Leibniz Universität Hannover
Fakultät für Mathematik und Physik
Prof. Dr. M. Schütt
MSc. S. Brandhorst

10. Mai 2016

Einführung in die Algebraische Zahlentheorie
Sommersemester 2016
Blatt 6

1. Sei K ein algebraischer Zahlkörper und $\mathfrak{a}$ ein Ideal von $\mathcal{O}_K$.
   (a) Zeige, dass $\mathfrak{a}$ ein Primideal ist, wenn $N(\mathfrak{a})$ eine Primzahl ist.
   (b) Ist die Umkehrung richtig?
2. Sei d quadratfrei und p eine Primzahl. Sei $\mathcal{O}_K$ der Ganzheitsring des Zahlkörpers K. Wann ist das Ideal $(p) = p\mathcal{O}_K$ prim und wann nicht?
   (a) $K = \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$
   (b) $K = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{d}]$
   (c) K als Zerfällungskörper von $x^3 - d$.
3. Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ und $\mathfrak{p} = (2, 1 + \sqrt{-5})$ ein Ideal in $\mathcal{O}_K$.
   (a) Zeige, dass $\mathfrak{p}$ ein Primideal und kein Hauptideal ist.
   (b) Zeige, dass $\mathfrak{p}^2$ ein Hauptideal ist.
   (c) Berechnen Sie $\mathfrak{p}^{-1}$ und prüfen Sie, dass $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}^{-1} = \mathcal{O}_K$