Leibniz-Universität Hannover
Insitut für Differentialgeometrie
Dr. Ahmad Afuni, Dr. Markus Röser Hannover, den 19.04.16

Übungsblatt 3

zur Vorlesung Mannigfaltigkeiten

Sommersemester 2016

Aufgabe 1. a) Sei $A \in \mathrm{GL}(n+1,\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass $F_A : \mathbb{RP}^n \to \mathbb{RP}^n$, $\quad F_A([x]) = [Ax]$ ein wohldefinierter Diffeomorphismus ist. Folgern Sie, dass für alle $[x],[y] \in \mathbb{RP}^n$ mit $[x] \neq [y]$ ein Diffeomorphismus $G : \mathbb{RP}^n \to \mathbb{RP}^n$ existiert mit $G([x]) = [(1,0,\ldots,0)]$ und $G([y]) = [(1,1,0,\ldots,0)]$.

b) Sei $N = (0,1) \in S^1$ der Nordpol. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$F : S^1 \to \mathbb{RP}^1, \quad F(x) = \begin{cases} [(\phi_N(x),1)] & x \neq N \\ [(1,0)] & x = N \end{cases}$$

ein Diffeomorphismus ist, wobei $\phi_N : S^1 \setminus \{N\} \to \mathbb{R}$ die stereographische Projektion ist.

Aufgabe 2. a) Zeigen Sie, dass eine glatte Abbildung $F : M \to N$ zwischen glatten Mannigfaltigkeiten $(M,[\mathcal{A}]),(N,[\mathcal{B}])$ stetig ist bezüglich der induzierten Topologien auf M und N.

b) Sei $F : S^n \to \mathbb{RP}^n$ gegeben durch $F(x) = [x]$. Zeigen Sie, dass F glatt und surjektiv ist. Folgern Sie, dass $\mathbb{RP}^n$ kompakt ist.

c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{RP}^n$ Hausdorff ist. (Benutzen Sie Aufgabe 1 a).)

Aufgabe 3. Sei $\tilde{F} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit $x = (x^0,x^1), y = (y^0,y^1) \in \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\tilde{F}(x,y) = (x^0y^0, x^0y^1 + x^1y^0, x^1y^1).$$

a) Zeigen Sie: Falls $x,y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, dann ist $\tilde{F}(x,y) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Zeigen Sie weiter, dass die Abbildung

$$F : \mathbb{RP}^1 \times \mathbb{RP}^1 \to \mathbb{RP}^2, \quad F([x],[y]) = [\tilde{F}(x,y)]$$

wohldefiniert und glatt ist mit $F([x],[y]) = F([y],[x])$.

b) Ist F surjektiv? (Idenitifizieren Sie $\mathbb{R}^2$ mit dem Raum der reellen Polynome vom Grad 1, via $(x^0,x^1) \mapsto (x^0 + x^1t)$ und interpretieren Sie die Abbildung F entsprechend.)

Aufgabe 4. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Zeigen Sie, dass eine glatte Funktion $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (eine *Hutfunktion*) existiert, die $h \equiv 1$ auf $B_\epsilon(0)$, $h \equiv 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus B_{2\epsilon}(0)$ erfüllt. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g_1(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t(1-t)}} & 0 < t < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

glatt ist.

b) Zeigen Sie, dass $g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_2(t) = \frac{\int_{-\infty}^t g_1(s)ds}{\int_{-\infty}^\infty g_1(s)ds}$ glatt ist und $g_2(t) = 1$ falls $t \geq 1$ und $g_2(t) = 0$ falls $t \leq 0$ erfüllt.

c) Konstruieren Sie nun h in der Form $h(x) = g(\|x\|^2)$ für geeignetes glattes $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Abgabe Donnerstag, 28.04.2016 in der Vorlesung.