Zu Blatt 2, Aufg. 4 (iii)

Beh: $X \setminus L_1 \cong \mathbb{C} \times \mathbb{P}^1$

Beweis: $X \setminus L_1 = \left\{ [z] \in \mathbb{P}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} z_0 z_1 - z_2 z_3 = 0 \\ (z_1, z_3) \neq 0 \end{matrix} \right\}$

wobei $L_1 = \{ [z_0, 0, z_2, 0] \}$

Man hat

$$\hat{\mathcal{U}}_1 \xrightarrow{f_1} \mathbb{C} \times \mathbb{P}^1$$
$$[z] \longmapsto \left(\frac{z_2}{z_1}, [z_1 : z_3] \right)$$

$$\hat{\mathcal{U}}_3 \xrightarrow{f_3} \mathbb{C} \times \mathbb{P}^1$$
$$[z] \longmapsto \left(\frac{z_0}{z_3}, [z_1 : z_3] \right)$$

Wohldefiniert: Für $z \in \hat{\mathcal{U}}_1 \cap \hat{\mathcal{U}}_3$

$$\Rightarrow \frac{z_2}{z_1} = \frac{z_3 \cdot z_2}{z_3 \cdot z_1} = \frac{z_0 \cdot z_1}{z_3 \cdot z_1} = \frac{z_0}{z_3} \quad \checkmark$$

f_1 und f_3 definieren einen Isomorphismus $f : X \setminus L_1 \xrightarrow{\cong} \mathbb{C} \times \mathbb{P}^1$ mit Umkehrabbildung

$$(\lambda, [x, y]) \longmapsto [\lambda y, x, \lambda x, y]$$

Analog: $X \setminus L_2 \cong \mathbb{C} \times \mathbb{P}^1$