult}^k(V; W)$ *alternierend*, falls

$$\omega(\dots, v, \dots, v, \dots) = 0.$$

d.h. für alle k-Tupel $v_1, \dots, v_k$, bei denen zwei Vektoren übereinstimmen, gilt $\omega(v_1, \dots, v_k) = 0$. Ist ω alternierend, dann schreiben wir $\omega \in \mathrm{Alt}^k(V; W)$.

Beispiel 5.3. a) Ist $k = 1$, dann ergibt die Definition $\mathrm{Mult}^1(V; W) = \mathrm{Hom}(V, W)$. Ist weiter $W = \mathbb{R}$, dann gilt also $\mathrm{Mult}^1(V; \mathbb{R}) = V^*$.

b) Ein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ definiert ein Element in $\mathrm{Mult}^2(V,\mathbb{R})$. Elemente in $\mathrm{Mult}^2(V,W)$ nennen wir auch *Bilinearformen auf V mit Werten in W*.

c) Ist $V = \mathbb{R}^3 = W$, so definiert das Kreuzprodukt $(v_1, v_2) \mapsto v_1 \times v_2$ ein Element in $\mathrm{Mult}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, also eine Bilinearform auf $\mathbb{R}^3$ mit Werten in $\mathbb{R}^3$ und wegen $v \times v = 0$ gilt $\times \in \mathrm{Alt}^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$.

d) Ist $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra, so definiert die Lie-Klammer $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ eine schiefsymmetrische Bilinearform mit Werten in $\mathfrak{g}$, also ein Element in $\mathrm{Alt}^2(\mathfrak{g}; \mathfrak{g})$.

e) Für $V = \mathbb{R}^n$ definiert $\det : (v_1, \ldots, v_n) \mapsto \det(v_1, \ldots, v_n)$ ein Element in $\mathrm{Alt}^n(V; \mathbb{R})$.

Definition 5.4. Sind $\xi^1, \ldots, \xi^k \in V^*$ Linearformen auf V, dann definiere das *Wedge-Produkt* $\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi^k \in \mathrm{Alt}^k(V, \mathbb{R})$ durch

$$(\xi^1 \wedge \cdots \wedge \xi^k)(v_1, \ldots, v_k) = \det[\xi^i(v_j)].$$

Beispiel 5.5. Für $\xi, \eta \in V^*$ und $v, w \in V$ gilt also

$$(\xi \wedge \eta)(v, w) = \xi(v)\eta(w) - \eta(v)\xi(w).$$

Lemma 5.6. *Ist $e_1, \ldots, e_n$ eine Basis für V mit dualer Basis $\omega^1, \ldots, \omega^n$, dann ist*

$$\{\omega^{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_k} \mid i_1 < i_2 < \cdots < i_k\}$$

eine Basis für $\mathrm{Alt}^k(V, \mathbb{R})$. Insbesondere ist die Dimension von $\mathrm{Alt}^k(\mathbb{R}^n)$ gleich $\binom{n}{k}$ und wir schreiben ab jetzt $\mathrm{Alt}^k(V, \mathbb{R}) = \Lambda^k V^*$. Wir schreiben oft $\mathbf{i} = i_1 < \cdots < i_k$ und $\omega^{\mathbf{i}} = \omega^{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_k}$

Beweis. Siehe Lineare Algebra II. □

Bemerkung 5.7. a) Nach dem Lemma kann man also eine alternierende Multilinearform $\xi \in \mathrm{Alt}^k(V, \mathbb{R})$ eindeutig in der Gestalt

$$\xi = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \xi_{i_1 \ldots i_k} \omega^{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_k} = \sum_{\mathbf{i}} \xi_{\mathbf{i}} \omega^{\mathbf{i}}$$

schreiben, wobei

$$\xi_{\mathbf{i}} = \xi_{i_1 \ldots i_k} = \xi(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}).$$

Ist insbesondere $\xi = \sum_i \xi_i \omega^i, \eta = \sum_i \eta_i \omega^i$, so folgt

$$\xi \wedge \eta = \sum_{i<j} (\xi_i \eta_j - \xi_j \eta_i) \omega^i \wedge \omega^j.$$

b) Nach dem Lemma gilt im Fall $k = 2$, dass man eine schiefsymmetrische Bilinearform $\xi \in \Lambda^2 V^*$ eindeutig in der Gestalt

$$\xi = \sum_{i<j} \xi_{ij} \omega^i \wedge \omega^j$$

schreiben kann, d.h. eine schiefsymmetrische Bilinearform ist durch ihre (schiefsymmetrische) Gram-Matrix $[\xi_{ij}]$ festgelegt.

c) Ist $\xi = \xi^1 \wedge \cdots \wedge \xi^k$ mit $\xi^i \in V^*$ so nennen wir ξ *zerlgebar*. Mit

$$\xi^i = \sum_{l=1}^{k} a^i_l \omega^l$$

gilt dann

$$\xi^1 \wedge \cdots \wedge \xi^k = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \xi_{i_1 \ldots i_k} \omega^{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_k}$$

wobei

$$\xi_{i_1 \ldots i_k} = \det[a^i_{i_j}]^k_{i,j=1}$$

die Determinante der $(k \times k)$ Untermatrix der Matrix a ist, die von den i_j-ten Spalten gebildet wird.

Lemma 5.8. *Das Wedge-Produkt lässt sich fortsetzen zu einer bilinearen, assoziativen Abbildung*

$$\wedge : \Lambda^k V^* \times \Lambda^l V^* \to \Lambda^{k+l} V^*$$

und es gilt für $\xi \in \Lambda^k V^*, \eta \in \Lambda^l V^*$

$$\xi \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \xi.$$

Beweis. Wir können jede k- bzw. l-Form als Summe zerlegbarer Formen schreiben. Für zerlegbare Formen haben wir $\wedge$ schon definiert und setzen bilinear fort. Die Rechenregeln folgen sofort aus den Rechenregeln für die Determinante. $\square$

Lemma 5.9. *Ist* $A : V \to W$ *eine lineare Abbildung, so induziert* A *eine lineare Abbildung* $\Lambda^k A^* : \Lambda^k W^* \to \Lambda^k V^*$ *durch*

$$\Lambda^k A^*(\xi)(v_1, \ldots, v_k) = \xi(Av_1, \ldots, Av_k)$$

Ist $\xi = \xi^1 \wedge \cdots \wedge \xi^k$ *zerlegbar, so gilt*

$$\Lambda^k A^*(\xi) = (A^* \xi^1) \wedge \cdots \wedge (A^* \xi^k).$$

Es folgt für $\xi \in \Lambda^k V^*, \eta \in \Lambda^l V^*$

$$\Lambda^{k+l} A^*(\xi \wedge \eta) = \Lambda^k A^*(\xi) \wedge \Lambda^l A^*(\eta).$$

Bemerkung 5.10.

a) Ist $k = 1$ und $V = \mathbb{R}^n, W = \mathbb{R}^m$ und $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ gegeben durch eine Matrix, dann ist $\Lambda^1 A^* = A^*$ gegeben durch die Transponierte von A,

$$A^* = A^T.$$

b) Ist $V = W$ und $\omega^1, \ldots, \omega^n$ die zu $e_1, \ldots, e_n$ duale Basis, dann ist

$$\Lambda^k A^*(\omega^{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_k})(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$$

die Determinante der $(k \times k)$ Untermatrix von A ist, die von den i_j-ten Spalten und Zeilen gebildet wird. Insbesondere folgt

$$\Lambda^n A^*(\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^n)(e_1, \ldots, e_n) = \det A.$$

5.2 Differentialformen

Definition und Satz 5.11. *Sei* M^n *eine glatte Mannigfaltigkeit. Das* Bündel $\Lambda^k T^* M$ der alternierenden k-Formen auf M *ist disjunkte Vereinigung*

$$\Lambda^k T^* M = \coprod_{p \in M} \Lambda^k T_p^* M = \{(p, \xi) \mid p \in M, \xi \in \Lambda^k T_p^* M\}.$$

Die Menge $\Lambda^k T^* M$ *trägt die Struktur einer* $\left(n + \binom{n}{k}\right)$*-dimensionalen Mannigfaltigkeit, sodass* $\pi : (p, \xi) \in \Lambda^k T_p^* M \mapsto p$ *eine surjektive Submersion ist.*

Beweis. Wir gehen analog zum Tangentialbündel vor und konstruieren einen glatten Atlas auf $\Lambda^k T^* M$ aus einem Atlas auf M. Sei dazu $\mathcal{A}$ ein Atlas für M und wähle eine Karte $(U_\alpha, \phi_\alpha) \in \mathcal{A}$. Sei $\{e_i\}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$ mit dualer Basis $\{\omega^i\}$. Nach Korollar 2.9 ist für festes $q \in U$ die Abbildung

$$(\mathbb{R}^n)^* \to T_q^* M \qquad \sum_i \xi_i \omega^i \mapsto \sum_{i=1}^n \xi_i dx^i|_q$$

ein linearer Isomorphismus. Es folgt, dass auch die Abbildung

$$\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^* \to \Lambda^k T_q^* M \qquad \sum_{\mathbf{i}} \xi_{\mathbf{i}} \omega^{\mathbf{i}} \mapsto \sum_{\mathbf{i}} \xi_{\mathbf{i}} dx^{\mathbf{i}}|_q.$$

ein linearer Isomorphismus ist. Wir benutzen die Inverse dieses Isomorphismus und definieren nun

$$\phi_\alpha^{\Lambda^k T^* M} : \pi^{-1}(U_\alpha) \to \phi_\alpha(U_\alpha) \times \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*, \quad \phi_\alpha^{\Lambda^k T^* M}(q, \xi) = \left(\phi_\alpha(p), \sum_{\mathbf{i}} \xi \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha^{\mathbf{i}}} \right) \omega^{\mathbf{i}} \right).$$

Dies liefert also eine Familie von Karten $\tilde{\mathcal{A}}^k = \{(\pi^{-1}(U_\alpha), \phi_\alpha^{\Lambda^k T^* M}) \mid (U_\alpha, \phi_\alpha) \in \mathcal{A}\}$. Wir behaupten, dass $\tilde{\mathcal{A}}^k$ ein Atlas für $\Lambda^k T_p^* M$ ist.

(A1): Dies ist klarerweise erfüllt, weil die U_α's M überdecken und π surjektiv ist.

(A2): Es gilt $\phi_\alpha^{\Lambda^k T^* M}(\pi^{-1}(U_\alpha) \cap \pi^{-1}(U_\beta)) = \phi_\alpha^{\Lambda^k T^* M}(\pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)) = \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \times \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$ und dies ist eine offene Menge in $\mathbb{R}^{n+\binom{n}{k}}$.

(A3): Wir müssen zeigen, dass die Übergangsfunktionen glatt sind. Seien dazu $\phi_\alpha^{\Lambda^k T^* M} : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ und $\phi_\beta^{\Lambda^k T^* M} : \pi^{-1}(U_\beta) \to U_\beta \times \mathbb{R}^n$ zwei Karten aus $\tilde{\mathcal{A}}$. Dann gilt nach Lemma 2.20

$$(dx_\beta^m)_q = \sum_{l=1}^m \frac{\partial x_\beta^m}{\partial x_\alpha^l}|_q (dx_\alpha^l)_q = \sum_{l=1}^m (d\phi_{\beta\alpha}|_{\phi_\alpha(q)})_l^m (dx_\alpha^l)_q = (d\phi_{\beta\alpha})^* dx_\alpha^m.$$

Damit können wir rechnen mit $q = \phi_\beta^{-1}(u)$ und Lemma 5.9 (angewandt auf $A = (d\phi_{\beta\alpha})_{\phi_\alpha(q)}$)

$$\begin{aligned} \phi_\alpha^{\Lambda^k T^* M} \circ (\phi_\beta^{\Lambda^k T^* M})^{-1}(u, \xi) &= \phi_\alpha^{\Lambda^k T^* M} \left(\phi_\beta^{-1}(u), \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \xi_{i_1 \ldots i_k} d(x_\beta^{i_1})_q \wedge \cdots \wedge d(x_\beta^{i_k})_q \right) \\ &= \phi_\alpha^{\Lambda^k T^* M} \left(\phi_\beta^{-1}(u), \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \xi_{i_1 \ldots i_k} (d\phi_{\beta\alpha})^* d(x_\alpha^{i_1})_q \wedge \cdots \wedge (d\phi_{\beta\alpha})^* d(x_\alpha^{i_k})_p \right) \\ &= \big(\phi_{\alpha\beta}(u), \Lambda^k (d\phi_{\beta\alpha})^*(\xi) \big) \end{aligned}$$

Die Karten sind also glatt verträglich, da die Kartenwechsel auf M C^∞-differenzierbar sind und weil die Matrix-Einträge von $\Lambda^k(d\phi_{\beta\alpha})^*$ Polynome in den Matrixeinträgen von $(d\phi_{\beta\alpha})$ sind, und diese sind glatt. Damit haben wir also $\Lambda^k T^* M$ mit der Struktur einer $\big(n + \binom{n}{k}\big)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit versehen.

Der Beweis, dass π eine Submersion ist, veläuft komplett analog zum Fall des Tangentialbündels, da π wieder lokal durch die Projektion auf den ersten Faktor gegeben ist. □

Definition 5.12 (Differentialform)**.** Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $U \subset M$ offen. Eine *Differentialform vom Grad k auf U* ist eine glatte Abbildung

$$\xi : U \to \Lambda^k T^* M$$

mit

$$\pi \circ \xi = \mathrm{id}$$

(also $\xi_p = \xi(p) \in \Lambda^k T_p^* M$ für jedes $p \in U$). Wir schreiben $k = \deg \xi$. Wir bezeichnen mit $\Omega^k(U)$ die Menge aller Differentialformen vom Grad k auf U und schreiben

$$\Omega^*(M) = \oplus_{k=0}^n \Omega^k(M),$$

wobei wir $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$ gesetzt haben.

Definition 5.13. Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten und $F : M \to N$ glatt. Dann definiert F eine natürliche Abbildung

$$F^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M), \quad (F^*\xi)_p = \Lambda^k(dF_p)^*(\xi_{F(p)}),$$

also für $X_1, \dots, X_k \in T_pM$

$$(F^*\xi)_p(X_1, \dots, X_k) = \xi_{F(p)}(dF_p(X_1), \dots, dF_p(X_k)).$$

Dabei gilt für $f \in \Omega^0(M) = C^\infty(M)$ per Definition $F^*f = f \circ F$.

Lemma 5.14. *Seien M, N und P glatte Mannigfaltigkeiten und $F : M \to N$, $G : N \to P$ glatt. Dann gilt für $\xi, \eta \in \Omega^*(N)$*

$$F^*(\xi \wedge \eta) = F^*\xi \wedge F^*\eta$$

und für $\eta \in \Omega^*(P)$

$$(G \circ F)^*\eta = F^*(G^*\eta).$$

Beweis. Übung, folgt direkt aus den entsprechenden Eigenschaften für lineare Abbildungen zusammen mit der Kettenregel: Sei also $\eta \in \Omega^k(P)$, dann gilt für festes $p \in M$ und Tangentialvektoren $X_1, \dots, X_k \in T_pM$

$$\begin{aligned}
(G \circ F)^*\eta(X_1, \dots, X_k) &= \eta_{G(F(p))}(d(G \circ F)_p(X_1), \dots, d(G \circ F)_p(X_k)) \\
&= \eta_{G(F(p))}(dG_{F(p)}(dF_p(X_1)), \dots, dG_{F(p)}(dF_p(X_k))) \\
&= (G^*\eta)_{F(p)}(dF_p(X_1), \dots, dF_p(X_k)) \\
&= F^*(G^*\eta)_p(X_1, \dots, X_k).
\end{aligned}$$

□

Beispiel 5.15. Sei $f \in C^\infty(N) = \Omega^0(N)$. Dann gilt für ein Vektorfeld $X \in \Gamma(TM)$ mit der Kettenregel

$$(F^*df)(X) = df(dF(X)) = d(f \circ F)(X) = d(F^*f)(X).$$

5.3 Äußere Ableitung

Definition und Satz 5.16. *Sei M^n eine glatte Mannigfaltigkeit. Es existiert genau ein linearer Operator, genannt die* äußere Ableitung *oder das* äußere Differential

$$d : \Omega^*(M) \to \Omega^*(M),$$

mit folgenden Eigenschaften:

a) d hat Grad 1, das heißt $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ für alle $k = 0, \dots, n$.

b) Falls $f \in C^\infty(M) = \Omega^0(M)$, so ist $df \in \Omega^1(M)$ das Differential von f.

c) $d(\xi \wedge \eta) = (d\xi) \wedge \eta + (-1)^k \xi \wedge d\eta$, falls $\xi \in \Omega^k(M)$.

d) $d^2 = d \circ d = 0$

Beispiel 5.17 (grad,div,rot)**.** Sei $M = \mathbb{R}^3$. Wir wollen sehen wie wir in diesem Fall die äußere Ableitung für Funktionen, 1-Formen und 2-Formen anhand der obigen Rechenregeln ausrechnen können.

Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Dann ist df per Definition das Differential, d.h.

$$df = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial u^j} du^j,$$

die Komponenten von df bilden also den aus der Analysis II bekannten *Gradienten* von f.

Ist nun

$$\xi = \xi_1 du^1 + \xi_2 du^2 + \xi_3 du^3$$

mit $\xi_i \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ eine 1-Form, dann gilt mit den Eigenschaften $b), c), d)$.

$$\begin{aligned} d\xi &= d\xi_1 \wedge du^1 + d\xi_2 \wedge du^2 + d\xi_3 \wedge du^3 \\ &= \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial u^1} - \frac{\partial \xi_1}{\partial u^2}\right) du^1 \wedge du^2 + \left(\frac{\partial \xi_3}{\partial u^1} - \frac{\partial \xi_1}{\partial u^3}\right) du^1 \wedge du^3 + \left(\frac{\partial \xi_3}{\partial u^2} - \frac{\partial \xi_2}{\partial u^3}\right) du^2 \wedge du^3. \end{aligned}$$

Wenn wir uns (ξ_1, ξ_2, ξ_3) als Vektorfeld auf $\mathbb{R}^3$ vorstellen, so entspricht dies gerade der *Rotation*. Die Formel $d^2 f = 0$ ist also die Aussage, dass die *Rotation eines Gradienten verschwindet.*

Sei nun zum Schluss

$$\eta = \eta_1 du^2 \wedge du^3 + \eta_2 du^3 \wedge du^1 + \eta_3 du^1 \wedge du^2$$

mit $\eta_i \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ eine 2-Form auf $\mathbb{R}^3$. Dann gilt

$$\begin{aligned} d\eta &= d\eta_1 \wedge du^2 \wedge du^3 + d\eta_2 \wedge du^3 \wedge du^1 + d\eta_3 \wedge du^1 \wedge du^2 \\ &= \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial u^1} + \frac{\partial \eta_2}{\partial u^2} + \frac{\partial \eta_3}{\partial u^3}\right) du^1 \wedge du^2 \wedge du^3, \end{aligned}$$

und dies können wir als die Divergenz des Vektorfeldes mit Komponenten (η_1, η_2, η_3) auffassen. Die Relation $d^2 = 0$ sagt in diesem Fall, dass die *Vektorfelder der Form* $X = \mathrm{rot}(Y)$ *divergenzfrei sind.*

Beweis von Definition und Satz 5.16. Sei $\xi \in \Omega^k(M)$. Wir zeigen zunächst, dass jeder Operator mit den genannten vier Eigenschaften lokal ist, in dem Sinne dass wenn $\xi = 0$ ist auf einer offenen Menge $U \subset M$, so ist auch $d\xi = 0$ auf U. Sei dazu $p \in U$ und sei $h \in C^\infty(M)$ eine Funktion mit kompaktem Träger in U, die in einer Umgebung $V \subset U$ von p konstant gleich eins ist. Dann gilt $h\xi = 0 \in \Omega^k(M)$ und deshalb wegen der Linearität von d auf $d(h\xi) = 0$.

Es folgt aus b), dass $dh_p = 0$ ist und wegen c) folgt weiter für

$$0 = (d(h\xi))_p = dh_p \wedge \xi_p - h(p)(d\xi)_p = (d\xi)_p.$$

Sei nun $\xi \in \Omega^k(M)$ beliebig. Sei (U, ϕ) eine Karte. Dann können wir auf U

$$\xi = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \xi_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

mit Funktionen $\xi_{i_1 \dots i_k} \in C^\infty(U)$ schreiben. Wir definieren nun auf U

$$d\xi = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} d\xi_{i_1 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k},$$

wobei also $d\xi_{i_1 \dots i_k}$ das übliche Differential ist.

Wir zeigen zunächst, dass d die gewünschten Eigenschaften hat, anschließend beweisen wir, dass d nicht von der Wahl der Karte (U, ϕ) abhängt.

a) Dies ist nach Definition klar

b) Ebenso klar.

c) Ist $\eta \in \Omega^l(M)$ eine weitere Differentialform, dann gilt auf U

$$\eta = \sum_{j_1 < \cdots < j_l} \eta_{j_1 \dots j_l} dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l}$$

und daher folgt aus der Leibnizregel für Funktionen

$$\begin{aligned}
d(\xi\wedge\eta) &= d\left(\sum \xi_{i_1\dots i_k}\eta_{j_1\dots j_l}dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}\wedge dx^{j_1}\wedge\dots\wedge dx^{j_l}\right)\\
&= \sum (d\xi_{i_1\dots i_k}\eta_{j_1\dots j_l}+\xi_{i_1\dots i_k}d\eta_{j_1\dots j_l})\wedge dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}\wedge dx^{j_1}\wedge\dots\wedge dx^{j_l}\\
&= \sum \eta_{j_1\dots j_l}d\xi_{i_1\dots i_k}\wedge dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}\wedge dx^{j_1}\wedge\dots\wedge dx^{j_l}+\\
&\quad+\sum(-1)^k\xi_{i_1\dots i_k}dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}\wedge d\eta_{j_1\dots j_l}\wedge dx^{j_1}\wedge\dots\wedge dx^{j_l}\\
&= d\xi\wedge\eta+(-1)^k\xi\wedge d\eta.
\end{aligned}$$

d) Wir rechnen

$$\begin{aligned}
d(d\xi) &= d\left(\sum_{i_1<\dots<i_k} d\xi_{i_1\dots i_k}\wedge dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}\right)\\
&= d\left(\sum_{i,i_1<\dots<i_k}\frac{\partial\xi_{i_1\dots i_k}}{\partial x^i}dx^i\wedge dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}\right)\\
&= \sum_{i,i_1<\dots<i_k} d\left(\frac{\partial\xi_{i_1\dots i_k}}{\partial x^i}\right)\wedge dx^i\wedge dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}\\
&= \sum_{j,i,i_1<\dots<i_k}\frac{\partial^2\xi_{i_1\dots i_k}}{\partial x^j\partial x^i}dx^j\wedge dx^i\wedge dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}\\
&= 0,
\end{aligned}$$

da $\frac{\partial^2\xi_{i_1\dots i_k}}{\partial x^j\partial x^i}$ symmetrisch ist in i,j, der Ausdruck $dx^j\wedge dx^i$ aber schiefsymmetrisch ist in i,j.

Sei nun $(\tilde U,\tilde\phi)$ ein weitere Karte um p. Dann können wir auf $\tilde U$

$$\xi=\sum_{i_1<\dots<i_k}\tilde\xi_{i_1\dots i_k}d\tilde x^{i_1}\wedge\dots\wedge d\tilde x^{i_k}$$

schreiben. Wir definieren nun wieder

$$\tilde d\xi=\sum_{i_1<\dots<i_k}d\tilde\xi_{i_1\dots i_k}\wedge d\tilde x^{i_1}\wedge\dots\wedge d\tilde x^{i_k}.$$

Wir benutzen nun die Eigenschaften $a)$ bis $d)$ aus dem Satz und rechnen auf $U\cap\tilde U$

$$\begin{aligned}
d\xi &= d\left(\sum_{i_1<\dots<i_k}\tilde\xi_{i_1\dots i_k}d\tilde x^{i_1}\wedge\dots\wedge d\tilde x^{i_k}\right)\\
&=^{b),c)} \sum_{i_1<\dots<i_k}d\tilde\xi_{i_1\dots i_k}\wedge(d\tilde x^{i_1}\wedge\dots\wedge d\tilde x^{i_k})+\sum_{i_1<\dots<i_k}\tilde\xi_{i_1\dots i_k}d(d\tilde x^{i_1}\wedge\dots\wedge d\tilde x^{i_k})\\
&=^{c)} \tilde d\xi+\sum_{j,i_1<\dots<i_k}\tilde\xi_{i_1\dots i_k}(-1)^j(d\tilde x^{i_1}\wedge\dots\wedge(d^2\tilde x^{i_j})\wedge\dots\wedge d\tilde x^{i_k})\\
&=^{d)} \tilde d\xi.
\end{aligned}$$

Damit haben wir die Wohldefiniertheit von d gezeigt. □

Proposition 5.18. *Seien M,N glatte Mannigfaltigkeiten und sei $F:M\to N$ glatt. Dann gilt für $\xi\in\Omega^*(N)$*

$$F^*(d\xi)=d(F^*\xi).$$

Beweis. Sei $f \in C^\infty(N) = \Omega^0(N)$. Dann gilt für ein Vektorfeld $X \in \Gamma(TM)$ mit der Kettenregel

$$(F^*df)(X) = df(dF(X)) = d(f \circ F)(X) = d(F^*f)(X).$$

Damit folgt aus Lemma 5.14 für

$$\xi = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \xi_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots dx^{i_k}$$

$$F^*\xi = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} (F^*\xi_{i_1 \ldots i_k}) F^*(dx^{i_1}) \wedge \cdots \wedge F^*(dx^{i_k}) = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} (F^*\xi_{i_1 \ldots i_k}) d(F^*x^{i_1}) \wedge \cdots \wedge d(F^*x^{i_k})$$

und damit mit $d^2 = 0$

$$\begin{aligned} d(F^*\xi) &= \sum_{i_1 < \cdots < i_k} d(F^*\xi_{i_1 \ldots i_k}) \wedge d(F^*x^{i_1}) \wedge \cdots \wedge d(F^*x^{i_k}) \\ &= \sum_{i_1 < \cdots < i_k} F^*(d\xi_{i_1 \ldots i_k}) \wedge F^*(dx^{i_1}) \wedge \cdots \wedge F^*(dx^{i_k}) \\ &= F^*(d\xi). \end{aligned}$$

□

5.4 Die Lie-Ableitung für Differentialformen

Sei M^n eine glatte Mannigfaltigkeit, $\xi \in \Omega^k(M)$ eine Differentialform und $X \in \Gamma(TM)$ ein Vektorfeld mit Fluss Φ^X. Wir wollen ξ längs X ableiten. Wir würden uns eine Differentialform gern als eine Funktion mit Werten in einem Vektorraum vorstellen. Wäre dies der Fall, so könnten wir einfach ableiten, indem wir $\frac{d}{dt}|_{t=0}\xi_{\Phi_t^X(p)}$ berechnen. Das Problem ist nun wie im Fall der Lie-Ableitung für Vektorfelder, dass für $p \neq q$ die "Werte"ξ_p und ξ_q nicht im gleichen Vektorraum liegen. Für festes $p \in M$ definiert die Zuordnung $t \mapsto ((\Phi_t^X)^*\xi)_p$ eine Kurve in dem festen Vektorraum $\Lambda^k T_p^* M \cong \mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$. Diese können wir wie in Analysis II ableiten.

Definition und Satz 5.19. *Sei $X \in \Gamma(TM)$ ein Vektorfeld auf der glatten Mannigfaltigkeit M mit zugehörigem Fluss Φ^X. Für $\xi \in \Omega^k(M)$ definieren wir die* Lie-Ableitung $\mathcal{L}_X\xi \in \Omega^k(M)$ von ξ *längs X durch*

$$\mathcal{L}_X\xi = \frac{d}{dt}|_{t=0}(\Phi_t^X)^*\xi \in \Omega^k(M).$$

Dann gilt

a) $\mathcal{L}_X f = X(f)$ für alle $f \in C^\infty(M)$.

b) $\mathcal{L}_X(\xi \wedge \eta) = \mathcal{L}_X\xi \wedge \eta + \xi \wedge \mathcal{L}_X\eta$.

c) $\mathcal{L}_X(d\xi) = d(\mathcal{L}_X\xi)$.

Beweis. a) Es ist nach Definition des Differentials

$$\mathcal{L}_X f(p) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(\Phi_t^X)^* f = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(\Phi_t^X(p)) = X_p(f)$$

für alle $p \in M$ und $f \in C^\infty(M)$.

b) Die Identität $\mathcal{L}_X(\xi \wedge \eta) = \mathcal{L}_X\xi \wedge \eta + \xi \wedge \mathcal{L}_X\eta$ folgt direkt aus der Produktregel und Lemma 5.14, da $(\Phi_t^X)^*(\xi \wedge \eta) = (\Phi_t^X)^*\xi \wedge (\Phi_t^X)^*\eta$.

c) Die Identität $\mathcal{L}_X(d\xi) = d(\mathcal{L}_X\xi)$ gilt, da Pullback und äußere Ableitung vertauschen, $d((\Phi_t^X)^*\xi) = (\Phi_t^X)^*(d\xi)$.

□

Definition 5.20. Sei X ein Vektorfeld auf der glatten Mannigfaltigkeit M^n. Dann definiert X eine Abbildung $i_X : \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$ durch

$$i_X\xi(X_1, \dots, X_{k-1}) = \xi(X, X_1, \dots, X_{k-1}),$$

genannt das *innere Produkt von X mit ξ.*

Lemma 5.21. *Es gilt*

a) $i_X df = X(f)$ *für* $f \in C^\infty(M)$.

b) $i_X(i_X\xi) = 0$ *für alle* $\xi \in \Omega^*(M)$.

c) $i_X(\xi^1 \wedge \dots \wedge \xi^k) = \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1}\xi^j(X)\xi^1 \wedge \dots \wedge \widehat{\xi^j} \wedge \dots \wedge \xi^k$ *für* $\xi^1, \dots, \xi^k \in \Omega^1(M)$.

d) $i_X(\xi \wedge \eta) = (i_X\xi) \wedge \eta + (-1)^k \xi \wedge (i_X\eta)$ *für* $\xi \in \Omega^k(M)$ *und* $\eta \in \Omega^*(M)$.

e) Ist Φ^X *der Fluss zu* X*, dann gilt* $(\Phi_t^X)^*(i_X\xi) = i_X(\Phi_t^X)^*\xi$ *für* $\xi \in \Omega^*(M)$.

Beweis. a) Es ist nach Definition des Differentials $i_X df = df(X) = X(f)$ für $f \in C^\infty(M)$.

b) $i_X(i_X\xi) = \xi(X, X, \dots) = 0$ für alle $\xi \in \Omega^*(M)$, da ξ alternierend ist.

c) Wir erinnern uns an die Definition des Wedge-Produkts und benutzen die Laplace-Entwicklung der Determinante

$$\begin{aligned} i_{X_1}(\xi^1 \wedge \dots \wedge \xi^k)(X_2, \dots, X_k) &= (\xi^1 \wedge \dots \wedge \xi^k)(X_1, X_2, \dots, X_k) \\ &= \det(\xi^i(X_j)) \\ &= \sum_{l=1}^k (-1)^{l+1}\xi^l(X_1)\det(\xi^i(X_j)_{i\neq l, j>1}) \\ &= \sum_{l=1}^k (-1)^{l+1}\xi^l(X_1))(\xi^1 \wedge \dots \wedge \widehat{\xi^j} \wedge \dots \wedge \xi^k)(X_2, \dots, X_k). \end{aligned}$$

d) Die Identität $i_X(\xi \wedge \eta) = (i_X\xi) \wedge \eta + (-1)^k \xi \wedge (i_X\eta)$ für alle $\xi \in \Omega^k(M)$ und $\eta \in \Omega^*(M)$ folgt nun direkt aus Teil c), da jede Form als Linearkombination von zerlegbaren Formen geschrieben werden kann: Sei $\xi = \xi^1 \wedge \dots \wedge \xi^k, \eta = \eta^1 \wedge \dots \wedge \eta^l$ mit $\xi^i, \eta^j \in \Omega^1(M)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} i_X(\xi \wedge \eta) &= \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1}\xi^j(X)\xi^1 \wedge \dots \wedge \widehat{\xi^j} \wedge \dots \wedge \xi^k \wedge \eta \\ &\quad + \sum_{j=1}^l (-1)^{k+j-1}\eta^j(X)\xi \wedge \eta^1 \wedge \dots \wedge \widehat{\eta^j} \wedge \dots \wedge \eta^k \\ &= i_X\xi \wedge \eta + (-1)^k \xi \wedge i_X\eta \end{aligned}$$

e) Sei $\xi \in \Omega^*(M)$ und seien $X_2, \dots, X_k \in \Gamma(TM)$. Dann gilt für $p \in M$ $X_{\Phi_t^X(p)} = d\Phi_t^X(X_p)$ (Satz **??**) und damit

$$\begin{aligned} ((\Phi_t^X)^*(i_X\xi))_p(X_2(p), \dots, X_k(p)) &= (i_X\xi)_{\Phi_t^X(p)}(d(\Phi_t^X)_p(X_2(p)) \dots, d(\Phi_t^X)_p(X_k(p))) \\ &= \xi_{\Phi_t^X(p)}(X_{\Phi_t^X(p)}, d(\Phi_t^X)_p(X_2(p)) \dots, d(\Phi_t^X)_p(X_k(p))) \\ &= \xi_{\Phi_t^X(p)}(d(\Phi_t^X)_p(X(p)), d(\Phi_t^X)_p(X_2(p)) \dots, d(\Phi_t^X)_p(X_k(p))) \\ &= ((\Phi_t^X)^*\xi)_p(X, X_2, \dots, X_k) \\ &= i_X((\Phi_t^X)^*\xi)_p(X_2, \dots, X_k). \end{aligned}$$

□

Satz 5.22 (Cartan-Formel). *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $X \in \Gamma(TM)$ ein Vektorfeld und $\xi \in \Omega^k(M)$. Dann gilt*

$$\mathcal{L}_X\xi = d(i_X\xi) + i_X d\xi.$$

Beweis. Wir bemerken zunächst, dass falls $\xi \in \Omega^k(M)$, dann ist auch

$$\mathcal{R}_X\xi := di_X\xi + i_X d\xi \in \Omega^k(M).$$

Wir zeigen nun, dass für $\mathcal{R}_X$ die Identitäten $a), b), c)$ aus Definition 5.19 gelten. Daraus folgern wir dann $\mathcal{L}_X = \mathcal{R}_X$.

a) Sei $f \in C^\infty(M)$. Dann gilt wegen $i_X f = 0$

$$\mathcal{R}_X(f) = i_X df = X(f).$$

b) Um die Produktregel zu zeigen, benutzen wir die entsprechenden Eigenschaften der äußeren Ableitung und der Abbildung i_X. Sei $\xi \in \Omega^K(M)$ und $\eta \in \Omega^*(M)$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_X(\xi\wedge\eta) &= d(i_X(\xi\wedge\eta)) + i_X(d(\xi\wedge\eta)) \\
&= d((i_X\xi)\wedge\eta + (-1)^k\xi\wedge i_X\eta) + i_X((d\xi)\wedge\eta + (-1)^k\xi\wedge d\eta) \\
&= (di_X\xi)\wedge\eta + (-1)^{k-1}(i_X\xi)\wedge d\eta + (-1)^k(d\xi\wedge i_X\eta + (-1)^k\xi\wedge di_X\eta) + \\
&\quad +(i_X d\xi)\wedge\eta + (-1)^{k+1}(d\xi\wedge i_X\eta) + (-1)^k(i_X\xi\wedge d\eta + (-1)^k\xi\wedge i_X d\eta) \\
&= \mathcal{R}_X\xi\wedge\eta + \xi\wedge\mathcal{R}_X\eta.
\end{aligned}$$

c) Zum Schluss zeigen wir noch, dass $\mathcal{R}_X$ mit d vertauscht. Sei dazu wieder $\xi \in \Omega^k(M)$. Dann rechnen wir unter Beachtung von $d^2 = 0$

$$\mathcal{R}_X d\xi = d(i_X d\xi) + i_x d(d\xi) = d(i_X d\xi) = d(i_X d\xi + di_X\xi) = d\mathcal{R}_X\xi.$$

Also stimmen $\mathcal{R}_X$ und $\mathcal{L}_X$ auf Funktionen überein, vertauschen mit d und erfüllen die gleichen Produktregeln. Damit müssen sie auf Ausdrücken

$$\sum_{i_1<\cdots<i_k} \xi_{i_1\ldots i_k} dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}$$

übereinstimmen. Es folgt $\mathcal{L}_X = \mathcal{R}_X$ wie gewünscht, da man jede Form lokal in dieser Gestalt schreiben kann. □

5.5 DeRham-Kohomologie

Wir haben gesehen, dass die äußere Ableitung gewisse Resultate aus der Vektoranalysis reproduziert. Für $M = \mathbb{R}^3$ haben wir nun in der Vektoranalysis schon folgendes Resultat gesehen (das *Poincaré-Lemma*): Ist $U \subset \mathbb{R}^3$ sternförmig und ist X ein Vektorfeld mit $\mathrm{rot}(X) = 0$, dann existiert ein *Potential* für X, also eine Funktion $f \in C^\infty(U)$ sodass $X = \mathrm{grad}(f)$.

In der Sprache der Differentialformen bedeutet dies, dass man eine geschlossene 1-Form ξ auf U in der Form $\xi = df$ mit $f \in C^\infty(U)$ schreiben kann. Wegen $d^2 = 0$ erfüllt $\xi = df$ auf jeden Fall $d\xi = 0$. Die Frage ist also, ob der Kern von $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}$ gleich dem Bild von $d : \Omega^{k-1}(M) \to \Omega^k(M)$ ist. Der Unterschied zwischen diesen Räumen wird von den *deRham-Kohomologie-Gruppen* gemessen. Die genaue Definition ist die folgende.

Definition 5.23. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Die *k-te DeRahm-Kohomologie-Gruppe von M* ist der Quotienten-Vektorraum

$$H^k(M) = \frac{\ker(d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M))}{\mathrm{im}(d : \Omega^{k-1}(M) \to \Omega^k(M))}.$$

Die *k-te Bettizahl von M* ist die Dimension von $H^k(M)$, falls dies endlich ist.

Definition 5.24. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $\xi \in \Omega^k(M)$. Wir nennen ξ *geschlossen*, falls $d\xi = 0$. Wir nennen ξ *exakt*, falls eine Differentialform $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$ existiert mit $\xi = d\eta$.

Bemerkung 5.25. a) Nach Definition ist $H^0(M) = \{f \in C^\infty(M) \mid df = 0\}$ gleich dem Raum der glatten lokalkonstanten Funktionen.

b) Ist M kompakt und ist $l \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von M, so gilt $H^0(M) \cong \mathbb{R}^l$ (l ist endlich, da M kompakt ist und das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt). Man kann zeigen, dass für kompaktes M alle weiteren Kohomologie-Gruppen endlich dimensional sind. Der Beweis benutzt nicht-triviale Analysis und kann in diesem Kurs nicht gegeben werden.

c) Da $\Omega^k(M) = 0$ für $k > \dim M = n$, gilt auch $H^k(M) = 0$ in diesem Fall.

Proposition 5.26. *Die Zuordnung*

$$\cup : H^k(M) \times H^l(M) \to H^{k+l}(M) \quad ([\xi], [\eta]) \mapsto [\xi] \cup [\eta] := [\xi \wedge \eta]$$

ist wohldefiniert und definiert eine bilineare assoziative Produktoperation auf $H^*(M) = \bigoplus_{k=0}^n H^k(M)$, *genannt das* Cup-Produkt. *Insbesondere ist* $H^*(M)$ *ein (nicht-kommutativer) Ring.*

Beweis. Zunächst gilt wegen $d\xi = 0 = d\eta$ und der Produktregel

$$d(\xi \wedge \eta) = d\xi \wedge \eta + (-1)^k \xi \wedge d\eta = 0.$$

Also definiert $\xi \wedge \eta$ eine Klasse in $H^{k+l}(M)$. Wir müssen zeigen, dass diese Klasse nicht von der Wahl der Repräsentanten abhängt. Sei $\tilde{\xi} = \xi + d\mu, \tilde{\eta} = \eta + d\nu$ mit $\mu \in \Omega^{k-1}(M)$, $\nu \in \Omega^{l-1}(M)$.

$$\begin{aligned}\tilde{\xi} \wedge \tilde{\eta} &= (\xi + d\mu) \wedge (\eta + d\nu) \\ &= \xi \wedge \eta + d\mu \wedge \eta + \xi \wedge d\nu + d\mu \wedge d\nu \\ &= \xi \wedge \eta + d(\mu \wedge \eta + (-1)^k \xi \wedge \nu + \mu \wedge d\nu).\end{aligned}$$

Daher definieren $\xi \wedge \eta$ und $\tilde{\xi} \wedge \tilde{\eta}$ die gleiche Klasse in $H^{k+l}(M)$. □

Lemma 5.27. *Seien M, N, P glatte Mannigfaltigkeiten und $F : M \to N$ glatt. Dann induziert F eine lineare Abbildung*

$$F^* : H^*(N) \to H^*(M), \quad F^*[\xi] = [F^*\xi]$$

und es gilt:

a) F^* ist ein Ring-Homomorphismus, $F^*[\xi] \cup F^*[\eta] = F^*([\xi] \cup [\eta])$.

b) Ist $G : N \to P$ eine weitere glatte Abbildung, dann gilt $(G \circ F)^* = F^* \circ G^* : H^*(P) \to H^*(M)$.

c) Ist außerdem F ein Diffeomorphismus, dann ist F^* ein Ring-Isomorphismus.

Beweis. Wir müssen wieder die Wohldefiniertheit zeigen, welche aber direkt folgt, weil nach Proposition 5.18 F^* und d kommutieren:

$$[F^*(\xi + d\xi)] = [F^*\xi + F^*d\xi] = [F^*\xi + dF^*\xi] = [F^*\xi].$$

Die Eigenschaften folgen sofort aus den entsprechenden Eigenschaften des Pullbacks auf Formen, siehe Lemma 5.14. □

Proposition 5.28. *Sei M^n eine glatte Mannigfaltigkeit und betrachte für $t \in [0, 1]$ die Abbildung*

$$j_t : M \to \mathbb{R} \times M, \quad j_t(p) = (t, p).$$

Dann gilt

$$j_0^* = j_1^* : H^*(\mathbb{R} \times M) \to H^*(M).$$

Beweis. Betrachte das Vektorfeld $X = \frac{\partial}{\partial t}$ auf $\mathbb{R}\times M$. Dann ist der Fluss $\Phi^X : \mathbb{R}\times(\mathbb{R}\times M) \to \mathbb{R}\times M$ gegeben durch

$$\Phi^X(t,(s,p)) = (s+t,p).$$

Also gilt

$$j_t(p) = \Phi^X(t,(0,p)) = \Phi^X_t \circ j_0.$$

Sei $\xi \in \Omega^k(\mathbb{R}\times M)$ mit $d\xi = 0$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
j_1^*\xi - j_0^*\xi &= \int_0^1 \frac{d}{dt} j_t^*\xi dt \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt}(\Phi^X_t \circ j_0)^*\xi dt \\
&= \int_0^1 \frac{d}{ds}|_{s=0}\left((\Phi^X_{t+s}\circ j_0)^*\xi\right) dt \\
&= \int_0^1 \frac{d}{ds}|_{s=0}\left((\Phi^X_s \circ \Phi^X_t \circ j_0)^*\xi\right) dt \\
&= \int_0^1 (\Phi^X_t \circ j_0)^* \left(\frac{d}{ds}|_{s=0}(\Phi^X_s)^*\xi\right) dt \\
&= \int_0^1 j_t^*\left(\mathcal{L}_X\xi\right) dt \\
&= \int_0^1 j_t^*\left(d i_X\xi\right) dt \\
&= d\underbrace{\left(\int_0^1 j_t^*(i_X\xi)dt\right)}_{:=\gamma}.
\end{aligned}$$

Also gilt

$$j_1^*\xi = j_0^*\xi + d\gamma$$

und daher

$$[j_1^*\xi] = [j_0^*\xi] \in H^k(M).$$

□

Definition 5.29. Seien M, N glatte Mannigfaltigkeiten. Wir sagen eine Abbildung $h : [0,1]\times M \to N$ ist glatt, falls ein $\epsilon > 0$ und eine glatte Abbildung $\tilde{h} : (-\epsilon, 1+\epsilon)\times M \to N$ exisiteren mit $\tilde{h} = h$ auf $[0,1]\times M$.

Definition 5.30. Seien $F, G : M \to N$ zwei glatte Abbildungen. Wir sagen F, G sind homotop, falls für eine glatte Abbildung $h : [0,1]\times M \to N$ existiert, sodass für alle $p \in M$

$$h_0(p) = h(0,p) = F(p), \qquad h_1(p) = h(1,p) = G(p).$$

Wir schreiben $F \simeq G$.

Satz 5.31. *Seien M, N glatte Mannigfaltigkeiten und $F, G : M \to N$ glatt und homotop. Dann ist*

$$F^* = G^* : H^*(N) \to H^*(M).$$

Homotope Abbildungen induzieren also die gleichen Abbildungen auf der Kohomologie.

Beweis. Sei $h : [0,1]\times M \to N$ eine Homotopie zwischen F, G. Mit der Notation aus Proposition 5.28 gilt

$$F = h \circ j_0, \quad G = h \circ j_1.$$

Daraus folgt nun für $F^* : H^*(N) \to H^*(M)$

$$F^* = (h \circ j_0)^* = j_0^* h^* = j_1^* h^* = (h \circ j_1)^* = G^*.$$

□

Korollar 5.32 (Poincaré-Lemma)**.** *Es gilt $H^k(\mathbb{R}^n) = 0$ für alle $k > 0$.*

Beweis. Wende den vorherigen Satz auf $h(t,p) = tp$ an. Dann gilt $h_1 = \mathrm{id}$ und h_0 ist konstant. Also gilt für $k > 0$ auf der Kohomologie $\mathrm{id} = h_1^* = h_0^* = 0$. Die Aussage folgt. □

Bemerkung 5.33.

a) Eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt *sternförmig*, falls ein $p_0 \in U$ existiert, sodass für jedes $p \in U$ und jedes $t \in [0,1]$ der Punkt $p_0 + t(p - p_0)$ in U enthalten ist. Der obige Beweis mit $h(tx,p) = p_0 + t(p - p_0)$ zeigt, dass $H^k(U) = 0$ ist für $k > 0$. Dies ist das klassische Poincaré-Lemma.

b) Zwei Mannigfaltigkeiten M, N heißen *homotop*, geschrieben $M \simeq N$ falls glatte Abbildungen $F : M \to N$ und $G : N \to M$ existieren, sodass $F \circ G \simeq \mathrm{id}_N$ und $G \circ F \simeq \mathrm{id}_M$ gilt. Wir sehen, dass für homotope und Mannigfaltigkeiten die DeRham-Kohomologie-Ringe isomorph sein müssen. Anders gesagt: Falls $H^*(M) \not\cong H^*(N)$, dann können M, N nicht homotop sein.

Beispiel 5.34.

a) Sei $M = S^2$ und sei $\xi \in \Omega^1(S^2)$ geschlossen, $d\xi = 0$. Da die stereographischen Karten $\phi_N : U_N = S^2 \setminus \{N\} \cong \mathbb{R}^2$ und $\phi_S : U_S = S^2 \setminus \{S\} \cong \mathbb{R}^2$ Diffeomorphismen sind, existieren also nach dem Poincaré-Lemma glatte Funktionen f_N, f_S auf U_N, U_S mit

$$df_N = \xi|_{U_N}, \quad df_S = \xi|_{U_S}.$$

Auf $U_N \cap U_S$ gilt dann $d(f_N - f_S) = \xi - \xi = 0$. Da $U_N \cap U_S \cong \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ zusammenhängend ist, gilt also $f_N - f_S = c$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$. Die Funktion f gegeben durch

$$f(p) = \begin{cases} f_N(p) & p \in U_N \\ f_S(p) + c & p \in U_S \end{cases}$$

ist also eine glatte Funktion auf ganz S^2, die $df = \xi$ erfüllt. Also ist $H^1(S^2) = 0$.

b) Sei $M = S^1 \subset \mathbb{R}^2$. Wir definieren eine 1-Form $\xi \in \Omega^1(S^1)$ wie folgt: Sei $p = (p^1, p^2) \in S^1$ mit $p^i \neq 0$. Dann ist mit $j \neq i$ $x^j(p^1, p^2) = p^j$ eine Karte für S^1 in einer Umgebung U von p. Wir setzen auf U

$$\xi = \frac{(-1)^i}{x^i} dx^j$$

Wegen $S^1 = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid (x^1)(p)^2 + (x^2)(p)^2 = 1\}$ gilt auf S^1

$$x^1 dx^1 + x^2 dx^2 = 0.$$

Damit folgt, auf $\{p \in S^1 \mid p^1 \neq 0 \neq p^2\}$

$$\frac{1}{x^2} dx^1 = \frac{1}{x^2} \frac{-x^2}{x^1} dx^2 = -\frac{1}{x^1} dx^2.$$

Also liefert dies eine global definierte Differentialform ξ, die an keinem Punkt von S^1 verschwindet. Da S^1 ein-dimensional ist, ist ξ außerdem geschlossen. Ist nun andererseits $f \in C^\infty(S^1)$ eine glatte Funktion, so nimmt f ihr Minimum und Maximum an, da S^1 kompakt ist. Also existiert mindestens ein Punkt in $p \in S^1$ mit $df_p = 0$. Also kann ξ nicht exakt sein. Es folgt $H^1(S^1) \neq 0$.

6 Integration auf Mannigfaltigkeiten

Wir starten mit einer Erinnerung an Analysis III.

Satz 6.1 (Transformationsformel)**.** *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ glatt, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus. Dann gilt*

$$\int_U f(\varphi(u))|\det(d\varphi(u))|du^1 \dots du^n = \int_{\varphi(U)} f(u)du^1 \dots du^n.$$

Sei M^n eine glatte Mannigfaltigkeit, (U_α, ϕ_α) eine Karte und $f \in C^\infty(M)$ mit kompaktem Träger in U_α. Dann könnten wir versuchen, das Integral von f zu erklären, indem wir

$$\int_M f = \int_{\phi_\alpha(U_\alpha)} (f \circ \phi_\alpha^{-1})du^1 \dots du^n$$

setzen. Ist nun (U_β, ϕ_β) eine weitere Karte, sodass U_β $\operatorname{supp}(f)$ enthält, dann erhalten wir mit der Transformationsformel

$$\begin{aligned} \int_{\phi_\beta(U_\beta)} (f \circ \phi_\beta^{-1})du^1 \dots du^n &= \int_{\phi_\beta(U_\beta)} (f \circ \phi_\alpha^{-1} \circ \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1})du^1 \dots du^n \\ &= \int_{\phi_\alpha(U_\alpha)} (f \circ \phi_\alpha^{-1})|\det(d(\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}))|du^1 \dots du^n. \end{aligned}$$

Wir sehen also, dass wir Funktionen auf einer glatten Mannigfaltigkeit nicht koordinaten-unabhängig integrieren können, *Differentialformen* dagegen schon!

Sei nun $\omega \in \Omega^n(M)$ mit kompaktem Träger in U_α. Wir schreiben für $p \in U_\alpha$

$$\omega_p = f_\alpha(p)(dx_\alpha^1 \wedge \dots \wedge dx_\alpha^n)_p,$$

wobei $f_\alpha \in C^\infty(U_\alpha)$ kompakten Träger in U_α hat, und definieren:

$$\int_M \omega = \int_{\phi_\alpha(U_\alpha)} f_\alpha(\phi_\alpha^{-1}(u))du^1 \dots du^n.$$

Auch dieser Ausdruck hängt a priori von der Wahl der Karte (U_α, ϕ_α) ab. Sei also (U_β, ϕ_β) eine weitere Karte, sodass U_β den Träger von ω enthält. Dann können wir

$$\omega_p = f_\beta(p)(dx_\beta^1 \wedge \dots \wedge dx_\beta^n)_p = f_\beta(p)\det(d(\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}))dx_\alpha^1 \wedge \dots \wedge dx_\alpha^n$$

schreiben und es gilt daher $f_\alpha(p) = f_\beta(p)\det(d(\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}))_{\phi_\alpha(p)}$. Aus der Transformationsformel folgt nun

$$\begin{aligned} \int_{\phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)} f_\beta(\phi_\beta^{-1})du^1 \dots du^n &= \int_{\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)} f_\beta(\phi_\beta^{-1} \circ \phi_{\beta\alpha})|\det(d\phi_{\beta\alpha})|du^1 \dots du^n \\ &= \int_{\phi_\alpha(U_\alpha)} (f_\alpha \circ \phi_\alpha^{-1})du^1 \dots du^n. \end{aligned}$$

Damit ist also $\int_M \omega$ unabhängig von der Wahl der Karte, *falls* $\det(d(\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})_u)$ *positiv ist.*

6.1 Orientierbarkeit

Definition 6.2. Sei M^n eine glatte Mannigfaltigkeit. Wir nennen M *orientierbar*, falls ein Atlas $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ existiert mit

$$\det(d(\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})_u) > 0, \quad \text{für alle } \alpha, \beta,\ u \in \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta).$$

Ein solcher Atlas heißt *orientiert.*

Satz 6.3. *Eine zusammenhängende glatte Mannigfaltigkeit M^n ist genau dann orientierbar, wenn eine n-Form $\omega \in \Omega^n(M)$ existiert, die nirgends verschwindet, also $\omega_p \neq 0$ für alle $p \in M$. Ein solches ω nennen wir auch* Volumenform*.*

Beweis. Sei eine Volumenform $\omega \in \Omega^n(M)$ auf M^n gegeben und sei $\{(U_\alpha, \phi_\alpha = (x^1_\alpha, \dots, x^n_\alpha))\}$ ein beliebiger Atlas. Dann können wir auf U_α

$$\omega_p = f_\alpha(p)(dx^1_\alpha \wedge \cdots \wedge dx^n_\alpha)_p$$

schreiben. Indem wir, falls nötig, die Komponenten x^k_α umordnen, können wir erreichen, dass die Funktionen $f_\alpha \in C^\infty(U_\alpha)$ strikt positiv sind. Dann gilt aber nach den Transformationsregeln für n-Formen

$$f_\alpha(p) = f_\beta(p)\det(d(\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}))_{\phi_\alpha(p)}$$

Da $f_\beta(p) > 0$ und $f_\alpha(p) > 0$, muss also auch $\det(d\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})_{\phi_\alpha(p)} > 0$ für alle $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ gelten.

Sei nun ein orientierter Atlas $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ für M gewählt. Dann definieren wir

$$\omega_\alpha = dx^1_\alpha \wedge \cdots \wedge dx^n_\alpha.$$

Wir wählen nun eine Teilung der Eins (siehe Satz 1.50) $\{\psi_\alpha\}$ zu der Überdeckung $\{U_\alpha\}$ und setzen

$$\omega = \sum_\alpha \psi_\alpha \omega_\alpha.$$

Sei nun $p \in M$ gegeben, dann gilt $p \in U_\alpha$ und $\psi_\alpha(p) > 0$ für ein α. Wir können dann ω_p als die folgende *endliche* Summe schreiben

$$\omega_p = \sum_{\beta : p \in U_\beta} \psi_\beta(p)(\omega_\beta)_p = \left(\sum_{\beta : p \in U_\beta} \psi_\beta(p)\det(d\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})_{\phi_\alpha(p)} \right)(\omega_\alpha)_p.$$

Es folgt $\omega_p \neq 0$, da $\det(d\phi_{\beta\alpha}) > 0$ und die ψ_β's nicht-negativ sind und $\psi_\alpha(p) > 0$. □

Definition 6.4. Eine *Orientierung* auf M ist eine Äquivalenzklasse von Volumenformen, wobei wir ω und $\tilde{\omega}$ äquivalent nennen, falls $\omega = f\tilde{\omega}$ für eine strikt positive Funktion $f \in C^\infty(M)$ gilt.

Bemerkung 6.5. Ist M zusammenhängend und orientierbar mit Volumenform ω, dann gibt es genau zwei Orientierungen und diese werden von $\pm\omega$ repräsentiert.

Definition 6.6. Seien M, N eine orientierte Mannigfaltigkeiten mit Volumenformen ω_M, ω_N. Ein lokaler Diffeomorphismus $F : M \to N$ heißt *orientierungserhaltend*, falls $F^*\omega_N = f\omega_M$ mit einer strikt positiven Funktion $f \in C^\infty(M)$ gilt.

Beispiel 6.7. Betrachte $\mathbb{R}^n$ mit Standardkarte $(x^1, \dots, x^n)$ und sei $M = S^{n-1} = F^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^n$, wobei $F = \frac{1}{2}(\sum_k (x^k)^2 - 1)$. Dann gilt an der Stelle $p \in \mathbb{R}^n$

$$dF_p = \sum_k p^k dx^k$$

und wir setzen auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$\omega = \frac{1}{\sum_{k=1}^n (x^k)^2} \sum_k (-1)^{k-1} x^k dx^1 \wedge \ldots \widehat{dx^k} \cdots \wedge dx^n.$$

Dann gilt für $p \in S^{n-1}$

$$dF_p \wedge \omega_p = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} p^k p^l dx^l \wedge dx^1 \wedge \ldots \widehat{dx^k} \cdots \wedge dx^n = \left(\sum_{k=1}^n (p^k)^2 \right) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Ist nun $X_1, \dots, X_{n-1}$ eine Basis für $T_pS^{n-1} = \ker(dF_p)$ und $X \in T_p\mathbb{R}^n$ ein weiterer Tangentialvektor mit $dF_p(X) = 1 \neq 0$, so ist $(X, X_1, \dots, X_{n-1})$ eine Basis für $T_p\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ und es gilt wegen $dF_p(X_i) = 0$ für $i = 1, \dots, n-1$

$$0 \neq dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n(X, X_1, \dots, X_{n-1}) = dF_p \wedge \omega_p(X, X_1, \dots, X_{n-1}) = \omega_p(X_1, \dots, X_{n-1}).$$

Also ist $\omega_p \neq 0$ für alle $p \in S^{n-1}$ und wir sehen, dass S^{n-1} orientierbar ist.

Beispiel 6.8 (Antipodenabbildung auf S^{n-1})**.** Die Antipodenabbildung $\sigma : S^{n-1} \to S^{n-1}$ ist gegeben durch $\sigma(p) = -p$. Wir berechnen $\sigma^*\omega$. Sei $p \in S^{n-1}$ mit $p^i \neq 0$ für ein $i \in \{1, \dots, n\}$. Dann existiert eine Umgebung U um p, sodass $(x^1, \dots, \widehat{x^i}, \dots, x^n)$ Koordinaten um p sind. Auf S^{n-1} gilt außerdem

$$\sum_k x^k dx^k = 0,$$

also gilt auf $U \subset S^{n-1}$

$$dx^i = \frac{-1}{x^i}(\sum_{k \neq i} x^k dx^k).$$

Damit folgt auf U

$$dx^1 \wedge \dots \widehat{dx^k} \dots \wedge dx^n = \frac{-(-1)^{k-i} x^k}{x^i} dx^1 \wedge \dots \widehat{dx^i} \dots \wedge dx^n$$

$$\begin{aligned}
\omega &= \sum_k (-1)^{k-1} x^k dx^1 \wedge \dots \widehat{dx^k} \dots \wedge dx^n \\
&= \left(\sum_k (-1)^{k-k+i} \frac{(x^k)^2}{x^i} \right) dx^1 \wedge \dots \widehat{dx^i} \dots \wedge dx^n \\
&= \frac{(-1)^i}{x^i} dx^1 \wedge \dots \widehat{dx^i} \dots \wedge dx^n.
\end{aligned}$$

Es folgt nun

$$\sigma^*\omega = \sigma^* \left(\frac{(-1)^i}{x^i} dx^1 \wedge \dots \widehat{dx^i} \dots \wedge dx^n \right) = \frac{(-1)^i}{(-x^i)} d(-x^1) \wedge \dots \widehat{dx^i} \dots \wedge d(-x^n) = (-1)^n \omega.$$

Die Antipoden-Abbildung $\sigma : S^{n-1} \to S^{n-1}$ ist also genau dann orientierungserhaltend, wenn n gerade ist.

Die Konstruktion der Volumenform auf der Sphäre lässt sich auf allgemeinere Untermannigfaltigkeiten in $\mathbb{R}^n$ verallgemeinern, die als Urbild eines regulären Wertes gegeben sind.

Satz 6.9. *Sei $F \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ glatt, und sei 0 ein regulärer Wert. Dann ist die $(n-m)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit $M = F^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^n$ orientierbar.*

Beweis. Seien $(x^1, \dots, x^n)$ die Standard-Koordinaten und sei $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ die Standard-Volumenform auf $\mathbb{R}^n$. Wir schreiben $F = (F^1, \dots, F^m)$. Sei $p \in M = F^{-1}(0)$. Da 0 ein regulärer Wert für F ist, sind die Zeilen der Jacobi-Matrix dF_p linear unabhängig, d.h.

$$dF_p^1 \wedge \dots \wedge dF_p^m = \sum_{i_1 < \dots < i_m} (dF_p)_{i_1 \dots i_m} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_m} \neq 0,$$

wobei wir $(dF_p)_{i_1 \dots i_m}$ für die Determinante der $m \times m$-Matrix schreiben, die man aus den mit i_j indizierten Spalten von dF erhält (siehe 5.7).

Wir setzen nun auf der offenen Menge $U = \{q \in \mathbb{R}^n \mid dF_q^1 \wedge \dots \wedge dF_q^m \neq 0\} \subset \mathbb{R}^n$

$$\omega = \frac{1}{\sum_{i_1 < \dots < i_m} (dF_{i_1 \dots i_m})^2} \sum_{i_1 < \dots < i_m} (-1)^{\sigma(i)} dF_{i_1 \dots i_m} dx^{j_1^i} \wedge \dots \wedge dx^{j_{n-m}^i},$$

wobei wir die Indizes $j^{i_1}, \ldots, j^{i_{m-n}}$ und das Vorzeichen $(-1)^{\sigma(i)}$ so wählen, dass

$$dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_m} \wedge dx^{j_1^i} \wedge \cdots \wedge dx^{j_{n-m}^i} = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

gilt. Dann gilt nach Konstruktion für alle $p \in M$

$$dF_p^1 \wedge \cdots \wedge dF_p^m \wedge \omega_p = dx_p^1 \wedge \cdots \wedge dx_p^n,$$

und damit induziert ω^M eine nicht-verschwindende $(n-m)$-Form auf M. $\square$

Bemerkung 6.10. Im Fall $m = 1$ ist ω im obigen Beweis gegeben durch

$$\omega = \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\frac{\partial F}{\partial x^i})^2} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{\partial F}{\partial x^k} dx^1 \wedge \ldots \widehat{dx^k} \wedge dx^n$$

was mit $F = \frac{1}{2}\left(\sum_i (x^i)^2 - 1\right)$ die Formel für die Volumenform auf S^{n-1} ergibt.

6.2 Die Definition des Integrals

Definition 6.11. Sei zunächst $M = \mathbb{R}^n$ mit der Standardkarte $(u^1, \ldots, u^n)$ und Standardvolumenform $du^1 \wedge \cdots \wedge du^n$. Sei weiter $\omega \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$ mit kompaktem Träger. Es gilt also $\omega = f du^1 \wedge \cdots \wedge du^n$. Dann setzen wir

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega = \int_{\mathbb{R}^n} f(u) du^1 \ldots du^n.$$

Ist nun M^n eine orientierte glatte Mannigfaltigkeit, (U, ϕ) eine orientierte Karte und $\omega \in \Omega^n(M)$ mit kompaktem Träger in U, dann setzen wir

$$\int_M \omega = \int_{\phi(U)} (\phi^{-1})^* \omega.$$

Explizit bedeutet das, dass wir $\omega = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ mit $f \in C^\infty(U)$ schreiben und dann

$$\int_M \omega = \int_{\phi(U)} (f \circ \phi^{-1}) du^1 \ldots du^n$$

setzen.

Definition und Satz 6.12. *Sei M^n eine glatte orientierte Mannigfaltigkeit und sei $\omega \in \Omega^n(M)$ mit kompaktem Träger. Wir wählen eine endliche Familie von orientierten Karten $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$, die* supp$(\omega)$ *überdecken und eine zugehörige Teilung der Eins $\{\psi_\alpha\}$. Dann hat $\omega_\alpha = \psi_\alpha \omega$ kompakten Träger in U_α. Wir setzen*

$$\int_M \omega = \sum_\alpha \int_M \omega_\alpha = \sum_\alpha \int_{\phi_\alpha(U_\alpha)} (\phi_\alpha^{-1})^* \omega_\alpha.$$

Dies ist wohldefiniert, hängt also nicht von der Wahl der Karten und der Teilung der Eins ab.

Beweis. Sei $\{\tilde{U}_\beta, \tilde{\phi}_\beta\}$ eine weitere Familie von orientierten Karten, die supp(ω) überdecken und sei $\{\tilde{\psi}_\beta\}$ eine zugehörige Teilung der Eins. Dann gilt

$$\omega = \left(\sum_\beta \tilde{\psi}_\beta\right)\left(\sum_\alpha \psi_\alpha\right)\omega = \sum_{\beta,\alpha} \tilde{\psi}_\beta \psi_\alpha \omega.$$

Dann hat $\psi_\alpha \psi_\beta \omega$ kompakten Träger in $U_\alpha \cap U_\beta$ und es gilt daher

$$\sum_\alpha \int_M \psi_\alpha \omega = \sum_{\beta,\alpha} \int_M \tilde{\psi}_\beta \psi_\alpha \omega.$$

Die Diskussion am Anfang des Kapitels zeigt, dass

$$\int_M \tilde{\psi}_\beta \psi_\alpha \omega$$

nicht von der Wahl der Karten abhängt, daher gilt

$$\sum_\beta \int_M \tilde{\psi}_\beta \omega = \sum_{\beta,\alpha} \int_M \tilde{\psi}_\beta \psi_\alpha \omega = \sum_\alpha \int_M \psi_\alpha \omega.$$

□

Proposition 6.13. *Sei $M = (M, \omega_0)$ eine glatte orientierte Mannigfaltigkeit mit Volumenform ω_0. Dann hat das Integral für $n-$Formen die folgenden Eigenschaften*

a) $\int_M : \Omega^n(M) \to \mathbb{R}$ ist linear: $\int_M a\omega + b\nu = a\int_M \omega + b\int_M \nu$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$, $\omega, \nu \in \Omega^n(M)$ mit kompaktem Träger.

b) Wählen wir die andere Orientierung $\bar{M} = (M, -\omega)$, so gilt $\int_{\bar{M}} \omega = -\int_M \omega$ für alle $\omega \in \Omega^n(M)$ mit kompaktem Träger.

c) Falls M kompakt ist, gilt $\int_M \omega_0 > 0$.

d) Ist $F : M \to N$ ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus, dann gilt für jedes $\omega \in \Omega^n(N)$ mit kompaktem Träger

$$\int_M F^*\omega = \int_N \omega.$$

Beweis. a), b) Folgt jeweils sofort aus der Definition und den entsprechenden Eigenschaften des Integrals auf $\mathbb{R}^n$.

c) Wähle einen endlichen orientierten Atlas $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ für M mit Teilung der Eins $\{\psi_\alpha\}$. Dann gilt

$$\int_M \omega_0 = \sum_\alpha \int_M \psi_\alpha \omega_0 > 0,$$

da $\psi_\alpha \geq 0$ gilt und zu jedem α ein $p \in M$ existiert mit $\psi_\alpha(p) > 0$.

d) Ist $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ eine endliche Familie von orientierten Karten auf N, die $\mathrm{supp}(\omega)$ überdecken und $\{\psi_\alpha\}$ eine zugehörige Teilung der Eins, dann ist $\{(F^{-1}(U_\alpha), \phi_\alpha \circ F)\}$ eine Familie von orientierten Karten auf M, die $\mathrm{supp}(F^*\omega) \subset M$ überdecken und $\{\psi_\alpha \circ F\}$ ist eine zugehörige Teilung der Eins. Dann folgt mit $\psi_\alpha \omega = \omega_\alpha$

$$\begin{aligned}
\int_M F^*\omega &= \sum_\alpha \int_M (\psi_\alpha \circ F) F^*\omega \\
&= \sum_\alpha \int_M F^*(\omega_\alpha) \\
&= \sum_\alpha \int_{(\phi_\alpha \circ F)(F^{-1}(U_\alpha))} ((\phi_\alpha \circ F)^{-1})^* F^*\omega_\alpha \\
&= \sum_\alpha \int_{\phi_\alpha(U_\alpha)} (\phi_\alpha^{-1})^* (F^{-1})^* F^*\omega_\alpha \\
&= \sum_\alpha \int_{\phi_\alpha(U_\alpha)} (\phi_\alpha^{-1})^* \omega_\alpha \\
&= \int_N \omega.
\end{aligned}$$

□

Definition 6.14. Sei M^n eine glatte orientierte Mannigfaltigkeit mit orientiertem Atlas $\mathcal{A}$. Eine Teilmenge $A \subset M$ heißt *Nullmenge* falls $\phi_\alpha(U_\alpha \cap A) \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge im Lebesgueschen Sinne ist.

Proposition 6.15. *Sei M eine orientierte Mannigfaltigkeit, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $F : U \to F(U) \subset M$ ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus, sodass $A = M \setminus F(U)$ eine Nullmenge ist. Dann gilt für $\omega \in \Omega^n(M)$ mit kompaktem Träger*

$$\int_M \omega = \int_U F^*\omega$$

Beweis. Wir wählen endlich viele orientierte Karten (U_α, ϕ_α), sodass die U_α's den Träger von ω überdecken mit zugehöriger Teilung der Eins $\{\psi_\alpha\}$. Dann gilt mit $\omega_\alpha = \psi_\alpha \omega$

$$\int_M \omega = \sum_\alpha \int_M \psi_\alpha \omega = \sum_\alpha \int_{\phi_\alpha(U_\alpha)} (\phi_\alpha^{-1})^* \omega_\alpha.$$

Setze $V_\alpha = \phi_\alpha(U_\alpha \cap F(U))$, dies ist eine offene Menge in $\mathbb{R}^n$. Dann ist die Menge $\phi_\alpha(U_\alpha) \setminus V_\alpha = \phi_\alpha(A \cap U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge und daher

$$\int_{\phi_\alpha(U_\alpha)} (\phi_\alpha^{-1})^* \omega_\alpha = \int_{V_\alpha} (\phi_\alpha^{-1})^* \omega_\alpha.$$

Da F orientierungserhaltend ist und (U_α, ϕ_α) eine orientierte Karte ist, ist die Verkettung $\phi_\alpha \circ F : F^{-1}(U_\alpha) \to V_\alpha$ ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus und es gilt daher wegen der Invarianz des Integrals

$$\int_U F^*\omega_\alpha = \int_{F^{-1}(U_\alpha)} F^*\omega_\alpha = \int_{F^{-1}(U_\alpha)} (\phi_\alpha \circ F)^* (\phi_\alpha^{-1})^* \omega_\alpha = \int_{V_\alpha} (\phi_\alpha^{-1})^* \omega_\alpha = \int_M \omega_\alpha.$$

Damit folgt

$$\int_M \omega = \sum_\alpha \int_M \omega_\alpha = \sum_\alpha \int_U F^*\omega_\alpha = \int_U \sum_\alpha F^*\omega_\alpha = \int_U F^* \left(\sum_\alpha \omega_\alpha \right) = \int_U F^*\omega.$$

□

6.3 Der Satz von Stokes

Definition 6.16 (Mannigfaltigkeit mit Rand)**.** Sei M eine Menge. Wir nennen M eine *n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand* falls eine Familie von Karten $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha) \mid \alpha \in I\}$ existiert, sodass Folgendes gilt:

(MR1) $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$.

(MR2) $\phi_\alpha : U_\alpha \to \phi(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n_+$ ist bijektiv und für alle $\alpha, \beta \in I$ ist $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n_+ = \{u \in \mathbb{R}^n \mid u^n \geq 0\}$ offen.

(MR3) $\phi_{\alpha\beta} = \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ ist glatt, d.h. es gibt eine offene Menge $\tilde{U}_{\alpha\beta} \subset \mathbb{R}^n$, die $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ enthält und eine glatte Abbildung $\tilde{\phi}_{\alpha\beta} : \tilde{U}_{\alpha\beta} \to \mathbb{R}^n$ die auf $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ mit $\phi_{\alpha\beta}$ übereinstimmt.

Der *Rand* von M ist gegeben durch

$$\partial M := \{p \in M \mid x_\alpha^n(p) = 0 \ \forall \alpha \in I \text{ mit } p \in U_\alpha\}.$$

Mit dem Atlas $\mathcal{A}^{\partial M} = \{(U_\alpha \cap \partial M, \phi_\alpha^{\partial M} = (x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^{n-1})|_{\partial M})\}$ wird ∂M selbst zu einer glatten Mannigfaltigkeit.

Lemma 6.17 (Randorientierung)**.** *Sei M^n eine orientierte glatte Mannigfaltigkeit mit Rand. Dann existiert eine induzierte Orientierung auf dem Rand ∂M.*

Beweis. Wir müssen die Existenz eines orientierten Atlas für ∂M nachweisen. Sei dazu $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ ein orientierter Atlas für M.

Damit ist also

$$\mathcal{A}^{\partial M} = \{(U_\alpha \cap \partial M, \phi_\alpha^{\partial M} = (x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^{n-1})|_{\partial M})\}$$

ein Atlas für ∂M und wir behaupten, dass dieser orientiert ist.

Es gilt nach Konstruktion auf $U_\alpha \cap U_\beta$

$$x_\beta^n(\phi_\alpha^{-1}(u^1, \dots, u^{n-1}, 0)) = 0.$$

Die Jacobi-Matrix der Übergangsfunktion $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ an der Stelle $u = (u^1, \dots, u^{n-1}, 0) \in \mathbb{R}^n$ hat also die Gestalt

$$d(\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_\beta^1}{\partial x_\alpha^1} & \frac{\partial x_\beta^1}{\partial x_\alpha^2} & \dots & \frac{\partial x_\beta^1}{\partial x_\alpha^n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_\beta^{n-1}}{\partial x_\alpha^1} & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial x_\beta^n}{\partial x_\alpha^n} \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist invertierbar und hat positive Determinante, daher muss $\frac{\partial x_\beta^n}{\partial x_\alpha^n} \neq 0$ an der Stelle $(u^1, \dots, u^{n-1}, 0)$ gelten. Da $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ den Halbraum $\mathbb{R}_+^n$ auf sich selbst abbildet und $x_\beta^n \circ \phi_\alpha^{-1} = 0$ auf $\mathbb{R}^{n-1} = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$, muss also $\frac{\partial x_\beta^n}{\partial x_\alpha^n} > 0$ sein. Damit gilt an einem Punkt $u = (u^1, \dots, u^{n-1}, 0)$ mit $\phi_{\beta\alpha}^{\partial M} = \phi_\beta^{\partial M} \circ (\phi_\alpha^{\partial M})^{-1}$

$$0 < \det(d\phi_{\beta\alpha})_u = (\partial_n \phi_{\beta\alpha}^n) \det(d\phi_{\beta\alpha}^{\partial M})_u.$$

Da $\frac{\partial x_\beta^n}{\partial x_\alpha^n}(u) > 0$, muss also auch $\det(d\phi_{\beta\alpha}^{\partial M})_u > 0$ sein und wir sehen, dass der Atlas $\mathcal{A}^{\partial M}$ orientiert ist. □

Bemerkung 6.18. Wir haben nun zwei Orientierungen auf ∂M zur Auswahl, und wir wählen die Orientierung auf ∂M wie folgt. Falls (U_α, ϕ_α) eine Karte für M ist mit $\partial M = \{x_\alpha^n = 0\}$, $M = \{x_\alpha^n \geq 0\}$, sodass $dx_\alpha^1 \wedge \dots \wedge dx_\alpha^n$ die Orientierung auf M repräsentiert, dann repräsentiert $(-1)^n(dx_\alpha^1 \wedge \dots \wedge dx_\alpha^{n-1})|_{\partial M}$ die induzierte Orientierung auf ∂M.

Satz 6.19 (Stokes)**.** *Sei M^n eine glatte orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand und sei $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$ mit kompaktem Träger. Dann gilt*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Ist $\partial M = \emptyset$, dann gilt insbesondere

$$\int_M d\omega = 0.$$

Beweis. Wir wählen endlich viele Karten (U_α, ϕ_α), $\alpha = 1, \dots, N$, sodass die Kartengebiete U_α den Träger $\operatorname{supp}(\omega)$ überdecken und wählen eine Teilung der Eins $\{\psi_\alpha\}$ zu der Familie $\{U_\alpha \mid \alpha = 1, \dots, N\}$. Dann gilt

$$\omega = \sum_{\alpha=1}^N \psi_\alpha \omega = \sum_{\alpha=1}^N \omega_\alpha,$$

wobei $\omega_\alpha = \psi_\alpha \omega$ kompakten Träger im Kartengebiet U_α hat. Wir können die $(n-1)$-Form ω_α also auf U_α in der Form

$$\omega_\alpha = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} f_{\alpha,i} dx_\alpha^1 \wedge \dots \widehat{dx_\alpha^i} \dots \wedge dx_\alpha^n$$

schreiben, mit glatten Funktionen $f_{\alpha,i} \in C^\infty(U_\alpha)$ mit kompaktem Träger $\mathrm{supp}(f_{\alpha,i}) \subset U_\alpha$. Dann ist

$$d\omega_\alpha = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_{\alpha,i}}{\partial x_\alpha^i}\right) dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n.$$

Es gilt dann nach der Definition des Integrals, da $d\omega_\alpha$ kompakten Träger in U_α hat,

$$\int_M d\omega_\alpha = \int_{\phi_\alpha(U_\alpha)} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_{\alpha,i}}{\partial x_\alpha^i}|_{\phi_\alpha^{-1}(u)}\right) du^1 \dots du^n.$$

Wir definieren glatte Funktionen $g_{\alpha,i} = f_{\alpha,i} \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha) \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger. Dann gilt also

$$\int_M d\omega_\alpha = \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}_+^n} \partial_i g_{\alpha,i}(u) du^1 \dots du^n.$$

Wir wenden nun den Satz von Fubini an um die Integrale auf der rechten Seite als iterierte Integrale zu berechnen. Sei zunächst $i < n$, dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \partial_i g_{\alpha,i} du^1 \dots du^n = \int_{\mathbb{R}_+^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^\infty \partial_i g_{\alpha,i} du^i\right) du^1 \dots \widehat{du^i} \dots du^n = \int_{\mathbb{R}_+^{n-1}} [g_{\alpha,i}]_{-\infty}^\infty du^1 \dots \widehat{du^i} \dots du^n$$

und dies verschwindet, weil die Funktion $t \mapsto g_{\alpha,i}(u^1, \dots, u^{i-1}, t, u^{i+1}, \dots, u^n)$ kompakten Träger hat. Für $i = n$ erhalten wir

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \partial_n g_{\alpha,n} du^1 \dots du^n = \int_{\mathbb{R}_+^{n-1}} \left(\int_0^\infty \partial_n g_{\alpha,n} du^n\right) du^1 \dots du^{n-1} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} [g_{\alpha,n}]_0^\infty du^1 \dots du^{n-1},$$

und dies ergibt

$$\int_M d\omega_\alpha = \int_{\mathbb{R}_+^n} \partial_n g_{\alpha,n} du^1 \dots du^n = -\int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_{\alpha,n}(u^1, \dots, u^{n-1}, 0) du^1 \dots du^{n-1}.$$

Andererseits ist wegen $\partial M \cap U_\alpha = \{x_\alpha^n = 0\}$

$$\omega_\alpha|_{\partial M} = (-1)^{n-1} f_{\alpha,n}|_{\partial M} dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^{n-1} = -f_{\alpha,n}|_{\partial M} (-1)^n dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^{n-1}$$

und damit

$$\int_{\partial M} \omega_\alpha = -\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_{\alpha,n}(\phi_\alpha^{-1}(u)) du^1 \dots du^{n-1} = -\int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_{\alpha,n}(u) du^1 \dots du^{n-1} = \int_M d\omega_\alpha.$$

Insgesamt erhalten wir also wegen

$$d\omega = d\left(\sum_{\alpha=1}^N \psi_\alpha\right)\omega = \sum_{\alpha=1}^N d(\psi_\alpha \omega) = \sum_{\alpha=1}^N d\omega_\alpha$$

damit wegen der Linearität des Integrals

$$\int_M d\omega = \sum_{\alpha=1}^N \int_M d\omega_\alpha = \sum_{\alpha=1}^N \int_{\partial M} \omega_\alpha = \int_{\partial M} \omega$$

und der Satz ist bewiesen. □

6.4 Anwendungen

Korollar 6.20. *Sei M^n kompakt und orientiert. Dann gilt $H^n(M) \neq 0$.*

Beweis. Sei $\omega \in \Omega^n(M)$ eine Volumenform. Dann ist ω geschlossen, definiert also eine Klasse in $H^n(M)$ und es gilt nach Proposition 6.13

$$\int_M \omega > 0.$$

Nach dem Satz von Stokes ist das Integral einer exakten Form aber gleich Null. Damit kann ω nicht exakt sein und es folgt $[\omega] \neq 0 \in H^n(M)$. □

Satz 6.21. *Jedes Vektorfeld auf einer Sphäre S^{2m} gerader Dimension hat mindestens eine Nullstelle.*

Beweis. Sei $X \in \Gamma(S^n)$ ein Vektorfeld mit $X_p \neq 0$ für alle $p \in S^n$. Wir interpretieren X als eine Abbildung

$$X : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}, \quad X_p = (X^1(p), \dots, X^{n+1}(p))$$

mit

$$\sum_{i=1}^{n+1} X^i(p)p^i = 0.$$

Da X nirgends verschwindet, können wir annehmen, dass $\|X_p\|^2 = \sum_{i=1}^{n+1}(X^i(p))^2 = 1$ gilt. Wir betrachten nun die Abbildung

$$H : \mathbb{R} \times S^n \to S^n, \quad H(t,p) = H_t(p) = \cos(t)p + \sin(t)X(p).$$

Es gilt nun

$$H_0 = \mathrm{id}, \qquad H_\pi = -\mathrm{id}.$$

Sei nun ω die Standardvolumenform auf S^n. Es gilt nun aber wie im obigen Beweis von Korollar 6.20

$$\int_{S^n} \omega > 0,$$

und daher $[\omega] \neq 0 \in H^n(S^n)$. Andererseits gilt wegen der Homotopie-Invarianz (Satz 5.31),

$$[\omega] = [H_0^*\omega] = [H_\pi^*\omega] = (-1)^{n+1}[\omega].$$

Ist n gerade, dann impliziert dies $[\omega] = 0$, Widerspruch. □

Satz 6.22 (Browerscher Fixpunktsatz). *Sei $M = \overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^n$ die abgeschlossene Einheitskugel und $F : M \to M$ glatt. Dann hat F einen Fixpunkt, d.h. es existiert $p \in \overline{B_1(0)}$ mit $F(p) = p$.*

Beweis. Angenommen, es existiert keine Fixpunkt für F, also $F(p) \neq p$ für alle $p \in M$. Zu $p \in M$ können wir dann die orientierte Halbgerade $g_p(t) = F(p) + t(p - F(p)), t \geq 0$ betrachten. Sei $G : M \to S^{n-1} = \partial M$, die Abbildung, die $p \in B_1(0)$ den eindeutigen Schnittpunkt von g_p mit $\partial M = S^{n-1}$ mit $t > 0$ zuordnet. Dann ist G glatt und es gilt $G(p) = p$ für $p \in S^{n-1} = \partial M$. Sei ω eine Volumenform auf S^{n-1} mit

$$\int_{S^{n-1}} \omega = 1.$$

Dann gilt wegen $d\omega = 0$

$$1 = \int_{S^{n-1}} \omega = \int_{S^{n-1}} G^*\omega = \int_M dG^*\omega = \int_M G^*(d\omega) = 0,$$

Widerspruch. □

Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Menge. Indem wir Multiplikation mit i durch die Matrix $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ repräsentieren, erhalten wir eine Identifikation $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$. Eine Funktion $f = (f^1, f^2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ heißt *holomorph*, falls die Jacobi-Matrix von F mit J vertauscht, d.h.

$$df_u \circ J = J \circ df_u$$

für alle $u \in \mathbb{R}^2$. Man sieht schnell, dass diese Bedingung äquivalent ist zu den *Cauchy-Riemann Differentialgleichungen*

$$\partial_1 f^2 + \partial_2 f^1 = 0, \quad \partial_1 f^1 - \partial_2 f^2 = 0.$$

Lemma 6.23. *Ist $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, dann ist die $\mathbb{C}$-wertige 1-Form fdz geschlossen.*

Beweis. Es ist $fdz = (f^1 + if^2)(du^1 + idu^2)$ und daher

$$\begin{aligned} d(fdz) &= df \wedge dz \\ &= (df^1 + idf^2) \wedge (du^1 + idu^2) \\ &= (df^1 \wedge du^1 - df^2 \wedge du^2) + i(df^1 \wedge du^2 + df^2 \wedge du^1) \\ &= ((-\partial_2 f^1 - \partial_1 f^2) + i(\partial_1 f^1 - \partial_2 f^2))du^1 \wedge du^2 \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck verschwindet also genau dann, wenn die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen erfüllt sind. □

Satz 6.24 (Cauchysche Intergralformel)**.** *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt für $z \in U$ und $\epsilon > 0$ $\overline{B_\epsilon(z)} \subset U$*

$$f(z) = \int_{\partial B_\epsilon(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Beweis. Betrachte die Funktion $g(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{z-\zeta}$. Nach dem Lemma wissen wir, dass die 1-Form $gd\zeta$ geschlossen ist. Dann gilt

$$0 = \int_{B_\epsilon(z)} d(gd\zeta) = \lim_{\delta \to 0} \int_{B_\epsilon(z) \setminus B_\delta(z)} d(gd\zeta) = \int_{\partial B_\epsilon(z)} gd\zeta - \lim_{\delta \to 0} \int_{\partial B_\delta(z)} gd\zeta.$$

Wir müssen also zeigen, dass

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{\partial B_\delta(z_0)} gd\zeta = 2\pi i f(z)$$

gilt. Es ist aber nun mit der Parametrisierung $(0, 2\pi) \to \partial B_\delta(z_0), \quad t \mapsto z + \delta e^{it}$

$$\int_{\partial B_\delta(z_0)} gd\zeta = \int_0^{2\pi} g(z+\delta e^{it}) i\delta e^{it} dt = \int_0^{2\pi} \frac{f(z+\delta e^{it})}{z + \delta e^{it} - z} i\delta e^{it} dt = \int_0^{2\pi} f(z+\delta e^{it}) i dt \to^{\delta \to 0} 2\pi i f(z).$$

□

7 Vektorbündel

Bisher haben wir im Wesentlichen Funktionen, Vektorfelder und Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten studiert. In Anwendungen (vor allem in der Physik) treten aber auch allgemeinere Objekte auf, die man lokal als vektorwertige Funktionen auf M schreiben kann. Vektorfelder und Differentialformen fallen in diese Kategorie, wie wir gesehen haben.

Wir haben schon das Tangentialbündel TM und das Bündel der alternierenden k-Formen $\Lambda^k T^* M$ kennen gelernt. Wenn wir diese Konstruktionen axiomatisieren, landen wir beim Begriff des Vektorbündels. Dies sind Familien von Vektorräumen, die durch M „glatt“ parametrisiert sind. Die genau Definition sieht folgendermaßen aus.

7.1 Vektorbündel, Rahmen und Kozykel

Definition 7.1 (Vektorbündel)**.** Sei E eine Menge, M^n eine glatte Mannigfaltigkeit und $\pi : E \to M$ eine Abbildung. Dann heißt (E, π, M) ein *Vektorbündel vom Rang* k, falls folgende Eigenschaften erfüllt sind.

(VB1) $\pi : E \to M$ ist surjektiv und für jedes $p \in M$ ist die Faser $E_p := \pi^{-1}(p)$ ein k-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(VB2) $\pi : E \to M$ ist *lokal trivial*, das heißt es existiert eine offene Überdeckung $\{U_\alpha \mid \alpha \in I\}$ von M und zu jedem α eine Bijektion

$$\Phi_\alpha : E|_{U_\alpha} := \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^k,$$

sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} E|_{U_\alpha} \arrow[r, "\Phi_\alpha"] \arrow[d, "\pi"] & U_\alpha \times \mathbb{R}^k \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\ U_\alpha & \end{tikzcd}$$

kommutiert und die Abbildung $\Phi_{\alpha,p} := \mathrm{pr}_2 \circ \Phi|_{E_p} : E_p \to \mathbb{R}^k$ ein linearer Isomorphismus ist. Wir nennen Φ_α eine *lokale Trivialisierung von E über U_α*.

(VB3) Für alle $\alpha, \beta \in I$ ist die Verkettung

$$\Phi_{\alpha\beta} = \Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1} : U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^k \to U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^k$$

ein Diffeomorphismus, wobei wir $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$ geschrieben haben.

Wir nennen E den *Totalraum* des Bündels $\pi : E \to M$.

Lemma 7.2. *Ist $E \to M$ ein Vektorbündel, dann ist E eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension $n + k$, sodass $\pi : E \to M$ ist eine surjektive Submersion ist.*

Beweis. Sei (U_α, Φ_α) eine lokale Trivialisierung. Ist $U \subset U_\alpha$ offen, dann ist auch $(U, \Phi_\alpha|_U)$ eine lokale Trivialisierung für E. Wir können also annehmen, dass alle U_α's Kartengebiete sind. Wir bekommen dann Karten für E durch die Vorschrift

$$\phi_\alpha^E : E|_{U_\alpha} \to \phi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^k, \quad \phi_\alpha^E(e) = (\phi_\alpha(\pi(e)), \Phi_{\alpha,\pi(e)}(e)).$$

Man sieht dann leicht aus der Eigenschaft (VB3), dass die Familie $\{(E|_{U_\alpha}, \phi_\alpha^E)\}$ einen glatten Atlas für E bildet. $\square$

Wenn wir also ein Vektorbündel über einer Mannigfaltigkeit konstruieren wollen, dann müssen wir lokale Trivialisierungen konstruieren.

Beispiel 7.3. a) Das Produkt $\underline{\mathbb{R}^k} = M \times \mathbb{R}^k$ ist ein Vektorbündel, das triviale Bündel. Es reicht eine einzige Trivialisierung, $\Phi = \mathrm{id} : M \times \mathbb{R}^k \to M \times \mathbb{R}^k$.

b) Sei M^n eine glatte Mannigfaltigkeit. Das Tangentialbündel TM ist ein Vektorbündel vom Rang n mit lokalen Trivialisierungen gegeben durch die Differentiale der Kartenabbildungen,

$$\Phi_\alpha : TM|_{U_\alpha} \to U_\alpha \times \mathbb{R}^n, \Phi_\alpha(X_p) = (p, d(\phi_\alpha)_p(X)).$$

Die Übergangsfunktionen $\tau_{\alpha\beta}$ sind dann gerade die Differentiale der Kartenwechsel $\phi_{\alpha\beta}$, siehe Satz 4.1.

c) Das tautologische Bündel über $\mathbb{RP}^n$ Sei $M = \mathbb{RP}^n$. Wir definieren das *tautologische Bündel*

$$\mathcal{T} = \{([v], w) \in \mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid w \in [v]\}$$

mit Projektion

$$\pi : \mathcal{T} \to \mathbb{RP}^n, \quad \pi([v], w) = [v].$$

Die Faser von π über $[v] \in \mathbb{RP}^n$ ist also genau der Unterraum in $\mathbb{R}^{n+1}$, der von v aufgespannt wird, also inbesondere ein eindimensionaler Vektorraum. Wir wollen $\pi : \mathcal{T} \to \mathbb{RP}^n$ zu einem Vektorbündel vom Rang 1 machen. Dazu schreiben wir Vektoren in $\mathbb{R}^{n+1}$ wieder in der Form $v = (v^0, \dots, v^n)$, überdecken $\mathbb{RP}^n$ mit den Standardmengen

$$U_\alpha = \{v^\alpha \neq 0\}, \quad \alpha = 0, \dots, n,$$

und definieren

$$\Phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}, \quad \Phi_\alpha([v], w) = ([v], w^\alpha).$$

Dies ist für festes v ein ein linearer Isomorphismus. Die Umkehrabbildung ist

$$\Phi_\alpha^{-1}([v], \lambda) = \left([v], \frac{\lambda}{v^\alpha} v\right).$$

Damit ergibt sich für $([v], \lambda) \in U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}$

$$\Phi_{\alpha\beta}([v], \lambda) = \Phi_\alpha([v], \frac{\lambda}{v^\beta} v) = \left([v], \frac{v^\alpha}{v^\beta} \lambda\right),$$

und dies ist ein Diffeomorphismus.

Inhaltsverzeichnis

Literatur

[1] Hitchin, Nigel J., *Differentiable Manifolds*, Skript online verfügbar unter `http://people.maths.ox.ac.uk/~hitchin/hitchinnotes/manifolds2012.pdf`

[2] Boothby, William M. *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*, Academic Press, Inc., Orlando, FL, 1986

[3] Lee, John M., *Introduction to smooth manifolds*, Graduate Texts in Mathematics 218, Springer-Verlag, New York

[4] Warner, Frank W., *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Graduate Texts in Mathematics, 94. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1983