

# Måling av gravitasjonskonstanten

H. K. Lange<sup>a</sup>, J. Gjesdal<sup>a</sup>, V. Winton<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Institutt for fysikk, Norges Teknisk-Naturvitenskapelige Universitet, N-7491 Trondheim, Norway.

## Sammendrag

I dette forsøket måles Newtons gravitasjonskonstant  $G$ . Dette ble utført ved å måle gravitasjonskraften mellom 2 blykuller med en torsjonsvekt. Dette resulterte i en verdi for gravitasjonskonstanten på  $G = 6,85102 \cdot 10^{-11} \text{m}^3/\text{kg s}^2$ , med en usikkerhet på  $\pm 2,175607 \cdot 10^{-12} \text{m}^3/\text{kg s}^2$

## 1. Innledning

Isaac Newton var den første som formulerte gravitasjonsloven i sin bok *Principa*, som ble uttgitt i 1687. Newtons gravitasjonsloven sier at det eksisterer en kraft mellom to objekter som virker mellom massesenterne og som er proporsjonal med produktet av massene ganget med en konstant og omvendt proporsjonal med kvadratet av avstanden mellom massesenterne. Denne konstanten er gravitasjonskonstanten. På Newtons tid var det ikke instrumenter presise nok til å måle konstanten nøyaktig. Over 100 år senere, i 1797-1798 var Henry Cavendish den første til å måle gravitasjonskonstanten presist, ved hjelp av en torsjonsvekt. Forsøket går ut på å etterprøve Henry Cavendish og gjenskape det forsøket han gjorde for over 200 år siden. [3]

Forsøket bruker en torsjonsvekts utslag på en målestokk til å bestemme gravitasjonskraften mellom den store massen og den minste massen. Dette utslaget gir de nødvendige størrelsene for å regne ut gravitasjonskonstanten( $G$ ).[2]

## 2. Teori og Metode

Gravitasjonskonstanten  $G$  kan utledes ved å bruke Newtons gravitasjonslov

$$F = G \frac{Mm}{r^2}, \quad (1)$$

der  $m$  og  $M$  er to masser og  $r$  er avstanden mellom massesentrene, omskrevet er  $G$  da gitt ved

$$G = F \frac{r^2}{Mm}, \quad (2)$$

Det har alltid vært, og er fremdeles svært utfordrende å måle  $G$  ettersom gravitasjonskraften er svært liten mellom små masser sammenlignet med andre krefter. Dermed er gravitasjonskrefter ofte neglisjerbare på objekter utenfor astronomisk skala. Når man skal måle den de gravitasjonelle kreftene mellom kulene i dette eksperiment er denne kraften så liten at det må brukes en torsjonsvekt for å

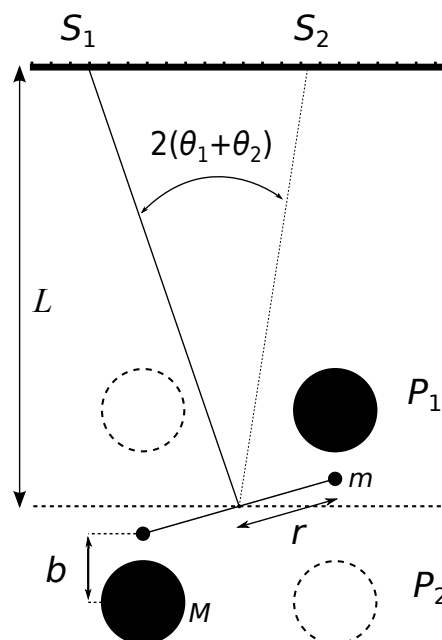
måle den. En torsjonsvekt bruker de elastiske egenskapene til en metalltråd til å måle små dreiemoment den utsettes for, gitt ved

$$\tau = D\theta \quad (3)$$

der  $\theta$  er vridningsvinkel og  $D$  er torsjonsstivhet.

For å måle kraften mellom kulene må man dermed måle disse størrelsene. Dreiemomentet kan også uttrykkes som  $\tau = Fr$ , der  $r$  er armen til kraften, dette gir

$$F = \theta \frac{D}{r} \quad (4)$$



**Figur 1:** Denne figuren viser apparatuoppsett for forsøket, sett fra oven.  $m$  er massen til de små blykulene.  $M$  er massen til de store blykulene.  $L$  er avstanden fra linjal til torsjonsvekt.  $b$  er avstanden fra sentrum av  $m$  til sentrum av  $M$ .  $P_1$  og  $P_2$  er de to posisjonene for  $M$ .  $2(\theta_1 + \theta_2)$  er vinkel utslaget for oscilleringen av torsjonsvekten.  $r$  er lengden på armen av torsjonsvekten.  $S_1$  og  $S_2$  er målinger på linjalen.

Ved å bytte posisjon på de store kulene fåes to vinkler  $2Fr = D\theta_1$  og  $2Fr = D\theta_2$  for de to likevekts posisjonene  $P_1$  og  $P_2$  som kan sees i Figur 1.

Dersom disse to formelene(3)(4) slås sammen blir formelen

$$F = \frac{D(\theta_1 + \theta_2)}{4r} \quad (5)$$

Når  $2(\theta_1 + \theta_2)$  er tilstrekkelig liten kan liten vinkel approksimasjon brukes og dette gir  $L \gg S$  og  $S/L \approx 2(\theta_1 + \theta_2)$  (se figur1) som satt inn i (5) gir

$$F = \frac{DS}{8rL}. \quad (6)$$

Ved å feste et spill på torsjonstaven kan man reflektere en laser og måle hvordan laserens refleksjon beveger seg på målestokken. Det måles en likevektsposisjon ved  $S = |S_1 - S_2|$ , se figur 1. Når det virker et dreiemoment på torsjonsvekten vil den rotere med en dempet svingning rundt den nye likevektsposisjonen. I beregningene blir denne svingningen forenklet til en harmonisk svingning. Vinkelakselerasjonen  $\alpha$  kan også skrives med Newtons andre lov for rotasjonskrefter  $\tau = I\alpha$  der  $I = 2mr^2$  er treighetsmomentet i torsjonspendelen. Dette kan settes inn i (3) og gir likningen

$$I\alpha = -D\theta \leftrightarrow \alpha + \omega_0^2\theta = 0, \quad \omega_0^2 = \frac{D}{I}, \quad (7)$$

en løsning av denne likningen er

$$\theta(t) = \theta_0 * \sin(\omega_0 t) = \theta_0 * \sin\left(\sqrt{\frac{D}{I}}t\right) \quad (8)$$

Denne likningen beskriver en harmonisk svingning med vinkelfrekvens  $\omega_0 = \sqrt{D/I}$ . Torsjonstivheten  $D$  kan da uttrykkes ved svingeperioden  $T = 2\pi/\omega_0$

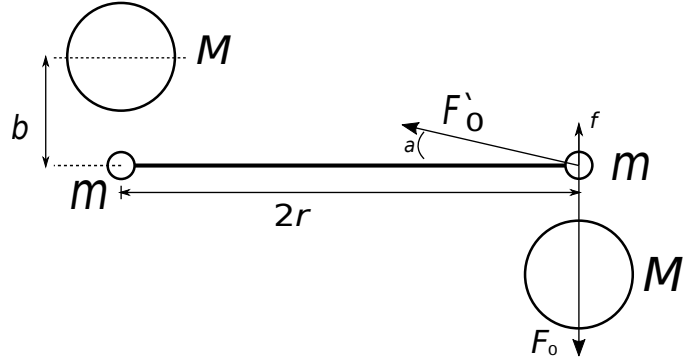
$$D = \frac{4\pi^2 I}{T^2}. \quad (9)$$

Med disse approksimasjonene kan man utlede et uttrykk for  $G$  ved hjelp av likningene (2),(6),(9) og  $I = 2mr^2$  som gir

$$\begin{aligned} G &= F \frac{b^2}{Mm} = D \cdot \frac{S}{8rL} \cdot \frac{b^2}{mM} \\ &= \frac{4\pi^2 I}{T^2} \cdot \frac{S}{8rL} \cdot \frac{b^2}{mM} = \frac{4\pi^2 2mr^2}{T^2} \cdot \frac{S}{8rL} \cdot \frac{b^2}{mM} \\ G &= \pi^2 \frac{Sb^2 r}{T^2 LM} \end{aligned} \quad (10)$$

Dette uttrykket tar bare hensyn til kraften mellom de to kulene som er nærmest hverandre. For å unngå systematiske feil må det også regnes med kraften fra den borteste kulen. Denne kraften er gitt ved

$$F'_0 = G \frac{mM}{b^2 + 4r^2} \quad (11)$$



**Figure 2:** Skisse over kreftene som virker på en av de små kulene

Komponenten  $f$  av  $F'_0$  i Figur 2 som gir dreiemoment på torsjonspendelen sammen med  $F_0 = GmM/b^2$  (kraften fra liten kule til nærmeste store kule). Da blir  $f$  gitt ved

$$\begin{aligned} f &= F'_0 \cdot \sin(\alpha) = G \frac{mM}{b^2 + 4r^2} \cdot \frac{b}{\sqrt{b^2 + 4r^2}} \\ &= G \frac{mM}{b^2} \cdot \frac{b^3}{(b^2 + 4r^2)^{3/2}} = F_0 \cdot \beta \end{aligned} \quad (12)$$

Der

$$\beta = \frac{b^3}{(b^2 + 4r^2)^{3/2}} \quad (13)$$

Da blir summen av kreftene på en av de små kulene gitt med

$$F' = F_0 - f = F_0(1 - \beta) \quad (14)$$

Dette gir et korrigert uttrykk for likning (6) slik at  $F$  er gitt ved

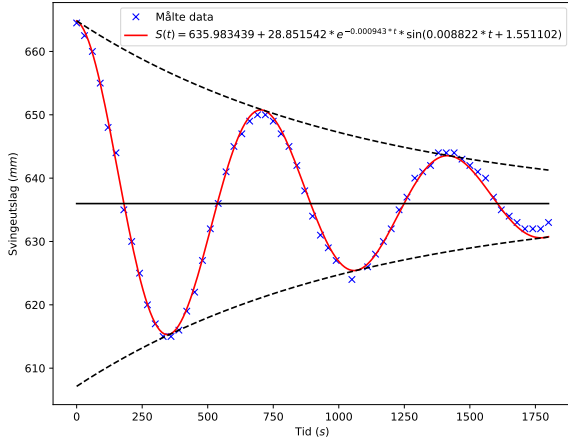
$$F = \frac{DS}{(1 - \beta)8rL} \quad (15)$$

Når denne likningen settes inn i (10) får man et korrigert uttrykk for  $G$  gitt ved

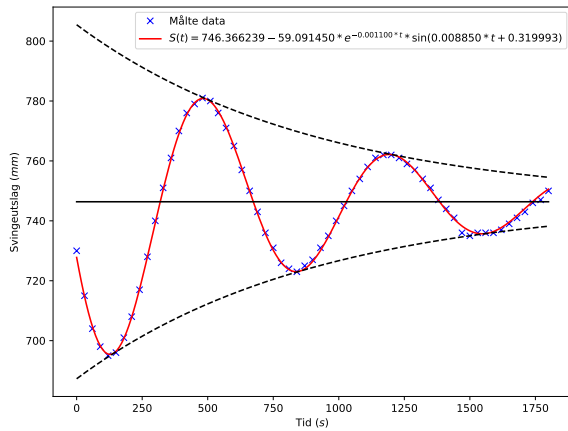
$$G = \frac{\pi^2}{(1 - \beta)} \cdot \frac{Sb^2 r}{T^2 LM}, \quad (16)$$

$S$  måles ved å observere bevegelsen til laserflekken langs målestokken når de store kulene er i posisjon  $P_1$ . Laserens posisjon på målestokken ble målt hvert 30 sekund i en halv time, og etterpå ble det samme gjort når kulene var i posisjon  $P_2$ . Ved å analysere målingene av laserens posisjon ble likevektslinjen  $S_1$  og  $S_2$ , og perioden  $T_1$  og  $T_2$  målt. Avstanden mellom likevekts punktene blir  $S = |S_1 - S_2|$  og perioden  $T = (T_1 + T_2)/2$ . Utregningen av likevektslinjen og perioden gjøres ved hjelp av et Python script [1]. Dette scriptet gir verdier for  $T$ , og  $S$  med usikkerheten  $\Delta S$  for hver svingning. For å finne  $M$  ble begge kulene veid, og gjennomsnittet av massene ble brukt.  $L$  ble målt med et meterbånd. For å finne  $b$  ble radius til den store kula målt og bredden på huset som beskytter torsjonsvekten,  $b$  estimeres så til å være avstanden fra senter av den store kula til senter på torsjonsvekthuset.  $r$  er oppgitt av produsenten av torsjonsvekten.

### 3. Resultat og diskusjon



**Figur 3:** Måling 1: Dette er målingene når de store kulene var i posisjon  $P_1$ . Grafen viser at likevektslinjen for målingene er 0,6359834 m og at perioden er 711,0959s.



**Figur 4:** Måling 2: Dette er målingene når de store kulene var i posisjon  $P_2$ . Grafen viser at likevektslinjen for målingene er 0,7463662m og at perioden er 709,9511s.

**Tabell 1:** Dette er målingene som brukes i utregningen av  $G$

Måling	Måltall	Usikkerhet	Enhet	Usikkerhet (%)
$r$	0,05	$\pm 5,0 \cdot 10^{-5}$	m	$\pm 0,10000$
$b$	0,045	$\pm 7,0 \cdot 10^{-4}$	m	$\pm 1,55556$
$S$	0,1103828	$\pm 1,37792 \cdot 10^{-4}$	m	$\pm 0,12482$
$L$	2,28	$\pm 1,0 \cdot 10^{-2}$	m	$\pm 0,43860$
$T$	711,096	$\pm 1.145$	s	$\pm 0,16102$
$M$	1,5002	$\pm 2,5 \cdot 10^{-4}$	kg	$\pm 0,00333$
$\beta$	0,069105	$\pm 2,6874 \cdot 10^{-3}$	1	$\pm 3,88854$

Verdiene fra tabell 1 satt inn i likning(16) gir

$$G = \frac{\pi^2 \cdot 0,1103828 \text{ m} \cdot (0,045 \text{ m})^2 \cdot 0,05 \text{ m}}{(1 - 0,069105)(711,096 \text{ s})^2 \cdot 1,5002 \text{ kg} \cdot 2,28 \text{ m}}$$

$$= 6,851017 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kgs}^2 \quad (17)$$

Dette er den bergnede verdien for  $G$  utifra resultatene i tabell 1. Den har dimensjonene  $[L]^3[M]^{-1}[T]^{-2}$ . Dette stemmer overens med dimensjonsanalyse av Newtons gravitasjonslov. Gauss feilforplantningslov gir usikkerhet  $\Delta G = \pm 2,175607 \cdot 10^{-12} \text{ m}^3/\text{kgs}^2$  og dermed blir den relative usikkerheten  $\pm 3,17560\%$ . Gjeldende tabellverdi for  $G = 6,67408 \cdot 10^{-11}$  [4]. Tabellverdien ligger innenfor den beregnede feilmarginen i den utledede  $G$ . Dette tyder på at eksperimentet er gjennomført på en god måte uten grove feil.

Dersom man ser på potensielle systematiske feilkilder i den matematiske modellen bak forsøket, kan man se at disse skyldes forenklinger som i (6) hvor det utnyttes at trigonometriske verdier kan approksimeres ved små vinkler. Denne feilen blir mindre etterhvert som  $L$  blir større og det kompenseres for denne feilkilden i oppsettet ved å flytte målestokken tilstrekkelig langt unna torsjonsvekten. Utover det, er den dempede harmoniske svingningen i torsjonsvekten blitt approksimert til å være en harmonisk svingning. Likningen for den dempede svingningen er gitt med  $F = D\theta - \mu\omega$ . Ettersom våre beregninger ga en periode på omtrent 12 minutter, er vinkelhastigheten svært liten og dermed er feilen som oppstår fra forenklingen lite signifikant i forhold til andre mulige feil i forsøket.

Når man vurderer den relative usikkerheten, ser man at målingen av  $b$  er den største kilden til usikkerhet i dette forsøket. Målingen av  $b$  er tatt med skyvelær, og ettersom dette ikke er en særlig presis målemetode blir usikkerheten stor. Ettersom  $b$  er en kort avstand blir den relative feilen i målingen større. Dette medfører at  $\beta$  har spesielt høy usikkerhet, siden  $\beta$  er en verdi som er utledet i (13). Dette uttrykket bruker potenser av  $b$  som setter enda høyere krav til presisjonen i målingen av  $b$  og dette gjenspeiles i at den

relative usikkerheten i  $\beta$  blir større enn i  $b$ . Målingen av  $L$  er også gjort manuelt, som medfører en viss usikkerhet, men ettersom  $L$  er betydelig større enn  $b$  blir den relative feilen i målingen av  $L$  mye mindre.

Målingen av  $S$  er også manuell og for å måle den observeres bevegelsen til en laserfleck over en halv time. Dette gjøres også med målestokk. Hverken målestokk eller det menneskelige øyet gir veldig presise målinger på laserens bevegelse og dette begrenser hvor nøyaktig posisjonen til laserflekken kan måles. Fordi målingen krever fokus fra flere personer over lang tid er det stor sannsynlighet for menneskelige feil. Det antas at menneskelige feil står bak feilmålingene på 17min(620mm) og 18min(620mm) for  $S_1$  se Figur 3. Disse målingene var ikke i samsvar med resten av dataene og det ble konkludert at å fjerne dem ville gi et bedre resultat da dette gjorde at grafen falt bedre sammen med de målte verdiene. Å se bort ifra disse to målingene ga også en lavere usikkerhet i utregningene fra Python scriptet[1].

#### 4. Konklusjon

Gjennom å måle svingningen til en torsjonsstav ble  $G = 6,851017 \cdot 10^{-11} \text{m}^3/\text{kg s}^2$  målt med en usikkerhet på  $\Delta G = \pm 2,175607 \cdot 10^{-12} \text{m}^3/\text{kg s}^2$ . Dette er i overensstemmelse med moderne målinger av gravitasjonskonstanten når usikkerheten blir tatt høyde for. De største feilkildene i dette forsøket kommer av dårlig måleteknikk, spesielt i størrelsene  $b$ ,  $L$  og  $S$ , og ikke av systematiske feil i den matematiske modellen. Den enkleste måten å forbedre nøyaktigheten i eksperimentet, er å forbedre nøyaktigheten i målingen av  $S$ ,  $L$  og særlig  $b$ .

#### 5. Referanser

- [1] NTNU, Institutt For Fysikk, Cavendish.py, python script, nedlastet 03.10.2017  
[http://home.phys.ntnu.no/brukdef/undervisning/fy1001\\_lab/orientering/Cavendish.py](http://home.phys.ntnu.no/brukdef/undervisning/fy1001_lab/orientering/Cavendish.py)
- [2] E. V. Herland, I. B. Sperstad, K. Gjerden, M. H. Farstad, T. A. Bojesen, A. G. Gjendem og T. B. Melå. Laboratorium i emnene TFY4145 Mekanisk fysikk, FY1001 Mekanisk fysikk, NTNU, 2011.
- [3] H. Ormestad, Ø. Grøn, Store Norske Leksikon - Gravitasjon, <https://snl.no/gravitasjon>, nedlastet 04.10.2017.
- [4] Peter J. Mohr, David B. Newell, Barry N. Taylor, CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants: 2014 versjon 1 utgitt 21.07.2017 arXiv:1507.07956, nedlastet 04.10.2017.