

# | STAT201B Lecture 7 Parametric Inference

## | 1 Location and Scale Family

🔗 Logic ▾

关于 location scale family 的更多描述, 见 [STA3020 Lecture 3](#)

### | 1.1 Definition: Location scale family

令:

- $Y$  为服从分布  $F$  的随机变量
- $F_\mu$  为  $Y + \mu$  的 distribution function
- $F_\sigma$  为  $\sigma Y$  的 distribution function
- $F_{\mu,\sigma}$  为  $\sigma Y + \mu$  的 distribution function

则

- Family  $\{F_\mu : -\infty < \mu < \infty\}$  被称为 location family (e.g.  $\mathcal{N}(\mu, 1)$ )
- Family  $\{F_\sigma : \sigma > 0\}$  被称为 scale family (e.g.  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ )
- Family  $\{F_{\mu,\sigma} : -\infty < \mu < \infty, \sigma > 0\}$  被称为 location scale family (e.g.  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ )

⚠ Remark ▾

WOLG, 我们通常假设  $\mathbb{E}[Y] = 0, \text{Var}[Y] = 1$

## | 2 Parametric Inference

### | 2.1 Parametric model

一个 parametric model 通常有以下形式:

$$\mathcal{F} = \{F(x, \theta) : \theta \in \Theta\}$$

其中  $\Theta \subset \mathbb{R}^k$  为 parametric space

⚠ Remark ▾

Class  $\mathcal{F}$  的选取通常基于我们对于特定问题的 knowledge (如 data generating mechanism), 需要特别注意是否存在违背这些 assumptions 的情形

🔗 Logic ▾

接下来我们将介绍两种 parametric estimation methods: Method of Moment 和 Maximum Likelihood Estimation

### | 2.2 Method of Moments

🔗 Logic ▾

关于 method of moments 更详细的描述, 见 [STA2004 Lecture 4](#)

令:

- parameter of interest 为  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$
- $j^{th}$  (population) moment 为

$$\alpha_j := \alpha_j(\theta) = \mathbb{E}_\theta[X^j] = \int x^j dF_\theta(x), \quad \text{for } j = 1, \dots, k$$

- $j^{th}$  sample moment 为

$$\hat{\alpha}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^j$$

则 **method of moments (MOM) estimator**  $\hat{\theta}_n$  满足:

$$\begin{aligned} \alpha_1(\hat{\theta}_n) &= \hat{\alpha}_1 \\ \alpha_2(\hat{\theta}_n) &= \hat{\alpha}_2 \\ &\dots \\ \alpha_k(\hat{\theta}_n) &= \hat{\alpha}_k \end{aligned}$$

**⚠ Remark: MOM generalization** ✓

除了考虑  $\alpha_j(\theta) = \mathbb{E}_\theta[X^j]$ , 我们还可以转而去考虑  $\alpha_j(\theta) = \mathbb{E}_\theta[g(X)^j]$ , 并且令  $\hat{\theta}_n$  满足:

$$\alpha_j(\hat{\theta}_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i)^j, \quad \text{for } j = 1, \dots, n$$

## 2.3 Maximum likelihood estimator

**🔗 Logic** ✓

关于 maximum likelihood estimator 的更多描述, 见 [STA2004 Lecture 4](#) 和 [STA3020 Lecture 7](#)

关于 likelihood function 的变种 (Composite likelihood, Quasi likelihood, Profile likelihood, Generalized profile likelihood), 见 [STA3020 Lecture 8](#), [STA3020 Lecture 9](#), [STA3020 Lecture 10](#), [STA3020 Lecture 11](#)