Trabajo Autónomo 1- Error Taylor

Pregunta 1.

Si aproximamos la función $f(x)=e^x$ en un entorno de $a=1$ con la serie de Taylor:

$$P_4 = e + e(x-1) + \frac{e(x-1)^2}{2} + \frac{e(x-1)^3}{6} + \frac{e(x-1)^4}{24}.$$

¿Cuál es su término del error o el término de Lagrange R_4?

$$R_n(x) = \left| \frac{f^{n+1}(c)\,(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right|$$

$$R_4(x) = \left| \frac{f^{4}(c)\,(x-1)^{5}}{5!} \right|$$

Buscamos la quinta derivada de e^x

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = f''' = f^4(x) = f^5(x) = e^x$$

$$R_4(x) = \left| \frac{e^c (x-1)^5}{5!} \right| = R_4(x) = \left| \frac{e^c (x-1)^5}{120} \right| //$$

Pregunta 2

a. Aproxime la función $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ en un entorno de $a=1$ con $P_1(x) = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(x-1)$. ¿Cuál es la expresión del residuo o término de Lagrange?

$$R_1(x) = \left| \frac{f^2(c)}{2!} (x-1)^2 \right|$$

f_2

$$f(x) = (1+x^2)^{1/2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x^2)^{-1/2}(2x) = x(1+x^2)^{-1/2}$$

$$f''(x) = 1(1+x^2)^{-1/2} + x\left[-\frac{1}{2}(1x^2)^{-3/2}(2x)\right]$$

$$f''(x) = (1+x^2)^{-1/2} - x(1+x^2)^{-3/2} = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$$

$$f''(c) = \frac{1}{(1+c^2)^{3/2}}$$

$$R_1 = (x) = \left| \frac{1}{2(1+c^2)^{3/2}} (x-1)^2 \right| = \left| \frac{(x-1)^2}{2(1+c^2)^{3/2}} \right| //$$

Pregunta # 3

a. Obtener la fórmula de Taylor de la función $\ln(x)$ en un entorno de $a=1$

Funcion		$a=-1$		valor
$y = \ln(x)$	=	$\ln(-1)$	=	$1,36i$
$y' = \frac{1}{x}$	=	$\frac{1}{-1}$	=	-1
$y'' = -\frac{1}{x^2}$	=	$-\frac{1}{(-1)^2}$	=	-1
$y''' = \frac{2}{x^3}$	=	$\frac{2}{(-1)^3}$	=	-2
$y^4 = -\frac{2.3}{x^4}$	=	$\frac{2.3}{(-1)^4}$	=	-6
$y^5 = \frac{2.3.4}{x^5}$	=	$\frac{2.3.4}{(-1)^5}$	=	-24

$$y^6 = -\frac{2.3.4.5}{x^6} = -\frac{2.3.4.5}{(-1)^6} = -120$$

$$f(x) = 1{,}36\,i - 1(x-1) - \frac{1(x-1)^2}{2!} - \frac{2(x-1)^3}{3!} - \frac{2.3(x-1)^4}{4!} - \frac{2.3.4(x-1)^5}{5!}$$

$$-\frac{2.3.4.5\,(x-1)^6}{6!}$$

$$f(x) = (x-1) - \frac{1!\,(x-1)^2}{2!} + \frac{2!\,(x-1)^3}{3!} - \frac{3!\,(x-1)^4}{4!} + \frac{4!\,(x-1)^5}{5!}$$

$$-\frac{5!\,(x-1)^6}{6!} + \dots$$

$$\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

b. Calcular $\ln(1{,}5)$ con el polinomio de Taylor de grado 5 y estimar el error contenido

$$+[\ln x,\ a=1,\ n=5]\quad (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(x-1)^5}{5}$$

Procedemos a Sustituir la x por el valor de 1,5 donde los resultados son:

$$R_n = 5(x) = -\int^6 (c)\ \frac{(x-1)^6}{6!} = (-1)^5\ \frac{(x-1)^6}{6\,C^6}$$

$$R_n = 5(1{,}5) = \max\left|(-1)^5\ \frac{(1{,}5-1)^6}{6\,C^6}\right|$$

$$R_5 = 1{,}5 = \left|\frac{0{,}56}{6}\right| = 0{,}26 \cdot 10^{-2} \approx 0.0000002 = \ln(1{,}5)$$

$$R_5 = 0{,}407291\ R//$$

DÍA MES AÑO

"Más se estima lo que con más trabajo se gana"

c. Calcular $\ln(1,5)$ con un error menor que una diezmilésima (10^{-4})

$\epsilon(x) < 10^{-4}$

$\epsilon(x) \; |R_n(x)| = \left| \frac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \right| < 10^{-n}$ con $n=3$

$+ [\ln x, a=1, n=3] = (x-1) \frac{(x-1)^2}{2} \frac{(x-1)^3}{3} = \epsilon(1,5) < 0,1 \times 10^{-1}$

$\ln(1,5) = 0,407$ // ← Resultado

4. Si utilizamos el segundo orden polinomio de Taylor centro en $a=0$ de la función $f(x) = e^x$ para estimar $e^{0,3}$ dado por $e^{0,3} = 1 + (0,3) + \frac{(0,3)^2}{2}$ ¿Cuál es . del error?

$$R_2(x) = \left| \frac{f^3(x)}{3!} (x-0)^3 \right|$$

Damos valor donde $x = 0,3$, $a=0$ y $a \leq c \leq x$ $[0; 0,3]$

$$f^3(x) = e^x \rightarrow f^3(c) = e^c$$

$$R^2(x) = \left| \frac{e^c}{3!} (0,3)^3 \right|$$

$$R^2(x) = \left| \frac{e^{0,3}}{3!} (0,3)^3 \right|$$

//

Escaneado con CamScanner