Leibniz Universität Hannover
Fakultät für Mathematik und Physik
Prof. Dr. M. Schütt
MSc. S. Brandhorst

28. April 2016

Einführung in die Algebraische Zahlentheorie
Sommersemester 2016
Blatt 4

Ganzheitsbasen und Diskriminanten

1. Bestimmen Sie jeweils eine Ganzheitsbasis $\underline{\beta}$ und die Diskriminante d_K der folgenden Zahlkörper K:
   (a) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, (b) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$, (c) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, (d) $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$,
   (e) $\mathbb{Q}(\theta)$, wobei $\mathrm{minpol}_{\mathbb{Q}}(\theta) = x^3 + x^2 - 2x + 8$.

   Geben Sie damit den injektiven Ringhomomorphismus $\rho_{\underline{\beta}} : \mathcal{O}_K \to M_n(\mathbb{Z})$ *explizit* an, der einem generischen Element $\alpha \in \mathcal{O}_K$ die Darstellungsmatrix $M_{\underline{\beta}}(\alpha)$ der Multiplikation mit α bzgl. der Ganzheitsbasis $\underline{\beta}$ zuordnet.
   Leiten Sie damit generische Formeln für das Polynom $f_\alpha(x) := \prod_{i=1}^n (x - \sigma_i(\alpha))$ (insbesondere für Norm und Spur) her. Dabei durchläuft $\{\sigma_i\}_{i=1}^n$ die Einbettungen von K in $\overline{\mathbb{Q}}$.
   Geben Sie zusätzlich die Gram-Matrix $G_{\underline{\beta}}$ (also die Darstellungsmatrix der Spurform bzgl. der Ganzheitsbasis $\underline{\beta}$) an.

2. Implementieren Sie den Algorithmus aus der Vorlesung, um eine Ganzheitsbasis zu finden. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

   - Als Eingabe soll ein normiertes, irreduzibles Polynom $f \in \mathbb{Z}[x]$ vom Grad n dienen. Unser Zahlkörper K ist damit in der Form $\mathbb{Q}[x]/(f)$ gegeben, und θ (etwa die Restklasse von x) ist ein primitives Element mit Minimalpolynom f.
   - Wählen Sie $\underline{\alpha} = (1, \theta, \ldots, \theta^{n-1})$ als Ausgangsbasis, und berechnen Sie die zugehörige Diskriminante $d(\underline{\alpha})$ (zum Beispiel über $d(\underline{\alpha}) = (-1)^{\binom{n}{2}} N_{K/\mathbb{Q}}(f'(\alpha))$, was im Rechner leicht über die Resultante vom Polynom f und seiner Ableitung f' realisiert werden kann).
   - Setzen Sie $d := d(\underline{\alpha})$ und faktorisieren Sie d über $\mathbb{Z}$ (sofern mit dem CAS möglich!). Nun prüfen Sie für jede Primzahl p mit $p^2 \mid d$, ob mindestens eins der Zahlen ($\neq 0$) in der Menge

     $$\{\tfrac{1}{p}(\lambda_1\alpha_1 + \ldots + \lambda_n\alpha_n) \mid \lambda_i \in \mathbb{Z}, 0 \leq \lambda_i \leq p-1\}$$

     ganzalgebraisch ist. Um diesen Test durchzuführen, berechnen Sie für γ aus obiger Menge jeweils das charakteristische Polynom der zugehörigen darstellenden Matrix $M_{\underline{\alpha}}(\gamma)$ und prüfen Sie, ob dieses ganzzahlige Koeffizienten hat.
     Sofern Sie ein ganzalgebraisches Element y finden, setzen Sie $d_{\text{neu}} := \frac{d_{\text{alt}}}{p^2}$ und passen Sie die Basis $\underline{\alpha}$ durch Austausch eines geeigneten Basiselements α_i durch y an.
     Wird für alle Primteiler p mit $p^2 \mid d$ durch diesen Prozess keine weitere ganzalgebraische Zahl gefunden, so gilt $d = d_K$ und die aktuelle Basis $\underline{\alpha}$ ist eine Ganzheitsbasis von $\mathcal{O}_K$.

3. Beweisen Sie: Zu $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $d = \mathrm{ggt}(a, b)$ gibt es $U, V \in GL_2(\mathbb{Z})$ mit

$$U \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} V = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & \frac{ab}{d} \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Natürlich können Sie die Aufgaben 1 mit Hilfe der Implementierung aus Aufgabe 2 lösen!