Übung zur Vorlesung Kanalcodierung

Institut für Informationsverarbeitung

Leibniz Universität Hannover

Sommersemester 2012

Grundlagen der Kombinatorik

Permutation: Zusammenstellung von n verschiedenen Elementen in einer beliebigen Anordnung, in der sämtliche Elemente der Menge verwendet werden.

Anzahl der Permutationen von n verschiedenen Elementen:

$$\mathcal{P}^n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Treten in den n Elementen Gruppen von gleichen Elementen auf, so ist die Anzahl der Permutationen kleiner:

$$\mathcal{P}^n_{p_1,p_2,\ldots,p_m} = \frac{n!}{p_1!\,p_2!\,\cdots\,p_m!} \qquad p_1 + p_2 + \ldots + p_m = n$$

Grundlagen der Kombinatorik

Variation: Zusammenstellung von k Elementen aus einer Menge von n Elementen unter Berücksichtigung der Reihenfolge, d.h. $ab \neq ba$.

Anzahl der Variationen k-ter Klasse von n verschiedenen Elementen ohne Wiederholung:

$$\mathcal{V}_k^n = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Anzahl der Variationen k-ter Klasse von n verschiedenen Elementen mit Wiederholungen:

$$\tilde{\mathcal{V}}_k^n = n^k$$

Grundlagen der Kombinatorik

Kombination: Zusammenstellung von k Elementen aus einer Menge von n verschiedenen Elementen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge, d.h. $ab = ba$.

Anzahl der Kombinationen k-ter Klasse von n verschiedenen Elementen ohne Wiederholung:

$$k! \cdot \mathcal{C}_k^n = \mathcal{V}_k^n \quad \Rightarrow \quad \mathcal{C}_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Anzahl der Kombinationen k-ter Klasse von n verschiedenen Elementen mit Wiederholungen:

$$\tilde{\mathcal{C}}_k^n = \binom{n+k-1}{k}$$

Grundlagen der Kombinatorik

k aus n	mit Zurücklegen	ohne Zurücklegen
Variation (mit Berücksichtigung der Reihenfolge)	n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$
Kombination (ohne Berücksichtigung der Reihenfolge)	$\binom{n+k-1}{k}$	$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$

Aufgabe 1.1

Bei der Übertragung von Codewörtern über einen Kanal treten Bitfehler auf.

a) Wieviele Fehlermuster mit genau k Fehlern gibt es bei Codewörtern der Länge N Bit?

   Geben Sie für $N = 4$ und $0 \leq k \leq 4$ die Anzahl möglicher Fehlermuster an.

b) Wieviele Fehlermuster mit höchstens k Fehlern gibt es bei Codewörtern der Länge N Bit?

   Geben Sie für $N = 4$ und $0 \leq k \leq 4$ die Anzahl möglicher Fehlermuster an.

Grundlagen der Wahrscheinlichkeitslehre

Zufallsversuch: Zufällige Auswahl eines Elementarereignisses a_k aus dem *Ereignisraum* I, d.h. $a_k \in I$, $I = \{a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots, a_K\}$

Ereignis A**:** Teilmenge von Elementarereignissen, d.h. $A \in I$.

Wahrscheinlichkeiten: in N Versuchen möge das Ereignis A $n_N(A)$-mal aufgetreten sein. Dann ist die relative Häufigkeit

$$h_N(A) = \frac{n_N(A)}{N}$$

und die Wahrscheinlichkeit $P(A)$

$$P(A) = \lim_{N \to \infty} h_N(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{n_N(A)}{N}$$

Grundlagen der Wahrscheinlichkeitslehre

Eigenschaften von Wahrscheinlichkeiten:

$$P(A) = \sum_{a_k \in A} P(a_k) \quad , \qquad P(A) + P(\bar{A}) = P(I) = 1$$

Ensemble: Bezeichnet u ein beliebiges Elementarereignis des Ereignisraums I und $P(u)$ die Wahrscheinlichkeit des Elementarereignisses u, so bilden die Gesamtheit der Elementarereignisse $I = \{a_1, a_2, \ldots, a_K\}$ und deren zugehörige Wahrscheinlichkeiten $P(a_1), P(a_2), \ldots, P(a_K)$ ein sogenanntes Ensemble U.
Es gilt:

$$0 \leq P(u) \leq 1 \quad , \qquad \sum_{u} P(u) = 1$$

Grundlagen der Wahrscheinlichkeitslehre

Verbundwahrscheinlichkeit: Die Gesamtheit der Verbundereignisse $(u_1, u_2, \dots, u_N)$ bilden mit ihren zugehörigen Verbundwahrscheinlichkeiten $P(u_1, u_2, \dots, u_N)$ ein Verbundensemble $(U_1, U_2, \dots, U_N)$.

$$0 \leq P(u_1, u_2, \dots, u_N) \leq 1 \quad , \qquad \sum_{u_1} \dots \sum_{u_N} P(u_1, \dots, u_N) = 1$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit: Mit $P(u_N = a_k | u_1, \dots, u_{N-1})$ bezeichnete man die *bedingte Wahrscheinlichkeit*, dass nach Auftreten des Verbundereignisses $(u_1, \dots, u_{N-1})$, d.h. unter seiner Kenntnis, ein Ereignis $u_N = a_k$ beobachtet wird.

$$0 \leq P(u_N | u_1, \dots, u_{N-1}) \leq 1 \quad , \qquad \sum_{u_N} P(u_N | u_1, \dots, u_{N-1}) = 1$$

Grundlagen der Wahrscheinlichkeitslehre

Eigenschaften:

$$
\begin{aligned}
P(u_1, u_2) &= P(u_2|u_1)\,P(u_1) \\
&= P(u_1|u_2)\,P(u_2)
\end{aligned}
$$

Statistische Unabhängigkeit: Unter der Voraussetzung $P(u_2|u_1) = P(u_2)$ folgt $P(u_1, u_2) = P(u_1)P(u_2)$. Zwei Ereignisse, die diese Bedingung erfüllen, werden als *statistisch unabhängig* bezeichnet.

Aufgabe 1.2

Gegeben ist ein binärer, symmetrischer Kanal (BSK) mit der Fehlerwahrscheinlichkeit p. Über den Kanal sollen $M = 2$ verschiedene Symbole übertragen werden. Für die Übertragung des Symbols $m = 0$ sollen $2k + 1$ Nullen gesendet werden, für die Übertragung des Symbols $m = 1$ sollen entsprechend $2k + 1$ Einsen gesendet werden. Berechnen Sie die Restfehlerwahrscheinlichkeit der *Maximum-Likelihood*-Decodierung

a) für $k = 0$ und $p = 10^{-3}$

b) für $k = 1$ und $p = 10^{-3}$

c) für $k = 2$ und $p = 10^{-3}$

d) Verallgemeinern Sie die Rechnung für beliebige k

Grundlagen der Wahrscheinlichkeitslehre

Bayestheorem:

$$\overbrace{P(u_2|u_1)}^{a-Posteriori} = \frac{\overbrace{P(u_1|u_2)}^{Likelihood}\ \overbrace{P(u_2)}^{a-Priori}}{P(u_1)}$$

Konkret:

$$P(Gesendet|Empfangen) = \frac{P(Empfangen|Gesendet)\ P(Gesendet)}{P(Empfangen)}$$

Aufgabe 2

Eine Nachrichtenquelle erzeugt Informationsworte $\vec{u}$ mit den Auftretenswahrscheinlichkeiten $Q(\vec{u})$. Zur Übertragung auf einem binären, symmetrischen Kanal (BSK) mit der Fehlerwahrscheinlichkeit $p \leq 0,5$ soll ein Blockcode verwendet werden, der durch folgende Zuordnung zwischen Informationsworten und Codeworten definiert ist:

$u_1 u_2$	$x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$	$Q(\vec{u})$
00	1 0 0 1 1	0,3
01	1 1 0 0 0	0,2
10	1 0 1 0 0	0,2
11	0 0 1 1 1	0,3

a) Wie groß ist die Codedistanz d des Codes?

b) Wie lautet die mathematische Decodierungsregel, mit der die Fehlerwahrscheinlichkeit nach der Decodierung minimiert wird?

Die empfangene Symbolfolge laute $\vec{y} = 11010$.

c) Wie groß muss die Übergangswahrscheinlichkeit p des BSK sein, wenn nach der Decodierungsregel aus Aufgabenteil b) die Decodierung in $\vec{x} = 10011$ auf die minimale Fehlerwahrscheinlichkeit führt?