Modelle für virtuelle Realitäten

Übung3 Dynamische Systeme

Name: Zhang Zijian

Aufgabe 3.1 - Model with Treatment

Sehen 3.1.py

Aufgabe 3.2 – Analyse des dynamischen Systems

(a) Die Equilibria im Paper werden durch Euler explizite Verfahren berechnet. Zuerst werden einige DGL-Beziehung von Klassen(d.h. S,Z,I,R) gefunden(die sogenannte Equilibria sind). Dann werden bestimmte Zustand der Klassen (wie z.B. (S, Z, I, R) = (0, $\bar{Z}$, 0, 0)) gesetzt und die Egenwerte von Jacobi Matrix berechnet zu prüfen, ob die Zustand stabil ist. Wenn ja, bedeutet es, dass die absoluten Menge der 'rein' und 'raus' von beliebigen Klass(d.h. S,Z,I,R etc.) gleich sind. Also bleibt die Anzahl jedes Klasses stehen. Dann kommt eine ausgleichende Zustand vor.

Im Paper wird angenommen, dass die Simulation so kurz dauern würde(a short outbreak), dass die Geburtsrate und Sterbsrate ausgelassen werden könnten. Außerdem falls das Π größer als 0 gesetzt wird, konvergiert die Simulation nicht.

(b) Im prinzip sagen die Eigenwerte einer Jacobi Matrix die Eigenschaft entsprechender Funktion(od. entsprechendes dynamischen Systems) neben seinen Fixpunkten aus. Wenn für alle λ λ <=0 gelten, ist der Fixpunkt stabil. Wenn es mindestens ein λ positiv ist, ist der Fixpunkt nicht stabil.

Eigenwerte und Eigenvektoren zum doomsday Equilibrium des Basic Models:

$$\lambda_1=-\beta\bar{Z} \qquad \lambda_2=-\xi \qquad \lambda_3=0$$

$$\vec{v}_1=\begin{bmatrix}-\beta(\xi-\beta\bar{Z})\\ \beta\xi+\beta(\alpha-\beta)\bar{Z}\\ -\beta\alpha\bar{Z}\end{bmatrix} \quad \vec{v}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix} \quad \vec{v}_3=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

Aufgabe 3.3 – Fehlerfinden

1. Bei der Bereichnung der Eigenwerte von Jacobi Matrix im Kapitel 5.(A Model with Treatment). Der erste Schritt wird so verfassen:

$$det(J(\bar{S},\bar{I},\bar{Z},\bar{R})-\lambda I)=det\begin{bmatrix}\beta\bar{Z} & 0 & 0 & 0\\ \beta\bar{Z} & -\rho & c & 0\\ -\alpha\bar{Z} & \rho & -\frac{\alpha c}{\beta}-c & \xi\\ \alpha\bar{Z} & 0 & \frac{-\alpha c}{\beta} & -\xi\end{bmatrix}$$

Es sollte wie so sein:

$$det(J(\bar{S},\bar{I},\bar{Z},\bar{R})-\lambda I)=det\begin{bmatrix}-\beta\bar{Z}-\lambda I & 0 & -\beta\bar{S}+c & 0\\ \beta\bar{Z} & -\rho-\lambda & \beta\bar{S} & 0\\ -\alpha\bar{Z} & \rho & -\alpha\bar{S}-c-\lambda I & \xi\\ \alpha\bar{Z} & 0 & \alpha\bar{S} & -\xi-\lambda I\end{bmatrix}$$

$$=det\begin{bmatrix}-\beta\bar{Z}-\lambda & 0 & 0 & 0\\ \beta\bar{Z} & -\rho-\lambda & \beta\bar{S}+\frac{\beta\bar{Z}(-\beta\bar{S}+c)}{\beta\bar{Z}+\lambda} & 0\\ -\alpha\bar{Z} & \rho & -\alpha\bar{S}-c-\lambda+\frac{-\alpha\bar{Z}(-\beta\bar{S}+c)}{\beta\bar{Z}+\lambda} & \xi\\ \alpha\bar{Z} & 0 & \alpha\bar{S}+\frac{\alpha\bar{Z}(-\beta\bar{S}+c)}{\beta\bar{Z}+\lambda} & -\xi-\lambda\end{bmatrix}$$

2. Der nechste Schritt danach wird so geschriben:

$$=-(\beta\bar{Z}-\lambda)det\begin{bmatrix}-\rho & c & 0\\ \rho & -\frac{\alpha c}{\beta}-c & \xi\\ 0 & \frac{-\alpha c}{\beta} & -\xi\end{bmatrix}$$

Es sollte wie so sein:

$$=(-\beta\bar{Z}-\lambda)det\begin{bmatrix}-\rho-\lambda & \beta\bar{S}-\frac{\beta\bar{Z}(-\beta\bar{S}+c)}{\beta\bar{Z}-\lambda} & 0\\ \rho & -c-\lambda & -\lambda\\ 0 & \alpha\bar{S}-\frac{\alpha\bar{Z}(-\beta\bar{S}+c)}{\beta\bar{Z}-\lambda} & -\xi-\lambda\end{bmatrix}$$

Aufgabe 3.4 – Unklarheiten

1. Die Nutzung von Eigenwerten bin ich noch nicht klar. Wie ich in der Aufgabe3.2.(b) geschrieben habe, kann ein Eigenwert nur die Eigenschaft eines dynamischen Systems neben dessem Fixpunkt bezeichnen. Warum im paper kann ein Eigenwert

die Stabilität alle Equilibria bezeichnen?

2. Es ist nicht sicher, welche Einheit hat der Verfasser bei Iteration für Zeit genutzt, weil im Paper das Equilibrium so schnell stabil werden kann.

3. Im Paper wird geschreiben, dass die Sterbenrate und Geburtsrate ausgelassen werden können. Aber bei der Implementierung finde ich, dass es unmöglich ist, Π bzw. δ beide 0 zu setzen. Weil es keine Zombies auftreten können, wenn keines sterbt.

Bonusaufgabe 3.1

Phasenraumdiagramm sehen bonusaufgabe3.1.py

Bei der Lösung der Lotka-Volterra Gleichungen habe ich etwas interesants gefunden:

1. In Lotka-Volterra Gleichungen o.d. dynamischen System braucht es keine Sterbenrate oder Geburtsrate. Bei Gegeben der Phase V könnte die Anzahl des 'Prey' und 'Predator' festgestellt werden.
2. In Lotka-Volterra Gleichungen kommt die Spitze von 'Predator' bisschen später als die von 'Prey'.
3. Wenn ein Fixpunkt ins Jacobi Matrix angewendet wird, können einige Eigenwerte (λ) ausgelöst werden. Die können die Eigenschaft neben dem Fixpunt vom dynamischen Systems äußern:
   a) Gilt $|\lambda|>1$ für das größte λ , ist das System divergent;
   b) Gilt $0<|\lambda|\leqslant 1$ für das größte λ , ist das System konvergent;
   c) Gilt $|\lambda|=0$ für alle λ , bleibt das System still.
   d) Gilt $\lambda>0$ für eine Teil von λ , währrend $\lambda<0$ für andere Teil(muss nicht für alle übrigens) gilt, ist diser Fixpunkt sogenannte saddle point und nicht stabil.
   e) Gibt es zwei λ , die komplexe Konjugationen sind, halt das System periodisches Verhalten.
4. Bei der Simulation kommt solche Situation vor, dass die Propotion von Prey oder Predator sehr niedrig sein kann. Deswegen muss die absolute Anzahl beides in der wirklichen Welt sehr groß sein.

Aufgabe 3.5 – Konditionsbeispiele

(a)Die zwei Geraden sind:

$$y_1 = x\tan(\alpha_1) + o1$$
$$y_2 = x\tan(\alpha_2) + o2$$

Deshalb die Schnittpunkt $s=(s_x, s_y)$ ist:

$$s=\left(\frac{o_2-o_1}{\tan(\alpha_1)-\tan(\alpha_2)}, \frac{\tan(\alpha_1)o_2-\tan(\alpha_2)o_1}{\tan(\alpha_1)-\tan(\alpha_2)}\right)$$

Sei J:

$$J=\begin{bmatrix}\frac{\partial s_x}{\partial o_1} & \frac{\partial s_x}{\partial o_2}\\ \frac{\partial s_y}{\partial o_1} & \frac{\partial s_y}{\partial o_2}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{-1}{\tan(\alpha_1)-\tan(\alpha_2)} & \frac{1}{\tan(\alpha_1)-\tan(\alpha_2)}\\ \frac{-\tan(\alpha_2)}{\tan(\alpha_1)-\tan(\alpha_2)} & \frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_1)-\tan(\alpha_2)}\end{bmatrix}$$

$$\|J\|=\sqrt{\frac{2+\tan^2(\alpha_1)+\tan^2(\alpha_2)}{(\tan(\alpha_1)-\tan(\alpha_2))^2}}$$

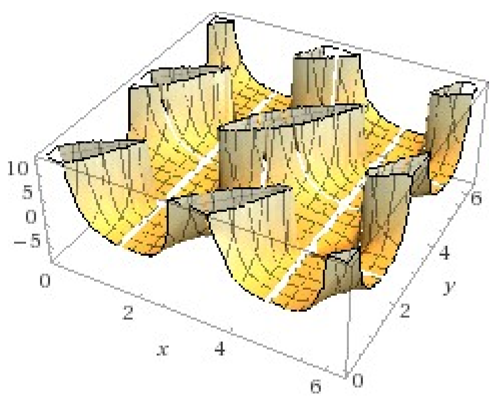
$$J^{-1}=-\begin{bmatrix}\frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_1)-\tan(\alpha_2)} & \frac{-1}{\tan(\alpha_1)-\tan(\alpha_2)}\\ \frac{\tan(\alpha_2)}{\tan(\alpha_1)-\tan(\alpha_2)} & \frac{-1}{\tan(\alpha_1)-\tan(\alpha_2)}\end{bmatrix}$$

$$\|J^{-1}\|=\sqrt{\frac{2+\tan^2(\alpha_1)+\tan^2(\alpha_2)}{(\tan(\alpha_1)-\tan(\alpha_2))^2}}$$

Dann ist die Kondition *K:*

$$K(J)=\|J\|_2\cdot\|J_{-1}\|_2=\frac{2+\tan^2(\alpha_1)+\tan^2(\alpha_2)}{(\tan(\alpha_1)-\tan(\alpha_2))^2}$$

Der Wert von *K hängt von* α_1 *und* α_2 *ab:*



Wie auf der vorliegenden Grafik gezeigt wird (darauf wird α_1 und α_2 von x und y vertreten), können wir feststellen, dass falls α_1 und α_2 sehr nahe sind, ist *K* sehr hoch und das System 'schlecht'. Aber wenn α_1 bzw. α_2 fast $\frac{\pi}{2}$ sind, sind $|o_1|$, $|o_2|$ bzw. Schnittpunkt $S(s_x,s_y)$ auch sehr hoch. Dann kann man schwer zu entscheiden, ob das System 'gut' oder 'schlecht' ist.

(b) Beispiele mit

guter Kondition: Ein Federpendel mit Dämpfung von Luft. Wenn sich Der Winkel der Pendelarm bisschen verändert, verändert das System nicht zu viel und außerdem zum schluß ist das System konvergent.

schlechter Kondition: Three-Body-Problem im Astronomie. Wenn die Startzustand der drei Sterne bisschen ändert, siet das System ganz anders aus.