Aufgabe 4 (Lineare Blockcodes)

Es soll ein linearer Blockcode untersucht werden. Gegeben seien die folgenden Beziehungen zwischen den zu codierenden Informationsstellen u_i und den Binärstellen x_j eines Codewortes:

$$\begin{array}{lll} x_0 = u_1 + u_2 & x_1 = u_0 + u_2 & x_2 = u_0 + u_1 \\ x_3 = u_0 & x_4 = u_2 & x_5 = u_0 + u_1 + u_2 \end{array}$$

Die Operation "+" entspricht hierbei der Modulo-2-Addition.

a) Geben Sie die Codewortlänge N, die Zahl der Prüfstellen $N - K$ und die Generatormatrix G an.

b) Bestimmen Sie für die in a) ermittelte Generatormatrix G die reduzierte, kanonische Form G'. Die Transformation soll durch Anwendung elementarer Zeilenoperationen erfolgen (Vertauschung, Zeilenaddition).

c) Bestimmen Sie aus der reduzierten, kanonischen Form G' die sogenannte äquivalente, systematische Form G'' der Generatormatrix G.

d) Sind die Zeilenräume der Generatormatrizen G und G' bzw. G und G'' identisch?

e) Leiten Sie für einen systematischen, linearen Blockcode den Zusammenhang zwischen der Generatormatrix G und der zugehörigen Parity-Check-Matrix H in allgemeiner Form her.

f) Bestimmen Sie gemäß der in e) hergeleiteten Beziehung die zur Generatormatrix G'' aus c) gehörige Parity-Check-Matrix H''.

g) Bestimmen Sie die Codedistanz d des durch G'' erzeugten linearen Blockcodes durch Untersuchung der Spaltenvektoren von H''.

Im folgenden soll ein Verfahren untersucht werden, mit dem die Parity-Check-Matrix für einen beliebigen linearen Blockcode mit Hilfe der reduzierten, kanonischen Form und der äquivalenten, systematischen Form ermittelt werden kann:

Jeder beliebige lineare Blockcode lässt sich durch eine Generatormatrix G' in reduzierter, kanonischer Form beschreiben. Die zugehörige Parity-Check-Matrix H' erhält man aus der Parity-Check-Matrix H'' der äquivalenten, systematischen Form, indem man die zur Erzeugung von G'' aus G' notwendigen Operationen auf H'' angewendet wieder rückgängig macht.

h) Ermitteln Sie mit Hilfe dieses Verfahrens die zur Generatormatrix G' gehörende Parity-Check-Matrix H' und weisen Sie für den hier vorliegenden Fall die Gültigkeit dieses Verfahrens nach.

Reduzierte, kanonische Form: Eine Matrix liegt in reduzierter, kanonischer Form vor, falls gilt:

- Jedes Element unterhalb der Hauptdiagonalen g_{ii} ist 0
- Wenn ein Element der Hauptdiagonalen 1 ist, dann sind alle anderen Elemente der zugehörigen Spalte 0