Universidad Laica Eloy Alfaro de Manabí
Facultad de Ciencias Informáticas
Carrera Tecnología de la Información

Nombre: Macías Pico Joselyn Stefany Periodo: 2020 (2)
Curso: Cuarto Semestre Materia: Métodos Numéricos
Fecha: 11/12/2020 Docente: Ing. Homero

Trabajo Autónomo 1: Error Taylor.

1. Si aproximamos la función $f(x) =$ en un entorno de $a = 1$ con la serie de Taylor.

$$P_4 = e + e(x-1) + \frac{e(x-1)^2}{2} + \frac{e(x-1)^3}{6} + \frac{e(x-1)^4}{24}$$

¿Cuál es su término del error o el término de Lagrange R_4?

$$R_n(x) = \frac{F^{n+1}(e)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$R_4(x) = \frac{F^5(e)(x-1)^5}{5!}$$

Luego hallamos la quinta derivada de e^x

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = f''' = f^4(x) = F^5(x) = e^x$$

$$R_4(x) = \left| \frac{e^c (x-1)^5}{5!} \right| \quad R//$$

2. Aproxima la función $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ en un entorno de $a = 1$ con $P_1(x) = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(x-1)$ ¿Cuál es la expresión del residuo o término de lagranja?

$$R_1(x) = \left| \frac{f^2(e)(x-1)^2}{2!} \right|$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x^2)^{-1/2}(2x) = x(1+x^2)^{-1/2}$$

$$f''(x) = 1(1+x^2)^{-1/2} + x\left[-\frac{1}{2}(1+x^2)^{-3/2}(2x)\right]$$

$$f''(x) = (1+x^2)^{-1/2} - x^2(1+x^2)^{-3/2} = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$$

$$f''(c) = \frac{1}{(1+c^2)^{3/2}}$$

$$R_1(x) = \left| \frac{-1}{2(1+c^2)^{3/2}}(x-1)^2 \right| = \left| \frac{(x-1)^2}{2(1+c^2)^{3/2}} \right|$$

3. Obtener la fórmula de Taylor de la función $\ln(x)$ en un entorno de $a = -1$

b. Calcular $\ln(1,5)$ con el polinomio de Taylor de grado 5 y estimar el error contenido

c. Calcular $\ln(1,5)$ con un error menor que una diezmilésima (10^{-4})

a). $a = -1$

Función	$a = -1$	valor
$y = \ln(x)$	$= \ln(-1)$	$= 1,36\,i$
$y' = \frac{1}{x}$	$= \frac{1}{-1}$	$= -1$
$y'' = -\frac{1}{x^2}$	$= -\frac{1}{(1)^2}$	$= -1$
$y''' = \frac{2}{x^3}$	$= \frac{2}{(-1)^3}$	$= -2$
$y^4 = -\frac{2\cdot 3}{x^4}$	$= -\frac{2\cdot 3}{(-1)^4}$	$= -6$
$y^5 = \frac{2\cdot 3\cdot 4}{x^5}$	$= \frac{2\cdot 3\cdot 4}{(-1)^5}$	$= -24$
$y^6 = -\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{x^6}$	$= -\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{(-1)^6}$	$= -120$

$$f(x) = 1,36i - 1(x-1) - \frac{1(x-1)^2}{2!} - \frac{2(x-1)^3}{3!} - \frac{2\cdot 3(x-1)^4}{4!} - \frac{2\cdot 3\cdot 4(x-1)^5}{5!} - \frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5(x-1)^6}{6!}$$

$$f(x) = (x-1) - \frac{1!(x-1)^2}{2!} + \frac{2!(x-1)^3}{3!} - \frac{3!(x-1)^4}{4!} + \frac{4!(x-1)^5}{5!} - \frac{5!(x-1)^6}{6!} + \dots$$

$$\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

b.

$+\left[\ln x,\ a=1,\ n=5\right]\ (x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}$

$+\frac{(x-1)^5}{5}$

Sustituyendo la x por el valor de 1,5 donde los resultados son:

$R_n = 5(x) = -f^6(c)\ \frac{(x-1)^6}{6!} = (-1)^5\ \frac{(x-1)^6}{6c^6}$

$R_n = 5(1.5) = \max\left|(-1)^5\ \frac{(1,5-1)^6}{6c^6}\right|$

$R_5 = 1,5 = \left|\frac{0,56}{6}\right| = 0,26\cdot10^{-2} < 0,0000002 = \ln(1,5)$

$R_5 = 0,407291$ R//

e.

$E(x) < 10^{-4}$

$E(x)\ |R_n(x)| = \left|\frac{(1)^n\ (x-1)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\right| < 10^{-n}$ con $n=3$

$+\left[\ln x,\ a=1,\ n=3\right] = (x-1)\ \frac{(x-1)^2}{2}\ \frac{(x-1)^3}{3} \Rightarrow E(1,5) < 0,1\times10^{-1}$

$\ln(1,5) = 0,407$ //

4. Si utilizamos el segundo orden polinomio de Taylor centrado en $a=0$ de la función $f(x)=e^x$ para estimar $e^{0,3}$ dado por $e^{0,3} = 1+(0,3)+\frac{(0,3)^2}{2}$

¿Cual es la , del error?

$R_2(x) = \left|\frac{f^3(c)}{3!}(x-0)^3\right|$ donde $x=0,3$, $a=0$ y $a\le c\le x$ $[0;0,3]$

$f^3(x)=e^x \rightarrow f^3(c)=e^c$

$R^2(x) = \left|\frac{e^c}{3!}(0,3)^3\right|$

$R_2(x) = \left|\frac{e^{0,3}}{3!}(0,3)^3\right|$ //