Lösung Aufgabe 10

Gegeben sei das primitive Polynom $f(D) = D^3 + D + 1$.

a.) Vervollständigen Sie das von $f(\alpha)$ gebildete Galois-Feld.

α^i	$\alpha^i \bmod f(\alpha)$
-	0
α^0	1
α^1	α
α^2	α^2
α^3	$\alpha + 1$
α^4	$\alpha^2 + \alpha$
α^5	$\alpha^2 + \alpha + 1$
α^6	$\alpha^2 + 1$
α^7	1

b.) Bilden Sie die Minimalpolynome $m_1(D)$, $m_3(D)$ und $m_5(D)$ in der Produktform

$m_1(D) = (D- \alpha) \cdot (D- \alpha^2) \cdot (D- \alpha^4)$

$m_3(D)= (D- \alpha^3) \cdot (D- \alpha^6) \cdot (D- \alpha^5)$

$m_5(D) = (D- \alpha^5) \cdot (D- \alpha^3) \cdot (D- \alpha^6)$

c.) Es sei $m_1(D) = D^3 + D + 1$. Bilden Sie das Generatorpolynom $g(D)$ für einen mindestens 2 Fehler korrigierenden Code.

$m_3(D)= (D- \alpha^3) \cdot (D- \alpha^6) \cdot (D- \alpha^5) = (D^2 + \alpha^6D + \alpha^3D + \alpha^2)\cdot (D- \alpha^5)$

$= D^3 + \alpha^6D^2 + \alpha^3D^2 + \alpha^2D + \alpha^5D^2 + \alpha^4D + \alpha D + 1$

$= D^3 + (\alpha^6 + \alpha^3 + \alpha^5)\cdot D^2 + (\alpha^2 + \alpha^4 + \alpha)\cdot D + 1$

$t_2 = \alpha^6 + \alpha^3 + \alpha^5 = \alpha^2 + 1 + \alpha + 1 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 1$

$t_1 = \alpha^2 + \alpha^2 + \alpha + \alpha = 0$

$m_3(D)= D^3 + D^2 + 1$

$G(D) = m_1(D) \cdot m_3(D) = (D^3 + D + 1) \cdot (D^3 + D^2 + 1) = D^6 + D^5 + D^3 + D^4 + D^3 + D + D^3 + D^2 + 1$

$= D^6 + D^5 + D^4 + D^3 + D^2 + D + 1$

d.) Geben Sie alle gültigen Codeworte für diesen Code an. Weisen Sie die Gültigkeit dieser Codeworte nach.

$N = 7$, $N\text{-}K = 6$, $K = 1$

$a_1(D) = 1$

$a_2(D) = 0$

$x_1(D) = 1\cdot D^{N-K} + 1\cdot D^{N-K} \bmod g(D) = 1\cdot D^6 + D^6 \bmod(D^6 + D^5 + D^4 + D^3 + D^2 + D + 1)$

$= D^6 + D^5 + D^4 + D^3 + D^2 + D + 1 \rightarrow (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1)$

$x_2(D) = 0 \rightarrow (0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)$

$x_1(\alpha) = \alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = \alpha^2 + 1 + \alpha^2 + \alpha + 1 + \alpha^2 + \alpha + \alpha + 1 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$

$x_2(\alpha) = 0$

e.) Dekodieren Sie das empfangene Codewort $y(D) = D^4 + D^3 + D^2 + D + 1$.

$S_1 = \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = \alpha^2 + \alpha + \alpha+1 + \alpha^2 + \alpha + 1 = \alpha$
$S_2 = \alpha^8 + \alpha^6 + \alpha^4 + \alpha^2 + 1 = \alpha + \alpha^2 + 1 + \alpha^2 + \alpha + \alpha^2 + 1 = \alpha^2$
$S_3 = \alpha^{12} + \alpha^9 + \alpha^6 + \alpha^3 + 1 = \alpha^2 + \alpha + 1 + \alpha^2 + \alpha^2 + 1 + \alpha + 1 + 1= \alpha^2$
$S_4 = \alpha^{16} + \alpha^{12} + \alpha^8 + \alpha^4 + 1 = \alpha^2 + \alpha^2 + \alpha + 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha + 1 = \alpha^2 + \alpha = \alpha^4$

$S_1 + \sigma_1 = 0 \Rightarrow S_1 = \sigma_1 \Rightarrow \sigma_1 = \alpha$

$S_2 + \sigma_1 S_1 + 2\sigma_2 = 0 \Rightarrow \alpha^2 + \alpha\,\alpha + 2\sigma_2 = \alpha^2 + \alpha^2 + \sigma_2 + \sigma_2 = 0$ => keine weitere Information

$S_3 + \sigma_1 S_2 + \sigma_2 S_1 + 3\sigma_3 = 0 \Rightarrow S_3 + \sigma_1 S_2 + \sigma_2 S_1 = 0 \Rightarrow \alpha^2 + \alpha\,\alpha^2 + \sigma_2\,\alpha = 0 \Rightarrow \alpha + \alpha^2 + \sigma_2 = 0$
⇨ $\alpha^4 + \sigma_2 = 0 \Rightarrow \sigma_2 = \alpha^4$

Fehlerpolynom:

$\sigma^{(2)}(D) = 1 + \sigma_1 D + \sigma_2 D^2 = 1 + \alpha D + \alpha^4 D^2 = 0$

Einsetzen von α in das Fehlerpolynom ergibt

$1 + \alpha\,\alpha + \alpha^4\,\alpha^2 = 1 + \alpha^2 + \alpha^6 = 1 + \alpha^2 + \alpha^2 + 1 = 0$

Damit ist α die erste Nullstelle des Fehlerpolynoms.

Einsetzen von α^2 in das Fehlerpolynom ergibt

$1 + \alpha\,\alpha^2 + \alpha^4\,\alpha^4 = 1 + \alpha^3 + \alpha^8 = 1 + \alpha + 1 + \alpha = 0$

Damit ist α^2 die zweite Nullstelle des Fehlerpolynoms.

⇨ $ß_1^{-1} = \alpha \Rightarrow ß_1 = \alpha^6$
⇨ $ß_2^{-1} = \alpha^2 \Rightarrow ß_2 = \alpha^5$
⇨ $e(D) = D^6 + D^5$
⇨ $x(D) = e(D) + y(D) = D^6 + D^5 + D^4 + D^3 + D^2 + D + 1$ -> (1 1 1 1 1 1 1)