Aufgabe 9 (BCH Codes)

Gegeben sei das binäre Polynom $f(D) = D^4 + D^3 + D^2 + D + 1$.

a) Geben Sie alle Elemente des mit $f(D)$ erzeugten Galois-Feldes $GF(2^4)$ als Polynome in D an. Wie sind die beiden Basis-Rechenoperationen "+" und "·" im $GF(2^4)$ definiert?

b) Zeigen Sie, dass das Element $\gamma = \alpha^2 + 1$ ein primitives Element im gegebenen $GF(2^4)$ ist und vervollständigen Sie die umseitige Tabelle mit der Darstellung der Elemente des $GF(2^4)$ als Potenzen des primitiven Element $\gamma = \alpha^2 + 1$ und der korrespondierenden Darstellung als Polynom in α.

c) Bestimmen Sie für das durch diese Tabelle beschriebene $GF(2^4)$ die Minimalpolynome $m_1(D)$, $m_2(D)$, $m_3(D)$ und $m_4(D)$, d.h. die Minimalpolynome der Elemente γ, γ^2, γ^3 und γ^4.

d) Berechnen Sie mit Hilfe der in Aufgabenteil c) berechneten Minimalpolynome das Generatorpolynom eines 2-Fehler-korrigierenden BCH-Codes mit der Codewortlänge $N = 15$. Geben Sie den Parameter K und die Coderate R an.

Mit Hilfe des Polynoms $f(D) = D^4 + D^3 + D^2 + D + 1$ erzeugtes, erweitertes Galois-Feld $GF(2^4)$, dargestellt bezüglich des primitiven Elements $\gamma = \alpha^2 + 1$ und der jeweils korrespondierenden Polynomform bezüglich des Elements α

i	$\gamma^i \mathrm{mod} f(\alpha) = (\alpha^2+1) \mathrm{mod} f(\alpha)$	i	$\gamma^i \mathrm{mod} f(\alpha) = (\alpha^2+1) \mathrm{mod} f(\alpha)$
0	1	8	$\alpha + 1$
1	$\alpha^2 + 1$	9	
2		10	$\alpha^3 + \alpha^2 + 1$
3		11	$\alpha^2 + \alpha + 1$
4	$\alpha^3 + 1$	12	
5	$\alpha^3 + \alpha^2$	13	$\alpha^3 + \alpha + 1$
6		14	$\alpha^2 + \alpha$
7	$\alpha^3 + \alpha$	15	1