Leibniz-Universität Hannover
Insitut für Differentialgeometrie
Dr. Ahmad Afuni, Dr. Markus Röser Hannover, den 05.04.2016

Lösungsvorschläge zum Übungsblatt 2

zur Vorlesung Mannigfaltigkeiten

Sommersemester 2016

Aufgabe 1 (Kompaktheit und Abgeschlossenheit)**.** Es seien $p \in M \backslash K$ und $q \in K$. Da M Hausdorff ist, existieren offene Mengen $U_{p,q}$ und $V_{p,q}$ in M mit den folgenden Eigenschaften:

- $p \in U_{p,q}$, $q \in V_{p,q}$;
- $U_{p,q} \cap V_{p,q} = \emptyset$.

Da $K \subset \bigcup_{q \in K} V_{p,q}$ und K kompakt ist, können wir auf eine endliche Teilüberdeckung $\{V_{p,q_i}\}_{i=1}^N$ passieren, d.h. für endlich viele Punkte $\{q_i\}_{i=1}^N$ aus K gilt

$$K \subset \bigcup_{i=1}^N V_{p,q_i}.$$

Da Topologien unter beliebigen Vereinigungen geschlossen sind, ist $V_p := \bigcup_{i=1}^N V_{p,q_i}$ eine offene Umgebung von K. Andererseits sind Topologien unter endlichen Durchschnitten geschlossen, woraus folgt, daß die Menge $U_p := \bigcap_{i=1}^N U_{p,q_i}$ eine offene Umgebung von p ist. Aus den Eigenschaften von $U_{p,q}$ und $V_{p,q}$ und den Rechenregeln für Mengen folgt nun, daß

$$U_p \cap V_p = \left(\bigcap_{i=1}^N U_{p,q_i} \right) \cap \bigcup_{i=1}^N V_{p,q_i} = \bigcup_{i=1}^N \left[\left(\bigcap_{j=1}^N U_{p,q_j} \right) \cap V_{p,q_i} \right] \subset \bigcup_{i=1}^N U_{p,q_i} \cap V_{p,q_i} = \emptyset;$$

folglich haben wir die Existenz der gewünschten Mengen bewiesen.
Aus dieser Konstruktion folgt die Abgeschlossenheit von K: Da $U_p \cap K \subset U_p \cap V_p = \emptyset$, gilt $U_p \subset M \backslash K$; daher ist $M \backslash K = \bigcup_{p \in M \backslash K} U_p$, was offen ist. Deshalb ist K abgeschlossen.

Aufgabe 2 (Ein Greuel)**.**

(a) Wir überprüfen die üblichen Eigenschaften:

- $\phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}$ ist eine Karte: $\phi_\alpha(U_\alpha) = \mathbb{R}$, denn für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $[(x^0, x^1)] \in U_\alpha$ mit $x^\alpha = 1$, $x^{1-\alpha} = \lambda$, und $\phi_\alpha([(x^0, x^1)]) = 1 \cdot \lambda = \lambda$. Bezüglich Injektivität:

  $$\phi_\alpha([(x^0, x^1)]) = \phi_\alpha([(\widetilde{x}^0, \widetilde{x}^1)]) \Leftrightarrow x^0 x^1 = \widetilde{x}^0 \widetilde{x}^1$$

  Für $\alpha = 0$ folgt nun, daß $\widetilde{x}^1 = x^1 \cdot \frac{x^0}{\widetilde{x}^0}$, d.h. $[(x^0, x^1)] = [(\frac{\widetilde{x}^0}{x^0} x^0, \frac{x^0}{\widetilde{x}^0} x^1)] = [(\widetilde{x}^0, \widetilde{x}^1)]$. Der Fall $\alpha = 1$ folgt ähnlicherweise.

- ϕ_0 und ϕ_1 sind mit einander verträglich: Bemerke, daß

  $$\phi_\alpha(U_0 \cap U_1) = \phi_\alpha\left(\{[(x^0, x^1)] : x^0 \neq 0 \text{ und } x^1 \neq 0\}\right) = \mathbb{R} \backslash \{0\}.$$

Daher ist $\phi_0 \circ \phi_1^{-1} : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ durch

$$x \mapsto \phi_0([x,1]) = x$$

gegeben, und diese Abbildung ist offensichtlich ein Diffeomorphismus. Daher ist auch $\phi_1 \circ \phi_0^{-1}$ glatt.

(b) Sei U eine offene Umgebung von $[(1,0)]$ (bzw. $[(0,1)]$). Dann ist $\phi_0(U)$ (bzw. $\phi_1(U)$) offen in $\mathbb{R}$ mit $0 = \phi_0([(1,0)])$ (bzw. $\phi_1([(0,1)])$) im Inneren; daher gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $]-\varepsilon, \varepsilon[\subset \phi_0(U)$ (bzw. $\phi_1(U)$). Wir zeigen nun, daß für alle $\varepsilon_0, \varepsilon_1 > 0$ $\phi_0^{-1}(]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[) \cap \phi_1^{-1}(]-\varepsilon_1, \varepsilon_1[) \neq \emptyset$ gilt, d.h. $[(1,0)]$ und $[(0,1)]$ können nicht getrennt werden, aus welchem Grunde die Topologie von M in Betracht nicht Hausdorff sein kann. Es gelten:

$$\begin{aligned}\phi_0^{-1}(]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[) = \{[(1,x)] : |x| < \varepsilon_0\} &= \{[1,0]\} \cap \{[(1,x)] : 0 < |x| < \varepsilon_0\} \\ &= \{[(1,0)]\} \cap \{[(x,1)] : 0 < |x| < \varepsilon_0\}\end{aligned}$$

und

$$\phi_1^{-1}(]-\varepsilon_1, \varepsilon_1[) = \{[(x,1)] : |x| < \varepsilon_1\};$$

daher ist

$$\begin{aligned}\phi_0^{-1}(]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[) \cap \phi_1^{-1}(]-\varepsilon_1, \varepsilon_1[) &= \{[(x,1)] : 0 < |x| < \varepsilon_0 \text{ und } |x| < \varepsilon_1\} \\ &= \{[(x,1)] : 0 < |x| < \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1\}\} \\ &= \phi_1^{-1}(]-\min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1\}, 0[\cup]0, \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1\}[)\end{aligned}$$

nichtleer für alle $\varepsilon_0, \varepsilon_1$.

Aufgabe 3.

(a) Wir wissen aus der linearen Algebra, daß die Determinante einer nichtsingulären $n \times n$-Matrix in bezug auf die Einträge der $j$ten Spalte entwickelt werden kann, viz.

$$\det(a_{pq}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\alpha_{ij}$$

für festes j, wobei die *Kofaktoren* $\alpha_{ij} = a^{ji} \cdot \det(a_{pq})$ von den $\{a_{ij}\}_{i=1}^{n}$ unabhängig sind und a^{pq} den (p,q)ten Eintrag der Inverse Matrix von $A = (a_{pq})$ ist. Daher gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_A \det(B) &= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial \det}{\partial a_{ij}} \cdot b_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} b_{ij} = \det A \cdot \sum_{i,j=1}^{n} a^{ji} b_{ij} = \det A \cdot \sum_{j=1}^{n} \left(A^{-1} \cdot B\right)_{jj} \\ &= \det A \cdot \mathrm{tr}(A^{-1}B).\end{aligned}$$

(b) Die Abbildung $\det : \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ ist glatt, da $\det A$ von den Einträgen von A polynomisch abhängt. Ferner ist $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}\{1\}$ nichtleer, da $I \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, und für alle $A \in \mathrm{SL}(n\mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathrm{d}_A \det(\frac{\lambda}{n} A) = \mathrm{tr}\left(A^{-1} \cdot \frac{\lambda}{n} A\right) = \frac{\lambda}{n} \mathrm{tr} I = \lambda,$$

d.h. $\mathrm{d}_A \det : \mathrm{End}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ hat maximalen Rang für alle $A \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$. Folglich gibt es laut Satz 1.35 eine natürliche glatte Mannigfaltigkeitsstruktur auf $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$.

Aufgabe 4 (Produktmannigfaltigkeitsstruktur)**.**

(a) $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ und $\{(V_{ж}, \psi_{ж})\}_{ж\in Ж}$ seien Atlanten für M_1 bzw. M_2. Wir betrachten die Sammlung $\{(U_\alpha \times V_{ж}, \Psi_{\alpha ж})\}_{(\alpha,ж)\in A\times Ж}$, wobei

$$\begin{aligned}\Phi_{\alpha ж} : U_\alpha \times V_{ж} &\to \mathbb{R}^{\dim M_1+\dim M_2}\\ (p,y) &\mapsto (\phi_\alpha(p), \psi_{ж}(y)),\end{aligned}$$

und behaupten, daß diese einen glatten Atlas für $M_1 \times M_2$ bildet. Fangen wir mit dem üblichen Tanz an:

- Die $\{\Phi_{\alpha ж} : U_\alpha \times V_{ж} \to \mathbb{R}^{\dim M_1+\dim M_2}\}_{(\alpha,ж)\in A\times Ж}$ sind Karten auf $M_1 \times M_2$: Erstens sind diese Abbildungen injektiv, da

$$\begin{aligned}\Psi_{\alpha ж}(p,q) = \Psi_{\alpha ж}(\widetilde{p},\widetilde{q}) &\Leftrightarrow (\phi_\alpha(p), \psi_{ж}(q)) = (\phi_\alpha(\widetilde{p}), \psi_{ж}(\widetilde{q}))\\ &\Leftrightarrow \phi_\alpha(p) = \phi_\alpha(\widetilde{p}) \text{ und } \psi_{ж}(q) = \psi_{ж}(\widetilde{q}) \Rightarrow p = \widetilde{p} \text{ und } q = \widetilde{q},\end{aligned}$$

  wobei die letzte Folgerung aus der Injektivität von ϕ_α und $\psi_{ж}$ folgt. Außerdem sind die Bilder der $\{\Phi_{\alpha ж}\}$ offen: Es gilt

$$\begin{aligned}\Psi_{\alpha ж}(U_\alpha \times V_{ж}) = \{(\phi_\alpha(p), \psi_{ж}(q)) : p \in U_\alpha, q \in V_{ж}\} &= \{\phi_\alpha(p) : p \in U_\alpha\} \times \{\psi_{ж}(q) : q \in V_{ж}\}\\ &= \phi_\alpha(U_\alpha) \times \psi_{ж}(U_{ж}),\end{aligned}$$

  und die letztere Menge ist offen wegen der Offenheit der Mengen $\phi_\alpha(U_\alpha)$ und $\psi_{ж}(U_{ж})$ in $\mathbb{R}^{\dim M_1}$ bzw. $\mathbb{R}^{\dim M_2}$ und der Definition der Produkttopologie.
- Die $\{\Psi_{\alpha ж}\}$ sind mit einander verträglich: Für $\alpha, \widetilde{\alpha} \in A$ und $ж, \widetilde{ж} \in Ж$ gilt

$$\left(\Psi_{\alpha ж} \circ \Psi^{-1}_{\widetilde{\alpha}\widetilde{ж}}\right)(x,y) = \Psi_{\alpha ж}(\phi^{-1}_{\widetilde{\alpha}}(x), \psi^{-1}_{\widetilde{ж}}(y)) = ((\phi_\alpha \circ \phi^{-1}_{\widetilde{\alpha}})(x), (\psi_{ж} \circ \psi^{-1}_{\widetilde{ж}})(y))$$

  für alle $(x,y) \in \Psi_{\widetilde{\alpha}\widetilde{ж}}((U_\alpha \times V_{ж}) \cap (U_{\widetilde{\alpha}} \times V_{\widetilde{ж}}))$; die Glattheit von $\Psi_{\alpha ж} \circ \Psi^{-1}_{\widetilde{\alpha}\widetilde{ж}}$ folgt nun aus der von $\phi_\alpha \circ \phi^{-1}_{\widetilde{\alpha}}$ und $\psi_{ж} \circ \psi^{-1}_{\widetilde{ж}}$.
- Die $\{U_\alpha \times V_{ж}\}_{(\alpha,ж)\in A\times Ж}$ überdecken $M_1 \times M_2$, da

$$\bigcup_{(\alpha,ж)\in A\times Ж} U_\alpha \times V_{ж} = \left(\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha\right) \times \left(\bigcup_{ж\in Ж} V_{ж}\right) = M_1 \times M_2.$$

  Folglich bildet die obige Sammlung einen Atlas für $M_1 \times M_2$.

(b) N sei eine glatte Mannigfaltigkeit mit Atlas $\{(W_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$. Eine Abbildung $F : N \to M_1 \times M_2$ ist glatt bei $p \in N$ (bezüglich der bisher eingeführten Differentialstrukturen) falls für alle Karten (W_i, φ_i) und $(U_\alpha \times V_{ж}, \Psi_{\alpha ж})$ auf N bzw. $M_1 \times M_2$ die Abbildung

$$\Psi_{\alpha ж} \circ F \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(W_i \cap F^{-1}(U_\alpha \times V_{ж})) \to \Psi_{\alpha ж}(U_\alpha \times V_{ж}) = \phi_\alpha(U_\alpha) \times \psi_{ж}(V_{ж}) \tag{1}$$

glatt ist. F läßt sich als $F(p) = ((\pi_1 \circ F)(p), (\pi_2 \circ F)(p))$ schreiben; daher gilt

$$\begin{aligned}\left(\Psi_{\alpha ж} \circ F \circ \varphi_i^{-1}\right)(x) &= \Psi_{\alpha ж}((\pi_1 \circ F \circ \varphi_i^{-1})(x), (\pi_2 \circ F \circ \varphi_i^{-1})(x))\\ &= ((\phi_\alpha \circ \pi_1 \circ F \circ \varphi_i^{-1})(x), (\psi_{ж} \circ \pi_2 \circ F \circ \varphi_i^{-1})(x)).\end{aligned}$$

Folglich ist die Abbildung (1) genau dann glatt, wenn die Abbildungen

$$\begin{aligned}
&\phi_\alpha \circ \pi_1 \circ F \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(W_i \cap F^{-1}(U_\alpha \times V_{ж})) \to \phi_\alpha(U_\alpha) && (2)\\
\text{und } &\psi_{ж} \circ \pi_2 \circ F \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(W_i \cap F^{-1}(U_\alpha \times V_{ж})) \to \psi_{ж}(V_{ж}) && (3)
\end{aligned}$$

glatt sind. Da

$$\begin{aligned}
F^{-1}(U_\alpha \times V_{ж}) &= \{p \in N : (\pi_1 \circ F)(p) \in U_\alpha \text{ und } (\pi_2 \circ F)(p) \in V_{ж}\}\\
&= (\pi_1 \circ F)^{-1}(U_\alpha) \cap (\pi_2 \circ F)^{-1}(V_{ж}),
\end{aligned}$$

können wir die Definitionsbereiche dieser Abbildungen als

$$\varphi_i \left((W_i \cap (\pi_2 \circ F)^{-1}(V_{ж})) \cap (\pi_1 \circ F)^{-1}(U_\alpha)\right)$$
$$\text{bzw. } \varphi_i \left((W_i \cap (\pi_1 \circ F)^{-1}(U_\alpha)) \cap (\pi_2 \circ F)^{-1}(V_{ж})\right)$$

schreiben; die Abbildung (2) ist deshalb für alle $\alpha \in A$, $ж \in Ж$ glatt genau dann, wenn für alle $\alpha \in A$ die „gesamte Abbildung“

$$\phi_\alpha \circ \pi_1 \circ F \circ \varphi_i^{-1} : \bigcup_{ж \in Ж} \varphi_i \left((W_i \cap (\pi_2 \circ F)^{-1}(V_{ж})) \cap (\pi_1 \circ F)^{-1}(U_\alpha)\right) \to \phi_\alpha(U_\alpha). \qquad (4)$$

Die Injektivität von φ_i und die Tatsache, daß die $\{V_{ж}\}$ M_2 überdecken, implizieren, daß

$$\begin{aligned}
&\bigcup_{ж \in Ж} \varphi_i \left((W_i \cap (\pi_2 \circ F)^{-1}(V_{ж})) \cap (\pi_1 \circ F)^{-1}(U_\alpha)\right)\\
&= \varphi_i \left(\bigcup_{ж \in Ж} \left(W_i \cap (\pi_2 \circ F)^{-1}(V_{ж})\right) \cap (\pi_1 \circ F)^{-1}(U_\alpha)\right)\\
&= \varphi_i \left(W_i \cap (\pi_1 \circ F)^{-1}(U_\alpha)\right),
\end{aligned}$$

d.h. die Abbildung (4) ist genau dann glatt, wenn die Abbildung $\pi_1 \circ F : N \to M_1$ glatt ist. Ein ähnliches Argument zeigt nun, daß die Abbildung (3) genau dann glatt ist, wenn $\pi_2 \circ F : N \to M_2$ glatt ist.