**Algebraische Geometrie II**, SoSe 2016
Institut für Algebraische Geometrie
Leibniz Universität Hannover

Prof. Dr. Klaus Hulek
Benjamin Wieneck

# Übungsblatt 9

**Aufgabe 1.** Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen, $\mathcal{F}$ eine Garbe auf $X$ und

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{W}^0 \xrightarrow{\varphi^0} \mathcal{W}^1 \xrightarrow{\varphi^1} \mathcal{W}^2 \longrightarrow \cdots$$

die kanonische welke Auflösung von $\mathcal{F}$. Bezeiche $f_\star\varphi^i : f_\star\mathcal{W}^i \to f_\star\mathcal{W}^{i+1}$ die induzierte Abbildung. Man zeige: die höhere direkte Bilgarbe $R^i f_\star\mathcal{F}$ ist kanonisch isomorph zu

$$\frac{\ker(f_\star\varphi^i)}{\operatorname{im}(f_\star\varphi^{i-1})}\,.$$

**Aufgabe 2.** Sei $C$ eine glatte irreduzible Kurve vom Geschlecht $g = 1$ und $x_0 \in C$. Bezeichne $\operatorname{Pic}^0(C)$ die Geradenbündel vom Grad 0. Man zeige, dass durch

$$x \longmapsto \mathcal{O}_C(x - x_0)$$

eine Bijektion zwischen $C$ und $\operatorname{Pic}^0(C)$ definiert wird.
Bemerkung: *Dies liefert eine Gruppenstruktur auf $C$ mit neutralen Element $x_0$.*

**Aufgabe 3.** Sei $C$ eine Kurve und $p \in C$. Man zeige, dass eine rationale Funktion $f$ auf $C$ existiert, welche einen Pol in $p$ hat, aber sonst regulär ist.

**Aufgabe 4.** Seien $C_1, \dots C_n$ glatte, irreduzible Kurven mit $g(C_i) = g_i$ und $p_j, q_j \in \coprod_{i=1}^n C_i$, $j = 1, \dots, r$ verschiedene Punkte. Die assoziierte *nodale Kurve* ist definiert als

$$C := \coprod_{i=1}^{n} C_i \Big/ \sim$$

wobei die Äquivalenzrelation $\sim$ jeweils $p_j$ mit $q_j$ für $j = 1, \dots, r$ identifiziert. Man zeige, dass $h^1(C, \mathcal{O}_C) = r + 1 - n + \sum_{i=1}^n g_i$.
Hinweis: *Eine reguläre Funktion $f$ auf $C$ ist eine reguläre Funktion $f$ auf $\coprod_{i=1}^n C_i$, mit $f(p_j) = f(q_j)$.*