

结构可靠度分析 FORM 迭代算法的混沌控制¹⁾

杨迪雄²⁾

(大连理工大学工程力学系, 工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116023)

摘要 利用混沌控制原理对 FORM 收敛失败进行控制, 理清了全局性和局部性两类混沌反馈控制各种方法的内在联系, 说明稳定转换法和自适应调节法属于全局混沌反馈控制方法, 自适应调节法可视为稳定转换法的特例. 参数调节混合法不过是松弛牛顿法的另一种表达形式, 它们都属于局部混沌反馈控制方法. 阐明了混沌反馈控制表达式与工程力学收敛控制迭代算法的对应关系. 也揭示了这些迭代算法收敛控制措施的功效和局限性. 提出了一个以稳定转换法为主联合松弛牛顿法的混沌反馈控制方法, 对可靠度分析 FORM 迭代算法实现了周期振荡、分岔和混沌控制.

关键词 可靠度分析, FORM 迭代算法, 混沌动力学, 收敛失败, 混沌反馈控制

中图分类号: O213.2, TU311.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 0459-1879(2007)05-0647-08

引 言

绝大多数实际结构和机械系统都是非线性的, 非线性体系的迭代求解是当前工程系统分析的一种普遍性方法. 由于迭代方法易于理解、编程方便而被大家广泛使用. 然而, 对于一些非线性问题, 迭代方法并不能得到期望的收敛解(即不动点解), 而得到振荡解甚至貌似随机、杂乱无章的混沌解. 目前, 计算力学和工程界对迭代方程数值解的振荡、混沌等复杂现象的产生机理缺乏相应的知识, 更不用说如何控制解的收敛行为并获得需要的不动点解. 幸运的是, 混沌动力学理论为我们全面、深刻理解这些复杂现象并控制收敛失败提供了强有力的方法. 非线性系统迭代格式形成的非线性映射从混沌动力学的视角来看是一个离散动力系统, 当系统的雅可比矩阵特征值满足一定的条件, 在特定的参数区间, 它的解可能产生发散、周期振荡、分岔甚至混沌现象.

可靠度分析的一次可靠度方法 (FORM), 也称一次二阶矩方法 (FOSM), 主要由 Hasofer 和 Lind(1974), Rackwitz 和 Fiessler (1978) 等发展并广泛用于结构可靠指标的计算(即 HL-RF 算法), 以其快速、高效、简洁的优点被国际安全度联合委员会 (JCSS) 推荐使用^[1]. 然而, 如果极限状态曲面在设

计点附近曲率较大时, 该方法在迭代过程中就会在设计点附近的一定区域内左右摆动而不收敛. 基于这种理解出现了许多改进型的算法^[2~4]. 但是这些改进型算法或者适用性较窄, 或者由于并未从迭代算法的混沌动力学根源进行算法改造对有些问题仍然不收敛^[5,6].

而且, 结构优化的满应力法、序列线性规划、序列二次规划法^[7]以及热接触耦合有限元分析迭代算法^[8]和静力弹塑性抗震分析的能力谱法^[9]对于一些非线性问题都可能出现收敛振荡、混沌现象. 过去针对这类不收敛问题的原因解释和解决方法是基于几何意义、直观和经验的, 比如认为一次可靠度方法 (FORM) 不收敛的原因在于极限状态函数设计点的曲率较大, 相应的解决方法着眼于如何减少和限制设计点的移动幅度, 人为设定一些经验性的限制参数, 但对某些问题求解仍不收敛. 序列线性规划法和序列二次规划法改善迭代收敛性的运动极限等措施也是如此. 然而, 迭代算法实际上构成了一个非线性映射, 即 $\mathbf{X}_{k+1} = f(\mathbf{X}_k)$, 本质上是一个离散动力系统. 因此, 从混沌动力学理论出发才能全面准确地理解迭代解的周期振荡、混沌等收敛失败问题. 杨迪雄等^[5,6]构造了典型极限状态函数的非线性映射显式表达式, 基于混沌动力学探讨了一次可靠度方法在求解极限状态函数可靠指标时产生周

2006-10-13 收到第 1 稿, 2007-02-01 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金 (10672030) 及 973 国家重点基础研究发展计划 (2006CB601205) 资助项目.

2) E-mail: yangdx@dlut.edu.cn

期振荡和混沌解的根本原因. 进一步应用混沌控制原理, 我们还将发展出控制迭代算法解的振荡、分岔和混沌的普适性的新方法, 从周期或混沌轨道中捕捉需要的收敛解, 从源头上解决迭代算法的不收敛问题.

本文结合工程力学迭代算法振荡和混沌控制的特点, 首先分析比较稳定转换法、自适应调节法、参数调节混合控制法、松弛牛顿法等混沌控制方法的全局 / 局部收敛性质、适用性和计算效率, 研究这几种方法的内在联系. 然后, 选择综合性能较好的控制方法用于可靠度分析 FORM 迭代算法的振荡、分岔和混沌控制, 捕捉期望的不动点解.

1 离散动力系统的两类混沌反馈控制方法

混沌控制包括基于参数摄动或弱周期摄动的无反馈控制和基于反馈策略的反馈控制两种. 由于无反馈控制一般改变了原系统的固有特点, 很难稳定到系统的原有轨道, 所以本文研究和采用有效的反馈控制方法. 混沌反馈控制主要是研究如何将混沌吸引子中嵌入的所需要的不稳定不动点或周期轨道进行目标引导和定位, 然后对动力系统施加控制使之运行到需要的目标轨道. 同时, 它也能镇定动力系统周期轨道中嵌入的不稳定不动点, 实现系统的振荡和分岔控制^[10~18]. 针对模型信息未知的混沌系统, 一些反馈控制方法采用相空间嵌入重构技术对系统混沌时间序列提取必要信息重建动力系统, 成功实现了系统的混沌控制^[11,18].

一般地, n 维非线性映射即离散动力系统的表达式为

$$\mathbf{X}_{k+1} = f(\mathbf{X}_k, \mathbf{p}), \quad \mathbf{X} \in R^n, \quad \mathbf{p} \in R^m, \quad k \in Z \quad (1)$$

式中, 迭代函数向量 f 是可微的, \mathbf{X} 是 $n \times 1$ 维状态向量, \mathbf{p} 是动力系统的控制参数向量. Ott, Grebogi 和 Yorke (1990) 发展的 OGY 混沌控制法, 必须利用控制参数摄动、求导以帮助引导和定位目标轨道^[10]. 但本文介绍的几种反馈控制方法, 如稳定转换法、松弛牛顿法等, 无需知道和利用系统控制参数, 也无需事先知道待稳定目标轨道的数值、位置信息. 而工程力学迭代算法形成的动力系统往往很难确定控制参数, 更不知道期望不动点的具体信息. 所以, 具有这些优点的混沌控制方法才适用于工程力学迭代算法的收敛控制.

对离散系统实施混沌反馈控制, 系统加上控制

项 $\mathbf{u}_k \in R^n$ 后变成

$$\mathbf{X}_{k+1} = f(\mathbf{X}_k, \mathbf{p}) + \mathbf{u}_k \quad (2)$$

不同的反馈混沌控制方法具有不同的控制项表达式. 根据式 (2) 是否含有 Jacobi 矩阵的形式, 可将混沌反馈控制方法分成两类: 全局混沌反馈控制法和局部混沌反馈控制法.

值得注意的是, 工程力学迭代算法比如结构优化算法中常用的迭代格式为

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k + \xi_k \mathbf{d}_k \quad (3)$$

其中, $\mathbf{d}_k \in R^n$ 代表搜索方向, $\xi_k \in R$ 表示迭代步长. 而且, 在力学迭代算法的收敛控制中, 也常参考采用式 (3) 形式. 实际上, 离散动力系统的混沌反馈控制式 (2) 与工程力学收敛控制迭代格式 (3) 是有联系的, 一些效果较好的力学收敛控制迭代算法公式容易改写成混沌反馈控制表达式.

1.1 全局混沌反馈控制 —— 稳定转换法和自适应调节法

混沌反馈控制第一类方法为全局混沌反馈控制法, 它无需求系统 Jacobi 矩阵, 收敛速度较慢, 但具有全局收敛性.

1.1.1 稳定转换法

Schmelcher 和 Diakonou^[11] 引入一个适当的线性变换改变系统 Jacobi 矩阵的特征值, 使原系统混沌轨道中的不稳定不动点稳定化, 但不改变不动点的数值和位置. 该方法被称为稳定转换法^[12], 它的表达式为

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k + \lambda \mathbf{C}(f(\mathbf{X}_k) - \mathbf{X}_k) \quad (4)$$

其中, $0 < \lambda < 1$, \mathbf{C} 是 $n \times n$ 维对合矩阵 (Involutory matrix, 即矩阵的每一行和每一列只有一个元素为 1 或 -1, 其余元素为 0, 对合矩阵的个数为 $2^n n!$). 式 (4) 也适用于高周期轨道的稳定. 式 (4) 中对合矩阵 \mathbf{C} 的选择与系统特性有关, 为了提高对周期轨道的稳定化效率, 对合矩阵不能取遍全部 $2^n n!$ 个矩阵, 需要选择最小数目的矩阵, 即所谓对合矩阵最小集. 文献 [12] 证明了对于二维系统, \mathbf{C} 只需选取以下 5 种矩阵, 同时因子 λ 取足够小值, 即可稳定混沌系统的不稳定不动点

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

但对于高维动力系统, 目前还未找到选取对合矩阵最小集的理论方法. 而且, 因子 λ 的取值与原系统 Jacobi 矩阵的特征值密切相关, 详细的讨论见后文算例分析.

由式 (4) 易知, 稳定转换法无需事先知道目标不动点的数值和位置等具体信息, 也不要求计算系统的 Jacobi 矩阵, 即不需要利用系统有关不动点导数的局部信息. 因此, 稳定转换法是一种全局收敛方法, 但收敛速度较慢^[11,12]. 于是, 为了提高收敛速度, 同时保持全局收敛性, 文献 [13] 提出了改进的稳定转换法, 但该方法需要系统的 Jacobi 矩阵, 操作也相对复杂. 由于 Schmelcher 和 Diakonou^[11] 是从系统稳定性转换的角度提出式 (4), 因此它不同于混沌反馈控制的闭环形式 (2), 但它很容易改写成式 (2), 即 $\mathbf{X}_{k+1} = f(\mathbf{X}_k) + (\lambda\mathbf{C} - \mathbf{I})(f(\mathbf{X}_k) - \mathbf{X}_k)$, \mathbf{I} 是单位矩阵.

特别地, 当 $\mathbf{C} = \mathbf{I}$, 则式 (4) 变成

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k + \lambda(f(\mathbf{X}_k) - \mathbf{X}_k) \quad (5)$$

工程力学迭代算法收敛控制的一些措施与稳定转换法有相似之处. Liu 和 Kiureghian^[2] 曾经针对可靠度分析的 FORM 不收敛问题提出了一个改善收敛性的迭代算法, 即修改的 HL-RF 法, 其迭代格式是

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{X}_{k+1} &= \mathbf{X}_k + \xi_k \mathbf{d}_k = \mathbf{X}_k + \lambda(f(\mathbf{X}_k) - \mathbf{X}_k) \\ 0 &< \lambda < 1 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

修改的 HL-RF 法除了采用迭代格式 (6), 还增加了一个价值函数 (merit function) 来监控算法的收敛行为, 使算法变得不如稳定转换法简洁、方便. 文献 [8] 为了对热接触耦合分析实现振荡控制, 建议了一个校正算法

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{k+1} &= \alpha f(\mathbf{X}_k) + (1 - \alpha)\mathbf{X}_k = \\ &\mathbf{X}_k + \alpha(f(\mathbf{X}_k) - \mathbf{X}_k), \quad 0 < \alpha < 1 \end{aligned} \quad (7)$$

另外, Luo 等^[14] 提出了一个实现离散动力系统混沌控制的混合控制方法

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{k+m} &= \alpha f^{(m)}(\mathbf{X}_k) + (1 - \alpha)\mathbf{X}_k = \\ &\mathbf{X}_k + \alpha(f^{(m)}(\mathbf{X}_k) - \mathbf{X}_k), \quad 0 < \alpha < 1 \end{aligned} \quad (8)$$

式中, 正整数 m 代表周期数, $m = 1$, 表示对不动点轨道进行稳定化控制. 比较式 (5)~(8) 可见, 它们具有基本相同的形式. 而混沌控制稳定转换法的式 (5) 是式 (4) 对合矩阵取单位矩阵的一个特例, 这说

明工程力学迭代算法收敛控制的迭代格式 (6) 和 (7) 是稳定转换法的一个特殊情形. 这就不难理解, 力学算法迭代格式 (6) 和 (7) 对于收敛控制还是有一定效果的. 然而, 由于迭代格式 (6) 和 (7) 中所隐含的单位矩阵只是 $2^n n!$ 个对合矩阵中的一个, 其收敛控制的灵活性和自由度受到了限制, 因而控制效果不如稳定转换法. 稳定转换法是一种更普遍的混沌控制方法. 另一方面, 稳定转换法式 (4) 可以改写成力学迭代格式, 但力学迭代格式很难表达成稳定转换法的形式.

1.1.2 自适应调节法

Vieira 和 Lichenberg^[15] 提出了一个具有超稳定收敛最优性质的线性反馈混沌控制方法

$$\mathbf{X}_{k+1} = f(\mathbf{X}_k) - K(f(\mathbf{X}_k) - \mathbf{X}_k), \quad 0 < K < 1 \quad (9)$$

根据式 (9) 和经济学中非线性系统稳定化的“自适应期望”策略, Huang^[16] 建议了一个动力系统混沌控制的自适应调节方法

$$\mathbf{X}_{k+1} = f(\mathbf{X}_k) - \mathbf{\Gamma}(f(\mathbf{X}_k) - \mathbf{X}_k) \quad (10)$$

其中, 参数矩阵 $\mathbf{\Gamma} = \text{diag}\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$, $\gamma_j > 0$. 自适应调节法 (10) 与线性反馈混沌控制方法 (9) 的主要区别是对角矩阵 $\mathbf{\Gamma}$ 代替了实数 K . 自适应调节法也具有全局收敛性质, 但它只适合于系统 Jacobi 矩阵特征值满足一定条件的非线性动力系统^[16].

事实上, 自适应调节法也可以视为稳定转换法的特例. 如果 $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{I} - \lambda\mathbf{C}$ (\mathbf{C} 是对合矩阵), 那么式 (10) 就变成式 (4), 表示此时自适应调节法等同于稳定转换法. 但自适应调节法参数对角矩阵 $\mathbf{\Gamma}$ 并不等于 $\mathbf{I} - \lambda\mathbf{C}$, 可以看作它的一个特别情形, 因此自适应调节法只适合于一些特殊动力系统的混沌控制.

1.2 局部混沌反馈控制 —— 参数调节混合法和松弛牛顿法

混沌反馈控制第二类方法为局部混沌反馈控制法, 它要求系统 Jacobi 矩阵, 收敛速度较快, 只具有局部收敛性.

1.2.1 参数调节混合法

为了捕捉混沌 (尤其是超混沌) 系统的不稳定周期轨道, Bu 等^[17] 提出一个参数调节混合法. 如果只要求稳定不动点轨道, 其表达式为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{X}_{k+1} &= f(\mathbf{X}_k) + (q\mathbf{I} - \mathbf{J})[\mathbf{J} - \mathbf{I}]^{-1}(f(\mathbf{X}_k) - \mathbf{X}_k) \\ 0 &< q < 1 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式中, \mathbf{J} 是迭代向量函数 f 的 Jacobi 矩阵, 即 $\mathbf{J} = \partial f / \partial \mathbf{X}|_{\mathbf{X}_k}$. 观察式 (11), 易见原开环系统 (1) 的不动点 \mathbf{X}_f 仍是闭环系统 (11) 的不动点. 因此, 参数调节混合法闭环系统继承了原离散动力系统的全部不动点.

1.2.2 松弛牛顿法

为了实现动力系统的混沌控制, 松弛牛顿法 (也称阻尼牛顿法) 是一种自然的选择方案. 首先将原系统写成非线性方程组求根形式: $F(\mathbf{X}) = f(\mathbf{X}) - \mathbf{X} = 0$, 然后应用松弛牛顿法的迭代格式

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{X}_{k+1} &= \mathbf{X}_k - h[\mathbf{J} - \mathbf{I}]^{-1}(f(\mathbf{X}_k) - \mathbf{X}_k) = \\ &f(\mathbf{X}_k) - (\mathbf{I} + h[\mathbf{J} - \mathbf{I}]^{-1})(f(\mathbf{X}_k) - \mathbf{X}_k) \end{aligned} \right\} \quad 0 < h < 1 \quad (12)$$

稍作变换, 令松弛因子 $h = 1 - q$, 松弛牛顿法的闭环系统的表达式 (12) 变为式 (11). 所以, 参数调节混合法不过是松弛牛顿法的另一种表达形式. 特别地, 当松弛牛顿法式 (12) 中 $h = 1$, 则得到混沌控制的牛顿法, 它具有二阶收敛速度, 也被称为自定位法^[18], 即

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{k+1} &= \mathbf{X}_k - [\mathbf{J} - \mathbf{I}]^{-1}(f(\mathbf{X}_k) - \mathbf{X}_k) = \\ &f(\mathbf{X}_k) - (\mathbf{I} + [\mathbf{J} - \mathbf{I}]^{-1})(f(\mathbf{X}_k) - \mathbf{X}_k) \end{aligned} \quad (13)$$

2 可靠度分析 FORM 迭代算法的混沌控制

2.1 FORM 迭代算法的周期振荡和混沌现象

一次可靠度方法 (FORM) 和二次可靠度 (SORM) 等近似可靠度方法的基本过程为: 首先计算可靠指标 β , 然后由 β 的简单积分求失效概率 P_F . FORM 采用标准正态空间中极限状态函数曲面上离原点最近的点作为可靠度的度量. 这一点被称为设计点 \mathbf{U}^* , 设计点到原点的距离被定义为可靠指标, 由此可计算失效概率^[1]

$$P_F = \Phi(-\beta) = \Phi(-\|\mathbf{U}^*\|) \quad (14)$$

式中, $\Phi(\cdot)$ 代表标准正态分布函数.

设待讨论问题的极限状态函数为

$$Z = g(\mathbf{X}) = g(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (15)$$

其中, $\mathbf{X} \in R^n$ 为相互独立的基本随机变量向量, 服从正态分布, 均值和标准差分别为 μ 和 σ ; 否则相关变量应转化为独立变量, 非正态分布变量应通过 Nataf 变换化为等效的正态分布变量.

FORM 计算可靠指标的 HL-RF 算法的迭代公式是一个显式表达式^[2~6]

$$\mathbf{U}_{k+1} = \frac{(\nabla g(\mathbf{U}_k))^T \mathbf{U}_k - g(\mathbf{U}_k)}{(\nabla g(\mathbf{U}_k))^T \nabla g(\mathbf{U}_k)} \nabla g(\mathbf{U}_k) \quad (16)$$

式中, 极限状态函数中包含随机向量的均值 μ 和标准差 σ , 特别地, 若随机向量服从正态分布, 则 $\mathbf{X} = \mu + \sigma \mathbf{U}$.

若将式 (16) 中的均值 μ 和标准差 σ 视为控制参数, 则在标准正态空间中, FORM 的显式迭代公式成为多维映射 (即离散动力系统)

$$\mathbf{U}_{k+1} = f(\mathbf{U}_k, \mu, \sigma) \quad (17)$$

从混沌动力学理论看来, 对于非线性极限状态函数, 利用 FORM 迭代求解可靠指标 β 的计算格式构成一个具有非线性映射形式的多维离散动力系统. 只要该系统的 Jacobi 矩阵的特征值满足相关的条件, 在一定的参数区间上必然出现不动点失稳, 数次迭代后的可靠指标 β 就会出现周期振荡、分岔甚至混沌等不收敛现象.

下面几个极限状态函数用 HL-RF 迭代计算都会出现振荡、分岔和混沌现象^[5,6], 本文将对它们进行振荡、分岔和混沌控制.

例 1 $g_1 = x_1^3 + x_2^3 - 18.0$, $\mu_1 = 10$, $\mu_2 = 9.9$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 5$, 均为正态分布^[3]

极限状态函数 g_1 在标准状态空间 \mathbf{U} 中的迭代公式为

$$\begin{aligned} U_{1,k+1} &= f_1(U_{1,k}, U_{2,k}, \mu_2) = \\ &[(3\sigma_1 U_{1,k} - A)A^4 + (3\sigma_2 U_{2,k} - B)A^2 B^2 + \\ &18A^2]/C \end{aligned} \quad (18a)$$

$$\begin{aligned} U_{2,k+1} &= f_2(U_{1,k}, U_{2,k}, \mu_2) = \\ &[(3\sigma_2 U_{2,k} - B)B^4 + (3\sigma_1 U_{1,k} - A)A^2 B^2 + \\ &18B^2]/C \end{aligned} \quad (18b)$$

式中, $A = \mu_1 + \sigma_1 U_{1,k}$, $B = \mu_2 + \sigma_2 U_{2,k}$, $C = 3\sigma_1(\mu_1 + \sigma_1 U_{1,k})^4 + 3\sigma_2(\mu_2 + \sigma_2 U_{2,k})^4$

例 2 $g_2 = x_1^4 + 2x_2^4 - 20.0$, $\mu_1 = 10$, $\mu_2 = 10$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 5$, 均为正态分布^[4]

极限状态函数 g_2 在标准状态空间中的迭代公式为

$$\begin{aligned} U_{1,k+1} &= f_1(U_{1,k}, U_{2,k}, \mu_2) = \\ &[(4\sigma_1 U_{1,k} - A)A^6 + 2(4\sigma_2 U_{2,k} - B)A^3 B^3 + \end{aligned}$$

$$20A^3]/D \quad (19a)$$

$$U_{2,k+1} = f_2(U_{1,k}, U_{2,k}, \mu_2) = \frac{2[2(4\sigma_2 U_{2,k} - B)B^6 + (4\sigma_1 U_{1,k} - A)A^3 B^3 + 20B^3]/D}{(19b)}$$

式中, $D = 4\sigma_1(\mu_1 + \sigma_1 U_{1,k})^6 + 16\sigma_2(\mu_2 + \sigma_2 U_{2,k})^6$

例 3 $g_3 = x_1^3 + x_1^2 x_2 + x_2^3 - 18.0$, $\mu_1 = 10$, $\mu_2 = 9.9$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 5$, 均为正态分布^[4]

极限状态函数 g_3 在标准状态空间中的迭代公式为

$$U_{1,k+1} = f_1(U_{1,k}, U_{2,k}, \sigma_1) = \frac{[(3\sigma_1 U_{1,k} + \sigma_2 U_{2,k} - A)A^2 + (2\sigma_1 U_{1,k} - A)AB + (3\sigma_2 U_{2,k} - B)B^2 + 18](3\sigma_1 A^2 + 2\sigma_1 AB)/E}{(20a)}$$

$$U_{2,k+1} = f_2(U_{1,k}, U_{2,k}, \sigma_1) = \frac{[(3\sigma_1 U_{1,k} + \sigma_2 U_{2,k} - A)A^2 + (2\sigma_1 U_{1,k} - A)AB + (3\sigma_2 U_{2,k} - B)B^2 + 18](\sigma_2 A^2 + 3\sigma_2 B^2)/E}{(20b)}$$

式中, $E = (3\sigma_1 A^2 + 2\sigma_1 AB)^2 + (\sigma_2 A^2 + 3\sigma_2 B^2)^2$.

在 3 个极限状态函数的迭代格式 (18)~(20) 中, 已经分别将 μ_1 , μ_2 和 σ_1 视为控制参数^[5,6]. 图 1 为利用一次可靠度方法 HL-RF 算法计算极限状态函数 g_3 时的分岔图. 从分岔图可见随着参数 σ_1 的变化, 可靠指标 β 出现周期振荡、分岔和混沌现象. 图 2 表示当 $\sigma_1 = 9.9$ 时 HL-RF 算法计算极限状态函数 g_3 时的混沌吸引子, 它是迭代序列在有限的空间形成的具有清晰结构的图形.

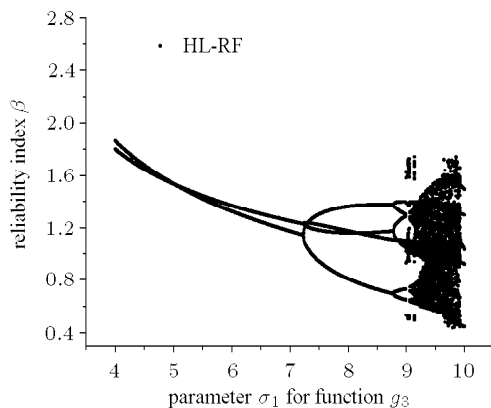


图 1 HL-RF 迭代计算极限状态函数 g_3 的分岔图

Fig.1 Bifurcation plot of iterative computation of limit state function g_3 using HL-RF algorithm

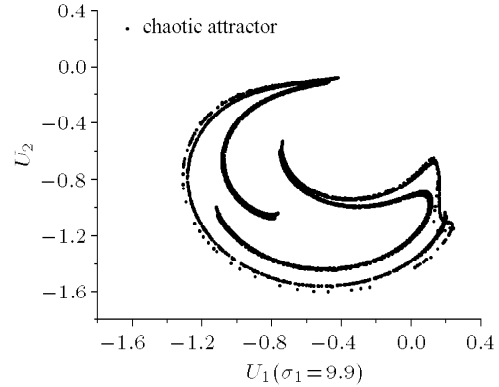


图 2 HL-RF 迭代计算函数 g_3 的混沌吸引子

Fig.2 Chaotic attractor of limit state function g_3 using HL-RF algorithm

2.2 FORM 迭代算法的混沌控制

第 1 节分析比较了两类共 4 种离散动力系统的混沌控制方法. 考虑到式 (4) 表示的稳定转换法具有良好的全局 (大范围) 收敛性质, 这里采用它对 FORM 方法 HL-RF 算法实施混沌控制. 为了避免稳定转换法的因子 λ 取值小致使运算时迭代次数多、工作量增大的缺点, 我们结合收敛速度较快的松弛牛顿法 (Relaxed Newton Method) 就能顺利地实现混沌控制. 计算实践证实了这些.

对于极限状态函数 g_1 , g_2 和 g_3 , 利用 HL-RF 迭代计算可靠指标的分岔图分别如图 3(a), 图 4(a) 和图 1 所示. 对极限状态函数 g_1 和 g_3 利用稳定转换法 ($\lambda = 0.1$, 对合矩阵 $C_1 = I$) 实施混沌控制, 结果分别如图 3(b) 和图 5 所示. 可见, 在控制参数的整个区间 $\mu_2 \in [0.025, 50]$ 和 $\sigma_1 \in [4.0, 10]$, 稳定转换法全部使离散动力系统 (18), (20) 的不稳定不动点稳定化, 得到了正确的可靠指标. 同样, 对极限状态函数 g_2 利用稳定转换法 ($\lambda = 0.1$, $C_1 = I$) 实施混沌控制. 然而, 函数的可靠指标在区间 $\mu_2 \in [44.6, 50]$ 内仍有周期振荡现象, 然后在此不收敛区间内重新单独利用松弛牛顿法 (松弛因子 $h = 0.1$) 成功地实现了混沌控制, 计算结果如图 4(b) 所示.

稳定转换法和松弛牛顿法的收敛速度分别与因子 λ 和 h 有关. 一般来说, λ 取 $0.1 \sim 0.001$, 因子 λ 和 h 越小, 收敛速度越慢, 但混沌控制的效果越好. 对前文 3 个算例对应每一个控制参数的情形, 稳定转换法 ($\lambda = 0.1$, $C_1 = I$) 成功实现混沌控制需要的迭代次数为 120~220 次, 松弛牛顿法 (松弛因子 $h = 0.1$) 的迭代次数为 11~150 次.

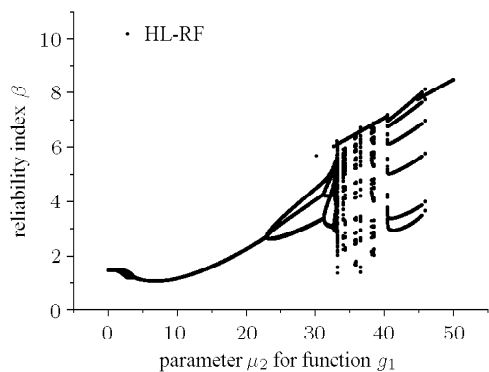
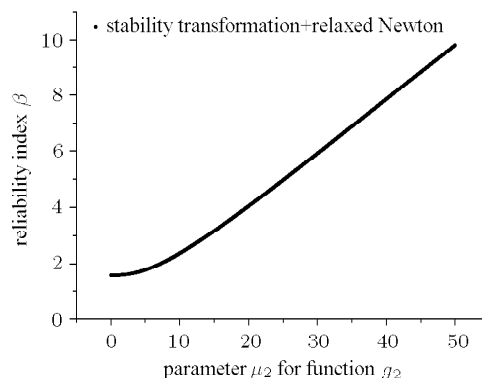
(a) HL-RF 迭代计算极限状态函数 g_1 的分岔图(a) Bifurcation plot of iterative computation of limit state function g_1 using HL-RF algorithm(b) 对函数 g_2 实施混沌控制(b) Chaos control for limit state function g_2

图 4

Fig.4

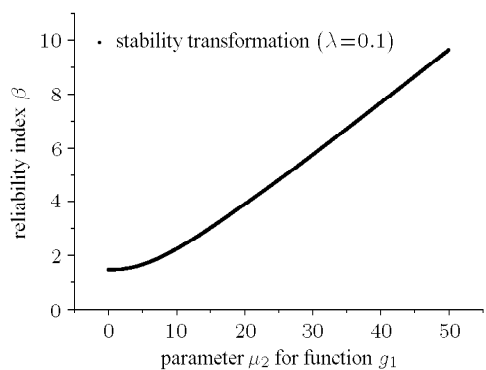
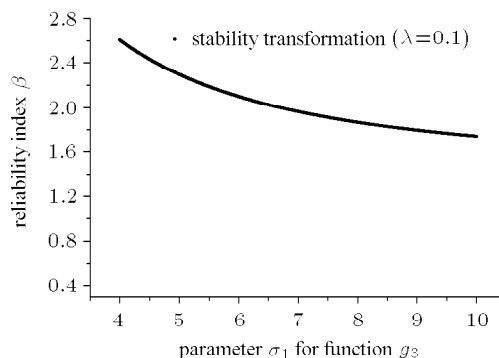
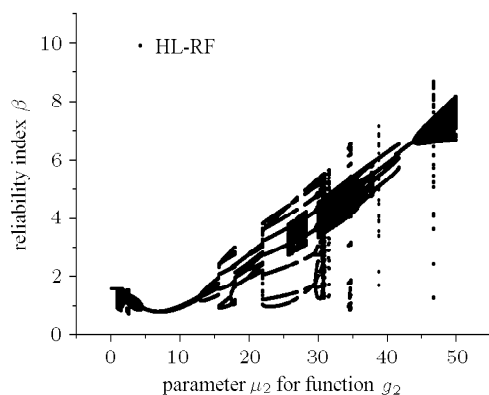
(b) 对函数 g_1 实施混沌控制(b) Chaos control for limit state function g_1 图 5 对函数 g_3 实施混沌控制Fig.5 Chaos control for limit state function g_3

图 3

Fig.3

(a) HL-RF 迭代计算极限状态函数 g_2 的分岔图(a) Bifurcation plot of iterative computation of limit state function g_2 using HL-RF algorithm

需要指出的是, 前文述及, 利用稳定转换法 ($\lambda = 0.1$, $C_1 = I$) 对极限状态函数 g_2 进行混沌控制, 其可靠指标在 $\mu_2 \in [44.6, 50]$ 仍不收敛, 我们可以进一步减小 λ , 以获得收敛解, 结果如表 1 所示. 比如 $\lambda = 0.05$, 计算结果表明得到了正确的不动点解, 但迭代稳定收敛需要的次数大大增加, 平均达 410 次. 而且, 如果由于减小 λ 增加的计算量太大或者这一措施对一些系统仍然失效, 那么可以将稳定转换法式 (4) 的对合矩阵 C 取其他形式 C_k , 然后实施振荡和混沌控制.

前面 3 个极限状态函数都只含有两个正态分布随机变量, 其可靠指标 HL-RF 算法的迭代公式能够显式写出. 对于例 4 所示含非正态的随机变量的四维极限状态函数的可靠指标求解, HL-RF 算法的迭代公式不能显式表达, 算例出现周期 2 (即 1.051 49, 1.154 59) 的振荡解^[6].

表 1 稳定转换法 ($C_1 = I$) 对极限状态函数 g_2 在 $\mu_2 \in [44.6, 50]$ 区间的混沌控制平均迭代次数随 λ 的变化
 Table 1 Relationship between mean iterative number and factor λ of stability transformation method ($C_1 = I$) for chaos control of limit state function g_2 at $\mu_2 \in [44.6, 50]$

Stability transformation method	$\lambda = 0.05$	$\lambda = 0.01$	$\lambda = 0.005$	$\lambda = 0.001$
Mean iterative number N	410	1 920	3 686	17 150

例 4 含非正态分布随机变量的四维极限状态函数的可靠指标求解.

$$\begin{aligned}
 g_4 = & 1.1 - 0.001\,15x_1x_2 + 0.001\,57x_2^2 + \\
 & 0.001\,17x_1^2 + 0.013\,5x_2x_3 - 0.070\,5x_2 - \\
 & 0.005\,34x_1 - 0.014\,9x_2x_3 - \\
 & 0.061\,1x_2x_4 + 0.071\,7x_1x_4 - 0.226x_3 + \\
 & 0.033\,3x_3^2 - 0.558x_3x_4 + 0.998x_4 - \\
 & 1.339x_4^2
 \end{aligned} \quad (21)$$

式中, x_1 是极值 II 型分布 ($\mu_1 = 10, \sigma_1 = 5$), x_2, x_3 是正态分布 ($\mu_2 = 25, \sigma_2 = 5, \mu_3 = 0.8, \sigma_3 = 0.2$), x_4 是对数正态分布 ($\mu_4 = 0.062\,5, \sigma_4 = 0.062\,5$)^[2,6].

对例 4 这个比较复杂的算例, 利用稳定转换法 ($C_1 = I$) 实施振荡控制, λ 取不同值时迭代次数不同, 如表 2 所示, λ 越小, 迭代次数越多. 从均值点或其他初始点开始迭代计算, 最后的收敛结果为: 可靠指标 $\beta = 1.330\,4$, 设计点 $\mathbf{X}^* = (14.906, 25.067, 0.899\,5, 0.046\,06)$. 另一方面, 对于动力系统的混沌控制, 因子 λ 的取值与原系统 Jacobi 矩阵的特征值密切相关, 特征值的绝对值越大, 不动点越不稳定, 为了实现稳定, 则 λ 需取越小的值^[11,12].

表 2 稳定转换法 ($C_1 = I$) 对极限状态函数 g_4 的振荡控制迭代次数随 λ 的变化

Table 2 Relationship between iterative number and factor λ of stability transformation method ($C_1 = I$) for oscillation control of limit state function g_4

Stability transformation method	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 0.1$	$\lambda = 0.05$	$\lambda = 0.01$
Iterative number N	22	114	216	927

从上面 4 个算例计算结果可知, 以稳定转换法为主的混沌反馈控制方法能够顺利地解决可靠度分析 FORM 方法 HL-RF 迭代算法的振荡、分岔和混沌控制问题, 结合松弛牛顿法时计算效率也是较高的. 无论动力系统是离散还是连续, 是显式还是隐式, 并且无需知道系统目标轨道的数值、位置信息, 无需利用系统的控制参数信息, 稳定转换法都能实现周期轨道 (包括高周期轨道) 的混沌控制. 但是, 对于高维动力系统, 稳定转换法选取对合矩阵最小集的理论方法以及稳定高周期轨道的能力还需要进一步研究和发展^[11,12].

3 结 论

本文理清了全局性和局部性两类混沌反馈控制各种方法的内在联系, 说明稳定转换法和自适应调节法属于全局混沌反馈控制方法, 自适应调节法可视为稳定转换法的特例, 并且该法只对某些特殊的动力系统有效. 参数调节混合法不过是松弛牛顿法的另一种表达形式, 它们都属于局部混沌反馈控制方法. 阐明了混沌反馈控制表达式与工程力学收敛控制迭代算法的对应关系. 可靠度分析修改的 HL-RF 法 (Modified HL-RF) 和迭代收敛控制常用的校正算法也是稳定转换法的一个特例. 而且揭示了这些迭代算法收敛控制措施的功效率和局限性, 即这些算法不具有混沌控制稳定转换法的普遍形式, 从而并不总是奏效. 更重要的是, 提出了一个有效、简便和通用的, 以稳定转换法为主联合松弛牛顿法的混沌反馈控制方法, 对可靠度分析 FORM 迭代算法实现了周期振荡、分岔和混沌控制.

致谢 本文研究过程中得到了程耿东教授的诸多指导, 谨致谢忱.

参 考 文 献

- 1 Melchers RE. Structural Reliability Analysis and Prediction (2nd Edition). Chichester: Ellis Horwood Limited Publishers, 1999
- 2 Liu PL, Kiureghian AD. Optimization algorithms for structural reliability. *Structural Safety*, 1991, 9: 161~177
- 3 Wang LP, Grandhi RV. Efficient safety index calculation for structural reliability analysis. *Computers and Structures*, 1994, 52(1): 103~111
- 4 Wang LP, Grandhi RV. Safety index calculation using intervening variables for structural reliability analysis. *Computers and Structures*, 1996, 59(6): 1139~1148
- 5 杨迪雄, 许林, 李刚. 结构可靠度 FORM 方法的混沌动力学分析. *力学学报*, 2005, 37(6): 799~804 (Yang Dixiong, Xu Lin,

- Li Gang. Chaotic dynamics analysis of FORM in structural reliability. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2005, 37(6): 799~804 (in Chinese))
- 6 Yang DX, Li G, Cheng GD. Convergence analysis of first order reliability method using chaos theory. *Computers and Structures*, 2006, 84(8-9): 563~571
- 7 隋允康. 建模, 变换, 优化——结构综合方法新进展. 大连: 大连理工大学出版社, 1996 (Sui Yunkang. Modeling, Transformation and Optimization—New Development of Structural Synthesis. Dalian: Dalian University of Technology Press, 1996 (in Chinese))
- 8 张洪武, 顾元宪, 钟万勰. 稳态传热和接触耦合问题解的唯一性和迭代算法的振荡性. *机械强度*, 2000, 22(3): 187~195 (Zhang Hongwu, Gu Yuanxian, Zhong Wanxie. Uniqueness and oscillation problems for coupled analysis between stable heat transfer and contact processes. *Journal of Mechanical Strength*, 2000, 22(3): 187~195 (in Chinese))
- 9 Yang DX, Li G. Discussion of paper: A mathematical basis of convergence of the capacity spectrum method. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 2006, 35(8): 1051~1052
- 10 胡岗, 萧井华, 郑志刚. 混沌控制. 上海: 上海科技教育出版社, 2000 (Hu Gang, Xiao Jinghua, Zheng Zhigang. Chaos Control. Shanghai: Shanghai Science and Education Press, 2000 (in Chinese))
- 11 Schmelcher P, Diakonov FK. Detecting unstable periodic orbits of chaotic dynamical systems. *Physical Review Letters*, 1997, 78(25): 4733~4736
- 12 Pingel D, Schmelcher P, Diakonov FK. Stability transformation: a tool to solve nonlinear problems. *Physics Reports*, 2004, 400: 67~148
- 13 Davidchack RL, Lai YC. Efficient algorithm for detecting unstable periodic orbits in chaotic systems. *Physical Review E*, 1999, 60(5): 6172~6175
- 14 Luo XS, Chen GR, Wang BH, et al. Hybrid control of periodic-doubling bifurcation and chaos in discrete nonlinear dynamical systems. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2003, 18(3): 775~783
- 15 Vieira MS, Lichtenberg AJ. Controlling chaos using nonlinear feedback with delay. *Physical Review E*, 1996, 54(16): 1200~1207
- 16 Huang WH. Stabilizing unstable discrete systems by nonuniformly adaptive adjustment mechanism. *Physical Review E*, 2000, 62(3): 3455~3460
- 17 Bu SL, Wang BH, Jiang PQ. Detecting unstable periodic orbits in chaotic systems by using an efficient algorithm. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2004, 22(2): 237~241
- 18 Xu DL, Bishop SR. Self-locating control of chaotic systems using Newton algorithm. *Physics Letters A*, 1996, 210(2): 273~278

CHAOS CONTROL OF FORM ITERATIVE ALGORITHM IN STRUCTURAL RELIABILITY ANALYSIS¹⁾

Yang Dixiong²⁾

(Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology State Key Laboratory for Structural Analysis of Industrial Equipment, Dalian 116023, China)

Abstract The HL-RF algorithm of First Order Reliability Method (FORM) in structural reliability analysis is an iterative algorithm for reliability index with a wide application. However, it sometimes suffers from convergent failure such as periodic oscillation, bifurcation and chaos for some nonlinear limit state functions. The convergent failure of FORM is controlled by using chaos control principle in the present paper. The inherent relationship of various kinds of methods for global and local chaos feedback control is clarified. It is shown that the stability transformation method and adaptive adjustment method are global chaos feedback control method, and the adaptive adjustment method can be viewed as a special case of the stability transformation method. The parameter adjustment hybrid method is only a different form of the relaxed Newton method, both of which are local chaos feedback control methods. The corresponding relationship between the formulations of chaos feedback control and iterative schemes for convergence control in engineering mechanics is explored. Furthermore, the effectiveness and limitations of these measures for convergence control of iterative algorithms are discussed. An effective, simple and general chaos feedback control method combining the stability transformation and relaxed Newton method is proposed, which is applied to control the periodic oscillation, bifurcation and chaos of FORM iterative algorithm for reliability analysis.

Key words reliability analysis, FORM iterative algorithm, chaotic dynamics, convergent failure, chaos feedback control

Received 13 October 2006, revised 1 February 2007.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10672030) and the National Key Basic Research Development Program of China (2006CB601205).

2) E-mail: yangdx@dlut.edu.cn