VR-Labor

Nachtrag zur Lagrangemechanik...

Prof. F.-E. Wolter
Maximilian Klein

Welfenlab

Bis heute!

08.05.2015

1. Pendel simulieren
2. Planetensystem implementieren
3. **Erläutern warum das Energieproblem der nicht konservativen DGLs kein Problem ist**
4. Kleine “Fluidsimulation”

Ihr stellt vor

Modellierung mit Federn

Hooksches Gesetz

$F = k \Delta x$

Modellierung mit Federn

Hooksches Gesetz

$F = k \Delta x$

Auslenkung! Nicht jede Feder muss um (0,0) schwingen!

Modellierung mit Federn

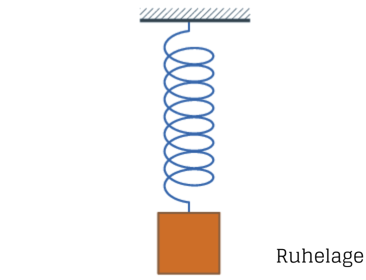
Hooksches Gesetz

$F = k\,\Delta x$

Auslenkung! Nicht jede Feder muss um (0,0) schwingen!

Super auf 2D erweiterbar!

Pendel, Federpendel…
Was für’n Pendel?



Noch sehr 1D-ig

Ruhelage!

auch ohne Gravitation

Quelle: Wikipedia, Federpendel

In den echten Folien schwingt die Feder, PDF nur Momentaufnahme. Das Pendel mit fixem Arm sollte mit einem Federpendelmodell modelliert werden.

Wichtig!

Feder hat immer zwei Punkte bei unserer Modellierung

Start & Ende! (s,e)

Und eine Ruhelänge! (l_0)

Feder mit Start & Ende

$$\vec{F} = k(|\vec{s} - \vec{e}| - l_0)\frac{\vec{s} - \vec{e}}{|\vec{s} - \vec{e}|}\ ^{*}$$

* oder alles Mal -1, je nachdem ob das für den Start- oder Endpunkt gilt

Feder mit Start & Ende

$$\vec{F} = k\underbrace{(|\vec{s} - \vec{e}| - l_0)}_{\text{Auslenkung}}\frac{\vec{s} - \vec{e}}{|\vec{s} - \vec{e}|} \quad *$$

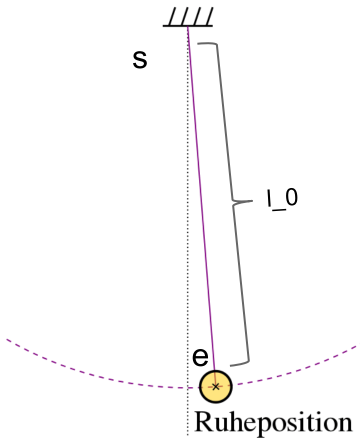
* oder alles Mal -1, je nachdem ob das für den Start- oder Endpunkt gilt

Feder mit Start & Ende

$$\vec{F} = k\underbrace{(|\vec{s} - \vec{e}| - l_0)}_{\text{Auslenkung}}\underbrace{\frac{\vec{s} - \vec{e}}{|\vec{s} - \vec{e}|}}_{\text{Richtung}} {}^{*}$$

* oder alles Mal -1, je nachdem ob das für den Start- oder Endpunkt gilt

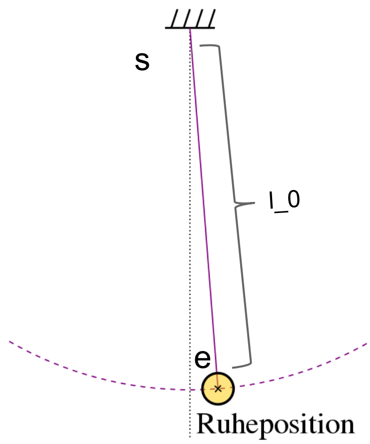
Pendel mit fester Armlänge



Pendelarm wird mit Feder modelliert

Quelle: Wikipedia, Pendel

Pendel mit fester Armlänge



Quelle: Wikipedia, Pendel

Pendelarm wird mit
Feder modelliert

damit er fest ist
k sehr groß machen
+ damping??

Großes k -> kleines dt. Oder implizit simulieren.

Kopplung?

Feder an Feder an Feder ....

Doppelpendel = Feder an Feder

Z.B. hätte man so das Bridge Builder Spiel anfangen können. Man bräuchte noch Federn die kaputt gehen und Federn die den Winkel halten.

Kopplung?

Feder an Feder an Feder ....

Doppelpendel = Feder an Feder

Problem: Je steifer desto instabiler!

Kopplung?

Feder an Feder an Feder ....

Doppelpendel = Feder an Feder

Problem: Je **steifer** desto instabiler!

=

hohes k

Implementierungs-Probleme

1

Teilen durch Null...

$$\vec{F}_1 = G m_1 m_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

Implementierungs-Probleme

1

Teilen durch Null… (nahezu)

[Animation: Grüner Planet kommt von links und wird durch gelben Planet extrem beschleunigt, Größe soll mit Masse korrelieren]

Implementierungs-Probleme

1

Teilen durch Null... (nahezu)

Lösung 1:
Kollisionen

Implementierungs-Probleme

1

Teilen durch Null… (nahezu)

Lösung 2:
If-Abfrage… ist halt ein Modellierungsproblem wenn man keine Kollisionen hat.

Implementierungs-Probleme

2

Frühzeitiges Verschieben

1. ALLE Kräfte berechnen
2. ALLE Positionen updaten

NICHT einzeln!

Implementierungs-Probleme

3

Kraft ≠ Beschleunigung

Oft wurde die Masse nicht rausgeteilt

$a = F / m$ (!!!)

Auch überall anders bitte immer auf die Einheiten achten.

Lokaler Fehler
vs.
Globaler Fehler

Lokaler Fehler

… wie sich nach **einem** Verfahrens-schritt die numerische Lösung von der exakten Lösung unterscheidet

Fabian Meyer

Globaler Fehler

Der globale Fehler entsteht durch Akkumulation der lokalen Fehler

Fabian Meyer

(Üblicherweise)

Lokaler Fehler

$$O(h^{p+1})$$

Globaler Fehler

$$O(h^{p})$$

p = Fehlerordnung

(Üblicherweise)

Lokaler Fehler

$$\mathbf{O(h^{p+1})}$$

Globaler Fehler

$$\mathbf{O(h^{p})}$$

Konvergenzrate!

p = Fehlerordnung

Globaler Fehler für uns meist nicht soo interessant.

Lokaler Fehler
(mit Taylorreihe)

$$f(t+\Delta t)$$

Das wollen wir

Lokaler Fehler
(mit Taylorreihe)

$$f(t+\Delta t) = f(t) + \ldots$$

Da sind wir gerade

Lokaler Fehler
(mit Taylorreihe)

$$f(t+\Delta t) = f(t) + \mathbf{f'(t)\Delta t} + \ldots$$

f' kennen wir, erstes Glied
der Taylorreihe

Lokaler Fehler

(mit Taylorreihe)

$$f(t+\Delta t) = f(t) + f'(t)\Delta t + O(\Delta t^2)$$

Unser lokaler Fehler

Das ist die Taylorreihenentwicklung für f um t.

Lokaler Fehler
(mit Taylorreihe)

$$f(t+\Delta t) = f(t) + f'(t)\Delta t$$

Expliziter Euler mit $O(\Delta t^2)$ lokalem Fehler

Das ist der explizite Euler, der exakt die Taylorreihe ohne den Fehlerterm ist.

Verifikation!

(z.B. über die Energie)

Verifikation ist immer wichtig. Die Energie ist eine der einfachen Verifkationsmöglichkeiten, insbesondere wenn man nur Potentialfelder hat.

Energie?

Kinetische: $\frac{1}{2} m v^2$

Energie?

Kinetische: $\Sigma_i \; \frac{1}{2} \; m_i \, v_i^2$

Energie?

Kinetische: $\Sigma_i \; ½ \; m_i \, v_i^2$

Potentielle: $\int F_{i,j} \, dr$

Für das Potential brauchen wir die Masse des anderen Partikels (m*)

Energie?

Kinetische: $\Sigma_i \; \frac{1}{2} \; m_i \, v_i^2$

Potentielle: $\int_{R_i}^{R_i} F \, dr$

Für das Potential brauchen wir die Masse des anderen Partikels (m*)

Energie?

Kinetische: $\Sigma_i \; \frac{1}{2} \; m_i \, v_i^2$

Potentielle: $\int_{R_i}^{R_i} C \,/\, r^2 \, dr$

Wobei: $C = G \, m_i \, m_j$

und m_j ist die Masse des anderen Partikels

Energie?

Kinetische: $\Sigma_i \ \frac{1}{2} \ m_i \, v_i^2$

Potentielle: $C / R_i - C / R_j$

Wobei: $C = G \, m_i \, m_j$
und m_j ist die Masse des anderen Partikels

Energie?

Kinetische: $\Sigma_i \ \frac{1}{2} \ m_i \, v_i^2$

Potentielle: $\Sigma_{i,j} \ C / R_i - C / R_j$

Wobei: $C=G \, m_i \, m_j$

und m_j ist die Masse des anderen Partikels

Energie?

Kinetische: $\Sigma_i \; \frac{1}{2} \; m_i \, v_i^2$

Potentielle: $\Sigma_{i,j} \; C / R_i - C / R_j$

Die Summe der beiden muss konstant sein!

Und nicht konservative?

1. Unser Modell missachtet viel (z.B. Temperatur)

Und nicht konservative?

1. Unser Modell missachtet viel (z.B. Temperatur)
2. Jedes konservative = energieerhaltend.
   Daraus folgt nicht, das jedes nicht konservative nicht energieerhaltend ist!

Und nicht konservative?

1. Unser Modell missachtet viel (z.B. Temperatur)
2. Jedes konservative = energieerhaltend.
   Daraus folgt nicht, das jedes nicht konservative nicht energieerhaltend ist!

Es gibt also nicht konservative mit $V \neq 0$ für die die Energieerhaltung gilt. ABER das ist meist ein numerisch nicht stabilier Punkt! => Lieber etwas Dämpfen...

Und nicht konservative?

1. Unser Modell missachtet viel (z.B. Temperatur)
2. Jedes konservative = energieerhaltend.
   Daraus folgt nicht, das jedes nicht konservative nicht energieerhaltend ist!

Es gibt also nicht konservative mit V≠0 für die die Energieerhaltung gilt. ABER das ist meist ein numerisch nicht stabilier Punkt! => Lieber etwas Dämpfen...

Nicht-konservative sind rein makroskopische Modelle?

Mirkoskopisch sind alle Gesetze Energieerhaltend. Die makroskopische Betrachtung sieht nur so aus als wäre für die üblichen betrachteten Gegebenheiten eine nicht konservative Kraft möglich.

Fluid

Lennard Jones Potential ist vielleicht “realitätsnah”

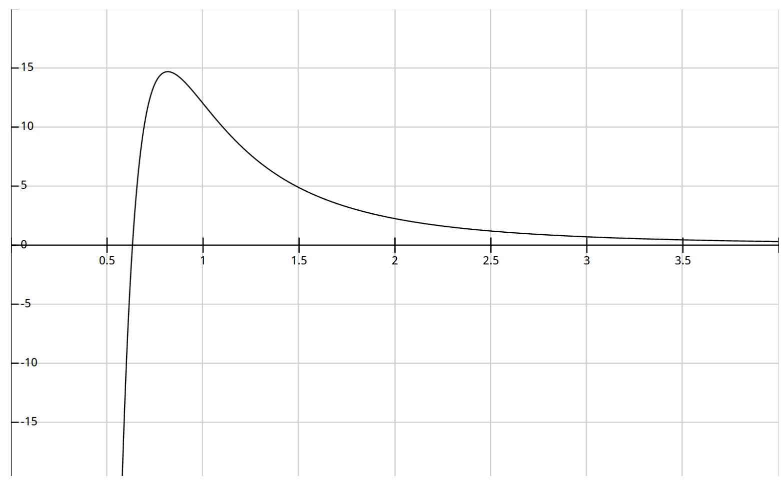
Modell ist aber sehr instabil
(Potential hat eine Polstelle!)

Poltellen erzwingen sehr kleine Schrittweiten oder eine implizite Integration.

Fluid

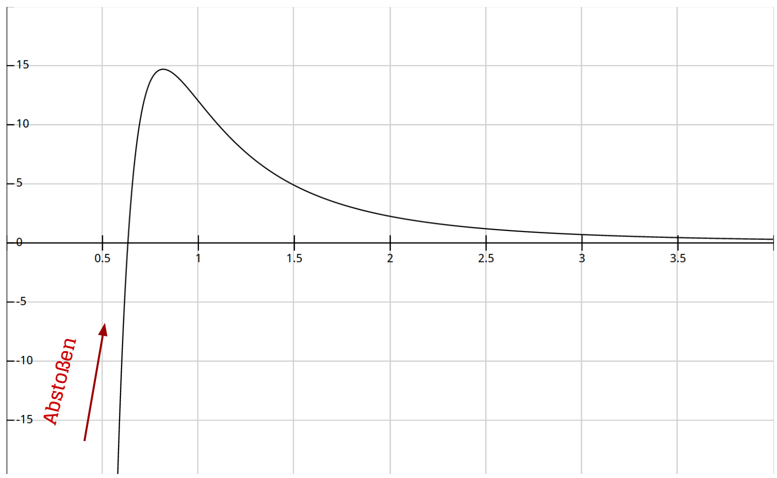
Wie findet man den richtigen Gitterabstand?

Kraft plotten...

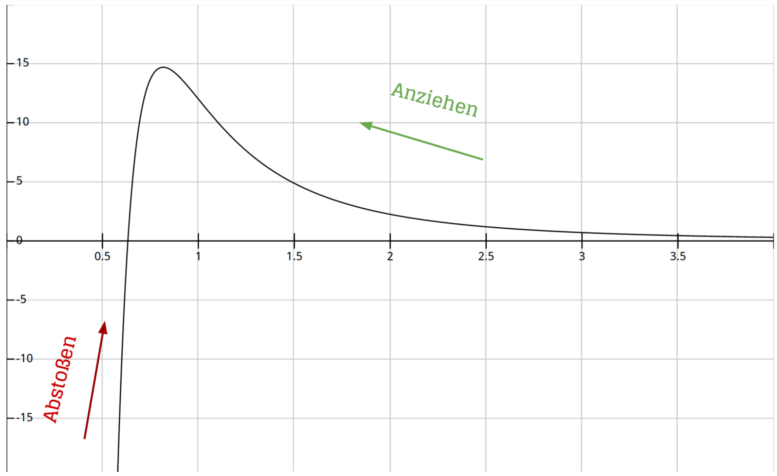


In der Vorlesung hatte ich es noch Potential genannt, aber das ist der Betrag der Kraft. Abzisse ist der Radius, Ordinate die Größe der Kraft.

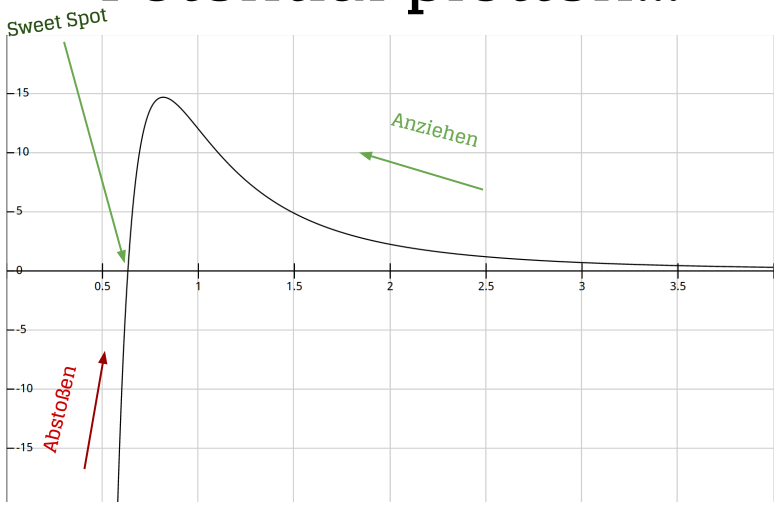
Potential plotten…



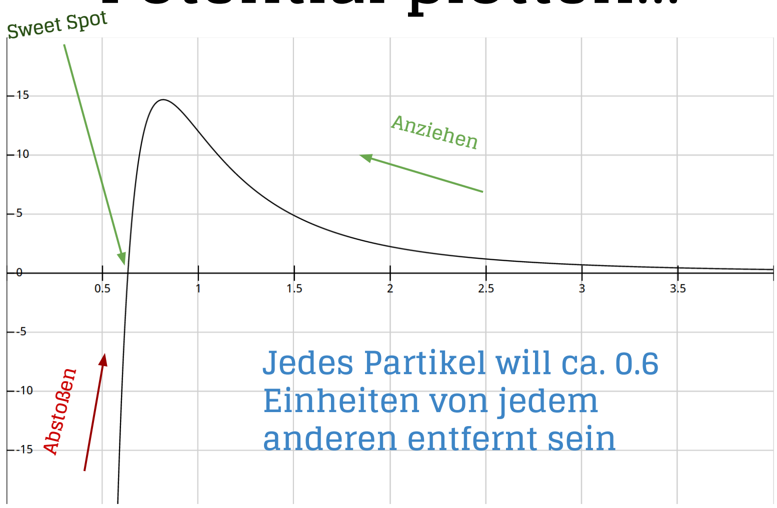
Potential plotten…



Potential plotten...



Potential plotten…



Was neues!

Ein bisschen Numerik...

Problemprobleme

Manche Probleme sind inhärent
schwer numerisch zu lösen.

Problemprobleme

Manche **Probleme** sind inhärent
schwer numerisch zu lösen.

Merke: Fokus liegt auf dem **Problem**!

Definition!

Kondition

Sei p unser Problem und f(p) die Lösung, dann ist die Kondition:

$$\kappa = \frac{\partial f(p)}{\partial p}$$

Wir nehmen mal an, dass f(p) nach p differenzierbar ist

Kondition umgangsprachlich

Wie stark beeinflussen Änderungen der “Eingabe” p die Lösung $f(p)$

Gute und schlechte...

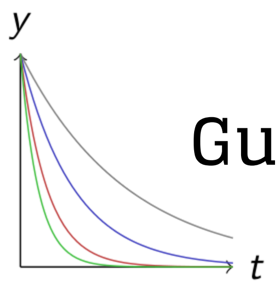
Gute und schlechte... Kondition

Je nach Wert der Ableitung unterteilt man in die Kategorien “gute” und “schlechte” Kondition

Gute und schlechte... Kondition

gut: wenn κ klein ist

schlecht: wenn κ groß ist (i.A. $\kappa >> 1$)



Beispiel: Gute Kondition

A-Stabilität! (Dhalquist)

Wir "wollten" das 0 raus kommt.

Wichtig: Das Dhalquist-Problem ist gut Konditioniert!

Dhalquist Lösungen

$$\lim_{t \to \infty} A(t) = 0$$

Für alle k>0.

$A(t) = e^{-kt}$

Beispiel:
Gute Kondition

Dhalquist!

Egal “wo”/bei welcher Höhe man anfängt es konvergiert immer gegen 0

Beispiel:
Gute Kondition

Dhalquist!

$$\kappa = \frac{\partial f(A_0)}{\partial A_0}$$

$$f(A_0) = \lim_{t \to \infty} A_0 e^{-kt} = 0 = f(A_0 + x)$$

f(A0+x) ist eine Abweichung von der Ursprungsposition A0. Diese macht nichts aus, da wir an der selben Stelle wieder ankommen.

Beispiel:
Gute Kondition

Dhalquist!

$$\kappa = \frac{\partial f(A_0)}{\partial A_0} = 0$$

Beispiel:
Gute Kondition

Dhalquist!

$$\kappa = \frac{\partial f(A_0)}{\partial A_0} = 0$$ ist klein!

Abgrenzung!
Kondition – Stabilität

Die DGL zur A-Stabilität ist ein gut konditioniertes Problem wenn man den Grenzwert $t \to \infty$ wissen will

Abgrenzung!
Kondition – Stabilität

Kondition hat nichts mit dem “Weg” / Algorithmus zu tun, der diese Lösung berechnet!

Abgrenzung!
Kondition – Stabilität

Stabilität bewertet den “Weg” / Algorithmus unabhängig von der Kondition.

Abgrenzung!
Kondition – Stabilität

Aber!

Wenn das Problem **schlecht konditioniert** ist, **dann** sind alle Algorithmen **nicht stabil**!

Beispiel:
schlechte Kondition

Heike Stecher, http://www.fotocommunity.de/pc/pc/display/15350914

Wetter

Schlechte Kondition: Wetter

Wie könnte man die Konditionszahl bestimmen?

Schlechte Kondition: Wetter

Zunächst muss klar sein was genau unsere Eingaben und unsere betrachtete “Lösung” ist!

Schlechte Kondition: Wetter

Beispiel:

Eingabe: Kraft des Flügelschlags
Lösung: ...

Schlechte Kondition: Wetter

Beispiel:

Eingabe: Kraft des Flügelschlags
Lösung: Regenmenge im April

Schlechte Kondition: Wetter

Beispiel:

Eingabe: Kraft des Flügelschlags
Lösung: Sonnenstunden im April

Schlechte Kondition: Wetter

Beispiel:

Eingabe: Kraft des Flügelschlags
Lösung: Temperatur auf dem Mars

$\kappa = 0$

K = 0 bedeutet, dass die Temperatur unabhängig von dem Flügelschlag ist. Die Kondition für dises Problem ist also gut!

Schlechte Kondition: Wetter

Beispiel:

Eingabe: Kraft des Flügelschlags
Lösung: Temperatur auf dem Mars

$\kappa = 0$ Das ist einfach!

Schlechte Kondition: Wetter

Kombination von mehreren Größen ist auch möglich!

Schlechte Kondition: Wetter

Beispiel:

Eingabe: Kraft des Flügelschlags
und Position des Schmetterlings

Lösung: Regenmenge und
Blitzeinschläge

Kondition von Vektorgrößen

Im Allgemeinen nicht einheitlich definiert. Hängt vom Fall ab!

Kondition von Vektorgrößen

$$\kappa = \left| \frac{\partial \vec{f}(\vec{p})}{\partial \vec{p}} \right| = \sum_{i,j} \left| \frac{\partial f_i(\vec{p})}{\partial p_j} \right|$$

Zombie Invasion

Beispiel: Dynamisches System

Was wäre wenn, ...

eine Krankheit die Menschheit befällt...

und diese zu **Zombies** werden lässt?

Übertragbar durch Bisse...

Motivation

Modellierung biologischer Systeme mit:

- komplexen Abhängigkeiten
- nicht bekanntem Ausgang

Mögliche Anwendung:

Auswirkungen von Epidemien abschätzen

Wissenschaftliche Publikation: Munz, Philip, et al. "When zombies attack!: mathematical modelling of an outbreak of zombie infection." Infectious Disease Modelling Research Progress 4 (2009): 133-150.

Modellierungsmöglichkeiten

1. Agentensystem

   fokussiert auf Individuen

2. mittels DGLs

   fokussiert auf Gesamtsystem

3. etc...

Modellierung: DGLs

Hier:

Modellierung mittels DGLs

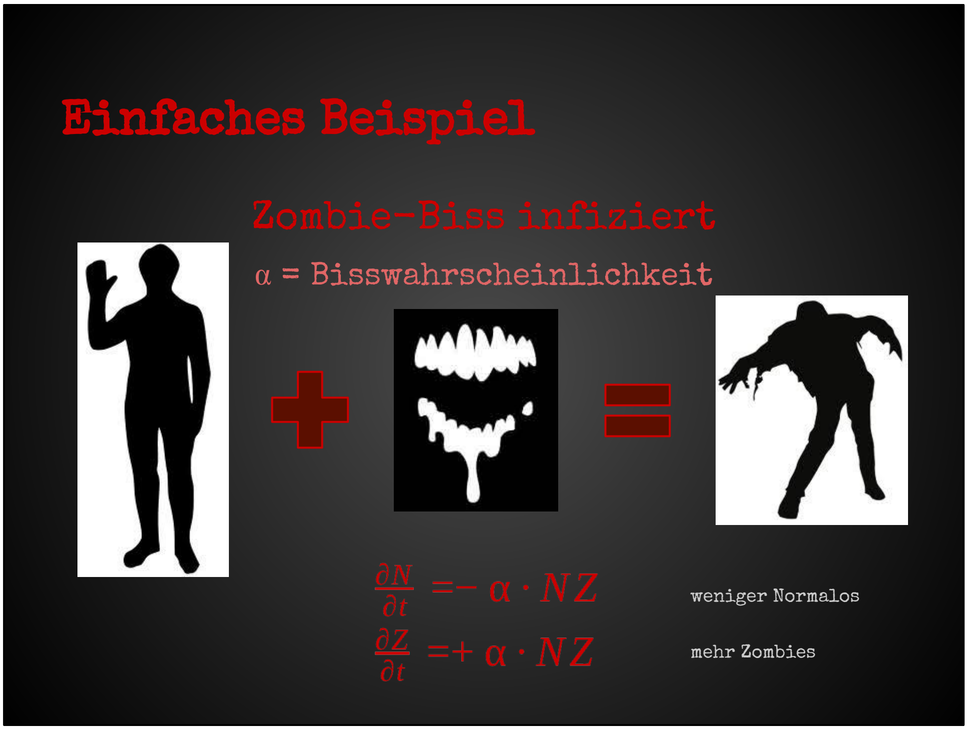
Aber wie?

Abstrahieren!

Wir betrachten 3 Gruppen

1. Nicht infizierte (N)
2. Zombies (Z)
3. Tote (T)

Und betrachten deren zeitliche Änderung



Einfaches Beispiel
Zombie-Biss infiziert
α = Bisswahrscheinlichkeit
$\frac{\partial N}{\partial t} = - \alpha \cdot NZ$
weniger Normalos
$\frac{\partial Z}{\partial t} = + \alpha \cdot NZ$
mehr Zombies

Weiteres Beispiel

Den Zombiebestand dezimieren:

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = -\gamma \cdot NZ$$

γ=Zombie-Dezimierrate

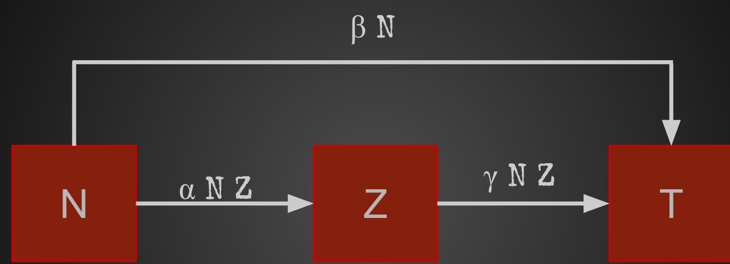
Schönes "Fluss"diagramm

Biss-Infektionen

Schönes "Fluss"diagramm

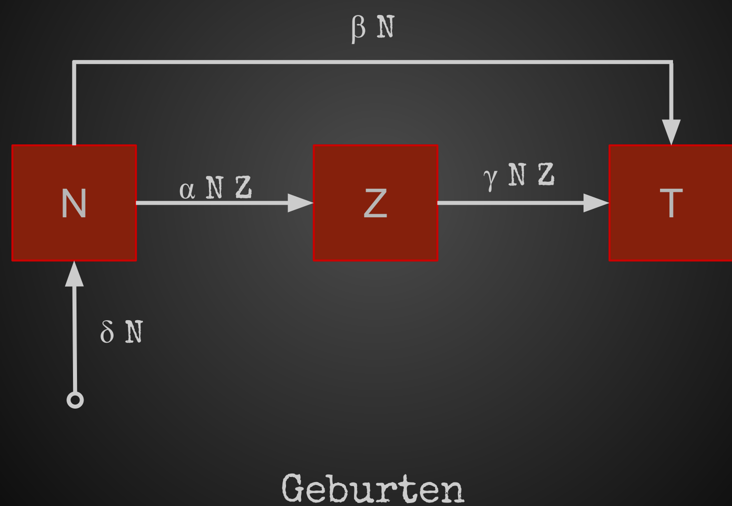
Zombie-Dezimierung

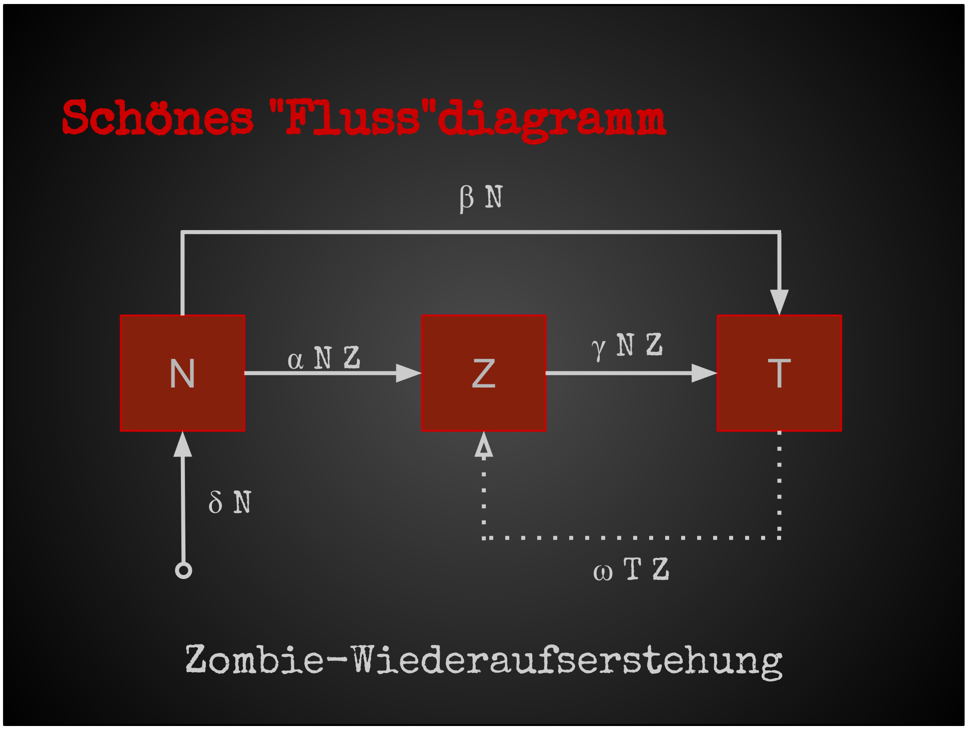
Schönes "Fluss"diagramm



Natürliche Tode

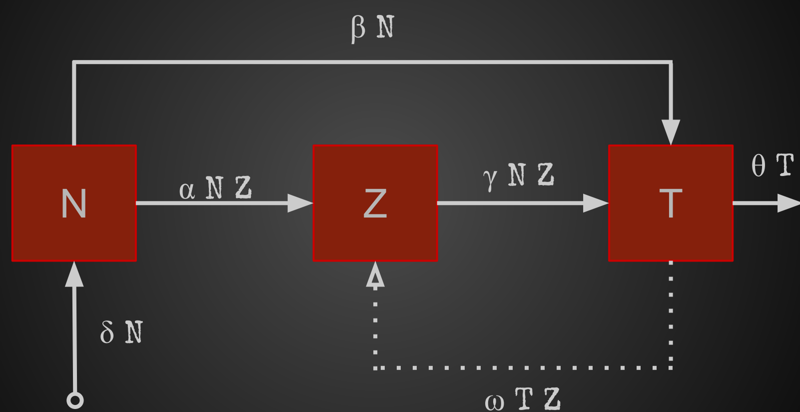
Schönes "Fluss"diagramm





Schönes "Fluss"diagramm
β N
N
α N Z
Z
γ N Z
T
δ N
ω T Z
Zombie-Wiederaufserstehung

Schönes "Fluss"diagramm



Endgültiges Ende

Die DGLs!

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \delta N - \alpha \cdot NZ - \beta N$$
$$\frac{\partial Z}{\partial t} = \alpha \cdot NZ + \omega ZT - \gamma NZ$$
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \beta N - \omega ZT + \gamma NZ - \theta T$$

Ist das ein gutes Modell?

Mehr!

Warum nicht als Agentensystem?

Vorteile:

1. Räumliche Verteilung
2. Indivduelle Eigenschaften
3. etc.

Mehr!

Warum nicht als Agentensystem?

Will man das wirklich?

Klarer Nachteil:

erhöhter Rechenaufwand / mehr Rauschen

Frage: Was will man erreichen?

Bis zum nächsten Mal!

1. Apokalypse implementieren
2. Apokalypsenanalyse
3. Paper durcharbeiten
4. Konditionsberechnung und Beispiele suchen

15.05.2015

Lösungen an
vrlab14@welfenlab.de
bis zum:

14.05.2015

Einen Tag vor unserem nächsten Treffen.