Punto 8 teórico

miércoles, 6 de septiembre de 2023 4:39 p.m.

8. Es posible construir una aproximación de orden $\mathcal{O}(h^2)$ para la derivada progresiva. Para tal propósito, se escribe el polinomio de interpolación de grado 2 para el conjunto soporte

$x_0)$

$\Omega = \{(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))\}$, y posteriormente se calcula la derivada de este polinomio.

a) Calcular analíticamente el polinomio que interpola el conjunto soporte.

b) Derivar el polinomio interpolador para encontrar la derivada en el punto x_0:

$$f'(x_0) \approx p'(x_0) = \frac{1}{2h}(-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2)). \tag{3.38}$$

Si la discretización es equidistante, tenemos:

$$f'(x) \cong \frac{1}{2h}(-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)). \tag{3.39}$$

c) (`Python`) Para $f(x) = \sqrt{tan(x)}$ estimar la derivada progresiva de orden $\mathcal{O}(h^2)$ (expresión anterior) en el intervalo $[0.1, 1.1]$ con $h = 0.01$.

d) (`Python`) Para $f(x) = \sqrt{tan(x)}$ estimar la derivada central de orden $\mathcal{O}(h^2)$ en el intervalo $[0.1, 1.1]$ con $h = 0.01$.

e) Calcule analíticamente la derivada de la función $f(x)$, y grafique con la estimación central y progresiva de orden $\mathcal{O}(h^2)$.

f) Grafique el error nodal para ambas aproximaciones. ¿Tienen efectivamente el mismo orden de precisión ambos resultados?

a) $p(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1)$

$a_0 = f_0$

$a_1 = \dfrac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$ $\quad a_1 = \dfrac{f_1 - f_0}{h}$

$a_2 = \dfrac{f_2 - 2f_1 + f_0}{2h^2}$

$P(x) = f_0 + \dfrac{f_1 - f_0}{h}(x - x_0) + \dfrac{f_2 - 2f_1 + f_0}{2h^2}(x-x_0)(x-x_1)$

a)

$\boxed{P(x)} = f_0 + \dfrac{(f_1 - f_0)(x-x_0)}{h} + \dfrac{(f_2 - 2f_1 + f_0)(x-x_0)(x-x_1)}{2h^2}$

b)

$P'(x) = 0 + \dfrac{(f_1 - f_0)}{h}\cdot 1 + \dfrac{(f_2 - 2f_1 + f_0)}{2h^2}\underbrace{((x-x_0) + (x-x_1))}_{0}$

$P'(x_0) = \dfrac{f_1 - f_0}{h} + \dfrac{(f_2 - 2f_1 + f_0)(-h)}{2h^2}$

$P'(x_0) = \dfrac{(f_1 - f_0)}{(x_1 - x_0)} + \dfrac{(f_2 - 2f_1 + f_0)(-\cancel{h})}{2h^{\cancel{2}}}$

$P'(x_0) = \dfrac{(f_1 - f_0)}{h} + \dfrac{-f_2 + 2f_1 - f_0}{2h}$

$P'(x_0) = \dfrac{2\cancel{h}(f_1 - f_0) + \cancel{h}(-f_2 + 2f_1 - f_0)}{2h^{\cancel{2}}}$

$P'(x_0) = \dfrac{2f_1 - 2f_0 - f_2 + 2f_1 - f_0}{2h} = \dfrac{4f_1 - 3f_0 - 2f_2}{2h}$