VR-Labor

Nachtrag zur Lagrangemechanik…

Prof. F.-E. Wolter
Maximilian Klein

Welfenlab

Bis heute!

08.05.2015

1. Pendel simulieren
2. Planetensystem implementieren
3. **Erläutern warum das Energieproblem der nicht konservativen DGLs kein Problem ist**
4. Kleine “Fluidsimulation”

Ihr stellt vor

Implementierungs-Probleme

1

Square Distance – Vector Problem

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Skalare Gleichung!

Implementierungs-Probleme

1

Square Distance – Vector Problem

$$F_x = G\,\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad x$$

$$F_y = G\,\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad y$$

Implementierungs-Probleme

1

Square Distance – Vector Problem

$$\cancel{F_x = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \quad x}$$

$$\cancel{F_y = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \quad y}$$

Implementierungs-Probleme

1

Square Distance – Vector Problem

$$F = G\frac{m_1 m_2}{\cdots}$$

Einheiten beachten

$$F_y = G\frac{\cdots}{r^2}$$

Implementierungs-Probleme

1

Square Distance – Vector Problem

$$\vec{F}_1 = G m_1 m_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|^3}$$

Implementierungs-Probleme

1

Square Distance – Vector Problem

$$\vec{F}_1 = G m_1 m_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|^3}$$

Implementierungs-Probleme

2

Teilen durch Null...

$$\vec{F}_1 = G m_1 m_2 \, \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\left| \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \right|^3}$$

Implementierungs-Probleme

2

Teilen durch Null... (nahezu)

Implementierungs-Probleme

2

Teilen durch Null… (nahezu)

Lösung 1:
Kollisionen

Implementierungs-Probleme

2

Teilen durch Null... (nahezu)

Lösung 2:
If-Abfrage... ist halt ein Modellierungsproblem wenn man keine Kollisionen hat.

Implementierungs-Probleme

3

Frühzeitiges Verschieben

1. ALLE Geschwindigkeiten updaten
2. ALLE Positionen updaten

NICHT einzeln!

Implementierungs-Probleme

4

Kraft ≠ Beschleunigung

Oft wurde die Masse nicht rausgeteilt

$a = F / m$ (!!!)

Lokaler Fehler
vs.
Globaler Fehler

Lokaler Fehler

Der lokale Fehler ist der Diskretisierungsfehler in einem Schritt des Ver- fahrens,

Torsten Casselt

Lokaler Fehler

Der lokale Fehler ist der Diskretisierungsfehler in einem Schritt des Ver- fahrens, also die Differenz zwischen der berechneten und der tatsäch- lichen Lösung.

Torsten Casselt

Globaler Fehler

Der globale Fehler ist die Summe aller lokalen Fehler bis zum Punkt der Betrachtung.

Torsten Casselt

(Üblicherweise)

Lokaler Fehler

$$O(h^{p+1})$$

Globaler Fehler

$$O(h^{p})$$

p = Fehlerordnung

(Üblicherweise)

Lokaler Fehler

$$\mathbf{O(h^{p+1})}$$

Globaler Fehler

$$\mathbf{O(h^{p})}$$

Konvergenzrate!

p = Fehlerordnung

Lokaler Fehler
(mit Taylorreihe)

$$f(t+\Delta t)$$

Das wollen wir

Lokaler Fehler

(mit Taylorreihe)

$$f(t+\Delta t) = \mathbf{f(t)} + \ldots$$

Da sind wir gerade

Lokaler Fehler
(mit Taylorreihe)

$$f(t+\Delta t) = f(t) + \mathbf{f'(t)\Delta t} + \ldots$$

f’ kennen wir, erstes Glied
der Taylorreihe

Lokaler Fehler

(mit Taylorreihe)

$$f(t+\Delta t) = f(t) + f'(t)\Delta t + O(\Delta t^2)$$

Unser lokaler Fehler

Lokaler Fehler
(mit Taylorreihe)

$$f(t+\Delta t) = f(t) + f'(t)\Delta t$$

Expliziter Euler mit $O(\Delta t^2)$ lokalem Fehler

Verifikationsbashing

Energie?

Kinetische: $\frac{1}{2} m v^2$

Energie?

Kinetische: $\Sigma_i \ \frac{1}{2} \ m_i \, v_i^2$

Energie?

Kinetische: $\Sigma_i \; ½ \; m_i \, v_i^2$

Potentielle: $\int F_i \, dr$

Für das Potential brauchen wir die Masse des anderen Partikels (m*)

Energie?

Kinetische: $\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$

Potentielle: $\int_{R_i}^{\infty} F \, dr$

Für das Potential brauchen wir die Masse des anderen Partikels (m*)

Energie?

Kinetische: $\Sigma_i \; \frac{1}{2} \; m_i \, v_i^2$

Potentielle: $\int_{R_i}^{\infty} C \, / \, r^2 \, dr$

Wobei: $C = G \, m_i \, m_j$

und m_j ist die Masse des anderen Partikels

Energie?

Kinetische: $\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$

Potentielle: C / R_i

Wobei: $C = G\, m_i\, m_j$

und m_j ist die Masse des anderen Partikels

Energie?

Kinetische: $\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$

Potentielle: $\sum_{i,j} C / R_i$

Wobei: $C = G\, m_i\, m_j$
und m_j ist die Masse des anderen Partikels

Energie?

Kinetische: $\Sigma_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$

Potentielle: $\Sigma_{i,j} C / R_i$

Die Summe der beiden muss konstant sein!

Und nicht konservative?

1. Unser Modell missachtet viel (z.B. Temperatur)

Und nicht konservative?

1. Unser Modell missachtet viel (z.B. Temperatur)
2. Jedes konservative = energieerhaltend.
   Daraus folgt nicht, das jedes nicht konservative nicht energieerhaltend ist!

Und nicht konservative?

1. Unser Modell missachtet viel (z.B. Temperatur)
2. Jedes konservative = energieerhaltend.
   Daraus folgt nicht, das jedes nicht konservative nicht energieerhaltend ist!

Es gibt also nicht konservative mit $V \neq 0$ für die die Energieerhaltung gilt. ABER das ist meist ein numerisch nicht stabilier Punkt! => Lieber etwas Dämpfen...

Was neues!

Ein bisschen Numerik...

Problemprobleme

Manche Probleme sind inhärent schwer numerisch zu lösen.

Problemprobleme

Manche **Probleme** sind inhärent schwer numerisch zu lösen.

Merke: Fokus liegt auf dem **Problem**!

Definition!

Kondition

Sei **p** unser Problem und **f(p)** die Lösung, dann ist die Kondition:

$$\kappa = \frac{\partial f(p)}{\partial p}$$

Wir nehmen mal an, dass f(p) nach p differenzierbar ist

Kondition umgangsprachlich

Wie stark beeinflussen Änderungen der “Eingabe” p die Lösung $f(p)$

Gute und schlechte…

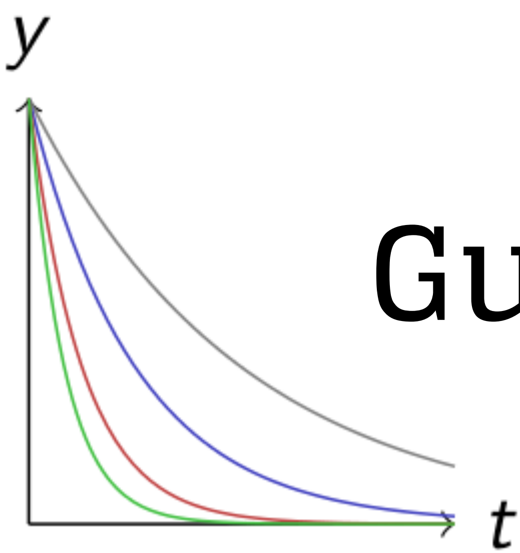
Gute und schlechte… Kondition

Je nach Wert der Ableitung unterteilt man und die Kategorien “gute” und “schlechte” Kondition

Gute und schlechte... Kondition

gut: wenn κ klein ist

schlecht: wenn κ groß ist (i.A. $\kappa >> 1$)



Beispiel:
Gute Kondition

A-Stabilität!

Wir “wollten” das 0 raus kommt.

A-Stabilität Lösungen

$$\lim_{t \to \infty} A(t) = 0$$

Für alle k>0.

$$A(t) = e^{-kt}$$

Beispiel:
Gute Kondition

A-Stabilität!

Egal “wo”/bei welcher Höhe man anfängt es konvergiert immer gegen 0

Beispiel:
Gute Kondition

A-Stabilität!

$$\kappa = \frac{\partial f(A_0)}{\partial A_0}$$

$$f(A_0) = \lim_{t \to \infty} A_0 e^{-kt} = 0 = f(A_0 + x)$$

Beispiel:
Gute Kondition

A-Stabilität!

$$\kappa = \frac{\partial f(A_0)}{\partial A_0} = 0$$

Beispiel:
Gute Kondition

A-Stabilität!

$$\kappa = \frac{\partial f(A_0)}{\partial A_0} = 0$$

ist klein!

Abgrenzung! Kondition – Stabilität

Die DGL zur A-Stabilität ist ein gut konditioniertes Problem wenn man den Grenzwert $t \to \infty$ wissen will

Abgrenzung!
Kondition – Stabilität

Kondition hat nichts mit dem “Weg” / Algorithmus zu tun, der diese Lösung berechnet!

Abgrenzung!
Kondition – Stabilität

Stabilität bewertet den “Weg” / Algorithmus unabhängig von der Kondition.

Abgrenzung!
Kondition – Stabilität

Aber!

Wenn das Problem **schlecht konditioniert** ist, **dann** sind alle Algorithmen **nicht stabil**!

Beispiel: schlechte Kondition

Heike Stecher, http://www.fotocommunity.de/pc/pc/display/15350914

Wetter

Schlechte Kondition: Wetter

Wie könnte man die Konditionszahl bestimmen?

Schlechte Kondition: Wetter

Zunächst muss klar sein was genau unsere Eingaben und unsere betrachtete “Lösung” ist!

Schlechte Kondition: Wetter

Beispiel:

Eingabe: Kraft des Flügelschlags
Lösung: ...

Schlechte Kondition: Wetter

Beispiel:

Eingabe: Kraft des Flügelschlags
Lösung: Regenmenge im April

Schlechte Kondition: Wetter

Beispiel:

Eingabe: Kraft des Flügelschlags
Lösung: Sonnenstunden im April

Schlechte Kondition: Wetter

Beispiel:

Eingabe: Kraft des Flügelschlags
Lösung: Temperatur auf dem Mars

$\kappa = 0$

Schlechte Kondition: Wetter

Beispiel:

Eingabe: Kraft des Flügelschlags

Lösung: Temperatur auf dem Mars

$\kappa = 0$

Das ist einfach!

Schlechte Kondition: Wetter

Kombination von mehreren Größen ist auch möglich!

Schlechte Kondition: Wetter

Beispiel:

Eingabe: Kraft des Flügelschlags
und Position des Schmetterlings

Lösung: Regenmenge und
Blitzeinschläge

Kondition von Vektorgrößen

Im Allgemeinen nicht einheitlich definiert. Hängt vom Fall ab!

Kondition von Vektorgrößen

$$\kappa = \left| \frac{\partial \vec{f}(\vec{p})}{\partial \vec{p}} \right| = \sum_{i,j} \frac{\partial f_i(\vec{p})}{\partial p_j}$$

???

Bis zum nächsten Mal!

1. Apokalypse implementieren
2. Apokalypsenanalyse
3. Paper durcharbeiten
4. Konditionsberechnung und Beispiele suchen

15.05.2015

Lösungen an

vrlab14@welfenlab.de

bis zum:

14.05.2015

Einen Tag vor unserem nächsten Treffen.