

6. Übungsblatt

01.06.2015

- $A \leq_m^P B$ gdw. es gibt eine in P berechenbare Funktion f mit $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$ f.a. x .
- Eine Sprache B ist **NP-schwer**, falls für alle $A \in \text{NP}$ gilt: $A \leq_m^P B$.
- Eine Sprache B ist **NP-vollständig**, falls B NP-schwer ist und $B \in \text{NP}$.

Aufgabe 1: Ein ungerichteter Graph $G' = (V', E')$ heißt Teilgraph eines ungerichteten Graphen $G = (V, E)$, falls $V' \subseteq V$ und $E' = E \cap (V' \times V')$ gelten.

Vom letzten Übungsblatt kennen Sie den Begriff der Isomorphie für Graphen.

Es sei

$$\text{SGI} := \left\{ \langle G, H \rangle \mid \begin{array}{l} G \text{ und } H \text{ sind ungerichtete Graphen und} \\ G \text{ besitzt einen Teilgraphen, der isomorph zu } H \text{ ist} \end{array} \right\}$$

Beweisen Sie, dass $\text{SGI} \in \text{NP}$ und $\text{CLIQUE} \leq_m^P \text{SGI}$ gelten.

Aufgabe 2: (Klausuraufgabe Wintersemester 2010/11)

Für eine aussagenlogische Formel φ , die die Variablen x_1, \dots, x_n enthält, definieren wir die Menge der erfüllenden Belegungen von φ als die Menge aller Belegungen für die Variablen x_1, \dots, x_n , unter denen φ zu wahr evaluiert.

Zeigen Sie, dass das Problem

$$\text{EVEN-SAT} := \left\{ \langle \varphi \rangle \mid \begin{array}{l} \varphi \text{ ist eine erfüllbare aussagenlogische Formel, die eine gerade} \\ \text{Anzahl an erfüllenden Belegungen hat} \end{array} \right\}$$

NP-schwer ist!

Aufgabe 3: (Klausuraufgabe Wintersemester 2009/10)

Beweisen Sie: $\text{NLOGSPACE} \subsetneq \text{TIME}(2^n)$, wobei die Funktion 2^n zeitkonstruierbar ist.

Aufgaben zum selber Lösen

Aufgabe 1 (12 Punkte):

Es sei Σ ein Alphabet. Beweisen Sie die folgende Aussage: Ist $P = \text{NP}$, so sind alle Sprachen über Σ , die in NP liegen, **NP-vollständig** bis auf \emptyset und Σ^* . Wobei Σ^* die Menge aller Wörter über dem Alphabet Σ zusammen mit dem leeren Wort ε ist (*Erinnerung:* $|\varepsilon| = 0$ und enthält keine Zeichen).

Aufgabe 2 (12 Punkte): (Alte Klausurteilaufgabe)

Es sei

$$\text{DOUBLE-SAT} := \left\{ \langle \varphi \rangle \mid \begin{array}{l} \varphi \text{ ist eine aussagenlogische Formel, die} \\ \text{mindestens zwei erfüllende Belegungen besitzt} \end{array} \right\}$$

Zeigen Sie, dass **DOUBLE-SAT** NP-schwer ist.