Institut für Theoretische Informatik
Leibniz Universität Hannover

4. Übungsblatt

11.05.2015

- Platzhierarchiesatz: Falls $s_1 \in o(s_2)$ und s_2 raumkonstruierbar, dann gilt $\mathsf{SPACE}(s_1) \subsetneq \mathsf{SPACE}(s_2)$.
- Zeithierarchiesatz: Falls $t_1(n) \in o\left(\frac{t_2(n)}{\log(t_2(n))}\right)$ und t_2 „zeitkonstruierbar", dann gilt $\mathsf{TIME}(t_1) \subsetneq \mathsf{TIME}(t_2)$.
- $\mathsf{P} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathsf{TIME}(n^k)$, $\mathsf{PSPACE} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathsf{SPACE}(n^k)$

Aufgabe 1: *(Klausuraufgabe WS 2005/2006)*
Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\mathsf{SPACE}(2^n) \subsetneq \mathsf{SPACE}(2^{2n})$ (b) $\mathsf{NTIME}(n) \subsetneq \mathsf{PSPACE}$ (c) $\mathsf{PSPACE} \subsetneq \mathsf{SPACE}(2^n)$.

Aufgabe 2: Eine Zusammenhangskomponente (ZHK) eines ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ (V beliebige Menge, $E \subseteq V \times V$, $(u, v) \in E$ gdw. $(v, u) \in E$) ist eine inklusionsmaximale Menge von Knoten $U \subseteq V$ mit der Eigenschaft, dass es zwischen je zwei Knoten aus U einen Pfad in G gibt.

Zeigen Sie, dass die Sprache

$$\textbf{CONNECTED} := \{\langle G, k\rangle \mid G \text{ ist ein ungerichteter Graph mit } \leq k \text{ ZHKn}\}$$

zur Klasse P gehört.

Aufgaben zum selber Lösen

Aufgabe 3: *(Klausuraufgabe Wintersemester 2013/2014)*
Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) $\text{NSPACE}(n \cdot \log n) \subsetneq \text{SPACE}(n^2 \cdot (\log n)^3)$

(b) $\mathsf{NP} \subsetneq \text{SPACE}(2^{n^2})$

Aufgabe 4: *(Klausuraufgabe Wintersemester 2005/2006)*
Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^\star$ ist semi-entscheidbar, wenn die charakteristische Funktion $\chi_A\colon \Sigma^\star \to \{0, 1\}$ der Sprache A mit

$$\chi_A(w) := \begin{cases} 1, & \text{falls } w \in A \\ \text{undefiniert}, & \text{sonst} \end{cases}$$

berechenbar ist. Das heißt, ein Algorithmus akzeptiert Wörter $w \in A$ nach einer endlichen Zeit. Für Wörter $w \notin A$ muss jedoch keine Antwort kommen, d.h. der Algorithmus kann auch in eine Endlosschleife gehen. Dies ist hier explizit anders als bei den Algorithmen aus der Vorlesung.

Definition Sei $t\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Die Komplexitätsklasse $\mathbf{SEMITIME}(t(n))$ besteht aus allen Sprachen A, für die es eine Mehrband-Turingmaschine gibt, die A semi-entscheidet (also ein Semi-Entscheidungsalgorithmus für A ist) und deren Zeitbedarf für alle $w \in A$ durch $O(t(|w|))$ beschränkt ist. Eine Akzeptanz von Wörtern aus der Sprachen findet also garantiert in Zeit $O(t(|w|))$ statt.

Beweisen Sie: Ist $A \in \mathbf{SEMITIME}(t(n))$ für eine berechenbare Funktion $t\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so ist A entscheidbar, d.h. es gibt einen Algorithmus, der nach endlicher Zeit sowohl akzeptiert als auch verwirft (abhängig davon ob $w \in A$ oder $w \notin A$) ohne in eine Endlosschleife zu gehen.