VR-Labor

Nachtrag zur Apokalypse…

Prof. F.-E. Wolter
Maximilian Klein

Welfenlab

Bis zu heute!

14.05.2015

1. Apokalypse implementieren
2. Apokalypsenanalyse
3. Paper durcharbeiten
4. Konditionsberechnung und Beispiele suchen

Heute keine Vorestellung!

Nur eine Sache

Heun Mehrdimensional

$$
\begin{aligned}
\tilde{y}_{i+1} &= y_i + hf(t_i, y_i)\\
y_{i+1} &= y_i + \tfrac{h}{2}\left[f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})\right],
\end{aligned}
$$

Nur eine Sache

Heun Mehrdimensional

Alle Variablen in
einem Vektor
(S,I,Z,R)

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i)$$
$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})],$$

Fehleranalyse

Nochmal Numerik..

Der unvermeindliche Fehler

Rundungsfehler

```
> 0.4 * 10E-32
4.000000000000001e-32
```

Float-Zahlen sind Äquivalenzklassen

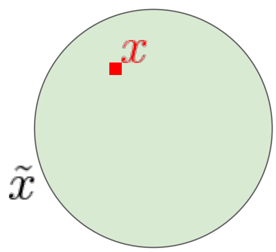
Für jede Zahl x gibt es unendlich viele Zahlen, die als Fließkommazahl gleich gerundet werden.

Float-Zahlen sind Äquivalenzklassen

Die Äquivalenzklasse nennen wir

$$\tilde{x} \quad \text{mit } x \in \tilde{x}$$

Float-Zahlen sind Äquivalenzklassen



Äquivalenzklassen Repräsentant

Wenn mit x gerechnet wird, wird immer mit dem gerundetem Wert der Äquivalenzklasse gerechnet.

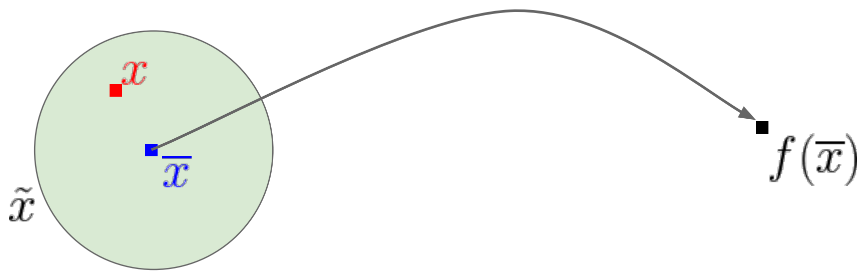
Äquivalenzklassen Repräsentant

Eine Funktion wird immer auf diesen angewandt.

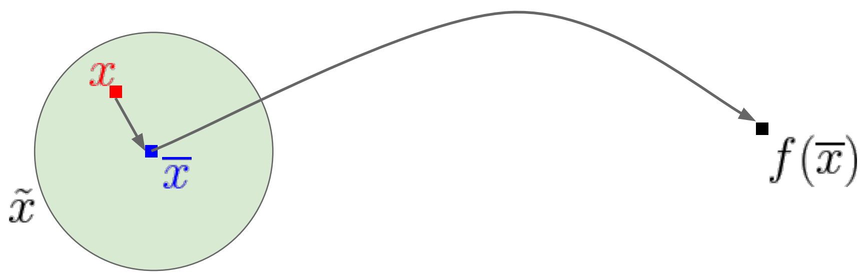
$$\exists\ \overline{x} \in \tilde{x} : f(\overline{x}) = f(\tilde{x})$$

Das x-Strich ist genau dieser Repräsentant. Alle anderen Zahlen verhalten sich beim Anwenden der Funktion f so, als seien sie x-Strich. Oder anders: Alle anderen Zahlen werden auf x-Strich gerundet. Deswegen ergibt die Funktionsauswertung aller x aus der Äquivalenzklasse genau den Funktionswert von x-Strich.

Äquivalenzklassen
Repräsentant



Äquivalenzklassen Repräsentant



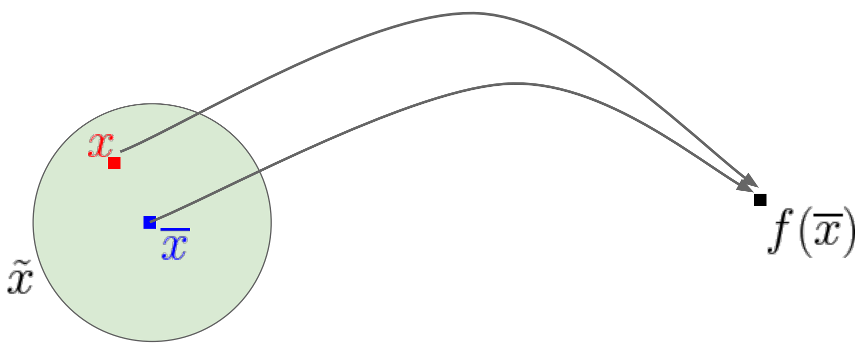
Alle Werte innerhalb von x-Schlange werden auf den Repräsentanten x-Strich gerundet und deswegen erhält man für alle das selbe Ergebnis!

Konditionsprobleme

Warum ist “die“ Ableitung interessant?

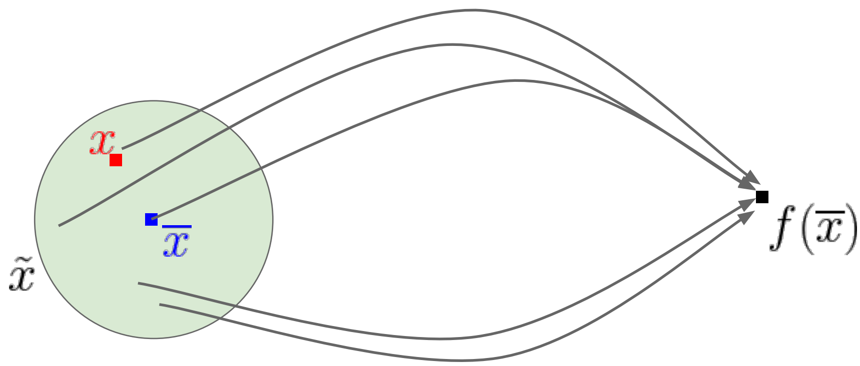
“die” Ableitung ist die Lösung nach Problemparameter Ableitung von letzter Woche.

Gute Kondition



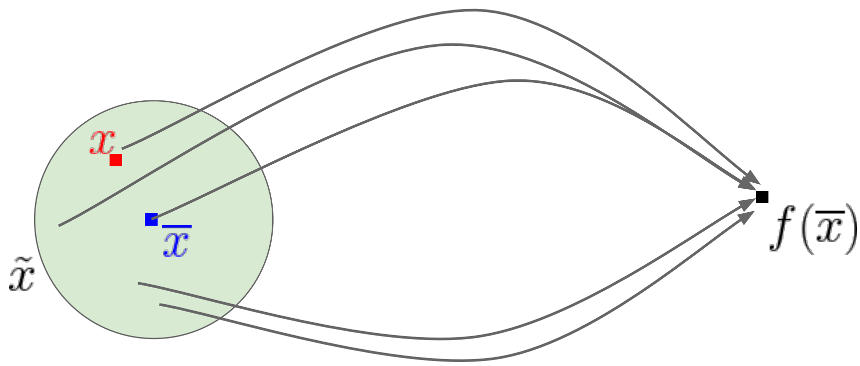
f(x) = f(x-Strich). Als das nicht gerundete x auf f angewendet ergibt das selbe wie das gerundete auf den Repräsentanten. Die Kondition ist dann gut, weil die Rundungsfehler keinen / einen geringen Einfluss auf das Ergebnis haben.

Gute Kondition



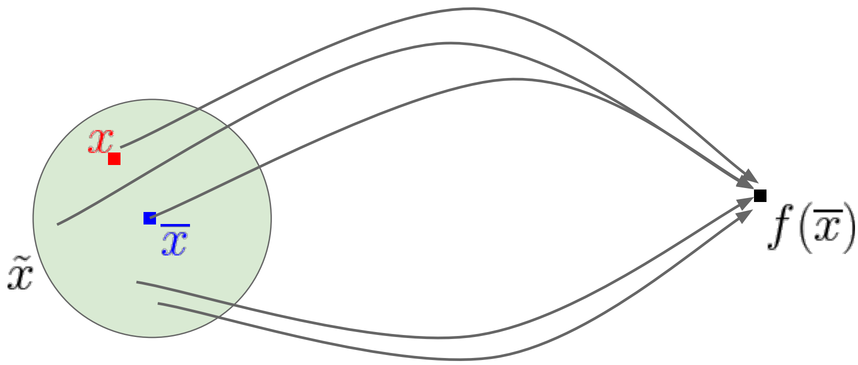
Gute Kondition

Alle Elemente der Äquivalenzklasse ergeben das Selbe.

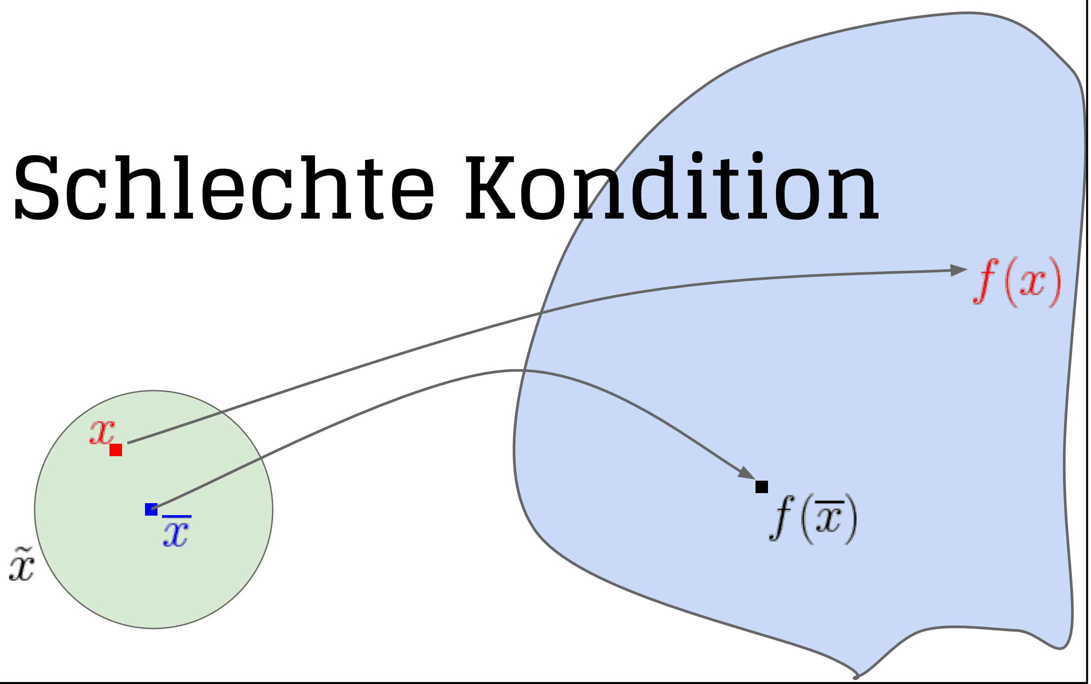


Gute Kondition

Es macht keinen Unterschied, dass gerundet wird...

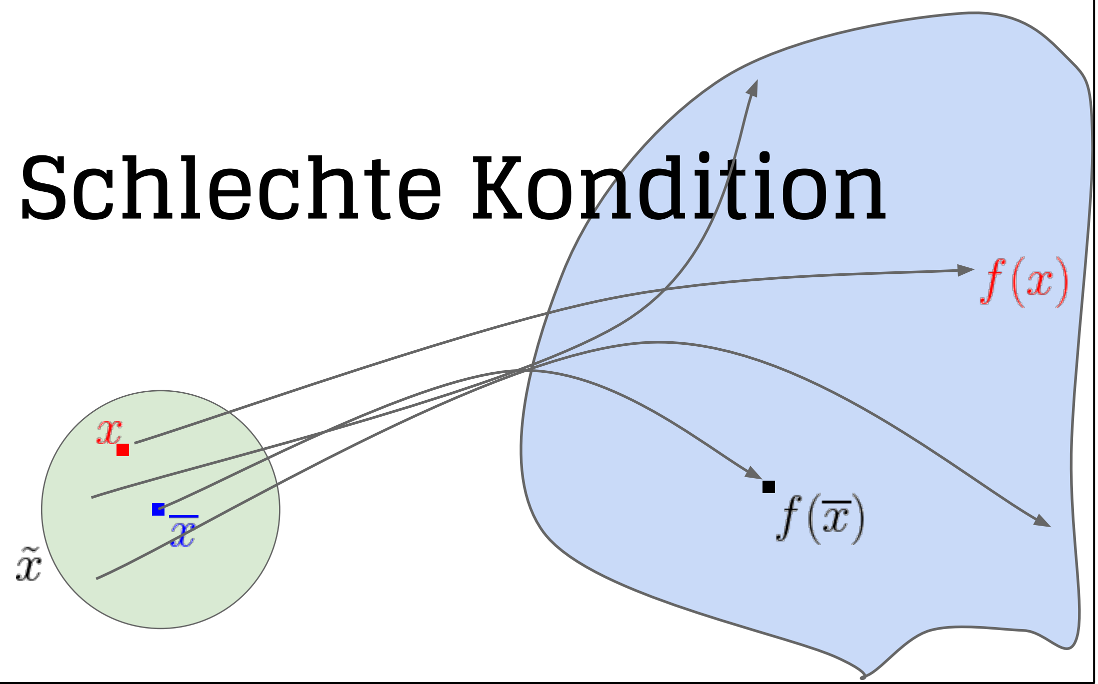


Schlechte Kondition



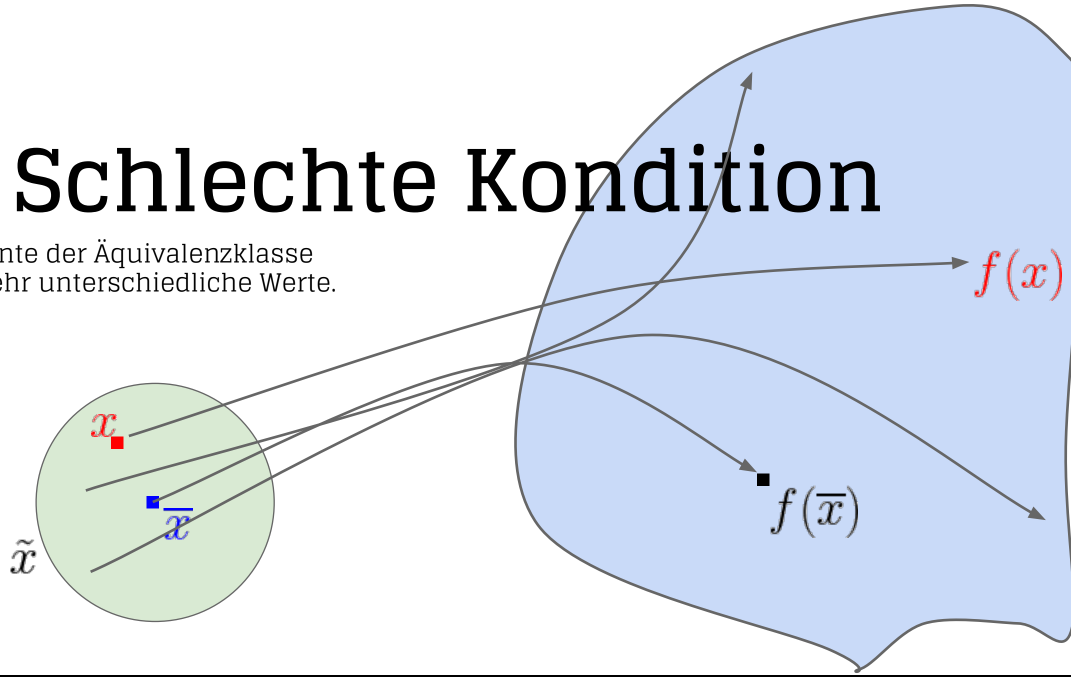
Hier ergibt die Anwendung von f auf das nicht gerundete x ein ganz anderes Ergebnis als wenn man erst x rundet und dann f anwendet. Je weiter die Elemente aus einer “Rundungsäquivalenzklasse” auseinander liegen, desto schlechter ist die Kondition.

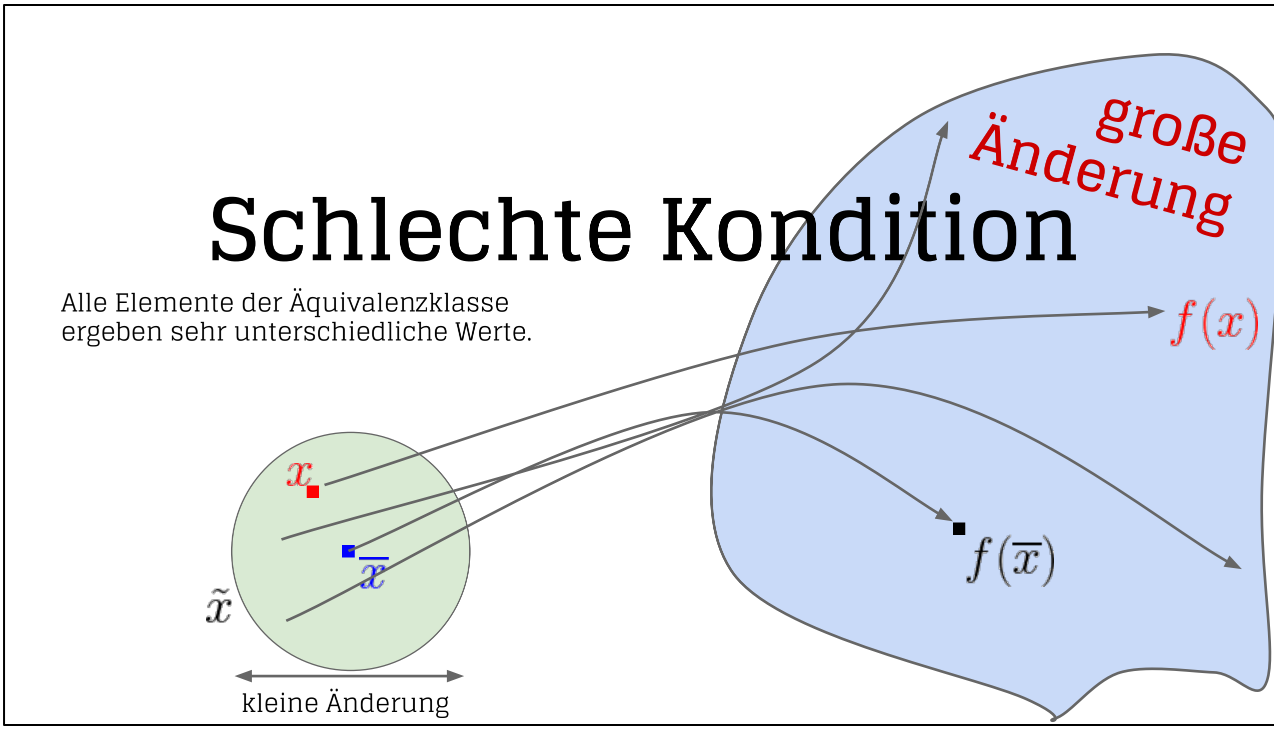
Schlechte Kondition



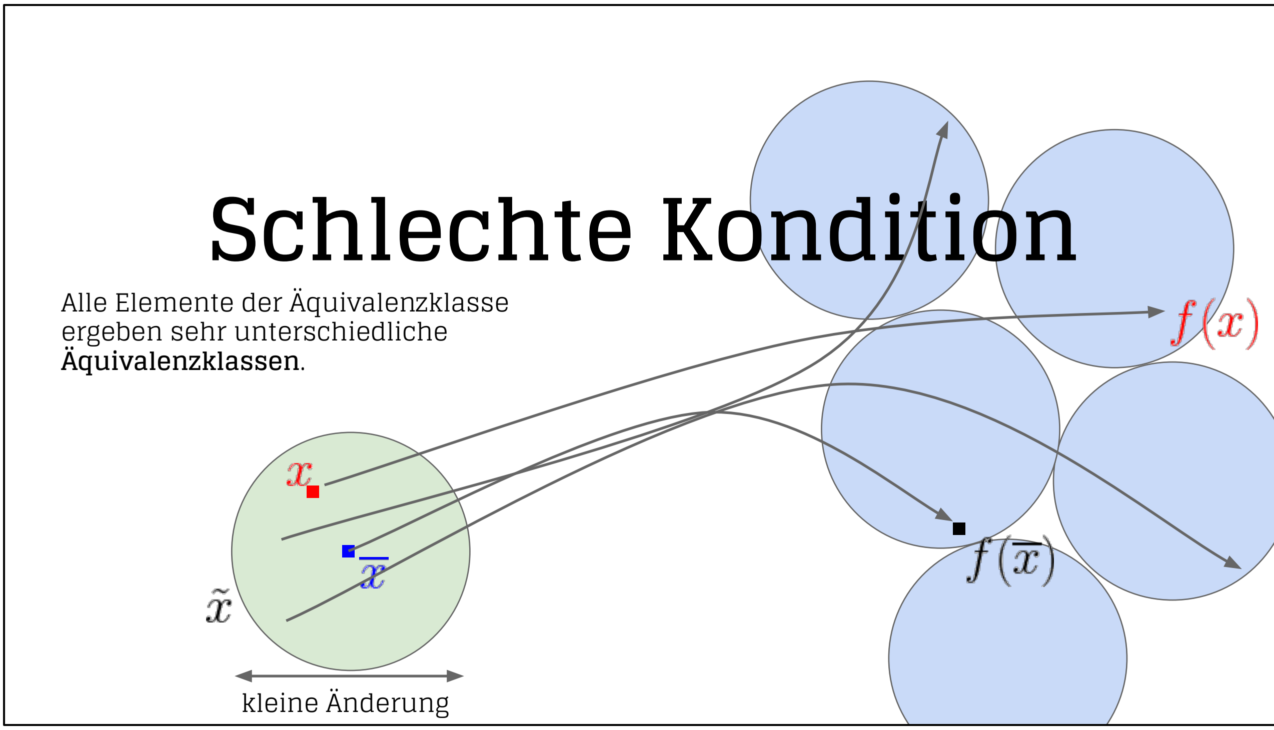
Schlechte Kondition

Alle Elemente der Äquivalenzklasse
ergeben sehr unterschiedliche Werte.

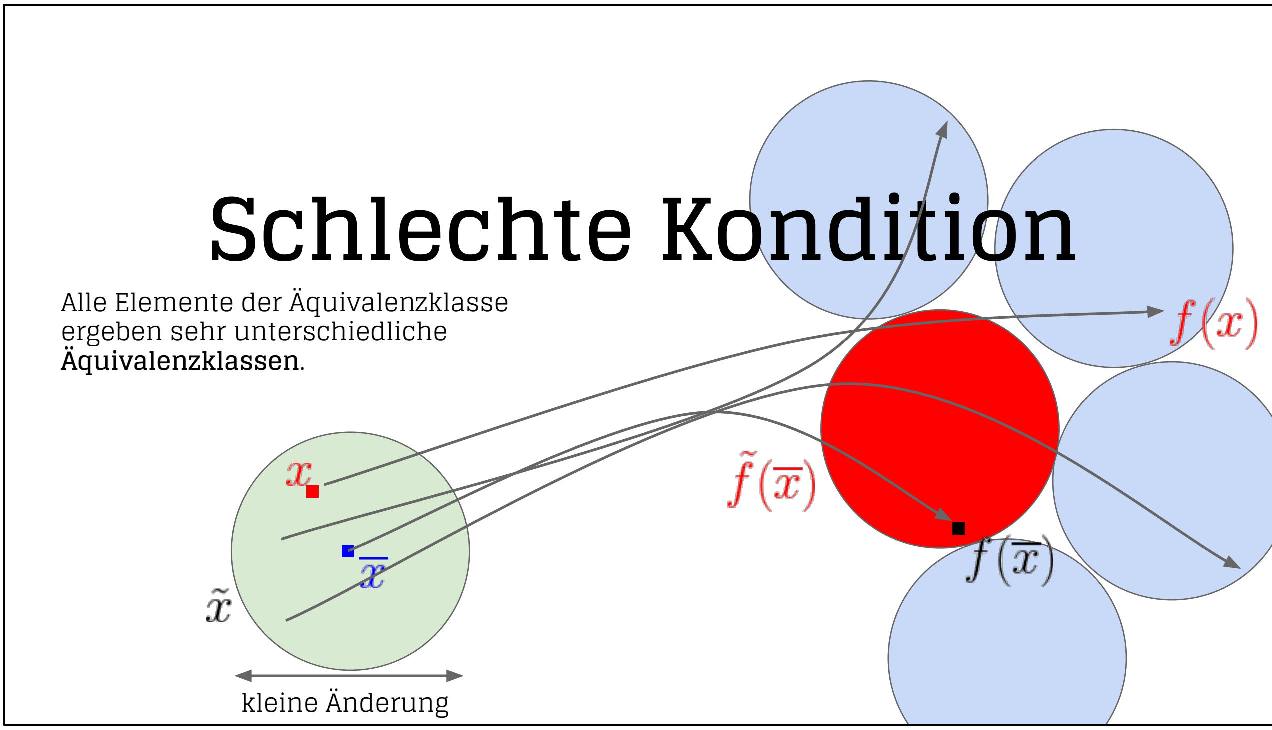




Auf der Folie ging die “große Änderung” nicht größer. Das Größenverhältnis ist bei schlecht konditionierten Problemen oft weitaus schlechter. Mit “Größenverhältnis“ ist die Größe des Eingabeparameterraumes (hier grün) zum Lösungsraum (hier blau) gemeint.



Der Lösungsraum würde auch wieder aus Äquivalenzklassen bestehen in denen verschiedene Lösungen auf einen Repräsentanten gerundet werden.



Der Lösungsraum würde auch wieder aus Äquivalenzklassen bestehen in denen verschiedene Lösungen auf einen Repräsentanten gerundet werden.

Kondition misst auch

$$\|f(x) - f(\tilde{x})\|$$

Diese Definition ist allgemeiner als die Ableitungsdefinition!

Allgemeiner, aber auch schwerer einzuschätzen. Ein Problem kann jedoch auch gut konditioniert sein, selbst wenn es nicht ableitbar ist, dafür braucht man eine Definition die unabhängig von der Ableitung ist. Da wir immer mit Differentialgleichungen arbeiten, reicht uns jedoch die Ableitung. Die Ableitung selber müsste noch durch (x-” x_Tilde”) teilen, da wir aber sagen, dass die Äquivalenzklassen für einen festen Radius haben in dem alle anderen liegen kann man das ganz gut mit der Ableitung abschätzen.

Eine andere Sichtweise, die die Annäherung durch die Ableitung erklären kann ist eine einfache Taylor Approximation von f um x, dann hätte man || f(x) - f(x) - df/dx (x_Tilde - x) + O((x_Tilde - x)^2)|| <= C* ||df/dx|| mit C ist unsere Auflösung der Fließkommazahl.

Was ist Stabilität

Eine Bewertung eines Verfahrens

Was ist ein Verfahren

Eine Aneinanderreihung von Operationen

$$f(x) = (f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1)(x)$$

Hier besteht f(x) aus n verschiedenen Funktionsauswertungen.

Stabilität über Kondition

Jede Operation des Verfahrens kann
gut oder schlecht konditioniert sein.

Stabilität über Kondition

Verwendet ein Verfahren schlecht konditionierte Operationen, so ist das Verfahren (wahrscheinlich) instabil!

Es kommt dabei immer darauf an, was für einen Einfluss die durch die schlecht konditionierte Operation berechneten Werte haben. Z.B. kann die Zahl nur einen sehr kleinen Einfluss auf das Endergebnis haben und würde damit das Verfahren nicht beeinträchtigen.

Stabilität über Kondition

Verwendet ein Verfahren viele Operationen, so kann dies auch zu einer schlechten Stabilität führen

Jeder einzelne Aufruf führt zu mehr Rundungsfehlern, was dazu führen kann (aber nicht muss), dass der Fehler immer größer wird.

Stabilität ist:

Zusammenspiel der einzelnen Operationen

Stabilität ist:

$$\|f(\tilde{x}) - \tilde{f}(\tilde{x})\|$$

Rundungsfehler der einzelnen Operationen

(ohne Rundung der Eingabe)

Beispiel: instabil!

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Differenzenquotient

Beispiel: instabil!

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ Differenz fast gleicher Zahlen

Differenzenquotient

Beispiel: instabil!

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Differenz fast gleicher Zahlen

Division durch fast 0

Differenzenquotient

Beispiel: instabil!

Beides schlecht konditioniert!

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Differenz fast gleicher Zahlen

Division durch fast 0

Differenzenquotient

Und warum ist der explizite Euler so schlecht / instabil?

Jede Operation ist gut konditioniert..

Der explizite Euler verwendet Addition und Mulitplikation.

Beides ist eigentlich immer gut konditioniert

Expl. Euler diskretisiert!

Die Lösung der Diskretisierung ist “gut”
vom expl. Euler gelöst

Expl. Euler diskretisiert!

Die Diskretisierung konvergiert!

bzw. es ist ein konvergentes Verfahren

Expl. Euler diskretisiert!

D.h. nicht, dass es für alle Schrittweiten gut ist!

Stabilität hängt von mehr als nur der Einzelkondition ab!

Was neues...

Heightfieldwater

Modellherleitung

Große Fragen

Fragen vor dem Modellentwurf:

- Intention?
- Invarianten?
- Vereinfachungen?
- Aufwand?

Intention!

Wasser simulieren!

und zwar

einfach

Invarianten!

Das übliche:

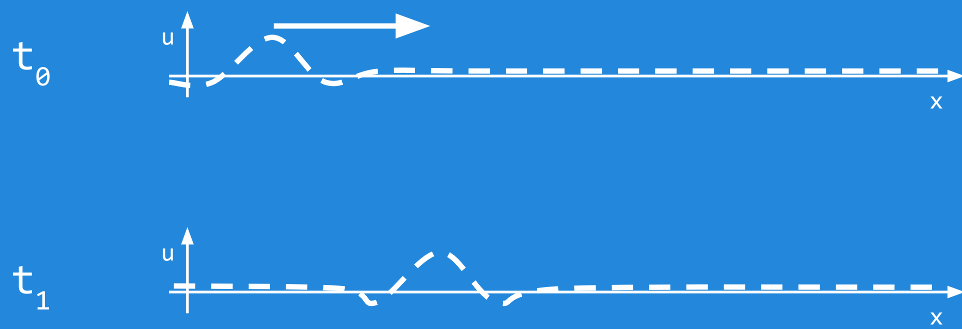
- Impuls
- Energie
- Wassermenge

Vereinfachungen!

- Nur Wasserhöhe
- Keine Bodeninteraktion
- Keine Objektinteraktion

Aufwand!

Gering – Echtzeit!



Wellen können sich nach rechts bewegen

Beobachten!

Wellen können sich nach links bewegen

Beobachten!

Bewegung nach rechts

$$u(x, t_1) = u(x - c(t_1 - t_0), t_0)$$

Bewgung nach links

$$u(x, t_1) = u(x + c(t_1 - t_0), t_0)$$

c = Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen

Formal - Voraussetzung

Bewgung aus beiden Richtungen

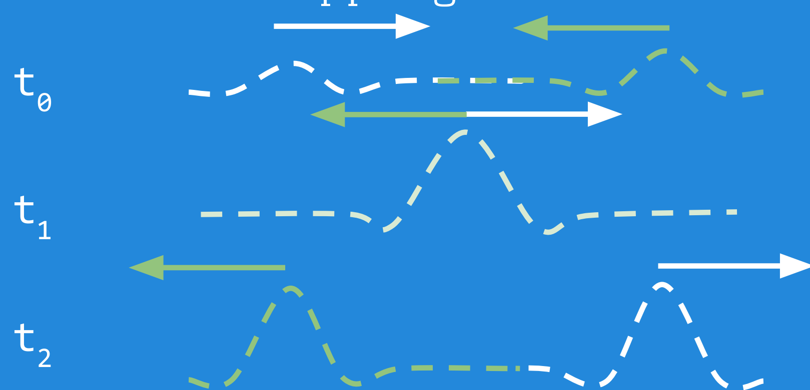
$$u(x, t_1) = u(x - c(t_1 - t_0), t_0) + u(x + c(t_1 - t_0), t_0)$$

Passt nicht!

(Es muss klar zwischen Rechtswellen und Linkswelle unterschieden werden)

Formale - erste Idee

Überlappung der Teilwellen



Energie bleibt nicht konstant!

Gegenbeispiel - Energiegewinnung

Bewgung aus beiden Richtungen

$$u(x, t_1) = r(x - c(t_1 - t_0), t_0) + l(x + c(t_1 - t_0), t_0)$$

r = Rechtswellen
l = Linkswellen

Das geht in 1D!

Schwer erweiterbar auf 2D!
(gäbe unendlich viele Richtungswellen)

Erweiterung auf 2D:
*Yuksel, Cem, Donald H. House, and John Keyser. "**Wave particles.**"*
ACM Transactions on Graphics (TOG) 26.3 (2007): 99.

Formale - zweite Idee

Betrachte **zeitliche** Änderung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -cr' + cl' \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 r'' + c^2 l''$$

Räumliche Änderung könnten nun interessant sein!

$$\frac{\partial u}{\partial x} = r' + l' \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = r'' + l'' = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Umformulieren!

Und jetzt?

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{c}u_{tt}$$

Super!

räumliche und **zeitliche** Ableitungen hängen zusammen

Aber was bringt uns das?

Die (Summe der) zweiten Ableitungen im Raum werden gerne auch durch dem Laplace Operator (großes Delta Δ) ausgedrückt. Also Δu = 1/c^2 * d^2u /(dt^2). Weiterhin werden für partielle Ableitungen häufig Indexe verwendet so ist die zweite Ableitung nach der Zeit auch u_tt = d^2u /(dt^2) (wobei _ Indexe andeutet)

Räumliche Ableitungen?

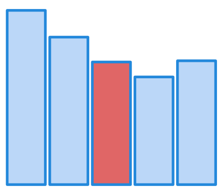
Räumliche Ableitung simpler als zeitliche

- approximierbar durch Diskretisierung
- **keine** unbekannten Werte!
- *"wie schon immer"*

Diskretisierte Ableitung

Ableitung = Grenzwert der Sekanten

Grenzwert nicht diskret bestimmbar
=> Sekante muss ausreichen.

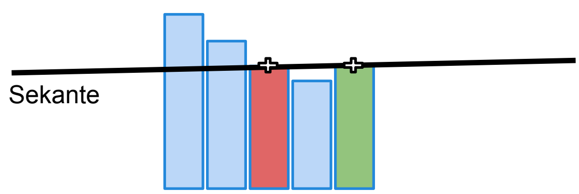


Diskretisierte Ableitung

Ableitung = Grenzwert der Sekanten

Grenzwert nicht diskret bestimmbar

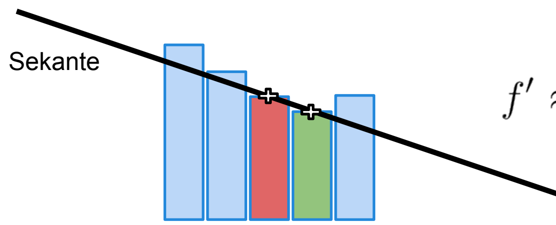
=> Sekante muss ausreichen.



Diskretisierte Ableitung

Ableitung = Grenzwert der Sekanten

Grenzwert nicht diskret bestimmbar
=> Sekante muss ausreichen.



$$f' \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

MOMENT!

Differenzenquotient war doch instabil!

$$f' \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

MOMENT!

Differenzenquotient war doch instabil!

$$f' \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Ja, aber hier haben wir einen Beschränkung durch die Diskretisierung!

Besser als mit Auflösung **h** kann man das Problem nicht lösen.

MOMENT!

Lösung wird aber mit kleinerem h nicht unbedingt besser !

Ist auch nur ein einfaches Modell!

Bitte Stempeln!

Reine Notation!

Umliegende Gitterpunkte werden gern über einen Stempel beschrieben. Z.B.

$$\frac{0 \cdot f(x-h) - f(x) + f(x+h)}{h} = \frac{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}{h} f(x) \approx f'(x)$$

oder

$$\frac{-f(x-h) + f(x) + 0 \cdot f(x+h)}{h} = \frac{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}{h} f(x) \approx f'(x)$$

Zweite Ableitung

Verwende beide Approximationen der ersten Ableitung

$$\frac{[0 \quad -1 \quad 1]}{h} f(x) \approx f'(x) \approx \frac{[-1 \quad 1 \quad 0]}{h} f(x)$$

Die Zweite Ableitung wird dann geteilt:

$$f''(x) = (f'(x))'$$

Technische Details

$$
\begin{aligned}
(f'(x))' &\approx \left(\frac{[0 \quad -1 \quad 1]}{h} f(x)\right)' \quad = \left(\frac{-f(x)+f(x+h)}{h}\right)' \\
&= \frac{-f'(x)+f'(x+h)}{h} \\
&\approx \frac{-[-1 \quad 1 \quad 0]\, f(x) + [-1 \quad 1 \quad 0]\, f(x+h)}{h^2} \\
&= \frac{f(x-h) - 2 \cdot f(x) + f(x+h)}{h^2} \\
&= \frac{[1 \quad -2 \quad 1]}{h^2} f(x) \approx f''(x)
\end{aligned}
$$

Zeitraum-Kopplung

Es gilt die DLG zu lösen!

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Die räumliche Ableitungen sind trivial!

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{c^2}{h^2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}_x u$$

Also fangen wir damit an!

Der Index x bei [1 -2 1]$_x$ bezeichnet den Stempel bezüglich x

Mit der Zeit wird alles anders

Die zeitlichen Ableitungen kann man genauso bestimmen!

zu Speichern: $u(x, t - \delta t) \quad u(x, t)$

Mit der Zeit wird alles anders

Natürlicher ist jedoch die Beschreibung über **Geschwindigkeiten**!

zu Speichern: $u(x,t)$ $\dot{u}(x,t)$

Das ganze System

Man erhält dann:

$$\dot{u}(x, t + \delta t) = \dot{u}(x, t) + \frac{\delta t \cdot c^2}{h^2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}_x u(x, t)$$

$$u(x, t + \delta t) = u(x, t) + \delta t \cdot \dot{u}(x, t + \delta t)$$

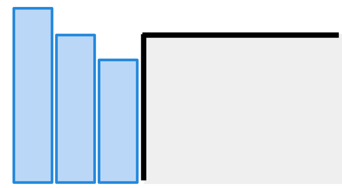
es wird natürlich symplektisch integriert!

Man benötigt:

$$u(x, t_0) \qquad \dot{u}(x, t_0)$$

Ränder!

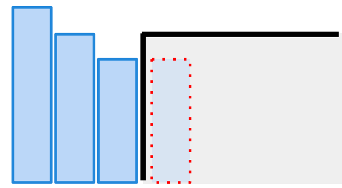
Ein großes Problem beim Lösen von DGLs

Ränder! 

Gesonderte Behandlung notwendig.

Ränder!

Ein großes Problem beim Lösen von DGLs

Ränder! 

Tue einfach so als gäb es Wasserhöhe der **gleichen Höhe** in der **Wand** wie am **Rand**

Und 2D?

Einfach den Stempel erweitern.

$$\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & -4 & 1 \\ & 1 & \end{bmatrix} \approx \Delta f(x)$$

An der Zeitintegration ändert sich nichts

Und 3D?

Wichtig! Wir haben die Wellengleichung betrachtet.

- Stark vereinfacht
- Erweiterbar auf 3D!
- Aber! Keine Lösung für Fluide

Und 3D?

Für Fluide braucht man dann

Navier-Stokes

$$\underbrace{\rho\,(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u})}_{\text{Acceleration}} = \underbrace{-\nabla p}_{\text{Pressure}} + \underbrace{\nu \triangle \vec{u}}_{\text{Viscosity}}$$

$$\underbrace{\nabla \cdot \vec{u} = 0}_{\text{Continuity Equation}}$$

Stabilität

Für das Vorgestellte Modell gilt:

> *Wellen können sich pro Zeitschritt höchstens um eine Zelle bewegen*

Stabilität

Das heißt wir haben folgendes Constraint:

$$c < \frac{h}{\delta t}$$

(CFL - Bedingung)
Courant–Friedrichs–Lewy condition

Mit dem rechts-links Wellenmodell gabs die Einschränkung so nicht.

Partielle DGL

Bisher hatten wir nur gewöhnliche DGLs (ODEs)

Ableitungen nach einer Variablen (t)

Wellengleichung ist PDE

Die Wellengleichung hat Ableitungen nach Raum und Zeit.

Gelten generell als “schwer”.

(insbesondere die nichtlinearen)

Lineare PDEs

Ein Großteil aller Modellierungsprobleme ist auf lineare PDEs zurückzuführen.

Es gibt drei Typen:

elliptisch parabolisch hyperbolisch

Kegelschnitt PDEs

Das sind die selben Gruppen wie bei Kegelschnitten.

Die allgemeine Kegelschnittgleichung

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

Kegelschnitt PDEs

Das sind die selben Gruppen wie bei Kegelschnitten.

Die allgemeine lineare PDE Gleichung

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + f = 0$$

Kegelschnitt PDEs

Das sind die selben Gruppen wie bei Kegelschnitten.

Klassifizierung in elliptisch etc. ist gleich!

Bis zum nächsten Mal

1. Ein 1D Heightfieldwater implementieren.
2. Die Heat Equation lösen
3. Extra: Advektion berechnen
4. Extra: Eine Erweiterung Implementieren
5. Warum rechnen wir mit Kräften und nicht mit Beschleunigungen?

22.05.2015

Abgaben an

vrlab15@welfenlab.de

bis zum:

21.05.2015