Lecture 4

§1 Use software to solve LP

1° Production planning problem

2° Staffing problem

3° Support vector machine problem

4° Shortes path problem

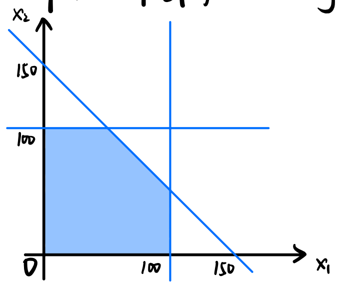
§2 线性规划的图解法

1. 示例：Production planning problem

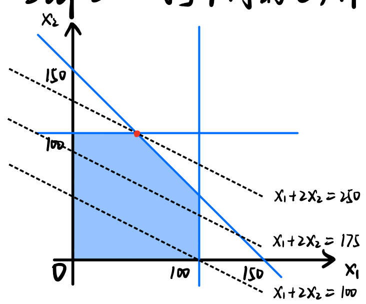
线性规划模型为：

$$\begin{aligned}\max_{x_1,x_2}\quad & x_1+2x_2\\ \text{s.t.}\quad & x_1\le 100\\ & 2x_2\le 200\\ & x_1+x_2\le 150\\ & x_1,x_2\ge 0\end{aligned}$$

1° Step 1：作出 feasible region：



2° Step 2：对于不同的 c，作出函数 $x_1+2x_2=c$.



optimal solution 即为能碰到 feasible region 的最高的线

坐标：(50, 100).　　最值：250

2. 对图解法的观察

1° LP 的 feasible region 为 polygon（多边形）

2° Optimal solution 通常出现在 feasible region 的 corner 处

3° 某些约束条件会对 optimal solution 的选取造成实质性影响（$x_2\le 100$，$x_1+x_2\le 150$），有些则不会（$x_1\le 100$）

§3 有关线性规划的定义

1. Definition: polyhedron (多面体)

Polyhedron 为一个可被描述为以下形式的集合:

$$\{\mathbf{x} \in R^n \mid A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}\}$$

其中 A 为一个 $m \times n$ 矩阵, $\mathbf{b} \in R^m$

注: LP 的标准型也是一个 polyhedron:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0 \iff A\mathbf{x} \geq \mathbf{b},\ A\mathbf{x} \leq \mathbf{b},\ I\mathbf{x} \geq 0$$ 其中 I 为单位阵

Definition 1.

A polyhedron $P \subset \mathbb{R}^n$ is the set of points that satisfy a finite number of linear inequalities; that is, $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$, where (A, b) is an $m \times (n+1)$ matrix.
A polyhedron $P \subset \mathbb{R}^n$ is bounded if there exists an $\omega \in \mathbb{R}$ such that $P \subset \{x \in \mathbb{R}^n : -\omega \leq x_j \leq \omega \text{ for } j = 1, 2, \ldots, n\}$. A bounded polyhedron is called a polytope.

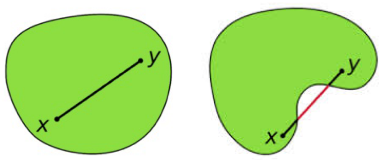
- The **intersection** of **finite** number of **linear** equalities and inequalities.
- Standard form (**a special case**): $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$.

Therefore, the feasible region of a linear program is a polyhedron.

2. Definition: convex set (凸集)

一个集合 $S \in R^n$ 被称为 convex, 若对于 $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$, $\forall \lambda \in [0,1]$, 有 $\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} \in S$.

注: 对于一个 convex set, 其内部任意两点的连线仍在集合内.



(a) Convex set (b) Non-convex set

3. Definition: convex combination (凸组合)

若对于 $\forall \mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n$ 与 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, 有 $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$, 则称 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{x}_i$ 为 $\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n$ 的一个 convex combination

4. Definition: extreme point (极值点)

令 P 为一个 polyhedron, 则称其内部一点 $\mathbf{x} \in P$ 为 extreme point, 若无法找到不同于 $\mathbf{x}$ 的两点 $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in P$ 与标量 $\lambda \in [0,1]$, 使得 $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y} + (1-\lambda)\mathbf{z}$

注: ① 若 $\mathbf{x}$ 为 P 的一个极值点, 则 $\mathbf{x}$ 无法表示为 P 内任意点的 convex combination

② $\mathbf{x}$ 也被称为 vertex, or corner of the polyhedron

例: 判断下列集合是否为 polyhedron.

(a) 满足 $x\cos\theta + y\sin\theta \leq 1$, $\forall \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 的点 $(x,y) \in R^2$ 构成的集合.

(b) $S = \{(x,y) \in R^2 \mid x^2 - 8x + 15 \leq y\}$

(c) $\varnothing$

(d) $S = \{\mathbf{x} \in R^n \mid \mathbf{x} \geq 0,\ \mathbf{x}^T \mathbf{y} \leq 1 \text{ for all } \mathbf{y} \text{ with } \|\mathbf{y}\|_2 = 1\}$

(a) X : infinite inequalities

(b) X : nonlinear inequalities

(c) √ : $\emptyset = \{x \mid x \geq 0 \text{ and } x \leq -1\}$

(d) X : $S = \{\mathbf{x} \in R^n \mid \mathbf{x} \geq 0, \|\mathbf{x}\|_2 \leq 1\}$，证明如下，

令 $S' = \{\mathbf{x} \in R^n \mid \mathbf{x} \geq 0, \|\mathbf{x}\|_2 \leq 1\}$. 证 $S' = S$:

- $\forall \mathbf{x} \in S$，若 $\mathbf{x} = 0$，则 $\mathbf{x} \in S'$ obviously

  若 $\mathbf{x} \neq 0$，则令 $\mathbf{y} = \mathbf{x} / \|\mathbf{x}\|_2$，则 $\|\mathbf{x}\|_2 = \mathbf{x}^T \mathbf{y} \leq 1$，因此 $\mathbf{x} \in S'$，即 $S \subset S'$

- $\forall \mathbf{x} \in S'$，$\mathbf{y} \in R^n$ with $\|\mathbf{y}\|_2 = 1$，由 Cauchy-Schwartz inequality，有

  $$\mathbf{x}^T \mathbf{y} \leq \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2 \leq 1$$

  即 $S' \subset S$

- 因此 $S' = S$