Polinomios de Interpolación de Newton

Alfredo Villagrán Olguín

Junio, 2020

Introducción

Dada una secuencia de $n+1$ puntos, se busca calcular un polinomio de grado n que interpole una función f en estos puntos.

Sean estos $n+1$ puntos (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n), los puntos definidos por $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ son llamados *puntos de interpolación.* Y los puntos definidos por $(y_i)_{0\leq i\leq n}$ son llamados *valores de interpolación.* Para interpolar una función f, los valores de interpolación están definidos de la manera siguiente:

$$y_i = f(x_i), \forall i = 0, ..., n$$

Bases de los polinomios de Newton

Las bases de los polinomios de Newton, e_k, están definidos por:

$$\boldsymbol{e_k(x) = \prod_{i=0}^{k-1}(x - x_i)} = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n), k = 1, ..., n.$$

con la siguiente convención:

$$e_0 = 1$$

Así pues,

$$\begin{array}{lcl} e_1 & = & (x - x_0) \\ e_2 & = & (x - x_0)(x - x_1) \\ e_3 & = & (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\ \vdots & & \vdots \\ e_n & = & (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_{n-1}) \end{array}$$

De esta manera, el polinomio de interpolación de Newton de grado n, en relación con $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)\}$ es:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P_n(x_i) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k e_k(x)} & \\ &= \alpha_0 + \alpha_1(x - x_0) + \alpha_2(x - x_0)(x - x_1) \\ &= +... + \alpha_n(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

donde
$P_n(x_i) = f(x_i), \forall i = 0, ..., n.$

Diferencias divididas

El polinomio de interpolación de Newton de grado n, $P_n(x)$, evaluado en x_0, resulta de:

$$P_n(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k e_k(x_0) = \alpha_0 = f(x_0) = f[x_0]$$

De manera general, se escribe:

$$f[x_i] = f(x_i), \forall i = 0, ..., n$$

en donde, $f[x_0]$ es llamada una *diferencia dividida* de orden cero.

El polinomio de interpolación de Newton de orden n, $P_n(x)$, evaluado en x_1, resulta de:

$$\begin{aligned} P_n(x_1) &= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k e_k(x_1) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1(x_1 - x_0) \\ &= f[x_0] + \alpha_1(x_1 - x_0) \\ &= f[x_1] \end{aligned}$$

de lo anterior

$$\alpha_1 = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1]$$

$f[x_0, x_1]$ es llamada una *diferencia dividida* de $1er$ orden.

El polinomio de interpolación de Newton de orden n, $P_n(x)$, evaluado en x_2, resulta de:

$$\begin{aligned} P_n(x_2) &= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k e_k(x_2) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1(x_2 - x_0) + \alpha_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \\ &= \alpha_0 + f[x_0, x_1](x_2 - x_0) + \alpha_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \\ &= f[x_2] \end{aligned}$$

de lo anterior

$$
\begin{aligned}
\alpha_2(x_2-x_0)(x_2-x_1) &= f[x_2]-f[x_0]-f[x_0,x_1](x_2-x_0)\\
\alpha_2 &= \frac{f[x_2]-f[x_0]-f[x_0,x_1](x_2-x_0)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\\
\alpha_2 &= \frac{f[x_2]-f[x_0]}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}-\frac{f[x_0,x_1]}{x_2-x_1}\\
\alpha_2 &= \frac{f[x_0,x_2]}{x_2-x_1}-\frac{f[x_0,x_1]}{x_2-x_1}\\
\alpha_2 &= \frac{f[x_0,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_1}
\end{aligned}
$$

La siguiente forma tiene mayor preferencia:

$$
\begin{aligned}
\alpha_2(x_2-x_0)(x_2-x_1) &= f[x_2]-f[x_0]-f[x_0,x_1](x_2-x_0)\\
\alpha_2(x_2-x_0)(x_2-x_1) &= f[x_2]-f[x_0]-f[x_0,x_1](x_2-x_0)-f[x_1]+f[x_1]\\
\alpha_2(x_2-x_0)(x_2-x_1) &= f[x_2]-f[x_1]+f[x_1]-f[x_0]-f[x_0,x_1](x_2-x_0)\\
\alpha_2(x_2-x_0)(x_2-x_1) &= f[x_2]-f[x_1]+(x_1-x_0)f[x_0,x_1]-f[x_0,x_1](x_2-x_0)\\
\alpha_2(x_2-x_0)(x_2-x_1) &= f[x_2]-f[x_1]+(x_1-x_2)f[x_0,x_1]\\
\alpha_2(x_2-x_0) &= \frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}-f[x_0,x_1]\\
\alpha_2(x_2-x_0) &= f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]
\end{aligned}
$$

de lo anterior

$$\alpha_2 = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0} = f[x_0,x_1,x_2]$$

$f[x_0.x_1,x_2]$ es llamada una *diferencia dividida* de $2do$ orden.

Método

De lo anterior, generalizando, se obtiene:

$$\boldsymbol{\alpha_k} = \boldsymbol{\frac{f[x_1,...,x_k]-f[x_0,...,x_{k-1}]}{x_k-x_0}} = \boldsymbol{f[x_0,...,x_k]}$$

$f[x_0,...,x_k]$ es llamada la diferencia dividida de k_{esimo} orden. Por lo tanto, el polinomio de interpolación de Newton de grado n se obtiene a través de la sucesión de diferencias divididas:

$$\boldsymbol{P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0,...,x_k]e_k(x)}$$

Así pues, por ejemplo, si se deseara calcular el polinomio de interpolación de Newton de grado 3, $f[x_0, x_1, x_2, x_3]$, se necesitarían las siguientes cantidades:

$$\begin{bmatrix} x_0 & f[x_0] & & & \\ x_1 & f[x_1] & f[x_0, x_1] & & \\ x_2 & f[x_2] & f[x_1, x_2] & f[x_0, x_1, x_2] & \\ x_3 & f[x_3] & f[x_2, x_3] & f[x_1, x_2, x_3] & f[x_0, x_1, x_2, x_3] \end{bmatrix}$$

para poder calcular

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}$$

Ejemplos numéricos

Considerando que

$$\boldsymbol{P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, ..., x_k] e_k(x)}$$

y

$$\boldsymbol{e_k(x)} = \boldsymbol{\prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i)} = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n), k = 1, ..., n.$$

I. Considerando los datos de la siguiente tabla

i	x	$f(x)$
0	0	1
1	2	5

ajuste un polinomio de interpolación de Newton de grado 1, y evalúe en $x = 1$

Solución

El polinomio de interpolación de Newton de grado 1 se calcula

$$\begin{aligned} P_1(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) \\ &= 1 + f[x_0, x_1](x - 0) \\ &= 1 + f[x_0, x_1]x \end{aligned}$$

Las diferencias divididas se calculan

$$\begin{bmatrix} x_0 = 0 & f[x_0] = 1 & \\ x_1 = 2 & f[x_1] = 5 & f[x_0, x_1] = \frac{5-1}{2-0} = 2 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto,

$$\boldsymbol{P_1(x) = 1 + 2x}$$

Al evaluar $x = 1$, en $P_1(x)$ se interpola el valor:

$$\boldsymbol{P_1(1)} = 1 + 2(1) = \mathbf{3}$$

II. Considerando los datos de la siguiente tabla

i	x	$f(x)$
0	0	1
1	2	5
2	4	17

ajuste un polinomio de interpolación de Newton de grado 2, y evalúe en $x = 1$ y en $x = 3$

Solución

El polinomio de interpolación de Newton de grado 2 se calcula

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ &= 1 + f[x_0, x_1](x - 0) + f[x_0, x_1, x_2](x - 0)(x - 2) \\ &= 1 + f[x_0, x_1]x + f[x_0, x_1, x_2]x(x - 2) \end{aligned}$$

Las diferencias divididas se calculan

$$\begin{bmatrix} x_0 = 0 & f[x_0] = 1 & & \\ x_1 = 2 & f[x_1] = 5 & f[x_0, x_1] = \frac{5-1}{2-0} = 2 & \\ x_2 = 4 & f[x_2] = 17 & f[x_1, x_2] = \frac{17-5}{4-2} = 6 & f[x_0, x_1, x_2] = \frac{6-2}{4-0} = 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P_2(x)} &= f[x_0] + f[x_0, x_1]x + f[x_0, x_1, x_2]x(x - 2) \\ &= 1 + 2x + x(x - 2) \\ &= 1 + 2x + x^2 - 2x \\ &= \boldsymbol{1 + x^2} \end{aligned}$$

Al evaluar $x = 1$, en $P_2(x)$ se interpola el valor:

$$\boldsymbol{P_2(1)} = 1 + 1^2 = \boldsymbol{2}$$

Al evaluar $x = 3$, en $P_2(x)$ se interpola el valor:

$$\boldsymbol{P_2(3)} = 1 + 3^2 = \boldsymbol{10}$$

III. Considerando los datos de la siguiente tabla

i	x	$f(x)$
0	1	0.0000000
1	4	1.3862944

ajuste un polinomio de interpolación de Newton de grado 1, y evalúe en $x = 2$

Solución

El polinomio de interpolación de Newton de grado 1 se calcula

$$\begin{aligned} P_1(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) \\ &= 0 + f[x_0, x_1](x - 1) \\ &= f[x_0, x_1](x - 1) \end{aligned}$$

Las diferencias divididas se calculan

$$\begin{bmatrix} x_0 = 1 & f[x_0] = 0.0000000 & \\ x_1 = 4 & f[x_1] = 1.3862944 & f[x_0, x_1] = \frac{1.3862944-0}{4-1} = 0.4620981 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto,

$$\boldsymbol{P_1(x) = 0.4620981(x - 1)}$$

Al evaluar $x = 2$, en $P_1(x)$ se interpola el valor:

$$\boldsymbol{P_1(2)} = 0.46209813(2 - 1) = \mathbf{0.4620981}$$

IV. Considerando los datos de la siguiente tabla

i	x	$f(x)$
0	1.0	0.0000000
1	4.0	1.3862944
2	6.0	1.7917595

ajuste un polinomio de interpolación de Newton de grado 2, y evalúe en $x = 2$ y en $x = 5$

Solución

El polinomio de interpolación de Newton de grado 2 se calcula

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ &= 0 + f[x_0, x_1](x - 1) + f[x_0, x_1, x_2](x - 1)(x - 4) \\ &= f[x_0, x_1](x - 1) + f[x_0, x_1, x_2](x^2 - 4x - x + 4) \\ &= f[x_0, x_1](x - 1) + f[x_0, x_1, x_2](x^2 - 5x + 4) \end{aligned}$$

Las diferencias divididas se calculan

$$\begin{bmatrix} x_0 & f[x_0] & & \\ x_1 & f[x_1] & f[x_0, x_1] & \\ x_2 & f[x_2] & f[x_1, x_2] & f[x_0, x_1, x_2] \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.0000000 & & \\ 4 & 1.3862944 & \frac{1.3862944-0.0000000}{4-1} = 0.4620981 & \\ 6 & 1.7917595 & \frac{1.7917595-1.3862944}{6-4} = 0.2027325 & \frac{0.2027325-0.4620981}{6-1} = -0.05187312 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P_2(x)} &= f[x_0,x_1](x-1)+f[x_0,x_1,x_2](x^2-5x+4)\\
&= 0.4620981(x-1)+(-0.05187312)(x^2-5x+4)\\
&= 0.4620981x-0.4620981-0.05187312x^2+0.2593656x-0.20749248\\
&= \boldsymbol{-0.05187312x^2+0.7214637x-0.66959058}
\end{aligned}$$

Al evaluar $x=2$, en $P_2(x)$ se interpola el valor:

$$\boldsymbol{P_2(2)} = -0.05187312(2)^2+0.7214637(2)-0.66959058=\mathbf{0.56584434}$$

Al evaluar $x=5$, en $P_2(x)$ se interpola el valor:

$$\boldsymbol{P_2(5)} = -0.05187312(5)^2+0.7214637(5)-0.66959058=\mathbf{1.64089992}$$

V. Considerando los datos de la siguiente tabla

i	x	$f(x)$
0	-2	1
1	0	5
2	2	1

ajuste un polinomio de interpolación de Newton de grado 2, y evalúe en $x=-1$ y $x=1$

Solución

El polinomio de interpolación de Newton de grado 2 se calcula

$$\begin{aligned}
P_2(x) &= f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)\\
&= 1+f[x_0,x_1](x-(-2))+f[x_0,x_1,x_2](x-(-2))(x-0)\\
&= 1+f[x_0,x_1](x+2)+f[x_0,x_1,x_2](x+2)x\\
&= 1+f[x_0,x_1](x+2)+f[x_0,x_1,x_2](x^2+2x)
\end{aligned}$$

Las diferencias divididas se calculan

$$\begin{bmatrix}
x_0=-2 & f[x_0]=1 & & \\
x_1=0 & f[x_1]=5 & f[x_0,x_1]=\frac{5-1}{0-(-2)}=2 & \\
x_2=2 & f[x_2]=1 & f[x_1,x_2]=\frac{1-5}{2-0}=-2 & f[x_0,x_1,x_2]=\frac{-2-2}{2-(-2)}=-1
\end{bmatrix}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P_2(x)} &= 1+f[x_0,x_1](x+2)+f[x_0,x_1,x_2](x^2+2x)\\
&= 1+2(x+2)+(-1)(x^2+2x)\\
&= 1+2x+4-x^2-2x\\
&= \boldsymbol{5-x^2}
\end{aligned}$$

Al evaluar $x = -1$, en $P_2(x)$ se interpola el valor:

$$\boldsymbol{P_2(-1)} = 5 - (-1)^2 = \mathbf{4}$$

Al evaluar $x = 1$, en $P_2(x)$ se interpola el valor:

$$\boldsymbol{P_2(1)} = 5 - (1)^2 = \mathbf{4}$$