Leibniz-Universität Hannover
Insitut für Differentialgeometrie
Dr. Ahmad Afuni, Dr. Markus Röser Hannover, den 05.04.2016

Lösungsvorschläge zum Übungsblatt 1

zur Vorlesung Mannigfaltigkeiten

Sommersemester 2016

Aufgabe 1 (Polarkoördinaten)**.** Bestimmen wir ϕ. Sei $(x, y) \in M$. Wir suchen $(r, \theta) \in]0, \infty[\times]0, 2\pi[$ s.d.

$$(r \cos\theta, r \sin\theta) = (x, y).$$

Den Betrag beider Seiten betrachtend, folgern wir unmittelbar, daß $r^2 = x^2 + y^2$, oder $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Das Problem, θ zu bestimmen, teilen wir in Fälle, wo (x, y) in einem bestimmten Quadranten liegt; hierfür wenden wir ein bißchen Trigonometrie an.

1. $x, y > 0$: $\tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = \arctan(\frac{y}{x})$.
2. $x \leq 0$, $y > 0$: $\tan(\theta - \frac{\pi}{2}) = -\frac{x}{y} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{x}{y})$.
3. $x < 0$, $y \leq 0$: $\tan(\theta - \pi) = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = \pi + \arctan(\frac{y}{x})$.
4. $x \geq 0$, $y < 0$: $\tan(\theta - \frac{3\pi}{2}) = \frac{x}{-y} \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{2} - \arctan(\frac{x}{y})$.

Insgesamt haben wir eine Funktion $\theta : M \to (0, 2\pi)$ definiert; folglich ist $\phi(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \theta(x, y))$. Es läßt sich nun zeigen, daß ϕ und ϕ^{-1} Inverse von einander sind; daher ist ϕ^{-1} in der Tat bijektiv.
Die Veträglichkeit von ϕ mit der Standardkarte ist genau die Aussage, daß die Abbildungen $M \ni x \mapsto (\phi \circ \mathrm{id}^{-1})(x) = \phi(x)$ und $(0, \infty) \times (0, 2\pi) \ni (r, \theta) \mapsto \mathrm{id} \circ \phi^{-1}(r, \theta) = \phi^{-1}(r, \theta)$ glatt sind. Anstatt die Definition von ϕ zu benutzen, wenden wir das Inverse-Funktionen-Theorem an: Die Abbildung ϕ^{-1} ist offensichtlich glatt, und $\det(\mathrm{d}\phi^{-1})(r, \theta) = r > 0$, woher die Existenz einer glatten (lokalen) Umkehrfunktion folgt; ϕ^{-1} hat aber eine eindeutige (globale) Inverse wegen Bijektivität, d.h. ϕ ist glatt.

Aufgabe 2 (Alternative Karten für S^n)**.**

(a) Zuerst die Injektivität von $\phi_{\alpha,\varepsilon}$:

$$\begin{aligned} &\phi_{\alpha,\varepsilon}(x^1, \ldots, x^{n+1}) = \phi_{\alpha,\varepsilon}(\widetilde{x}^1, \ldots, \widetilde{x}^{n+1}) \\ \Leftrightarrow &(x^1, \ldots, \widehat{x}^\alpha, \ldots, x^{n+1}) = (\widetilde{x}^1, \ldots, \widehat{\widetilde{x}}^\alpha, \ldots, \widetilde{x}^{n+1}) \\ \Leftrightarrow &x^i = \widetilde{x}^i \ \forall i \neq \alpha. \end{aligned} \tag{1}$$

Andererseits gilt $x, \widetilde{x} \in U_{\alpha,\varepsilon} \subset S^n$, d.h.

$$\varepsilon x^\alpha, \varepsilon\widetilde{x}^\alpha > 0 \text{ und} \tag{2}$$

$$|x|^2 = |\widetilde{x}|^2 = 1. \tag{3}$$

Aus (1) und (3) folgt, daß $(x^\alpha)^2 = (\widetilde{x}^\alpha)^2 \Leftrightarrow |x^\alpha| = |\widetilde{x}^\alpha|$. Wegen (2) ist diese Bedingung äquivalent zu $\varepsilon x^\alpha = \varepsilon\widetilde{x}^\alpha$, d.h. $x^\alpha = \widetilde{x}^\alpha$.

Wir zeigen nun, daß $\phi_{\alpha,\varepsilon}$ ein im $\mathbb{R}^n$ offenes Bild hat. Bemerke, daß $x \in U_{\alpha,\varepsilon} \Rightarrow |\phi_{\alpha,\varepsilon}(x)|^2 = \sum_{i\neq\alpha}(x^i)^2 = 1 - (x^\alpha)^2 < 1$, d.h. $\phi_{\alpha,\varepsilon}(U_{\alpha,\varepsilon}) \subset B(0, 1)$. Andererseits: $\forall y = (y^1, \ldots, y^n) \in B(0, 1)$ gilt $(y^1, \ldots, y^{\alpha-1}, \varepsilon\sqrt{1 - |y|^2}, y^\alpha, \ldots, y^n) \in U_{\alpha,\varepsilon}$ und folglich $\phi_{\alpha,\varepsilon}(y^1, \ldots, y^{\alpha-1}, \varepsilon\sqrt{1 - |y|^2}, y^\alpha, \ldots, y^n) = y$. Daher gilt $\phi_{\alpha,\varepsilon}(U_{\alpha,\varepsilon}) = B(0, 1)$, und diese Menge ist ja offen. $\{\phi_{\alpha,\varepsilon}\}$ ist daher eine Karte auf S^n.

(b) Die $\{U_{\alpha,\varepsilon}\}$ überdecken S^n, denn für alle $x \in S^n$ muss es ein α geben s.d. $x^\alpha \neq 0$. Nun zeigen wir daß die Kartenwechsel glatt sind; expliziter: für alle $\alpha, \widetilde{\alpha} \in \{1, \ldots, n+1\}$, $\varepsilon, \widetilde{\varepsilon} \in \{\pm 1\}$ sind die Abbildungen $\phi_{\widetilde{\alpha},\widetilde{\varepsilon}} \circ \phi_{\alpha,\varepsilon}^{-1} : \phi_{\alpha,\varepsilon}(U_{\alpha,\varepsilon} \cap U_{\widetilde{\alpha},\widetilde{\varepsilon}}) \to \phi_{\widetilde{\alpha},\widetilde{\varepsilon}}(U_{\alpha,\varepsilon} \cap U_{\widetilde{\alpha},\widetilde{\varepsilon}})$ glatt.

O.B.d.A. nehmen wir an, daß $\alpha < \widetilde{\alpha}$. Zuerst bestimmen wir die Definitions- und Bildbereiche der Kartenwechsel:

$$\begin{aligned}
U_{\alpha,\varepsilon} \cap U_{\widetilde{\alpha},\widetilde{\varepsilon}} &= \{x \in S^n : \varepsilon x^\alpha > 0 \text{ und } \widetilde{\varepsilon} x^{\widetilde{\alpha}} > 0\} \\
\Rightarrow \phi_{\alpha,\varepsilon}(U_{\alpha,\varepsilon} \cap U_{\widetilde{\alpha},\widetilde{\varepsilon}}) &= \{y \in B(0,1) : \widetilde{\varepsilon} y^{\widetilde{\alpha}-1} > 0\} \text{ und} \\
\phi_{\widetilde{\alpha},\widetilde{\varepsilon}}(U_{\alpha,\varepsilon} \cap U_{\widetilde{\alpha},\widetilde{\varepsilon}}) &= \{y \in B(0,1) : \varepsilon y^\alpha > 0\}.
\end{aligned}$$

Diese Mengen sind ja offen. Was die Glattheit betrifft:

$$(\phi_{\widetilde{\alpha},\widetilde{\varepsilon}} \circ \phi_{\alpha,\varepsilon}^{-1})(y) = (y^1, \ldots, y^{\alpha-1}, \varepsilon\sqrt{1-|y|^2}, \ldots, \widehat{y}^{\widetilde{\alpha}-1}, \ldots, y^n)$$

Da die Projektionen $\left\{(y^1, \ldots, y^n) \mapsto y^i\right\}$ und die Abbildung $B(0,1) \ni y \mapsto \sqrt{1-|y|^2}$ glatt sind, ist $(\phi_{\widetilde{\alpha},\widetilde{\varepsilon}} \circ \phi_{\alpha,\varepsilon}^{-1})$ auch glatt.

(c) Es reicht zu zeigen, daß ϕ_S und $\phi_{\alpha,\varepsilon}$ mit einander verträglich sind. Zuerst bestimmen wir die Definitions- und Bildbereiche:

$$\begin{aligned}
U_{\alpha,\varepsilon} \cap (S^n \backslash \{S\}) &= \begin{cases} U_{\alpha,\varepsilon}, & (\alpha,\varepsilon) \neq (n+1,-1) \\ U_{\alpha,\varepsilon} \backslash \{S\}, & (\alpha,\varepsilon) = (n+1,-1) \end{cases} \\
\Rightarrow \phi_{\alpha,\varepsilon}(U_{\alpha,\varepsilon} \cap (S^n \backslash \{S\})) &= \begin{cases} B(0,1), & (\alpha,\varepsilon) \neq (n+1,-1) \\ B(0,1) \backslash \{0\}, & (\alpha,\varepsilon) = (n+1,-1) \end{cases}.
\end{aligned}$$

Diese Mengen sind offensichtlich offen. Andererseits:

$$\begin{aligned}
y \in \phi_S(U_{\alpha,\varepsilon} \cap (S^n \backslash \{S\})) &\Leftrightarrow \varepsilon(\phi_S^{-1}(y))^\alpha > 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha < n+1 : & \varepsilon y^\alpha > 0 \\ \alpha = n+1 : & \begin{cases} |y| < 1, & \varepsilon = 1 \\ |y| > 1, & \varepsilon = -1 \end{cases} \end{cases}.
\end{aligned}$$

In allen Fällen ist die Menge aller solchen y offen. Zum Schluß:

$$(\phi_S \circ \phi_{\alpha,\varepsilon}^{-1})(y) = \begin{cases} \frac{1}{1+y^n}(y^1, \ldots, y^{\alpha-1}, \varepsilon\sqrt{1-|y|^2}, y^\alpha, \ldots, y^{n-1}), & \alpha < n+1 \\ \frac{1}{1+\varepsilon\sqrt{1-|y|^2}}(y^1, \ldots, y^n), & \alpha = n+1 \end{cases}.$$

In beiden Fällen ist $|y| < 1$; daher ist $\phi_S \circ \phi_{\alpha,\varepsilon}^{-1}$ glatt.

Aufgabe 3 (Zentrierte Karten)**.** Da $\widetilde{\phi}(\widetilde{U})$ offen in der Euclidischen Topologie ist, existiert ein $\widetilde{r} > 0$ s.d. $B(\widetilde{\phi}(p), \widetilde{r}) \subset \widetilde{\phi}(\widetilde{U})$. Daher ist $\widetilde{\phi}\Big|_{\widetilde{\phi}^{-1}(B(\widetilde{\phi}(p),\widetilde{r})}$ $: U := \widetilde{\phi}^{-1}(B(\widetilde{\phi}(p), \widetilde{r}) \to B(\widetilde{\phi}(p), \widetilde{r})$ eine mit $\widetilde{\phi}$ verträgliche Karte. Wir verschieben und reskalieren diese nun. Definiere für $x \in U$

$$\phi(x) := \frac{r}{\widetilde{r}}\left(\widetilde{\phi}(x) - \widetilde{\phi}(p)\right)$$

Suggestiver geschrieben, $\phi = \lambda_{\frac{r}{\widetilde{r}}}\Big|_{B(0,\widetilde{r})} \circ T_{\widetilde{\phi}(p)}\Big|_{B(\widetilde{\phi}(p),\widetilde{r})} \circ \widetilde{\phi}\Big|_{\widetilde{\phi}^{-1}(B(\widetilde{\phi}(p),\widetilde{r}))}$, wobei $\lambda_{\frac{r}{\widetilde{r}}}(x) = \frac{r}{\widetilde{r}}$ und $T_{\widetilde{\phi}(p)}(x) = x - \widetilde{\phi}(p)$. Daher ist ϕ eine Abbildung $U \to B(0,r)$, verträglich mit $\widetilde{\phi}$ (der Kartenwechsel ist $\lambda_{\frac{r}{\widetilde{r}}} \circ T_{\widetilde{\phi}(p)}\Big|_{B(\widetilde{\phi(p)},\widetilde{r})}$) und $\phi(p) = 0$.

Aufgabe 4 (Äquivalenz von Atlanten)**.**

(a) Wir zeigen daß die Relation

$$\{(U_\alpha,\phi_\alpha)\}_{\alpha\in A}\sim\{(V_ж,\psi_ж)\}_{ж\in Ж}\Leftrightarrow \begin{array}{l}\text{für alle } \alpha\in A, ж\in Ж \text{ ist } (\phi_\alpha\circ\psi_ж^{-1})\colon \psi_ж(U_\alpha\cap V_ж)\to\phi_\alpha(U_\alpha\cap V_ж)\\ \text{ein Diffeomorphismus von offenen Mengen}\end{array}$$

eine Äquivalenzrelation ist.

Zur Reflexivität: Es gilt $\{(U_\alpha,\phi_\alpha)\}_{\alpha\in A}\sim\{(U_\alpha,\phi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$, da diese Aussage genau die Definition eines glatten Atlas ist.

Zur Symmetrie: Es gelte $\{(U_\alpha,\phi_\alpha)\}_{\alpha\in A}\sim\{(V_ж,\psi_ж)\}_{ж\in Ж}$. Da für alle $\alpha\in A$, $ж\in Ж$ die Abbildung $\phi_\alpha\circ\psi_ж^{-1}$ genau dann ein Diffeomorphismus ist, wenn ihre Inverse $\psi_ж\circ\phi_\alpha^{-1}$ einer ist, so gilt $\{(V_ж,\psi_ж)\}_{ж\in Ж}\sim\{(U_\alpha,\phi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$.

Zur Transitivität: Es gelten $\{(U_\alpha,\phi_\alpha)\}_{\alpha\in A}\sim\{(V_ж,\psi_ж)\}_{ж\in Ж}$ und $\{(V_ж,\psi_ж)\}_{ж\in Ж}\sim\{(W_{\widetilde\alpha},\Phi_{\widetilde\alpha})\}_{\widetilde\alpha\in\widetilde A}$. Da für alle $\alpha\in A$, $ж\in Ж$ und $\widetilde\alpha\in\widetilde A$ die Abbildungen $\psi_ж\circ\phi_\alpha^{-1}$ und $\Phi_{\widetilde\alpha}\circ\psi_ж^{-1}$ Diffeomorphismen von offenen Mengen sind, so ist auch ihre Verknüpfung

$$\left(\Phi_{\widetilde\alpha}\circ\phi_\alpha^{-1}\right)\big|_{\phi_\alpha(U_\alpha\cap V_ж)\cap\phi_\alpha(U_\alpha\cap W_{\widetilde\alpha})}:\phi_\alpha(U_\alpha\cap V_ж)\cap\phi_\alpha(U_\alpha\cap W_{\widetilde\alpha})\to\Phi_{\widetilde\alpha}(U_\alpha\cap V_ж)\cap\Phi_{\widetilde\alpha}(U_\alpha\cap W_{\widetilde\alpha})$$

oder, anders geschrieben,

$$\left(\Phi_{\widetilde\alpha}\circ\phi_\alpha^{-1}\right)\big|_{\phi_\alpha(U_\alpha\cap V_ж\cap W_{\widetilde\alpha})}:\phi_\alpha(U_\alpha\cap V_ж\cap W_{\widetilde\alpha})\to\Phi_{\widetilde\alpha}(U_\alpha\cap V_ж\cap W_{\widetilde\alpha})$$

ein Diffeomorphismus von offenen Mengen. Da die $V_ж$ M überdecken, sind

$$\phi_\alpha(U_\alpha\cap W_{\widetilde\alpha})=\bigcup_{ж\in Ж}\phi_\alpha(U_\alpha\cap V_ж\cap W_{\widetilde\alpha})\text{ und }\Phi_{\widetilde\alpha}(U_\alpha\cap W_{\widetilde\alpha})=\bigcup_{ж\in Ж}\Phi_{\widetilde\alpha}(U_\alpha\cap V_ж\cap W_{\widetilde\alpha}),$$

d.h. beide Mengen sind offen, da sie Vereinigungen offener Mengen sind. Da $\Phi_{\widetilde\alpha}\circ\phi_\alpha^{-1}$ bijektiv und ein lokaler Diffeomorphismus ist, so ist es ein Diffeomoprhismus $\phi_\alpha(U_\alpha\cap W_{\widetilde\alpha})\to\Phi_{\widetilde\alpha}(U_\alpha\cap W_{\widetilde\alpha})$. Daher gilt $\{(U_\alpha,\phi_\alpha)\}_{\alpha\in A}\sim\{(W_{\widetilde\alpha},\Phi_{\widetilde\alpha})\}_{\widetilde\alpha\in\widetilde A}$.

Die Äquivalenzklasse $[\mathcal{A}]$ eines Atlas $\mathcal{A}$ ist die Sammlung aller Atlanten, die mit $\mathcal{A}$ verträglich sind; daher ist die Vereinigung $\bigcup_{\mathcal{B}\in[\mathcal{A}]}\mathcal{B}$ ein Atlas, der alle solchen Atlanten enthält, d.h. der *maximale* Atlas. Andererseits ist die Sammlung aller Atlanten, die in dem $\mathcal{A}$ enthaltenden maximalen Atlas $\mathcal{A}_{\max}$ sind, gleich $[\mathcal{A}]$, da jeder Atlas $\mathcal{B}\subset\mathcal{A}_{\max}$ mit $\mathcal{A}$ veträglich ist, s.d. $\mathcal{B}\in[\mathcal{A}]$, d.h.

$$\{\mathcal{B}\subset\mathcal{A}_{\max}:\mathcal{B}\text{ ist ein Atlas}\}\subset[\mathcal{A}],$$

aber $\mathcal{A}_{\max}$ enthält *alle* mit $\mathcal{A}$ veträglichen Atlanten. d.h.

$$[\mathcal{A}]\subset\{\mathcal{B}\subset\mathcal{A}_{\max}:\mathcal{B}\text{ ist ein Atlas}\}.$$

(b) $\mathbb{R}$ ist offen in $\mathbb{R}$ und ψ ist die einzige Abbildung, die offensichtlich injektiv ist; daher ist $\{(\psi,\mathbb{R})\}$ ein glatter Atlas auf $\mathbb{R}$. Dieser Atlas ist *nicht* mit der Standard-Atlas verträglich, denn der Kartenwechsel $x\mapsto(\mathrm{id}_\mathbb{R}\circ\psi^{-1})(x)=x^{1/3}$ ist nicht glatt (wegen der Nichtexistenz seiner Ableitung bei 0).