

# Diagramas de Carter-Penrose no Estudo de Buracos Negros

João Paulo Monteiro

Felipe Khalil

25 de junho de 2025

## Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Diagrama de espaço-tempo nas coordenadas de Schwarzschild	1
<b>2</b>	<b>Transformações Conformes</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>“Receita” para Diagramas de Penrose</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Coordenadas de Krushal-Szekeres</b>	<b>4</b>
<b>5</b>	<b>Aplicações Simples do Diagrama de Penrose</b>	<b>4</b>
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>4</b>

## 1. Introdução

Uma das primeiras dificuldades que surgem em relatividade geral no estudo de buracos negros é a falta de uma representação visual e geométrica do que está acontecendo no entorno desses objetos. Tais representações não são, de fato, *necessárias* para o entendimento da física de buracos negros; contudo, veremos que serão de grande utilidade para explicitar (e até revelar) algumas propriedades fundamentais do espaço-tempo na presença de corpos massivos.

Mas para quê mais diagramas? - alguém pode se perguntar. Afinal, o diagrama de Minkowsky cumpre bem sua função para um espaço-tempo plano, vazio de matéria e homogêneo; a princípio, bastaria buscar algum tipo de “extensão natural” desse diagrama para espaços-tempos curvos, mantendo a estrutura cartesiana. É isso que iremos fazer agora, e pelo título do nosso trabalho, já adiantamos que coisas não muito agradáveis surgirão dessa primeira alternativa.

### 1.1 Diagrama de espaço-tempo nas coordenadas de Schwartzschild

Considere a métrica de Schwartzchild, a única solução com simetria esférica da equação de Einstein no vácuo, expressa em coordenadas esféricas  $(t, r, \theta, \varphi)$ :

$$g = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt \otimes dt + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr \otimes dr + r^2(d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi)$$

Notação: sempre que tivermos dois produtos tensoriais envolvendo coordenadas idênticas, escreveremos de forma mais “relaxada”; e mesmo se não forem idênticas, ainda omitiremos o símbolo de produto tensorial, apenas tomando o cuidado de respeitar a ordem dos produtos, como segue:

$$\begin{aligned} dx^\mu \otimes dx^\mu &:= (dx^\mu)^2, \\ dx^\mu \otimes dx^\nu &:= dx^\mu dx^\nu \end{aligned}$$

Além disso, por vezes denotaremos o termo esférico da métrica de Schwartzchild por

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$$

(já empregando a primeira convenção de notação), onde  $d\Omega^2$  é identificado como a métrica da 2-esfera unitária (ou o elemento de arco sobre a 2-esfera unitária, se preferir).

□

Para representar o espaço-tempo nessa situação, e avaliar as relações de causalidade determinadas pelos cones de luz, vamos avaliar as geodésicas nulas descritas por essas coordenadas, sob essa métrica<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Como, ao longo do curso, optamos por trabalhar com o cálculo da geodésica a partir dos símbolos de conexão, seguiremos por esse caminho, mas vale ressaltar que o mesmo cálculo também é possível (e às vezes até mais conveniente) a partir de princípios variacionais com uma Lagrangiana apropriada em mãos, conforme feito em [1].

Por simplicidade, consideraremos geodésicas radiais, isto é, com ângulos  $\theta$  e  $\varphi$  fixos, portanto,  $d\theta = d\varphi = 0$ . Isso já simplifica muito a métrica, pois todo o termo  $d\Omega^2$  vai a zero.

Além disso, para geodésicas nulas, sabemos que a aplicação da métrica em qualquer vetor tangente dessa geodésica resulta em zero, isto é,  $g(u_\gamma, u_\gamma) = 0$ , o que nos leva a inferir que, nessa curva, a métrica é nula em todo ponto.

Para uma conexão compatível com a métrica, os símbolos de conexão são dados pelos **Símbolos de Christoffel**, que podem ser calculados pela fórmula:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu})$$

Para o cálculo da equação geodésica para a coordenada temporal  $t$ , precisaremos apenas dos símbolos  $\Gamma_{\mu\nu}^t$ , com  $\mu, \nu = t, r, \theta, \varphi$ . Por sorte, nessa métrica apenas um destes é não-nulo, a saber:

$$\Gamma_{rt}^t = \frac{GM}{r^2} \left( 1 - \frac{2GM}{r^2} \right)^{-1}$$

Usando essa expressão na equação da geodésica para um parametro afim  $\lambda$

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\sigma}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0$$

e extraíndo dela apenas a equação para a coordenada temporal, fazendo  $\mu = t$ , e ainda com algumas manipulações que omitiremos aqui, obtemos\*:

$$\left( 1 - \frac{2GM}{r} \right) \dot{t} = k = cte^\dagger \rightsquigarrow \dot{r} = \pm k \Rightarrow \boxed{r = \pm k\lambda} \quad (1)$$

Isso caracteriza  $r$  como um outro parâmetro afim! De forma que podemos reparametrizar a coordenada  $t(\lambda) \rightarrow t(r) = t(\pm k\lambda)$ . O restante dos procedimentos pode ser encontrado em [1] e [Nelson] bem desenvolvidos, resultando em duas famílias de geodésicas para a coordenada  $t$ :

$$t_{in}(r) = r_0 - r - 2GM \log \left( \frac{r - 2GM}{r_0 - 2GM} \right) \quad (2)$$

$$t_{out} = r - r_0 + 2GM \log \left( \frac{r - 2GM}{r_0 - 2GM} \right) \quad (3)$$

Ao plotar as várias curvas provenientes das equações (2) e (3) num diagrama  $(t, r)$ , escolhendo diversos valores para a constante  $r_0$  (que marca a posição de um observador fixo), obtemos o diagrama da figura 1.

Note a distorção sofrida pelos cones de luz ao se aproximarem e se afastarem do horizonte de eventos. Note também que esse diagrama, representado com essas coordenadas, poderia

---

\*levando a relação envolvendo  $\dot{t}$  e a constante  $k$  na equação da métrica e igualando-a a zero (geodésica tipo luz, nula) obtemos a relação destacada para  $r$ .

†Vimos no curso que essa constante  $k$  é um múltiplo da energia, mas optamos por manter a letra  $k$  para explicitar o fato de ser uma constante.

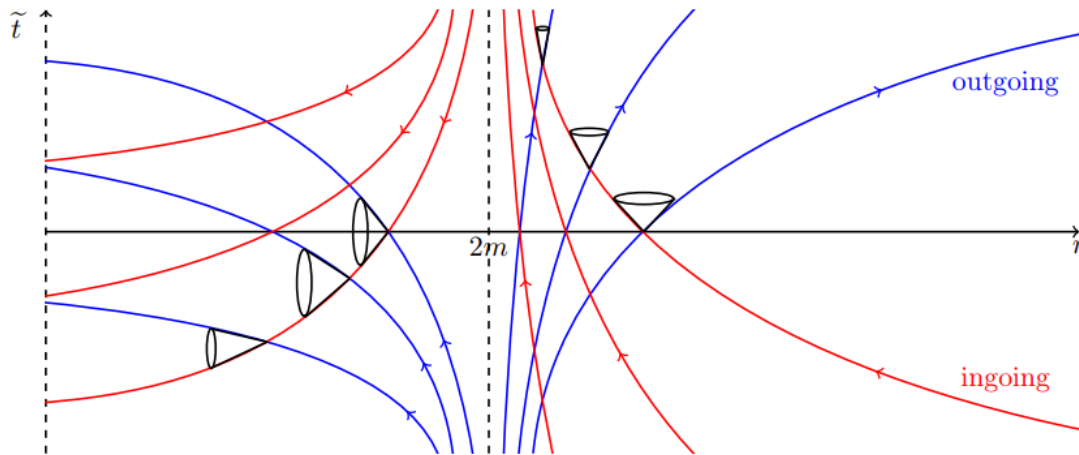


Figura 1: diagrama de espaço-tempo em coordenadas de Schwartzchild - *outgoing* e *ingoing* representam raios de luz se afastando, e se aproximando, respectivamente.

Fonte: Schuller, Dadhley (2015, p. 130)[1]

nos levar à conclusão de que as geodésicas tipo luz *ingoing* (indo em direção ao buraco negro) nunca atravessariam o horizonte de eventos, o que parece estar longe da verdade. Contudo, isso é o que nós observaríamos ao ver um objeto cair num buraco negro de Schwartzchild, nunca veríamos esse objeto cruzar o horizonte de eventos - chegaria num ponto em que ele aparecia “parado” em relação a nós, observadores, mas puramente devido a um fenômeno de dilatação temporal extrema<sup>2</sup>.

Além de tudo isso, o diagrama  $(t, r)$  nas coordenadas de Schwartzchild também pode nos levar a crer que a singularidade  $r = 0$  é uma posição no espaço a ser alcançada, quando na verdade, veremos que se trata mais de uma “posição no tempo”<sup>3</sup>, a qual é impossível de ser evitada.

Em geral, alguns dos problemas encontrados em diagramas  $(t, r)$  com coordenadas de Schwarzschild são resolvidos puramente por uma escolha melhor de coordenadas, podendo ainda manter a forma cartesiana do diagrama. Contudo, propriedades mais fundamentais do espaço-tempo na influência de buracos negros serão ainda mais elucidadas com os Diagramas de Carter-Penrose, como pretendemos mostrar nas próximas sessões deste trabalho.

## 2. Transformações Conformes

Um dos pilares dos diagramas de Carter-Penrose, e na verdade, onde reside o *core* da ideia principal desses diagramas, é justamente a noção de **Transformações Conformes**, juntamente com a de **compactação**, que trataremos mais adiante.

Até onde estamos interessados aqui para a construção desses diagramas, uma transformação conforme é basicamente uma mudança na geometria (portanto, uma mudança da métrica) que mantenha a estrutura causal do espaço-tempo inalterada. Partiremos agora

<sup>2</sup>como pode ser visto pelo lado esquerdo da equação (1) à medida que se toma  $r \rightarrow 2GM^+$ .

<sup>3</sup>Tecnicamente, dizemos que a coordenada radial se torna tipo tempo, ou *timelike*, que pode ser visualizada na figura 1 pela “inversão” de direção dos cones de luz.

para a definição matemática, formal, e mais precisa do que queremos dizer com isso.

Definição: (Transformação Conforme)

Uma *transformação conforme* é uma mapa de um espaço tempo  $(\mathcal{M}, g)$  no espaço-tempo  $(\mathcal{M}, \tilde{g})$ , dado por

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(x) = \omega^2(x)g_{\mu\nu}(x)$$

com  $\omega \in C^\infty(\mathcal{M})$ , e tal que  $\omega(x) \neq 0, \forall x \in \mathcal{M}$ ; onde  $x$  representa o conjunto das coordenadas  $x^\mu$  avaliado num certo ponto do espaço-tempo.

□

Segue da condição  $\omega^2(x) > 0$ , que curvas tipo tempo/luz/espaço sob a métrica  $g_{\mu\nu}$  também o serão para a métrica conforme  $\tilde{g}_{\mu\nu}$ :

$$\begin{aligned}\tilde{g}(u_\gamma, u_\gamma) < 0 &\iff g(u_\gamma, u_\gamma) < 0 \\ \tilde{g}(u_\gamma, u_\gamma) = 0 &\iff g(u_\gamma, u_\gamma) = 0 \\ \tilde{g}(u_\gamma, u_\gamma) > 0 &\iff g(u_\gamma, u_\gamma) > 0.\end{aligned}$$

Além disso, a segunda condição acima garante que geodésicas tipo luz sob uma métrica também o serão para a outra métrica, o que não vale de modo geral para geodésicas tipo tempo/espaço sob  $g$ , pois elas não são necessariamente mapeadas em *geodésicas* sob  $\tilde{g}$ .

É com essas 3 últimas expressões que queremos dizer com “manter a estrutura causal inalterada”.

### 3. “Receita” para Diagramas de Penrose

### 4. Coordenadas de Krushal-Szekeres

### 5. Aplicações Simples do Diagrama de Penrose

### 6. Conclusão

## Referências

- [1] Dr. F. P. Schuller. Em: *The WE-Heraeus International Winter School on Gravity and Light*. Ed. por Richie Dadhley. 2015.
- [2] Sean Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Cambridge University Press, 2019.
- [3] Nelson Yokomizo. *Notas de Aula TRG*.
- [4] David Tong. *Lectures on General Relativity*. 2019. URL: <https://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/gr.html>.