Leibniz-Universität Hannover
Insitut für Differentialgeometrie
Dr. Ahmad Afuni, Dr. Markus Röser Hannover, den 05.04.2016

Lösungsvorschläge zum Übungsblatt 6

zur Vorlesung Mannigfaltigkeiten

Sommersemester 2016

Aufgabe 1. (a) $\phi : U \subset N \to \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ sei eine angepaßte Karte für $M \subset N$ um $p \in M$ und $\iota : M \hookrightarrow N$ die übliche Inklusion. Betrachte $\mathrm{d}\phi : TU \to T\widetilde{U} \simeq \widetilde{U} \times \mathbb{R}^n$. Wir wissen schon, daß $TU \subset TN$ offen ist. Da ϕ eine angepaßte Karte ist, gilt $\phi(\iota(\gamma(t))) \in \mathbb{R}^m \times \{0\}$ für alle $\gamma :]-\delta, \delta[\to M$; daher ist $\mathrm{d}_q\phi(\mathrm{d}_q\iota(T_qM)) \subset \mathbb{R}^m \times \{0\}$ für alle $q \in M \cap U$, wobei wir die Identifizierung $\mathbb{R}^n \simeq T_x\mathbb{R}^n$ benutzt haben. $\mathrm{d}_p\phi$ ist aber ein Isomorphismus und $\mathrm{d}_p\iota(T_pM)$ ein m-dimensionaler Vektorraum, so daß wir die *Gleichung* $\mathrm{d}_p\phi(\mathrm{d}_p\iota(T_pM)) = \mathbb{R}^m \times \{0\}$ haben. Da unter unserer Identifizierung $\mathrm{d}\phi(v_q) = (\phi(q), \mathrm{d}_q\phi_q(v_q))$ für alle $q \in U$, $v_q \in T_qU$, gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\phi\left(\mathrm{d}\iota(TM) \cap TU\right) &= \phi(M \cap U) \times (\mathbb{R}^m \times \{0\}) \\
&= (\phi(U) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})) \times (\mathbb{R}^m \times \{0\}) \\
&= \mathrm{d}\phi(TU) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\} \times \mathbb{R}^m \times \{0\})\,;
\end{aligned}$$

die Verknüpfung $\psi := P \circ \mathrm{d}\phi$ mit

$$\begin{aligned}
P : \mathbb{R}^{2n} &\to \mathbb{R}^{2n} \\
(x^1, \ldots, x^n, v^1, \ldots, v^n) &\mapsto (x^1, \ldots, x^m, v^1, \ldots, v^m, x^{m+1}, \ldots, x^n, v^{m+1}, \ldots, v^n)
\end{aligned}$$

wäre dann eine angepaßte Karte für $\mathrm{d}\iota(TM) \subset TN$ um $v_p \in \mathrm{d}\iota(T(M \cap U))$.

(b) (ϕ, U) sei eine Karte um $p \in \mathrm{d}F^{-1}(0,0) \subset \pi^{-1}(F^{-1}(0))$ und schreibe $\widetilde{F} := F \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \mathbb{R}$. Bezüglich der natürlich durch ϕ induzierte Karte auf TN (d.h. ϕ^{TN}) hat $\mathrm{d}F$ den lokalen Repräsentanten

$$\widetilde{\mathrm{d}F}(x, v) = (\widetilde{F}(x), \partial_v\widetilde{F}(x))$$

für $x \in \phi(U)$ und $v \in \mathbb{R}^n$. Folglich gilt

$$\mathrm{d}\widetilde{\mathrm{d}F}(x, v) = \begin{pmatrix} \mathrm{d}\widetilde{F}(x) & 0 \\ \partial_v\mathrm{d}\widetilde{F}(x) & \mathrm{d}\widetilde{F}(x) \end{pmatrix}.$$

Da 0 ein regulärer Wert von $\widetilde{F}$ ist, ist $\mathrm{d}\widetilde{F}(x)) \neq 0$, so daß diese Matrix maximalen Rang ($= 2$) hat. Daher ist $(0,0)$ ein regulärer Wert von $\mathrm{d}F$.

Da $F(\iota(\gamma(t))) = 0$ für alle Kurven $\gamma :]-\delta, \delta[\to M$ gilt $\mathrm{d}_pF(v_p) = 0$ für alle $v_p \in \mathrm{d}\iota(T_pM)$; außerdem folgt aus $\dim\ker \mathrm{d}_pF = \dim M = n-1$, daß $\ker \mathrm{d}_pF \simeq T_pM$. Unter unserer Identifizierung $T\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^2$ gilt $\mathrm{d}F(v_p) = (F(p), v_p(F))$; daher ist $v_p \in \mathrm{d}\iota(TM)$ genau dann, wenn $\mathrm{d}F(v_p) = (0,0)$.

(c) Wir identifizieren $T\mathbb{R}^{n+1} \simeq \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$ und benutzen $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ mit $F(p) = |p|^2 - 1$. Dann ist $S^n = F^{-1}(\{0\})$. Deshalb ist $\mathrm{d}F(p, v) = (0,0)$ genau dann, wenn $F(p) = 0 \Leftrightarrow |p|^2 = 1$ und $\partial_vF(p) = 0 \Leftrightarrow p \cdot v = 0$, woraus das Ergebnis folgt.

Aufgabe 2 (Poisson-Klammer)**.** (a) Es gilt

$$\{f,g\} = X_f(g) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p^i} - \frac{\partial f}{\partial p^i}\frac{\partial g}{\partial q^i} = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial q^i}\frac{\partial f}{\partial p^i} - \frac{\partial g}{\partial p^i}\frac{\partial f}{\partial q^i} = -X_g(f) = -\{g,f\}.$$

Daher gilt $\{f,f\} = -\{f,f\} \Leftrightarrow \{f,f\} = 0$.

(b) Da X_f eine Derivation auf $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ ist, gilt

$$\{f,gh\} = X_f(gh) = X_f(g)\cdot h + g \cdot X_f(h) = \{f,g\}h + g\{f,h\}.$$

(c) Eine wenig anregende Berechnung zeigt, daß

$$\begin{aligned}[X_f, X_g] = \sum_{i,j} &\partial_{q^i} f \cdot \partial_{p^i}\partial_{q^j} g \cdot \partial_{p^j} - \partial_{q^j} g \cdot \partial_{p^j}\partial_{q^i} f \cdot \partial_{p^i} - \partial_{q^i} f \cdot \partial_{p^i}\partial_{p^j} g \cdot \partial_{q^j} \\ &+ \partial_{p^j} g \cdot \partial_{q^j}\partial_{q^i} f \cdot \partial_{p^i} - \partial_{p^i} f \cdot \partial_{q^i}\partial_{q^j} g \cdot \partial_{p^j} + \partial_{q^j} g \cdot \partial_{p^j}\partial_{p^i} f \cdot \partial_{q^i} \\ &+ \partial_{p^i} f \cdot \partial_{q^i}\partial_{p^j} g \cdot \partial_{q^j} - \partial_{p^j} g \cdot \partial_{q^j}\partial_{p^i} f \cdot \partial_{q^i} \\ = X_{\{f,g\}}&.\end{aligned}$$

(d) Es gilt laut Teil (c) und der Schiefsymmetrie von $\{\cdot,\cdot\}$, daß

$$\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = -X_{\{h,g\}}f + X_g X_h f - X_h X_g f = 0.$$

Aufgabe 3. Wir wollen zeigen, daß $\mathrm{d}F([X_1,X_2])f = [Y_1,Y_2]f \circ F$. Wir berechnen daher:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}F([X_1,X_2])f &= [X_1,X_2](f\circ F) \\ &= X_1 \cdot \underbrace{(X_2(f\circ F))}_{\mathrm{d}F(X_2)f = Y_2 f\circ F} - X_2 \underbrace{(X_1(f\circ F))}_{\mathrm{d}F(X_1)f = Y_1 f \circ F} \\ &= \underbrace{X_1(Y_2 f\circ F)}_{\mathrm{d}F(X_1)(Y_2 f) = Y_1(Y_2 f)\circ F} - \underbrace{X_2(Y_1 f \circ F)}_{\mathrm{d}F(X_2)(Y_1 f) = Y_2(Y_1 f)\circ F} \\ &= (Y_1Y_2 f - Y_2 Y_1 f)\circ F \\ &= [Y_1, Y_2] f \circ F.\end{aligned}$$

Aufgabe 4 (die Hessische)**.** (a) Es sei $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion mit $\varphi|_{B_\varepsilon(0)} \equiv 1$ und $\varphi|_{\mathbb{R}^n \setminus B_{2\varepsilon}(0)} \equiv 0$. Sei $\phi : U \to B_{4\varepsilon}(0)$ eine zentrierte Karte um $p \in M$, bezüglich deren wir v lokal als

$$v = \sum_{i=1}^n v^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$$

schreiben können. Setze

$$X_x = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^n v^i \cdot (\varphi\circ\phi)(x) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x, & x \in U \\ 0_x, & x \in M\setminus U.\end{cases}$$

X ist offensichtlich glatt in U, da die Koeffizienten der Basisvektoren glatt sind. Außerdem gilt $X_x = 0_x$ für alle x außerhalb $\phi^{-1}(B_{2\varepsilon}(0)) \Subset U$. Daher ist X glatt auf M, und es gilt

$$X_p = \sum_{i=1}^n v^i \cdot \varphi(\phi(p)) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p = \sum_{i=1}^n v^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p = v,$$

da $\phi(p) = 0 \in B_\varepsilon(0)$.

(b) Wir schreiben $X_x = \sum_{i=1}^n X^i(x) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x$ und $Y_x = \sum_{i=1}^n Y^i(x) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x$ bezüglich irgend einer Karte und berechnen lokal:

$$X(Y(f))(p) = X\left(\sum_{i=1}^n Y^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\right)(p) = \sum_{i,j=1}^n X^j \left(\frac{\partial Y^i}{\partial x^j}(p)\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) + Y^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}(p)\right).$$

Daher hängt dieser Ausdruck von der Ableitungen der lokalen Komponenten von Y, es sei denn, daß für alle i $\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = 0$ gilt, was sich invariant als $\mathrm{d}f_p = 0$ schreiben läßt. Daher ist $\mathrm{d}^2 f_p(v, w)$ wohldefiniert genau dann, wenn p ein *kritischer Punkt* ist.

Aufgabe 5. (a) Da $\{V_\alpha\}$ eine Überdeckung von M ist, gibt es für alle $p \in M$ ein α mit $p \in V_\alpha \Rightarrow h_\alpha(p) = 1$. Falls $F(p) = F(q)$, gilt $h_\alpha(p) = F^\alpha(p) = F^\alpha(q) = h_\alpha(q)$; daher ist $q \in \operatorname{supp} h_\alpha \subset U_\alpha$, so daß für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ $F^{N+(\alpha-1)i}(p) = F^{N+(\alpha-1)i}(q)$, d.h. $h_\alpha(p)\phi_\alpha^i(p) = h_\alpha(q)\phi_\alpha^i(q) \Rightarrow \phi_\alpha(p) = \phi_\alpha(q)$. ϕ_α ist aber injektiv; daher gilt $p = q$ und F ist injektiv.

(b) Für $p \in V_\alpha \subset M$ gilt $h_\alpha \equiv 1$ in einer Umgebung ($= V_\alpha$) von p. Daher gilt für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ und $i \in \{N + (\alpha-1)n + 1, \ldots, N + \alpha n\}$ und $x \in \phi_\alpha(V_\alpha)$

$$\partial_j(F \circ \phi_\alpha^{-1})^i(x) = \partial_j(h_\alpha \circ \phi_\alpha^{-1} \cdot (\phi_\alpha^{i-N-(\alpha-1)n} \circ \phi_\alpha^{-1}))^i(x) = \delta_j^{i-n-(\alpha-1)N};$$

daher hat (die Matrix von) $\mathrm{d}F$ die Identitätsmatrix $(\delta_j^i)_{i,j=1}^n$ als Submatrix. Deshalb gilt $\operatorname{rank} \mathrm{d}F \geq n$, aber der Definitionsbereich von $\mathrm{d}F$ hat Dimension n; folglich gilt $\operatorname{rank} \mathrm{d}F = n$, d.h. F ist eine Immersion. Da der Definitionsbereich von F eine kompakte Mannigfaltigkeit ist und F sowohl eine Injektion als auch eine Immersion ist, so muß F eine Einbettung sein.

Aufgabe 6. (a) Zur Bilinearität:

$$\begin{aligned}
&\big[((u^1, u^2, u^3) + \alpha \cdot (v^1, v^2, v^3)\big] \times (w^1, w^2, w^3) \\
&= ((u^2 + \alpha v^2)w^3 - (u^3 + \alpha v^3)w^2, (u^3 + \alpha v^3)w^1 - (u^1 + \alpha v^1)w^3, (u^1 + \alpha v^1)w^2 - (u^2 + \alpha v^2)w^1) \\
&= (u^2 w^3 - u^3 w^2, u^3 w^1 - u^1 w^3, u^1 w^2 - u^2 w^1) + \alpha(v^2, w^3 - v^3 w^2, v^3 w^1 - v^1 w^3, v^1 w^2 - v^2 w^1) \\
&= (u^1, u^2, u^3) \times (w^1, w^2, w^3) + \alpha \cdot (v^1, v^2, v^3) \times (w^1, w^2, w^3).
\end{aligned}$$

Zur Schiefsymmetrie:

$$\begin{aligned}
(v^1, v^2, v^3) \times (w^1, w^2, w^3) &= (v^2 w^3 - v^3 w^2, v^3 w^1 - v^1 w^3, v^1 w^2 - v^2 w^1) \\
&= -(w^2 v^3 - w^3 v^2, w^3 v^1 - w^1 v^3, w^1 v^2 - w^2 v^1) \\
&= -(w^1, w^2, w^3) \times (v^1, v^2, v^3).
\end{aligned}$$

Zur Jacobi-Identität benutzen wir die allerliebste Formel $u \times (v \times w) = v(u \cdot w) - w(u \cdot v)$ für $u, v, w \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} &u \times (v \times w) + v \times (w \times u) + w \times (u \times v) \\ &= v(u \cdot w) - w(u \cdot v) + w(v \cdot u) - u(v \cdot w) + u(w \cdot v) - v(w \cdot u) = 0. \end{aligned}$$

(b) Es gilt laut den Rechenregeln für die Lie-Klammer, daß

$$\begin{aligned} [X, Y](x, y, z) = [y\partial_z - z\partial_y, z\partial_x - x\partial_z] &= [y\partial_z, z\partial_x] - [y\partial_z, x\partial_z] - [z\partial_y, z\partial_x] + [z\partial_y, x\partial_z] \\ &= y\partial_x + z[y\partial_z, \partial_x] - x[y\partial_z, \partial_z] - z[z\partial_y, \partial_x] + x[z\partial_y, \partial_z] \\ &= y\partial_x - x\partial_y = -Z(x, y, z). \end{aligned}$$

Ähnlicherweise gelten $[Z, Y] = X$ und $[X, Z] = Y$. Daher ist wegen der Bilinearität von $[\cdot, \cdot]$ $V = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}(X, Y, Z)$ eine Lie-Unteralgebra von $\Gamma(T\mathbb{R}^3)$.

(c) $\phi : V \to \mathbb{R}^3$ sei die eindeutige $\mathbb{R}$-lineare Abbildung mit $\phi(Y) = (1, 0, 0)$, $\phi(X) = (0, 1, 0)$ und $\phi(Z) = (0, 0, 1)$. Es gelten dann

$$\begin{aligned} \phi(X) \times \phi(Y) = -(0, 0, 1) = -\phi(Z) &= \phi([X, Y]) \\ \phi(Z) \times \phi(Y) = (0, 1, 0) = \phi(X) &= \phi([Z, Y]) \\ \phi(X) \times \phi(Z) = (1, 0, 0) = \phi(Y) &= \phi([X, Z]). \end{aligned}$$

Da ϕ linear und die Operationen $\times$ und $[\cdot, \cdot]$ linear sind, so gilt für alle $v, w \in V$ $\phi(v) \times \phi(w) = \phi([v, w])$, d.h. ϕ ist ein Isomorphismus von Lie-Algebren.