

§1.1 随机事件

§1 随机试验与随机事件

1. 试验

对客观事物观察、测量、实验

2. 随机试验 (experiment)

① 在相同条件下可重复 ② 结果不止一个 ③ 无法预测

用字母 E 表示

3. 事件

随机试验的每一种结果叫一个事件

4. 随机事件

可能(不)发生的事件

用字母 A, B, C, \dots 表示

5. 基本事件

相对于实验目的, 不能再分(不必再分).

e.g. 若研究抛硬币正面朝上的概率, 则基本事件为正面朝上/反面朝上

6. 必然事件

一定发生, 用 Ω 表示

7. 不可能事件

一定不发生, 用 \emptyset 表示

注: 必然事件与不可能事件不属于随机事件, 但为了研究方便, 把它们作为两个极端

§2 样本空间与事件的集合表示

1. 样本空间

所有基本事件的集合, 用 Ω 表示

2. 样本点

样本空间的元素(基本事件), 用 ω 表示

e.g. 抛两枚硬币, $\Omega = \{(\text{正}, \text{正}), (\text{正}, \text{反}), (\text{反}, \text{正}), (\text{反}, \text{反})\}$

电话交换台单位时间内的呼叫次数, $\Omega = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$

向平面内扔一个质点, $\Omega = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$

注: $\Omega = \text{必然事件} = \text{样本空间} = \text{全集}$

$\emptyset = \text{不可能事件} = \text{空集}$

Ω 的子集 = 事件

3. 事件的集合表示

e.g. 扔一枚骰子, 偶数点朝上: $A = \{2, 4, 6\}$

§3 事件间的关系

1. 包含

① $A \subset B \Rightarrow A \subset B / B \supset A \Rightarrow A \text{ 发生必导致 } B \text{ 发生}$

② 相等: $A \subset B \ \& \ B \subset A \Rightarrow A = B$

注: 注意与“属于”区别: $\omega \in \Omega$

2. 并(和)

① $A \cup B \Rightarrow A \cup B / A + B \Rightarrow A \text{ 与 } B \text{ 中至少有一个发生}$

② $A + B \supset A \quad A + A = A$

$A + \emptyset = A \quad A + \Omega = \Omega$

3. 交(积)

① $A \cap B \Rightarrow A \cap B / AB \Rightarrow A \text{ 与 } B \text{ 同时发生}$

② $AB \subset A \quad AA = A$

$A \cap \emptyset = \emptyset \quad A \cap \Omega = A$

注: 无限可列个: 按某种规律排成一个序列

① 自然数: $0, 1, 2, 3, \dots$

② 整数: $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$

③ 有理数: $\frac{p}{q}$

常见不可列集合:

① 实数 ② 直线点集

4. 差

① $\overline{A \cap B} \Rightarrow A - B \Rightarrow A \text{ 发生而 } B \text{ 不发生}$

② $A - B = A - AB$

5. 互不相容事件

① $\overline{A \cap B} \Rightarrow AB = \emptyset \Rightarrow A, B \text{ 不同时发生}$

② $n \text{ 个事件 } A_1, \dots, A_n \text{ 互不相容} \Rightarrow A_i A_j = \emptyset$

6. 对立事件

① $\overline{A \cap B} \Rightarrow AB = \emptyset \text{ 且 } A + B = \Omega \Rightarrow A, B \text{ 互不相容且 } A \cup B = \Omega$

② 记作 $A = \bar{B}$ 或 $B = \bar{A}$

③ 一些公式:

1° $\bar{\bar{A}}$ 是 A 的逆 $\bar{\bar{A}} = A$

2° $A - B = A - AB = A\bar{B}$

注: 互不相容事件与对立事件的联系与区别

① 两事件对立, 则一定互不相容

② 互不相容适用于多个事件,

对立适用于两个事件

③ 两事件互不相容 \Rightarrow 可都不发生或只发生一个

两事件对立 \Rightarrow 有且只有一个发生

7. 完备事件组

① A_1, A_2, \dots, A_n 两两互不相容, 且 $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$

② $A_1 A_2 \dots A_n$

8. 运算律

① 交换: $A \cup B = B \cup A \quad A \cap B = B \cap A$

② 结合: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

③ 分配: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

④ 对偶: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

注: 长杠变短杠, 符号变方向

$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_n$

$\overline{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n} = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \dots \cup \bar{A}_n$

例: A, B, C 是试验 E 的随机事件

① A 发生: A

② 只有 A 发生: $A\bar{B}\bar{C}$

③ A, B, C 恰有一个发生: $A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C$

④ A, B, C 同时发生: ABC

⑤ A, B, C 至少一个发生: $A + B + C$

⑥ A, B, C 至多一个发生: $\bar{A}\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C$

⑦ A, B, C 恰有两个发生: $AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC$

⑧ A, B, C 至少两个发生: $AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC + ABC / AB + BC + AC$

例: 抽查产品, 不放回, 三次, A_1, A_2, A_3 分别表示第 1, 2, 3 次抽到合格品

① 三次都合格: $A_1 A_2 A_3$

② 至少一次合格: $A_1 + A_2 + A_3$

$A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 + A_1 A_2 \bar{A}_3 + A_1 \bar{A}_2 A_3 + \bar{A}_1 A_2 A_3 + A_1 A_2 A_3$

③ 恰有两次合格: $A_1 A_2 \bar{A}_3 + A_1 \bar{A}_2 A_3 + \bar{A}_1 A_2 A_3$

④ 至多一次合格: $\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 + A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$

例: 射击打三枪, $A_i, i=1, 2, 3$ 表示第 i 枪击中目标

① $A_1 + A_2$: 前两枪至少中一枪

② \bar{A}_1 : 第一枪没中

③ $A_1 + A_2 + A_3$: 三枪至少中一枪

④ $A_1 A_2 A_3$: 三枪全中

⑤ $A_1 - A_2 = A_1 \bar{A}_2$: 第一枪中且第二枪没中

⑥ $\overline{A_1 + A_3} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_3$: 第一、三枪没中

§1.2 事件的概率

§1 概率的初等描述

1. 概率

事件发生的可能性的度量. 记作 $P(A)$

2. 性质

① $P(\Omega) = 1$ ② $P(\emptyset) = 0$ ③ $0 \leq P(A) \leq 1$