Leibniz-Universität Hannover
Insitut für Differentialgeometrie
Dr. Ahmad Afuni, Dr. Markus Röser Hannover, den 28.06.16

Übungsblatt 12

zur Vorlesung Mannigfaltigkeiten

Sommersemester 2016

Aufgabe 1. a) Sei $M = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2+y^2 = 1 = z^2+w^2\} = S^1_L \times S^1_R$ mit Orientierung gegeben durch $\omega_L \wedge \omega_R$, wobei ω_L, ω_R die Standard-Volumenformen auf S^1_L, S^1_R bezeichnet. Sei $\omega = xyzdx \wedge dz$. Berechnen Sie $\int_M \omega$.

b) Sei $\omega = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$. Berechnen Sie $\int_{S^2} \omega$ auf zwei verschiedene Arten: Einmal über eine geeignete Parametrisierung und einmal mit dem Satz von Stokes.

Aufgabe 2. a) Sei $F : S^3 \to \mathbb{RP}^3$ die Abbildung $p \mapsto [p]$ und nehmen Sie an, dass S^3 und $\mathbb{RP}^3$ so orientiert sind, dass F orientierungserhaltend ist. Sei $\nu \in \Omega^3(\mathbb{RP}^3)$. Zeigen Sie:

$$\int_{\mathbb{RP}^3} \nu = \frac{1}{2} \int_{S^3} F^*\nu.$$

b) Sei $\omega \in \Omega^n(S^n)$ eine Form mit $\sigma^*\omega = \omega$. Zeigen Sie, dass ein $\nu \in \Omega^n(\mathbb{RP}^n)$ existiert mit $F^*\nu = \omega$.

Aufgabe 3. a) Sei (M^{2n}, ω) eine kompakte symplektische Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass $H^{2k}(M) \neq 0$ für alle $0 \leq k \leq n$.

b) Zeigen Sie, dass auf S^n genau dann eine symplektische Form existiert, wenn $n = 2$ ist. (Hinweis: Zeigen Sie, dass $H^2(S^n) = 0$ gilt für alle $n \geq 3$.)

Aufgabe 4. Sei (M, ν) eine glatte orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand und sei $X \in \Gamma(TM)$ ein Vektorfeld. Die Divergenz von X bezüglich ν ist die glatte Funktion $\mathrm{div}(X) \in C^\infty(M)$ definiert durch

$$\mathcal{L}_X \nu = \mathrm{div}(X)\nu.$$

a) Sei $M = \mathbb{R}^n$ und $\nu = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{div}(X) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial X^i}{\partial x^i}$. Die Definition reproduziert also die übliche Formel auf $\mathbb{R}^n$.

b) Beweisen Sie den Satz von Gauß: Sei (M, ν) eine kompakte orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand und sei $X \in \Gamma(TM)$. Dann gilt

$$\int_M \mathrm{div}(X)\nu = \int_{\partial M} i_X \nu.$$

c) Sei $M = \overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^n$ mit Standardorientierung und Rand $\partial M = S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Sei weiter $N = \sum_{i=1}^n x^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Zeigen Sie, dass in diesem Fall die Formel aus Teil *b)* zu

$$\int_{B_1(0)} \mathrm{div}(X) = \int_{S^{n-1}} (X \cdot N)\omega_{S^{n-1}},$$

wird, wobei $X \cdot N = \sum_i X^i x^i$.

d) Können Sie die obigen Formeln auf beliebige Hyperflächen $M = F^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^n$ mit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ verallgemeinern?

Abgabe Donnerstag, 07.07.2016 in der Vorlesung.