Polinomios de Interpolación de Lagrange

Alfredo Villagrán Olguín

Mayo, 2020

Introducción

La fórmula de interpolación de Lagrange es un método para encontrar un polinomio que se ajusta a un conjunto de puntos arbitrarios.

Supóngase que se tiene el punto $(1, 3)$. ¿Cuál sería un polinomio que lo represente? El siguiente:

$$f(x) = 3$$

donde

$$f(1) = 3$$

Supóngase ahora que se tienen los puntos $(1, 3)$ y $(2, 4)$. ¿Cuál sería un polinomio que los represente? El siguiente:

$$f(x) = \frac{(x-2)}{(1-2)}(3) + \frac{(x-1)}{(2-1)}(4)$$

donde

$$f(1) = 3 \text{ y } f(2) = 4$$

Por último, supóngase que se tienen los puntos $(1, 3)$, $(2, 4)$ y $(7, 11)$. ¿Cuál sería un polinomio que los represente? El siguiente:

$$f(x) = \frac{(x-2)(x-7)}{(1-2)(1-7)}(3) + \frac{(x-1)(x-7)}{(2-1)(2-7)}(4) + \frac{(x-1)(x-2)}{(7-1)(7-2)}(11)$$

donde

$$f(1) = 3, \ f(2) = 4 \text{ y } f(7) = 11$$

En otros términos, si se tienen los puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3), donde $y_i = f(x_i)$, el polinomio puede escribirse como:

$$f(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}f(x_1) + \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x2_{-}x_1)(x_2-x_3)}f(x_2) + \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x3_{-}x_1)(x_3-x_2)}f(x_3)$$

Polinomio de Interpolación de Lagrange

De lo anterior, cualquiera de los polonomios buscados podría expresarse de manera general como

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i)$$

donde

$$L_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

conocida como la fórmule de los polinomios de Lagrange. En ella puede observarse que para ajustar un polinomio de grado n a un conjunto de puntos, debe conocerse $n+1$ parejas de coordenadas.

Ejemplos numéricos

I. Considerando los datos de la siguiente tabla

i	x	$f(x)$
0	1.0	0.0000000
1	4.0	1.3862944

ajuste un polinomio de grado 1, y evalúe en $x = 2$.

Solución

De la fórmula de Langrange, se tiene que

$$f(x) = \sum_{i=0}^{1} L_i(x) f(x_i) = L_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1)$$

donde

$$L_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

entonces

$$L_0 = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \text{ y } L_1 = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

por lo tanto, el polinomio de Lagrange de grado 1 es:

$$f(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

y el valor interpolado en el polinomio, con $x = 2$ es

$$\boldsymbol{f(2)} = \frac{2 - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{2 - x_0}{x_1 - x_0} f(x_0) = \frac{2-4}{1-4}(0) + \frac{2-1}{4-1}(1.3862944) = \mathbf{0.4620981}$$

II. Considerando los datos de la siguiente tabla

i	x	$f(x)$
0	1.0	0.0000000
1	4.0	1.3862944
2	6.0	1.7917595

ajuste un polinomio de grado 2, y evalúe en $x = 2$.

Solución

De la fórmula de Langrange, se tiene que

$$f(x) = \sum_{i=0}^{2} L_i(x)f(x_i) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2)$$

donde

$$L_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{2} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

entonces

$$L_0 = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

$$L_1 = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$L_2 = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

por lo tanto, el polinomio de Lagrange de grado 2 es:

$$\boldsymbol{f(x)} = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}f(x_2)$$

para los datos en la tabla

$$\boldsymbol{f(x)} = \frac{(x - 4)(x - 6)}{(1 - 4)(1 - 6)}(0) + \frac{(x - 1)(x - 6)}{(4 - 1)(4 - 6)}(1.3862944) + \frac{(x - 1)(x - 4)}{(6 - 1)(6 - 4)}(1.7917595)$$

y el valor interpolado en el polinomio, con $x = 2$ es

$$\boldsymbol{f(2)} = \frac{(2 - 4)(2 - 6)}{(1 - 4)(1 - 6)}(0) + \frac{(2 - 1)(2 - 6)}{(4 - 1)(4 - 6)}(1.3862944) + \frac{(2 - 1)(2 - 4)}{(6 - 1)(6 - 4)}(1.7917595)$$

por lo tanto,

$$\boldsymbol{f(2)} = (0) + \frac{4}{6}(1.3862944) - \frac{2}{10}(1.7917595) = \mathbf{0.5658443\overline{6}}$$

III. Considerando los datos de la siguiente tabla

i	x	$f(x)$
0	-2	1
1	0	5
2	2	1

ajuste un polinomio de grado 2, y evalúe en $x = 1$.

Solución

Del ejercicio anterior, el polinomio de Lagrange de grado 2 es:

$$\boldsymbol{f(x)} = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1)+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)$$

para los datos en la tabla

$$\boldsymbol{f(x)} = \frac{(x-0)(x-2)}{((-2)-0)((-2)-2)}(1)+\frac{(x-(-2))(x-2)}{(0-(-2))(0-2)}(5)+\frac{(x-(-2))(x-0)}{(2-(-2))(2-0)}(1)$$

$$\boldsymbol{f(x)} = \frac{(x-0)(x-2)}{(-2)(-4)}(1) + \frac{(x-(-2))(x-2)}{(2)(-2)}(5) + \frac{(x-(-2))(x-0)}{(4)(2)}(1)$$

$$\boldsymbol{f(x)} = \frac{(x-0)(x-2)}{(8)}(1) + \frac{(x-(-2))(x-2)}{(-4)}(5) + \frac{(x-(-2))(x-0)}{(8)}(1)$$

y el valor interpolado en el polinomio, con $x = 1$ es

$$\boldsymbol{f(1)} = \frac{(1-0)(1-2)}{(8)}(1) + \frac{(1-(-2))(1-2)}{(-4)}(5) + \frac{(1-(-2))(1-0)}{(8)}(1)$$

$$\boldsymbol{f(1)} = \frac{(-1)}{(8)} + \frac{(-15)}{(-4)} + \frac{(3)}{(8)} = \frac{16}{4}$$

por lo tanto,

$$\boldsymbol{f(1) = 4}$$