Algebraische Geometrie II, SoSe 2016
Institut für Algebraische Geometrie
Leibniz Universität Hannover

Prof. Dr. Klaus Hulek
Benjamin Wieneck

Übungsblatt 5

Aufgabe 1. Es sei $p \in \mathbb{P}^n$ ein Punkt. Wir definieren ein Linearsystem V von $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ durch

$$V \;:=\; \{s \in \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) \mid s(p) = 0\}\,.$$

Man zeige, dass V eine reguläre Abbildung $\mathbb{P}^n \setminus \{p\} \to \mathbb{P}^{n-1}$ induziert. Was macht diese Abbildung geometrisch?

Aufgabe 2. Es sei $0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to 0$ eine exakte Sequenz von lokal freien Garben vom endlichen Rang auf einer Varietät X. Man zeige, $\det(\mathcal{F}) = \det(\mathcal{E}) \otimes \det(\mathcal{G})$.

Aufgabe 3. Es sei $X := V(x^2 + y^2 - 1) \subset \mathbb{A}^2$. Man zeige, dass durch $\omega := (1/y)dx$ eine reguläre Differentialform auf X definiert wird.

Aufgabe 4. Gegeben sei die glatte Weierstraßkubik

$$C := V(f) = V(z_0 z_2^2 = 4z_1^3 - g_2 z_1 z_0^2 - g_3 z_0^3) \subset \mathbb{P}^2$$

wobei $g_2, g_3 \in \mathbb{C}$ derart, dass $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$. Für die kanonische offene Überdeckung von $\mathbb{P}^2 = U_0 \cup U_1 \cup U_2$ definiere $C_i := C \cap U_i$ eine Überdeckung von C. Die affinen Koordinaten auf U_i bezeichnen wir mit x_i, y_i. Man zeige, dass das kanonische Bündel K_C trivial ist in den folgenden Schritten.

(i) Man zeige, auf C_0 wird durch

$$\omega_0 \;:=\; \frac{dx_0}{\partial f/\partial y_0} = -\frac{dy_0}{\partial f/\partial x_0}$$

eine reguläre Differentialform definiert.

(ii) Man zeige, auf C_2 wird durch

$$\omega_2 \;:=\; \frac{dx_2}{\partial f/\partial y_2} = -\frac{dy_2}{\partial f/\partial x_2}$$

eine reguläre Differentialform definiert.

(iii) Man zeige, $\omega_0|_{C_0 \cap C_2} = \omega_2|_{C_0 \cap C_2}$.