Leibniz Universität Hannover
Fakultät für Elektrotechnik und Informatik
Institut für Theoretische Informatik

Vorlesung: Prof. Dr. Vollmer
Übung: Luisa Simmet, Thorsten Kluge

Freitag, 24. April 2015

Gruppe 1: 13:00 – 14:30
Gruppe 2: 15:00 – 16:30
Gruppe 3: 17:00 – 18:30
Gebäude 3703 / Raum 224

Logik und formale Systeme

Lösung zur 1. Übung (Aussagenlogik)

Aufgabe 1

Gegeben ist die Formel

$$\varphi := p_1 \vee p_2 \to (p_3 \leftrightarrow p_2) \wedge (p_1 \to p_3).$$

a) Fülle die folgende Wahrheitstafel aus:

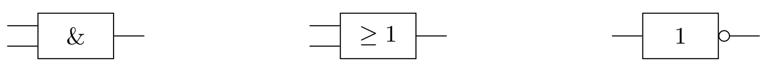
p_1	p_2	p_3	$p_1 \vee p_2$	$p_3 \leftrightarrow p_2$	$p_1 \to p_3$	$(p_3 \leftrightarrow p_2) \wedge (p_1 \to p_3)$	φ
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0
1	0	1	1	0	1	0	0
1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

b) Ist φ erfüllbar, unerfüllbar oder eine Tautologie?
Falls φ erfüllbar ist: Gib ein Modell für φ an.

c) Ermittle $sub(\varphi)$.
($sub(\varphi)$ ist die Menge aller Teilformeln von φ.)

d) Zeichne den Ableitungsbaum zu φ.

e) Stelle φ als logischen Schaltkreis dar. Verwende ausschließlich folgende logische Gatter:



f) Stelle φ als Boole'schen Schaltkreis dar.

g) Erzeuge das Wort $p_1 \vee p_2 \to (p_3 \leftrightarrow p_2) \wedge (p_1 \to p_3)$ mit Hilfe folgender Grammatik:

$$G := (\Sigma_{AL}, \{S, V, C\}, P, S)$$
$$\Sigma_{AL} := \{p, I, 0, 1, \wedge, \vee, \neg, \to, \leftrightarrow, (,)\}$$
$$P := \begin{cases} S \to V \mid C \mid \neg S \mid S \wedge S \mid S \vee S \mid S \to S \mid S \leftrightarrow S \mid (S) \\ V \to p \mid VI \\ C \to 0 \mid 1 \end{cases}$$

Lösung

a) Siehe oben.

b) φ ist erfüllbar, aber keine Tautologie.

Ein Modell – d.h. eine erfüllende Belegung – für φ ist z.B. $\mathfrak{I}(p_1) = \mathfrak{I}(p_2) = \mathfrak{I}(p_3) = 1$ (kürzer $\mathfrak{I}(p_i) = 1, i = 1, 2, 3$).

(Sämtliche Modelle: Für $\mathfrak{I}$ mit $\mathfrak{I}(p_1) = \mathfrak{I}(p_2) = 0$ und $\mathfrak{I}(p_3)$ beliebig ist $\mathfrak{I} \models \varphi$ und für $\mathfrak{I}$ mit $\mathfrak{I}(p_2) = \mathfrak{I}(p_3) = 1$, $\mathfrak{I}(p_1)$ beliebig ist $\mathfrak{I} \models \varphi$. Sonst: $\mathfrak{I} \not\models \varphi$.)

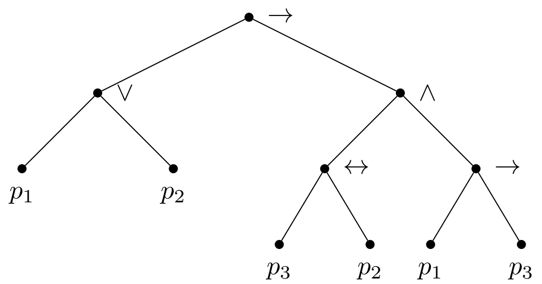
φ ist *keine* Tautologie. Z.B. für $\mathfrak{I}(p_2) = 1$, $\mathfrak{I}(p_3) = 0$ und $\mathfrak{I}(p_1)$ beliebig gilt: $\mathfrak{I} \not\models \varphi$.

c) Lösung: $sub(\varphi) = \{p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_1 \vee p_2,\ p_3 \leftrightarrow p_2,\ p_1 \to p_3,\ (p_3 \leftrightarrow p_2) \wedge (p_1 \to p_3),\ \varphi\}$
(Dies würde in der Klausur reichen.)

Ausführlich notiert:

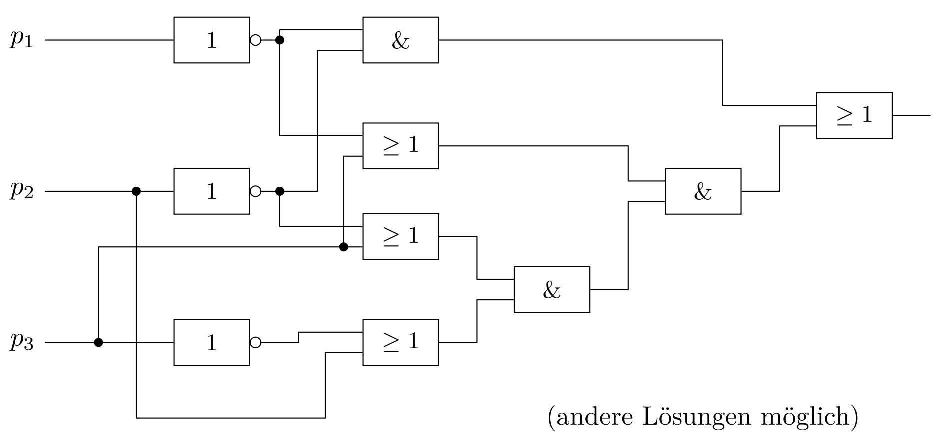
$$\begin{aligned}
sub(\varphi) &= sub\big(p_1 \vee p_2 \to (p_3 \leftrightarrow p_2) \wedge (p_1 \to p_3)\big) \\
&= \{p_1 \vee p_2 \to (p_3 \leftrightarrow p_2) \wedge (p_1 \to p_3)\} \cup sub(p_1 \vee p_2) \cup sub\big((p_3 \leftrightarrow p_2) \wedge (p_1 \to p_3)\big) \\
&= \{\varphi\} \cup \{p_1 \vee p_2\} \cup sub(p_1) \cup sub(p_2) \cup \{(p_3 \leftrightarrow p_2) \wedge (p_1 \to p_3)\} \cup sub(p_3 \leftrightarrow p_2) \\
&\qquad \cup sub(p_1 \to p_3) \\
&= \{\varphi,\ p_1 \vee p_2,\ p_1,\ p_2,\ (p_3 \leftrightarrow p_2) \wedge (p_1 \to p_3)\} \cup \{p_3 \leftrightarrow p_2\} \cup sub(p_3) \cup sub(p_2) \\
&\qquad \cup \{p_1 \to p_3\} \cup sub(p_1) \cup sub(p_3) \\
&= \{p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_1 \vee p_2,\ p_3 \leftrightarrow p_2,\ p_1 \to p_3,\ (p_3 \leftrightarrow p_2) \wedge (p_1 \to p_3),\ \varphi\}
\end{aligned}$$

d) Ableitungsbaum:



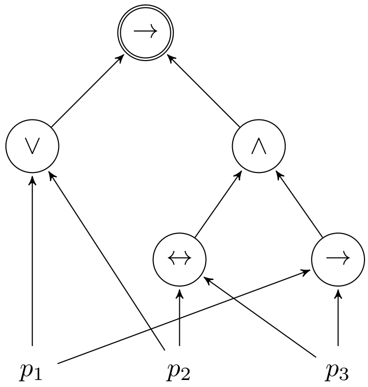
e) Logischer Schaltkreis:

$$\begin{aligned}
\varphi &\equiv \neg(p_1 \vee p_2) \vee [(\neg p_3 \vee p_2) \wedge (p_3 \vee \neg p_2) \wedge (\neg p_1 \vee p_3)] \\
&\equiv (\neg p_1 \wedge \neg p_2) \vee [(p_2 \vee \neg p_3) \wedge (\neg p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_1 \vee p_3)]
\end{aligned}$$



(andere Lösungen möglich)

f) Boole'scher Schaltkreis:



Bemerkung: Nach unserer Definition des Boole'schen Schaltkreises gibt es keine Knoten mit den Operatoren $\leftrightarrow$ bzw. $\rightarrow$. Genaueres folgt in der 2.Übung.

g)

$$\begin{aligned}
S \quad &\Rightarrow \quad S \to S \quad \Rightarrow^* \quad S \vee S \to S \wedge S \quad \Rightarrow \quad S \vee S \to (S) \wedge S \quad \Rightarrow \quad S \vee S \to (S) \wedge (S) \\
&\Rightarrow^* \quad S \vee S \to (S \leftrightarrow S) \wedge (S \to S) \quad \Rightarrow^* \quad VI \vee VI \to (VI \leftrightarrow VI) \wedge (VI \to VI) \\
&\Rightarrow^* \quad VI \vee VII \to (VIII \leftrightarrow VII) \wedge (VI \to VIII) \\
&\Rightarrow^* \quad pI \vee pII \to (pIII \leftrightarrow pII) \wedge (pI \to pIII) \\
&=: \quad p_1 \vee p_2 \to (p_3 \leftrightarrow p_2) \wedge (p_1 \to p_3)
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Gegeben ist

$$\psi := (\neg p_1 \vee p_2 \vee \neg p_3) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_1 \vee p_3) \wedge (\neg p_2 \vee p_3).$$

a) Sind ψ und φ (aus Aufgabe 1) semantisch äquivalent? Verifiziere oder widerlege dies durch eine Wahrheitstafel.

p_1	p_2	p_3	$\neg p_1 \vee p_2 \vee \neg p_3$	$\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3$	$\neg p_1 \vee p_3$	$\neg p_2 \vee p_3$	ψ	φ
0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1

b) Falls $\psi \equiv \varphi$ gilt, so Verifiziere dies durch geeignete Äquivalenzumformungen.

c) In welcher Form befindet sich ψ?

d) Schreibe ψ in Implikationen-Schreibweise.

Lösung

a) Siehe oben. Den letzten beiden Spalten ist zu entnehmen: ψ und φ sind semantisch äquivalent, also $\psi \equiv \varphi$.

b)

$$\begin{aligned}
\varphi &:= p_1 \vee p_2 \to (p_3 \leftrightarrow p_2) \wedge (p_1 \to p_3) \\
&\equiv (\neg p_1 \wedge \neg p_2) \vee [(\neg p_3 \vee p_2) \wedge (p_3 \vee \neg p_2) \wedge (\neg p_1 \vee p_3)] \\
&\equiv (\neg p_1 \vee p_2 \vee \neg p_3) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_1 \vee p_3) \wedge (p_2 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3) \\
&\qquad \wedge (\neg p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \\
&\equiv (\neg p_1 \vee p_2 \vee \neg p_3) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_1 \vee p_3) \wedge (\neg p_2 \vee p_3) =: \psi
\end{aligned}$$

c) ψ befindet sich in konjunktiver Normalform (KNF).

(Hier ist es sogar so, dass in jedem Konjunktionsglied (jeder Klausel) höchstens ein positives Literal vorkommt. Daher ist ψ eine Hornformel.)

d) $\psi_{\text{imp}} := (p_1 \wedge p_3 \to p_2) \wedge (p_1 \wedge p_2 \to p_3) \wedge (p_1 \to p_3) \wedge (p_2 \to p_3)$.