VR-Labor

Einführung...

Prof. F.-E. Wolter
Maximilian Klein

Welfenlab

Organisation

Voraussetzungen

- Solide Programmierkenntnisse
- Etwas Mathe
- Etwas Physik
- **Zeit!**

6 LP ≈ 150 Stunden

Im Semester

5 Pflichtvorlesungen = 5 Stunden

Bleiben 145 Stunden...

Ablauf zweigeteilt

1. Einführung
2. Gruppenphase

1. Einführung

Vom 17. April bis zum 05. Juni

- Wöchentlicher Pflichttermin
- Wöchentliche Pflichtaufgaben
- Keine Gruppenarbeit

Abgaben werden bewertet!

Intern nach Punktesystem

- Voller Punkt
  Ordentliche Abgabe
- Halber Punkt
  Abgabe mit Mängeln
- Kein Punkt
  Abgabe nicht ausreichend

Insgesamt gibt es 20 Punkte in der Einführung

18 nötig für das Weiterkommen

Es wird Möglichkeiten geben Bonuspunkte zu sammeln

2. Projektphase

Vom 05. Juni bis zum 24. Juli

- Freie Projektwahl
- Gruppenarbeit
- Arbeiten mit wissenschaftlichen Quellen
- Keine regelmäßigen Treffen
- Wenn mit vorherige Ankündigung
  Mindestens eine Woche

Eine Gruppenaufgabe

- Keine Punkte
- Absprache mit Dozent
- Arbeit mit Git verpflichtend
- Kleines Testat

Abschlusspräsentation

Mehr Details später

Bevor wir anfangen

Es gibt viele (teils gute) Bücher.

Ein halbwegs komplettes und verständliches:

Hanke-Bourgeois, Martin. Grundlagen der numerischen Mathematik und des wissenschaftlichen Rechnens. Wiesbaden: Teubner, 2009.

Basics

Modellierungstools

Differentialgleichungen

Wie gehts weiter… ?

Wir werden DGLs als Modellierungstools verwenden. Damit lassen sich insbesondere physikalisch motivierte Modelle beschreiben.

Differentialgleichungen

Wie gehts weiter… ? **lokal** !

Differentialgleichungen

Wie gehts weiter… ? **lokal** ! infinitesimal…

$$\frac{\partial f}{\partial t}$$

DGLs sind deswegen interessant, weil sie über das lokale Verhalten beschreiben wie ein System funktioniert man damit dann aber globales Verhalten beobachten können.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = f \qquad f(t) = ?$$

The easy one!

DGL

$$\frac{\partial f}{\partial t} = f \qquad f(t) = ?$$

The easy one!

DGL

Lösung der DGL

ist eine Funktion

$$\frac{\partial f}{\partial t} = f \quad \longleftrightarrow \quad \underline{f(t) = ?}$$

The easy one!

Das Lösen der Differentialgleichung gibt einem eine Funktion, deren Ableitung durch die Differentialgleichung gegeben ist. Die DGL df/dt = f ist üblicherweise die erste DGL die man kennen lernt. “Welche Funktion ist abgeleitet gleich sich selbst”.

Analytisch...

$$f(t) = C\, e^{t}$$

das sollte jeder mal gemacht haben...

Analytisch...

fertig

$$f(t) = C\, e^{t}$$

das sollte jeder mal gemacht haben...

Analytisch…

fertig

$$f(t) = C\, e^{t}$$

Meist nicht so leicht!

das sollte jeder mal gemacht haben…

Analytisches Lösen von DGLs ist recht kompliziert und allgemein nicht machbar, deswegen werden wir das hier nicht mehr machen (oder wenn nur sehr sehr selten).

Deswegen....

Deswegen….

Numerisch!

Deswegen….

Numerisch! Meist “irgendwie machbar”

Deswegen....

Numerisch! Meist “irgendwie machbar”

oft sogar “recht leicht machbar”

Es gibt mehrere Möglichkeiten DGLs numerisch zu lösen, wir werden hier erstmal eine Möglichkeit vorstellen.

Numerisch…

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{f(t_1)-f(t_0)}{t_1-t_0} \approx f(t)$$

z.B. mit dem Differenzenquotient!

Über den Grenzwert des Differenzenquotienten definiert man die Ableitung, deswegen ist dieser auch relativ gut geeignet um genau diese anzunähern. Der Grenzfall kann numerisch nicht betrachtet werden, weswegen wir eine feste Schrittweite benötigen.

"Unbekannt!"

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0} \approx f(t)$$

z.B. mit dem Differenzenquotient!

Üblicherweise kennt man einen Startpunkt beim Lösen von DGLs (f(t0)). Dagegen ist f(t1) unbekannt, man weiß (noch) nicht welche anderen Punkte auf der gesuchten Funktion liegen, das wollen wir jetzt beantworten.

“Unbekannt!”

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{f(t_1) - f(t_0)}{\Delta t} \approx f(t)$$

Zeitschritt!

z.B. mit dem Differenzenquotient!

“Unbekannt!”

DGL

DGL

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{f(t_1)-f(t_0)}{\Delta t} \approx f(t)$$

Zeitschritt!

z.B. mit dem Differenzenquotient!

Hier Vorsicht: f(t) ist in unserem Beispiel die DGL. Das kann auch eine andere Funktion sein!

weiter hiermit

“Unbekannt!”

DGL

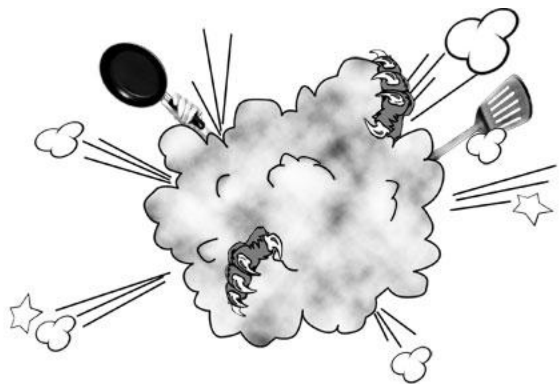
DGL

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx \boxed{\frac{f(t_1)-f(t_0)}{\Delta t} \approx f(t)}$$

Zeitschritt!

z.B. mit dem Differenzenquotient!

Umstellen...



Umstellen...

$$f(t_1) \approx \Delta t\, f(t\ ) + f(t_0)$$

Wird auch Integrationsregel genannt

Umstellen...

$$f(t_1) \approx \Delta t\ \underbrace{f(t\ )}_{\text{DGL}} + f(t_0)$$

Wird auch Integrationsregel genannt

f(t) ist immernoch unsere Beispiel DGL dort würde man bei anderen Differentialgleichungen die Ableitung einsetzen (also df/dt)

Welches t?

$$f(t_1) \approx \Delta t \, \underbrace{f(t\ )}_{\text{DGL}} + f(t_0)$$

Wird auch Integrationsregel genannt

Noch unklar ist, welches t in der DGL verwendet werden soll. Verschiedene t führen zu verschiedenen Integrationsregeln. Diese Regeln werden Integrationsregeln genannt, weil man diese üblicherweise über das Integral der DGL herleitet, beides ist aber äquivalent nach Hauptsatz der Differential und Integralrechnung.

Explziter Euler

$$f(t_1) \approx \Delta t\, \underbrace{f(t_0)}_{\text{DGL}} + f(t_0)$$

Wird auch Integrationsregel genannt

Explizit steht dabei dafür, dass das f(t1) explizit schon mit dem bekannten berechnet werden kann. Die Integrationsregel erfordert nur ein einsetzen von bekanntem, egal wie die DGL aussieht.

Impliziter Euler

$$f(t_1) \approx \Delta t \, \underbrace{f(t_1)}_{\text{DGL}} + f(t_0)$$

Wird auch Integrationsregel genannt

Implizit heißt, die Integrationsregel gibt noch keine Rechenvorschrift wie man f(t1) berechnet. Das variiert üblicherweise pro DGL.

Impliziter Euler

$$f(t_1) \approx \Delta t\, f(t_1) + f(t_0)$$

Ja, das ist unbekannt beim impliziten!

Wird auch Integrationsregel genannt

Demo!

Integration

Frage: Wie gut ist das?

A-Stability…

Gütesiegel…

A-Stability...

Gütesiegel... (mit Vorsicht zu genießen)

A-Stability...

Gütesiegel... (mit Vorsicht zu genießen)

Wie alle Gütesiegel..

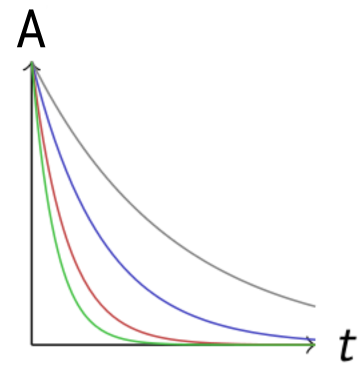
A-Stabilität

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -kA \qquad A(0) = 1$$

Für welche k und Zeitschritte konvergiert ein Verfahren?

Analytisch...

$$A(t) = e^{-kt}$$



Das sind die einzelnen analytischen Lösungen der A-Stability DGLs

$$\lim_{t \to \infty} A(t) = 0$$

Analytisch für alle k>0.

A-Stabilität Konvergenz

$$\lim_{n \to \infty} A(t_n) = 0$$

Numerisch für alle k>0.

A-Stabilität Konvergenz

Definition!

$$\lim_{n \to \infty} A(t_n) = 0$$

Numerisch für alle k>0.

Ein Verfahren ist A-Stabil wenn es bei diesem Problem für alle k>0 gegen 0 konvergiert.

Wichtig: Die Stabilität ist immer eine Eigenschaft des Verfahrens, wie gezeigt konvergiert die Folge analytisch immer gegen 0.

Demo!

A-Stabilität

Bis zum nächsten Termin

24.04.2015

1. Integrator selber schreiben

2. A-Stabilitätstest für explizit / implizit
   a. durchführen können
   b. rausfinden was besser ist

3. **Beschreiben, was A-Stabilität aussagt und was es NICHT aussagt!**

JA, es gibt Textaufgaben!

Die sollen auch bearbeitet werden...

Welche Programmiersprache?

Was lesbares... oder C/C++

Welche Programmiersprache?

Lauffähig (kompilierbar) auf Ubuntu (Unsere Rechner hier)!

keine Binaries!

Welche Programmiersprache?

Nutzt die Chance für was tolles!
JavaScript / Clojure / Julia / Python …

Unwichtiges ist unwichtig!

Zeit in sinnvolle Sachen Stecken, ihr wollt was lernen!

Üblicherweise werden Lösungen aller hochgeladen!

Aufgabenzettel im StudIP

Bitte beachten...

Kreativität ist erwünscht!

Ihr stellt vor!

Das ist keine Vorlesung hier!

Lösungen an
vrlab15@welfenlab.de
bis zum:

23.04.2015

Ein Tag vor unserem nächsten Treffen.