

1. Übungsblatt
20.04.2015

- $f \in O(g)$ gdw. $\exists c, n_0 \forall n \geq n_0 : f(n) \leq c \cdot g(n)$ gdw. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$
- $f \in o(g)$ gdw. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$

Aufgabe 1: Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

- | | |
|--|--|
| a) $2n \in O(n)$ | f) $(2^n)^3 \in 2^{O(n)}$ |
| b) $n^2 \in O(n)$ | g) $2^{n^3} \in 2^{O(n)}$ |
| c) $\log_2(n) \in O(\log_k(n))$
für alle festen $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ | h) $O(2^n) = O(3^n)$ |
| d) $n \cdot \log_2(n) \in O(n^2)$ | i) $O(n^2) + O(n) = O(n^2)$ |
| e) $3^n \in 2^{O(n)}$ | j) $O(n) \cdot (c^{s(n)})^k \cdot (s(n))^k \subseteq 2^{O(s(n))}$,
wobei $s(n) \geq \log n$ eine Funktion ist und k eine
Konstante. |

Aufgabe 2: Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

- | | |
|--|-----------------------------------|
| a) $n \in o(2n)$ | d) $1 \in o(n)$ |
| b) $2n \in o(n^2)$ | e) $1 + 2 + \dots + n \in o(n^2)$ |
| c) $n^k \in o(2^n)$ für alle festen $k \in \mathbb{N}$ | |

Aufgabe 3: Wir betrachten die aus der Vorlesung bekannte Sprache $A := \{0^i 1^i \mid i \geq 0\}$. Zeigen Sie, dass A von einer 1-Band-Turingmaschine in Zeit $O(n \cdot \log(n))$ entschieden werden kann. Beschreiben Sie hierzu die Funktionsweise der Turingmaschine vollständig und begründen Sie die Laufzeit der Maschine.

Aufgaben zum selber Lösen

Aufgabe 4 (12 Punkte): Beweisen oder widerlegen Sie:

- | | |
|---------------------------------|-------------------------|
| a) $n^2 \in O(n \cdot \log(n))$ | c) $O(2^{2n}) = O(2^n)$ |
| b) $n! \in O(2^n)$ | d) $O(n) - O(n) = O(0)$ |

Aufgabe 5 (12 Punkte): Beweisen oder widerlegen Sie:

- | | |
|-------------------------|---|
| a) $2^n \in o(3^n)$ | c) $n^2 \in o(\log_2(n))$ |
| b) $\log_2(n) \in o(n)$ | d) $o(g(n)) \subseteq O(g(n))$ für alle $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ |