Leibniz-Universität Hannover
Insitut für Differentialgeometrie
Dr. Ahmad Afuni, Dr. Markus Röser Hannover, den 05.04.2016

Lösungsvorschläge zum Übungsblatt 3

zur Vorlesung Mannigfaltigkeiten

Sommersemester 2016

Aufgabe 1 (Die Wunder des $\mathbb{RP}^n$)**.**

(a) Zur Wohldefiniertheit: Der Kern einer umkehrbaren linearen Abbildung ist trivial; daher ist $Ax \neq 0$ für alle $x \neq 0$. Andererseits gilt $Ax = \lambda Ay$ für $x = \lambda y \in \mathbb{R}^{n+1}$, d.h. $[x] = [y] \Rightarrow [Ax] = [Ay]$. F_A ist deshalb wohldefiniert.

Zur Diffeomorphie: Es reicht zu zeigen, daß $F_A : \mathbb{RP}^n \to \mathbb{RP}^n$ glatt ist, da die Umkehrabbildung durch $[x] \mapsto [A^{-1}x]$ gegeben ist. Es sei $\{(\psi_j, U_j)\}_{j=1}^{n+1}$ der übliche Atlas des $\mathbb{RP}^n$. Für $i, j \in \{1, \ldots, n+1\}$ ist die Abbildung

$$\psi_j \circ F_A \circ \psi_i^{-1} : \psi_i(U_i \cap A^{-1}(U_j)) = \psi_i\left(\{[x] : x^i \neq 0, (Ax)^j \neq 0\}\right) \to \mathbb{R}^n$$

gegeben durch

$$\begin{aligned}
&(\psi_j \circ F_A \circ \psi_i^{-1})(x) \\
&= \psi_j([A(x^1, \ldots, x^{i-1}, 1, x^i, \ldots, x^n)]). \\
&= \frac{1}{A(y)^j}\left(A(y)^1, \ldots, \widehat{A(y)^j}, \ldots, A(y)^n\right),
\end{aligned}$$

wobei $y = (x^1, \ldots, x^{i-1}, 1, x^i, \ldots, x^n)$. Da $A(y)^j \neq 0$ für alle x in Betracht, ist $\psi_j \circ A \circ \psi_i^{-1}$ glatt für alle $i, j \in \{1, \ldots, n+1\}$; daher ist A glatt.

Wenn $[x] \neq [y]$, sind $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$ linear unabhängig. Es gibt daher $\{z_1, \ldots, z_{n-1}\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ s.d. $\mathbb{R}^{n+1} = \operatorname{span}\{x, y, z_1, \ldots, z_{n-1}\}$. Die eindeutige lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit der Eigenschaft, daß $L(x) = (1, 0, \ldots, 0)$, $L(y) = (1, 1, 0, \ldots, 0)$ und $\forall i \in \{1, \ldots, n-1\}$ $L(z_i) = e_{i+2}$, welche offensichtlich umkehrbar ist, induziert daher einen Diffeomorphismus $G := F_L$ mit der gewünschten Eigenschaft.

(b) Bezüglich Glattheit: Die lokalen Repräsentanten sind wie folgt:

$$\begin{aligned}
\psi_1 \circ F \circ \phi_N^{-1} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\
x &\mapsto x \\[1ex]
\psi_1 \circ F \circ \phi_S^{-1} : \mathbb{R}\backslash\{0\} &\to \mathbb{R}\backslash\{0\} \\
x &\mapsto (\phi_N \circ \phi_S^{-1})(x) \\[1ex]
\psi_2 \circ F \circ \phi_N^{-1} : \mathbb{R}\backslash\{0\} &\to \mathbb{R}\backslash\{0\} \\
x &\mapsto \frac{1}{x} \\[1ex]
\psi_2 \circ F \circ \phi_S^{-1} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\
x &\mapsto x.
\end{aligned}$$

F ist daher glatt. Da seine Umkehrabbildung durch

$$[(x, y)] \mapsto \begin{cases} \phi_N^{-1}(\frac{y}{x}), & x \neq 0 \\ N, & x = 0 \end{cases}$$

gegeben ist und die Umkehrabbildungen der obigen Repräsentanten glatt sind, so ist F^{-1} auch glatt, d.h. F ist ein Diffeomorphismus.

Aufgabe 2.

(a) $W \subset N$ sei eine offene Menge, $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ ein Atlas auf M und $\{(V_ж, \psi_ж)\}_{ж \in Ж}$ einer auf N. Dann gilt

$$\begin{aligned} F^{-1}(W) &= \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \cap F^{-1}(W \cap \bigcup_{ж \in Ж} V_ж) \\ &= \bigcup_{(\alpha, ж) \in A \times Ж} \phi_\alpha^{-1}\left(\phi_\alpha(U_\alpha) \cap \phi_\alpha\left(F^{-1}(W \cap V_ж)\right)\right) \end{aligned}$$

da ϕ_α injektiv ist. Bemerke, daß $y \in \phi_\alpha\left(F^{-1}(W \cap V_ж)\right) \Leftrightarrow \phi_\alpha^{-1}(y) \in F^{-1}(W \cap V_ж) \Leftrightarrow \left(F \circ \phi_\alpha^{-1}\right)(y) \in W \cap V_ж \Leftrightarrow (\psi_ж \circ F \circ \phi_\alpha^{-1})(y) \in \psi_ж(W \cap V_ж)$ wegen der Injektivität von $\psi_ж$. Insgesamt haben wir die Gleichung

$$F^{-1}(W) = \bigcup_{(\alpha, ж) \in A \times Ж} \phi_\alpha^{-1}(\phi_\alpha(U_\alpha) \cap (\psi_ж \circ F \circ \phi_\alpha^{-1})^{-1}(\psi_ж(W \cap V_ж))).$$

Die Abbildung $\psi_ж \circ F \circ \phi_\alpha^{-1}$ ist glatt im klassischen Sinne, daher stetig. Da $\psi_ж$ ein Homöomorphismus und $W \cap V_ж$ offen ist, ist die Menge $(\psi_{zhe} \circ F \circ \phi_\alpha^{-1})^{-1}(\psi_ж(W \cap V_ж))$ offen. Da ϕ_α auch ein Homöomorphismus ist, so ist $\phi_\alpha(U_\alpha)$ offen, daher auch $\phi_\alpha^{-1}(\phi_\alpha(U_\alpha) \cap (\psi_ж \circ F \circ \phi_\alpha^{-1})^{-1}(\psi_ж(W \cap V_ж)))$. Da Vereinigungen von offenen Mengen wieder offen sind, ist $F^{-1}(W)$ offen in M. Folglich ist F stetig.

(b) Bezüglich Glattheit: Es seien $\{\phi_{\alpha,\varepsilon}\}$ die Karten auf S^n aus Übungsblatt 1 und $\{\psi_ж\}_{ж \in \{0,\ldots,n\}}$ die üblichen Karten auf $\mathbb{RP}^n$ aus dem Skript. Es gelten

$$\begin{aligned} \phi_{\alpha\varepsilon}(U_{\alpha\varepsilon} \cap F^{-1}(V_ж)) &= \phi_{\alpha\varepsilon}\left(\{x \in S^n : \varepsilon x^\alpha > 0 \text{ und } x^{ж+1} \neq 0\}\right) \\ &= \begin{cases} B(0,1) \backslash \{x^{ж+1} = 0\}, & \alpha > ж + 1 \\ B(0,1), & \alpha = ж + 1 \\ B(0,1) \backslash \{x^ж = 0\}, & \alpha < ж + 1 \end{cases} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \left(\psi_ж \circ F \circ \phi_{\alpha\varepsilon}^{-1}\right)(x) &= \psi_ж([x^1, \ldots, x^{\alpha-1}, \varepsilon\sqrt{1 - |x|^2}, x^\alpha, \ldots, x^n]) \\ &= \begin{cases} (\frac{x^1}{x^{ж+1}}, \ldots, \widehat{\frac{x^{ж+1}}{x^{ж+1}}}, \ldots, \frac{\varepsilon\sqrt{1-|x|^2}}{x^{ж+1}}, \frac{x^\alpha}{x^{ж+1}}, \ldots, \frac{x^n}{x^{ж+1}}), & \alpha > ж + 1 \\ \frac{x}{\varepsilon\sqrt{1-|x|^2}}, & \alpha = ж + 1 \\ (\frac{x^1}{x^ж}, \ldots, \frac{\varepsilon\sqrt{1-|x|^2}}{x^ж}, \ldots, \widehat{\frac{x^ж}{x^ж}}, \ldots, \frac{x^n}{x^ж}), & \alpha < ж + 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Da die Definitionsbereiche der verschiedenen $\psi_ж \circ F \circ \phi_{\alpha\varepsilon}^{-1}$ keine der in diesen Ausdrücken vorkommenden singulären Punkte enthalten, sind sie glatt.

Bezüglich der Surjektivität (präziser: zweifältigen Überdeckung): Erstens gilt

$$F^{-1}([(x^1, \ldots, x^n)]) = \{y \in S^n : [y] = [x]\}.$$

Außerdem ist $[y] = [x]$ genau dann, wenn $y = \lambda x$; die Tatsache, daß $|y| = 1$ ist, impliziert nun, daß $|\lambda| = \frac{1}{|x|}$, d.h. $y = \pm \frac{x}{|x|}$, also

$$F^{-1}([x]) = \left\{ \frac{x}{|x|}, -\frac{x}{|x|} \right\} \neq \emptyset.$$

Bezüglich der Kompaktheit: Da F glatt ist, ist es auch stetig; daher ist $F(S^n)$, das Bild einer *kompakten* Menge, kompakt.

(c) Bemerke, daß $[(1,0,\ldots,0)], [(1,1,0,\ldots,0)] \in F(U_{11})$. Außerdem ist $\widetilde{F} := F|_{U_{11}} : U_{11} \to F(U_{11})$ injektiv, weil $F(x) = F(y) \Rightarrow x = \pm y$ und $x, y \in U_{11} \Rightarrow x^1, y^1 > 0$, d.h. $x = y$; ferner hat $\widetilde{F}$ die Abbildung $[x] \mapsto \frac{|x^1|}{x^1} \cdot \frac{x}{|x|}$ als Umkehrabbildung, und dies ist auch glatt. Daher ist $\widetilde{F}$ ein Diffeomorphismus, daher ein Homöomorphismus. Da S^n und daher $\phi_{11}(U_{11})$ ein Hausdorff-Raum ist, so ist auch $F(\phi_{11}(U_{11}))$ ein Hausdorff-Raum. Da diese Menge die von $\mathbb{RP}^n$ induzierte Topologie trägt, können $[(1,0,\ldots,0)]$ und $[(1,1,0,\ldots,0)]$ durch offene Mengen U_1 bzw. U_2 in $\mathbb{RP}^n$ getrennt werden. Laut Aufgabe 1(a) gibt es zu allen $[x] \neq [y] \in \mathbb{RP}^n$ einen Diffeomorphismus, daher einen Homöomorphismus $F_{xy} : \mathbb{RP}^n \to \mathbb{RP}^n$ mit $F_{xy}([x]) = [(1,0,\ldots,0)]$ und $F_{xy}([y]) = [(1,1,0,\ldots,0)]$, daher werden $[x]$ und $[y]$ durch die offenen Mengen $F_{xy}(U_1)$ bzw. $F_{xy}(U_2)$ getrennt. Daher ist $\mathbb{RP}^n$ ein Hausdorff-Raum.

Aufgabe 3.

(a) Falls $x, y \neq 0$, gibt es $i, j \in \{0, 1\}$ mit $x^i, y^j \neq 0$. Falls $i = j$, ist $\widetilde{F}^0(x,y)$ oder $\widetilde{F}^2(x,y)$ $\neq 0$. Falls $i \neq j$, ist x^0y^1 oder $x^1y^0 \neq 0$; $F^1(x,y)$ ist dann $\neq 0$, es sei denn, daß auch $x^jy^i \neq 0$, in welchem Falle $F^0(x,y) \neq 0$. Daher ist $\widetilde{F}(x,y) \neq 0$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$.

Da $\widetilde{F}(\lambda_1 x, \lambda_2 y) = \lambda_1\lambda_2(x^0y^0, x^0y^1 + x^1y^0, x^1y^1) \in [\widetilde{F}(x,y)]$ für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, ist die Abbildung $\mathbb{RP}^1 \times \mathbb{RP}^1 \ni ([x],[y]) \mapsto [\widetilde{F}(x,y)] \in \mathbb{RP}^2$ wohldefiniert.

F ist glatt, da alle lokalen Repräsentanten von F rationale Funktionen sind; da sie auf den entsprechenden Mengen definiert sind, müssen sie glatt sein; z.B. $F([(1,x)],[(1,y)]) = [(1, x+y, xy)]$, so daß ein lokaler Repräsentant in inhomogenen Koordinaten (wo $x^0 \neq 0$) gleich der Abbildung

$$(x,y) \mapsto (x+y, xy)$$

wäre. F ist außerdem symmetrisch, da

$$F([x],[y]) = [(x^0y^0, x^0y^1 + x^1y^0, x^1y^1)] = [(y^0x^0, y^0x^1 + y^1x^0, y^1x^1)] = F([y],[x])$$

gilt wegen der Kommutativität der reelen Zahlen unter Addition und Multiplikation.

(b) Wir identifizieren $\mathbb{R}^2$ mit dem Raum aller Monomen nach $(x^0, x^1) \sim x^0 + tx^1$ und $\mathbb{R}^2$ mit dem Raum aller quadratischen Polynomen nach $(z^0, z^1, z^2) \sim z^0 + tz^1 + t^2z^2$. Es gilt dann:

$$F([x^0 + x^1t], [y^0 + y^1t]) = [(x^0y^0) + t(x^0y^1 + x^1y^0) + t^2(x^1y^1)].$$

F wäre genau dann surjektiv falls sich alle quadratischen Polynome in der Form $(x^0y^0) + t(x^0y^1 + x^1y^0) + t^2(x^1y^1)$ schreiben lassen. Dies gilt aber nicht, weil die Diskriminante solch eines Polynoms immer nichtnegativ sein müßte, da

$$(x^0y^1 + x^1y^0) - 4(x^0y^0)(x^1y^1) = (x^0y^0 - x^1y^1)^2 \geq 0.$$

Aufgabe 4 (Beulefunktionen)**.**

(a) Bemerke, daß $g_1(t) = g_0(t) \cdot g_0(1-t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, wobei

$$g_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}.$$

Es reicht daher zu zeigen, daß g_0 glatt ist. Dies folgt aber aus der Tatsache, daß für alle $k \in \mathbb{N}$ und $t > 0$, $g_0^{(k)}(t) = P_{2k}(\frac{1}{t})e^{-\frac{1}{t}}$, wobei $P_{2k}(z)$ irgendeinen polynomischen Ausdruck vom Grad $2k$ in z bezeichnet, da g_0 offensichtlich auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ glatt ist; bei 0 verschwinden dann alle Ableitungen von g_0, und für alle k gilt $\lim_{t\searrow 0} g_0^{(k)}(t) = 0$.

(b) Wir können g_2 als

$$g_2(t) = \frac{\int_0^t g_1}{\int_0^1 g_1}$$

schreiben, da $g_1 = 0$ auf $]-\infty, 0[$ und $]1, \infty[$. Es folgt dann aus dem Fundamentaltheorem der Integralrechnung, daß g_2' existiert, und $g_2' = \frac{g_1}{\int_0^1 g_1}$, aber wir wissen schon, daß diese Funktion glatt ist. Da $g_1(t) = 0$ für $t \leq 0$ gilt daher $g_2(t) = \frac{-\int_t^0 g_1}{\int_0^1 g_1} = 0$ für alle $t < 0$, und für $t \geq 1$ gilt $g_2(t) = \frac{\int_0^1 g_1 + \int_1^t g_1}{\int_0^1 g_1} = \frac{\int_0^1 g_1}{\int_0^1 g_1} = 1$, da $g_1(t) = 0$ für $t > 1$.

(c) Die Funktion $g_3 = \left(\mathbb{R}^n \ni x \mapsto \frac{1}{3}\left(\frac{|x|^2}{\varepsilon^2} - 1\right) \in \mathbb{R}\right)$ ist glatt und hat die folgenden Eigenschaften:

$$g_3(x) \leq 0 \Leftrightarrow |x|^2 \leq \varepsilon^2 \Leftrightarrow |x| \leq \varepsilon$$
$$g_3(x) \geq 1 \Leftrightarrow \frac{|x|^2}{\varepsilon^2} - 1 \geq 3 \Leftrightarrow |x| \geq 2\varepsilon.$$

Daher gilt $(g_2 \circ g_3)(x) \equiv 0$ für $|x| \leq \varepsilon$ und $(g_2 \circ g_3)(x) \equiv 1$ für $|x| \geq 2\varepsilon$. Die Funktion $h := 1 - g_2 \circ g_3$ hat dann die begehrte Eigenschaft.