2.A Anhang: Grundbegriffe der Linearen Algebra

a **Matrizen.** Matrix, genauer $n \times m$-Matrix:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Zeilen $i = 1, ..., n$, Spalten $j = 1, ..., m$. Elemente a_{ij}.

Quadratische Matrix: Gleiche Anzahl Zeilen und Spalten, $n = m$.

Symmetrische Matrix: Es gilt $a_{ij} = a_{ji}$.

Diagonale einer quadratischen Matrix: Die Elemente $[a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}]$.

Diagonalmatrix: Eine, die „nur aus der Diagonalen besteht“, $d_{ij} = 0$ für $i \neq j$.

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

b **Transponierte Matrix**: Wenn man Zeilen und Spalten einer Matrix $\boldsymbol{A}$ vertauscht, erhält man die transponierte Matrix $\boldsymbol{A}^T$:

$$\boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Bemerkungen:

1. Es gilt offensichtlich $(\boldsymbol{A}^T)^T = \boldsymbol{A}$ (vgl. die zweimal gewendete Matratze).
2. Für symmetrische Matrizen gilt $\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}$.

c **Vektoren.** Vektor, genauer Spaltenvektor: n Zahlen, unter einander geschrieben.

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Elemente b_i.

d **Transponierte Vektoren**: Spaltenvektoren werden zu Zeilenvektoren, wenn man sie transponiert:

$$\underline{b}^T = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}^T = [b_1, b_2, ..., b_n] \; .$$

Drucktechnisch platzsparender als Spaltenvektoren sind Zeilenvektoren, und deshalb schreibt man Spaltenvektoren oft als transponierte Zeilenvektoren hin: $\underline{b} = [b_1, b_2, ..., b_n]^T$.

e **Einfache Rechenoperationen.** Addition und Subtraktion: Geht nur bei gleichen Dimensionen. Man addiert oder subtrahiert die einander entsprechenden Elemente.

Multiplikation mit einer Zahl (einem „Skalar"): Jedes Element wird multipliziert. Division durch eine Zahl ebenso.

Recht oft trifft man in der Statistik und anderswo auf so genannte **Linearkombinationen** von Vektoren. Das ist ein schöner Name für Ausdrücke der Form

$$\lambda_1 \underline{b}_1 + \lambda_2 \underline{b}_2$$

+ eventuell weitere solche Terme – man addiert Vielfache der beteiligten Vektoren.

f **Matrix-Multiplikation.** Matrizen können nur multipliziert werden, wenn die Dimensionen passen: $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ ist definiert, wenn die Anzahl Spalten von $\boldsymbol{A}$ gleich der Anzahl Zeilen von $\boldsymbol{B}$ ist. Dann ist

$$c_{ik} = \sum\nolimits_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk}$$

Beispiel:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) \\ (-1) \cdot 3 + 0 \cdot 4 & (-1) \cdot 1 + 0 \cdot (-2) \\ 3 \cdot 3 + 1 \cdot 4 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ -3 & -1 \\ 13 & 1 \end{bmatrix}$$

Bemerkungen:

1. Im Beispiel ist $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$ nicht definiert, da $\boldsymbol{B}$ 2 Spalten, $\boldsymbol{A}$ aber 3 Zeilen hat.
2. Wenn $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$ beide definiert sind, sind die beiden im allgemeinen verschieden, $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$! Matrizen dürfen nicht vertauscht werden.
3. Es kann $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$ sein, obwohl weder $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$ noch $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$ ist.
4. Es gilt das Assoziativgesetz: $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C})$
5. Es gilt das Distributivgesetz: $\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}$ und ebenso $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C} + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}$.
6. Transponieren eines Produktes: Es ist
$$(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{B}^T \cdot \boldsymbol{A}^T$$
Man muss also beim Transponieren die Reihenfolge vertauschen!
7. Das Produkt $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^T$ ist immer symmetrisch.

g All das gilt auch für Vektoren: Wenn $\underline{a}$ und $\underline{b}$ Spaltenvektoren sind, ist

$$\underline{a} \cdot \underline{b}^T = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \dots & a_1 b_m \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \dots & a_2 b_m \\ \vdots & & & \vdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \dots & a_n b_m \end{bmatrix} .$$

Wenn sie gleiche Länge haben, ist

$$\underline{a}^T \cdot \underline{b} = \sum\nolimits_i a_i \cdot b_i \ .$$

„Matrix mal Spaltenvektor“ ergibt (falls definiert) einen Spaltenvektor: $\boldsymbol{A} \cdot \underline{b} = \underline{c}$.

h Die **Länge eines Vektors** ist die Wurzel aus $\sum_i a_i^2$. Man bezeichnet sie oft mit $\|\underline{a}\|$. Man kann schreiben

$$\|\underline{a}\|^2 = \underline{a}^T \cdot \underline{a} \ .$$

i Die **Einheitsmatrix** (der Dimension m) ist definiert als Diagonalmatrix mit lauter Einsen:

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Sie lässt bei Multiplikation Matrizen unverändert: $\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{I} = \boldsymbol{A}$.

j **Inverse Matrix.** Wenn $\boldsymbol{A}$ quadratisch ist und $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$ gilt, heisst $\boldsymbol{B}$ die zu $\boldsymbol{A}$ inverse Matrix; man schreibt $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$.

Bemerkungen:

1. Es gilt dann auch $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$. Wenn also $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$ ist, ist auch $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}^{-1}$.
2. Es gibt nicht zu jeder quadratischen Matrix $\boldsymbol{A}$ eine Inverse. Wenn es eine gibt, heisst $\boldsymbol{A}$ **regulär**, und es gibt nur eine Inverse. Wenn es keine Inverse gibt, heisst $\boldsymbol{A}$ **singulär**.
3. Es ist $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}$.
4. Inverses eines Matrix-Produkts: Wenn $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ quadratisch sind, ist

   $$(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{A}^{-1}$$

   Die Reihenfolge muss also vertauscht werden, wie beim Transponieren!
5. Es ist $(\boldsymbol{A}^T)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^T$. Man schreibt oft kurz $\boldsymbol{A}^{-T}$.

k **Lineares Gleichungssystem.** Kurz zusammengefasst: Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2 + ... + a_{1m}\beta_m &= y_1 \\ a_{21}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + ... + a_{2m}\beta_m &= y_2 \\ \dots \quad & \quad .. \\ a_{m1}\beta_1 + a_{m2}\beta_2 + ... + a_{mm}\beta_m &= y_m \end{aligned}$$

(für die β_j) lässt sich schreiben als

$$\boldsymbol{A}\underline{\beta} = \underline{y}$$

(für $\underline{\beta}$). Es hat genau eine Lösung, wenn $\boldsymbol{A}$ regulär ist, also wenn die Inverse $\boldsymbol{A}^{-1}$ existiert. Dann ist

$$\underline{\beta} = \boldsymbol{A}^{-1}\underline{y}$$

diese Lösung.

l Wenn die **Matrix $\boldsymbol{A}$ singulär** ist, dann gibt es eine Zeile $[a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{im}]$, die sich als Linearkombination der andern schreiben lässt. Die entsprechende Gleichung führt entweder zu einem Widerspruch (keine Lösung) oder ist überflüssig (unendlich viele Lösungen). Man spricht von **linearer Abhängigkeit** der Zeilen der Matrix oder der Gleichungen.

(Wenn die Matrix singulär ist, gibt es auch eine Spalte, die sich als Linearkombination der andern schreiben lässt. Es sind also auch die Spaltenvektoren linear abhängig.)