Lecture 19

§1 Duality for general optimization

1. Recap: Lagrangian

考虑一个 minimization problem（F 包含了 x 的所有 sign constraints）:

$$\begin{aligned} \text{minimize}_{x\in F} \quad & f(x) \\ \text{subject to} \quad & g_i(x) \geq 0, \quad \forall i \\ & h_i(x) = 0, \quad \forall i \\ & l_i(x) \leq 0, \quad \forall i \end{aligned}$$

由此可以求出 Lagrangian:

$$L(x, \lambda, \nu, \eta) = f(x) + \sum_i \lambda_i g_i(x) + \sum_i \nu_i h_i(x) + \sum_i \eta_i l_i(x)$$

且 dual feasibility conditions 为:

$$\lambda_i \leq 0, \quad \eta_i \geq 0$$

2. Dual problem

上述问题的 dual problem 为

$$\max_{\lambda\leq 0, \nu, \eta\geq 0} \{ \min_{x\in F} L(x, \lambda, \nu, \eta) \}$$

注: 这也解释了为什么 $\lambda_i \leq 0$, $\eta_i \geq 0$ 为 dual feasibility conditions

其中:

① λ, ν, η 为 dual variables

② 对于 LP, inner problem 可求出 explicit form, 此时 the dual problem 为一个 explicit maximization problem for λ, ν, η.

③ 对于非线性优化, inner problem 通常没有 explicit solution, 此时 the dual problem 没有 explicit form

证明:

- Claim: 原问题与下述问题等价:

  $$\min_{x\in F} \{ \max_{\lambda\leq 0, \nu, \eta\geq 0} L(x, \lambda, \nu, \eta) \}$$

  注意到为了使 inner problem 有界, 必须有 $g_i(x) \geq 0$, $h_i(x) = 0$, $l_i(x) \leq 0$, 因此

  $$\max_{\lambda\leq 0, \nu, \eta\geq 0} L(x, \lambda, \nu, \eta) = f(x)$$

  因此 primal problem 等价于:

  $$\min_{x\in F} \{ \max_{\lambda\leq 0, \nu, \eta\geq 0} L(x, \lambda, \nu, \eta) \}$$

- 类似于 LP, 我们可以交换 min 与 max（不作证明）, 因此 dual problem 为

  $$\max_{\lambda\leq 0, \nu, \eta\geq 0} \{ \min_{x\in F} L(x, \lambda, \nu, \eta) \}$$

3. Dual problem 的性质

① $\min_{x\in F} L(x, \lambda, \nu, \eta)$ 永远 concave in λ, ν, η

证明:

$L(x, \lambda, \nu, \eta)$ 为关于 λ, ν, η 的 linear (concave) function

$\min_{x \in F} L(x, \lambda, \nu, \eta)$ 为一组 concave functions 的最小值

② 无论原问题是否为 convex optimization problem，dual problem 一定为 convex optimization problem

③ dual problem 的 dual 不一定等价于 primal problem（dual 的 dual 一定 convex，但 primal 不一定）

例：求下列问题的 explicit dual problem

$$\begin{aligned} \text{minimize}_{x} \quad & x^T x \\ \text{subject to} \quad & Ax \le b \end{aligned}$$

· 其 Lagrangian 为

$$L(x, \lambda) = x^T x + \lambda^T (Ax - b)$$

其中 dual feasibility constraints 为 $\lambda \ge 0$

因此，dual problem 为

$$\max_{\lambda \ge 0} \{ \min_{x} x^T x + \lambda^T (Ax - b) \}$$

· 考虑 inner problem：

$$\min_{x} x^T x + \lambda^T (Ax - b)$$

该 unconstrained problem 的 KKT conditions 为

$$\nabla f(x) = 2x + A^T \lambda = 0$$

$$\Rightarrow x^* = -\frac{1}{2} A^T \lambda$$

因此 inner problem 的 explicit optimal value 为

$$-\frac{1}{4} \lambda^T A A^T \lambda - b^T \lambda$$

· 因此，explicit dual problem 为

$$\begin{aligned} \text{maximize}_{\lambda} \quad & -\frac{1}{4} \lambda^T A A^T \lambda - b^T \lambda \\ \text{subject to} \quad & \lambda \ge 0 \end{aligned}$$

注：① 对于该问题，dual 与 primal 有相同的 objective value

② 通常情况下，不存在一个 easy rule 以求出 the dual problem（且通常只能求出 implicit form）

例：求下列问题的 dual problem

$$\begin{aligned} \text{minimize}_{x} \quad & x^T x \\ \text{subject to} \quad & Ax \le b \\ & x \ge 0 \end{aligned}$$

其 Lagrangian 为

$$L(x, \lambda) = x^T x + \lambda^T (Ax - b)$$

其中 dual feasibility constraints 为 $\lambda \ge 0$

因此，dual problem 为

$$\max_{\lambda \ge 0} \{ \min_{x \ge 0} x^T x + \lambda^T (Ax - b) \}$$

即为

$$\max_{\lambda \ge 0} -\lambda^T b + \min_{x \ge 0} \{ x^T x + \lambda^T A x \}$$ （没有 explicit form）

§2 Duality theorem

1. Theorem: weak duality theorem

给定任意 minimization problem 与其 dual. 则

① primal problem (min) 的任意 feasible solution 的 objective value 均是 dual optimal value (max) 的上界

② dual problem (max) 的任意 feasible solution 的 objective value 均是 primal optimal value (min) 的下界

③ primal problem (min) 的 optimal value 永远大于等于 dual problem (max) 的 optimal value

④ 若其中一个无界，则另一个无解

证明: ③

令 x^* 为 primal problem 的最优解，因此

$$f(x^*) = \max_{\lambda} L(x^*, \lambda) \quad (\text{固定 } x^*,\ L(x^*,\lambda) \text{ 关于 } \lambda \text{ 的最大值即为 } f(x^*))$$

$$\geq L(x^*, \lambda)$$

$$\geq \min_{x} L(x, \lambda) \quad (x^* \text{ 不一定为 } L(x,\lambda) \text{ 的 minimizer})$$

对两侧关于 λ 取 max (左侧为常数)，有

$$\text{primal optimal value} = f(x^*) \geq \max_{\lambda}\{\min_{x} L(x, \lambda)\} = \text{dual optimal value}$$

2. Duality gap

对于 nonlinear optimization problems，primal optimal value 与 dual optimal value 不一定相等，

我们称 primal optimal value 与 dual optimal value 的差值为 duality gap

- 对于 LP，duality gap 一定为 0
- 对于 general optimization problem，可能有 positive duality gap (minimization optima > maximization optima)

3. Theorem: strong duality theorem

若 primal problem 为 convex optimization problem，且 Slater's condition holds，则 duality gap 为 0

4. Definition: Slater's condition

假设 primal constraints 仅由 $f_i(x) \leq 0$ (非线性) 与 $Ax \leq b$ (线性) 组成.

若存在一个 feasible solution x，使得 $f_i(x) < 0$ for all i (非线性约束严格成立)，

则 Slater's condition 成立.

注: 换言之，Slater's condition 要求: 对于所有 nonlinear constraints，存在一个共有的 strict interior point