

STAT201B Lecture 14 Bayesian Statistics

1 Bayesian Framework

Logic: Overview

Bayesian statistics 建立在对概率的主观解释之上。

换句话说，Bayesian statistician 使用概率语言来反映关于问题的两种不同的不确定性：

1. 偶然性不确定性 (aleatory uncertainty) :

- 由系统内在的随机性或对系统的随机观察引起。
- 这种不确定性也被 frequentist statistics 所使用。

2. 认知性不确定性 (epistemic uncertainty) :

- 来源于我们对系统理解的不完全
- 科学的目的之一，就是减少这种认知性不确定性

Logic

关于 Bayesian framework 的更多论述，见 [STA3020 Lecture 25](#)

1.1 Definition: Bayesian statistics 的基本概念

Bayesian statistics 基于 Bayes Theorem:

令 $x^n = (x_1, \dots, x_n)$ 表示 the observed data, 则有

$$f(\theta|x^n) = \frac{f(x^n|\theta)f(\theta)}{f(x^n)}$$

我们由此定义以下概念：

- $f(\theta)$: the **prior** density – 在收集数据前对 θ 的先验认知
- $f(x^n|\theta)$: the **likelihood** – 给定特定的 θ , data 的 joint density
- $f(\theta|x^n)$: the **posterior** density – 在收集数据后对 θ 的后验认知
- $f(x^n)$: the **normalizing constant** – data 的 marginal distribution (可能较难求出)

△ Remark: STA3020 中的定义

- Prior distribution:** 任何定义在 parameter space Θ 上的 distribution $\Lambda(\theta|\lambda)$ 被称为 prior distribution with hyperparameter λ
- Posterior distribution:** 对于一个 sample X drawn from $f(x|\theta)$, posterior distribution $\pi(\theta|x, \lambda)$ 被定义为 θ conditional on observed $X = x$ 的概率, 即

$$\pi(\theta|x, \lambda) = \frac{f(x|\theta)\Lambda(\theta|\lambda)}{\int f(x|\theta)\Lambda(\theta|\lambda)d\theta} \propto f(x|\theta)\Lambda(\theta|\lambda) = K(\theta|x, \lambda) \cdot h(x, \lambda)$$

其中 $K(\theta|x, \lambda)$ 被称为 kernel of posterior distribution

1.2 Definition: Kernel

θ 的 density 的 **kernel** 为 density 中与 θ 有关的部分 (剔除与 θ 无关的 constant terms)

☰ Example ▾

令 $\theta \sim \mathcal{N}(m, v)$, 其中 v 已知, 求 θ 的 kernel

2 Conjugate prior

⌚ Logic ▾

Prior 的选取往往很重要, 为了便于计算, 一种常见的选取方法是选择 conjugate priors

2.1 Definition: Conjugate prior

θ 的 **conjugate prior** 满足: $f(\theta)$ 和 $f(\theta|x^n)$ 属于相同的 parametric family

⚠ Remark: STA3020 中的定义 ▾

考虑:

- distribution family $\mathcal{F} = \{f(x|\theta), \theta \in \Theta\}$ (elements 定义在 \mathcal{X} 上)
- distribution family $\mathcal{G} = \{\Lambda(\theta|\lambda), \lambda \in \tilde{\Lambda}\}$ (elements 定义在 Θ 上)

则:

- \mathcal{F} 和 \mathcal{G} 被称为 **conjugate distribution family**, 若对于 $\forall \Lambda(\theta|\lambda) \in \mathcal{G}$, 有

$$\pi(\theta|x, \lambda) = \frac{f(x|\theta)\Lambda(\theta|\lambda)}{\int f(x|\theta)\Lambda(\theta|\lambda)d\theta} \in \mathcal{G}$$

- 且 \mathcal{G} 的任意 element 被称为 **conjugate prior**

换言之, conjugate prior 和 posterior 同属于一个分布族

⚠ Remark ▾

若使用 conjugate prior, 则计算的重点在于找出 kernel, 并研究加入 likelihood 的影响前后的变化 (prior 和 posterior 的 kernels 的区别)

2.2 Conjugate priors 的例子

⌚ Logic ▾

关于 Conjugate priors 的例子, 见 [STA2004 Lecture 21](#)

☰ Example: Poisson-Gamma Model ▾

问题:

令 $X_1, \dots, X_n | \lambda \stackrel{i.i.d.}{\sim} Poisson(\lambda)$, prior 为 $\lambda \sim Gamma(a, b)$, 求 λ 的 posterior distribution

解答:

首先用 kernel function 表示 posterior, 由于

$$f(\lambda) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \cdot \lambda^{a-1} \cdot e^{-b\lambda} \propto \lambda^{a-1} \cdot e^{-b\lambda}$$

$$f(x_1, \dots, x_n | \lambda) \propto \prod_{i=1}^n e^{-\lambda} \cdot \lambda^{x_i}$$

因此 posterior 满足:

$$\begin{aligned} f(\lambda | x_1, \dots, x_n) &\propto e^{-n\lambda} \cdot \lambda^{\sum_{i=1}^n x_i} \cdot \lambda^{a-1} \cdot e^{-b\lambda} \\ &= \lambda^{(\sum_{i=1}^n x_i + a) - 1} \cdot e^{-(n+b)\lambda} \end{aligned}$$

注意到这是一个 $Gamma(a', b')$ 的 kernel, 其中 $a' = \sum_{i=1}^n x_i + a$, $b' = n + b$, 因此 posterior distribution 为 $Gamma(a', b')$

⚠ Remark ↴

注意到对于 prior, 我们有:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\lambda] &= \frac{a}{b} \\ Var[\lambda] &= \frac{a}{b^2} \end{aligned}$$

对于 posterior, 我们有:

$$\mathbb{E}[\lambda | x_1, \dots, x_n] = \frac{\sum_{i=1}^n x_i + a}{n + b} = \frac{n}{n + b} \cdot \bar{X} + \frac{b}{n + b} \cdot \frac{a}{b}$$

因此这里的 posterior mean 可以视作 sample mean 和 prior mean 的一个 weighted sum

当数据量足够大, 即 $n \rightarrow \infty$ 时, sample mean 占主导; 当数据量较小, 即 $n \rightarrow 0$ 时, prior mean 占主导

⚠ Remark ↴

若 Gamma distribution 使用 scale parameter, 则 posterior 可以通过以下计算求得:

2. 常见的 conjugate model: Poisson-Gamma model

- 假设 $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ 为服从 $Poisson(\theta)$ 的 i.i.d. sample, 则 X 有 density (likelihood)

$$P(X | \theta) = \prod_{j=1}^n \frac{\theta^{x_j} e^{-\theta}}{x_j!}$$

- 一个 conjugate prior 为 $Gamma(\alpha, \beta)$, α 与 β 已知,

$$\pi(\theta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha) \beta^\alpha} \theta^{\alpha-1} e^{-\frac{\theta}{\beta}}$$

- 则 posterior distribution 为

$$\begin{aligned} P(\theta | X) &\propto P(X | \theta) \cdot \pi(\theta) \\ &\propto \prod_{j=1}^n \theta^{x_j} e^{-\theta} \cdot \theta^{\alpha-1} e^{-\frac{\theta}{\beta}} \\ &= \theta^{\sum x_j + \alpha - 1} e^{-(n + \frac{1}{\beta})\theta} \end{aligned}$$

因此

$$P(\theta | X) = \frac{1}{\Gamma(\tilde{\alpha}) \tilde{\beta}^{\tilde{\alpha}}} \theta^{\tilde{\alpha}-1} e^{-\frac{\theta}{\tilde{\beta}}}$$

其中

$$\tilde{\alpha} = \alpha + \sum_j x_j, \quad \tilde{\beta} = \frac{\beta}{1+n\beta}$$

三 Example: Normal-Normal Model

3. posterior distribution 的计算: $\text{data} \sim N$, prior $\sim N$

假设 $\mu \sim N(\nu, \tau^2)$, 且 $\text{data } x_1, \dots, x_n \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其中 σ^2 已知.

求 posterior 分布的均值与方差

Step ①: 写出 prior $\pi(\mu)$

$$\pi(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau^2}} \exp\left(-\frac{(\mu-\nu)^2}{2\tau^2}\right)$$

Step ②: 写出 data distribution $f(x_i | \mu)$

$$f(x_i | \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Step ③: 写出 $f(x_1, \dots, x_n | \mu)$

$$f(x_1, \dots, x_n | \mu) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^n} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2\right)$$

Step ④: 写出 joint distribution $f(x_1, \dots, x_n, \mu)$

$$f(x_1, \dots, x_n, \mu) = \frac{1}{(2\pi\tau^2)^{\frac{1}{2}} \times (2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2 - \frac{(\mu-\nu)^2}{2\tau^2}\right)$$

注: 接下来我们不必计算 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n, \mu) d\mu$, 因为对于关于 μ 的函数 $f(\mu | x_1, \dots, x_n)$, 这一项相当于常数 (与 μ 无关), 因此 $f(\mu | x_1, \dots, x_n) = C \pi(\mu) f(x_1, \dots, x_n | \mu) \propto \pi(\mu) f(x_1, \dots, x_n | \mu)$.

通过观察 $\pi(\mu) f(x_1, \dots, x_n | \mu)$, 我们同样可以得到 posterior 分布. (C 被称为 normalizing constant)

如 $f(x) \propto \exp(-\frac{1}{2\sigma^2} x^2)$, 则可知 $x \sim N(0, \sigma^2)$

Step ⑤: 写出与 posterior 成正比的项, 整理并求出 posterior 分布

$$\begin{aligned} f(\mu | x_1, \dots, x_n) &\propto f(x_1, \dots, x_n, \mu) \\ &\propto \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2 - \frac{(\mu-\nu)^2}{2\tau^2}\right) \quad (\text{消除与 } \mu \text{ 无关的项}) \\ &= \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i^2 + \mu^2 - 2x_i\mu) - \frac{1}{2\tau^2} (\mu^2 + \nu^2 - 2\nu\mu)\right] \\ &\propto \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} (n\mu^2 - 2n\bar{x}\mu) - \frac{1}{2\tau^2} (\mu^2 - 2\nu\mu)\right] \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{2} \left[\left(\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau^2}\right) \mu^2 - \left(\frac{2n\bar{x}}{\sigma^2} + \frac{2\nu}{\tau^2}\right) \mu\right]\right\} \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau^2}\right) [\mu^2 - 2 \frac{\frac{n\bar{x}}{\sigma^2} + \frac{\nu}{\tau^2}}{\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau^2}} \mu]\right\} \\ &\propto \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{n\bar{x}^2 + \nu^2}{\sigma^2 + \tau^2} (\mu - \frac{n\bar{x}\tau^2 + \sigma^2\nu}{n\tau^2 + \sigma^2})^2\right] \end{aligned}$$

$$\mu | x_1, \dots, x_n \sim N(\nu_p, \tau_p^2)$$

$$\text{其中 } \nu_p = \frac{n\bar{x}\tau^2 + \sigma^2\nu}{n\tau^2 + \sigma^2} = \nu \times \frac{\sigma^2}{n\tau^2 + \sigma^2} + \bar{x} \times \frac{n\tau^2}{n\tau^2 + \sigma^2}$$

$$\tau_p^2 = \frac{\sigma^2\tau^2}{n\tau^2 + \sigma^2}$$

注: ① 由此可以构建出 μ 的 $1-\alpha$ CI (Bayesian confidence interval):

$$A = [\nu_p - \sqrt{\frac{\sigma^2\tau^2}{n\tau^2 + \sigma^2}} \cdot z_{\alpha/2}, \nu_p + \sqrt{\frac{\sigma^2\tau^2}{n\tau^2 + \sigma^2}} \cdot z_{\alpha/2}]$$

$$P(\mu \in A | x_1, \dots, x_n) = 1-\alpha$$

② 当 sample size n 为 0 时, $\tau_p^2 = \tau^2$, $\nu_p = \nu$ (posterior = prior)

当 sample size $n \rightarrow \infty$ 时, $\tau_p^2 \approx \frac{\sigma^2}{n}$, $\nu_p \approx \bar{x}$ (posterior \approx frequentist point of view)

这被视作从 'experience' 到 'data' 的 transition.

当样本容量较小时, 'experience' RP prior distribution dominates the posterior distribution

当样本容量较大时, 'data' dominates the posterior distribution

三 Example: Beta-Binomial Model

3. 常见的 conjugate model: Beta-binomial model

- 假设 $X = \{X_1, \dots, X_n\}$ 为服从 Binomial(m_j, θ) (m_j 为 fixed constant) 的独立 sample. 则 X 有 density

$$P(X|\theta) = \prod_{j=1}^n \binom{m_j}{X_j} \theta^{X_j} (1-\theta)^{m_j-X_j}$$
- 一个 conjugate prior 为 Beta(α, β), α 与 β 已知,

$$\pi(\theta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \theta^{\alpha-1} (1-\theta)^{\beta-1}$$
- [B] posterior distribution 为

$$P(\theta|X) \propto P(X|\theta) \cdot \pi(\theta)$$

$$\propto \theta^{\alpha-1} (1-\theta)^{\beta-1} \theta^{\sum_j X_j} (1-\theta)^{\sum_j (m_j-X_j)}$$

$$\propto \theta^{\sum_j X_j + \alpha - 1} (1-\theta)^{\sum_j (m_j-X_j) + \beta - 1}$$

因此

$$P(\theta|X) = \frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta})}{\Gamma(\tilde{\alpha})\Gamma(\tilde{\beta})} \theta^{\tilde{\alpha}-1} (1-\theta)^{\tilde{\beta}-1}$$

其中

$$\tilde{\alpha} = \alpha + \sum_j X_j, \quad \tilde{\beta} = \beta + \sum_j (m_j - X_j)$$

例 Example: Inverse Gamma-Normal Model

4. 常见的 conjugate model: Inverse Gamma - Normal model

- 假设 $X = \{X_1, \dots, X_n\}$ 为服从 $N(\mu, \sigma^2)$ 的 i.i.d. sample (其中 μ 已知). 则 X 有 density

$$P(X|\sigma^2) = \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(X_j-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$
- 一个 conjugate prior 为 Inverse-Gamma distribution, $IG(\alpha, \beta)$, α 与 β 已知,

$$\pi(\sigma^2) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} (\sigma^2)^{-\alpha-1} e^{-\frac{\beta}{\sigma^2}}$$
- [B] posterior distribution 为

$$P(\sigma^2|X) \propto P(X|\sigma^2) \cdot \pi(\sigma^2)$$

$$\propto \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(X_j-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot (\sigma^2)^{-\alpha-1} e^{-\frac{\beta}{\sigma^2}}$$

$$\propto (\sigma^2)^{-\frac{n}{2}-\alpha-1} e^{-\frac{\beta + \frac{1}{2}\sum_j (X_j-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

因此

$$P(\theta|X) \sim IG(\alpha + \frac{n}{2}, \beta + \frac{1}{2}\sum_j (X_j - \mu)^2)$$

注: 关于 Inverse-Gamma distribution:

若 r.v. $X \sim IG(\alpha, \beta)$, $X > 0$, [B]

$$\pi(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} (x)^{-\alpha-1} e^{-\frac{\beta}{x}}$$

令 $Y = \frac{1}{x}$. 则 $X = \frac{1}{Y} = h(Y)$, $h'(y) = -\frac{1}{y^2}$, 因此

$$\begin{aligned} \pi(y) &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{y}\right)^{-\alpha-1} e^{-\beta/y} \cdot \left| -\frac{1}{y^2} \right| \\ &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha+1-2} e^{-\beta y} \\ &\sim \text{Gamma}(\alpha, \frac{1}{\beta}) \end{aligned}$$

例 Example: Beta-Geometric Model (补充)

5. 常见的 conjugate model: Beta - Geometric model

- 假设 $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ 为服从 $\text{Geo}(\theta)$ 的 i.i.d. sample. 则 X 有 density
$$P(X|\theta) = \prod_{j=1}^n (1-\theta)^{x_j-1} \theta$$
- 一个 conjugate prior 为 $\text{Beta}(\alpha, \beta)$, α 与 β 已知,
$$\pi(\theta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \theta^{\alpha-1} (1-\theta)^{\beta-1}$$
- 则 posterior distribution 为

$$\begin{aligned} P(\theta|X) &\propto P(X|\theta) \cdot \pi(\theta) \\ &\propto \prod_{j=1}^n (1-\theta)^{x_j-1} \theta \cdot \theta^{\alpha-1} (1-\theta)^{\beta-1} \\ &= \theta^{n+\alpha-1} (1-\theta)^{\sum x_j + \beta - n - 1} \end{aligned}$$

因此

$$P(\theta|X) = \frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta})}{\Gamma(\tilde{\alpha})\Gamma(\tilde{\beta})} \theta^{\tilde{\alpha}-1} (1-\theta)^{\tilde{\beta}-1}$$

其中

$$\tilde{\alpha} = \alpha + n, \quad \tilde{\beta} = \sum_j x_j + \beta - n$$

注: 还有其他 pairs, 如 Beta - Negative binomial model

Logic ▾

除了能使计算更加简单的 conjugate prior, prior 还有其他几种选择, 主要有以下几种学派:

1. Subjective Bayesianism (主观贝叶斯学派)

- 观点: prior 应尽可能反映研究者对问题的 uncertainty 的 prior knowledge
- 实现方式: 通过 prior elicitation 方法, 从专家或研究者的知识中构建先验。

2. Objective Bayesianism (客观贝叶斯学派)

- 观点: prior 应尽量减少主观信息, 使结果尽可能 objective (让数据在推断中起主导作用)
- 实现方法: 使用 non-informative priors

3. Robust Bayesianism (稳健贝叶斯学派)

- 观点: 不同的人可能持有不同的 priors, 且 priors 难以被精确表达, 因此, 应研究结果关于 prior 的选择的 sensitivity
- 实现方法: 确保推断在合理的 change of prior 下仍然稳定可靠

Logic ▾

常见的 prior 包括 non-informative prior (Jeffrey's prior) 和 improper prior

关于 non-informative prior 和 improper prior 的详细论述, 见 [STA3020 Lecture 25](#)

3 Non-Informative Prior 和 Improper Prior

Non-informative prior 的目的是让数据本身 (而不是 prior assumption) 在推断中占主要作用, 常见的 non-informative prior 包括:

- uniform prior
- Jeffrey's prior

其中, Jeffrey's prior 的一个特殊性质是 **transformation invariant** (在 one-dimensional 情况下), 即在不同参数化下形式不变

3.1 Definition: Jeffrey's prior

若 sample $X_1, \dots, X_n \sim f(x|\theta)$, 其 information matrix 为 $I_n(\theta)$, 则 Jeffrey's prior 被定义为:

$$f(\theta) \propto (\det(I_n(\theta)))^{\frac{1}{2}}$$

⚠ Remark ▾

在 θ 为 one-dimensional 的情况下, Jeffrey's prior 有以下性质:

- Jeffrey's prior 的形式为:

$$f(\theta) \propto (I_n(\theta))^{\frac{1}{2}}$$

- Jeffrey's prior is invariant under reparametrization, 即对于 reparametrization $\phi = h(\theta)$, 有

$$\begin{aligned} f_\phi(\phi) &= f_\theta(\theta) \cdot \left| \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right| \quad (\text{change of variable}) \\ &\propto I_n(\theta)^{\frac{1}{2}} \cdot \left| \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right| \\ &= I_n(\phi)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{Fisher information 的性质}) \end{aligned}$$

- Jeffrey's prior 为 non-informative prior, 因为其 maximizes prior 和 posterior 之间的 KL 散度的期望值. 由于 $f(\theta)$ 和 $f(\theta|x)$ 之间的 gap 是 x 的 information, 因此 Jeffrey's prior 可以被视作保留了最多的 x 的 information, 即令 posterior 保留了最少的 θ 的 information

3.2 Definition: Improper prior (补充)

令 sample $X \sim f(x|\theta)$, 则定义在 Θ 上的 prior function $f(\theta)$ 被称为 **improper prior**, 若

- $f(\theta) \geq 0$ (类似于 pdf, 非负)
- $\int_{\Theta} f(\theta) d\theta = \infty$ (区别于 pdf, 且不能被 normalize 成 pdf)
- $\int_{\Theta} f(x|\theta)f(\theta) d\theta < \infty$ (确保 marginal 是 pdf, 或能被 normalize 成 pdf)

⚠ Remark ▾

尽管名字为 improper prior, 但它可以是一个 prior 的 proper choice

☰ Example ▾

1. 对于 location family with location parameter μ 且 $\Theta = \mathbb{R}$, 则一个常用的 improper prior 为 $f(\theta) \equiv 1$
2. 对于 scale family with scale parameter σ 且 $\Theta = (0, \infty)$, 则一个常用的 improper prior 为 $f(\sigma) = \frac{1}{\sigma}$

3.3 Uniform prior

- 当 θ 的取值范围是有限区间时: uniform prior 为 proper prior
- 当 θ 的取值范围是无限区间时: uniform prior 为 improper prior

Example

若 $X_1, \dots, X_n \stackrel{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}(\theta, 1)$, 则可以选择 uniform prior $f(\theta) \propto 1$, 此时 posterior 为

$$\begin{aligned} f(\theta|x^n) &\propto f(x^n|\theta)f(\theta) \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{2}[n\theta^2 - 2n\theta\bar{X}_n] \right\} \end{aligned}$$

为 $\mathcal{N}(\bar{X}_n, 1/n)$ 的 kernel

4 Bayesian Estimation

Logic

在 Bayesian statistics 中, 所有的 inference 都是基于 posterior distribution, 类似于 frequentist statistics, 我们可以利用 posterior 进行 point estimation

关于 Bayesian estimator 的更多论述, 见 [STA3020 Lecture 26](#)

4.1 Definition: Average risk (补充)

Logic

在 point estimation 中, 我们将关于 parameter θ 和 estimator δ 的 loss function 和 risk function 分别定义为 $\mathcal{L}(\theta, \delta)$ 和 $R(\theta, \delta) = \mathbb{E}_{\theta}[\mathcal{L}(\theta, \delta)] = \int \mathcal{L}(\theta, \delta) dF(x|\theta)$, estimator δ 应 minimize risk

但在 Bayesian analysis 中, $\theta \in \Theta$ 为 random variable. 考虑 $\theta = \theta_0$ 时的 $\mathcal{L}(\theta_0, \delta)$ 和 $R(\theta_0, \delta)$ 并不足够, 因此我们考虑 average risk

令:

1. loss function 为 $\mathcal{L}(\theta, \delta)$
2. risk function 为 $R(\theta, \delta) = \mathbb{E}_{\theta}[\mathcal{L}(\theta, \delta)]$
3. prior distribution 为 $\Lambda(\theta|\lambda)$

则 average risk 被定义为:

$$\begin{aligned} r(\Lambda, \delta) &= \mathbb{E}[R(\theta, \delta)] \\ &= \int_{\Theta} R(\theta, \delta) d\Lambda(\theta|\lambda) \\ &= \int_{\Theta} \int_{\mathcal{X}} \mathcal{L}(\theta, \delta) dF(x|\theta) d\Lambda(\theta|\lambda) \end{aligned}$$

Remark

average risk 实际上是关于 λ 的函数, 但我们在 notation $r(\Lambda, \delta)$ 中省略了 λ

4.2 Definition: Bayesian estimator (补充)

任意 minimize average risk $r(\Lambda, \delta)$ 的 estimator δ 被称为一个 Bayesian estimator w.r.t prior Λ

△ Remark ↴

对于 Bayesian estimator 的求解方法, 见 [STA3020 Lecture 26](#)

4.3 特定 loss function 下的 Bayesian estimator (补充)

在特定 condition 下, 有以下结论:

1. 令 $\mathcal{L}(g(\theta), \delta) = (\delta - g(\theta))^2$ (quadratic loss),
则 $\delta_\Lambda(X) = \mathbb{E}[g(\theta)|X]$ (posterior mean)
2. 令 $\mathcal{L}(g(\theta), \delta) = \omega(\theta)(\delta - g(\theta))^2$ (weighted quadratic loss),
则 $\delta_\Lambda(X) = \frac{\int \omega(\theta)g(\theta)\cdot\pi(\theta|x)d\theta}{\int \omega(\theta)\cdot\pi(\theta|x)d\theta}$ ($\frac{\text{posterior weighted mean}}{\text{weight mean}}$)
3. 令 $\mathcal{L}(g(\theta), \delta) = |\delta - g(\theta)|$ (absolute loss),
则 $\delta_\Lambda(X) = \text{median}[g(\theta)|X]$ (posterior median)

4.4 一个常见的 Bayesian estimator: posterior mean

Posterior mean 通常被用作 point estimator:

$$\mathbb{E}[\theta|X_1, \dots, X_n] = \int \theta \cdot f(\theta|X_1, \dots, X_n)d\theta$$

△ Remark ↴

Posterior mean 通常可被写作 prior mean 和 MLE (常为 MLE) 的 weighted sum, 这点在接下来的两个例子中有很好的展现

例 2: (Binomial-Beta conjugacy) ↴

令 random sample $X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} \text{Ber}(p)$, 令 p 的 prior 为 $\text{Beta}(\alpha, \beta)$.

求 quadratic loss 对应的 p 的 Bayesian estimator

(Step 1: 求出 posterior distribution)

$$\begin{aligned}\pi(p|x) &\propto f(x|p) \cdot \Lambda(p|\alpha, \beta) \\ &\propto \prod_{i=1}^n p^{x_i} (1-p)^{1-x_i} \cdot p^{\alpha-1} (1-p)^{\beta-1} \\ &= p^{\alpha+\sum x_i-1} (1-p)^{\beta+n-\sum x_i-1}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow p|x \sim \text{Beta}(\alpha + \sum x_i, \beta + n - \sum x_i)$$

(Step 2: 求出 posterior mean)

$$\Rightarrow \delta_\Lambda(X) = E[p|x] = \frac{\alpha + \sum x_i}{n + \alpha + \beta} = \underbrace{\frac{\alpha + \beta}{n + \alpha + \beta} \cdot \frac{\alpha}{\alpha + \beta}}_{\text{mean of prior}} + \underbrace{\frac{n}{n + \alpha + \beta} \cdot \bar{x}}_{\text{mean of sample}}$$

注: Bayesian estimator 可以看成 mean of prior 和 mean of sample 的 weighted sum.

① 若 $n \rightarrow \infty$, 则 $\delta_\Lambda(X) \rightarrow \bar{x}$ (此时 $\alpha = \beta = 0$ 为一个 improper prior)

② 若 $\alpha \rightarrow \infty, \beta \rightarrow \infty, \alpha/\beta \rightarrow C < \infty$, 则 $\delta_\Lambda(X) \rightarrow \frac{C}{1+C}$

例 4: Normal mean Bayesian estimator

例 4: (Normal mean Bayes estimator)

全 random sample $X_1, \dots, X_n \sim N(\theta, \sigma^2)$, 其中 σ^2 已知. 今日的 prior 为 $N(\mu, \tau^2)$.

求 quadratic loss 对应的今日的 Bayesian estimator

(Step 1: 找出 posterior distribution)

$$\begin{aligned}\pi(\theta|x) &\propto f(x|\theta) \cdot \pi(\theta|\mu, \tau^2) \\ &\propto \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum (X_i - \theta)^2\right) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2\tau^2} (\theta - \mu)^2\right) \\ &\propto \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} n\theta^2 + \frac{2\theta}{\sigma^2} \sum X_i\right) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2\tau^2} \theta^2 + \frac{2\theta}{\tau^2} \cdot \mu\right) \\ &\propto \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau^2}\right) \left(\theta - \frac{n\bar{X}/\sigma^2 + \mu/\tau^2}{n/\sigma^2 + 1/\tau^2}\right)^2\right\}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \theta|x \sim N\left(\frac{n\bar{X}/\sigma^2 + \mu/\tau^2}{n/\sigma^2 + 1/\tau^2}, \frac{1}{n/\sigma^2 + 1/\tau^2}\right)$$

(Step 2: 找出 posterior mean)

$$\Rightarrow \delta_{\Lambda}(x) = E[\theta|x] = \frac{n\bar{X}/\sigma^2 + \mu/\tau^2}{n/\sigma^2 + 1/\tau^2} = \underbrace{\frac{n/\sigma^2}{n/\sigma^2 + 1/\tau^2} \cdot \bar{X}}_{\text{mean of sample}} + \underbrace{\frac{1/\tau^2}{n/\sigma^2 + 1/\tau^2} \cdot \mu}_{\text{mean of prior}}$$

5 Credible Interval (Posterior Interval)

Logic

关于 credible interval 的更多论述, 见 [STA4042 Lecture 15](#)

5.1 Definition: Credible interval (Posterior interval)

θ 的一个 $1 - \alpha$ credible interval C_n 满足:

$$\mathbb{P}(\theta \in C_n | X_1, \dots, X_n) = 1 - \alpha$$

△ Remark: Credible interval 和 confidence interval 的区别

相较于 confidence interval, credible interval 有以下不同:

- Credible interval 是一个关于 θ (而不是 C_n , 关于 X_1, \dots, X_n 的一个 function) 的 statement
- Credible interval 是一个 equality statement, 这点有别于 frequentist interval (给 probability of coverage 设定了一个 lower bound), 这是因为 credible interval 只是提供了一个 summary of posterior distribution
- Credible interval 不一定有很好的 frequentist coverage rates

例 Example

令:

- $X \sim \text{Bernoulli}(p)$
- 只观测到一个样本 ($n = 1$)
- prior distribution 为 $p \sim \text{Uniform}(0, 1)$

此时,

- 若观测到 $X = 1$, 则 $p|X \sim \text{Beta}(2, 1)$, 95% posterior interval $\approx [0.0526, 0.997]$
- 若观测到 $X = 0$, 则 $p|X \sim \text{Beta}(1, 2)$, 95% posterior interval $\approx [0.003, 0.947]$

若重复很多次实验 (每次只抽一个样本), 我们研究有多大比例的 credible interval 会覆盖 true value p :

- 若 $p = 0.1$, 则无论观测值是 0 还是 1, 都 100% 会覆盖 true value
- 若 $p = 0.001$, 则无论观测值是 0 还是 1, 都 100% 不会覆盖 true value
- 若 $p = 0.999$, 则无论观测值是 0 还是 1, 都 100% 不会覆盖 true value

换言之, 这种 credible interval 的 frequentist coverage 不是 95%, 而且取决于 true value p

⚠ Remark ▾

相较于 report an interval, 直接作出 $f(\theta|x^n)$ 的图像往往更 informative

| 5.2 求 credible interval 的方法: equal-tail credible interval

The $1 - \alpha$ equal-tail credible interval (a, b) 满足:

$$\int_{-\infty}^a f(\theta|x^n) d\theta = \int_b^\infty f(\theta|x^n) d\theta = \alpha/2$$

即区间左侧的 cdf 和右侧的 tail probability 相等

| 5.3 求 credible interval 的方法: highest posterior density (HPD)

The highest posterior density (HPD) region R_n 满足:

- $\mathbb{P}(\theta \in R_n | x^n) = 1 - \alpha$
- $R_n = \{\theta : f(\theta|x^n) > k\}$ for some k

⚠ Remark ▾

若 $f(\theta|x^n)$ 为 unimodal, 则 R_n 为一个 interval