STATISTISK STRESS ANALYSE

En forståelses process

Jonas Smidt
Hobby sjov!
4370

Contents

0. Problemformulering – Statisk Stressanalyse med FEM

Hvordan kan en simpel struktur modelleres og analyseres ved hjælp af Finite Element Method (FEM) til at bestemme forskydninger, strain og stress, og hvordan kan disse resultater bruges til at validere forståelsen af de grundlæggende trin i den numeriske løsningsproces?

0.1 Underliggende delspørgsmål

Med det formål at nedbryde til konkrete opgaver der kan tænkes og arbejdes med:

1. Hvordan opstilles det fysiske problem med relevante materialer, belastninger og grænsebetingelser?
2. Hvordan diskretiseres geometrien i passende elementer og noder (mesh)?
3. Hvordan udledes og opstilles elementerne stivhedsmatricer og hvordan samles den globale stivhedsmatrix?
4. Hvordan løses systemet for forskydninger og hvordan beregnes strain og stress ud fra disse?
5. Hvordan kan resultaterne visualiseres og valideres mod analytiske løsninger eller forventninger?

0.2 Projektmål

Hvordan kan Finite Element Method anvendes til at analysere forskydninger og spændinger i en simpel mekanisk struktur, og hvordan valideres resultaterne?

- Opnå praktisk forståelse af FEM gennem enkle mekaniske strukturer
- Forstå sammenhængen mellem forskydning, strain og stress
- Opbygge en kode eller bruge et FEM-værktøj (Python eller MATLAB)
- Validere mine resultater med analytiske formler (fx for bjælke eller stang)

0.3 Fremtidsplaner

Efter ovenstående er besvaret søges der forbedret kode i C# dette sprog er lettere og mere overskueligt i forhold til et funktionsbaseret sprog. Derudover er C# bedre struktureret end Python. Herunder er det nemmere at udvikle på da en programmør ofte følger bedre kodningsstruktur(Test DRY ect..) end ingeniører, da man i dette fag fokusere meget på det matematiske og mindre på værktøjerne. Dog er C# ikke hurtigt nok til store FEM systemer.

1 Define the Problem / Den fysiske situation

1.1 Fokus på dette stadie

I dette stadie defineres den fysiske model og de grundlæggende forudsætninger, som den numeriske simulering skal baseres på. Følgende aspekter er centrale:

- **Materialeegenskaber:** F.eks. Young's modulus E, Poisson's ratio ν, og tæthed ρ.
- **Belastninger:** Påførte kræfter såsom punktkræfter, fordelte tryk eller acceleration.
- **Grænsebetingelser:** For at sikre et veldefineret problem specificeres passende randbetingelser.
  I dette projekt anvendes en fastspændt randbetingelse, hvor nodale forskydninger sættes til nul: $u = 0$. Dette svarer til faste *degrees of freedom* ved relevante noder.

1.2 Fast indspændt bjælke med punktlast i fri ende

Her præsenteres de valgte parametre for bjælkeprojektet. Da modellen er 1D, udelades visse materialeparametre som ellers er nødvendige i 2D- og 3D-modeller.

- **Poisson's ratio** ν: Ikke relevant i en 1D-model, da materialet ikke har mulighed for at udvide sig vinkelret på belastningen.
- **Tæthed** ρ: Ikke nødvendig i denne statiske analyse, da egenvægten og dynamiske effekter som svingninger og accelerationer ignoreres.

I stedet fokuseres der på følgende relevante parametre:

- **Young's modulus** $E = 200\,\mathrm{GPa}$: Materialestivheden beskriver, hvor meget et materiale deformeres elastisk under en given spænding. Stål vælges, da det er et almindeligt og veldokumenteret materiale med høj stivhed. Dette minimerer deformationer og sikrer en mere stabil og kontrollerbar model.
- **Arealinertimoment** $I = \frac{1}{12}bh^3$: Beskriver bjælkens modstand mod bøjning og afhænger af tværsnitsgeometrien. For et rektangulært tværsnit vælges:
  - Bredde $b = 0.01\,\mathrm{m}$: En smal bredde, som giver et lille tværsnit og dermed moderat stivhed.
  - Højde $h = 0.02\,\mathrm{m}$: En realistisk og slank bjælkehøjde, som øger stivheden markant, da højden indgår i tredje potens.

  Et vigtigt aspekt er, at bjælker bliver betydeligt stivere, når de placeres på højkant — det er også grunden til, at mange stålbjælker (f.eks. I-profiler) udnytter dette princip.
- **Længde** $L = 1\,\mathrm{m}$: Den samlede længde på bjælken. En relativt kort bjælke, som er let at visualisere og giver overskuelige beregninger, samtidig med at den er lang nok til at observere bøjning.
- **Kraft** $F = -100\,\mathrm{N}$: En moderat punktlast svarende til vægten af ca. 10 kg, som virker lodret nedad ved midterste node. Det giver en tydelig, hvilket er ideelt til analyseformål.

- **Grænsebetingelser**: En fast indspændt (cantilever) bjælke vælges – fastgjort ved $x = 0$ og fri ved $x = L$. Dette er en klassisk og velundersøgt struktur i FEM, som giver tydelig bøjning og egner sig godt til sammenligning med analytiske løsninger.

Modellen anvender en 1D-bjælke (line element) med typisk én frihedsgrad (DOF) pr. node, svarende til vertikal forskydning. Dette reducerer kompleksiteten og gør den velegnet som første trin i en FEM-implementering.

2 Discretization

Formål: Hvad er diskretisering?

Du deler den fysiske bjælke op i små elementer (f.eks. linjestykker), som hver især kan beskrives simpelt med matematiske ligninger. Dette gør det muligt at løse et komplekst problem numerisk.

- Du laver en **mesh**, som er inddeling af geometrien i **elementer**.
- Mesh består af:
  - **Noder**: punkter hvor DOFs (typisk forskydning) defineres
  - **Elementer**: forbindelser mellem noder
- Elementtyper vælges ud fra:
  - Geometri (1D bjælker, 2D plader, 3D volumener)
  - Materialeadfærd (lineær, plastisk, ortotropisk)

2.1 Diskretisering af bjælken (1D cantilever)

Jeg holder det helt simpelt, da opgaven er en forståelsesprocess og vælger at diskretisere i 2 elementer, hvilket giver mig 3 noder. herved bliver matricen mindre. Dog skal det siges at flere elementer ville give en mere præcis løsning, men tilgengæld en langsommere beregning. min form er meget simpelt. havde jeg skulle diskretisere en mere unik form skulle jeg have benyttet flere elementer. så $n = 2$ og noderne $= 3$ disse er placeret ved starten, midten og enden af bjælken $Node1 : x = 0m$ $Node2 : x = 0,5$ $Node3 : x = 1m$.
Hver node har 2 frihedsgrader: Vertikal(u) og rotation(θ)

Eksempel: Bjælke med 2 elementer

Nedenfor vises en oversigt over valgte parametre for en diskretisering af en 1D bjælke i 2 elementer:

Parameter	**Værdi**
Længde L	1 m
Antal elementer n	2
Elementlængde L_e	$L/n = 0.5\,\mathrm{m}$
Noder	3 noder (én i hver ende og én i midten)
DOFs pr. node	2 (vertikal forskydning u, rotation θ)
Totale DOFs	$3 \times 2 = 6$

Table 1: Diskretisering af en fast indspændt bjælke i 2 elementer

3 Element Stiffness Matrix

For at bestemme hvordan hvert bjælkeelement modstår deformation, anvendes Euler-Bernoulli bjælketeorien.

Vi arbejder med en bjælke, der udelukkende deformeres ved bøjning, og hvert element har derfor 2 noder med 2 frihedsgrader per node: vertikal forskydning u og rotation θ.

3.1 Generel formulering

Den lokale stivhedsmatrix for et element udtrykkes generelt ved:

$$k^{(e)} = \int_{\Omega} B^T D B \, d\Omega$$

hvor:

- B er afledningsmatricen (baseret på afledte formfunktioner),
- D er materialematricen, her $D = EI$ i bjælketeori,
- Ω er elementets længde i 1D (da vi arbejder med linjeelementer).

3.2 Lokal stivhedsmatrix for et bjælkeelement

I dette projekt anvendes Euler-Bernoulli bjælketeorien, som antager, at tværsnit forbliver plane og vinkelrette på bjælkens neutrale akse under bøjning.

Den lokale stivhedsmatrix k_e for et enkelt element med to noder og to frihedsgrader pr. node (lodret forskydning u og rotation θ) er givet ved:

$$k_e = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

hvor:

- E: Young's modulus – materialeegenskab, der udtrykker stivhed
- I: Tværsnitsmoment – geometrisk egenskab, som afhænger stærkt af bjælkens højde
- L: Længden af elementet

Fortolkning af matrixens termer

- ± 12: Udtrykker modstand mod lodret forskydning (bøjning). En lodret kraft i én node skaber modreaktion i begge noder. Fx hvis du skubber op i én node, reagerer den anden med modstand.
- $\pm 6L$: Kobling mellem lodret forskydning og rotation. Fx en opadgående forskydning i én node skaber rotation i begge noder.Fx: Skubber du op i én node, opstår også et moment (rotation).

- $4L^2$ **og** $2L^2$: Udtrykker bjælkens modstand mod rotation i hver node. Enheden er moment per vinkelændring. Modstand mod rotation lokalt i noden. hvor $4L^2$ beskriver modstanden i samme node pga. moment i samme node,(Modstanden i den node du roterer (den primære)) den anden beskriver Modstand mod rotation i anden node pga. moment i én node.(Modstanden i nabo-noden, der også påvirkes pga. sammenhæng i bjælken)

Denne matrix er grundlaget for at samle det globale system senere og beskriver, hvordan ét enkelt bjælkeelement modsætter sig deformation i både forskydning og rotation.

3.3 Numerisk eksempel: Lokal stivhedsmatrix

Vi har tidligere fastlagt følgende parametre:

$$E = 200{\cdot}10^9\,\text{Pa} \quad \text{(Youngs modul)}, \qquad I = 6.67{\cdot}10^{-10}\,\text{m}^4 \quad \text{(Tværsnitsmoment)}, \qquad L_e = 0.5\,\text{m} \quad \text{(Elementlængde)}$$

Den konstante faktor foran stivhedsmatricen beregnes som:

$$\frac{EI}{L_e^3} = \frac{200 \cdot 10^9 \cdot 6.67 \cdot 10^{-10}}{(0.5)^3} = 1067.2\,\text{N/m}$$

Den lokale stivhedsmatrix for hvert element er da:

$$k^{(e)} = 1067.2 \cdot \begin{bmatrix} 12 & 6L_e & -12 & 6L_e \\ 6L_e & 4L_e^2 & -6L_e & 2L_e^2 \\ -12 & -6L_e & 12 & -6L_e \\ 6L_e & 2L_e^2 & -6L_e & 4L_e^2 \end{bmatrix} = 1067.2 \cdot \begin{bmatrix} 12 & 3 & -12 & 3 \\ 3 & 1 & -3 & 0.5 \\ -12 & -3 & 12 & -3 \\ 3 & 0.5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Forklaring af matrixens opbygning:

- De diagonale led $(12, 4L_e^2, \ldots)$ repræsenterer modstand mod lodret forskydning og rotation i egne noder.
- De ikke-diagonale led $(6L_e, -12, -6L_e, \ldots)$ viser koblingen mellem bevægelser og rotationer i nabonoder.
- Negative værdier afspejler modvirkende respons (f.eks. hvis én node forskydes opad, modstår den anden ved at trække nedad).

Denne matrix anvendes for hvert af de to elementer i modellen.

3.4 Assemble Global Stiffness Matrix

Her samles alle lokale $k^{(e)}$ i én stor matrix K, baseret på nodernes sammenhæng (connectivity). DVs. hvordan noderne er sammensæt bidrager væsentligt til vores globale stivhedsmatrix. i vores matrix har vi 3 noder. hvor node 1 og 2 har en sammenhæng men 1 og 3 har ikke. hvis vi ændret vores mesh ville matricen se anderledes ud.

Resultatet er ligningssystemet:

$$Ku = f$$

hvor:

- K: global stivhedsmatrix
- u: nodale forskydninger (DOFs)
- f: kraftvektor

Vi starter med en nulmatrix for at kunne bygge den globale matrix op trin for trin, ved at summere de lokale matricers bidrag korrekt på tværs af alle elementer. $K =$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nu skal vi tage vores skaleret lokal matricer og sætter dem in i vores globale.

$$k1^{(e)} = \begin{bmatrix} 12806.4 & 3201.6 & -12806.4 & 3201.6 \\ 3201.6 & 1067.2 & -3201.6 & 533.6 \\ -12806.4 & -3201.6 & 12806.4 & -3201.6 \\ 3201.6 & 533.6 & -3201.6 & 1067.2 \end{bmatrix} \text{N/m}$$

$$k2^{(e)} = \begin{bmatrix} 12806.4 & 3201.6 & -12806.4 & 3201.6 \\ 3201.6 & 1067.2 & -3201.6 & 533.6 \\ -12806.4 & -3201.6 & 12806.4 & -3201.6 \\ 3201.6 & 533.6 & -3201.6 & 1067.2 \end{bmatrix} \text{N/m}$$

nu startes med 2 lokale 4×4 stivhedsmatricer (én for hvert element), og de bliver placerede i vores 6×6 nulmatrix sådan her:

Element 1 bidrager til noderne 0 og 1 → placeres i rækker/kolonner 0-3

Element 2 bidrager til noderne 1 og 2 → placeres i rækker/kolonner 2-5

Fordi node 1 er fælles mellem element 1 og 2, bliver bidragene summet der, hvilket skaber overlap i midten af matricen.

$$K = \begin{bmatrix} 12806.4 & 3201.6 & -12806.4 & 3201.6 & 0 & 0 \\ 3201.6 & 1067.2 & -3201.6 & 533.6 & 0 & 0 \\ -12806.4 & -3201.6 & 12806.4 + 12806.4 & -3201.6 + 3201.6 & -12806.4 & 3201.6 \\ 3201.6 & 533.6 & -3201.6 + 3201.6 & 1067.2 + 1067.2 & -3201.6 & 533.6 \\ 0 & 0 & -12806.4 & -3201.6 & 12806.4 & -3201.6 \\ 0 & 0 & 3201.6 & 533.6 & -3201.6 & 1067.2 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 12806.4 & 3201.6 & -12806.4 & 3201.6 & 0 & 0 \\ 3201.6 & 1067.2 & -3201.6 & 533.6 & 0 & 0 \\ -12806.4 & -3201.6 & 25613.8 & 0 & -12806.4 & 3201.6 \\ 3201.6 & 533.6 & 0 & 2134.4 & -3201.6 & 533.6 \\ 0 & 0 & -12806.4 & -3201.6 & 12806.4 & -3201.6 \\ 0 & 0 & 3201.6 & 533.6 & -3201.6 & 1067.2 \end{bmatrix}$$

4 Solve

4.1 Kraftvektor og løsning

Når vi har den globale stivhedsmatrix $\mathbf{K}$ og den ydre kraftvektor $\mathbf{f}$, kan vi løse for forskydningsvektoren $\mathbf{d}$, som angiver deformationen (lodret forskydning og rotation) ved hver frihedsgrad.

Antag nu, at der virker en kraft på $-100\,\mathrm{N}$ på midterste node (node 1), altså frihedsgrad nr. 2 (lodret forskydning). Da har vi følgende kraftvektor:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4.1.1 Randbetingelser

Vi antager nu, at kun venstre ende (node 0) er fast indspændt. Det giver følgende randbetingelser:

- $d_0 = 0$ (forskydning ved node 0)
- $d_1 = 0$ (rotation ved node 0)

Frihedsgraderne, der skal løses, er:

$$\tilde{\mathbf{d}} = \begin{bmatrix} d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{bmatrix}$$

Kraftvektoren antager en ydre kraft på $-200\,\mathrm{N}$ på node 1:

$$\tilde{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} -100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Det reducerede stivhedssystem består af de relevante 4×4-blokke fra den globale matrix:

$$\tilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} 25612.8 & 0 & -12806.4 & 3201.6 \\ 0 & 2134.4 & 3201.6 & 533.6 \\ -12806.4 & 3201.6 & 12806.4 & -3201.6 \\ 3201.6 & 533.6 & -3201.6 & 1067.2 \end{bmatrix}$$

4.1.2 Løsning

Ved at løse $\tilde{\mathbf{K}} \cdot \tilde{\mathbf{d}} = \tilde{\mathbf{f}}$ fås:

$$\tilde{\mathbf{d}} = \begin{bmatrix} d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -0.03123438 \\ -0.09370315 \\ -0.07808596 \\ -0.09370315 \end{bmatrix}$$

4.1.3 Komplet forskydningsvektor

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.03123438 \\ -0.09370315 \\ -0.07808596 \\ -0.09370315 \end{bmatrix}$$

4.1.4 Tolkning af resultater

4.1.5 Resume

Efter at have bestemt den globale stivhedsmatrix $\mathbf{K}$, påvirker vi nu systemet med en ydre kraft $\mathbf{f}$ på node 1. Denne kraft er lodret nedad og har størrelsen $-100\,\mathrm{N}$, hvilket svarer til frihedsgrad 2.

Da bjælken er fast indspændt i node 0, gælder randbetingelserne $d_0 = 0$ og $d_1 = 0$, og vi reducerer derfor vores ligning til de frie frihedsgrader.

Dette reducerer kraftvektoren til:

$$\tilde{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} -100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

og vi løser ligningen:

$$\tilde{\mathbf{K}} \cdot \tilde{\mathbf{d}} = \tilde{\mathbf{f}}$$

hvor $\tilde{\mathbf{d}}$ indeholder forskydning og rotation for node 1 og 2.

Løsningen af ligningen giver os forskydningen $\mathbf{d}$, som beskriver deformationen i bjælken.

Vi ser, at den største forskydning forekommer ved node 2 (frihedsgrad 4), nemlig $d_4 = -0.07808596$, hvilket er forventeligt, da denne ende er fri og derfor kan bevæge sig mere elastisk. Rotationerne ved node 1 og node 2, d_3 og d_5, er begge cirka -0.0937, hvilket indikerer en symmetrisk rotation omkring midten af bjælken.

5 Post-processing and Validation

5.1 Visualisering af resultater

5.1.1 Forskydninger (u)

Fra den beregnede forskydningsvektor kan vi visualisere bjælkens deformation:

$$\text{Node 0 (x=0m):} \quad u_0 = 0 \text{ m}, \quad \theta_0 = 0 \text{ rad} \quad \text{(fastspændt)} \tag{1}$$

$$\text{Node 1 (x=0.5m):} \quad u_1 = -0.0312 \text{ m}, \quad \theta_1 = -0.0937 \text{ rad} \quad \text{(midtpunkt)} \tag{2}$$

$$\text{Node 2 (x=1m):} \quad u_2 = -0.0781 \text{ m}, \quad \theta_2 = -0.0937 \text{ rad} \quad \text{(fri ende)} \tag{3}$$

Observation: Som forventet er den største forskydning ved den fri ende (-7.81 cm), mens midtpunktet har en mindre forskydning (-3.12 cm).

5.1.2 Bøjningsmoment og spændinger

Ud fra forskydningerne kan bøjningsmomentet $M(x)$ og spændingen $\sigma(x)$ beregnes:

- **Maksimalt bøjningsmoment**: Opstår ved den fastspændte ende (x=0)Dette skyldes at den fastspændte ende skal "holde imod" hele kraften og samtidig forhindre rotation - derfor opstår det største bøjningsmoment der.
- **Maksimal spænding**: $\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} \times (h/2)}{I}$

5.2 Validering mod analytisk løsning

5.2.1 Analytisk reference for cantileverbjælke

For en fast indspændt bjælke med punktlast P ved den frie ende er den analytiske løsning for maksimal nedbøjning:

Maksimal nedbøjning ved fri ende:

$$u_{\max} = \frac{PL^3}{3EI} \tag{4}$$

Table 2: Symbolforklaring for analytisk løsning

Symbol	Betydning
$u(x)$	Nedbøjning ved position x
P	Kraft påført ved den frie ende (N)
x	Position langs bjælken fra den fastspændte ende (m)
L	Den samlede længde af bjælken (m)
E	Young's modulus (Pa)
I	Tværsnits inertimoment (m^4)

Parametre anvendt i beregningen:

$$P = -100 \text{ N} \tag{5}$$
$$L = 1 \text{ m} \tag{6}$$
$$E = 200 \times 10^9 \text{ Pa} \tag{7}$$
$$I = 6.67 \times 10^{-10} \text{ m}^4 \tag{8}$$

$$u_{\text{analytisk}} = \frac{(-100) \cdot 1^3}{3 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 6.67 \cdot 10^{-10}} \approx -0.250 \text{ m} \tag{9}$$

Sammenligning med numerisk resultat (FEM):

$$u_{\text{FEM}} = -0.0781 \text{ m} \tag{10}$$

Afvigelse: Der er en betydelig forskel, hvilket primært skyldes den grove diskretisering (kun 2 elementer anvendt i FEM-modellen).

5.3 Konvergensstudie

For at validere modellen yderligere er der udført et konvergensstudie, hvor antallet af elementer i FEM-modellen gradvist øges. Her er både den analytiske og numeriske løsning baseret på en kraftpåvirkning ved bjælkens frie ende, hvilket sikrer en direkte sammenligning.

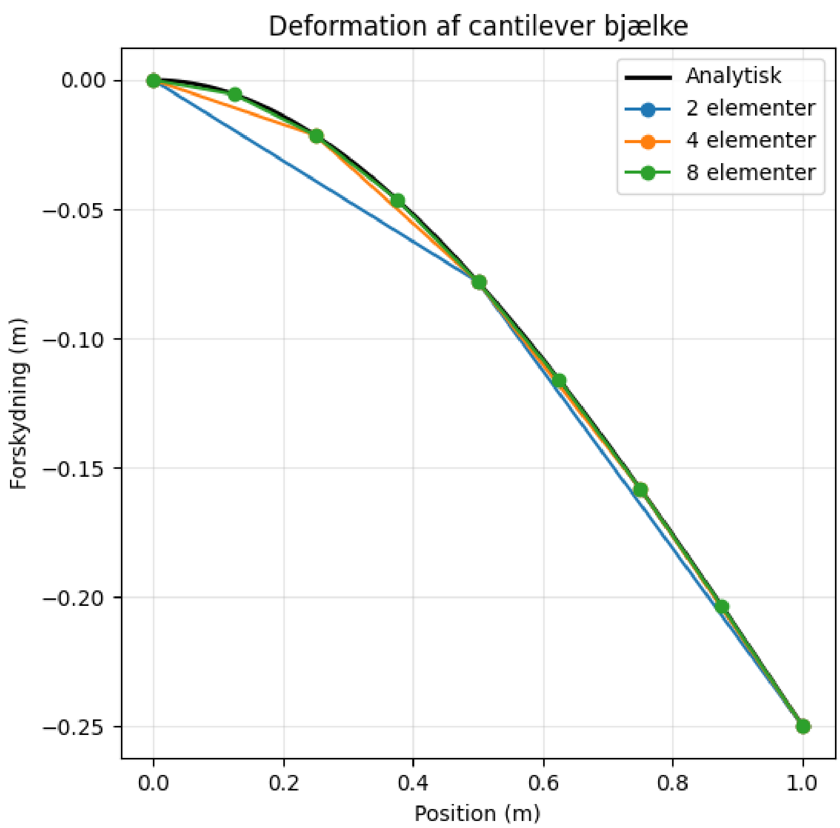

Figure 1: Konvergensstudie af forskydning. Kun translationsfrihedsgraden (u) betragtes; rotationer udelades.

Som det fremgår af figuren, konvergerer den numeriske løsning mod den analytiske, når antallet af elementer øges. Dette bekræfter, at både elementplacering og antal har afgørende betydning for nøjagtigheden af FEM-resultaterne.

6 Konklusion og kode til GitHub

6.1 Konklusion og tanker

Igennem denne process har jeg gennemgået og arbejde med de basale termer og trin i FEM processen. Dette har helt klart givet mig en forståelse og opfriskning af basen som derved har bidraget til en selvsikkerhed når jeg overfører min kode til et andet sprog og udvider til mere komplekse løsninger med flere dertilhørende frihedsgrader. Dette dokument vil fremtidigt blive benyttet som skabelon for tanker og trin og god praktisk for fremtidige projekter!
Klik **Her!** for at tilgå min kode i Python.

References