Algebraische Geometrie II, SoSe 2016 — Prof. Dr. Klaus Hulek
Institut für Algebraische Geometrie — Benjamin Wieneck
Leibniz Universität Hannover

Übungsblatt 1

Aufgabe 1. Sei $f : Y \to X$ eine stetige Abbildung von topologischen Räumen und $\mathcal{F}$ eine Garbe auf Y. Der *Push Forward* $f_\star\mathcal{F}$ von $\mathcal{F}$ bezüglich f ist für eine offene Menge $U \subset X$ definiert als

$$(f_\star\mathcal{F})(U) \;:=\; \mathcal{F}(f^{-1}(U))\,.$$

Dies ist eine Garbe. Sei $p \in X$ ein Punkt, $\iota : \{p\} \hookrightarrow X$ die zugehörige Inklusion und bezeichne $\mathcal{G}$ die konstante Garbe auf $\{p\}$ mit Werten in einer abelschen Gruppe G.

(i) Man berechne $\iota_\star\mathcal{G}$.

(ii) Man berechne die Halme von $\iota_\star\mathcal{G}$.

Aufgabe 2. Es sei $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathbb{S}^1}$ die Garbe der reellwertigen stetigen Funktionen auf dem Einheitskreis $\mathbb{S}^1$ und $\mathbb{R} = \mathbb{R}_{\mathbb{S}^1}$ die konstante Garbe, welche eine Untergarbe von $\mathcal{C}$ ist. Man zeige, dass der Prägarbenquotient $\mathcal{F} := \mathcal{C}//\mathbb{R}$ keine Garbe ist.

Aufgabe 3. Sei $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Garbenmorphismus auf einem topologischen Raum X.

(i) Man zeige beispielhaft anhand der Bildgarbe $\operatorname{im}\varphi$, dass die Halmbildung kommutiert, d.h. für alle $p \in X$ gilt $(\operatorname{im}\varphi)_p = \operatorname{im}\varphi_p$. *Gleiches gilt für die übrigen Objekte, wie Kern, Kokern und Quotientengarbe.*

(ii) Man folgere die Aussage der Vorlesung, dass eine Sequenz von Garben

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H}$$

genau dann exakt ist, wenn die induzierte Sequenz der Halme

$$\mathcal{F}_p \xrightarrow{\varphi_p} \mathcal{G}_p \xrightarrow{\psi_p} \mathcal{H}_p$$

für alle $p \in X$ exakt ist.

Aufgabe 4. Auf dem toplogischen Raum $\mathbb{C}$ mit der analytischen Topologie betrachten wir die folgende Sequenz von Garben

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{2\pi\mathrm{i}} \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^\star \longrightarrow 0\,.$$

Hierbei bezeichnet $\mathbb{Z}$ die konstante Garbe, $\mathcal{O}$ die Garbe der holomorphen Funktionen und $\mathcal{O}^\star$ die Garbe der nirgends verschwindenen holomorphen Funktionen.

(i) Man zeige, dass diese Sequenz exakt ist.

(ii) Man gebe ein Beispiel für eine offene Menge $U \subset \mathbb{C}$ an, so dass die induzierte Sequenz der Schnitte nicht exakt ist.