STAT201B Lecture 1 Introduction to Inference

1 Inference 的类型

1.1 Inference methods 的类型

- **Nonparametric inference 非参数推断**
- **Parametric inference 参数推断**
  - Frequentist inference 频率学派推断
    - 使用 **long-run frequencies** of events 来 interprets probability
    - 将 parameters 视为 unknown 且 fixed 的
    - 关注 point estimation, confidence intervals, 和 hypothesis testings
  - Bayesian inference 贝叶斯学派推断
    - 使用 **degree of belief** 来 interprets probability
    - 作出 probability statements about parameters, 用来翻译 beliefs
    - 使用 posterior distribution 来进行 inference

1.2 Inference problems 的类型

- point estimation 点估计
- confidence set 置信区间
- hypothesis testing 假设检验

1.3 Inference models 的类型

Logic

令 statistical model $\mathcal{F}$ 表示 (这个模型所能覆盖的) 一系列 possible distributions, 则有以下模型类型

- **Parametric models 参数模型:**
  使用**有限数量**的参数, 通常研究 a family of distributions indexed by those parameters, 如$Y_i \sim \mathcal{N}(\beta_0 + \beta_1 x_i, \sigma^2)$
  - 使用 θ 来表示 an arbitrary parameter
  - 使用 θ 作为下标来表示 F_Y 取决于 θ, 如 $P_\theta(Y \in A)$
- **Nonparametric models 非参数模型:**
  使用**无限数量** (能表示无限阶 moments) 的参数, 通常被称为 distribution free (表示对于 distribution family 的限制很少)

2 Point estimation

2.1 Definition: point estimator

- **statistic**是一个 function of data
- **point estimator**是一个 function of data, 用来表示单个 "best guess" of parameter θ

2.2 Estimator 和 estimate 的 notation

- 称 $\hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$ (一个 r.v.) 为 **estimator**
- 称 $\hat{\theta}(x_1, \ldots x_n)$ (一个 realization) 为 estimate

Remark

使用 $\hat{\theta}$ 和 $\hat{\theta}_n$ 皆可

2.3 Point estimator 的 evaluation

Logic

将在 decision theory 处详细讲解, 此处只是简单介绍部分 properties

- **Bias**:

$$bias(\hat{\theta}_n) = \mathbb{E}_\theta[\hat{\theta}_n] - \theta$$

  若 bias 为 0, 则称 $\hat{\theta}_n$ 为 unbiased

- **Standard error:**

$$se(\hat{\theta}_n) = \sqrt{V_\theta(\hat{\theta}_n)}$$

- **Mean squared error:**

$$\begin{aligned} MSE(\hat{\theta}_n) &= \mathbb{E}_\theta[(\hat{\theta}_n - \theta)^2] \\ &= bias^2(\hat{\theta}_n) + V_\theta[\hat{\theta}_n] \end{aligned}$$

2.4 Definition: Consistency

若 $\hat{\theta}_n \xrightarrow{p} \theta$, 则称 $\hat{\theta}_n$ 为 **(weakly) consistent**

Example

令 $X_1, \ldots, X_n$ 为 iid, 且 $\mathbb{E}[X_1] = \mu$, $Var[X_1] = \sigma^2 < \infty$;
则 (使用 Chebyshev inequality 易证)

- $\bar{X}_n \xrightarrow{p} \mu$
- $S_n^2 \xrightarrow{p} \sigma^2$

Remark

若 $MSE_n \to 0$, 则 $\hat{\theta}_n \xrightarrow{p} \theta$

2.5 Theorem: continuous mapping theorem (连续映射定理)

若函数 $g : R \to R$ 为continuous,
则

1. $X_n \xrightarrow{d} X \Rightarrow g(X_n) \xrightarrow{d} g(X)$
2. $X_n \xrightarrow{p} X \Rightarrow g(X_n) \xrightarrow{p} g(X)$

2.6 Theorem: Slutsky's theorem (斯拉茨基定理)

1. 若 $X_n \xrightarrow{d} X$, $Y_n \xrightarrow{p} c$ ($Y_n \xrightarrow{d} c$ 可直接推出 $Y_n \xrightarrow{p} c$),
   则
   - $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + c$
   - $X_n Y_n \xrightarrow{d} cX$
   - $\frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{d} \frac{X}{c}$ (若 $c \neq 0$)

2. 若 $X_n \xrightarrow{p} X$, $Y_n \xrightarrow{p} Y$,
   则
   - $X_n + Y_n \xrightarrow{p} X + Y$
   - $X_n Y_n \xrightarrow{p} XY$
3. 若 $X_n \xrightarrow{L^p} X$, $Y_n \xrightarrow{L^p} Y$,
   则
   - $X_n + Y_n \xrightarrow{L^p} X + Y$

> ⚠ **Remark**
>
> 若$X_n \xrightarrow{d} X$, $Y_n \xrightarrow{d} Y$, 则无法推出$X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + Y$

2.7 Definition: Asymptotic normality

若

$$\frac{\hat{\theta}_n - \theta}{se(\hat{\theta}_n)} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

则称 $\hat{\theta}_n$ 为 **asymptotic normal**

> ⚠ **Remark**
>
> 通常可以使用 Slutsky's theorem 将 $se(\hat{\theta}_n)$ 替换成某个 weakly consistent 的 estimator $\hat{\sigma}_n$

3 Confidence Sets

3.1 Definition: Confidence sets

θ 的 $1 - \alpha$ confidence set 为一个 (根据 data 计算得到的) interval C_n, 其满足对于任意 θ

$$\mathbb{P}_\theta(\theta \in C_n) \geq 1 - \alpha$$

其中 $1 - \alpha$ 被称为 coverage of the interval

> ⚠ **Remark**
>
> 上述 probability statement 是关于 C_n 的, 不是关于 θ (此处被视作 fixed true value) 的

4 Hypothesis testing

4.1 Definition: Hypothesis testing

Hypothesis testing 是一种用来 evaluating evidence against some default theory (**null hypothesis**) 的方法

4.2 Hypothesis testing 的流程

1. 构造 test statistics (一个关于 data 的 function)
2. 考虑 test statistics 的 sampling distribution
3. 求出 test statistics 的某个 "extreme" value 来作为 evidence against the null hypothesis

4.3 Neyman-Pearson framework 下的 hypothesis testing

在 Neyman-Pearson framework 下, hypothesis testing 通常采用以下 decision rule:

- 若 test statistics 超过某个预先设置的 threshold, 则 reject null hypothesis

- 否则 do not reject null hypothesis

4.4 Hypothesis 的 evaluation

Hypothesis 可以根据 4 种 possible outcomes 来进行 evaluation:

- null hypothesis true 或 null hypothesis false
- reject null hypothesis 或 retain null hypothesis