Leibniz-Universität Hannover
Insitut für Differentialgeometrie
Dr. Ahmad Afuni, Dr. Markus Röser Hannover, den 05.04.2016

Lösungsvorschläge zum Übungsblatt 4

zur Vorlesung Mannigfaltigkeiten

Sommersemester 2016

Aufgabe 1 (Die Physikdefinition des Tangentialraums)**.**

(a) Es seien $\lambda \in \mathbb{R}$ und $V = [\alpha, v] = [\widetilde{\alpha}, \widetilde{v}], W = [\alpha, w] = [\widetilde{\alpha}, \widetilde{w}] \in M_p$. Setze $T = \mathrm{d}(\phi_{\widetilde{\alpha}} \circ \phi_\alpha^{-1})_{\phi_\alpha(p)}$. Da $\widetilde{v} = Tv$ und $\widetilde{w} = Tw$ gelten und T ein linearer Operator ist, so gilt

$$\widetilde{v} + \lambda\widetilde{w} = Tv + T(\lambda w) = T(v + \lambda w);$$

d.h. $v+\lambda w \sim \widetilde{v}+\lambda\widetilde{w}$, also hat der Ausdruck $V+\lambda W := [\alpha, v+\lambda w]$ Sinn. Die Behauptung folgt nun aus der Tatsache, daß das Nullelement $O := [\alpha, 0]$ auch Sinn hat.

(b) Wir bemerken, daß M_p n-dimensional ist, da z.B. die Menge $\{[\alpha, e_1], \dots, [\alpha, e_n]\}$ eine Basis für M_p bildet. Außerdem gilt (mit der Notation des letzten Teils)

$$\begin{aligned}[\alpha, v] \cdot f &= d(f \circ \phi_\alpha^{-1})_{\phi_\alpha(p)}(v) \\ &= d(f \circ \phi_{\widetilde{\alpha}}^{-1} \circ \phi_{\widetilde{\alpha}} \circ \phi_\alpha^{-1})_{\phi_\alpha(p)}(v) = d(f \circ \phi_{\widetilde{\alpha}}^{-1})_{\phi_{\widetilde{\alpha}}(p)}(Tv) = [\widetilde{\alpha}, \widetilde{v}] \cdot f,\end{aligned}$$

d.h. die Abbildung ist wohldefiniert. Zum Schluß gilt $[\alpha, v] \cdot f = 0$ für alle f genau dann, wenn $\sum_{i=1}^n v^i \left(\partial_i(f \circ \phi_\alpha^{-1})\right)(\phi_\alpha(p)) = 0$. Wenn $f = \varphi \cdot \pi_j \phi_\alpha$, wobei $j \in \{1, \dots, n\}$, π_j die Projektion auf die $j$te Komponente im $\mathbb{R}^n$ und φ irgendeine Funktion, die kompakten Träger in U_α hat und gleich 1 in einer Umgebung von p ist, ist, so gilt $v^j = 0$, d.h. diese Abbildung ist injektiv. Surjektivität folgt nun aus einem Vergleich der Dimensionen von M_p und T_pM.

Aufgabe 2 (T_pS^n)**.** (a) Es sei $v = \sum_{i=1}^n v^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ (bzgl. der Karte (U_N, ϕ_N) oder (U_S, ϕ_S)). Dann gilt (nach einem Abwickeln der Definition und einer Anwendung des Standardatlas von $\mathbb{R}^{n+1}$)

$$\mathrm{d}\iota_p(v) = \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{i=1}^{n} v^i \partial_i(\iota^j \circ \phi_\alpha^{-1})_{\phi_\alpha(p)} \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_{\iota(p)},$$

wobei $\alpha = N$ oder S und $(y^1, \dots, y^{n+1})$ die Standard-Koordinaten auf $\mathbb{R}^{n+1}$ bezeichnet. Da

$$(\iota^j \circ \phi_\alpha^{-1})(u) = \frac{1}{1 + |u|^2}(2u^1, \dots, 2u^n, (-1)^\alpha(|u|^2 - 1)),$$

für $x \in \mathbb{R}^n$, wobei $(-1)^N := 1$, $(-1)^S := -1$, gilt

$$\partial_i(\iota^j \circ \phi_\alpha^{-1})(u) = \frac{2}{1 + |u|^2}\left(-u^i(\iota^j \circ \phi_\alpha^{-1})(u) + \delta_i^j + (-1)^\alpha \cdot u^i \delta_{n+1}^j\right).$$

Deshalb ist

$$\mathrm{d}\iota_p(v) = \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{i=1}^{n} v^i \cdot \left(\frac{2}{1 + |\phi_\alpha(p)|^2}\left(-\phi_\alpha^i(p) \cdot \iota^j(p) + \delta_i^j + (-1)^\alpha \cdot \phi_\alpha^i(p) \delta_{n+1}^j\right)\right) \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_{\iota(p)}.$$

Wenn dieser Ausdruck gleich 0 ist, so gilt für alle $j \in \{1, \ldots, n+1\}$

$$\sum_{i=1}^{n} v^i \left(-\phi_\alpha^i(p) \cdot \iota^j(p) + \delta_i^j + (-1)^\alpha \cdot \phi_\alpha^i(p) \delta_{n+1}^j \right) = 0.$$

Für $j = n+1$ gilt

$$\left((-1)^\alpha - \iota^{n+1}(p) \right) \sum_{i=1}^{n} \phi_\alpha^i(p) \cdot v^i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} v^i \cdot \phi_\alpha^i(p) = 0,$$

da $p \in U_\alpha \Rightarrow \iota^{n+1}(p) \neq (-1)^\alpha$; daher gilt für $j \neq n+1$

$$-\iota^j(p) \sum_{i=1}^{n} v^i \phi_\alpha^i(p) + v^j = 0 \Rightarrow v^j = 0.$$

$\mathrm{d}_p\iota$ ist daher injektiv, wie erwartet, so daß $\{\mathrm{d}_p\iota(\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p)\}_{i=1}^n$ eine Basis für $\mathrm{d}_p\iota(T_pS^n)$ bildet, wobei

$$\mathrm{d}\iota_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p \right) = \frac{2}{1 + |\phi_\alpha(p)|^2} \sum_{j=1}^{n+1} \left(-\phi_\alpha^i(p) \cdot \iota^j(p) + \delta_i^j + (-1)^\alpha \cdot \phi_\alpha^i(p) \delta_{n+1}^j \right) \frac{\partial}{\partial y^j}\bigg|_{\iota(p)}.$$

(b) Identifiziere $\mathbb{R}^{n+1}$ mit $T_{\iota(p)}\mathbb{R}^{n+1}$ so daß $(x^1, \ldots, x^{n+1}) \sim \sum_{i=1}^{n+1} x^i \frac{\partial}{\partial y^i}\big|_{\iota(p)}$. Es gilt dann

$$\begin{aligned} \iota(p) \cdot \mathrm{d}\iota_p(v) &= \frac{2}{1 + |\phi_\alpha(p)|^2} \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{i=1}^{n} \iota^j(p) \cdot v^i \cdot \left(-\phi_\alpha^i(p) \cdot \iota^j(p) + \delta_i^j + (-1)^\alpha \cdot \phi_\alpha^i(p) \delta_{n+1}^j \right) \\ &= \frac{2}{1 + |\phi_\alpha(p)|^2} \left(\sum_{i=1}^{n} v^i \left(-\phi_\alpha^i(p) \cdot |\iota(p)|^2 + \iota^i(p) + (-1)^\alpha \cdot \phi_\alpha^i(p) \cdot \iota^{n+1}(p) \right) \right); \end{aligned}$$

da $|\iota(p)|^2 = 1$ und $\iota(p) = p$, ist der Summand gleich v^i mal

$$-\phi_\alpha^i(p) + p^i + (-1)^\alpha \phi_\alpha^i(p) \cdot p^{n+1} = p^i + \frac{1}{1 - (-1)^\alpha p^{n+1}} \cdot \left(-p^i + (-1)^\alpha p^i \cdot p^{n+1} \right) = 0.$$

Daher gilt $\mathrm{d}\iota_p(T_pS^n) \subset p^\perp$. Da beide Räume der gleichen Dimension sind, müssen sie isomorph sein.

Aufgabe 3 (Polarkoordinaten wieder aufgelebt)**.** (a) Da $(\mathrm{id} \circ \phi^{-1})(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ und

$$\begin{cases} \partial_r(\mathrm{id} \circ \phi^{-1})(r, \theta) = (\cos\theta, \sin\theta) \\ \partial_\theta(\mathrm{id} \circ \phi^{-1})(r, \theta) = (-r\sin\theta, r\cos\theta), \end{cases}$$

gilt laut Proposition 2.10

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial r}\big|_{\phi^{-1}(r,\theta)} = \cos\theta \, \frac{\partial}{\partial x^1}\big|_{\phi^{-1}(r,\theta)} + \sin\theta \, \frac{\partial}{\partial x^2}\big|_{\phi^{-1}(r,\theta)} \\ \frac{\partial}{\partial \theta}\big|_{\phi^{-1}(r,\theta)} = -r\sin\theta \, \frac{\partial}{\partial x^1}\big|_{\phi^{-1}(r,\theta)} + r\cos\theta \, \frac{\partial}{\partial x^2}\big|_{\phi^{-1}(r,\theta)}; \end{cases}$$

anders ausgedrückt mit $p = (p^1, p^2) = \phi^{-1}(r, \theta)$,

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial r}\big|_p = \frac{p^1}{r} \, \frac{\partial}{\partial x^1}\big|_p + \frac{p^2}{r} \, \frac{\partial}{\partial x^2}\big|_p \\ \frac{\partial}{\partial \theta}\big|_p = -p^2 \, \frac{\partial}{\partial x^1}\big|_p + p^1 \, \frac{\partial}{\partial x^2}\big|_p. \end{cases}$$

(b) Da $(\mathrm{id} \circ F \circ \phi^{-1})(r,\theta) = (-r^2, 2r^2 \cos\theta \sin\theta)$, ist die gewünschte Matrix gegeben durch

$$\begin{pmatrix} -2r & 0 \\ 4r\sin(\theta)\cos(\theta) & 2r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2|p| & 0 \\ 4\frac{p^1p^2}{r} & 2((p^1)^2 - (p^2)^2) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4. (a) Da $x, y \in U_0^{\mathbb{RP}^1} \Leftrightarrow x^0 y^0 \neq 0$, ist $F([x],[y]) \in U_0^{\mathbb{RP}^2}$. Daher hat F den lokalen Repräsentanten

$$\widetilde{F}(u^1,u^2) := (\phi_0^{\mathbb{RP}^2} \circ F \circ (\phi_0^{\mathbb{RP}^1} \circ \pi_1, \phi_0^{\mathbb{RP}^1} \circ \pi_2))(u^1,u^2) = (u^1 + u^2, u^1u^2).$$

Die Matrix von $\mathrm{d}F_{([(1,u^1)],[(1,u^2)])}$ bzgl. der diesen Karten entsprechenden Basen ist dann gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ u^2 & u^1 \end{pmatrix}; \tag{1}$$

daher ist das Differential

$$\mathrm{d}F_{([x],[y])}\left(a \left.\frac{\partial}{\partial u^1}\right|_{([x],[y])} + b \left.\frac{\partial}{\partial u^2}\right|_{([x],[y])} \right) = (a+b) \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_{F([x],[y])} + \left(a\frac{y^1}{y^0} + b\frac{x^1}{x^0} \right) \left.\frac{\partial}{\partial x^2}\right|_{F([x],[y])}.$$

(b) Die Matrix (1) hat Determinante $u^1 - u^2$; daher hat die Matrix maximalen Rang ($= 2$) für $u^1 \neq u^2$. Falls $u^1 = u^2$, bildet sie auf die Gerade $[(1,u^1)]$; daher ist der Rang der Matrix 1 in solchen Punkten. Der Rang des Differentials $\mathrm{d}F_{([x],[y])}$ ist daher 2, falls $[x] \neq [y]$, und 1, falls $[x] = [y]$.