Aufgabe 5 (Lineare Blockcodes)

Zum Schutz gegen Übertragungsfehler auf einem gestörten Kanal soll ein dichtgepackter, linearer (N, K)-Blockcode entworfen werden.

a) Geben Sie eine allgemeine Beziehung an, mit der für einen dichtgepackten, linearen (N, K)-Blockcode bei gegebener Codewortlänge N und gegebener Codedistanz d die Anzahl der benötigten Prüfstellen berechnet werden kann.

   Hinweis: Verwenden Sie die Beziehung $\sum_{i=1}^{t} \binom{N}{i} \leq 2^{N-K} - 1$ aus dem Skript (Kapitel 4.4)

Im folgenden soll ein dichtgepackter, linearer (N, K)-Blockcode mit der Codedistanz $d = 3$ und einer Coderate $R > 0,6$ entwickelt werden. Die Codewortlänge N soll hierbei so klein wie möglich sein.

b) Bestimmen Sie die erforderliche Codewortlänge N, die Anzahl der Informationsstellen K und die daraus resultierende Coderate R. Verwenden Sie hierfür die unter a) entwickelte Beziehung. Wie wird ein solcher Code bezeichnet? Wieviele Fehler können mit diesem Code korrigiert werden?

c) Stellen Sie die vollständige Syndromtabelle, d.h. die Zuordnung zwischen Fehlermuster und Syndrom, auf und geben Sie die Parity-Check-Matrix H an. Die Zuordnung zwischen Fehlermuster und Syndrom soll gemäß folgender Vorschrift erfolgen:

$$e_i(D) = D^{i-1} \quad \longleftrightarrow \quad S_i = (i)_2 \qquad , \quad i = 1, 2, 3, ..., N$$

d) Ist der Code systematisch? (Begründung)

Die folgenden, in Polynomdarstellung angegebenen Symbolfolgen $y(D)$ seien empfangen worden und sollen decodiert werden:

$$\begin{aligned} y_1(D) &= D^{N-1} + D^{N-2} + D^{N-3} + D^2 + D + 1 \\ y_2(D) &= D^{N-2} + D^{N-4} + D^2 + 1 \\ y_3(D) &= D^{N-1} + D^{N-5} + D^3 + D^2 \end{aligned}$$

e) Geben Sie die empfangenen Symbolfolgen als Bitmuster an ($\vec{y} = y_1, y_2, \ldots, y_N$) und stellen Sie fest, welche dieser Symbolfolgen richtig empfangene Codeworte sind. Bestimmen Sie im Falle fehlerhafter Übertragung das entsprechend korrigierte Codewort ($\vec{x} = x_1, x_2, \ldots, x_N$).