Lösung 5 (Lineare Blockcodes)

a) Dichtgepackter Code $\Rightarrow$ Anzahl der Fehlermuster mit bis zu t Fehlern = Anzahl der möglichen Syndrome

$$\sum_{i=0}^{t} \binom{N}{i} = 2^{N-K}$$
$$\Rightarrow ld\left(\sum_{i=0}^{t} \binom{N}{i}\right) = N-K$$
$$\Rightarrow ld\left(\sum_{i=0}^{\frac{d-1}{2}} \binom{N}{i}\right) = N-K$$

b)

$$ld\left(\sum_{i=0}^{1} \binom{N}{i}\right) = ld(1+N) = N-K$$
$$\Rightarrow 1+N = 2^{N-K}$$
$$\Rightarrow N = 2^{N-K}-1$$

$N-K$	N	K	$R = {}^{K}/_{N}$
2	3	1	$^1/_3 \approx 0.33$
3	7	4	$^4/_7 \approx 0.57$
4	15	11	$^{11}/_{15} \approx 0.73$
5	31	26	$^{26}/_{31} \approx 0.83$

$R > 0.6$: $N = 15$, $K = 11$, $R \approx 0.73$
$t = \frac{d-1}{2} = 1$, d.h. 1 Fehler kann korrigiert werden. Es handelt sich also um einen Hamming-Code (dichtgepackt, 1-Fehlerkorrigierend).

c) $\vec{S} = \vec{e} \cdot H^T$

$$H = \left(\begin{array}{ccccccccccc|cccc}
0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1\\
0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&1&1&1&1\\
0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1\\
1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1
\end{array}\right)$$

d) Die letzten $(N-K)$ Spalten von H bilden keine Identitätsmatrix, daher handelt es sich nicht um einen systematischen Code.

e)

$$\begin{aligned}
\vec{y}_1 &= (1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1)\\
\vec{y}_2 &= (1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0)\\
\vec{y}_3 &= (0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{y}_1 \cdot H^T &= (1\ 1\ 0\ 0) \rightarrow e_{12}\\
\Rightarrow \vec{x}_1 &= (1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1)\\
\vec{y}_2 \cdot H^T &= (0\ 0\ 0\ 0) \rightarrow e_0\\
\Rightarrow \vec{x}_2 &= \vec{y}_2\\
\vec{y}_3 \cdot H^T &= (0\ 0\ 1\ 1) \rightarrow e_3\\
\Rightarrow \vec{x}_3 &= (0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1)
\end{aligned}$$

Bonus:

a) Eine Parity-Check-Matrix welche eine solche Syndromtabelle erzeugt muss aus 8 Spalten und 3 Zeilen bestehen. Daraus folgt: $N = 8$, $N-K = 3$, $K = 5$, $R = {}^{K}/_{N} = 0.625$

b)

$$H = \left(\begin{array}{ccccc|ccc} & 0 & & & & 1 & 0 & 0\\ \vec{h}_1 & 0 & \vec{h}_3 & \vec{h}_4 & \vec{h}_5 & 0 & 1 & 0\\ & 0 & & & & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

In den Fehlermustern sind immer exakt zwei Stellen gesetzt, daher besteht das Produkt $\vec{S}_i = \vec{e}_i \cdot H^T$ immer aus der Addition zweier Spalten aus H.

$$\begin{aligned}
\vec{S}_1 &= \vec{h}_1 + \vec{h}_2 \Rightarrow \vec{h}_1 = \vec{S}_1 && = (0\ 0\ 1)\\
\vec{S}_2 &= \vec{h}_2 + \vec{h}_3 \Rightarrow \vec{h}_3 = \vec{S}_2 && = (0\ 1\ 0)\\
\vec{S}_3 &= \vec{h}_3 + \vec{h}_4 \Rightarrow \vec{h}_4 = \vec{S}_3 + \vec{h}_3 && = (1\ 1\ 0)\\
\vec{S}_4 &= \vec{h}_4 + \vec{h}_5 \Rightarrow \vec{h}_5 = \vec{S}_4 + \vec{h}_4 && = (0\ 1\ 1)\\
\vec{S}_5 &= \vec{h}_5 + \vec{h}_6 = (1\ 1\ 1)\\
\vec{S}_6 &= \vec{h}_6 + \vec{h}_7 = (1\ 1\ 0)\\
\vec{S}_7 &= \vec{h}_7 + \vec{h}_8 = (0\ 1\ 1)
\end{aligned}$$

$$
H = \left(\begin{array}{ccccc|ccc}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
$$