Algebraische Geometrie II, SoSe 2016
Institut für Algebraische Geometrie
Leibniz Universität Hannover

Prof. Dr. Klaus Hulek
Benjamin Wieneck

Übungsblatt 2

Aufgabe 1. Sei $E \to X$ ein Vektorbündel vom Rang r auf einer algebraischen Varietät X welches lokal trivial auf der offenen Überdeckung $X = \bigcup_i U_i$ ist und durch die Kozykel

$$\psi_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$$

gegeben ist, d.h. diese erfüllen die Eigenschaft

$$\psi_{ij}(x) \;=\; \psi_{ji}(x)^{-1} \quad \text{und} \quad \psi_{ij}(x)\psi_{jk}(x) \;=\; \psi_{ik}(x)\,.$$

für alle $x \in U_i \cap U_j$ bzw. $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$. Man zeige folgendes.

(i) Die Kozykel des dualen Vektorbündels $E^\vee$ sind durch $\left(\psi_{ij}^t\right)^{-1}$ gegeben.
(ii) Die Kozykel der Determinante $\det(E) = \bigwedge^r E$ sind durch $\det(\psi_{ij})$ gegeben.

Aufgabe 2. Auf $\mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1}$ definieren wir

$$\mathcal{O}(-1) \;:=\; \{(l, z) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1} \mid z \in l\}$$

Man versehe diese Menge mit der Struktur eines Geradenbündels $\pi : \mathcal{O}(-1) \to \mathbb{P}^n$ indem man eine Projektion π und stetige Trivialisierungen definiert. Man zeige anhand von Kozykeln, dass diese Trivialisierungen Koordinaten auf $\mathcal{O}(-1)$ definieren, d.h. man zeige dass die Kozykel reguläre Abbildungen sind.

Aufgabe 3. Sei X eine glatte algebraische Varietät, $Z \subset X$ eine abgeschlossene nicht notwendigerweise irreduzible Hyperfläche und $U := X \setminus Z$ die assoziierte offene Menge. Man zeige, dass eine kanonische exakte Sequenz

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Cl}(X) \longrightarrow \mathrm{Cl}(U) \longrightarrow 0$$

existiert und folgere $\mathrm{Cl}(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{Z}$.

Aufgabe 4. Sei X die glatte projektive Fläche gegeben durch $z_0 z_1 - z_2 z_3 = 0$ im $\mathbb{P}^3$ und sei V die offene Menge in X definiert durch $z_3 \neq 0$. Man zeige:

(i) Es ist $V \cong \mathbb{C}^2$ (*und damit* $\mathrm{Pic}(V) = 0$).
(ii) Das Komplement $X \setminus V = L_1 \cup L_2$ besteht aus zwei projektiven Geraden $L_1 \cong \mathbb{P}^1$ und $L_2 \cong \mathbb{P}^1$.
(iii) Mit Aufgabe 3: Es ist $\mathrm{Pic}(X) \cong \mathbb{Z}^2$ und die Erzeuger sind die zwei Geraden.

Hinweis: Es darf benutzt werden, dass die L_i nicht linear äquivalent sind und $\mathrm{Pic}(\mathbb{C} \times M) \cong \mathrm{Pic}(M)$ *für jede glatte Varietät M.*