Método de descomposición LU

Alfredo Villagrán Olguín

Marzo, 2020

Descomposición LU

LU

Suponiendo que se tiene el sistema de ecuaciones $AX = B$

La descomposición LU se basa en la observación que los sistemas de ecuaciones relacionados con matrices triangulares son fáciles de trabajar.

Dado que la eliminación Gaussiana busca reemplazar una matriz de coeficientes por una triangular, la descomposición LU es otra manera de aprovechar los sistemas triangulares.

Suponiendo que puede escribirse

$A = LU$

donde L es una matriz triangular inferior y U es una matriz triangular superior, la finalidad es encontrar L y U tal que su multiplicación sea A.

Es decir, tomando como ejemplo una matriz de 3x3, sea

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = LU$$

$$\text{donde } L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{bmatrix} \text{ y } U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix}$$

Deben encontrarse L y U tal que cumplan que su multiplicación resulte A. Esto puede lograrse a través de la primera parte del método de eliminación Gaussiana. Inicialmente, $U = A$ y $L = I$. Es decir:

$$U = \begin{bmatrix} U_{11} = A_{11} & U_{12} = A_{12} & U_{13} = A_{13} \\ U_{21} = A_{21} & U_{22} = A_{22} & U_{23} = A_{23} \\ U_{31} = A_{31} & U_{32} = A_{32} & U_{33} = A_{33} \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Mientras se convierten en cero los valores del triángulo inferior de U, se va obteniendo cada valor del triángulo inferior de L. A continuación se muestra paso a paso cómo se obtienen los valores tanto de L como de U.

Para conseguir que $U_{21} = 0$, se calcula L_{21} y este valor negativo se multiplica por la fila 1 para sumarla con la 2.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} = U_{21}/U_{11} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U_2 = -L_{21}U_1 + U_2 = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ -L_{21}U_{11} + U_{21} & -L_{21}U_{12} + U_{22} & -L_{21}U_{13} + U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{bmatrix}$$

Para conseguir que $U_{31} = 0$, se calcula L_{31} y este valor negativo se multiplica por la fila 1 para sumarla con la 3.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} = U_{31}/U_{11} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U_3 = -L_{31}U_1 + U_3 = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ -L_{31}U_{11} + U_{31} & -L_{31}U_{12} + U_{32} & -L_{31}U_{13} + U_{33} \end{bmatrix}$$

De lo anterior, L y U resultan:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & U_{32} & U_{33} \end{bmatrix}$$

Para conseguir que $U_{32} = 0$, se calcula L_{32} y este valor negativo se multiplica por la fila 2 para sumarla con la 3.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} = U_{32}/U_{22} & 1 \end{bmatrix}$$

$$U_3 = -L_{32}U_2 + U_3 = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & -L_{32}U_{22} + U_{32} & -L_{32}U_{23} + U_{33} \end{bmatrix}$$

De lo anterior, L y U resultan:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{bmatrix} \text{ y } U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix}$$

De ese modo, se ha descompuesto la matriz A en las matirces L y U, tal que, si se multiplicaran, el resultado sería A.

Ejemplo numérico

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 7 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

E inicialmente, $U = A$ y $L = I$. Entonces:

$$U = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 7 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ y } L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para conseguir que $U_{21} = 0$, se calcula L_{21} y este valor negativo se multiplica por la fila 1 para sumarla con la 2.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} = U_{21}/U_{11} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7/4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U_2 = (-7/4)U_1 + U_2 = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ (-7/4)4 + 7 & (-7/4)5 + (-1) & (-7/4)(-2) + 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Para conseguir que $U_{31} = 0$, se calcula L_{31} y este valor negativo se multiplica por la fila 1 para sumarla con la 3.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7/4 & 1 & 0 \\ L_{31} = U_{31}/U_{11} & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7/4 & 1 & 0 \\ 3/4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U_3 = (-3/4)U_1 + U_3 = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 0 & -39/4 & 22/4 \\ (-3/4)4 + 3 & (-3/4)5 + 1 & (-3/4)(-2) + 4 \end{bmatrix}$$

De lo anterior, L y U resultan:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7/4 & 1 & 0 \\ 3/4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } U = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 0 & -39/4 & 22/4 \\ 0 & -11/4 & 22/4 \end{bmatrix}$$

Para conseguir que $U_{32} = 0$, se calcula L_{32} y este valor negativo se multiplica por la fila 2 para sumarla con la 3.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7/4 & 1 & 0 \\ 3/4 & L_{32} = U_{32}/U_{22} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7/4 & 1 & 0 \\ 3/4 & 11/39 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U_3 = (-11/39)U_2 + U_3 = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 0 & -39/4 & 22/4 \\ 0 & (-11/39)(-39/4) + (-11/4) & (-11/39)(22/4) + 22/4 \end{bmatrix}$$

De lo anterior, L y U resultan:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7/4 & 1 & 0 \\ 3/4 & 11/39 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } U = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 0 & -39/4 & 22/4 \\ 0 & 0 & 154/39 \end{bmatrix}$$

Y, multiplicando

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7/4 & 1 & 0 \\ 3/4 & 11/39 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 0 & -39/4 & 22/4 \\ 0 & 0 & 154/39 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 7 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} = A$$

Lo cual comprueba que $A = LU$

Solución de sistemas de ecuaciones, utilizando LU

Algoritmo

Una vez que se ha descompuesto una matriz A en sus correspondientes matrices triangulares inferior (L) y superior (U), puede resolverse el sistema $AX = B$. Los pasos a seguir pueden resumirse en los siguientes:

- Dada A, encontrar L y U, de tal manera que $A = LU$. A partir de lo cual $LU\ X = B$
- Sea $Y = UX$ y $LY = B$, se resuelve el sistema triangular, para Y.
- Resuelta Y, por último, se resuelve el sistema triangular $UX = Y$, para X.

Ejemplo numérico

Del ejemplo expuesto en la sección anterior, siendo el sistema $AX = B$:

$$A \begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 7 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} -14 \\ 42 \\ 28 \end{bmatrix}$$

Primero se obtienen L y U.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7/4 & 1 & 0 \\ 3/4 & 11/39 & 1 \end{bmatrix} U = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 0 & -39/4 & 22/4 \\ 0 & 0 & 154/39 \end{bmatrix}$$

Posteriormente, se resuelve el sistema triangular $LY = B$, para Y, a partir de:

$$L \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7/4 & 1 & 0 \\ 3/4 & 11/39 & 1 \end{bmatrix} Y \begin{bmatrix} y1 \\ y2 \\ y3 \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} -14 \\ 42 \\ 28 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo y despejando a partir de la primera fila y hacia la última, se tiene que: $y_1 = -14$, $y_2 = 42 - (7/4)(y_1)$, y $y_3 = 28 - (3/4)(y_1) - (11/39)(y_2)$ Es decir:

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 \\ 266/4 \\ 770/39 \end{bmatrix}$$

Por último, se resuelve el sistema triangular $UX = Y$, para X, a partir de:

$$U \begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 0 & -39/4 & 22/4 \\ 0 & 0 & 154/39 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} = Y \begin{bmatrix} -14 \\ 266/4 \\ 770/39 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo y despejando a partir de la última fila y hacia la primera, se tiene que: $x_3 = (770/39)/(154/39)$, $x_2 = ((266/4) - (22/4)x_3)/(-39/4)$, y $x_1 = (-14 - (-2x_3) - 5x_2)/4$ Es decir:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}$$