Lecture 9

在之前对 observational study 的讨论中，一个重要的前提假设是 "overlap assumption"：

$$c < p(W=1|X) < 1-c$$

即避免某些 X=x下，item 必然被分至 treatment group 或 control group.

但现实中，该假设不一定成立，此时可能导致：

① IPW 无法求出

② 某些群体无法找到对照，ATE的估计需要依赖外推假设，可能不可靠.

此时考虑 Regression discontinuity design (RDD).

一句话总结：

断点回归设计（RDD）是一种 **利用自然或人为设定的"断点"来识别因果效应** 的方法。它通过比较断点附近（如分数线上下）的个体，推断处理（如政策、干预）的效果，适用于处理分配由某连续变量阈值决定的场景。

核心思想：

- **断点规则**：处理分配基于一个连续变量（称为"运行变量"，Running Variable）的阈值。
  - 例如：考试分数≥60分被录取（处理组），<60分不录取（对照组）。
- **局部比较**：假设在阈值附近（如58-62分），个体其他特征相似，结果差异可归因于处理效应。
- **内生性解决**：断点将处理分配变为"准随机"，避免混杂因素干扰。

RDD的类型：

1. **精确断点回归（Sharp RDD）**：
   - 处理分配完全由阈值决定。
   - 公式：$W_i = 1 \text{ if } X_i \geq c$（如成绩≥60分必录取）。
   - **示例**：低保政策规定收入低于c元者获得补贴，高于c元者不获得。
2. **模糊断点回归（Fuzzy RDD）**：
   - 处理分配受阈值影响但不完全确定。
   - 公式：$P(W_i = 1)$ 在 $X \geq c$ 时显著提高，但非0或1。
   - **示例**：考试成绩≥60分者更可能被录取，但还需面试等其他因素。

关键假设：

1. **局部连续性假设（Local Continuity）**：
   - 在阈值附近，潜在结果（$Y(0), Y(1)$）和协变量关于运行变量 X 是连续的。
   - **意义**：若没有处理效应，结果在阈值处不应出现跳跃。
2. **无操纵假设（No Manipulation）**：
   - 个体无法精确操控运行变量 X 使其恰好落在阈值附近。
   - **示例**：学生无法精准控制考试分数刚好达到60分。

RDD的分析步骤：

1. **确定运行变量和阈值**：
   - 例如：以家庭收入为运行变量，c为低保资格线。
2. **数据可视化**：
   - 绘制运行变量与结果的关系图，观察阈值处是否存在跳跃。
3. **选择带宽（Bandwidth）**：
   - 确定阈值附近的合理范围（如60±5分），平衡偏差与方差。
4. **模型拟合**：
   - 使用局部线性回归（或其他非参数方法），分别拟合阈值两侧的数据：

$$Y = \beta_0 + \beta_1(X-c) + \beta_2 W + \beta_3 (X-c)\cdot W + \epsilon \tag{1}$$

   - 系数 β_2 即为断点处的处理效应估计。
5. **检验假设**：
   - 协变量在阈值处是否平衡（如年龄、性别分布是否连续）。
   - 检查运行变量的分布是否在阈值处出现聚集（可能暗示操纵）。

RDD的优点：

1. **内生性解决**：利用阈值规则，使处理分配近似随机（局部）。
2. **透明直观**：结果可通过图形直观展示（阈值处的跳跃）。
3. **政策评估利器**：适用于评估分数线、资格线等阈值型政策的效果。

RDD的局限性：

1. **局部平均处理效应（LATE）**：
   - 仅能估计阈值附近群体的效应（如60分附近的考生），无法推广到全体。
2. **带宽敏感性**：结果可能依赖带宽选择，需敏感性分析。
3. **假设严格**：若存在操纵或协变量在阈值处不连续，估计将偏误。

RDD vs 其他方法：

方法	适用场景	核心假设
随机实验	可主动分配处理	完全随机分配
匹配/IPW	观测到所有混杂变量	可忽略性、重叠性
RDD	处理由连续变量阈值决定	局部连续性、无操纵

§1 Regression discontinuity design（断点回归设计）

1. Definition: Before-after (BA) design

令 ① D 为 treatment

② Y 为 response variable

则 Before-after (BA) design 希望比较 Y 在接受 treatment D 前后的变化

注：若 treatment 在时间 c 发生，则倘若 Y 在时间 c 时发生了 sudden change，则可以认为 temporal change in Y 是由 temporal change in D 导致的

e.g. Effect of speed limit law

Example 6 Example of BA design: Consider the effect of a new speed limit law D on the car accident number Y: D increasing the speed limit from 55 mph to 65 goes into effect on day c, and the goal is to find the effect of D on Y. Suppose city-level panel data on Y_{it} are available with $i = 1, \ldots, N$ indexing cities and t indexing days. BA compares Y_{it} just before c and Y_{it} on (or just after) c:

$$\boxed{\hat{\tau} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(Y_{ic} - Y_{ic-1})}$$

$$Y_{it} = Y_{it}(1)\cdot W_{it} + Y_{it}(0)\cdot(1-W_{it}) = Y_{it}(1)\cdot 1_{t\geq c} + Y_{it}(0)\cdot 1_{t<c}$$

to evaluate the increase of car accidents. If $E(\hat{\tau}) > 0$, then we may declare that the number of accidents increased due to D, but this requires a critical assumption because

$$E(\hat{\tau}) > 0$$

can happen for reasons other than D, such as a sudden deterioration in weather.

注：为什么 $\hat{\tau} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(Y_{ic} - Y_{ic-1})$ 而不是 $\hat{\tau} = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{t\geq c} Y_{it} - \sum_{i=1}^{N}\sum_{t<c} Y_{it}\right)$？

因为 Y_{it} 可能还受其他未知的 confounders 的影响，若我们仅考虑 $t=c$ 周围很短时间的 Y_{it}，则可以认为其他变量都被控制了（短时间内不会剧烈变化），此时类似于 CRE 的 setting.

e.g. Effect of unexpected announcement

As another example of BA, suppose there is an unexpected announcement D of increased earnings from a big company at time t_1. Examining time-series data of its stock price just before $t_0 = t_1 - 1$ and just after $t_2 = t_1 + 1$ the announcement, we can gauge the effect of the earnings announcement D on the stock price Y : the effect would be $Y_{t_2} - Y_{t0}$. To attribute this temporal change in Y to D, there should be no other change in the economy. Put differently, if two things jumped at the same time just before Y changes, we cannot tell which is the cause, and we need to rule out such multiple jumps.

对比 BA design，RDD 相当于把 time index 替换为另一个与 W 相关的 general variable. BA design 可以

视作 RDD 的特例.

2. Definition: Regression discontinuity (RD) / Regression discontinuity design (RDD)

令 ① W_i 为 indicator of treatment

② Y_i 为 response variable

③ X_i 为某个 continuous random variable

④ c 为 X 的某个阈值

若 W_i 的取值取决于 X_i 是否 crossing c, 即

$W_i = 1(X_i \geq c)$ 或 $W_i = 1(X_i \leq c)$ (overlap assumption 不满足)

则该 setting 被称为 Regression discontinuity (RD)

注: ① RD setting 下, 可以认为在 $X_i = c$ 处存在 local randomization, 但代价是我们只能 identify $X_i = c$ 处的 treatment effect

② RD setting 下, unconfoundness condition (关于 X) 永远成立:

$$P(W_i=1, (Y_i(0), Y_i(1)) \in A \mid X_i = x) = \underbrace{1_{x \geq c}}_{= P(W_i = 1 \mid X_i = x)} \cdot P((Y_i(0), Y_i(1)) \in A \mid X_i = x)$$

e.g. **Example 4** Suppose we want to evaluate the effect of scholarship on the students' future development. We suppose X is the average GPA of the student, $W \in \{0,1\}$ is the indicator of the scholarship, $Y(i), i = 0, 1$ are the future salaries of students receiving scholarship or not. Suppose the assignment mechanism is $\mathbf{1}_{X \geq 90}$. Let us consider the propensity score under this circumstance:

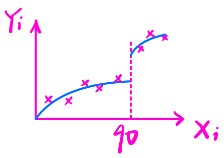
$$\boxed{Prob(W = 1|X) = \begin{cases} 1 \text{ if } X \geq 90, \\ 0 \text{ otherwise.} \end{cases}}$$

In other words, the overlap assumption is not satisfy. Under this situation, we still want to evaluate the causal effect. Therefore, we consider using another set of tools to help us achieve this goal.

注: 一个估计 ATE 的 intuitive way 是

$$\hat{\tau} = \frac{1}{n} \sum_{X_i > 90} Y_i - \frac{1}{n} \sum_{X_i < 90} Y_i \quad \left(\text{或 } \frac{1}{n_1} \sum_{X_i > 90} Y_i - \frac{1}{n_0} \sum_{X_i < 90} Y_i\right)$$

但这样可能会使除 X_i 外的其他 confounder 影响估计:



比如, 40分和95分的人的个人能力差别很大, 个人能力会作为 confounder 影响 salary.

因此我们通常只选取 90分左右的 samples 来估计 CATE $\tau(90)$