Aufgabe 1

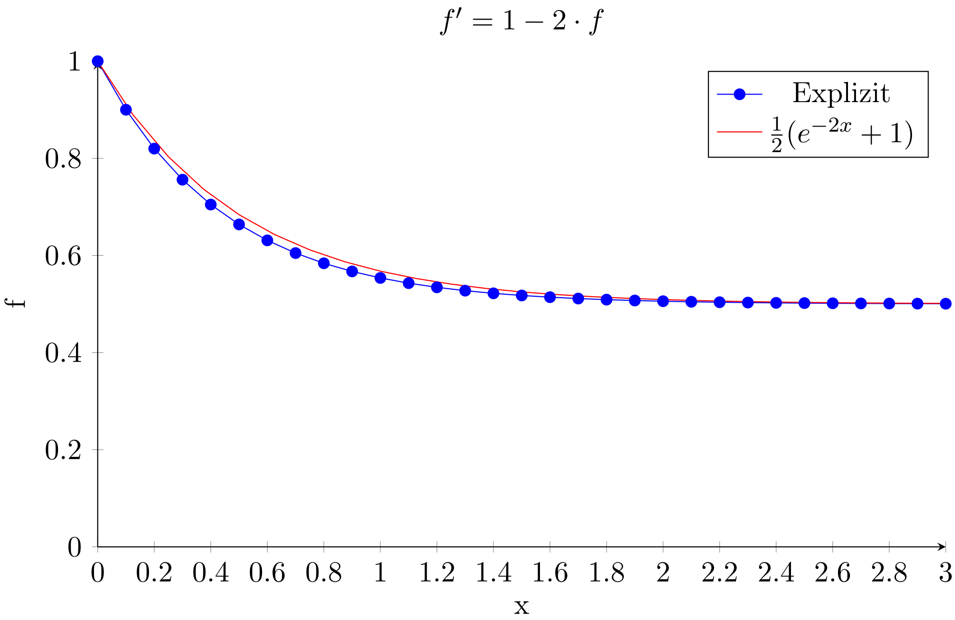

Abbildung 1: Als Anfangswert wurde $y_0 = 1$ und als Schrittweite $dt = 0.1$ gewählt.

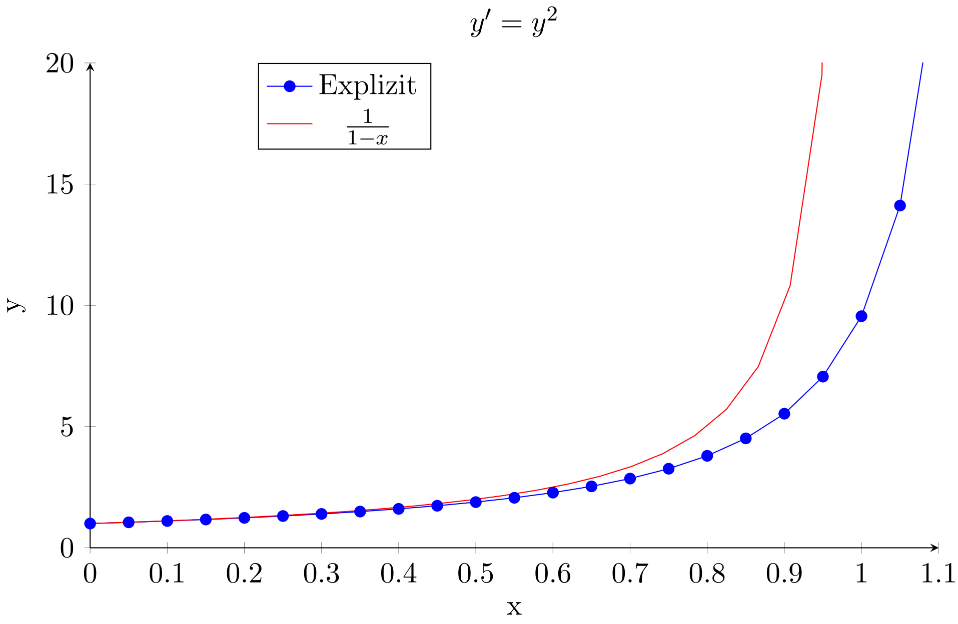

Abbildung 2: Als Anfangswert wurde $y_0 = 1$ und als Schrittweite $dt = 0.05$ gewählt.

Die erste Differentialgleichung wird durch den expliziten Euler gut angenähert und konvergiert auch weiter auf den exakten Funktionsverlauf. Die Approximation der zweiten Differentialgleichung hingegen ist schlechter da sich der Fehler in positiver x-Achsen Richtung vergrößert. Die Annäherung an die Funktionen kann durch Wahl einer kleineren Schrittweite noch verbessert werden, was allerdings auch mehr Berechnungen zur Folge hat.

Aufgabe 2

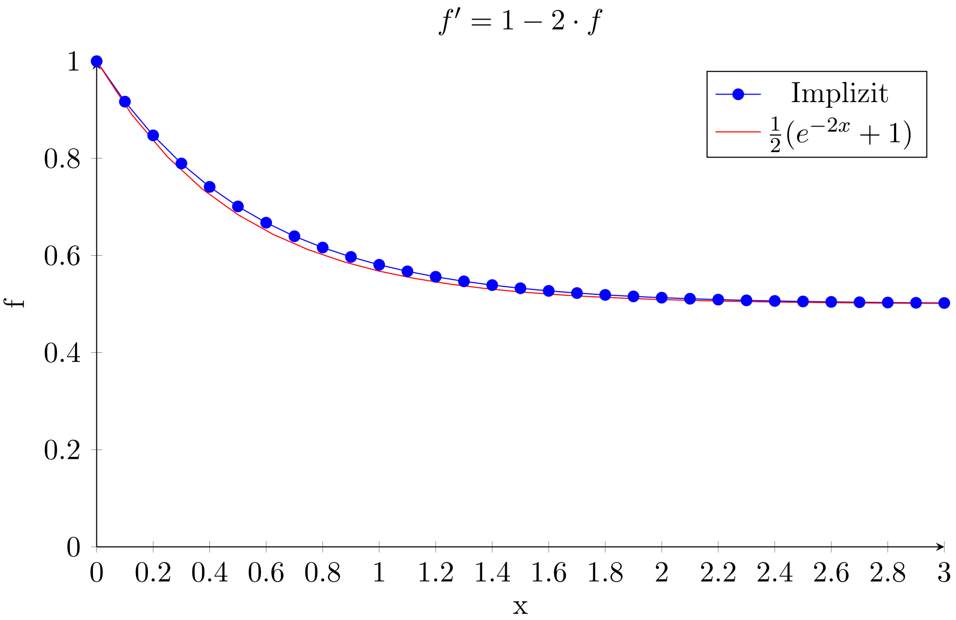

Abbildung 3: Als Anfangswert wurde $y_0 = 1$ und als Schrittweite $dt = 0.1$ gewählt.

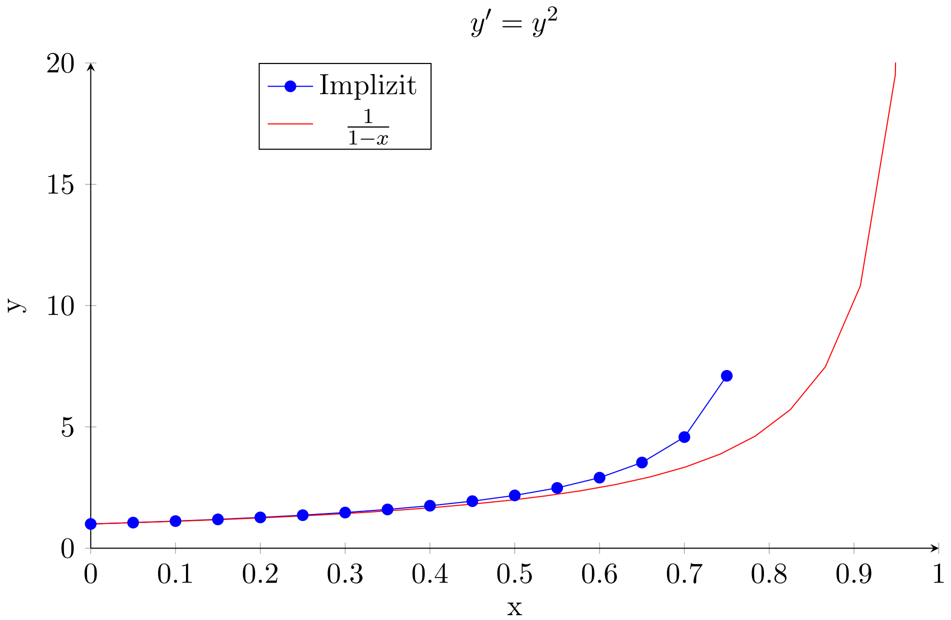

Abbildung 4: Als Anfangswert wurde $y_0 = 1$ und als Schrittweite $dt = 0.05$ gewählt. Ab $x \approx 0.75$ konnte das lineare Gleichungssystem nicht mehr gelöst werden da keine Nullstellen mehr gefunden wurden.

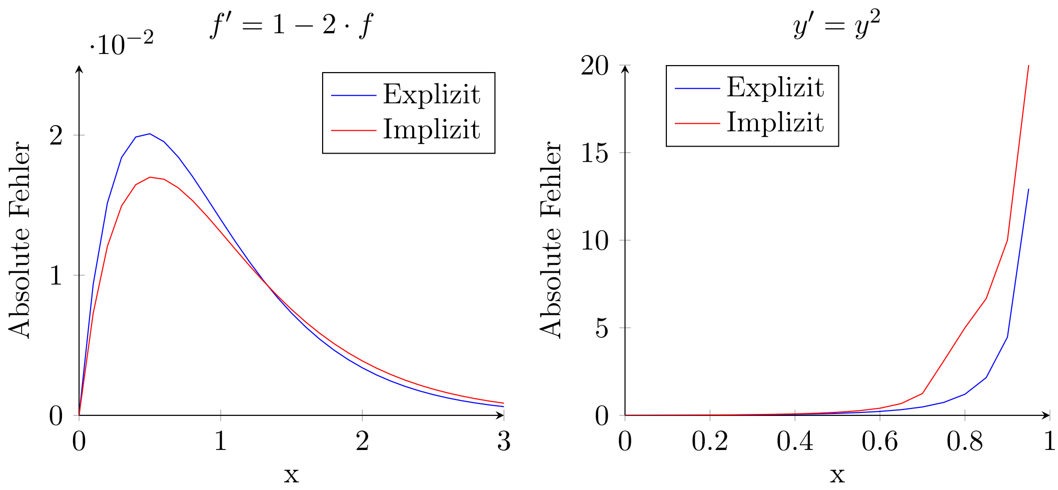

Abbildung 5: Gegenüberstellung der absoluten Differenz zwischen den Euklid Approximation und den tatächlichen Werten.

Wie in Abbildung 5 zu sehen ist, liefert der implizite Euklid eine bessere Approximation für die erste Differentialgleichung. Für die zweite DGL hingegen liefert der Algorithmus eine schlechtere Approximation da der absolute Fehler ab $x \approx 0.6$ größer als der des expliziten Euklids ist.

Aufgabe 3

(a)

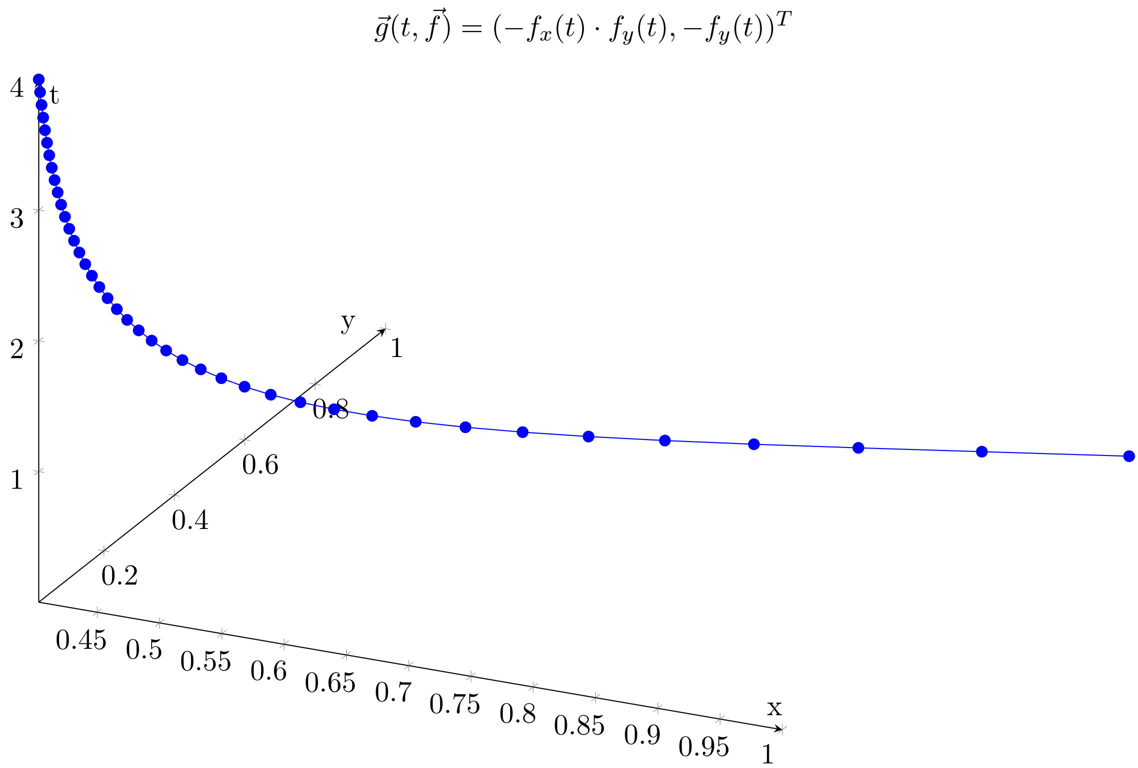

Abbildung 6: Als Anfangswert wurde $x_0 = 1,\ y_0 = 1$ und als Schrittweite $dt = 0.1$ gewählt.

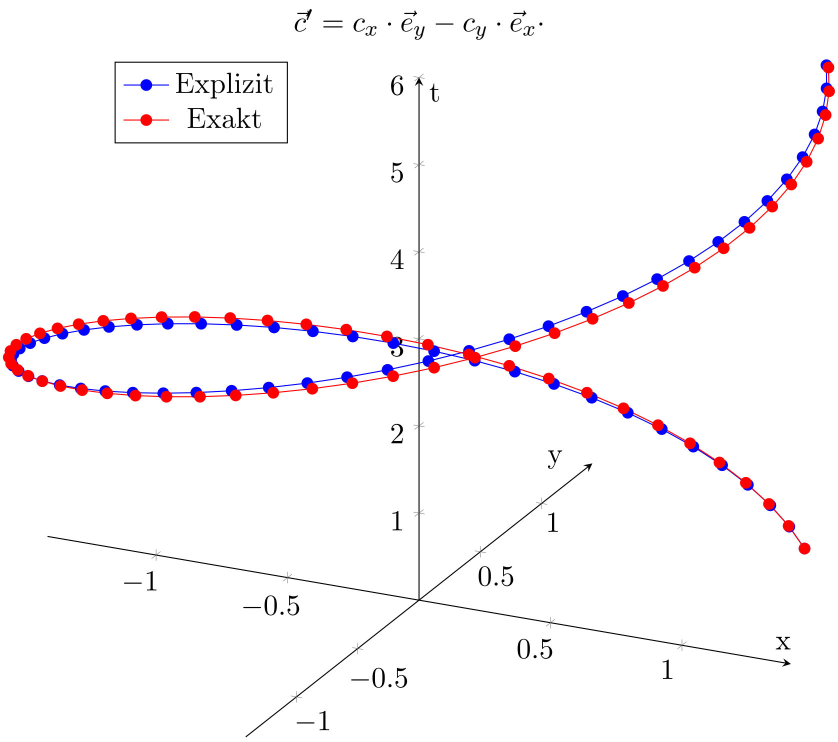

Abbildung 7: Als Anfangswert wurde $x_0 = 1,\ y_0 = 1$ und als Schrittweite $dt = 0.1$ gewählt.

(b)

Die analytische Funktion von

$$\vec{c}'(t) = \begin{pmatrix} -c_y(t) \\ c_x(t) \end{pmatrix}$$

ist[1]

$$\begin{pmatrix} \cos(t) - \sin(t) \\ \sin(t) + \cos(t) \end{pmatrix}$$

Wie in Abbildung 7 zu sehen ist erzeugt die DGL eine Spirale. Die Approximation mit dem expliziten Euklid liefert ein gutes Ergebnis. In der x-Komponente gibt es nur einen maximalen Fehler von 0.04814 und in der y-Komponente von 0.05078 (im Bereich $t \in [0, 6]$ mit einer Schrittweite von 0.1).

[1] `http://www.wolframalpha.com/input/?i=f%27%3D-g%2C+g%27%3Df`

Aufgabe 4

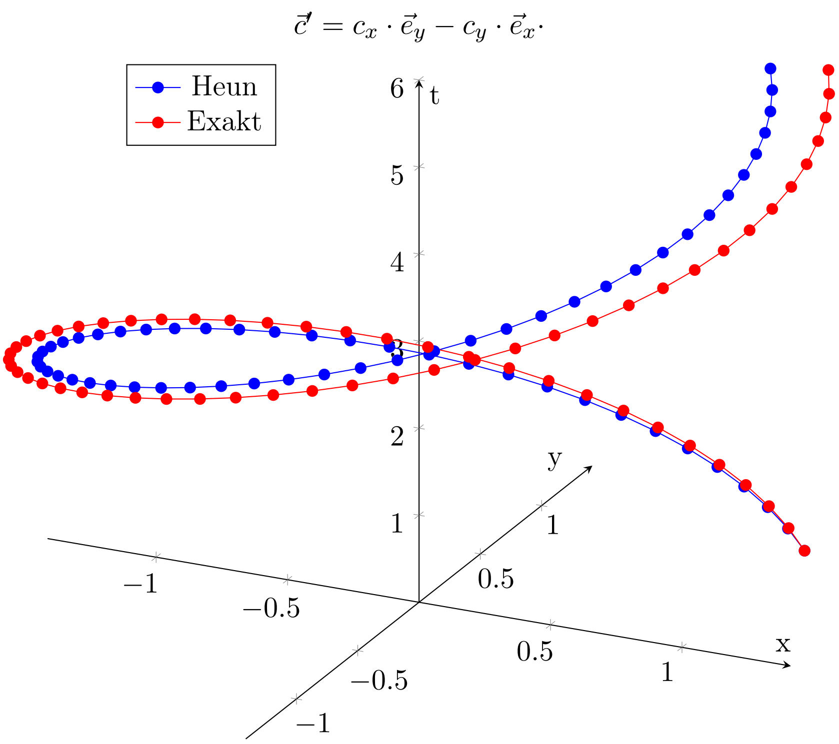

Abbildung 8: Als Anfangswert wurde $x_0 = 1,\ y_0 = 1$ und als Schrittweite $dt = 0.1$ gewählt.

In Abbildung 8 ist das Ergebnis des Heun-Verfahren für die DGL $\vec{(c)}$ zu sehen. Es fällt auf, dass je größer t wird sich die Annäherung durch das Heun-Verfahren von dem tatsächlichen Funktionswert entfernt. Tatsächlich sind auch die maximalen Fehler in der x- und y-Komponente 0.19832 (vgl. Euklid: 0.04814) und 0.16065 (vgl. Euklid: 0.05078) deutlich angestiegen.

Aufgabe 5

(a)

A-Stabilitätstest für den expliziten Euklid

$$\begin{aligned}
&f(t_1) = \Delta f'(t_0) + f(t_0) \text{ mit } f'(t_0) = -kf(t_0)\\
\Rightarrow\ &f(t_1) = \Delta t(-k)f(t_0) + f(t_0)\\
&f(t_1) = f(t_0)(1 - \Delta tk)\\
\Rightarrow\ &f(t_n) = (f(t_0)(1 - \Delta tk))^n
\end{aligned}$$

A-Stabilitätstest für den impliziten Euklid

$$
\begin{aligned}
f(t_1) &= \Delta f'(t_1) + f(t_0) \text{ mit } f'(t_1) = -kf(t_1) \\
\Rightarrow f(t_0) &= f(t_1) + \Delta tkf(t_1) \\
f(t_0) &= f(t_1)(1 + \Delta tk) \\
f(t_1) &= \frac{f(t_0)}{(1 + \Delta tk)} \\
\Rightarrow f(t_n) &= \left(\frac{f(t_0)}{1 + \Delta tk}\right)^n
\end{aligned}
$$

Bei dem expliziten Euklid kann man schnell ein passendes k finden, welches gegen die A-Stabilität spricht, indem man $k > \frac{1}{\Delta t}$ wählt. Eine einfache Wahl von k kann mit $2 \cdot t^{-a}$ $(a \geq 1)$ getroffen werden. Die Tests sollten für möglichst viele Werte für a durchgeführt werden.

Für den A-Stabilitätstest des impliziten Euklids ist die Wahl von k, da der Nenner $1+\Delta tk$ immer größer 1 ist (festes $\Delta t > 0$) und somit immer gegen 0 konvergiert.

(b)

Der A-Stabilitätstest trifft nur eine Aussage darüber, dass der Integrator stabil ist, also nicht oszilliert. Es wird keine Aussage darüber getroffen, wie gut die Differentialgleichung von diesem tatsächlich approximiert wird. Ein Beispiel hierfür ist $f(t_{i+1}) = 0$. Dieser Integrator besteht den A-Stabilitätstest aber approximiert keine DGL korrekt.