Lecture 17

§1 CTMC 的 limiting distribution

1. 一个例子

① time 1 时的分布和期望

- Assume $X = \{X(t), t \geq 0\}$ is a CTMC on state space $E = \{1, 2, 3\}$ with generator

$$G = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- Given

$$\mathbb{P}(X(0) = 1) = 1/4, \quad \mathbb{P}(X(0) = 2) = 1/2, \quad \mathbb{P}(X(0) = 3) = 1/4.$$

Find $\mathbb{E}(X(1))$.

- First find

$$\mathbb{P}(X(1) = 1) = ?, \quad \mathbb{P}(X(1) = 2) = ?, \quad \mathbb{P}(X(1) = 3) = ?.$$

- Using `Python`,

$$P(1) = \mathtt{expm}(G) = \begin{pmatrix} 0.1703 & 0.3974 & 0.4323 \\ 0.1520 & 0.4157 & 0.4323 \\ 0.0935 & 0.3389 & 0.5677 \end{pmatrix}$$

- The distribution of $X(1)$ is

$$(1/4, 1/2, 1/4)P(1) = (0.1419 \quad 0.3919 \quad 0.4662).$$

- Expectation

$$\mathbb{E}(X(1)) = 1(0.1419) + 2(0.3919) + 3(0.4662).$$

② time 10 时的分布

- Using `Python`,

$P_{ij}(10) \approx \pi_j$

$$P(10) = \mathtt{expm}(10 * G) = \begin{pmatrix} 0.1250 & 0.3750 & 0.5000 \\ 0.1250 & 0.3750 & 0.5000 \\ 0.1250 & 0.3750 & 0.5000 \end{pmatrix}$$

- The distribution of $X(10)$ is

$$(1/4, 1/2, 1/4)P(10) = \underbrace{(0.1250 \quad 0.3750 \quad 0.5000)}_{\text{limiting distribution}}.$$

$\Downarrow$

stationary distribution

- Given

$$\underline{\mathbb{P}(X(0) = 1) = 0.125, \ \mathbb{P}(X(0) = 2) = 0.375, \ \mathbb{P}(X(0) = 3) = 0.5.}$$

the distribution of $X(1)$ is

(0.125 , 0.375 , 0.5)

2. Definition: limiting distribution

一个 CTMC 在时间 t 时处在 state j 的概率会收敛至一个独立于 initial state i 的 limiting probability π_j:

$$\lim_{t \to \infty} P_{ij}(t) = \pi_j$$

其中 limiting distribution $\vec{\pi} = (\pi_j)$ 为一个 proper p.m.f，即 $\pi_j \geq 0$ 且 $\sum_j \pi_j = 1$

§2 Limiting distribution 的求解

1. Limiting distribution 的求解

为了求解 $\lim_{t \to \infty} P(t)$，可以先求出 $P(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k G^k}{k!}$，再求极限.

其中 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k G^k}{k!}$ 可以使用 eigenvalue decomposition 求解：

① Step 1：对 G 作 eigenvalue decomposition

$$G = V \Lambda V^{-1}, \text{ 其中 } \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$$

② Step 2：求出 G^k

$$G^k = V\Lambda^k V^{-1}，\text{其中 } \Lambda^k = diag(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \cdots, \lambda_n^k)$$

③ Step 3：求出 $P(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k G^k}{k!}$

$$P(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k G^k}{k!}$$
$$= V \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \Lambda^k V^{-1}$$
$$= V \Lambda' V^{-1},$$

其中 $\Lambda' = diag\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\lambda_1)^k}{k!}, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\lambda_1)^k}{k!}, \cdots, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\lambda_1)^k}{k!}\right) = diag(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \cdots e^{\lambda_n t})$

④ Step 4：求出 $\lim_{t\to\infty} P(t)$

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = V(\lim_{t\to\infty} \Lambda') V^{-1}$$

注：对于 generator matrix G，其一定有 eigenvalue 0 和对应的 eigenvector $\mathbb{1}$

$G\mathbb{1} = 0 \cdot \mathbb{1}$ （因为 G 的行和均为 0）

例：对于 CTMC X on $E = \{1, 2, 3\}$ with generator

$$G = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

求 limiting probability 冗

① 对 G 作 eigenvalue decomposition

$$P(\lambda) = det\left(\begin{bmatrix} -2-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & -5-\lambda & 3 \\ 2 & 2 & -4-\lambda \end{bmatrix}\right) = \lambda(\lambda+4)(\lambda+7) = 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -4,\ \lambda_3 = -7$

- 对于 $\lambda_1 = 0$，有 $\mathbb{v}_1 = [1, 1, 1]^T$
- 对于 $\lambda_2 = -4$，有

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$

取自由未知量 $x_3 = 1$，有 $\mathbb{v}_2 = [-1, 1, 1]^T$

- 对于 $\lambda_3 = -7$，有

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/8 & 0 \\ 0 & 1 & 13/8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1/8\, x_3 \\ x_2 = -13/8\, x_3 \end{cases}$$

取自由未知量 $x_3 = 1$，有 $\mathbb{v}_3 = [1/8, -13/8, 1]^T$

因此有

$$G = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1/8 \\ 1 & 1 & -13/8 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1/8 \\ 1 & 1 & -13/8 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

② Step 2：求出 G^k

$$G^k = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1/8 \\ 1 & 1 & -13/8 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-4)^k & 0 \\ 0 & 0 & (-7)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1/8 \\ 1 & 1 & -13/8 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

③ Step 3：求出 $P(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k G^k}{k!}$

$$P(t)=\begin{bmatrix}1&-1&1/8\\1&1&-13/8\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^0&0&0\\0&e^{-4t}&0\\0&0&e^{-7t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&1/8\\1&1&-13/8\\1&1&1\end{bmatrix}^{-1}$$

④ Step 4：求出 $\lim_{t\to\infty}P(t)$

$$\lim_{t\to\infty}P(t)=\begin{bmatrix}1&-1&1/8\\1&1&-13/8\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&1/8\\1&1&-13/8\\1&1&1\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}1/2&3/14&2/7\\1/2&3/14&2/7\\1/2&3/14&2/7\end{bmatrix}$$

因此 $\pi=[1/2,3/14,2/7]$

注：① 上述过程提供了一种求 $P(t)$ 的方法

② 关于 convergence rate：由于 $\lambda_1=0,\lambda_2=-4,\lambda_3=-7$，有 $\lambda_1>\lambda_2>\lambda_3$，因此 λ_2 决定了 convergence rate（spectral gap of $G=\lambda_1-\lambda_2=4$）

§3 Limiting distribution 的存在性

1. **Definition:** irreducible（不可约）

一个 CTMC 被称为 irreducible，若其 jump matrix J 作为一个 transition probability matrix of a DTMC 为 irreducible

2. **Definition:** first return time（首次返回时间）

CTMC 的 state i 的 first return time 为

$$T_{i,i}=\min\{t\geq 0:X_t=i,\ \text{at least one jump before time } t \mid X_0=i\}$$

注：由于 holding time 的存在，若 $X_0=i$，则对于足够小的 δt，$X_{\delta t}$ 仍可能为 state i，因此需要至少一次 jump

3. **Definition:** positive recurrent（正常返）

CTMC 的一个 state $i\in E$ 被称为 positive recurrent，若

$$E[T_{i,i}]<\infty$$

其中 $T_{i,i}$ 为 state i 的 first return time，time 0 时起始于 state i

4. **Theorem:** Limiting distribution 的存在性

若 CTMC 为 irreducible 且 positive recurrent，则

$$P(t)\to\Pi \quad \text{as } t\to\infty$$

其中 Π 的每行均相同，且满足 $\pi=\pi P(t)$ for all $t\geq 0$

注：① 对于 CTMC，limiting distribution $\Rightarrow$ stationary distribution

② 相较于 DTMC，CTMC 的 limiting distribution 不要求 aperiodic，因为 CTMC 未定义 periodicity