Escuela Politécnica Nacional

Matemática avanzada

Nombre: Paula Sabando
Fecha: 19/10/2025
Curso: 2A

Deber 1

- Resolver los ejercicios del 1 al 66 del libro cálculo de varias variables, cap 12, ejercicios sección 12.1.

En los ejercicios del 1-16, proporcione descripciones geométricas del conjunto de puntos en el espacio cuyas coordenadas satisfacen los pares de ecuaciones que se indican.

① $x = 2$, $y = 3$

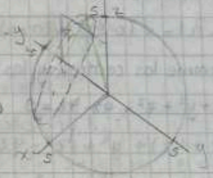

$x = 2$ describe un plano paralelo al plano $yz$.
$y = 3$ describe un plano paralelo al plano $xz$.

La intersección de estos dos planos es una línea recta que pasa por el punto $(2, 3, 0)$ y es paralela al eje $z$.

⑩ $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $y = -4$

Una esfera con centro en el origen y un radio de 5 unidades define a la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

$y = 4$ es un plano paralelo al plano $xz$.




La intersección de un plano con una esfera es un círculo (si el plano corta la esfera) con centro en $(0, 4, 0)$ y para su radio $r$ usamos pitágoras

$r = \sqrt{(5)^2 - (4)^2} = \sqrt{9} = 3$

$\therefore$ El conjunto de puntos $x^2 + y^2 + z^2 = 25$; $y = -4$ es una circunferencia

Describa el conjunto de puntos en el espacio cuyas coordenadas satisfacen las desigualdades ó combinaciones de ecuaciones y desigualdades que se indican.

⑲ $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$

Los coordenadas satisfacen la ecuación de la esfera, por lo que esta representan una esfera con centro en el origen y radio $r = 1$
El signo representa que se incluyen los puntos dentro de la esfera y el máximo valor que toma es 1. (la frontera).

Describa el conjunto dado con una ecuación o con un par de ecuaciones.

(28) La circunferencia de radio 2 con centro (0,0,0) y que está en

a) El plano $xy$

$x^2+y^2=2^2$
$x^2+y^2=4$

con $z=0$ por ser plano $xy$

b) El plano $yz$

$y^2+z^2=2^2$
$y^2+z^2=4$

con $x=0$ al ser plano $yz$

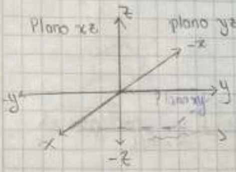
c) El plano $xz$

$x^2+z^2=2^2$
$x^2+z^2=4$

con $y=0$ al ser plano $xz$

Escriba las desigualdades que determinan a los conjuntos de puntos dados.

(37) El semiespacio que consiste en los puntos que se encuentran en y debajo del plano $xy$.




semiespacio que consiste en puntos que están en y debajo de $xy$ $\rightarrow$ $z \leq 0$

Calcule la distancia entre los puntos $P_1$ y $P_2$.

(46) $P_1(5,3,-2)$ $\quad P_2(0,0,0)$

$|P_2P_1| = \sqrt{(0-5)^2+(0-3)^2+(0+2)^2} = \sqrt{25+9+4} = \sqrt{38} = 6{,}16$

Determine los centros y los radios de las esferas

(55) $x^2+y^2+z^2+4x-4z=0$

$(x^2+4x)+y^2+(z^2-4z)=0$

$(x^2+4x+(2)^2)+y^2+(z^2-4z+(-2)^2)=0+(2)^2+(-2)^2$
$(x+2)^2+y^2+(z-2)^2=8$

∘ Centro $=(-2,0,+2)$ $\quad$ ∘ Radio $=\sqrt{8}$

(64) Determine una ecuación para el conjunto de todos los puntos equidistantes del punto $(0,0,2)$ y del plano $xy$.

Un punto $Q$ el cual la distancia $PQ$ = distancia plano $xy$ con $Q$ donde $Q=(x,y,z)$

$PQ=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-2)^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2-4z+4}$

La ecuación del plano $xy$ es $z=0$ por lo que la distancia con $Q$ es el valor de su coordenada $|z|$ (valor absoluto porque $d$ es positiva).

Igualamos la distancia

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2-4z+4} = |z|$$
$$\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2-4z+4}\right)^2 = \left(\sqrt{z^2}\right)^2$$
$$x^2+y^2+\cancel{z^2}-4z+4 = \cancel{z^2}$$
$$x^2+y^2-4z+4=0$$
$$z = \frac{x^2+y^2}{4}+1$$

Esta superficie es un paraboloide elíptico

- Resolver los ejercicios de la sección 12-2.

$u=(3,-2)$ y $v=(-2,5)$. Determine a) las componentes y b) la magnitud del vector.

① $3u$

$3u = 3(3,-2) = (9,-6)$

$|3u| = \sqrt{(9)^2+(-6)^2} = 3\sqrt{13}$

Obtenga las componentes del vector

⑩ El vector $\overrightarrow{OP}$ donde O es el origen y P es el punto medio del segmento RS, donde $R=(2,-1)$ y $S=(-4,3)$.

$M = \left(\frac{2+(-4)}{2}; \frac{-1+3}{2}\right) = (-1,1) = P$

$\overrightarrow{OP} = (-1-0),(1-0)$ $\qquad OP = \sqrt{(-1)^2+(1)^2} = \sqrt{2}$

$\overrightarrow{OP} = (-1,1)$

Exprese cada vector en la forma $v = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$

⑲ $\overrightarrow{AB}$ si A es el punto $(-7,-8,1)$ y B es el punto $(-10,8,1)$

$\overrightarrow{AB} = (-10+7, 8+8, 1-1) = (-3,16,0) \Rightarrow x=-3;\ y=16;\ z=0$

$\overrightarrow{AB} = -3\vec{i} + 16\vec{j}$

Exprese cada vector como producto de su longitud y dirección

㉘ $3/5\,\vec{i} + 4/5\,\vec{j} = \vec{A}$

$A = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = 1$

$\vec{e_A} = \frac{\vec{A}}{A}$ $\qquad \vec{A} = \left(\frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}\right)(1)$

$\vec{A} = \vec{e_A} \cdot A$

$\vec{A} = \vec{e_A}\,(1)$

$\vec{A} = \vec{e_A}$

Determinar a) La dirección $\overrightarrow{P_1P_2}$ y b) El punto medio del segmento de recta $P_1P_2$.

(45) $P_1(3,4,5)$ $P_2(2,3,4)$

$\overrightarrow{P_1P_2} = (2-3)\vec{i} + (3-4)\vec{j} + (4-5)\vec{k}$

$\overrightarrow{P_1P_2} = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$

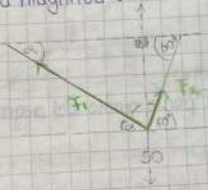
$P_1P_2 = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$

a) $\vec{e}_{P_1P_2} = -\dfrac{\vec{i}}{\sqrt{3}} - \dfrac{\vec{j}}{\sqrt{3}} - \dfrac{\vec{k}}{\sqrt{3}}$

b) $M = \left(\dfrac{3+2}{2}, \dfrac{4+3}{2}, \dfrac{5+4}{2}\right)$

$M = (2{,}5 ; 3{,}5 ; 4{,}5)$

(46) Considere un Peso de 50N suspendido de dos alambres, como se muestra en la figura. Si la magnitud del vector $F_1$ es de 35N, obtenga el ángulo $\alpha$ y la magnitud del vector $F_2$.




$\Sigma F_y = 0$

① $F_1 \operatorname{sen}\alpha + F_2 \operatorname{sen}(60) = 50$

$\Sigma F_x = 0$

$-F_1 \cos\alpha + F_2 \cos(60) = 0$

$F_2 \cos(60) = F_1 \cos\alpha$

② $F_2 = \dfrac{35\cos\alpha}{\cos(60)} = 70\cos\alpha$

$35 \operatorname{sen}\alpha + (70\cos\alpha)\operatorname{sen}(60) = 50$

$35 \operatorname{sen}\alpha + 35\sqrt{3}\cos\alpha = 50$

$\operatorname{sen}\alpha + \sqrt{3}\cos\alpha = 50/35$

$2\sin(\alpha + 60) = 50/35$

$\alpha + 60 = \sin^{-1}\left(\dfrac{50}{70}\right)$

$\alpha + 60 = 45{,}5°$

$\boxed{\begin{array}{l} \operatorname{sen}\alpha + \sqrt{3}\cos\alpha = 2\sin(\alpha+60) \\ a\sin x + b\cos x = R\sin(x + \varphi) \\ R = \sqrt{a^2+b^2} \text{ y } \tan\varphi = \dfrac{b}{a} \end{array}}$

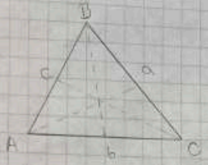
$\alpha = -14{,}5$

no puede ser − porque $F_1$ está en y positivo ⇒ otra solución de seno $180 - 45{,}5 = 134{,}5$ → $\alpha = 134{,}5 - 60 = 74{,}5°$

[illegible]

$F_2 = \dfrac{35\cos(74{,}5)}{\cos(60)} = 18{,}70N$

(5) Suponga que A, B y C son los vértices de un triángulo y que a, b y c son, respectivamente, los puntos medios de los lados opuestos. Demuestre que $\vec{Aa} + \vec{Bb} + \vec{Cc} = 0$.




$$\vec{a} = \left(\frac{B_1 + C_1}{2}, \frac{B_2 + C_2}{2}\right)$$

$$\vec{b} = \left(\frac{A_1 + C_1}{2}, \frac{A_2 + C_2}{2}\right)$$

$$\vec{c} = \left(\frac{A_1 + B_1}{2}, \frac{A_2 + B_2}{2}\right)$$

$$\vec{Aa} = \vec{a} - \vec{A} = \left(\frac{B_1 + C_1 - 2A_1}{2}, \frac{B_2 + C_2 - 2A_2}{2}\right)$$

$$\vec{Bb} = \vec{b} - \vec{B} = \left(\frac{A_1 + C_1 - 2B_1}{2}, \frac{A_2 + C_2 - 2B_2}{2}\right)$$

$$\vec{Cc} = \vec{c} - \vec{C} = \left(\frac{A_1 + B_1 - 2C_1}{2}, \frac{A_2 + B_2 - 2C_2}{2}\right)$$

$$\vec{Aa} + \vec{Bb} + \vec{Cc} = \left(\frac{\cancel{B_1} + \cancel{C_1} - \cancel{2A_1} + \cancel{A_1} + \cancel{C_1} - \cancel{2B_1} + \cancel{A_1} + \cancel{B_1} - \cancel{2C_1}}{2}\right) = 0$$

$$\left(\frac{\cancel{B_2} + \cancel{C_2} - \cancel{2A_2} + \cancel{A_2} + \cancel{C_2} - \cancel{2B_2} + \cancel{A_2} + \cancel{B_2} - \cancel{2C_2}}{2}\right) = 0$$

$$\vec{Aa} + \vec{Bb} + \vec{Cc} = (0, 0)$$