Leibniz-Universität Hannover
Insitut für Differentialgeometrie
Dr. Ahmad Afuni, Dr. Markus Röser Hannover, den 05.04.2016

Lösungsvorschläge zum Übungsblatt 5

zur Vorlesung Mannigfaltigkeiten

Sommersemester 2016

Aufgabe 1 (Veronese-Einbettung)**.**

(a) Wie gewohnt:

(i) Zur Wohldefiniertheit: Falls $v \neq 0$, gilt $v^i \neq 0$ für irgend ein $i \in \{0, 1, 2\}$; daher ist $\widetilde{F}(v)^j \neq 0$ für $j = 0$, 3 oder 5, d.h. $\widetilde{F}(v) \neq 0$. Außerdem gilt $\widetilde{F}(\lambda v) = \lambda^2 \widetilde{F}(v)$, d.h. $\tilde{F}$ bildet Geraden auf Geraden ab.

Zur Injektivität: $F([v]) = F([w]) \Rightarrow vv^T = \lambda ww^T$ für irgend ein $\lambda \neq 0$. Daher gilt $vv^T v = \lambda ww^T v$, oder $|v|^2 v = \lambda \cdot (w \cdot v)w$; da $v \neq 0$, gilt $v = \frac{\lambda \cdot (w \cdot v)}{|v|^2} w$, also $[v] = [w]$.

Zur Glattheit: Es sei $[v] \in \mathbb{RP}^2$. Falls $v^0 \neq 0$, gilt $\widetilde{F}^0(v) \neq 0$; daher gilt

$$(\phi_0^{\mathbb{RP}^5} \circ F \circ (\phi_0^{\mathbb{RP}^2})^{-1})(u^1, u^2) = (u^1, u^2, (u^1)^2, u^1 u^2, u^2 u^2) \tag{1}$$

für $(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2$. Ähnlicherweise gilt $\widetilde{F}^3(v) \neq 0$, falls $v^1 \neq 0$, s.d.

$$(\phi_3^{\mathbb{RP}^5} \circ F \circ (\phi_1^{\mathbb{RP}^2})^{-1})(u^1, u^2) = ((u^1)^2, u^1, u^1 u^2, u^2, (u^2)^2)$$

für $(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2$, und $\widetilde{F}^5(v) \neq 0$, falls $v^2 \neq 0$, s.d.

$$(\phi_5^{\mathbb{RP}^5} \circ F \circ (\phi_2^{\mathbb{RP}^2})^{-1})(u^1, u^2) = ((u^1)^2, u^1 u^2, u^1, (u^2)^2, u^2)$$

für $(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2$. Daher ist F glatt.

(b) $\mathrm{d}F_p$ hat laut (1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

als Matrix, da $p = (\phi_0^{\mathbb{RP}^2})^{-1}(0, 0)$. Offensichtlich sind die Spalten $(1, 0, 0, 0, 0)^T$ und $(0, 1, 0, 0, 0)^T$) linear unabhängig, d.h. diese Matrix hat maximalen Rang. Daher ist $\mathrm{d}F_p$ injektiv.

(c) Wir berechnen:

$$(F \circ F_A)([v]) = F([Av]) = [\widetilde{F}(Av)] = [Avv^T A^T] = [A\widetilde{F}(v)A^T] = (F_B \circ F)([v]),$$

wobei $F_B : \mathbb{RP}^5 \to \mathbb{RP}^5$ der Diffeomorphismus, welcher der invertierbaren linearen Abbildung $\mathrm{Sym}(3, \mathbb{R}) \to \mathrm{Sym}(3, \mathbb{R})$, $w \mapsto AwA^T$ entspricht, ist. Daher gilt laut der Kettenregel

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(F \circ F_A)_p = \mathrm{d}(F_B \circ F)_p &\Leftrightarrow \mathrm{d}F_{F_A(p)} \circ (\mathrm{d}F_A)_p = (\mathrm{d}F_B)_{F(p)} \circ \mathrm{d}F_p \\ &\Leftrightarrow \mathrm{d}F_{F_A(p)} = (dF_B)_{F(p)} \circ \mathrm{d}F_p \circ (\mathrm{d}F_{A^{-1}})_{F_A(p)}; \end{aligned}$$

da es zu allen $q \in \mathbb{RP}^2$ ein $A \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ gibt mit $q = F_A(p)$, und die rechte Seite aus injektiven Abbildungen besteht, so ist $\mathrm{d}F_q$ injektiv für alle $q \in \mathbb{RP}^2$.

(d) Das Bild von $\tilde{F}$ besteht genau aus den symmetrischen (3×3)-Matrizen vom Rang 1, die positiv semi-definit sind. Eine symmetrische Matrix hat Rang 1 genau dann wenn alle (2×2)-Unterdeterminanten verschwinden. Man erhält die folgenden Gleichungen: $[(y^0, \dots, y^5)] \in F(\mathbb{RP}^2)$, falls

$$y^0y^3 - (y^1)^2 = 0, \quad y^0y^5 - (y^2)^2 = 0, \quad y^3y^5 - (y^4)^2 = 0, \quad y^1y^4 - y^2y^3 = 0.$$

Man kann nachrechnen, dass immer drei dieser Gleichungen unabhängig sind.

Aufgabe 2 (Tangentialräume besonderer Lie-Gruppen)**.** (a) Zunächst ist die Dimension von $O(n)$ $n^2 - \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}n(n-1)$, da $O(n)$ durch die Niveau-Menge $f^{-1}(\{0\})$ beschrieben ist, wobei $f : \mathfrak{gl}(n) \to \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n+1)}$ so definiert ist, daß $f(A) = AA^T - I$, und f ist eine Submersion.

Es sei $\gamma :]-\delta, \delta[\to O(n)$ eine glatte Kurve mit $\gamma(0) = I$ und $\dot{\gamma}(0) = X \in T_I O(n)$. Schreibe $\iota : O(n) \to \mathfrak{gl}(n)$ für die Standard-Einbettung. Da $f(\iota(\gamma(t))) = 0$ für alle t in Betracht, gilt

$$\mathrm{d}_I f\,(\mathrm{d}_I \iota)(X)) = 0.$$

Daher ist $\mathrm{d}_I\iota(X) \in \ker \mathrm{d}_I f$. Da $\dim \ker \mathrm{d}_I f = \frac{1}{2}n(n-1) = \dim O(n)$, ist $\mathrm{d}_I\iota : \mathfrak{o}(n) \to \ker \mathrm{d}_I f$ ein Isomorphismus. Wir beschreiben nun $\ker \mathrm{d}_I f$ expliziter: Eine kurze Berechnung zeigt, daß

$$\mathrm{d}_I f \left(\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \left.\frac{\partial}{\partial x^{ij}}\right|_I \right) = \sum_{i \le j} (a^{ij} + a^{ji}) \left.\frac{\partial}{\partial y^{ij}}\right|_0,$$

wobei $\left.\frac{\partial}{\partial x^{ij}}\right|_I = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 (I + te_{ij})$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ und $\left.\frac{\partial}{\partial y^{ij}}\right|_0 = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 (\frac{t}{2}(e_{ij} + e_{ji}))$ für $1 \le i \le j \le n$. Daher ist $A = \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \left.\frac{\partial}{\partial x^{ij}}\right|_I \in \ker \mathrm{d}_I f$ genau dann, wenn für $i \le j$ (daher für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$) $a^{ij} + a^{ji} = 0 \Leftrightarrow a^{ij} = -a^{ji}$; dies gilt genau dann, wenn A, als eine Matrix empfunden, schiefsymmetrisch ist. Daher ist

$$\mathfrak{o}(n) \simeq \{\text{schiefsymmetrische } n \times n \text{ Matrizen}\}.$$

(b) Wie bei dem letzten Teil betrachten wir eine Kurve $\gamma :]-\delta, \delta[\to \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ mit $\gamma(0) = I$ und $\dot{\gamma}(0) = X$. Definiere $f : \mathfrak{gl}(n) \to \mathbb{R}$ durch $f(A) = \det(A) - 1$, und schreibe $\iota : \mathfrak{SL}(n, \mathbb{R})$ für die Standardeinbettung. Da $f(\iota(\gamma(t))) = 0$ für alle t in Betracht, gilt

$$\mathrm{d}_I f\,(\mathrm{d}_I \iota)(X)) = 0.$$

Da $\dim \ker \mathrm{d}_I f = n^2 - 1 = \dim \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, ist $\mathrm{d}_I \iota : \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \to \ker \mathrm{d}_I f$ ein Isomorphismus. Wegen Aufgabe 3a aus Übungsblatt 2 gilt

$$\mathrm{d}_I f(\underbrace{\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \left.\frac{\partial}{\partial x^{ij}}\right|_I}_{=:A}) = (\mathrm{tr} A) \left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_0 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{tr} A = 0,$$

wobei $\left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_0 = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (t)$. Daher ist

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \simeq \{\text{spurfreie } n \times n \text{ Matrizen}\}.$$

Aufgabe 3 (der Graph)**.** (a) Es sei $p \in M$, und (U, ϕ) und (V, ψ) seien Karten um p bzw. $F(p)$. Wir können annehmen, daß $F(U) \subset V$ (Ersetze U durch $U \cap F^{-1}(V)$). Definiere die Abbildung $\Phi : U \times V \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ durch

$$(p_1, p_2) \mapsto (\phi(p_1), \psi(p_2) - \psi(F(p_1))).$$

Diese Abbildung ist glatt und bijektiv, was man leicht mittels der Karte

$$\Psi = (U \times V \ni (p_1, p_2) \mapsto (\phi(p_1), \psi(p_2)) \in \phi(U) \times \psi(V))$$

sieht. Außerdem hat ihre Ableitung

$$\begin{pmatrix} I_{m\times m} & 0 \\ D(\psi \circ F \circ \phi^{-1}) & I_{n\times n} \end{pmatrix}$$

als Matrix bezüglich der Karte Ψ, und diese Matrix hat maximalen Rang. Daher ist Φ ein lokaler Diffeomorphismus um $(p, F(p))$, d.h. es gibt eine offene Umgebung W von $(p, F(p))$ s.d. $\Phi|_W$ eine Karte ist, und, laut der Definition, ist $\Psi(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^m \times \{0\} \Leftrightarrow \psi(p_2) = \psi(F(p_1)) \Leftrightarrow p_2 = F(p_2)$. Daher ist $\Phi(\text{Graph } F \cap W) = \Phi(W) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$, d.h. $\text{Graph}(F)$ ist eine Untermannigfaltigkeit von $M \times N$.

(b) Die Abbildung $M \xrightarrow{f} M \times N$ $p \mapsto (p, F(p))$ ist eine Immersion, da sie bzgl. der Karten aus dem letzten Aufgabenteil die Jacobi-Matrix

$$\begin{pmatrix} I_{m\times m} \\ D(\psi \circ F \circ \phi^{-1}) \end{pmatrix}$$

hat. Daher reicht es, das Bild von $\mathrm{d}_p f$ zu bestimmen. Es sei $\gamma :]-\delta, \delta[\to M$ eine Kurve mit $\gamma(0) = p$ und $\dot\gamma(0) = X \in T_pM$. Für $g \in C^\infty(M \times N)$ gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_p f(X) \cdot g = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} g(\gamma(t), F(\gamma(t))) &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} g(\gamma(t), F(p)) + \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} g(p, F(\gamma(t))) \\ &= \left[\mathrm{d}_p \iota_{F(p)}(X) + \mathrm{d}_p(j_p \circ F)(X)\right] \cdot g, \end{aligned}$$

wo in dem 2. Schritt die „Produktregel“ benutzt wurde, und die Abbildungen $i_{F(p)} : M \to M \times N$ und $j_p : N \to M \times N$ die Einbettungen

$$\begin{aligned} q &\mapsto (q, F(p)) \\ \text{bzw. } r &\mapsto (p, r) \end{aligned}$$

bezeichnen. Daher gilt

$$\mathrm{im}\, \mathrm{d}_p f = \{\mathrm{d}_p \iota_{F(p)}(v) + \mathrm{d}_{F(p)} j_p(\mathrm{d}_p F(v)) : v \in T_{(p, F(p))}\}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} \text{Graph } \mathrm{d}_p F &= \{(v, \mathrm{d}_p F(v)) \in T_pM \oplus T_{F(p)}N : v \in T_pM\} \\ &\simeq \{\mathrm{d}_p i_{F(p)}(v) + \mathrm{d}_{F(p)} j_p(\mathrm{d}_p F(v)) : v \in T_pM\}; \end{aligned}$$

daher ist $T_{(p, F(p)}\text{Graph } F = \mathrm{im}\, \mathrm{d}_p f \simeq \text{Graph } \mathrm{d}_p F$.

Aufgabe 4. (a) Bemerke, daß $\gamma_q = \pi \circ c_q$, wobei $\pi : \mathbb{R}^2 \to T^2$ die übliche Projektion ist und $c_q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ die glatte Kurve $t \mapsto (t, qt)$ ist. Daher ist γ_q glatt, und auch eine Immersion, da c_q eine Immersion und π ein loker Diffeomorphismus ist.

(b) Bemerke:

$$\gamma_q(t) = \gamma_q(s) \Leftrightarrow [(t, qt)] = [(s, qs)] \Leftrightarrow \exists n_1, n_2 \in \mathbb{Z} \text{ mit } t - s = n_1 \text{ und } q(t-s) = n_2.$$

Falls $q \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ gelten diese Gleichungen genau dann, wenn $n_2 = 0$, da $(q\mathbb{Q}) \cap \mathbb{Z} = \{0\}$ für alle irrationale q. Da $q \neq 0$, gilt dann $t - s = 0$, also $t = s$, d.h. γ_q ist in diesem Fall injektiv.

Falls $q \in \mathbb{Q}$, kann q als $\frac{m_1}{m_2}$ geschrieben werden mit $m_1 \in \mathbb{Z}$, $m_2 \in \mathbb{N}$. Daher gelten diese Gleichungen für $n_1 = m_2$ und $n_2 = m_1$, d.h. γ_q ist in diesem Fall *nicht* injektiv.

(c) Für $q \in \mathbb{Q}$ ist $\gamma_q(\mathbb{R})$ eine Untermannigfaltigkeit: Schreibe $q = \frac{m_1}{m_2}$ mit $m_1 \in \mathbb{Z}, m_2 \in \mathbb{N}$ teilerfremd. Dann ist $m_2 \in \mathbb{N}$ die kleinste natürliche Zahl mit $\gamma_q(m_2) = \gamma_q(0)$; es gilt daher $\gamma_q(t + m_2) = \gamma_q(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Definiere nun

$$\begin{aligned} \widetilde{\gamma}_q : S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} &\to T^2 \\ [x] &\mapsto \gamma_q(m_2 x). \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, da $\widetilde{\gamma}_q([x+\widetilde{n}]) = \gamma_q(m_2 x + m_2\widetilde{n}) = \gamma_q(m_2 x)$. Außerdem ist diese Abbildung eine glatte Immersion, da für alle $v \in \mathbb{R}$ gilt $(\widetilde{\gamma}_q \circ \phi_v^{-1})(u) = \gamma_q \circ (u \mapsto n \cdot u)$. Hier bezeichnet ϕ_v die zu v gehörige Karte von $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Zum Schluß ist $\widetilde{\gamma}_q$ injektiv mit Bild $\gamma_q([0, n]) = \gamma_q(\mathbb{R})$, letzteres folgt aus der Definition, während ersteres gilt, weil

$$\widetilde{\gamma}_q([x]) = \widetilde{\gamma}_q([y]) \Leftrightarrow \gamma_q(nx) = \gamma_q(ny) \Leftrightarrow n(x-y) \in n\mathbb{Z} \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow [x] = [y] \in S^1.$$

Daher ist $\widetilde{\gamma}_q : S^1 \to T^2$ wegen der Kompaktheit von S^1 eine Einbettung, d.h. $\gamma_q(\mathbb{R}) = \widetilde{\gamma}_q(S^1)$ ist eine Untermannigfaltigkeit von T^2.

Alternativ kann man die Abbildung

$$G : T^2 \to \mathbb{R}, \qquad G([(p^1, p^2)]) = e^{2\pi i (m_1 p^1 - m_2 p^2)} - 1$$

betrachten und zeigen, dass G eine Submersion mit $G^{-1}(0) = \gamma_q(\mathbb{R}) = \{[(p^1, p^2)] \in T^2 \mid p^2 = qp^1\}$ ist.

Für $q \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ ist $\gamma_q(\mathbb{R})$ keine Untermannigfaltigkeit von T^2: Wir betrachten dazu die Menge

$$\gamma(\mathbb{Z}) = \{[(k, kq)] \in T^2 \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{[(0, kq - [kq])] \in T^2 \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

hier bezeichnet $[kq]$ den ganzzahligen Anteil der (irrationalen) Zahl kq. Da γ_q injektiv ist, sind die Punkte $[(0, kq - [kq])] \in T^2$ paarweise verschieden. Mit $S^1 \cong \{[(0, x)] \mid x \in \mathbb{R}\} \subset T^2$ können wir $\gamma_q(\mathbb{Z})$ als Teilmenge von S^1 auffassen und die Identifikation

$$[(0, kq - [kq])] = e^{2\pi i kq} \in S^1$$

machen. Sei nun $\epsilon > 0$ gegeben. Wir wählen $N \in \mathbb{N}$ mit $1/N < \epsilon$ und unterteilen S^1 in N gleichlange Sektoren:

$$S^1 = \bigcup_{n=0}^{N-1} S_n,$$

wobei $S_n = \{e^{2\pi i\theta} \mid \frac{n}{N} \leq \theta < \frac{n+1}{N}\}$. Betrachte nun die ersten $N+1$ Punkte aus $\gamma_q(\mathbb{Z})$:

$$\{\gamma_q(0), \gamma_q(1), \ldots, \gamma_q(N)\}.$$

Diese Menge hat $N+1$ Elemente, weil γ injektiv ist, daher existieren $n_0 \in \{0, \ldots, N-1\}$ und $k \neq l \in \{0, \ldots, N\}$ mit $\gamma_q(k), \gamma_q(l) \in S_{n_0}$.

Es folgt mit $m = k - l$, $e^{2\pi imq} \in S_0$, d.h. $mq - [mq] < \epsilon$. Es folgt, dass $[(0,0)] \in T^2$ ein Häufungspunkt von $\gamma_q(\mathbb{Z})$ ist. Betrachtet man außerdem die Elemente $\gamma(Km)$ für $K \in \mathbb{Z}$, so folgt, dass $\gamma_q(\mathbb{Z})$ dicht in $S^1 \subset T^2$ liegt.

Damit folgt, dass $\gamma_q(\mathbb{R})$ in T^2 dicht liegt, und außer $[(0,0)]$, keine Punkte der Form $[(q_1, q_2)]$ enthält mit $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$. Daher kann $\gamma_q(\mathbb{R})$ keine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit von T^2 sein, weil $\gamma_q(\mathbb{R})$ dann eine offene Teilmenge von T^2 enthalten muß, aber jede offene Teilmenge von T^2 Punkte der Form $[(q_1, q_2)]$ enthält. Es kann auch keine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit sein, weil jeder Durchschnitt $\gamma_q(\mathbb{R}) \cap U$ mit $U \subset T^2$ offen unendlich viele disjunkte Geraden enthält; daher kann solch eine Menge nicht zu einem einzigen Geraden Abschnitt homöomorph (oder diffeomorph) sein.