Leibniz-Universität Hannover
Insitut für Differentialgeometrie
Dr. Ahmad Afuni, Dr. Markus Röser Hannover, den 09.06.16

Übungsblatt 9

zur Vorlesung Mannigfaltigkeiten

Sommersemester 2016

Aufgabe 1. Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$. Zeigen Sie, dass die *Grassmannsche*

$$G_k(n) = \{V \subset \mathbb{R}^n \mid V \text{ ist ein Untervektorraum der Dimension } k\}$$

eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension $k(n-k)$ ist. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

a) Sei $V \in G_k(n)$. Zeigen Sie, dass 1-Formen $\xi^1, \dots, \xi^{n-k} \in (\mathbb{R}^n)^*$ existieren, sodass $\xi^1 \wedge \dots \wedge \xi^{n-k} \neq 0$ und $V = \bigcap_{i=1}^{n-k} \ker \xi^i = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \xi^i(v) = 0 \ \forall i = 1, \dots, n-k\}$. Es gilt also $V = \ker \xi$, wobei $\xi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ die Matrix mit Zeilen ξ^i ist.

b) Seien $V = \ker \xi, W = \ker \eta \in G_k(n)$. Zeigen Sie, dass $V = W$ gilt, genau dann wenn eine Matrix $A \in \mathrm{GL}(n-k, \mathbb{R})$ existiert mit $\eta = A \circ \xi$.

c) Sei $\mathbf{i} = i_1 < i_2 \dots < i_{n-k}, i_l \in \{1, \dots, n\}$ ein Multiindex. Betrachten Sie $U_{\mathbf{i}} = \{[\ker \xi] \in G_k(n) \mid \det \xi_{\mathbf{i}} \neq 0\}$, wobei $\xi_{\mathbf{i}} \in \mathfrak{gl}(n-k, \mathbb{R})$ die Untermatrix von ξ ist, die man durch Auswahl der Spalten $i_1, \dots, i_{n-k}$ erhält. Sei $\mathbf{i}^c = j_1 < \dots < j_k$ der komplementäre Multiindex, also $j_m \neq i_l$ für alle m, l. Betrachten Sie nun die Abbildung

$$\phi_{\mathbf{i}} : U_{\mathbf{i}} \to \mathrm{Mat}(k, n-k), \qquad \phi_{\mathbf{i}}(\ker \xi) = \xi_{\mathbf{i}}^{-1} \xi_{\mathbf{i}^c}.$$

Zeigen Sie, dass dies einen glatten Atlas für $G_k(n)$ ergibt.

Aufgabe 2. a) Sei $V_0 = \mathrm{span}(e_1, e_2) \subset \mathbb{R}^4$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\mathrm{O}(4) \to G_2(4), \quad B \mapsto B(V_0)$$

glatt und surjektiv ist. Folgern Sie, dass $G_2(4)$ kompakt ist.

b) Zeigen Sie, dass die *Plücker-Abbildung* p eine Einbettung ist:

$$p : G_2(4) \to \mathbb{P}(\Lambda^2(\mathbb{R}^4)^*), \quad p(\ker \xi) = [\xi^1 \wedge \xi^2].$$

Aufgabe 3. a) Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $F(x, y) = (x^2 y, 2xy^3, \sin(x)\cos(y))$ und seien $\xi = y\,dy + z\,dz, \eta = x\,dy \wedge dz \in \Omega^*(\mathbb{R}^3)$. Berechnen Sie $F^*\xi$ und $F^*\eta$.

b) Sei $\omega = dx \wedge dy$ auf $M = \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie die Darstellung von ω in Polarkoordinaten $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$.

Aufgabe 4. Sei $M = \mathbb{R}^{2n}$ mit Koordinaten $q^1, \dots, q^n, p^1, \dots, p^n$ und sei $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^{2n})$ gegeben durch

$$\omega = \sum_{i=1}^n dp^i \wedge dq^i.$$

Zeigen Sie:

a) $df(X) = \omega(X_f, X)$, für alle $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}), X \in \Gamma(T\mathbb{R}^{2n})$ (Notation von Blatt 6, Aufgabe 2.)

b) $\{f, g\} = -\omega(X_f, X_g)$ für alle $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ (Notation von Blatt 6, Aufgabe 2.)

c) $\omega^n = n!\,dp^1 \wedge dq^1 \wedge \dots \wedge dp^n \wedge dq^n$, wobei $\omega^n = \omega \wedge \omega \wedge \dots \wedge \omega$ (n-mal).

Abgabe Donnerstag, 16.06.2016 in der Vorlesung.