Leibniz-Universität Hannover
Insitut für Differentialgeometrie
Dr. Ahmad Afuni, Dr. Markus Röser Hannover, den 23.06.16

# Lösungsvorschläge zum Übungsblatt 10

zur Vorlesung Mannigfaltigkeiten

Sommersemester 2016

**Remark.** Für gegebene $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$, $\{a^{ij}\}_{i,j=1}^n$, $\{X^i\}_{i=1}^n$ und $\{X_i\}_{i=1}^n$ bezeichne $(a_{ij})$ (bzw. $(a^{ij})$) die $(n \times n)$-Matrix mit $(i,j)$tem Eintrag $a_{ij}$ (bzw. $a^{ij}$) und $(X^i)$ (bzw. $(X_i)$) den Spaltenvektor (bzw. Zeilenvektor) mit $i-$tem Eintrag $X^i$ (bzw. $X_i$).

**Aufgabe 1.** (a) Setze $T(X,Y)$ gleich der rechten Seite dieses Ausdrucks. Bemerke, daß $T(X,Y) = -T(Y,X)$, da

$$T(Y,X) = Y(\xi(X)) - X(\xi(Y)) - \xi([Y,X]) = Y(\xi(X)) - X(\xi(Y)) + \xi([X,Y]) = -T(X,Y).$$

Außerdem ist $T$ $C^\infty(M)$-bilinear, da

$$\begin{aligned} T(fX,Y) &= f \cdot X(\xi(Y)) - Y(f\xi(X)) - \xi([fX,Y]) \\ &= f \cdot X(\xi(Y)) - Yf\xi(X) - f \cdot Y(\xi(X)) - \xi(f[X,Y] - (Yf)X) \\ &= f \cdot (X(\xi(Y)) - Y(\xi(X)) - \xi([X,Y])) = f \cdot T(X,Y). \end{aligned}$$

Sei also $(U, \phi = (x^1, \ldots, x^n))$ eine Karte und wir schreiben $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ fÃ¼r die Koordinatenvektorfelder. Wir schreiben auf $U$ $\xi = \sum_i \xi_i dx^i$. Daher reicht es zu zeigen, daß $T(\partial_i, \partial_j) = d\xi(\partial_i, \partial_j)$ für $i < j$. Einerseits ist $T(\partial_i, \partial_j) = \partial_i \xi_j - \partial_j \xi_i$. Andererseits:

$$d\xi(\partial_i, \partial_j) = (\sum_{p,q=1}^n \partial_p \xi_q dx^p \wedge dx^q)(\partial_i, \partial_j) = (\sum_{p<q} (\partial_p \xi_q - \partial_q \xi_p) dx^p \wedge dx^q)(\partial_i, \partial_j) = \partial_i \xi_j - \partial_j \xi_i.$$

(b) Eine ähnliche Rechnung wie in Teil a) zeigt, dass der Ausdruck $T(X,Y,Z)$, der durch die rechte Seite definiert ist, alternierend und $C^\infty(M)$-trilinear ist. Sei also $(U, \phi = (x^1, \ldots, x^n))$ eine Karte. Wir schreiben auf $U$ $\eta = \sum_{i<j} \eta_{ij} dx^i \wedge dx^j$. Daher reicht es zu zeigen, daß auf $U$ $T(\partial_i, \partial_j, \partial_k) = d\eta(\partial_i, \partial_j, \partial_k)$ für $i < j < k$. Einerseits gilt $T(\partial_i, \partial_j, \partial_k) = \partial_i \eta_{jk} + \partial_j \eta_{ki} + \partial_k \eta_{ij}$. Andererseits:

$$\begin{aligned} d\eta &= \sum_{p=1}^n \sum_{q<r} \partial_p \eta_{qr} dx^p dx^q \wedge dx^r \\ &= (\sum_{p<q<r} + \sum_{q<p<r} + \sum_{q<r<p}) \partial_p \eta_{qr} dx^p \wedge dx^q \wedge dx^r \\ &= \sum_{p<q<r} (\partial_p \eta_{qr} dx^p \wedge dx^q \wedge dx^r + \partial_q \eta_{pr} dx^q \wedge dx^p \wedge dx^r + \partial_r \eta_{pq} dx^r \wedge dx^p \wedge dx^q) \\ &= \sum_{p<q<r} (\partial_p \eta_{qr} - \partial_q \eta_{pr} + \partial_p \eta_{pq})\, dx^p \wedge dx^q \wedge dx^r; \end{aligned}$$

aber $\eta_{pr} = -\eta_{rp}$, woher gilt

$$d\eta(\partial_i, \partial_j, \partial_k) = \partial_i \eta_{jk} + \partial_j \eta_{ki} + \partial_k \eta_{ij} = T(\partial_i, \partial_j, \partial_k).$$

**Aufgabe 2.** (a) $E$ ist eine $k$-dimensionale Distribution und sei $p \in M$. Dann existiert eine Umgebung $U$ von $p$ und Vektorfelder $X_1, \ldots, X_k \in \Gamma(U, E)$, die auf $U$ punktweise linear unabhängig sind. Nach eventueller Verkleinerung von $U$ können wir wie im Beweis des Satzes von Frobenius eine Karte $(U, \phi)$ finden, sodass $(X_1(p), \ldots, X_k(p), \frac{\partial}{\partial x^{k+1}}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p$ eine Basis von $T_pM$ bilden. Es folgt nun wie im Beweis des Satzes von Frobenius, dass diese Vektorfelder auf einer Umgebung $V$ von $p$ linear unabhängig sind, also eine Basis für $T_qM$ bilden für alle $q \in V$. Indem wir $U$ gegebenenfalls nochmal verkleinern, können wir $V = U$ annehmen. Wir schreiben $X_{k+j} = \frac{\partial}{\partial x^{k+1}}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{k+j}}$, $j = 1, \ldots, n-k$. Seien $\{\eta^1, \ldots, \eta^n\} \in \Omega^1(U)$ die zu $\{X_1, \ldots, X_n\}$ dualen 1-Formen, also $\eta^i(X_j) = \delta^i_j$. Diese 1−Formen sind glatt und es gilt außerdem $v_q \in E_q = \text{span}\{X_1(q), \ldots, X_k(q)\} \Leftrightarrow \eta^i(v_q) = 0$ für alle $i \in \{k+1, \ldots, n\}$; daher gilt die Aussage mit $\xi^i = \eta^{k+i}$ für $i \in \{1, \ldots, n-k\}$.

(b) Falls $\xi(X) = 0$ für alle $X \in \Gamma(U, E)$ gilt laut 1(a)

$$d\xi(X, Y) = 0 \Leftrightarrow \xi([X, Y]) = 0.$$

Setze $\xi = \xi^i$ ($i \in \{1, \ldots, n-k\}$) mit $\xi^i$ aus Teil (a). Dann ist $[X, Y]_q \in \bigcap_{i=1}^{n-k} \ker(\xi^i(q))$ für alle $q \in U$, d.h. $[X, Y]_q \in E_q$. Also ist $E$ involutiv.

Nehme nun an, daß $E$ involutiv ist und sei $\xi \in \Omega^1(U)$ s.d. $\xi(X) = 0$ für alle $X \in \Gamma(U, E)$. Dann ist $[X, Y] \in \Gamma(U, E)$ und laut 1(a) gilt $d\xi(X, Y) = 0$.

**Aufgabe 3.** (a) Wir schreiben $\omega$ lokal als $\omega = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j$ mit $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$. Die Bedingung, daß $\omega$ nicht ausgeartet sei, entspricht der Aussage

$$(\forall Y)\left(\sum_{i,j=1}^n \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j(X, Y) = 0\right) \Rightarrow X = 0 \Leftrightarrow (\forall Y)\left(\sum_{i,j=1}^n \omega_{ij} X^i Y^j = 0\right) \Rightarrow (\forall i)\left(X^i = 0\right)$$
$$\Leftrightarrow (\omega_{ij}) \cdot (X^j) = 0 \Rightarrow (X^i) = 0.$$

Daher ist die Matrix $(\omega_{ij})$ invertierbar, und wir schreiben $(\omega^{ij})$ für die Inverse. Bemerke nun, daß

$$df = i_{X_f}\omega \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \partial_i f dx^i = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \omega_{ij} i_{X_f}(dx^i \wedge dx^j) = \sum_{i,j=1}^n \left(\omega_{ji}(X_f)^j\right) dx^i$$
$$\Leftrightarrow (\partial_i f) = \left((X_f)^i\right) \cdot (\omega_{ij}) \Leftrightarrow \left((X_f)^i\right) = \frac{1}{2}(\partial_i f) \cdot (\omega^{ij}),$$

d.h. $X_f = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \partial_i f \cdot \omega^{ij}\right) \partial_j$. Dieser Ausdruck ist wegen der Transformationsregeln von $\omega_{ij}$ und $\partial_i f$ unabhängig von Koordinatenwechseln und definiert daher ein eindeutig bestimmtes glattes Vektorfeld $X_f$.

(b) Cartans Formel für $\mathcal{L}_X\omega$ impliziert, daß

$$\mathcal{L}_{X_f}\omega = i_{X_f}d\omega + di_{X_f}\omega = i_{X_f}(0) + d^2 f = 0.$$

(c) Unter nochmaliger Verwendung von Cartans Formel bemerken wir, daß $\mathcal{L}_X\omega = 0 \Leftrightarrow di_X\omega = 0$, d.h. $i_X\omega$ ist eine geschlossene 1-Form. $H^1(M) = 0$ besagt aber, daß alle geschlossenen 1-Formen auf $M$ *exakt* sind; daher gibt es ein $f \in C^\infty(M)$ mit $i_X\omega = df \Leftrightarrow X = X_f$.

(d) Erstens gilt

$$\{f,g\} = X_f(g) = dg(X_f) = i_{X_g}\omega(X_f) = \omega(X_g, X_f).$$

Es folgt

$$X_f(\omega(X_g, X_h) = X_f(\{h,g\}) = \{f,\{h,g\}\}.$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned} \omega([X_f, X_g], X_h) &= -\omega(X_h, [X_f, X_g]) \\ &= i_{X_h}\omega([X_f, X_g]) \\ &= -dh([X_f, X_g]) \\ &= -X_f(X_g(h)) + X_g(X_f(h)) \\ &= \{g,\{f,h\}\} - \{f,\{g,h\}\}. \end{aligned}$$

Damit gilt gilt laut der Formel aus Aufgabe 1b):

$$\begin{aligned} 0 &= d\omega(X_f, X_g, X_h) \\ &= X_f(\omega(X_g, X_h)) + X_g(\omega(X_h, X_f)) + X_h(\omega(X_f, X_g)) \\ &\quad -\omega([X_f, X_g], X_h) - \omega([X_h, X_f], X_g) - \omega([X_g, X_h], X_f) \\ &= \{f,\{h,g\}\} + \{g,\{f,h\}\} + \{h,\{g,f\}\} \\ &\quad -(\{g,\{f,h\}\} - \{f,\{g,h\}\} + \{f,\{h,g\}\} - \{h,\{f,g\}\} + \{h,\{g,f\}\} - \{g,\{h,f\}\}) \\ &= \{f,\{g,h\}\} + \{h,\{f,g\}\} + \{g,\{h,f\}\} \end{aligned}$$

**Aufgabe 4.** (a) Es gilt

$$\begin{aligned} d\xi &= \left(\partial_x\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) + \partial_y\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\right) dx \wedge dy \\ &= \frac{x^2+y^2-2x^2+x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} dx \wedge dy = 0. \end{aligned}$$

(b) Die Jacobi-Matrix der Transformation $(r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix};$$

laut dem Umkehrsatz ist die der inversen Transformation $(r,\theta) \mapsto (x,y)(r,\theta)$ gegeben durch die Inverse dieser Matrix, d.h.

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\frac{\sin\theta}{r} & \frac{\cos\theta}{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

Daher gelten $\partial_x\theta = -\frac{y}{x^2+y^2}$ und $\partial_y\theta = \frac{x}{x^2+y^2}$, d.h. $d\theta = \xi$.

(c) Nimm an, daß es ein $f \in C^\infty(M)$ gibt mit $df = \xi$. Dann gilt auf $U_1$ mit $f_1 = \theta$

$$d(f|_{U_1} - f_1) = \xi - \xi = 0 \Rightarrow f|_{U_1} = f_1 + c$$

für irgendeine Konstante $c$, d.h. $f_1$ kann auf ganz $M$ erweitert werden. Dies ist aber unmöglich, da (siehe die Formel für $\theta$ von Blatt 1):

$$\lim_{\substack{y \searrow 0 \\ x>0}} f_1(x,y) = 0 \neq 2\pi = \lim_{\substack{y \nearrow 0 \\ x>0}} f_1(x,y).$$