Integración numérica

Alfredo Villagrán Olguín

Junio, 2020

En ciencia e ingeniería se presenta constantemente la necesidad de integrar funciones difíciles o imposibles de integrar analíticamente. Para esto se emplean los métodos numéricos de integración. Los métodos más comunes son los basados en las fórmulas de integración de Newton-Cotes que utilizan la estrategia de de reemplazar una función por un polinomio aproximado que sea fácil de integrar. Es decir:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f_n(x)$$

donde $f_n(x)$ es un polinomio de la forma

$$f_n(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-a}x^{n-1} + a_nx^n$$

Regla del trapecio

La regla del trapecio es uno de los métodos basados en las fórmulas de Newton-Cotes que son fáciles de comprender e implementar.

El primer polinomio aproximado es de primer grado, una recta:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f_1(x)dx$$

Representar la recta que pasa por a y b, en la Figura 1, consistiría en el siguiente polinomio de primer grado

$$f_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

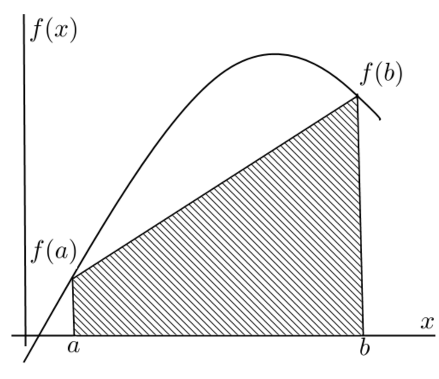


Figura 1

Por lo tanto, calcular la integral definida[1] entre a y b del polinomio anterior

$$I = \int_a^b \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right] dx$$

[1]Queda como ejercicio personal calcularla analíticamente.

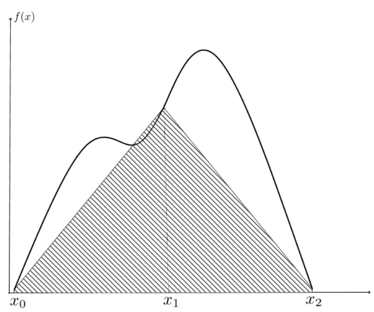
Resulta

$$I = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

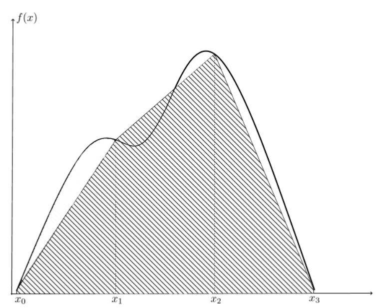
que es exactamente lo mismo que calcular el área del trapecio sombreado, cuyo ancho está sobre el eje de las x y su altura es el promedio de $f(a)$ y $f(b)$. Es de esta última observación que a la fórmula anterior se le conoce como *la regla del trapecio*.

Regla del trapecio de aplicación múltiple

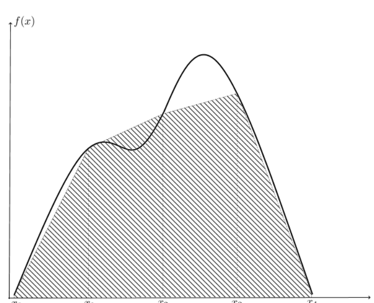
Como puede observarse de la misma Figura 1, existe un error significativamente grande, debido a que no se está contemplando el área entre $f(x)$ y la recta. Una de las maneras en que la regla del trapecio mejora su precisión consiste en dividir el intervalo de integración de a a b en una mayor cantidad de subsegmentos, y aplicar el método a cada uno de ellos. Esta mejoría se muestra en las figuras siguientes:



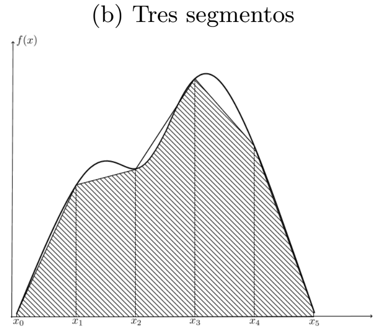
(a) Dos segmentos



(b) Tres segmentos



(c) Cuatro segmentos



(d) Cinco segmentos

Para $n+1$ puntos igualmente espaciados $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, existen n segmentos del mismo ancho, entre a y b:

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Si a y b se consideran respectivamente como x_0 y x_n, la integral completa sería:

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

Sustituyendo la regla del trapecio en cada uno, se obtiene

$$I = h\frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + h\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \ldots + h\frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2}$$

que, agrupando términos, se ve

$$\boldsymbol{I = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right]}$$

que puede comprenderse, nuevamente, como ancho del trapecio por el promedio de su altura:

$$\boldsymbol{I = (b-a)\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right]\frac{1}{2n}}$$

Ejemplos numéricos

Regla del trapecio

Para $f(x) = (5x^4 - 8x^3 + 6)$, utilice la regla del trapecio para calcular, con un sólo segmento, la siguiente integral definida:

$$\int_{-1}^{4} f(x)dx$$

La integral definida calculada analíticamente[2] es 545. Al final, calcule el error en el cálculo con un sólo segemento, con la fórmula:

$$\epsilon \left|\frac{Valor_{real} - Valor_{aproximado}}{Valor_{real}}\right| \%$$

Solución

Recordando que la regla del trapecio es

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

[2]Se queda como ejercicio aparte.

con $a = -1$ y $b = 4$

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &\approx (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} \\
&\approx (b-(a))\left[\frac{(5(a)^4-8(a)^3+6)+(5(b)^4-8(b)^3+6)}{2}\right] \\
&\approx (4-(-1))\left[\frac{(5(-1)^4-8(-1)^3+6)+(5(4)^4-8(4)^3+6)}{2}\right] \\
&\approx (5)\left[\frac{(19)+(774)}{2}\right] \\
&\approx \mathbf{1982.5}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el error es

$$\epsilon = \left|\frac{545-1982.5}{545}\right|\% = 264.43\%$$

Regla del trapecio de aplicación múltiple

Calcule la integral definida

$$\int_{-1}^{4}(5x^4-8x^3+6)dx$$

utilizando la regla del trapecio para diferentes cantidades de segmentos: desde 2, 5 y 10 segmentos. Genere una tabla donde se muestren los valores de la cantidad de segmentos utilizados (n), el valor del ancho (h) en cada cálculo, el valor resultante (I) y el valor del error para cada cálculo (ϵ).

Solución

Recordando que la regla del trapecio de aplicaión multiple es

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left[f(x_0)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+f(x_n)\right]$$

donde

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Para 2 segmentos

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= -1\\
\boldsymbol{b} &= 4\\
\boldsymbol{h} &= \frac{4-(-1)}{2} = \mathbf{2.5}\\
\boldsymbol{x_0} &= a = \mathbf{-1}\\
\boldsymbol{f(x_0)} &= \mathbf{19}\\
\boldsymbol{x_1} &= x_0 + h = (-1 + 2.5) = \mathbf{1.5}\\
\boldsymbol{f(x_1)} &= \mathbf{4.3125}\\
\boldsymbol{x_2} &= x_1 + h = (1.5 + 2.5) = b = \mathbf{4}\\
\boldsymbol{f(x_2)} &= \mathbf{774}\\
\int_a^b f(x)dx &\approx \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right]\\
\int_a^b f(x)dx &\approx \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + f(x_2)\right]\\
&\approx \frac{2.5}{2}\left[19 + 2(4.3125) + 774\right]\\
&\approx 1.25\left[19 + 8.6250 + 774\right]\\
&\approx 1.25\left[801.62\right]\\
&\boldsymbol{\approx} \mathbf{1002}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el error es

$$\epsilon = \left|\frac{545 - 1002}{545}\right| \% = 84.197\%$$

Para 5 segmentos

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= -1 \\
\boldsymbol{b} &= 4 \\
\boldsymbol{h} &= \frac{4-(-1)}{5} = \mathbf{1} \\
\boldsymbol{x_0} &= a = \mathbf{-1} \\
\boldsymbol{f(x_0)} &= \mathbf{19} \\
\boldsymbol{x_1} &= x_0 + h = (-1+1) = \mathbf{0} \\
\boldsymbol{f(x_1)} &= \mathbf{6} \\
\boldsymbol{x_2} &= x_1 + h = (0+1) = \mathbf{1} \\
\boldsymbol{f(x_2)} &= \mathbf{3} \\
\boldsymbol{x_3} &= x_2 + h = (1+1) = \mathbf{2} \\
\boldsymbol{f(x_3)} &= \mathbf{22} \\
\boldsymbol{x_4} &= x_3 + h = (2+1) = \mathbf{3} \\
\boldsymbol{f(x_4)} &= \mathbf{195} \\
\boldsymbol{x_5} &= x_4 + h = (3+1) = b = \mathbf{4} \\
\boldsymbol{f(x_5)} &= \mathbf{774} \\
\int_a^b f(x)dx &\approx \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right] \\
&\approx \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)) + f(x_5)\right] \\
&\approx \frac{1}{2}\left[19 + 2(6 + 3 + 22 + 195) + 774\right] \\
&\approx \frac{1}{2}\left[19 + 2(226) + 774\right] \\
&\approx 0.5\left[19 + 452 + 774\right] \\
&\approx 0.5\left[1245\right] \\
&\boldsymbol{\approx} \mathbf{622.5}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, el error es

$$\epsilon = \left|\frac{544 - 622.5}{545}\right| \% = 14.43\%$$

Para 10 segmentos

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= -1\\
\boldsymbol{b} &= 4\\
\boldsymbol{h} &= \frac{4-(-1)}{10} = \mathbf{0.5}\\
\boldsymbol{x_0} &= a = \mathbf{-1}, \boldsymbol{f(x_0)} = \mathbf{19}\\
\boldsymbol{x_1} &= x_0 + h = \mathbf{-0.5}, \boldsymbol{f(x_1)} = \mathbf{7.3125}\\
\boldsymbol{x_2} &= x_1 + h = \mathbf{0}, \boldsymbol{f(x_2)} = \mathbf{6}\\
\boldsymbol{x_3} &= x_2 + h = \mathbf{0.5}, \boldsymbol{f(x_3)} = \mathbf{5.3125}\\
\boldsymbol{x_4} &= x_3 + h = \mathbf{1}, \boldsymbol{f(x_4)} = \mathbf{3}\\
\boldsymbol{x_5} &= x_4 + h = \mathbf{1.5}, \boldsymbol{f(x_5)} = \mathbf{4.3125}\\
\boldsymbol{x_6} &= x_5 + h = \mathbf{2}, \boldsymbol{f(x_6)} = \mathbf{22}\\
\boldsymbol{x_7} &= x_6 + h = \mathbf{2.5}, \boldsymbol{f(x_7)} = \mathbf{76.312}\\
\boldsymbol{x_8} &= x_7 + h = \mathbf{3}, \boldsymbol{f(x_8)} = \mathbf{195}\\
\boldsymbol{x_9} &= x_8 + h = \mathbf{3.5}, \boldsymbol{f(x_9)} = \mathbf{413.31}\\
\boldsymbol{x_{10}} &= x_9 + h = b = \mathbf{4}, \boldsymbol{f(x_{10})} = \mathbf{774}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &\approx \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right]\\
&\approx \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2(f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_9)) + f(x_10)\right]\\
&\approx \frac{0.5}{2}[19\\
&+ 2(7.3125 + 6 + 5.3125 + 3 + 4.3125 + 22 + 76.312 + 195 + 413.31)\\
&+ 774]\\
&\approx 0.25\,[19 + 2(732.56) + 774]\\
&\approx 0.25\,[19 + 1465.1 + 774]\\
&\approx 0.25\,[2258.1]\\
&\boldsymbol{\approx 564.53}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el error es

$$\epsilon = \left|\frac{545 - 564.53}{545}\right|\% = 3.7741\%$$

Conclusión

Como puede observarse en la siguiente tabla, entre mayor cantidad de segmentos se utilicen, menor será el error del cáclulo por *la regla del trapecio*.

n	h	I	ϵ
1	5	1982.5	264.43%
2	2.5	1002	84.197%
5	1	622.5	14.43%
10	0.5	564.53	3.7741%