Lösung 4 (Lineare Blockcodes)

a)

$$N = 6; \quad K = 3; \quad N - K = 3$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b)
1. Tausche Zeilen 1 und 2
2. Addiere Zeile 1 zu Zeile 3
3. Addiere Zeile 2 zu Zeile 3

$$G' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Tausche Spalten 3 und 5

$$G'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d) Die Zeilenräume sind identisch, falls die Zeilenvektoren der Matrizen denselben Vektorraum aufspannen. Die folgen Tabellen zeigen alle Codewörter $\vec{x}$, die durch die Generatormatrizen G, G' und G'' erzeugt werden können. Sind die Zeilenräume identisch so wird derselbe Code erzeugt. Allerdings kann sich die Zuordnung zwischen $\vec{u}$ und $\vec{x}$ ändern. Die Tabellen zeigen somit, dass die Zeilenräume von G und G' identisch sind, jedoch nicht die von G und G''.

$\vec{u} \cdot G$:

$\vec{u}$			$\vec{x}$					
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	1	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0	1	1	1

$\vec{u} \cdot G'$:

$\vec{u}$			$\vec{x}$					
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0	0	1
1	0	1	1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	0	0	1	1

$\vec{u} \cdot G''$:

$\vec{u}$			$\vec{x}$					
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	0	0	1

e)

$$\begin{aligned}
\vec{x} &= \vec{u} \cdot G \\
\vec{0} &= \vec{x} \cdot H^T \\
\Rightarrow \vec{0} &= \vec{u} \cdot G \cdot H^T \\
\Rightarrow 0 &= G \cdot H^T
\end{aligned}$$

Die Zeilen von G und H sind orthogonal, also $\vec{g}_i \cdot \vec{h}_j = 0$. Betrachte die Form eines solchen Skalarprodukts für systematische Codes:

$$\begin{array}{lccccccccc}
\vec{g}_i = & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & g_{i,K+1} & \cdots & g_{i,K+j} & \cdots & g_{i,N} \\
\vec{h}_j = & h_{j,1} & \cdots & h_{j,i} & \cdots & h_{j,K} & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0
\end{array}$$

$$\vec{g}_i \cdot \vec{h}_j = g_{i,K+j} + h_{j,i} = 0 \Rightarrow g_{i,K+j} = h_{j,i}$$

Für systematische Codes lässt sich also folgende Beziehung aufstellen:

$$G_{sys} = [I_K, P] \Leftrightarrow H_{sys} = \left[P^T, I_{N-K}\right],$$

wobei I_n eine Identitätsmatrix mit den Dimensionen $n \times n$ darstellt.

f)

$$H'' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

g) Untersuchung der Spaltenvektoren:
Zwei beliebig gewählte Spaltenvektoren aus H'' sind linear unabhängig
Drei beliebig gewählte Spaltenvektoren aus H'' sind nicht linear unabhängig ($H''_2 = H''_3 + H''_5$)
Aus Theorem 4.25 aus dem Skript folgt $d = 3$

h) Für gültige Generatormatrix und Parity-Check-Matrix Paare gilt:
$G \cdot H^T = 0$. Für die Matrizen G' und H' ist dies erfüllt. Daher handelt es sich bei H' um eine gültige Parity-Check-Matrix.