Leibniz Universität Hannover
FG Graphische Datenverarbeitung
Prof. Dr. F.-E. Wolter
M.Sc Maximilian Klein

17. April 2015
Modelle für virtuelle Realitäten
Blatt 1
Abgabe 23.04.2015

Modelle für virtuelle Realitäten

1 Grundlagen der numerischen Integration

Bonusaufgabe 1.1 ★

Nehmen Sie an der anonymen Umfrage im StudIP über Ihre Vorkenntnisse teil. Wenn mindestens zwei drittel der teilnehmenden Studierenden einmal das Formular ausgefüllt haben bekommt jeder einen Bonuspunkt.

Aufgabe 1.1 – Explizite Integration

Schreiben Sie einen expliziten Euler Integrator und testen Sie diesen mit den folgenden Differentialgleichungen:

- $\frac{\partial f(x)}{\partial x} + 2 \cdot f(x) = 1$
- $y' = y^2$

Überprüfen Sie Ihre Lösungen und beurteilen Sie die Güte Ihrer numerischen Ergebnisse. (Es darf gerne mit Tools wie www.wolframalpha.com gearbeitet werden.)

Aufgabe 1.2 – Implizite Integration

Schreiben Sie einen impliziten Euler Integrator für die Differentialgleichungen aus Aufgabe 1 und vergleichen Sie die Ergebnisse.
Hinweis: Es könnte helfen zunächst einen impliziten Integrator für $f' = f$ zu schreiben.

Aufgabe 1.3 – Mehrdimensionale Differentialgleichungen

(a) Passen Sie Ihren expliziten Euler aus Aufgabe 1 so an, dass Sie damit die folgenden zweidimensionalen DGLs lösen können.

- $\frac{\partial \vec{f}(t)}{\partial t} = \vec{g}(t, \vec{f}) = \begin{pmatrix} -f_x(t) \cdot f_y(t) \\ -f_y(t) \end{pmatrix}$
  Mit $\vec{f}(t) \in \mathbb{R}^2$ und f_x, f_y sind die x-Komponente und y-Komponente von $\vec{f}$.
- $\vec{c}' = c_x \cdot \vec{e}_y - c_y \cdot \vec{e}_x$, wobei $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ die Einheitsvektoren in x- und y-Richtung sind.

(b) Überlegen Sie sich, wie die analytische Lösung zur Funktion $\vec{c}$ in Aufgabe 1.3 (a) aussieht und beurteilen Sie ihr Ergebnis das Sie mit der Integration erhalten haben. Geben Sie kurz an, wie die Lösung aussehen sollte und was sie festellen konnten.

Aufgabe 1.4 – Predictor-Corrector Verfahren

Das Heun-Verfahren ist ein Integrator dessen lokaler Fehler geringer ist, als der des expliziten Euler (Konvergenzordnung 2, wird später behandelt). Implementieren Sie das Heun-Verfahren für Aufgabe 3 und überprüfen Sie die Güte der Lösung für $\vec{c}$.

Aufgabe 1.5 – A-Stabilität

(a) Schreiben Sie ein Programm, dass einen approximativen A-Stabilitätstest durchführt. Dabei soll der Stabilitätstest als Eingabe ein Integrator übergeben bekommen (z.B. als Funktion oder als vererbte Klasse) und ausgeben ob der Integrator stabil ist bzw. sein könnte. Dazu sollen Sie sich überlegen wie sie mit endlich vielen k Werten aussagekräftige Ergebnisse bekommen (versuchen Sie rauszufinden welche k-Werte „schlimm“ sind).

(b) Beschreiben Sie was der A-Stabilitätstest aussagt und was er gerade **nicht** aussagt. Versuchen Sie dafür einen Integrator zu finden der den A-Stabilitätstest besteht, der aber im Allgemeinen keine Differentialgleichungen (annähernd) löst.

Wichtig:
Die Lösung des Übungszettels muss bis um 24 Uhr am Abgabedatum (oben rechts auf der ersten Seite des Übungsblattes) an die EMail-Adresse

vrlab15@welfenlab.de

gesendet werden. Bitte beachten Sie die folgenden Richtlinien:

- Die Abgabe umfasst den Programm Quellcode (keine Binärdateien wie `.exe`, `.dll`, `.so`, `.class` Dateien).
- Textabgaben dürfen als normale Textdatei oder PDF abgegeben werden (kein `.odt` / `.docx`).
- Bilder und Videos in üblichen offenen Formaten (`.png`, `.ogg` ..., kein DivX, H.264 oder ähnliches). Die Abgabe von Bilder ist erwünscht um Erläterungen klarer zu machen.
- Bevorzugtes Format für Datensätze sind einfach CSV Dateiein. Sollten Sie mit Excel / LibreOffice Calc arbeiten und die Ergebnisse damit berechnen, bitte die Datei in ein PDF konvertieren!
- Aus Datenschutzrechtlichen Gründen bitte keine Matrikelnummern per EMail versenden. Wer möchte kann seine PIN aus dem StudIP für das Labor mitsenden.
- Die Sterne ★ bei den Bonusaufgaben geben die Schwierigkeit an, je mehr desto schwerer. Üblicherweise gibt es pro Bonusaufgabe aber nur einen Punkt.

Für jedes Übungsblatt gilt: Jede Aufgabe (z.B. 1.3) gibt bei korrekter Bearbeitung einen Punkt •. Bei guter und ausführlicher Bearbeitung werden auch Bonuspunkte vergeben. Zum weiterkommen in die Gruppenphase werden 18 von 20 Punkte benötigt! Bonuspunkte
Eine kleine Einstiegshilfe. Der folgende Pseudocode integriert die DGL $f'(t) = \sqrt{f(t)}$ mit dem expliziten Euler Verfahren.

```
fcur = 1 // setze Anfangswert f(0) auf aktuellen Wert
println("t,f(t)") // (CSV) mit zwei Spalten, der Zeit t und dem Funktionswert
println("0," + fcur) // Zeitpunkt 0, Anfangswert.
for(i = 0; i<n; i++){
  fcur = fcur + sqrt(fcur) * dt
  println(dt*i + "," + fcur) // t = dt * i und f(dt*i)
}
```