

EINFÜHRUNG IN DIE ALGEBRAISCHE ZAHLENTHEORIE
SOMMERSEMESTER 2016
Blatt 8

1. Bestimmen Sie die Anzahl von primitiven, positiv definiten und reduzierten binär quadratische Formen mit Diskriminante $d \in \{-43, -67, -163\}$ und zeigen Sie damit, dass die Ganzheitsringe der zugehörigen imaginär-quadratischen Zahlkörper Hauptidealringe sind.
2. Bestimmen Sie die Klassenzahl von $\mathbb{Q}[\sqrt{-5}]$.
3. Bestimmen Sie eine Fundamenteinheit für jeden der reell-quadratischen Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{19})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{37})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{53})$.
4. Für welche Zahlkörper K ist die Einheitengruppe \mathcal{O}_K^\times endlich? Bestimmen Sie für jeden dieser Zahlkörper die Gruppe \mathcal{O}_K^\times explizit.
5. Sei ζ eine primitive p -te Einheitswurzel, wobei p eine ungerade Primzahl ist. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[\zeta]^\times = (\zeta)\mathbb{Z}[\zeta + \zeta^{-1}]^\times$. Zeigen Sie

$$\mathbb{Z}[\zeta]^\times = \{\pm \zeta^k (1 + \zeta)^n \mid 0 \leq k < 5, n \in \mathbb{Z}\}$$

für $p = 5$.