

# ÉTUDE D'UNE STRUCTURE EN TREILLIS

## MEC552B

Rapport de projet

April 4, 2023

---

Thomas GILET, Josselin SOMERVILLE



# 1 INTRODUCTION

Le but de ce projet est d'étudier des structures internes permettant de rigidifier un cadre avec un apport de masse maîtrisé. Ces structures se retrouvent dans de nombreux domaines comme le bâtiment (figure 1 - gauche), où des barres transverses permettent garantir la forme d'un bâtiment. Mais encore l'impression 3D (figure 1 - droite) où ces motifs sont répétés à l'intérieur de l'objet. Ou encore dans la conception de nouveaux matériaux plus rigides et plus légers.

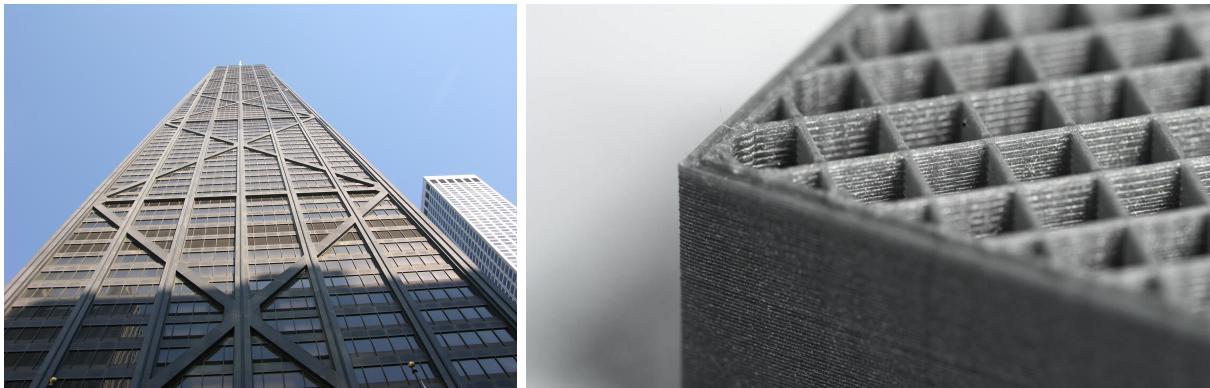


Figure 1: Exemples d'utilisations

On cherchera notamment à comparer différentes structures de remplissage (types de mailages) ainsi qu'à évaluer la résistance de ces structures en fonction de leur densité et de leur taille.

Dans un premier temps, nous allons effectuer une analyse théorique simple sur un treillis composé de 8 poutres, puis nous étudierons par la méthode des éléments finis des structures plus complexes.

## 2

# ANALYSE THÉORIQUE SIMPLIFIÉE

---

On considère un treillis simple constitué d'un cadre extérieur et de poutres reliant le milieu des bords du cadre en formant un carré. On applique un chargement linéique sur deux des faces du treillis. On considère que les poutres sont libres en rotation à leurs extrémités. Un schéma de cette modélisation se trouve sur la figure 2.

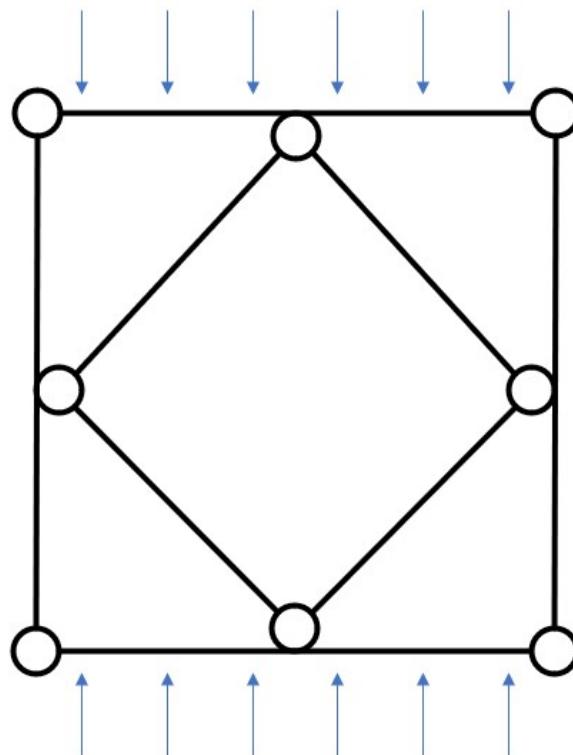


Figure 2: Modélisation retenue

On note  $f$  l'intensité de l'effort linéique, supposé uniforme.

On s'intéresse pour commencer à la poutre supérieure (ou inférieure par symétrie) et on note  $F_1, F - 2, F_3$  les efforts exercées par les poutres situées en dessous. On note  $\underline{e}_y$  le vecteur unitaire vertical ascendant et  $\underline{e}_x$  le vecteur unitaire horizontal vers la droite. La modélisation est schématisé figure 3.

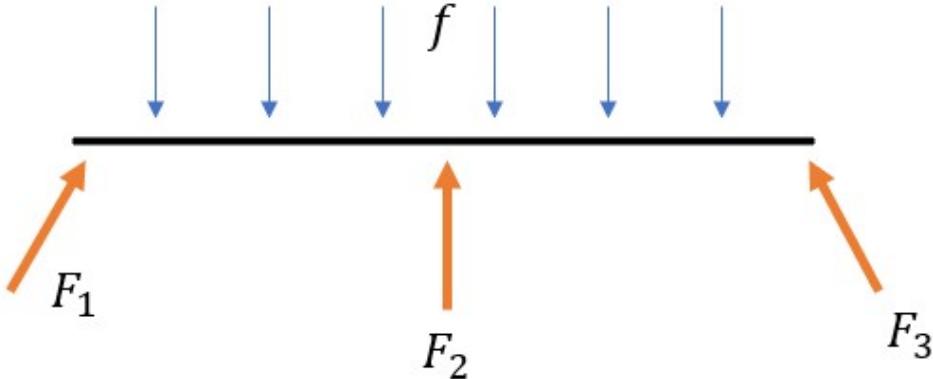


Figure 3: Modélisation de la poutre supérieure

On se place dans un modèle de poutre de longueur  $L$  et on considère des petites déformations. La poutre est régie par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dx} &= -f e_y \\ R(0) = -F_1, \quad R(L) = F_3, \quad [R]_{\frac{L}{2}} &= F_2 \end{aligned}$$

$$\frac{dM}{ds} + R \cdot e_x = 0$$

Un équilibre des forces donne :  $F_1 \cdot e_y = F_3 \cdot e_y = \frac{1}{2}(F_2 \cdot e_y + fL) = F_0$

La résolution donne pour l'effort tranchant  $T$  et pour le moment fléchissant  $M$  :

$$\begin{aligned} T(S < \frac{L}{2}) &= -F_0 - fS, \quad T(S > \frac{L}{2}) = F_0 + f(L - S) \\ M(S < \frac{L}{2}) &= F_0 S + \frac{f}{2} S^2, \quad M(S > \frac{L}{2}) = F_0(L - S) + \frac{f}{2}(L - S)^2 \end{aligned}$$

Le matériau est supposé élastique linéaire, tel que  $M = EI \frac{dw}{ds}$  où  $\alpha$  est l'angle formé par la tangente à la poutre et l'horizontale,  $E$  le module de Young du matériau et  $I$  l'inertie de la section. On note  $\alpha_0 = \alpha(0)$ . De plus avec des petites déformations, on a  $\alpha = \frac{dw}{ds}$  où  $w(S)$  est la déflexion (on note  $w(0) = w_0$ ). On obtient en intégrant de nouveau les équations obtenues ci-dessus

$$\begin{aligned} EI\alpha(S) &= \begin{cases} \alpha_0 + \frac{F_0}{2}S^2 + \frac{f}{6}S^3 & \text{si } S \leq \frac{L}{2} \\ \alpha_0 + \frac{F_0}{4}L^2 + \frac{f}{24}L^3 - \frac{F_0}{2}(L - S)^2 - \frac{f}{6}(L - S)^3 & \text{si } S \geq \frac{L}{2} \end{cases} \\ EIw(S) &= \begin{cases} w_0 + \alpha_0 S + \frac{F}{6}S^3 + \frac{f}{24}S^4 & \text{si } S \leq \frac{L}{2} \\ w_0 + \alpha_0 S + \frac{F_0}{32}L^2(2S - L) + \frac{F_0}{6}(L - S)^3 + \frac{f}{48}L^3(2S - L) + \frac{f}{24}(L - S)^4 & \text{si } S \geq \frac{L}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

En utilisant les symétries du problèmes on obtient  $\alpha(L) = -\alpha(0) = \alpha_0$  et  $w(L) = w(0) = w_0$ .

Le expression si dessous permettent de conclure que  $\alpha_0 = 0$  et  $F_0 = -\frac{f}{6}L$ . On remarque qu'il reste l'inconnue  $w_0$  car elle correspond à un mouvement de corps rigide : on peut translater toute la poutre de  $w_0$  quelconque sans changer le résultat. On la fixe à 0 pour simplifier.

Après simplification on obtient :

$$T(S) = \begin{cases} \frac{f}{6}(L - 6x) & \text{si } S \leq \frac{L}{2} \\ \frac{f}{6}(5L - 6x) & \text{si } S \geq \frac{L}{2} \end{cases}$$

$$M(S) = \begin{cases} \frac{f}{6}x(3x - L) & \text{si } S \leq \frac{L}{2} \\ \frac{f}{6}(L - x)(2L - 3x) & \text{si } S \geq \frac{L}{2} \end{cases}$$

$$EI\alpha(S) = \begin{cases} \frac{f}{12}x^2(2x - L) & \text{si } S \leq \frac{L}{2} \\ \frac{f}{12}(L - x)^2(2x - L) & \text{si } S \geq \frac{L}{2} \end{cases}$$

$$EIw(S) = \begin{cases} \frac{f}{72}x^3(3x - 2L) & \text{si } S \leq \frac{L}{2} \\ \frac{f}{72}(L - X)^3(L - 3x) & \text{si } S \geq \frac{L}{2} \end{cases}$$

Sur la figure 4 se trouve l'allure de ces courbes (Les paramètres  $f$  et  $EI$  sont arbitraires). La dernière

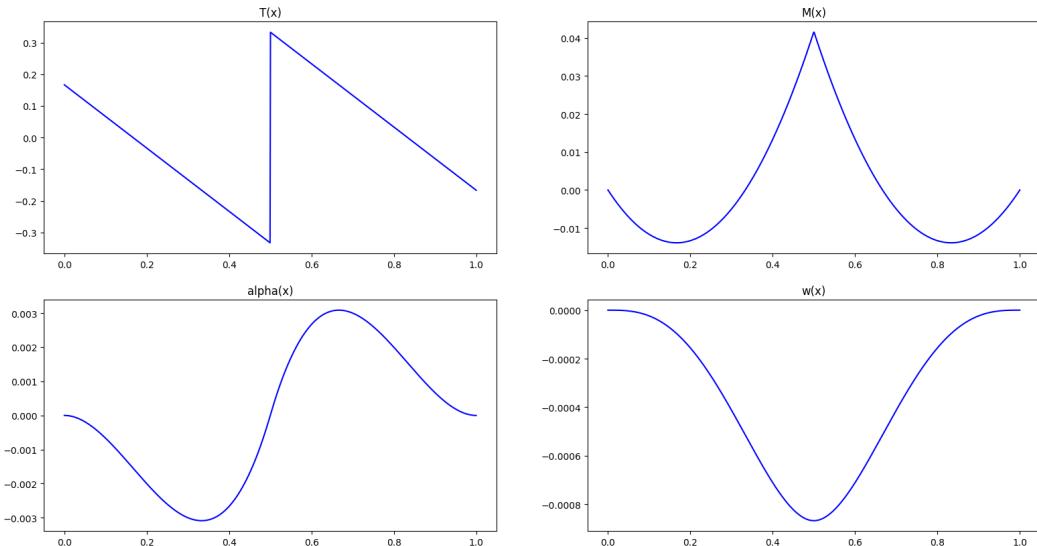


Figure 4: Allure de la solution

## 3

# ANALYSE NUMÉRIQUE

---

A présent, nous allons considérer différents maillages et comparer leurs performances. La situation est très similaire au cas analytique: nous considérons une parallélépipède de dimension  $L \times L \times h$ , fixée en  $x = 0$  et auquel on applique un déplacement en  $x = L$ . L'objectif sera alors de comparer la résistance du parallélépipède en fonction du type de maillage, de sa densité ou encore du nombre de motifs.

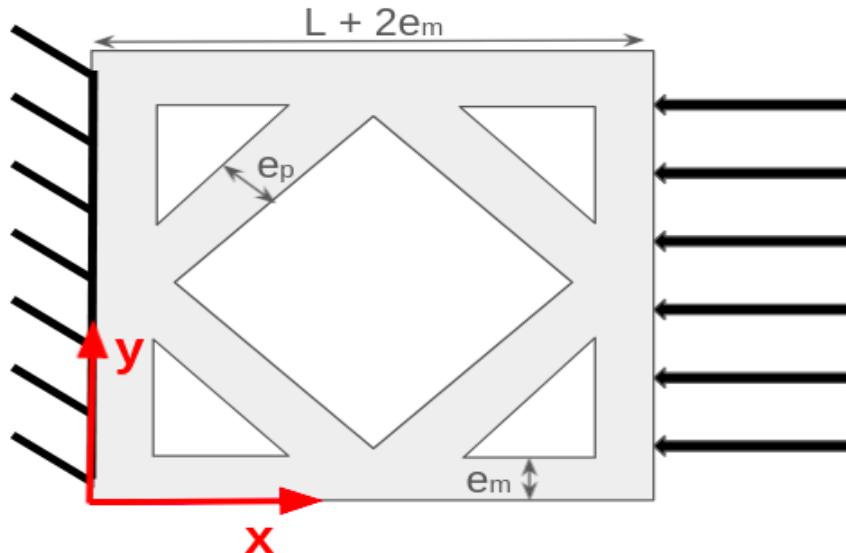


Figure 5: Schéma du problème

### 3.1 MISE EN ÉQUATION

---

Nous allons considérer un modèle non linéaire, comme dans la PC8. Nous supposerons que le matériau constitutif de la barre obéit à une loi néohookéenne compressible avec un terme de masse de Ciarlet-Geymonat, correspondant au potentiel d'énergie de déformation suivant :

$$\rho_0 \Psi = W^{\text{NH}}(I_C, J) := \frac{\lambda}{4} (J^2 - 1 - 2 \ln J) + \frac{\mu}{2} (I_C - 3 - 2 \ln J),$$

avec  $\lambda$  &  $\mu$  les constantes de Lamé, et où

$$\begin{cases} J := \text{Det}(\underline{\underline{F}}) = \sqrt{\text{Det}(\underline{\underline{C}})} \\ I_C := \text{Tr}(\underline{\underline{C}}) \end{cases},$$

avec

$$\begin{cases} \underline{\underline{F}} := \underline{\underline{\text{Grad}}}(\Phi) = \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\text{Grad}}}(\underline{U}) \\ \underline{\underline{C}} := {}^t \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}} \end{cases} .$$

On a alors:

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \left( \frac{\lambda}{2} \left( \frac{J^2}{2} - 1 \right) - \mu \right) \underline{\underline{C}}^{-1} + \frac{\mu}{2} \underline{\underline{1}}$$

Ainsi on peut obtenir les formulations fortes et faibles du problème:

- Formulation forte :

$$\text{div}(\underline{\underline{\Sigma}}) = \underline{\underline{0}}$$

$$\underline{U} = \overline{\underline{U}} \quad \text{on} \quad \partial_r \Omega \quad (\text{the face of applied displacement})$$

$$\underline{U} = \underline{\underline{0}} \quad \text{on} \quad \partial_l \Omega \quad (\text{the clamped face})$$

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \left( \frac{\lambda}{2} \left( \frac{J^2}{2} - 1 \right) - \mu \right) \underline{\underline{C}}^{-1} + \frac{\mu}{2} \underline{\underline{1}}$$

- Formulation faible :

$$W_{int}(\underline{U}^*, \underline{U}) = \int_{\Omega} \underline{\underline{\delta_U E}}(\underline{U}; \underline{U}^*) : \underline{\underline{\Sigma}}(\underline{E}(\underline{U})) d\Omega , \quad W_{ext}(\underline{U}^*, \underline{U}) = 0$$

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\delta_U E}}(\underline{U}; \underline{U}^*) : \underline{\underline{\Sigma}}(\underline{E}(\underline{U})) d\Omega = 0$$

avec  $\underline{E} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{1}})$

A priori il n'y a pas de forces (que l'on connaît en tout cas) appliquée au système donc le terme de droite est nul (on néglige la gravité).

## 3.2 QUELQUES NOTATIONS ET VALEURS

---

Afin de pouvoir analyser les simulations, définissons quelques termes. On notera :

- $\rho_i$  la densité du maillage, c'est à dire la volume sans la bordure extérieur divisé par  $hL^2$ .
- $N$  le nombre de motifs. C'est le nombre de fois qu'un motif est répété le long d'un axe. Il y a donc en général un nombre de motif (carré, hexagone, cercle, ...) proportionnel à  $N^2$ . Le nombre de motifs n'est pas toujours exactement égal à  $N$ , car le pavage dépend de la forme du motif.
- $e_p$  l'épaisseur du motif. C'est la plus petite distance entre deux "trous", c'est à dire la plus faible épaisseur de matière.
- $e_m$  l'épaisseur de la coque extérieure.

Dans la suite, on appellera **plaque** le parallélépipède.

Afin d'effectuer les calculs, on prendra les valeurs suivantes :

- $L = 5$ , la longueur de la plaque
- $h = 1$ , la hauteur de la plaque
- $e_m = 0.1$ , l'épaisseur de la coque
- $E = 1$ , le module de Young
- $\nu = 0.35$ , le coefficient de Poisson
- $l = 0.2$ , la taille du maillage
- $\bar{U}(x = L) = -1$ , le déplacement imposé

### 3.3 LES MAILLAGES CONSIDÉRÉS

---

Nous allons considérer 6 maillages illustrés ci dessous (avec  $N = 5$ ): le maillage *plein* (cas dégénéré), par *carrés*, *carrés tournés*, *hexagones*, *cercles*, *mixte - octogones et carrés*.

Afin de construire ces maillages, nous avons adopté l'approche CSG qui est bien adaptée ici. Tout d'abord il faut définir un motif et une grille en laquelle on va répéter le motif à chaque case. Voici comment on procède :

- On construit une plaque de  $[0, 0, 0]$  à  $[L, L, 0]$
- En chaque point de la grille on soustrait le motif à la plaque
- On construit une grande plaque de  $[-e_m, -e_m, 0]$  à  $[L + e_m, L + e_m, 0]$
- On soustrait le complémentaire de la plaque à la grande plaque.
- On extrude selon le vecteur  $[0, 0, h]$

Le maillage utilisé pour la méthode des éléments finis est un maillage tétraèdrique. Nous avons utilisé l'API Python *dolphin* de FEniCS.

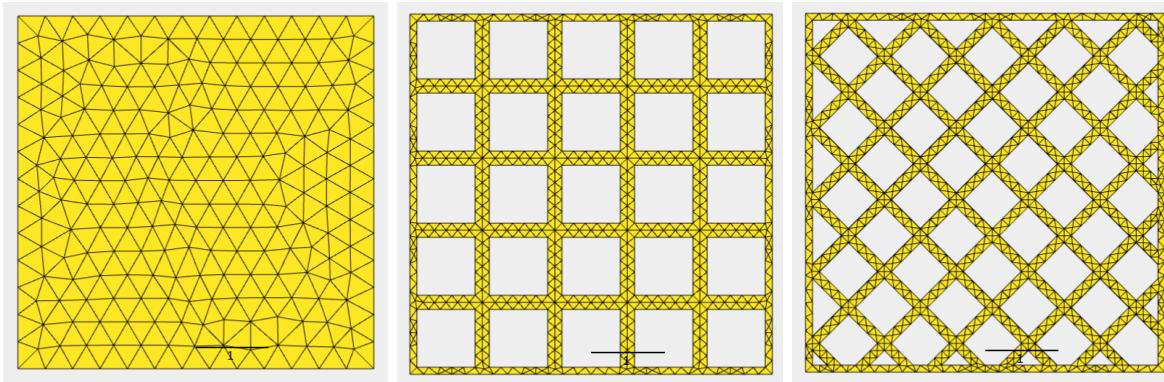


Figure 6: Maillage plein - Maillage par carrés - Maillage par carrés tournés

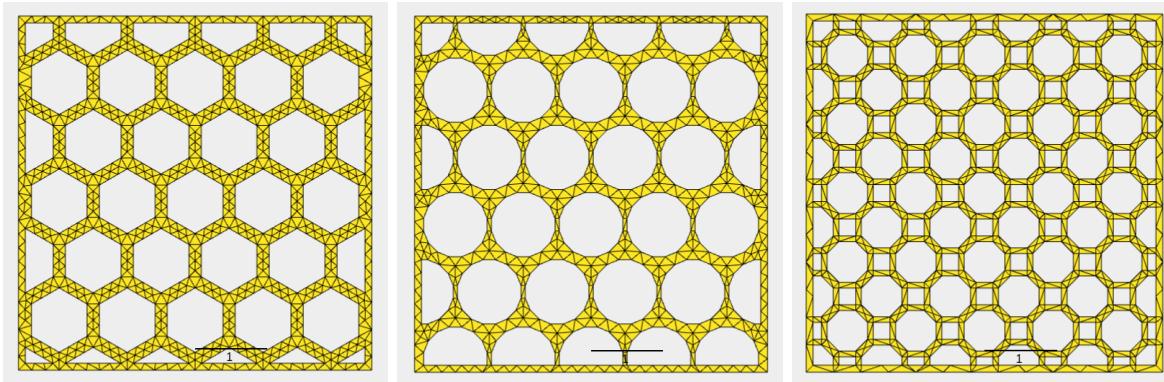


Figure 7: Maillage hexagonal - Maillage par cercles - Maillage mixte

On peut ensuite jouer sur plusieurs paramètres. Voici par exemple l'effet de  $N$  pour le maillage mixte (densité de 30%) :

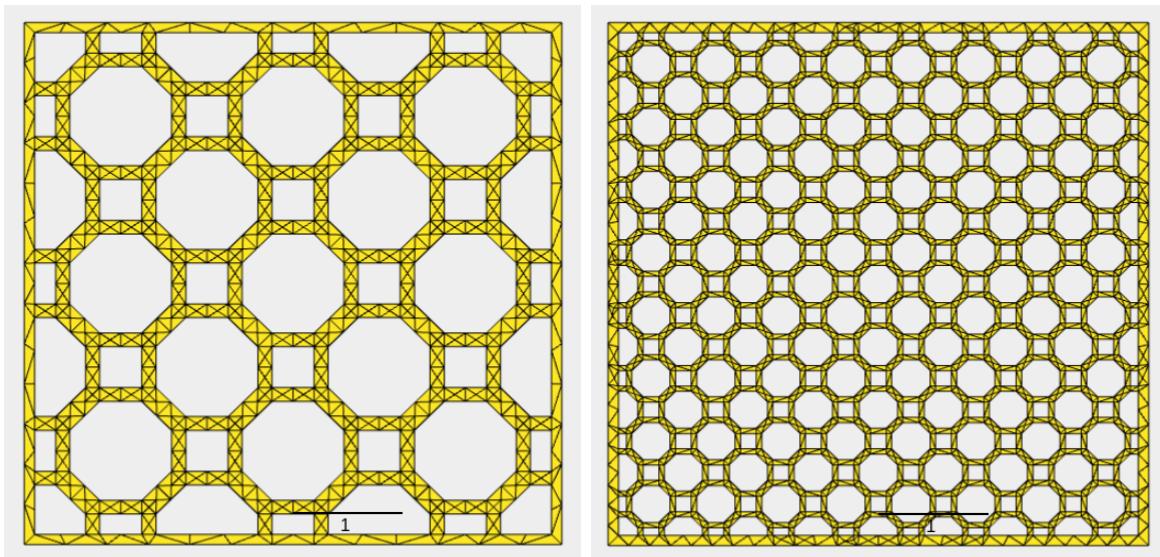


Figure 8: Maillage mixte avec à gauche  $N = 3$  et à droite  $N = 8$

Enfin on peut choisir la densité du maillage. Pour cela il faut d'abord calculer  $A$  l'aire du maillage:

- **Plein**,  $A = L^2$
- **Carré**,  $A = 2N(N - 1) * e_p * s + (N - 1)^2 * e^2$  avec  $s = (L - Ne_p)/N$
- **Carré tourné**,  $A = L^2 - 4N^2R^2$  avec  $R = (L - Ne_p)/(2N)$
- **Hexagonal**,  $A \approx L^2 - 3N(N + 1)R^2\sin(2\pi/6)$  avec  $R = (L/N - e_p)/(2\cos(\pi/6))$
- **Cercle**,  $A = L^2 - (1/2)n_{sides}N^2R^2\sin(2\pi/n_{sides})$  avec  $R = (L/N - e_p)/(2\cos(\pi/n_{sides}))$  et  $n_{sides} = 16$ , le nombre de côtés pour approximer le cercle
- **Octogone**,  $A = L^2 - 2N^2(s^2 + 4R^2\sin(\pi/4))$  avec  $R = (L/(2 * N) - e_p)/\cos(\pi/8) + \sin(pi/8)$  et  $s = 2 * R * \sin(\pi/8)$

Afin de choisir la densité du maillage, il faut calculer l'épaisseur  $e_p$ . Les fonctions liant la densité  $\rho_i = A/L^2$  à l'épaisseur étant assez complexes à inverser ici, nous avons décider de procéder par dichotomie afin de trouver l'épaisseur donnant la densité souhaitée.

Ainsi on peut générer un maillage en fonction du **motif**, du **nombre de motifs** et de la **sendité du maillage** (*la densité est une métrique bien plus pertinente que l'épaisseur puisque certains motifs comme le motif circulaire sont beaucoup moins efficaces que d'autres dû à une épaisseur non constante. Or l'objectif en impression 3D étant d'accélérer l'impression et de réduire la quantité de matière, ce que l'on cherche c'est à maximiser la résistance pour une quantité de matière donnée, d'où le choix de la densité comme métrique de référence*).

### 3.4 EXEMPLE DU RÉSULTAT D'UNE SIMULATION

---

Nous allons considérer le maillage mixte, avec  $N = 8$  et une densité  $\rho_i = 30\%$ . Comme dans la PC8, nous appliquerons un déplacement graduel de 0 à  $-1$  entre  $t = 0$  et  $t = 1$ . Dans un premier temps, on observe une déformation linéaire, puis. Voir figures ci dessous:

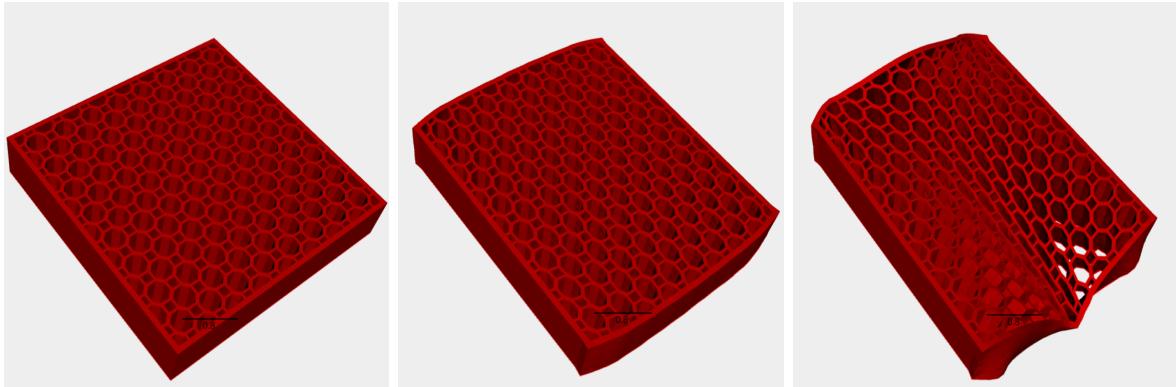


Figure 9: A gauche on retrouve la situation initiale. Au milieu, une déformation encore linéaire constatée pour un déplacement  $U = -0.5$ . Enfin à droite, la situation finale pour  $U = -1$  où on peut clairement voir les non-linéarités.

Ici les non-linéarités sont peu marquées car le maillage mixte, surtout avec de grandes valeurs de  $N$  est comme nous allons le voir plus tard, très résistant. Afin de mieux observer les parois du maillage qui se compriment, nous allons dans la suite considérer un maillage de type **carré** avec  $N = 5$ . Reprenons les figure ci dessus avec le nouveau maillage:



Figure 10: Cette fois les non-linéarités sont beaucoup plus brutales et apparaissent bien plus tôt, dès  $U = -0.30$ . Ce maillage est bien moins résistant.

A présent, visualisons les contraintes. Pour cela nous allons nous appuyer sur deux mesures: la réaction selon l'axe  $\vec{x}'$  du plan initialement en  $x = L + e_m$  ainsi que la répartition des contraintes dans le maillage dans le domaine linéaire. Pour la visualisation des contraintes dans le domaine linéaire, nous avons recoder une simulation linéaire inspirée de [https://comet-fenics.readthedocs.io/en/latest/demo/elasticity/2D\\_elasticity.py.html](https://comet-fenics.readthedocs.io/en/latest/demo/elasticity/2D_elasticity.py.html), qui ne sera pas développée ici.

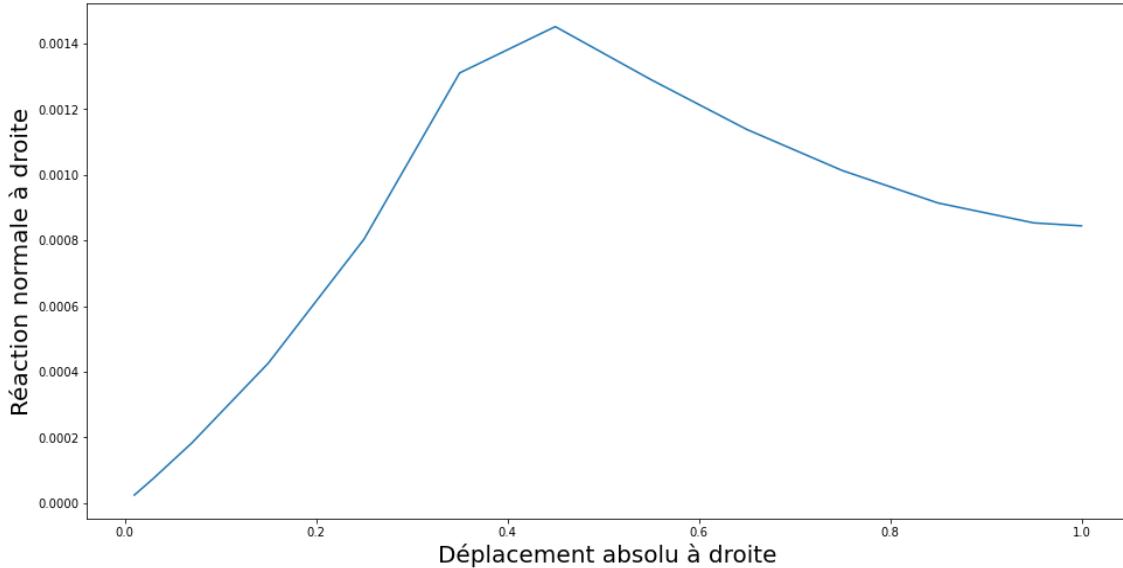


Figure 11: Réaction du plan extrême en fonction de la déformation. On observe dans un premier temps le domaine linéaire, puis la contrainte cesse d'augmenter à cause du flambement.

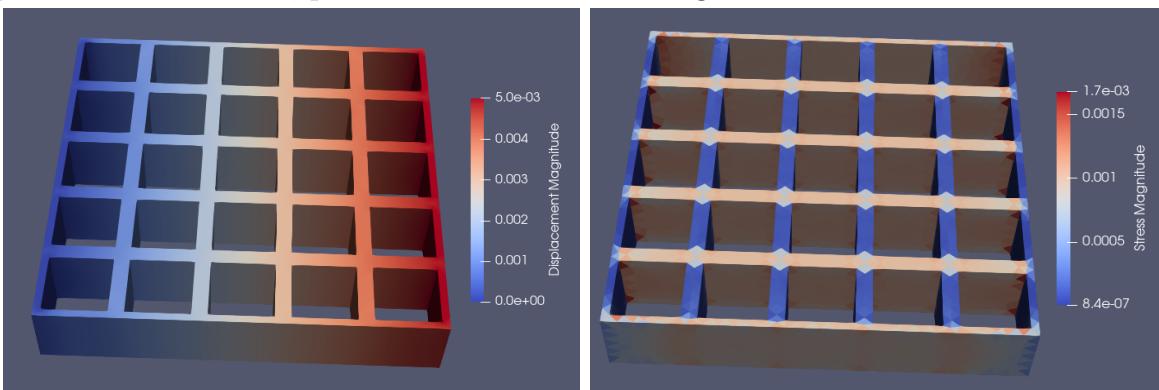


Figure 12: Répartition des déformations (gauche) et contraintes (droite) dans le maillage (*dans le domaine linéaire*).

On voit ici pourquoi ce maillage est peu performant pour la contrainte en question. Les "murs" perpendiculaires à la contrainte ne sont presque pas sollicités. Ainsi, la moitié de la densité est "gâchée". On comprends pourquoi le maillage mixte est bien plus performant car il a des "murs" à  $45^\circ$ , ce qui permet de transmettre la contrainte. Afin de vérifier cela, comparons à un maillage mixte ayant les mêmes paramètres :

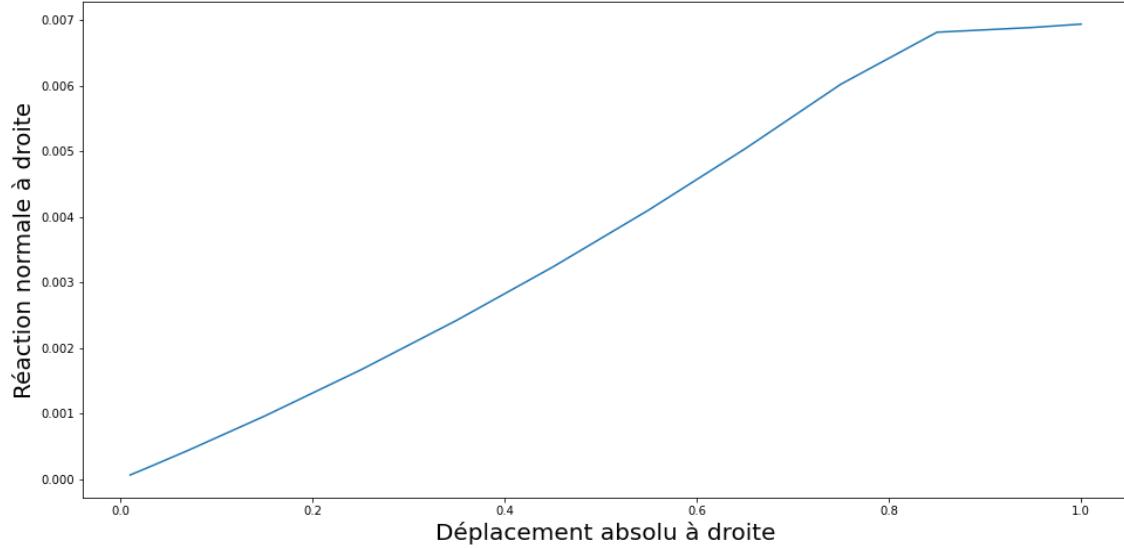


Figure 13: Réaction du plan extrême en fonction de la déformation pour le maillage **mixte**. Ici on observe à peine un domaine non linéaire dans les réactions (même si on voit bien des non-linéarités dans les déformations).

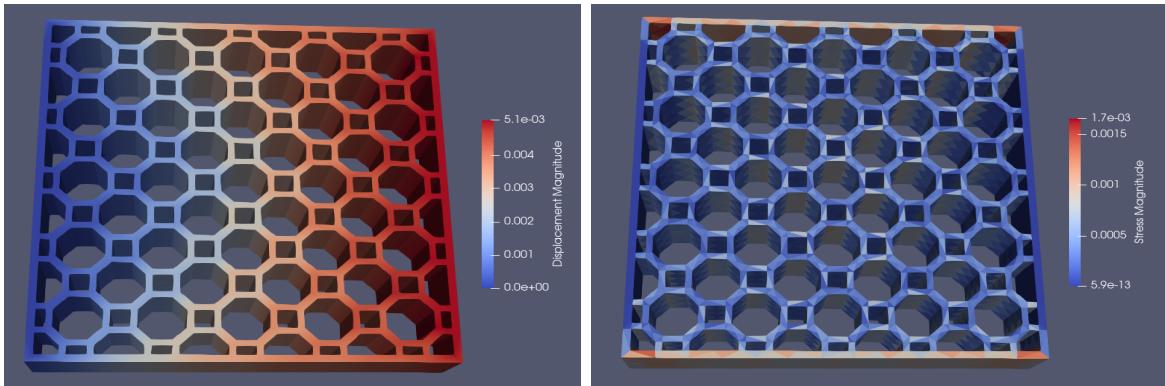


Figure 14: Répartition des déformations (gauche) et contraintes (droite) dans le maillage **mixte** (*dans le domaine linéaire*).

Sans surprise, la structure mixte est bien plus résistante (environ 5 fois plus en termes de réaction normale en  $x = x_{max}$ ) et il semble bien que cela soit du à la meilleure répartition des contraintes (bien que les contraintes soient toujours très concentrées en certains emplacements, ici la coque).

Maintenant que nous avons eu une intuition de l'importance du choix de la structure, comparons la performance des maillages en fonction de la densité  $\rho_i$  dans un premier temps, puis du nombre de motifs  $N$  dans un second temps.

### 3.5 INFLUENCE DE LA DENSITÉ

Dans cette section, nous avons étudié pour tous les maillages, la réaction du plan extrême ( $x = x_{max}$ ) en fonction de la densité du maillage avec  $N = 5$  constant. La réaction étant non linéaire, nous étudions la valeur absolue maximum (*ce qui paraît le plus pertinent puisque c'est le facteur limitant de la résistance de la structure*).

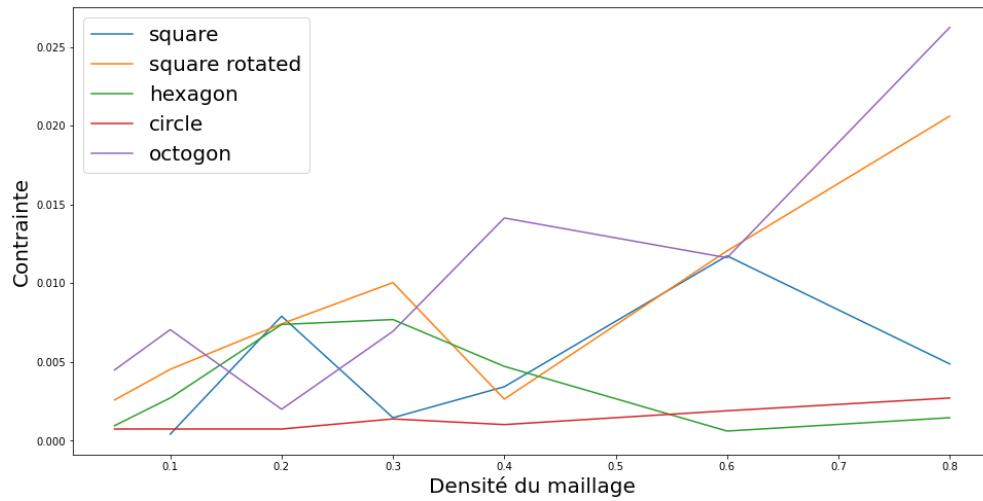


Figure 15: Réaction du plan extrême en fonction de la densité du maillage

La contrainte est plus ou moins proportionnelle à la densité ce qui est logique. Cependant, on a quand même du mal à interpréter cette courbe. Afin de mieux comprendre, retracçons cette courbe en se limitant au domaine linéaire:

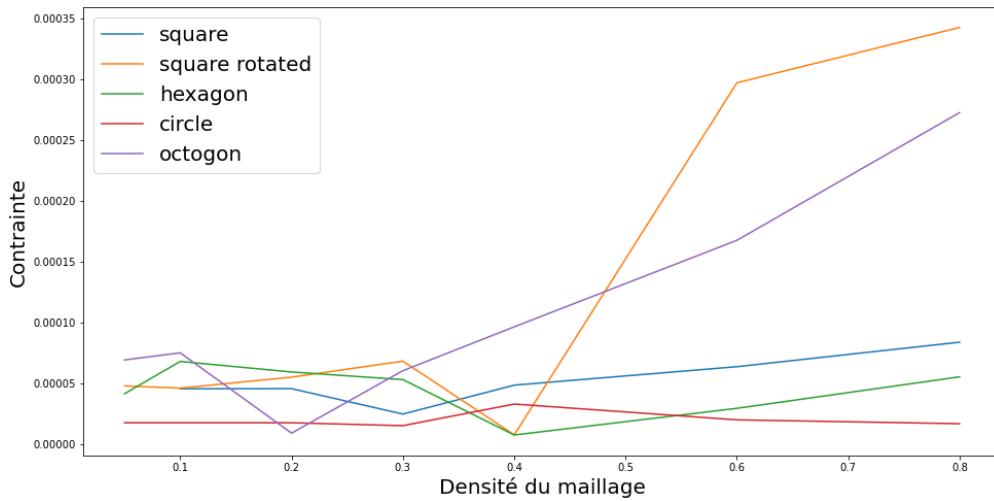


Figure 16: Réaction du plan extrême en fonction de la densité (*domaine linéaire*)

Il y a toujours des sauts étonnantes, comme la contrainte presque nulle pour le maillage carré tourné avec  $\rho_i = 0.4$ . Cependant, on arrive tout de même à discerner un classement des maillages, à savoir : **carré tourné, mixte, carré, hexagone et enfin cercle**.

Quelques précisions. Le maillage du cercle ne peut en réalité descendre à une densité de 5% à cause de sa perte de place. L'épaisseur est donc fixée au minimum  $10^{-4}$  et la densité réelle est supérieure. Le maillage circulaire reste mauvais même avec une plus grande densité à cause du fait que l'épaisseur est mal répartie.

Pour ce qui est du maillage hexagonal, sa mauvaise performance fut une surprise. Le fait que la contrainte décroisse en fonction de la densité peut faire penser que mesurer la réaction en  $x = x_{max}$  n'est peut être pas la métrique la plus pertinente.

On retrouve en tête le carré tourné et le maillage mixte. Tous deux ont des murs orientés à  $45^\circ$ , ce qui explique leur performance. Il faut cependant garder à l'esprit que le carré rester vulnérable dans la direction perpendiculaire à ses côtés. Ainsi pour ce déplacement imposé, il a de bonnes performances mais pour un déplacement avec  $U_x = U_y$ , ses performances sont beaucoup moins bonnes. Ce n'est en revanche pas le cas de la structure mixte, grâce à sa géométrie, ce qui en fait la structure la plus solide en fonction de la quantité de matière. En effet, la contrainte maximal accessible varie très peu en fonction de la direction du déplacement pour la structure mixte, ce qui n'est pas le cas de la structure carrée tournée.

### 3.6 INFLUENCE DU NOMBRE DE MOTIFS

---

Dans la section précédente nous avons fixé arbitrairement  $N = 5$ . Mais quelle valeur de  $N$  est en réalité optimale? Nous allons étudier pour tous les maillages, l'influence de  $N$  avec  $\rho_i = 35\%$  fixé.

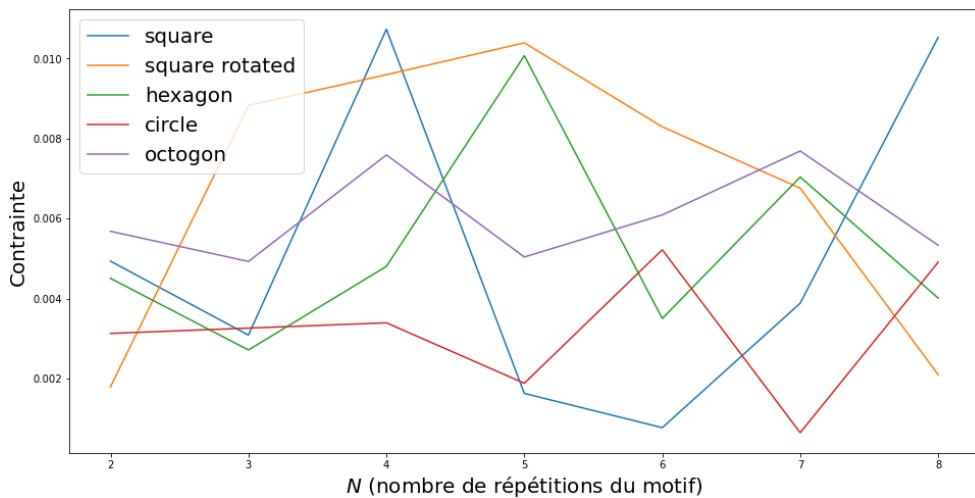


Figure 17: Réaction du plan extrême en fonction du nombre de motifs

Tout comme précédemment, on a quelque chose d'assez chaotique. Encore une fois, limitons nous aux déplacements linéaires:

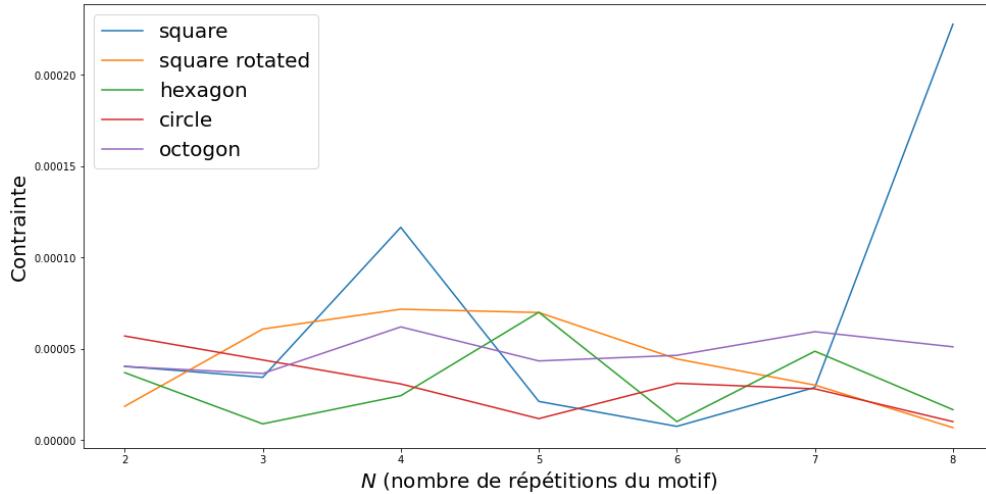


Figure 18: Réaction du plan extrême en fonction du nombre de motifs (*domaine linéaire*)

Dans un premier temps, oublions le motif avec carrés. On observe que globalement, pour tous les types de maillage, la contrainte maximale est très peu liée au nombre de motifs  $N$ . Ainsi, cela veut dire, que le choix de  $N$  ne doit pas être basé sur la résistance de la pièce mais des moyens de fabrication, par exemple en impression 3D, de la résolution de l'imprimante.

A présent essayons de comprendre la pix actronomique du maillage carré en  $N = 8$ . Ce pic semble être une erreur car il est très peu probable que le maillage carré soit 3 à 4 fois plus performants que les autres. Notre hypothèse est que le maillage choisi est trop grossier pour approximer correctement la contrainte, surtout pour des grandes valeurs de  $N$ .

Malheureusement les simulations pour générer cette dernière courbe à déjà pris environ 1h30, et le **temps de simulation étant cubique en l'inverse de la taille du maillage**, nous ne pouvons nous permettre de retracer cette courbe avec une meilleure précision (*d'autant plus qu'avec des maillages plus fins on rencontre des problèmes de mémoire*).

## 4

# CONCLUSION ET PERSPECTIVES

---

Le calcul analytique n'a été fait que sur une poutre et cela ne permet pas de confronter de manière satisfaisante les simulations.

En revanche les simulations ont montré que le nombre de motifs  $N$  n'impactait pas sur la résistance d'une structure. En revanche, le motif a une grande importance sur la rigidité de la plaque. Pour un **déplacement unique, unidirectionnel et connu**, la meilleure structure est la structure carrée tournée de  $45^\circ$  par rapport au déplacement. En revanche si plusieurs déplacements de directions différentes peuvent se produire, il vaut mieux privilégier la structure mixte.

Il reste encore beaucoup de choses à faire, voici quelques pistes:

- Refaire les études des contraintes en fonction de la densité et de  $N$ , avec un maillage plus fin et en voyant s'il n'y a pas une métrique plus pertinente que la réaction en  $x = x_{max}$ .
- Tester de nouveaux maillages, sous de nombreuses directions.
- Etudier les charges perpendiculaires (selon  $\vec{z}$ ).
- Etudier des structures à plusieurs couches: par exemple un maillage carré de  $z = 0$  à  $z = L$  puis un maillage carré tourné de  $z = L/2$  à  $z = L$ . Ceci pourrait réduire la sensibilité à la distance.
- Essayer des maillages à taille variable (renforcer là où les contraintes sont importantes)
- Etudier d'autres structures qu'une plaque, comme des structures "réellement 3D" avec des maillages 3D également (comme des tétraèdres ou des gyroïdes).