Integración numérica

Alfredo Villagrán Olguín

Junio, 2020

Regla de Simpson $\frac{1}{3}$

Una mejora significativa a la regla del trapecio es utilizar una mayor cantidad de segmentaciones. Sin embargo, otra manera de obtener una mejor estimación es utilizar un polinomio de mayor grado que una los límites de la integral. Por ejemplo, si se tuviera otro punto entre $f(a)$ y $f(b)$, podrían unirse los tres puntos con una parábola, como se muestra en la Figura 1.

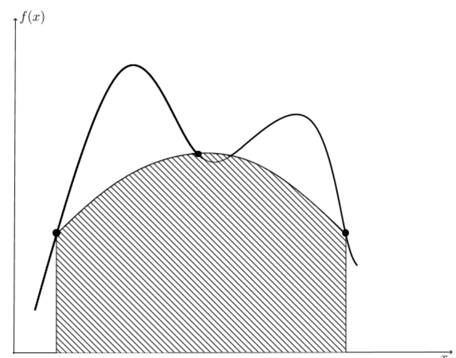

Figura 1

La regla de interpolación de Simpson $\frac{1}{3}$ es el resultado de sustituir un polinomio de segundo grado en la ecuación

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f_2(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_2} f_2(x)dx$$

Si $f_2(x)$ es representada con un polinomio de Lagrange de segundo grado, la integral anterior sería

$$I = \int_{x_o}^{x_2} \left[\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2) \right] dx$$

Tras resolver la integral,[1] se llega a la siguiente solución

$$\boldsymbol{I \approx \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2))}$$

donde $h = \frac{b-a}{2}$. Note como la división entre 3 es lo que da nombre a la regla.

[1] Se deja como ejercicio personal.

Regla de Simpson $\frac{1}{3}$ de aplicación múltiple

Como puede observarse de la misma Figura 1, existe un error significativo. Una de las maneras en que la regla de Simpson $\frac{1}{3}$ mejora su precisión consiste en dividir el intervalo de integración de a a b en una mayor cantidad de subsegmentos de la misma magnitud, $h = \frac{b-a}{n}$. Dado que cada segmento requiere tres puntos, la integral se calcularía

$$I = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx$$

aplicando Simpson$\frac{1}{3}$ a cada término

$$\begin{aligned} I \approx & h\frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{3} \\ & + h\frac{f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)}{3} \\ & \vdots \\ & + h\frac{f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_{n-2})}{3} \end{aligned}$$

lo que puede reducirse a[2]

$$\boldsymbol{I \approx \frac{(b-a)}{3n}} \left[f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n) \right]$$

Regla de Simpson $\frac{3}{8}$

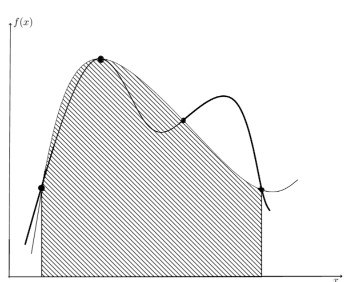

Figura 2

Si se ajusta un polinomio de Lagrange de tercer grado a cuatro puntos, como se muestra en la Figura 2, es posible obtener una integración numérica aproximada de la siguiente manera:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f_3(x)dx$$

con

$$h = \frac{b-a}{3}$$

dando como resultado

$$\boldsymbol{I \approx \frac{3h}{8}[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]}$$

[2]Observe que el método sólo funciona para un numero par de segmentos

Ejemplos numéricos

Regla de Simpson $\frac{1}{3}$

Para $f(x) = (5x^4 - 8x^3 + 6)$, utilice la regla de Simpson $\frac{1}{3}$ para calcular la siguiente integral definida:

$$\int_{-1}^{4} f(x)dx$$

La integral definida calculada analíticamente[3] es 545. Al final, calcule el error en el cálculo con un sólo segemento, con la fórmula:

$$\epsilon \left| \frac{Valor_{real} - Valor_{aproximado}}{Valor_{real}} \right| \%$$

Solución

Recordando que la regla de Simpson $\frac{1}{3}$ es

$$I \approx \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2))$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{h} &= (b-a)/2 = \mathbf{2.5} \\
\boldsymbol{x_0} &= a = \mathbf{-1} \\
\boldsymbol{x_1} &= (x_0 + h) = \mathbf{1.5} \\
\boldsymbol{x_2} &= (x_1 + h) = b = \mathbf{4} \\
\int_a^b f(x)dx &\approx \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) \\
&\approx \frac{2.5}{3}(f(-1) + 4f(1.5) + f(4)) \\
&\approx 0.83333(19 + 4(4.3125) + 774) \\
&\approx 0.83333(810.25) \\
&\boldsymbol{\approx 675.21}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el error es

$$\epsilon = \left| \frac{545 - 675.21}{545} \right| \% = 23.891\%$$

[3] Se queda como ejercicio aparte.

Regla de Simpson $\frac{1}{3}$ de aplicación múltiple

Calcule la integral definida

$$\int_{-1}^{4} (5x^4 - 8x^3 + 6)dx$$

utilizando la regla de Simpson $\frac{1}{3}$ para 2, 4 y 10 segmentos. Genere una tabla donde se muestren los valores de la cantidad de segmentos utilizados (n), el valor del ancho (h) en cada cálculo, el valor resultante (I) y el valor del error para cada cálculo (ϵ).

Solución

Recordando que la regla de Simpson $\frac{1}{3}$ de aplicación multiple es

$$\boldsymbol{I \approx \frac{(b-a)}{3n}} \left[f(x_0) + 4 \sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n) \right]$$

donde

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Para 2 segmentos

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{n} &= 2 \\
\boldsymbol{a} &= -1 \\
\boldsymbol{b} &= 4 \\
\boldsymbol{h} &= \frac{4-(-1)}{2} = \mathbf{2.5} \\
\boldsymbol{x_0} &= a = \mathbf{-1},\ \boldsymbol{f(x_0)} = \mathbf{19} \\
\boldsymbol{x_1} &= x_0 + h = (-1 + 2.5) = \mathbf{1.5},\ \boldsymbol{f(x_1)} = \mathbf{4.3125} \\
\boldsymbol{x_2} &= x_1 + h = (1.5 + 2.5) = b = \mathbf{4},\ \boldsymbol{f(x_2)} = \mathbf{774}
\end{aligned}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n} \left[f(x_0) + 4 \sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n) \right]$$

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &\approx \frac{b-a}{3n} \left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2) \right] \\
&\approx \frac{5}{6} \left[19 + 4(4.3125) + 774 \right] \\
&\approx 0.8333 \left[19 + 17.25 + 774 \right] \\
&\approx 0.8333 \left[810.25 \right] \\
&\boldsymbol{\approx} \mathbf{675.2083}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el error es

$$\epsilon = \left| \frac{545 - 675.2083}{545} \right| \% = 23.891\%$$

Para 4 segmentos

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{n} &= 4 \\
\boldsymbol{a} &= -1 \\
\boldsymbol{b} &= 4 \\
\boldsymbol{h} &= \frac{4-(-1)}{4} = \mathbf{1.25} \\
\boldsymbol{x_0} &= a = \mathbf{-1},\ \boldsymbol{f(x_0)} = \mathbf{19} \\
\boldsymbol{x_1} &= x_0 + h = \mathbf{0.25000},\ \boldsymbol{f(x_1)} = \mathbf{5.8945} \\
\boldsymbol{x_2} &= x_1 + h = \mathbf{1.5},\ \boldsymbol{f(x_2)} = \mathbf{4.3125} \\
\boldsymbol{x_3} &= x_2 + h = \mathbf{2.75},\ \boldsymbol{f(x_3)} = \mathbf{125.58} \\
\boldsymbol{x_4} &= x_4 + h = b = \mathbf{4},\ \boldsymbol{f(x_4)} = \mathbf{774}
\end{aligned}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n}\left[f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)\right]$$

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &\approx \frac{b-a}{3n}\left[f(x_0) + 4(f(x_1) + f(x_3)) + 2f(x_2) + f(x_4)\right] \\
&\approx \frac{5}{3(4)}\left[19 + 4(5.8945 + 125.58) + 2(4.3125) + 774\right] \\
&\approx \frac{5}{12}\left[19 + 4(131.4745) + 8.625 + 774\right] \\
&\approx 0.41667\left[19 + 525.898 + 8.625 + 774\right] \\
&\approx 0.41667\left[1327.523\right] \\
&\boldsymbol{\approx} \mathbf{553.14}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el error es

$$\epsilon = \left| \frac{545 - 553.14}{545} \right| \% = 1.4932\%$$

Para 10 segmentos

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{n} &= 10\\
\boldsymbol{a} &= -1\\
\boldsymbol{b} &= 4\\
\boldsymbol{h} &= \frac{4-(-1)}{10} = \mathbf{0.5}\\
\boldsymbol{x_0} &= a = \mathbf{-1},\ \boldsymbol{f(x_0)} = \mathbf{19}\\
\boldsymbol{x_1} &= x_0 + h = \mathbf{-0.5},\ \boldsymbol{f(x_1)} = \mathbf{7.3125}\\
\boldsymbol{x_2} &= x_1 + h = \mathbf{0},\ \boldsymbol{f(x_2)} = \mathbf{6}\\
\boldsymbol{x_3} &= x_2 + h = \mathbf{0.5},\ \boldsymbol{f(x_3)} = \mathbf{5.3125}\\
\boldsymbol{x_4} &= x_3 + h = \mathbf{1},\ \boldsymbol{f(x_4)} = \mathbf{3}\\
\boldsymbol{x_5} &= x_4 + h = \mathbf{1.5},\ \boldsymbol{f(x_5)} = \mathbf{4.3125}\\
\boldsymbol{x_6} &= x_5 + h = \mathbf{2},\ \boldsymbol{f(x_6)} = \mathbf{22}\\
\boldsymbol{x_7} &= x_6 + h = \mathbf{2.5},\ \boldsymbol{f(x_7)} = \mathbf{76.312}\\
\boldsymbol{x_8} &= x_7 + h = \mathbf{3},\ \boldsymbol{f(x_8)} = \mathbf{195}\\
\boldsymbol{x_9} &= x_8 + h = \mathbf{3.5},\ \boldsymbol{f(x_9)} = \mathbf{413.31}\\
\boldsymbol{x_{10}} &= x_9 + h = \mathbf{4},\ \boldsymbol{f(x_{10})} = \mathbf{774}
\end{aligned}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n}\left[f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)\right]$$

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n}&\\
&[f(x_0) + 4(f(x_1) + f(x_3) + f(x_5) + f(x_7) + f(x_9))\\
&+ 2(f(x_2) + f(x_4) + f(x_6) + f(x_8)) + f(x_2)]\\
&\approx \frac{4-(-1)}{3(10)}[19 + 4(7.3125 + 5.3125 + 4.3125 + 76.312 + 413.31)\\
&+ 2(6 + 3 + 22 + 195) + 774]\\
&\approx \frac{5}{30}\,[19 + 4(506.56) + 2(226) + 774]\\
&\approx 0.16667\,[19 + 2026.2 + 452 + 774]\\
&\approx 0.16667\,[3271.2]\\
&\boldsymbol{\approx} \mathbf{545.21}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el error es

$$\epsilon = \left|\frac{545 - 545.21}{545}\right|\% = 0.038226\%$$

Regla de Simpson $\frac{3}{8}$

Para $f(x) = (5x^4 - 8x^3 + 6)$, utilice la regla de Simpson $\frac{3}{8}$ para calcular la siguiente integral definida:

$$\int_{-1}^{4} f(x)dx$$

Solución

Recordando que la regla de Simpson $\frac{3}{8}$ es

$$\boldsymbol{I \approx \frac{3h}{8}[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{h} =&(b-a)/3 = \mathbf{1.6667} \\
\boldsymbol{x_0} =&a = \mathbf{-1},\ \boldsymbol{f(x_0)} = \mathbf{19} \\
\boldsymbol{x_1} =&(x_0 + h) = \mathbf{0.66667},\ \boldsymbol{f(x_1)} = \mathbf{4.6173} \\
\boldsymbol{x_2} =&(x_1 + h) = \mathbf{2.3333},\ \boldsymbol{f(x_2)} = \mathbf{52.580} \\
\boldsymbol{x_3} =&(x_2 + h) = b = \mathbf{4},\ \boldsymbol{f(x_3)} = \mathbf{774}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &\approx \frac{3h}{8}[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)] \\
&\approx \frac{3(1.6667)}{8}[19 + 3(4.6173) + 3(52.58) + 774] \\
&\approx 0.625[19 + 13.852 + 157.74 + 774] \\
&\approx 0.625[964.59] \\
&\boldsymbol{\approx} \mathbf{602.87}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el error es

$$\epsilon = \left|\frac{545 - 602.87}{545}\right| \% = 10.618\%$$

Regla de Simpson $\frac{1}{3}$ en conjunción con Regla de Simpson $\frac{3}{8}$

Para $f(x) = (5x^4 - 8x^3 + 6)$, calcule la siguiente integral definida con 5 segmentos, los primeros dos con la regla de Simpson $\frac{1}{3}$ y los últimos con la regla de $\frac{3}{8}$:

$$\int_{-1}^{4} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{4} f(x)dx$$

Solución

Recordando que la regla de Simpson $\frac{1}{3}$ es

$$I \approx \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2))$$

Recordando que la regla de Simpson $\frac{3}{8}$ es[4]

$$I \approx \frac{3h}{8}(f(x_2) + 3f(x_3) + 3f(x_4) + f(x_5))$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{h} &= (b-a)/5 = \mathbf{1} \\
\boldsymbol{x_0} &= a = \mathbf{-1},\ \boldsymbol{f(x_0)} = \mathbf{19} \\
\boldsymbol{x_1} &= x_0 + h = \mathbf{0},\ \boldsymbol{f(x_1)} = \mathbf{6} \\
\boldsymbol{x_2} &= x_1 + h = \mathbf{1},\ \boldsymbol{f(x_2)} = \mathbf{3} \\
\boldsymbol{x_3} &= x_2 + h = \mathbf{2},\ \boldsymbol{f(x_3)} = \mathbf{22} \\
\boldsymbol{x_4} &= x_3 + h = \mathbf{3},\ \boldsymbol{f(x_4)} = \mathbf{195} \\
\boldsymbol{x_5} &= x_4 + h = b = \mathbf{4},\ \boldsymbol{f(x_5)} = \mathbf{774}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{4} f(x)dx &\approx \left[\frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2))\right] + \left[\frac{3h}{8}(f(x_2) + 3f(x_3) + 3f(x_4) + f(x_5))\right] \\
&\approx \left[\frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2))\right] + \left[\frac{3h}{8}(f(x_2) + 3f(x_3) + 3f(x_4) + f(x_5))\right] \\
&\approx \left[\frac{1}{3}(f(-1) + 4f(0) + f(1))\right] + \left[\frac{3}{8}(f(1) + 3f(2) + 3f(3) + f(4))\right] \\
&\approx \left[\frac{1}{3}(19 + 4(6) + 3)\right] + \left[\frac{3}{8}(3 + 3(22) + 3(195) + 774)\right] \\
&\approx \left[\frac{1}{3}(65)\right] + \left[\frac{3}{8}(1428)\right] \\
&\approx 21.667 + 535.5 \\
&\boldsymbol{\approx 557.17}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el error es

$$\epsilon = \left|\frac{545 - 557.17}{545}\right| \% = 2.23248\%$$

[4] Ya con la nomenclatura para los últimos tres segmentos, de los 5.

Conclusión

Como puede observarse en la siguiente tabla, entre mayor cantidad de segmentos se utilicen, menor será el error del cálculo por *la regla de Simpson* $\frac{1}{3}$ *de aplicación múltiple*.

n	h	I	ϵ
2	2.5	675.2083	23.891%
4	1	553.14	1.4932%
10	0.5	545.21	0.038226%

Como puede observarse en la siguiente tabla, el uso en conjunción de *la regla de Simpson* $\frac{3}{8}$ con *la regla de Simpson* $\frac{1}{3}$ reduce el error del cálculo.

Regla de Simpson $\frac{3}{8}$	n	h	I	ϵ
Sola	3	2.5	602.87	10.618%
Conjunción	5	1	557.17	2.2324%