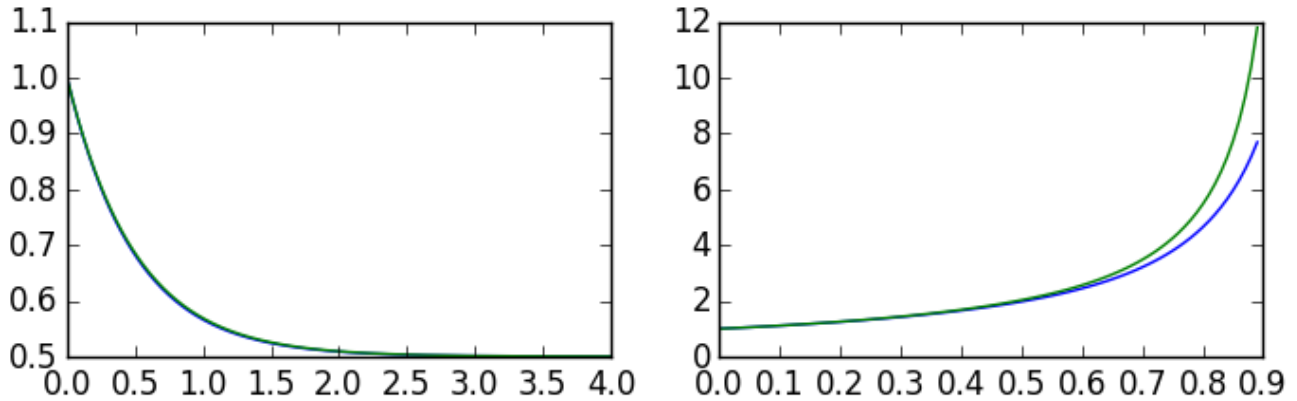


1.1) integrator.py

Die Kurven unterscheiden sich nur geringfügig von den analytischen Ergebnissen (WolframAlpha). Anfangswerte lagen jeweils bei 1.

1.2) integrator.py

Vergleich der Kurven (implizit grün/explicit blau):



Bei der 1. DGL sind die Ergebnisse sehr ähnlich. Verwendete Formel (nach Umformungen):

$$f_{n+1} = \frac{h + f_n}{1 + 2h} \quad \text{mit Schrittweite } h.$$

Bei der 2. DGL ist eine Verbesserung bei Verwendung des impliziten Verfahrens zu sehen.

Umformung:

$$f_{n+1}^2 - \frac{1}{h} f_{n+1} + \frac{f_n}{h} = 0 \Leftrightarrow f_{n+1} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4f_n h}}{2h}$$

Mit Anfangswert 1 funktioniert nur die Lösung mit Subtraktion im Zähler (?).

1.3) integrator.py

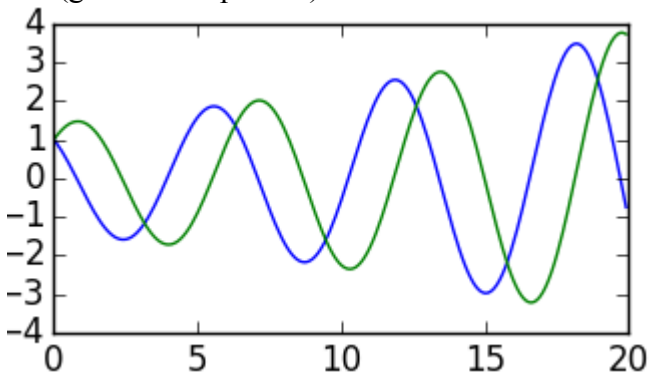
b)

Analytische Lösung:

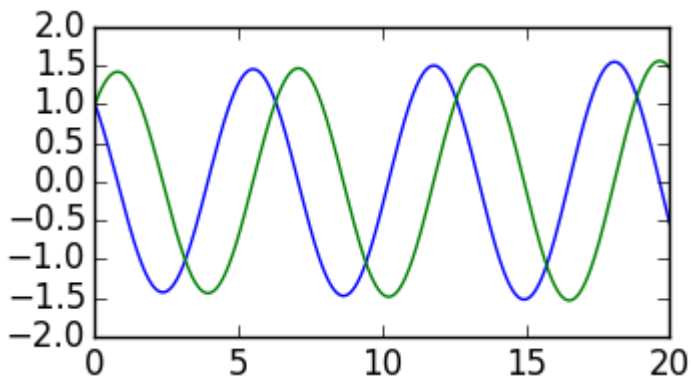
$$c_x = c_1 * \cos(t) - c_2 * \sin(t)$$

$$c_y = c_1 * \sin(t) + c_2 * \cos(t)$$

Bei der Integration schlägt das Ergebnis der Integration in jeder Periode weiter nach oben und unten aus (größere Amplitude):



Bei der analytischen Lösung befinden sich alle Maxima auf der jeweils gleichen Höhe. Verringert man die Schrittweite, verbessert sich das Ergebnis, aber die Maxima unterscheiden sich immer noch:



1.4) integrator.py

Das Heun-Verfahren bietet im speziellen Fall der 2. DGL keinen Vorteil, da die Formel für die Berechnung der nächsten Näherungswerte nach einigen Umformungen identisch ist mit der des expliziten Euler-Verfahrens. Das Ergebnis ist also das gleiche wie in 1.3.

1.5) a_stab_tester.py

a)

Im Test werden für k 3 Werte verwendet, die jeweils kleiner, gleich oder größer als die Schrittweite sind. Das explizite Euler-Verfahren fällt z.B. nicht mehr monoton, sobald k größer als die Schrittweite ist.

b)

Die A-Stabilität sagt aus, dass ein Verfahren für das Problem $A' = -kA$ mit $k > 0$, $A(0) = 1$ monoton fallende Näherungswerte liefert. Das kann aber nicht auf alle anderen Probleme verallgemeinert werden. Beispiel: Ein Verfahren, das nur den letzten Wert halbiert, ist A-stabil, aber nicht zur Annäherung von DGLs geeignet.