Diagramas de Carter-Penrose no Estudo de Buracos Negros

João Paulo Monteiro

Felipe Khalil

25 de junho de 2025

Sumário

1. Introdução

Uma das primeiras dificuldades que surgem em relatividade geral no estudo de buracos negros é a falta de uma representação visual e geométrica do que está acontencendo no entorno desses objetos. Tais representações não são, de fato, *necessárias* para o entendimento da física de buracos negros; contudo, veremos que serão de grande utilidade para explicitar (e até revelar) algumas propriedades fundamentais do espaço-tempo na presença de corpos massivos.

Mas para quê mais diagramas? - alguém pode se perguntar. Afinal, o diagrama de Minkowisky cumpre bem sua função para um espaço-tempo plano, vazio de matéria e homogêneo; a princípio, bastaria buscar algum tipo de "extensão natural" desse diagrama para espaços-tempos curvos, mantendo a estrutura cartesiana. É isso que iremos fazer agora, e pelo título do nosso trabalho, já adiantamos que coisas não muito agradáveis surgirão dessa primeira alternativa.

1.1 Diagrama de espaço-tempo nas coordenadas de Schwartzschild

Considere a métrica de Schwartzchild, a única solução com simetria esférica da equação de Einsten no vácuo, expressa em coordenadas esféricas (t, r, θ, φ):

$$g = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt \otimes dt + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr \otimes dr + r^2 \big(d\theta \otimes d\theta + \sin^2\theta d\varphi \otimes d\varphi\big)$$

Notação: sempre que tivermos dois produtos tensoriais envolvendo coordenadas idênticas, escreveremos de forma mais "relaxada"; e mesmo se não forem idênticas, ainda omitiremos o símbolo de produto tensorial, apenas tomando o cuidado de respeitar a ordem dos produtos, como segue:

$$dx^\mu \otimes dx^\mu := (dx^\mu)^2,$$
$$dx^\mu \otimes dx^\nu := dx^\mu dx^\nu$$

Além disso, por vezes denotaremos o termo esférico da métrica de Schwartzchild por

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$$

(já empregando a primeira convenção de notação), onde $d\Omega^2$ é identificado como a métrica da 2-esfera unitária (ou o elemento de arco sobre a 2-esfera esfera unitária, se preferir).

□

Para representar o espaço-tempo nessa situação, e avaliar as relações de causalidade determinadas pelos cones de luz, vamos avaliar as geodésicas nulas descritas por essas coordenadas, sob essa métrica[1].

[1] Como, ao longo do curso, optamos por trabalhar com o cálculo da geodésica a partir dos símbolos de conexão, seguiremos por esse caminho, mas vale ressaltar que o mesmo cálculo também é possível (e às vezes até mais conveniente) a partir de princípios variacionais com uma Lagrangiana apropriada em mãos, conforme feito em [1].

Por simplicidade, consideraremos geodésicas radiais, isto é, com ângulos θ e φ fixos, portanto, $d\theta = d\varphi = 0$. Isso já simplifica muito a métrica, pois todo o termo $d\Omega^2$ vai a zero.

Além disso, para geodésicas nulas, sabemos que a aplicação da métrica em qualquer vetor tangente dessa geodésica resulta em zero, isto é, $g(u_\gamma, u_\gamma) = 0$, o que nos leva a inferir que, nessa curva, a métrica é nula em todo ponto.

Para uma conexão compatível com a métrica, os símbolos de conexão são dados pelos **Símbolos de Christoffel**, que podem ser calculados pela fórmula:

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu})$$

Para o cálculo da equação geodésica para a coordenada temporal t, precisaremos apenas dos simbolos $\Gamma^{t}_{\mu\nu}$, com $\mu, \nu = t, r, \theta, \varphi$. Por sorte, nessa métrica apenas um destes é não-nulo, a saber:

$$\Gamma^{t}_{rt} = \frac{GM}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{r^2}\right)^{-1}$$

Usando essa expressão na equação da geodésica para um parametro afim λ

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\lambda^2} + \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma} \frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\mathrm{d}x^\rho}{\mathrm{d}\lambda} = 0$$

e extraindo dela apenas a equação para a coordenada temporal, fazendo $\mu = t$, e ainda com algumas manipulações que omitiremos aqui, obtemos*:

$$\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \dot{t} = k = cte^{\dagger} \rightsquigarrow \dot{r} = \pm k \Rightarrow \boxed{r = \pm k\lambda} \tag{1}$$

Isso caracteriza r como um outro parâmetro afim! De forma que podemos reparametrizar a coordenada $t(\lambda) \to t(r) = t(\pm k\lambda)$. O restante dos procedimentos pode ser encontrado em [1] e [**Nelson**] bem desenvolvidos, resultando em duas famílias de geodésicas para a coordenada t:

$$t_{in}(r) = r_0 - r - 2GM \log\left(\frac{r - 2GM}{r_0 - 2GM}\right) \tag{2}$$

$$t_{out} = r - r_0 + 2GM \log\left(\frac{r - 2GM}{r_0 - 2GM}\right) \tag{3}$$

Ao plotar as várias curvas provenientes das equações (2) e (3) num diagrama (t, r), escolhendo diversos valores para a constante r_0 (que marca a posição de um observador fixo), obtemos o diagrama da figura 1.

Note a distorção sofrida pelos cones de luz ao se aproximarem e se afastarem do horizonte de eventos. Note também que esse diagrama, representado com essas coordenadas, poderia

*levando a relação envolvendo $\dot{t}$ e a constante k na equação da métrica e igualando-a a zero (geodésica tipo luz, nula) obtemos a relação destacada para r.

†Vimos no curso que essa constante k é um múltiplo da energia, mas optamos por manter a letra k para explicitar o fato de ser uma constante.

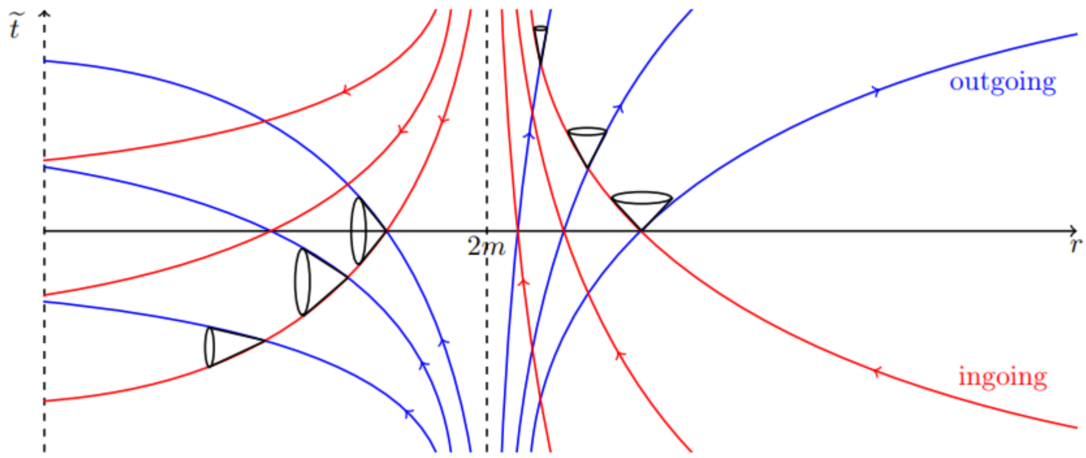

Figura 1: diagrama de espaço-tempo em coordenadas de Schwartzchild - *outgoing* e *ingoing* representam raios de luz se afastando, e se aproximando, respectivamente.
Fonte: Schuller, Dadhley (2015, p. 130)[1]

nos levar à conclusão de que as geodésicas tipo luz *ingoing* (indo em direção ao buraco negro) nunca atravessariam o horizonte de eventos, o que parece estar longe da verdade. Contudo, isso é o que nós observaríamos ao ver um objeto cair num buraco negro de Schwartzchild, nunca veríamos esse objeto cruzar o horizonte de eventos - chegaria num ponto em que ele aparecia "parado" em relação a nós, observadores, mas puramente devido a um fenômeno de dilatação temporal extrema[2].

Além de tudo isso, o diagrama (t, r) nas coordenadas de Schwartzchild também pode nos levar a crer que a singularidade $r = 0$ é uma posição no espaço a ser alcançada, quando na verdade, veremos que se trata mais de uma "posição no tempo"[3], a qual é impossível de ser evitada.

Em geral, alguns dos problemas encontrados em diagramas (t, r) com coordenadas de Schwartzschild são resolvidos puramente por uma escolha melhor de coordenadas, podendo ainda manter a forma cartesiana do diagrama. Contudo, propriedades mais fundamentais do espaço-tempo na influência de buracos negros serão ainda mais elucidadas com os Diagramas de Carter-Penrose, como pretendemos mostrar nas próximas sessões deste trabalho.

2. Transformações Conformes

Um dos pilares dos diagramas de Carter-Penrose, e na verdade, onde reside o *core* da ideia principal desses diagramas, é justamente a noção de **Transformações Conformes**, juntamente com a de **compactação**, que trataremos mais adiante.

Até onde estamos interessados aqui para a construção desses diagramas, uma transformação conforme é basicamente uma mudança na geometria (portanto, uma mudança da métrica) que mantenha a estrutura causal do espaço-tempo inalterada. Partiremos agora

[2]como pode ser visto pelo lado esquerdo da equação (1) à medida que se toma $r \to 2GM^+$.

[3]Tecnicamente, dizemos que a coordenada radial se torna tipo tempo, ou *timelike*, que pode ser visualizada na figura 1 pela "inversão" de direção dos cones de luz.

para a definição matemática, formal, e mais precisa do queremos dizer com isso.

Definição: (Transformação Conforme)

Uma *transformação conforme* é uma mapa de um espaço tempo $(\mathcal{M}, g)$ no espaço-tempo $(\mathcal{M}, \tilde{g})$, dado por

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(x) = \omega^2(x) g_{\mu\nu}(x)$$

com $\omega \in C^\infty(\mathcal{M})$, e tal que $\omega(x) \neq 0, \forall x \in \mathcal{M}$; onde x representa o conjunto das coordenadas x^μ avaliado num certo ponto do espaço-tempo.

□

Segue da condição $\omega^2(x) > 0$, que curvas tipo tempo/luz/espaço sob a métrica $g_{\mu\nu}$ também o serão para a métrica conforme $\tilde{g}_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} \tilde{g}(u_\gamma, u_\gamma) < 0 &\Longleftrightarrow g(u_\gamma, u_\gamma) < 0 \\ \tilde{g}(u_\gamma, u_\gamma) = 0 &\Longleftrightarrow g(u_\gamma, u_\gamma) = 0 \\ \tilde{g}(u_\gamma, u_\gamma) > 0 &\Longleftrightarrow g(u_\gamma, u_\gamma) > 0. \end{aligned}$$

Além disso, a segunda condição acima garante que geodésicas tipo luz sob uma métrica também o serão para a outra métrica, o que não vale de modo geral para geodésicas tipo tempo/espaço sob g, pois elas não são necessariamente mapeadas em *geodésicas* sob $\tilde{g}$.

É com essas 3 últimas expressões que queremos dizer com “preservam a estrutura causal”.

3. “Receita” para Diagramas de Penrose

4. Coordenadas de Krushal-Szekeres

5. Aplicações Simples do Diagrama de Penrose

6. Conclusão

Referências

[1] Dr. F. P. Schuller. Em: *The WE-Heraeus International Winter School on Gravity and Light*. Ed. por Richie Dadhley. 2015.

[2] Sean Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Cambridge University Press, 2019.

[3] Nelson Yokomizo. *Notas de Aula TRG*.

[4] David Tong. *Lectures on General Relativity*. 2019. URL: `https://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/gr.html`.