Algebraische Geometrie II, SoSe 2016
Institut für Algebraische Geometrie
Leibniz Universität Hannover

Prof. Dr. Klaus Hulek
Benjamin Wieneck

Übungsblatt 4

Aufgabe 1. Man bestimme den Divisor der rationalen Funktion z_0/z_1 auf der Fläche

$$X := V(z_0 z_1 - z_2 z_3) \subset \mathbb{P}^3$$

von Übungsblatt 2, Aufgabe 4.

Aufgabe 2. Sei $a \in \mathbb{C}$ und $X := V(x^2 + y^2 - 1) \subset \mathbb{C}^2$. Man bestimme den Pullback des Divisors $D_a := [a]$ bezüglich der Abbildung $f : X \to \mathbb{C}$, $f(x, y) := x$.

Aufgabe 3. Sei C eine glatte projektive Kurve und $D \in \mathrm{Div}(C)$ ein effektiver Divisor auf C. Man zeige folgendes.

(i) $\dim \Gamma(C, \mathcal{L}(D)) \leq 1 + \deg(D)$,

(ii) Ist C nicht rational und $D \neq 0$ effektiv, dann gilt $\dim \Gamma(C, \mathcal{L}(D)) \leq \deg(D)$.

Bemerkung: Für $\mathcal{L}(D)$ ist auch die Notation $\mathcal{O}_C(D)$ üblich.

Aufgabe 4. Sei C eine glatte projektive Kurve. Man zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

(i) Die Kurve C is rational, d.h. C ist birational zum $\mathbb{P}^1$.

(ii) Es ist $\mathrm{Cl}(C) \cong \mathbb{Z}$.

(iii) Es gibt zwei verschiedene Punkte auf auf C, welche als Divisoren linear äquivalent sind.