VR-Labor

Nachtrag zur Einführung…

Prof. F.-E. Wolter
Maximilian Klein

Welfenlab

Bis zu heute!

24.04.2015

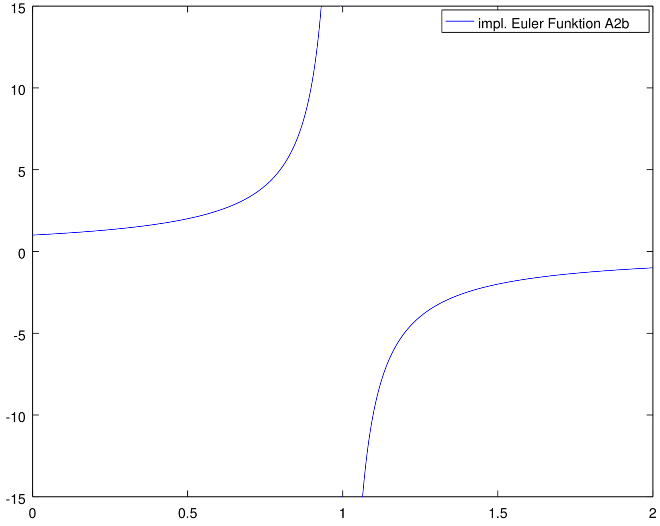
1. Integrator selber schreiben

2. A-Stabilitätstest für Explit /Implizit
   a. Durchführen können
   b. Rausfinden was besser ist

3. **Beschreiben, was A-Stabilität aussagt und was es NICHT aussagt!**

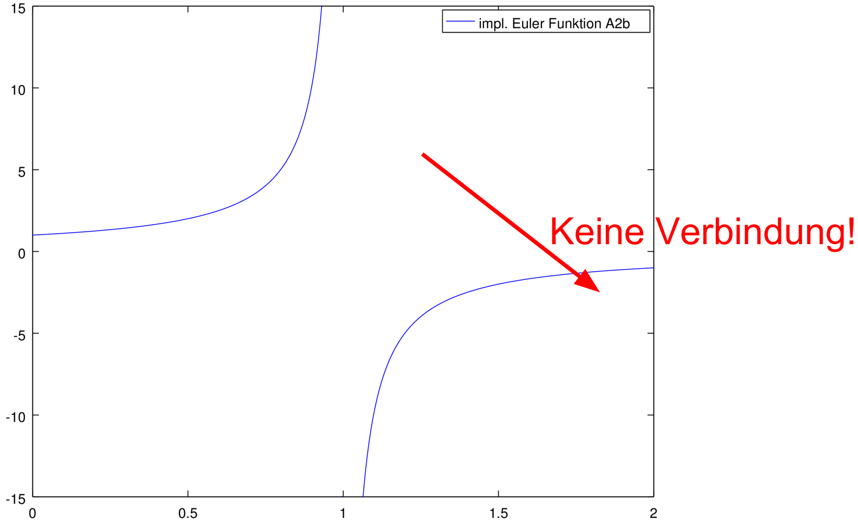
Ihr stellt vor!

$y' = y^2$



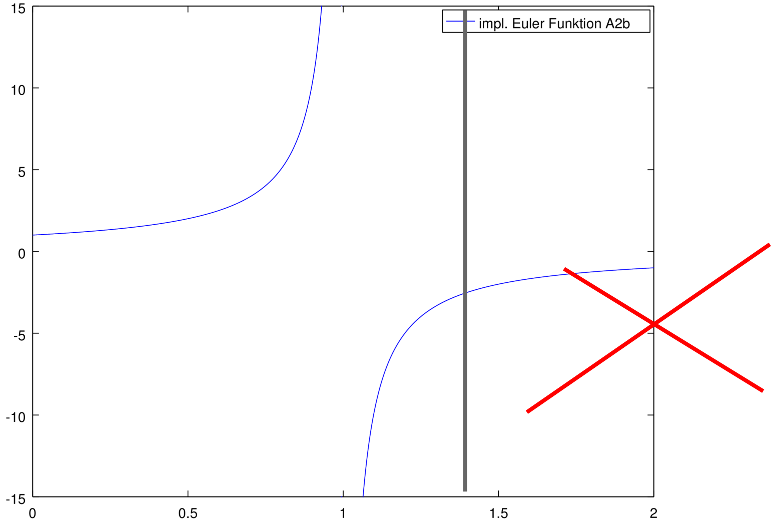
Das war oft eine (abgegebene) Lösung

$y' = y^2$



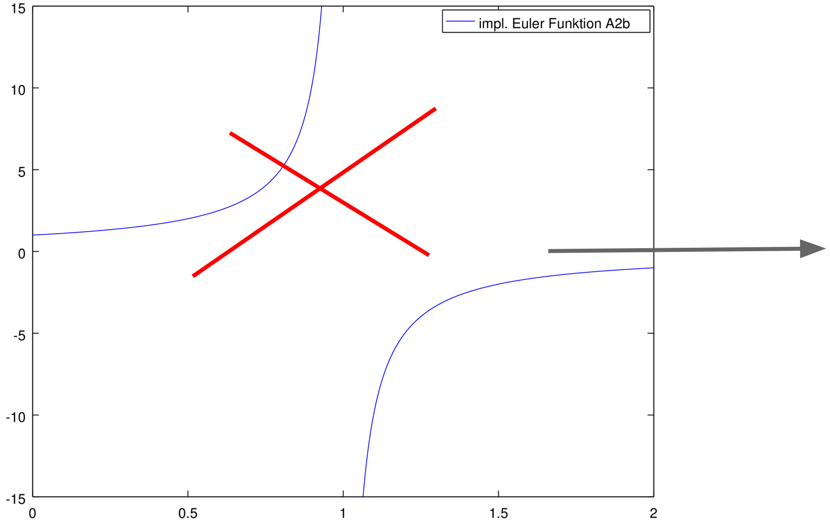
Das sind zwei Lösungen für unterschiedliche Startwerte!

$y' = y^2$



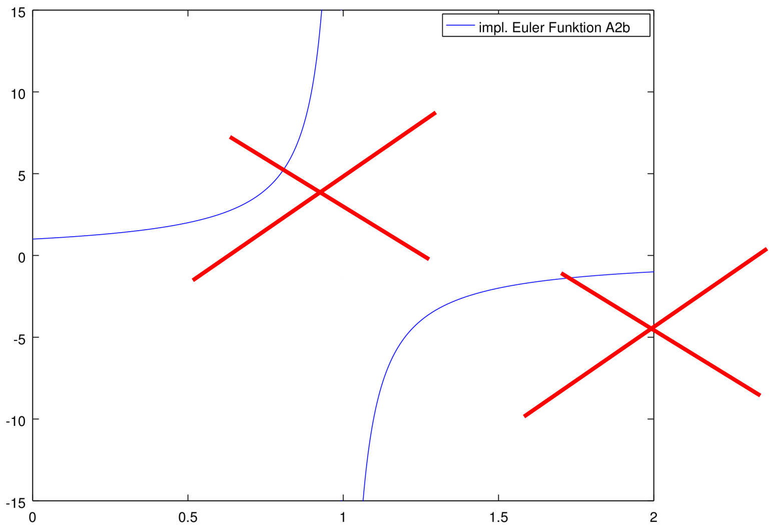
Verifikation z.B. über Polstelle für Startwerte $y(0) > 0$

$y' = y^2$



Verifikation z.B. über Asymptote gegen 0 für y(0)<0...

$y' = y^2$



Verifikation z.B. Funktion konstant für y(0) = 0..

A-Stabilität Konvergenz

Definition!

$$\lim_{n \to \infty} A(t_n) = 0$$

Numerisch für alle k>0.

Ein Verfahren ist A-Stabil wenn es bei diesem Problem für alle k>0 gegen 0 konvergiert.

Impliziter Euler = A-stabil

$$f(t_1) = \Delta t\, f'(t_1) + f(t_0)$$

Impliziter Euler = A-stabil

$$f(t_1) = \Delta t\, f'(t_1) + f(t_0)$$

mit $$f'(t_1) = -k\, f(t_1)$$

Impliziter Euler = A-stabil

$$f(t_1) = -\Delta t\, k\, f(t_1) + f(t_0)$$

Impliziter Euler = A-stabil

$$f(t_1) + \Delta t \, k \, f(t_1) = f(t_0)$$

Impliziter Euler = A-stabil

$$f(t_1) = \frac{f(t_0)}{1+\Delta t\, k}$$

Impliziter Euler = A-stabil

$$f(t_1) = \frac{f(t_0)}{1+\Delta t\, k}$$

> 1

Impliziter Euler = A-stabil

$$f(t_1) = \frac{f(t_0)}{1+\Delta t\, k} < f(t_0)$$

Impliziter Euler = A-stabil

$$f(t_n) = \frac{f(t_0)}{(1+\Delta t\, k)^n}$$

Impliziter Euler = A-stabil

$$\lim f(t_n) \longrightarrow 0$$

Merke!

Wichtig!

Stabilität ist eine Eigenschaft des Verfahrens!

Was neues!

Was neues!

Differentialgleichungen 2ter Ordnung

Newtonsche Gesetze

…

Newtonsche Gesetze

1. Trägheit
2. $F = \dot{p}$
3. Actio = Reactio

2tes Newton Gesetz

$$F = \dot{p}$$

Eulers Vereinfachung

$$F = m\,a$$

2tes Newton Gesetz

$$F = \dot{p}$$

$\boxed{\text{Eulers Vereinfachung}}$

$$F = m\,a$$

$F = m\,a$ ist DGL

$a = \ddot{x}$

Wir wollen:

$x(t)$!

Kurze Tafeldemo…

2 Integrationen

=

2 Unbekannte

Geschwindigkeit und Position

Überraschung!

Wir brauchen initial:

- Position (x_0 oder manchmal p_0)
- Geschwindigkeit (v_0)

Wie sieht die DGL aus?

$\ddot{x}(t) = g(t)$?

Wie sieht die DGL aus?

$\ddot{x}(t) = g(t)$?

das reichte ja letztes Mal schon nicht!

Wovon kann die DGL abhängen?

Wovon kann die DGL abhängen?

- Der momentanen Position
- Der momentanen Geschwindigkeit

Wie sieht die DGL aus?

$\ddot{x}(t) = g(t, x, \dot{x})$?

Wie sieht die DGL aus?

$$\ddot{x}(t) = g(t, x, \dot{x}) \; ?$$

Beschleunigung eines Partikels...

Wie sieht die DGL aus?

$$\ddot{x}(t) = g(t, x, \dot{x})\ ?$$

Beschleunigung
eines
Partikels...

Hängt von dessen
Position
und
Geschwindigkeit ab...

Wie sieht die DGL aus?

$$\ddot{x}(t) = g(t,x,\dot{x})\ ?$$

Beschleunigung eines Partikels…

Hängt von dessen Position und Geschwindigkeit ab…

Reicht immer noch nicht…

3. Newtonsche Gesetz!

3. Newtonsche Gesetz!

Actio = Reactio

3. Newtonsche Gesetz!

Actio = Reactio

Die anderen Partikel haben auch was zu sagen!

Wie sieht die DGL aus?

$\ddot{x}(t) = g(t, X, \dot{X})$?

Wie sieht die DGL aus?

$\ddot{x}(t) = g(t, X, \dot{X})$?

Beschleunigung eines Partikels...

Wie sieht die DGL aus?

$$\ddot{x}(t) = g(t, X, \dot{X})\ ?$$

Beschleunigung eines Partikels…

Hängt von den Positionen und Geschwindigkeiten aller ab…

Wie sieht die DGL aus?

$$\ddot{x}(t) = g(t, X, \dot{X})\ ?$$

Beschleunigung eines Partikels...

Hängt von den Positionen und Geschwindigkeiten aller ab...

Klingt Gut!

Wie sieht die DGL aus?

$\ddot{x}(t) = g(t, X, \dot{X})$?

Beschleunigung eines Partikels...

Hängt von den Positionen und Geschwindigkeiten aller ab...

Klingt Gut!

$X, \dot{X}$ wir üblicherweise Statevector genannt (Position, Geschwindigkeiten aller)

Der (übliche) Spezialfall

$$\ddot{x}(t) = g(t, X)$$

Keine Geschwindigkeiten!

Der (übliche) Spezialfall

$$\ddot{x}(t) = g(t,X)$$

Keine Geschwindigkeiten!

Konservatives = energieerhaltend
Kräfte = Ableitung eines Potentialfeldes

Moment…

Moment…

Keine Energieerhaltung für die anderen?

Geschwindigkeitsabhängige Kräfte gibt es doch in “echt”…

?

...

Technische Hilfe…

Man kann wieder einen expliziten Euler verwenden

Technische Hilfe…

Man kann wieder einen expliziten
Euler verwenden
Einfach zweimal hintereinander…

Technische Hilfe...

Man kann wieder einen expliziten
Euler verwenden
Einfach zweimal hintereinander...

Einmal für die Geschwindigkeit..
Einmal für die Position...

Aber...

Wer hätte es gedacht.. der explizite Euler ist schlecht

Deswegen…

Symplektischer Euler

Der König unter den Integratoren!

Symplektischer Euler

Der König unter den Integratoren!

Nagut nur für konservative Systeme..

Symplektischer Euler

Der Symplektische Euler garantiert, dass die Energie höchstens um die Urpsrungsenergie oszilliert!

Symplektischer Euler

Der Symplektische Euler garantiert, dass die Energie höchstens um die Urpsrungsenergie oszilliert!

WENN konservative Systeme integriert werden

Das schaffen expl. und impl. Euler nicht!

Diese können explodieren oder implodieren..

explizit explodiert…
implizit implodiert…

Kleines Codebeispiel

Kleines Codebeispiel

Explizíter Euler

```
a = F / m // irgendwo kommen die Kräfte her…

vNew = vOld + a * dt // die neue Geschwindigkeit
pNew = pOld + vOld * dt // die neue Position
```

Kleines Codebeispiel

Symplektischer Euler

```
a = F / m // irgendwo kommen die Kräfte her…

vNew = vOld + a * dt // die neue Geschwindigkeit
pNew = pOld + vNew * dt // die neue Position
```

Dämpfung

Gern verwendet, aber Vorsicht

Dämpfung

Gern verwendet, aber Vorsicht

stabilisiert und ändert das Modell!

Dämpfung

Symplektischer Euler

```
a = F / m // irgendwo kommen die Kräfte her…

vNew = vOld*(1-damping) + a * dt
pNew = pOld + vNew * dt // die neue Position
```

Dämpfung…

… nimmt Energie aus dem System

Dämpfung…

… liegt zwischen 0 und 1

Dämpfung…

… liegt zwischen 0 und 1

1 = keine Geschwindigkeiten

Dämpfung…

… liegt zwischen 0 und 1

1 = keine Geschwindigkeiten
0 = keine Dämpfung

Dämpfung…

… verringert Oszillationen

Dämpfung…

… ist ein Modellierungstool

(Man verwendet es um der Sache Herr zu werden, die Dosis machts)

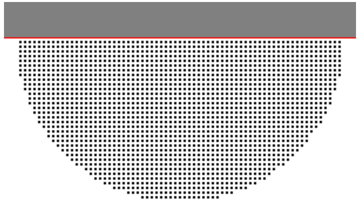
mit Dämpfung…

… löst man nicht mehr die DGL!

Bis zum nächsten Termin

08.05.2015

1. Pendel simulieren
2. Planetensystem implementieren
3. **Erläutern warum das Energieproblem der nicht konservativen DGLs kein Problem ist**
4. Kleine “Fluidsimulation”



Lösungen an vrlab15@welfenlab.de bis zum:

07.05.2015

Ein Tag vor unserem nächsten Treffen.