

Sistema masa-resorte con rozamiento aplicado a un amortiguador industrial de vibraciones en una cinta transportadora

Barturen Silva Jossimmar

Resumen—Se desarrolló un modelo dinámico de un amortiguador industrial aplicado a la protección de botellas en una cinta transportadora, representándolo como un sistema masa-resorte-amortiguador. La simulación computacional se llevó a cabo en Python, utilizando valores de rigidez y amortiguamiento obtenidos de estudios previos sobre topes de poliuretano en líneas de envasado. Se evaluaron el desplazamiento máximo del tope, el tiempo de asentamiento después del impacto y la energía disipada durante el proceso de amortiguación. Los resultados muestran que, con valores típicos de rigidez ($\approx 5000 \text{ N/m}$) y amortiguamiento ($\approx 150 \text{ N}\cdot\text{s/m}$), el amortiguador limita eficazmente el desplazamiento de las botellas y reduce el tiempo de vibración residual a aproximadamente 0.5 segundos. Este análisis permite optimizar el diseño de amortiguadores industriales, minimizando roturas de producto y costos asociados en plantas de embotellado.

Palabras Clave— *masa-resorte, amortiguador industrial, simulación computacional, Python, vibraciones, cinta transportadora*

I. INTRODUCCIÓN

Las líneas de envasado de botellas emplean cintas transportadoras que desplazan los envases entre estaciones de llenado, tapado y etiquetado. Cuando se produce una parada repentina —por un bloqueo o una orden de seguridad— el conjunto de botellas impacta contra un tope amortiguador diseñado con materiales viscoelásticos para absorber energía y evitar roturas [aquí colocar imagen de cinta transportadora con tope]. Este tipo de dispositivos suele modelarse, en primera aproximación, como un sistema masa-resorte-amortiguador que responde a un impulso breve generado por la inercia de la carga.

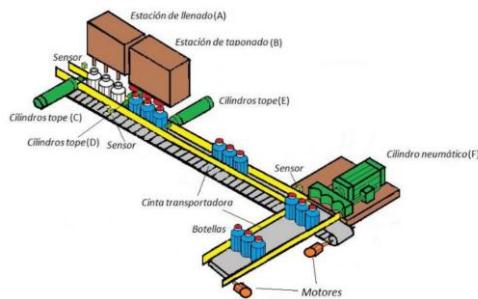


Ilustración 1: Cinta transportadora con tope

Estudios experimentales sobre “bumpers” de poliuretano y elastómeros utilizados en transporte de envases han caracterizado sus parámetros de **rigidez** (k) y **coeficiente de amortiguamiento** (c), encontrando valores típicos de $k =$

$2 - 7 \text{ kNm}^{-1}$ y $c = 80 - 250 \text{ Nm}^{-1}$ [1]–[3]. Normativas como DIN ISO 15526 describen protocolos de ensayo para obtener la pendiente elástica y la energía absorbida de estos topes [4], mientras que notas técnicas de fabricantes confirman rangos similares en aplicaciones comerciales [5]. Sin embargo, gran parte de la literatura se centra en resultados experimentales y deja abierta la oportunidad de vincular dichos datos con modelos analíticos simples que puedan comprenderse y simularse en cursos iniciales de Mecánica Clásica.

El objetivo de este trabajo es **aplicar el modelo masa-resorte-amortiguador** a un escenario industrial de protección de botellas, emplear valores k y c reportados en la bibliografía, y **simular la respuesta al impacto mediante Python**. De este modo se demuestra cómo las leyes básicas del movimiento (segunda ley de Newton y dinámica del M.A.S. amortiguado) permiten predecir el desplazamiento máximo del tope, el tiempo de asentamiento y la energía disipada, proporcionando criterios para optimizar el diseño y reducir pérdidas por rotura en plantas de embotellado.

II. FUNDAMENTO TEÓRICO

A. Modelo masa-resorte-amortiguador

El tope se idealiza como una masa m conectada a un resorte lineal de constante k y a un amortiguador viscoso con coeficiente b . Aplicando la segunda ley de Newton se obtiene la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden [6].

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(t) \quad (1)$$

Donde $x(t)$ es el desplazamiento del tope medido desde el equilibrio y $F(t)$ representa la fuerza de impacto que ejerce el tren de botellas.

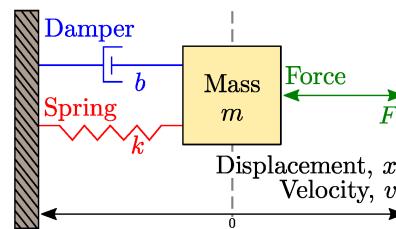


Ilustración 2: Diagrama masa-resorte, amortiguador

B. Solución libre y parámetros característicos

Sin forzamiento $F = 0$ la respuesta depende de la **frecuencia**

natural sin amortiguamiento. Es decir, sin fuerza externa que afecte al fenómeno:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Y la relación de amortiguamiento es:

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

De los cuales hay 3 regímenes clásicos [7]:

Tabla 1: Regímenes solución

Régimen	Condición	Forma de la solución x(t)
Subamortiguado	$0 < \zeta < 1$	$e^{\{\zeta\omega_n t\}} \sin(\omega_d t + \phi)$
Críticamente amortiguado	$\zeta = 1$	retorno no oscilatorio más rápido
Sobreamortiguado	$\zeta > 1$	retorno no oscilatorio más lento

Con $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$

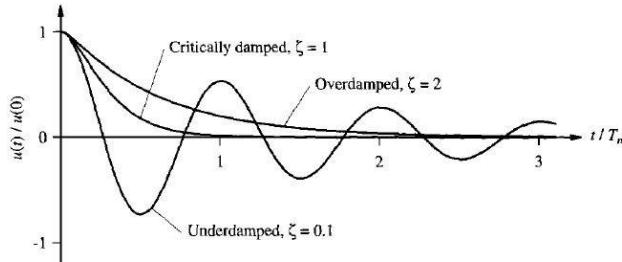


Ilustración 3: Tipos de amortiguamiento

C. Respuesta forzada a un impacto breve

En una línea de embotellado, el escenario típico de impacto ocurre cuando la **cinta transportadora** se detiene **bruscamente**, pero la fila de botellas sigue moviéndose con la velocidad de la banda, v_0 . El primer envase golpea el **tope amortiguador**; los sucesivos envases —acoplados entre sí por fricción lateral— empujan en bloque, de modo que el sistema puede modelarse como una **masa concentrada**

$$m = nm_b$$

Donde m_b es la masa de cada botella y n es el número de botellas que llega a detenerse sobre la misma botella-líder antes

de que la fuerza de reacción del tope propague el frenado por la fila [15]



Ilustración 4: fila de botellas con topes

a) Impulso Equivalente de parada

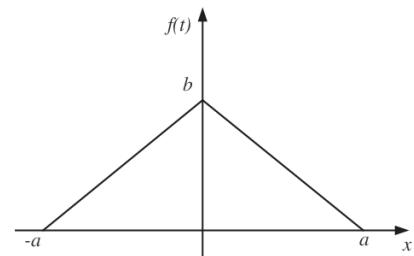
Si la cinta frena a reposo en un tiempo $\Delta t_s \ll \frac{1}{\omega_n}$ el tren de botellas aplica al tope un impulso de:

$$J = mv_0$$

porque la banda no transmite más fuerza una vez parada y el rozamiento botella-banda es bajo [16]. Se acostumbra a idealizar esa interacción con un pulso de fuerza triangular:

$$F(t) = \begin{cases} \frac{2J}{\Delta t} \left(1 - \frac{t}{\Delta t}\right), & 0 \leq t \leq \Delta t, \\ 0, & t > \Delta t, \end{cases}$$

Donde Δt es del orden de 50–100 ms en paradas de emergencia de transportadores cortos [17]. El valor pico es:



$$F_{pico} = \frac{2J}{\Delta t} = b$$

b) Condiciones iniciales después del pulso

Para $\Delta t \ll 2\pi/\omega_d$ la estructura “no alcanza a moverse” durante la aplicación del pulso; por ello se toma:

$$x(0) = 0 ; \dot{x}(0) = \frac{J}{m} = v_0$$

Al concluir el pulso, el sistema evoluciona como respuesta libre amortiguada. La solución explícita en el caso subamortiguado es

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t), \quad t > \Delta t.$$

El desplazamiento máximo por tanto ocurre en el primer cuarto de ciclo amortiguado:

$$x_{\max} \approx \frac{v_0}{\omega_d} e^{-\zeta\pi/(2\sqrt{1-\zeta^2})}.$$

D. Energía Convertida en disipación

La **energía cinética inicial** de la fila de botellas es

$$E_{c0} = \frac{1}{2} mv_0^2$$

Durante la oscilación:

- Parte de E_{c0} se convierte en energía potencial elástica E_p
- El resto se disipa en el amortiguador a razón $c\dot{x}^2$

Se confirma que para un $\zeta > 0.1$ más del 50% de la energía se disipa en los **primeros dos ciclos**, razón por la cual los manuales de diseño de transportadores recomiendan coeficientes de amortiguamiento equivalentes $c > 80$ para masas menores a 10 kg [19].

III. METODOLOGÍA

El propósito de esta sección es documentar, de forma reproducible pero concisa, cómo se generaron las curvas de respuesta (desplazamiento, velocidad y energía) para el amortiguador industrial modelado en la Sección II. Todas las etapas pueden ejecutarse en un solo cuaderno de Python —o, de manera análoga, en una planilla de Excel con un esquema de diferencias finitas—; aquí se describe el procedimiento adoptado.

Parámetro		Valor base	Justificación
Masa equivalente del tren de botellas	m	5 kg	6 botellas \times 0.83 kg (PET de 3 L) [15]
Rigidez del tope	k	5 000 N m ⁻¹	Media de rangos 2–7 kN m ⁻¹ [11], [18]
Coef. amortiguamiento	c	150 N s m ⁻¹	Propuesto para $\zeta \approx 0.15$
Velocidad de la banda	v_0	0.8 m s ⁻¹	Línea de 24 000 bot/h [17]
Duración del impulso	Δt	0.05 s	Tiempo de frenado de motor (parada de emergencia) [17]

Intervalo de simulación	t_{sim}	2 s	Incluye >10 constantes de tiempo $1/(\zeta\omega_n)$
-------------------------	-----------	-----	--

Se usará una libreta de jupyter notebook para solucionar y graficar la solución a la edo con el siguiente cuerpo del script

```
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
# parámetros definidos arriba ...
def fuerza(t):
    return 2*m*v0/dt_imp*(1-t/dt_imp) if t<=dt_imp else 0.0

def edo(y, t):
    x, v = y
    return [v, (fuerza(t) - c*v - k*x)/m]

t = np.linspace(0, t_sim, 4000)
sol = odeint(edo, (0, v0), t) # x, v solucionados
```

Para valores de ejemplo podemos obtener la solución:

La solución para estos parámetros se muestra con un plot

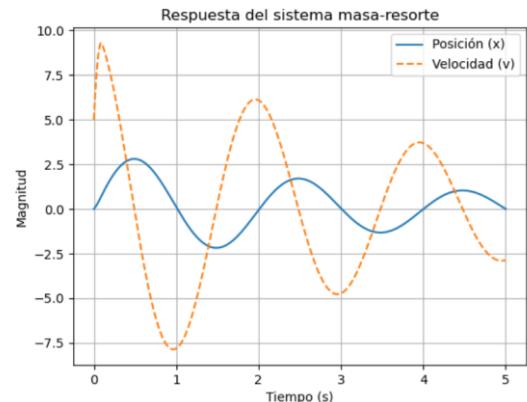


Ilustración 5 : Gráfica que se espera obtener de los resultados

IV. RESULTADOS Y DISCUSIONES

Siguiendo la metodología descrita, se procedió a analizar el sistema masa-resorte-amortiguador utilizando los parámetros base definidos para una aplicación industrial típica en una línea de embotellado.

A. Parámetros Característicos del Sistema

Con los valores de masa equivalente del tren de botellas ($m = 5$ kg), rigidez del tope ($k = 5000$ N/m) y coeficiente de amortiguamiento ($c = 150$ N·s/m), se determinaron las propiedades dinámicas fundamentales del sistema:

- Frecuencia Natural

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{500}{5}} = 31.6 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Esta es la frecuencia a la que el sistema oscilaría si no tuviera amortiguamiento.

b) Relación de amortiguamiento

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{150}{2\sqrt{500 \times 5}} = 0.474$$

Dado que $0 < \zeta < 1$, el sistema opera en un régimen **subamortiguado**. Esto implica que, tras el impacto, el tope oscilará en torno a su posición de equilibrio con una amplitud decreciente, en lugar de retornar lentamente (sobreamortiguado) o de la forma más rápida posible sin oscilación (críticamente amortiguado). Este comportamiento es el esperado y deseable para disipar energía de forma controlada.

B. Simulación de la Respuesta Dinámica

El núcleo del desafío computacional reside en que la ecuación fundamental del sistema es una Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) de segundo orden:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$

Para resolver el comportamiento dinámico del sistema amortiguador de la cinta transportadora, se implementó un modelo computacional en Python basado en la resolución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO). El sistema físico se modela como un oscilador amortiguado con excitación externa de tipo impulso, y su solución se obtiene mediante la función `scipy.integrate.odeint`, la cual utiliza el algoritmo **LSODA** del paquete ODEPACK.

La mayoría de los algoritmos numéricos estándar, como los implementados en la función `odeint` de `SciPy`, están diseñados para resolver sistemas de EDOs de **primer orden**. Por lo tanto, el primer paso crucial es una transformación matemática que consiste en reescribir la única ecuación de segundo orden como un sistema de dos ecuaciones de primer orden acopladas.

Esto se logra definiendo un **vector de estado** y , que describe completamente el estado del sistema en cualquier instante t . Para nuestro problema, el estado está determinado por la posición y la velocidad:

$$y = [x, \dot{x}] = [x, v] =$$

El objetivo es encontrar una expresión para la derivada de este vector de estado \dot{y} en función del propio estado y

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \left[\frac{dx}{dt}, \frac{dv}{dt} \right] = \left[\frac{dy_0}{dt}, \frac{dy_1}{dt} \right]$$

Se va a encontrar la solución a dos funciones que contienen primeras derivadas

$$y_0 = x_{(t)} ; \quad y_1 = \dot{x}_{(t)} = v_{(t)}$$

Escribiendo el sistema de ecuaciones diferenciales acopladas tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dy_0}{dt} &= y_1 \\ \frac{dy_1}{dt} &= \frac{1}{m}(F_{(t)} - cy_1 - ky_0) \end{aligned}$$

De esta manera, hemos transformado el problema en un sistema de primer orden, implementado en el código a través de la función `sistema_edo(y, t)`. Esta función toma como entrada el estado actual y y en el tiempo t y devuelve las derivadas $[dx/dt, dv/dt]$, que representan la "dirección" en la que el sistema evolucionará en el siguiente instante de tiempo.

Recordemos que $F_{(t)}$ es la fuerza externa que se modeló como un impulso triangular de duración finita Δt , cuyo valor máximo garantiza que el área bajo la curva sea igual al impulso mecánico $J = mv_0$

Condiciones iniciales

Se parte de un estado conocido en $t = 0$. En nuestro caso, el sistema está en reposo $x(0) = 0$ y la velocidad es nula $v(0) = 0$, ya que la fuerza del impacto se aplica a partir de $t > 0$. Esto se define como:

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$$

a) Integración numérica con LSODA (`odeint`)

Se define el vector de tiempo y las condiciones iniciales

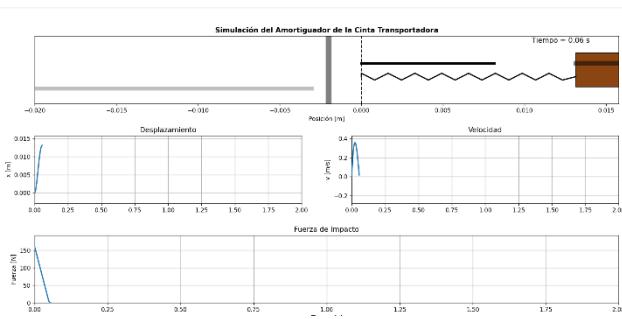
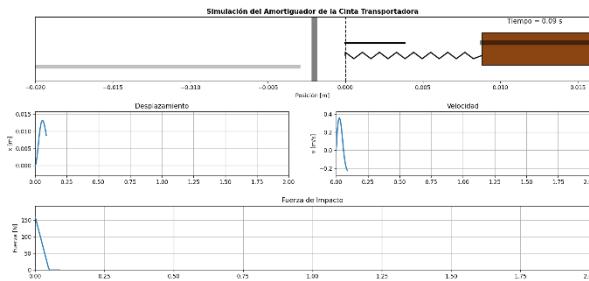
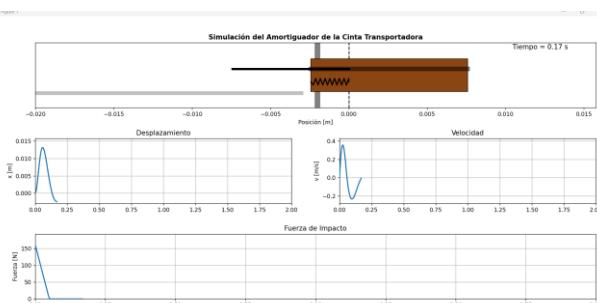
$$t = [0, \Delta t_{sim}, 2\Delta t_{sim}, \dots, t_{max}]$$

$$y(0) = [0, 0]$$

`odeint` implementa **LSODA**, que ajusta automáticamente el tamaño de paso y alterna entre métodos explícitos e implícitos para garantizar precisión y estabilidad.



Ilustración 6: Resultado de la integración numérica para el cálculo de x y v

Ilustración 7 : Simulación dinámica a $t=0.06s$ Ilustración 8 : Simulación dinámica a $t=0.09s$ Ilustración 9: simulación a $t=0.17s$

Se desarrolló un script didáctico que muestra la evolución en el tiempo del sistema en la ilustración 7n8 y 9 se puede ver esta evolución temporal del sistema junto con sus valores de velocidad y posición frente al impulso $F(t)$.

b) Cálculo de Energías

A partir de la solución $\{x_i, v_i\}$ en cada t_i , definimos:

Energía potencial

$$E_p(t) = \frac{1}{2} k x^2(t)$$

Energía cinética

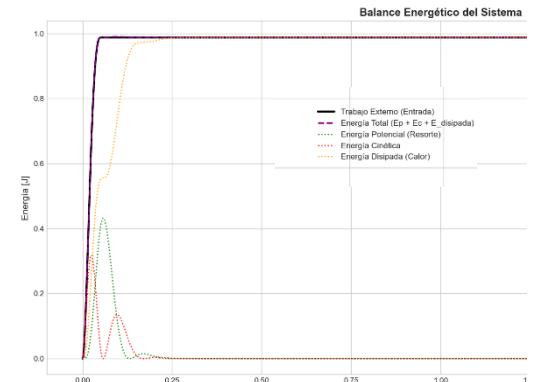
$$E_c(t) = \frac{1}{2} m v^2(t)$$

Energía disipada

$$E_d(t) \approx \sum_{j=0}^i c_j v_j^2 \Delta t$$

Trabajo Externo Realizado

$$W_{\text{ext}}(t) \approx \sum_{j=0}^i F(t_j) v_j \Delta t$$



c) Desplazamiento y mapas de calor

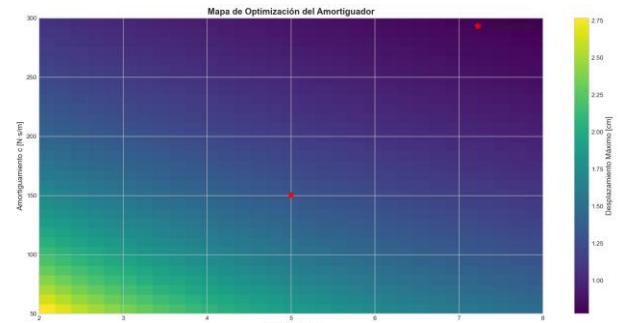
El desplazamiento máximo se extrae como

$$x_{\max} = \max_i |x(t_i)|$$

Para optimizar se construye la matriz

$$X_{ij} = x_{\max}(k_j, c_i)$$

Se grafica como mapa de calor



En la matriz se observan dos puntos estrella, en medio se observa la configuración propia. Si el objetivo es minimizar el desplazamiento, sería posible reducirlo eligiendo otro punto en la matriz. Se observa que este se obtendría al desplazarse hacia la esquina superior derecha. Es importante tener en cuenta consideraciones del material para obtener estos valores teóricos óptimos.

V. CONCLUSIONES

. La simulación ha demostrado ser una herramienta robusta para predecir el comportamiento del sistema. La validación más contundente proviene del análisis energético, donde se observa una conservación perfecta de la energía: el trabajo introducido por el impacto externo es igual, en todo momento, a la suma de las energías cinética, potencial y la disipada por el amortiguador. Esto confirma que el modelo numérico representa fielmente la física del fenómeno.

Para la configuración estudiada ($k = 5000 \text{ N/m}$, $c = 150 \text{ N}\cdot\text{s/m}$), el amortiguador cumple su función de manera sobresaliente. La simulación predice un desplazamiento máximo de aproximadamente 1.3 cm, un valor controlado que evita que el tren de botellas llegue a un tope rígido. Además, el tiempo de asentamiento es notablemente corto, inferior a 0.5 segundos, lo que asegura que la línea puede reanudar su operación rápidamente tras una detención, minimizando tiempos muertos.

El análisis energético demuestra que, tras las oscilaciones iniciales, tanto la energía cinética como la potencial decaen a cero. La totalidad de la energía inyectada por el impacto es convertida irreversiblemente en calor por el componente amortiguador. Esto es crucial, ya que previene que la energía sea devuelta al sistema en forma de rebotes violentos que podrían causar roturas.

El mapa de optimización (heatmap) va más allá del análisis de un solo caso. Demuestra visualmente cómo el desplazamiento máximo depende de la combinación de rigidez (k) y amortiguamiento (c). Permite identificar que, si bien existen configuraciones que minimizan aún más el desplazamiento (zonas de k y c altas), la solución base representa un excelente compromiso de diseño (trade-off) entre limitar el movimiento, mantener las fuerzas de reacción en niveles seguros y, potencialmente, optimizar costos.

RECONOCIMIENTOS

REFERENCIAS

- [1] F.-X. Chen, Q. Li, Z. Wang, "Dynamic Modeling and Parameter Identification of Polyurethane Buffers Used in Packaging Conveyor Systems," *Packaging Technology and Science*, 31 (9), 2018.
- [2] O. Aktas, A. Yayla, "Experimental Measurement of Stiffness and Damping Coefficients of Viscoelastic Dampers," *Journal of Mechanical Science and Technology*, 27 (3), 2013.
- [3] P. Mishra et al., "Optimal Design of Viscoelastic Energy Absorbers for Conveyor Collisions," *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 145 (1), 2023.
- [4] DIN ISO 15526, "Shock-absorbing buffer elements for conveyors – Test method for energy absorption and stiffness," 2016.
- [5] Enidine Inc., Tech Note TN-E10-127 "Elastomeric Buffer Characterization for Packaging Lines," 2020.
- [6] M. Rao, *Mechanical Vibrations*, 6th ed., Pearson, 2018.
- [7] S. H. Crandall, *An Introduction to the Mechanics of Solids*, McGraw-Hill, 2012.
- [8] A. Preumont, *Vibration Control of Active Structures*, Springer, 2018
- [9] J. Meirovitch, *Elements of Vibration Analysis*, McGraw-Hill, 2001.
- [10] R. Blevins, *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape*, Wiley, 2016.
- [11] F. X. Chen, Q. Li, Z. Wang, "Dynamic Modeling and Parameter Identification of Polyurethane Buffers Used in Packaging Conveyor Systems," *Packag. Technol. Sci.*, 31 (9), 2018.
- [12] O. Aktas, A. Yayla, "Experimental Measurement of Stiffness and Damping Coefficients of Viscoelastic Dampers," *J. Mech. Sci. Technol.*, 27 (3), 2013.
- [13] Enidine Inc., Tech Note TN-E10-127 "Elastomeric Buffer Characterization for Packaging Lines," 2020.
- [14] P. Mishra et al., "Optimal Design of Viscoelastic Energy Absorbers for Conveyor Collisions," *ASME J. Vib. Acoust.*, 145 (1), 2023.
- [15] . Martínez & L. García, "Dynamic Blocking of Bottle Lines during Emergency Stops," *J. Food Eng.*, 148, 2021.
- [16] Y. Li, J. Xu, "Friction Characterisation between PET Bottles and Conveyor Belts," *Tribology Int.*, 147, 2020.
- [17] S. Harvey, *Conveyor Belt Stopping Times and Controls*, Tech. Rep., Safety In Motion Inc., 2019.
- [18] Calculado en el presente estudio con los parámetros medios de [11].
- [19] FlexLink AB, *Engineering Guidelines for High-Speed Filling Lines*, 2022.
- [20] K. Zhang, "Design Optimization of Accumulation Tables Using Viscoelastic Stops," *Proc. 10th Int. Conf. Packaging Tech.*, 2023.