Lösung 6 (Zyklische Blockcodes)

a) Der Parameter b muss für alle gültigen Generator- oder Checkpolynome 1 sein. Zusätzlich muss $h(D)$ ein Faktor von $D^N - 1$ sein, d.h.:

$$D^{15} - 1 = h(D) \cdot g(D) \Rightarrow (D^{15} - 1)\ mod\ h(D) = 0.$$

Für $a = 0$:

$$
\begin{array}{cccccccccccc l}
D^{15} & & & & & & & & & & & +1 & :D^{10}+D^{8}+D^{6}+D^{5}+D^{2}+1=D^{5}+D^{3}+1 \\
D^{15} & +D^{13} & +D^{11} & +D^{10} & & & +D^{7} & & +D^{5} & & & & \\
\hline
 & D^{13} & +D^{11} & +D^{10} & & & +D^{7} & & +D^{5} & & & +1 & \\
 & D^{13} & +D^{11} & & +D^{9} & +D^{8} & & & +D^{5} & +D^{3} & & & \\
\cline{2-12}
 & & & D^{10} & +D^{9} & +D^{8} & +D^{7} & & & +D^{3} & & +1 & \\
 & & & D^{10} & & +D^{8} & & +D^{6} & +D^{5} & & +D^{2} & +1 & \\
\cline{4-12}
 & & & & D^{9} & & +D^{7} & +D^{6} & +D^{5} & +D^{3} & +D^{2} & +1 &
\end{array}
$$

Für $a = 1$:

$$
\begin{array}{cccccccccccccc l}
D^{15} & & & & & & & & & & & & & +1 & :D^{10}+D^{9}+D^{8}+D^{6}+D^{5}+D^{2}+1=D^{5}+D^{4}+D^{2}+1 \\
D^{15} & +D^{14} & +D^{13} & & +D^{11} & +D^{10} & & & +D^{7} & & +D^{5} & & & & \\
\hline
 & D^{14} & +D^{13} & & +D^{11} & +D^{10} & & & +D^{7} & & +D^{5} & & & +1 & \\
 & D^{14} & +D^{13} & +D^{12} & & +D^{10} & +D^{9} & & & +D^{6} & & +D^{4} & & & \\
\cline{2-14}
 & & & D^{12} & +D^{11} & & +D^{9} & & +D^{7} & +D^{6} & +D^{5} & +D^{4} & & +1 & \\
 & & & D^{12} & +D^{11} & +D^{10} & & +D^{8} & +D^{7} & & & +D^{4} & +D^{2} & & \\
\cline{4-14}
 & & & & & D^{10} & +D^{9} & +D^{8} & & +D^{6} & +D^{5} & & +D^{2} & +1 & \\
 & & & & & D^{10} & +D^{9} & +D^{8} & & +D^{6} & +D^{5} & & +D^{2} & +1 & \\
\cline{6-14}
 & & & & & & & & & & & & & 0 &
\end{array}
$$

b) Das Generatorpolynom wurde bereits im Aufgabenteil a) berechnet: $g(D) = (D^{15} - 1) : h(D) = D^5 + D^4 + D^2 + 1$

$$
\begin{aligned}
N &= 15 \\
K &= grad\{h(D)\} = 10 \\
N - K &= grad\{g(D)\} = 5 \\
R &= {}^{K}\!/\!_{N} = {}^{10}\!/\!_{15} = {}^{2}\!/\!_{3}
\end{aligned}
$$

Damit $g(D)$ und $h(D)$ einen gültigen zyklischen Code bilden müssen sie Faktoren von $D^N - 1$ sein, d.h. $D^{15} - 1 = h(D) \cdot g(D)$. Im Prinzip folgt dies direkt aus den Ergebnissen im Aufgabenteil a). Dennoch sei hier die vollständige Rechnung gegeben:

$$
\begin{aligned}
g(D) \cdot h(D) = (D^5 + D^4 + D^2 + 1)h(D) &= D^5 h(D) + D^4 h(D) + D^2 h(D) + h(D) \\
&= D^{15} + D^{14} + D^{13} + D^{11} + D^{10} + D^7 + D^5 \\
&+ D^{14} + D^{13} + D^{12} + D^{10} + D^9 + D^6 + D^4 \\
&+ D^{12} + D^{11} + D^{10} + D^8 + D^7 + D^4 + D^2 \\
&+ D^{10} + D^9 + D^8 + D^6 + D^5 + D^2 + 1 = D^{15} + 1
\end{aligned}
$$

c) Nach Satz 4.24 aus dem Skript "... ist die Codedistanz d gleich dem kleinsten Gewicht aller Codewörter, die vom N-stelligen Nullvektor verschieden sind". Laut Aufgabe wird nur eine sinnvolle obere Schranke für t gesucht. Bei $g(D)$ handelt es sich um das Codewort mit dem niedrigsten Grad $m \geq 1$. Also folgt aus $w(\vec{g}) = 4$ auch $t \leq \frac{d-1}{2} = \frac{3}{2}$. Die wir keine halben Fehler korrigieren können hat dieser Code also eine maximal mögliche Korrekturkapazität von 1.

Die Syndrome werden mit der Beziehung $S_i(D) = e_i(D)\ mod\ g(D)$ bestimmt. Die folgende Syndromtabelle zeigt die Syndrome für alle Einzelfehlerpolynome:

$e_i(D)$	$S_i(D)$
1	1
D	D
D^2	D^2
D^3	D^3
D^4	D^4
D^5	$D^4 + D^2 + 1$
D^6	$D^4 + D^3 + D^2 + D + 1$
D^7	$D^3 + D + 1$
D^8	$D^4 + D^2 + D$
D^9	$D^4 + D^3 + 1$
D^{10}	$D^2 + D + 1$
D^{11}	$D^3 + D^2 + D$
D^{12}	$D^4 + D^3 + D^2$
D^{13}	$D^3 + D^2 + 1$
D^{14}	$D^4 + D^3 + D$

Die Syndrome können alle eindeutig auf das dazugehörige Fehlerpolynom abgebildet werden, daher kann dieser Code auch alle Einzelfehler korrigieren.

d) $N - K < K$, wir entscheiden uns daher für die zweite Coderschaltung aus dem Skript: