Leibniz Universität Hannover 7. April 2016
Fakultät für Mathematik und Physik
Prof. Dr. M. Schütt
Msc. S. Brandhorst

Einführung in die Algebraische Zahlentheorie
Sommersemester 2016
Blatt 1

**Hinweis:** Für manche (Teil)Aufgaben ist der Einsatz eines gängigen Computeralgebra-Systems empfehlenswert

1. Bestimmen Sie eine rationale Parametrisierung der Pellschen Kurve $x^2 - dy^2 = 1$ für alle $d > 1$. Liefert Ihnen das ganzzahlige Lösungen?

2. (a) Bestimmen Sie die Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{d}$ für alle quadratfreien $d$ mit $2 \leq d \leq 10$.

   (b) Bestimmen Sie jeweils die Grundlösung der Pellschen Gleichungen

$$x^2 - 19y^2 = 1 \quad \text{bzw.} \quad x^2 - 41y^2 = 1.$$

   (c) Bestimmen Sie alle Lösungen in $\mathbb{N}^2$ der Gleichung $x^2 - 14y^2 = 1$ mit $10^2 \leq x, y \leq 10^6$.

   (d) Bestimmen Sie (mit Rechnerunterstützung) für alle quadratfreien $d$ mit $2 \leq d \leq 1000$ die Periodenlänge der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{d}$ und erstellen Sie ein Diagramm, in dem die Größe $\log(a+b\sqrt{d})$, wobei $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ die Grundlösung von $x^2-dy^2 = 1$ ist, in Abhängigkeit von $d$ dargestellt werden soll.

3. Das folgenden Beispiel legt nahe, warum periodische Kettenbrüche zu algebraischen Zahlen vom Grad 2 korrespondieren. Welche reelle Zahl $\gamma$ wird durch die Kettenbruchentwicklung

$$\langle 5; 4, \overline{1, 2, 3} \rangle$$

   dargestellt? Benutzen Sie dazu den Algorithmus zur Bestimmung der Näherungsbrüche einer vorgegebenen Kettenbruchentwicklung und gehen Sie wie folgt vor:

   (a) Bestimmen Sie zuerst diejenige Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$, die zur rein periodischen Darstellung $\langle \overline{1, 2, 3} \rangle$ korrespondiert. *Hinweis:* $\alpha = \langle 1; 2, 3, \alpha \rangle$.

   (b) Bestimmen Sie anschließend $\gamma$ als rationale Funktion in $\alpha$. *Hinweis:* $\gamma = \langle 5; 4, \alpha \rangle$.

4. Zeigen Sie, dass

$$x^4 + y^4 = z^2$$

   keine ganzzahligen Lösungen mit $xyz \neq 0$ hat. *Hinweis:* Pythagoräische Tripel.

**Literaturhinweis:** Für eine gute Einführung in die Theorie der Kettenbrüche und die damit zusammenhängende Approximation irrationaler Zahlen durch rationale Zahlen sei auf die Kapitel X und XI des Buches *An Introduction to the Theory of Numbers von G.H. Hardy und E.M. Wright verwiesen.*

**Begriffe:** Es ist wichtig, dass die folgenden Begriffe verinnerlicht worden sind:

- Integritätsbereich, Euklidischer Ring, Hauptidealbereich, faktorieller Ring;
- Einheit und Einheitengruppe eines Ringes, Assoziiertheit in Integritätsbereichen;
- primes bzw. irreduzibles Element eines Integritätsbereiches;
- Eindeutige Primfaktorzerlegung (PFZ).