TAREA 2 - EJERCICIOS DE THOMAS

Nombre: Jostin Sánchez

Cálculo en varias variables - Ejercicios sección 12.3 (4, 13, 22, 31, 40, 50)

- Determine a. $v \cdot u$, $|v|$, $|u|$ b. el coseno del ángulo entre v y u c. el componente escalar de u en la dirección v d. el vector $proy_v u$

4. $v = 2i + 10j - 11k$, $u = 2i + 2j + k$

$$\cos\theta = \frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + \dots + u_nv_n}{|u||v|} \rightarrow u \cdot v$$

$$proy_v u = \frac{u \cdot v}{|v|^2} \cdot v$$

$v \cdot u = \langle 2, 10, -11 \rangle \langle 2, 2, 1 \rangle = 4 + 20 - 11 = 13$

$|v| = \sqrt{(2)^2 + (10)^2 + (-11)^2} = \sqrt{225} = 15$

$|u| = \sqrt{(2)^2 + (2)^2 + (1)^2} = \sqrt{9} = 3$

$\boxed{\cos\theta} = \frac{13}{(15)(3)} = \boxed{\frac{13}{45}}$ $\quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{13}{45}\right) \approx 73,21°$

$proy_v u = \frac{u \cdot v}{|v|^2} \cdot \vec{v} = \frac{13}{225}(2i + 10j - 11k)$

- Calcule los ángulos entre los vectores en los ejercicios 9 a 12 con una aproximación de centésimas de radián

13. Triángulo, Obtenga las medidas de los ángulos del triángulo cuyos vértices son $A = (-1, 0)$, $B = (2, 1)$ y $C = (1, -2)$

$180 - 26,57 + 53,13$

$103,3$

$\vec{AB} = \langle 3, 1 \rangle \quad |AB| = \sqrt{10}$

$\vec{AC} = \langle 2, -2 \rangle \quad |AC| = \sqrt{8}$

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 6 - 2 = 4$

$\cos\theta = \frac{4}{\sqrt{80}} \quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{80}}\right) \approx 63,44$

$\theta = 63,44$

$\alpha = 53,13$

$\beta = 63,44$

$\vec{BA} = \langle -3, -1 \rangle \quad |BA| = \sqrt{10}$

$\vec{BC} = \langle -1, -3 \rangle \quad |BC| = \sqrt{10}$

$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 3 + 3 = 6$

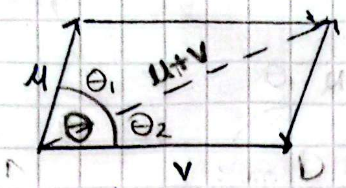
$\cos\alpha = \frac{6}{10} \quad \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) \approx 53,13$

$\vec{CA} = \langle -2, 2 \rangle \quad |CA| = \sqrt{8} \quad \vec{CA} \cdot \vec{CB} = -2 + 6 = 4$

$\vec{CB} = \langle 1, 3 \rangle \quad |CB| = \sqrt{10}$

$\cos\beta = \frac{4}{\sqrt{80}} \quad \beta = \cos^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{80}}\right) = 63,44$

22. Diagonal de un paralelogramo Demuestre que la diagonal indicada del paralelogramo determinado por los vectores u y v biseca al ángulo u y v si $|u| = |v|$



Lo que buscamos demostra es que la diagonal, que es la suma de $u+v$ biseca a un ángulo θ que es el ángulo entre u y v. Para poder llegar a esa demostración tenemos que pensar en que quiero llegar a conseguir para esto se puede decir que si nombramos $u+v = w$ y proyectamos u al igual que v en la dirección de w tenemos el producto relativo de las magnitudes $|u|$ y $|v|$ pero como existe una condición que $|u| = |v|$, unicamente nos fijaremos entre el producto escalar que ocurre entre w, y si coinciden significa que los ángulos que forman independientemente con el vector w tanto u con v son iguales, lo que nos daría la respuesta a nuestro problema ya que w estaría justo en la mitad del ángulo θ.

$$\frac{(u+v)\cdot u}{|u||v|} = \cos\theta_1$$

$$(u+v)\cdot u = uu + u\cdot v = u^2 + u\cdot v$$

$$① \quad = u^2 + |u||v|\cos\theta_1$$

$$\frac{(u+v)v}{|u||v|} = \cos\theta_2$$

$$(u+v)\cdot v = uv + vv = uv + v^2$$

$$② \quad = |u||v|\cos\theta_2 + v^2$$

$$|u| = |v| = a$$

$$① = ②$$

$$u^2 + |u||v|\cos\theta_1 = |u||v|\cos\theta_2 + v^2$$

$$a^2 + a^2\cos\theta_1 = a^2 + a^2\cos\theta_2 \quad \checkmark \text{ son iguales} \quad \therefore \quad \cos\theta_1 = \cos\theta_2$$

La diagonal $u+v$ efectivamente biseca el ángulo entre u y v cuando $|u| = |v|$, es decir, cuando el paralelogramo es un rombo.

31. Recta perpendicular a un vector Demuestre que el vector $v = ai + bj$ es perpendicular a la recta $ax + by = c$ establecido que la pendiente de v es el recíproco negativo de la pendiente de la recta dada.

La recta tiene la ecuación $ax + by = c$, despejamos respecto de y para hallar la pendiente

$$ax + by = c$$

$$y = \frac{c}{b} - \frac{ax}{b}$$

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$$

$$m_{recta} = -\frac{a}{b}$$

La pendiente del vector es la relación entre sus componentes

$$m_{vector} = \frac{b}{a}$$

$$m_{recta} \cdot m_{vector} = \left(-\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{a}\right) = -1$$

Significa que son perpendiculares

DD MM AA

▸ Use el resultado del ejercicio 32 para obtener una ecuación para la recta que pasa por P paralela a v. Luego dibuje la recta. Incluya a v en su bosquejo como un vector que parte del origen

40. $P(1,3)$, $v = 3i - 2j$

32. $m_v = \frac{b}{a}$

Recta $bx - ay = c$

$$y = \frac{b}{a}x - \frac{c}{a}$$ $m_r = \frac{b}{a}$ son paralel

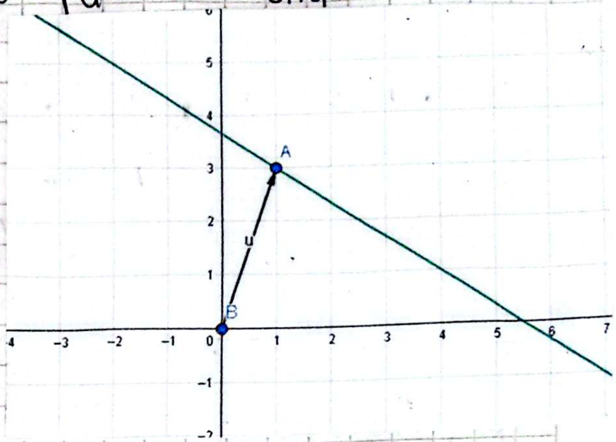
$(-2)x - (3)y = k$

$(-2)(1) - (3)(3) = k$

$K = -11$

$-2x - 3y = -11$

$\boxed{2x + 3y = 11}$



▸ Con base en este hecho y en los resultados del ejercicio 31 o 32, determine los ángulos agudos entre las líneas.

50. $12x + 5y = 1$, $2x - 2y = 3$

$12x + 5y = 1$ $2x - 2y = 3$

$n_1 : (12, 5)$ $n_2 = (2, -2)$

$v_1 : (5, -12)$ $v_2 = (2, 2)$

$n_1 \cdot n_2 = 14$ $|n_1| = 13$ $|n_2| = 2\sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{14}{26\sqrt{2}} = \theta = \cos^{-1}\left(\frac{7}{13\sqrt{2}}\right) \approx \boxed{67{,}62°}$

Ejercicios 12,4 (4, 13, 22, 31, 40, 50)

▸ Obtenga la longitud y dirección (cuando esté definida) de $u \times v$ y $v \times u$

4. $u = i + j - k$, $v = 0$

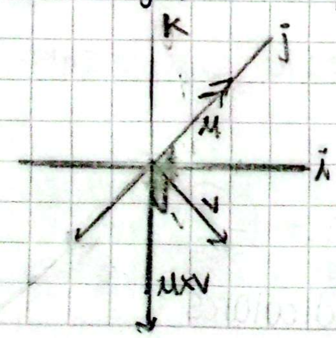
$u \times v = \|u\| \|v\| \sin\theta \, n$

Como tenemos $v = 0$ $\|v\|$ es $= 0$, por lo tanto

0 (longitud), no tiene definida la dirección

▸ Dibuje los ejes coordenados y luego incluya los vectores u, v y $u \times v$ como vectores que parten del origen.

13. $u = i + j$, $v = i - j$



$u \times v = (i + j) \times (i - j)$

$u \times v = ii - ij + ji - jj$

$u \times v = -k - k$

$u \times v = -2k$

▸ Verifique que $(u \times v) \cdot w = (v \times w) \cdot u = (w \times u) \cdot v$ y obtenga el volumen del paralelepípedo (caja) determinado por u, v y w

22. $\underbrace{i + j - 2K}_{u}$ $\quad \underbrace{-i - K}_{v}$ $\quad \underbrace{2i + 4j - 2K}_{w}$

$$(u \times v)\, w = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= +1 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= +6 + 2 = +8$$

$$(v \times w) \cdot u = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 6 + 2 = 8$$

$$(w \times u) \cdot v = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 6 + 2 = 8$$

31. Sen u, v y w vectores. ¿cuáles de los siguientes expresiones tienen sentido y cuáles no? Justifique su respuesta

a. $\underbrace{(u \times v)}_{\text{producto vectorial}} \cdot w$

producto vectorial nos da un vector = a

$a \cdot w$

es un producto escalar Tiene sentido

b. $u \times \underbrace{(v \cdot w)}_{\text{escalar}}$

escalar = b

$u \times b$

no tiene sentio

c. $u \times \underbrace{(v \times w)}_{\text{vector}}$

vector a

$u \times a$

tiene sentido

d. $u \cdot \underbrace{(v \cdot w)}_{\text{escalar}}$

escalar = d

$u \cdot d$

no tiene sentid

DD MM AA

- Determine las áreas de los paralelogramos cuyos vértices se indican en ~~los~~

40. $A(1,0,-1)$, $B(1,7,2)$, $C(2,4,-1)$, $D(0,3,2)$

$\vec{AB} = \langle 0, 7, 3\rangle$
$\vec{AC} = \langle 1, 4, 0\rangle$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & j & K \\ 0 & 7 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} j & K \\ 7 & 3 \end{vmatrix} + (-4)\begin{vmatrix} i & K \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (3j) + 7K - 12i$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = -12i + 3j - 7K$$

$$|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{(-12)^2 + (3)^2 + (-7)^2} = \sqrt{202}$$

Area

50. Área del triángulo Obtenga una fórmula concisa para el área del triángulo en el plano xy con vértices en (a_1, a_2) y (b_1, b_2) y (c_1, c_2). Explique su respuesta.

Sabemos que el área de un paralelogramo está definida por

$A_{para} = |\vec{AB} \times \vec{AC}|$ pero como tenemos un triángulo

$A_\Delta = \frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}|$

$\vec{AB} = \langle b_1 - a_1, b_2 - a_2\rangle$

$\vec{AC} = \langle c_1 - a_1, c_2 - a_2\rangle$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & j & K \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & 0 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (c_1 - a_1)\begin{vmatrix} j & K \\ b_2 - a_2 & 0 \end{vmatrix} + (a_2 - c_2)\begin{vmatrix} i & K \\ b_1 - a_1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (c_1 - a_1)(-Kb_2 + Ka_2) + (a_2 - c_2)(Ka_1 - Kb_1)$$

$$= K[(c_1 - a_1)(a_2 - b_2) + (a_2 - c_2)(a_1 - b_1)]$$

$$= (0, 0, (a_1 - b_1)(a_2 - c_2) - (a_1 - b_2)(a_2 - c_1))$$

$$|\vec{AB} \times \vec{AC}| = (a_1 - b_1)(a_2 - c_2) - (a_1 - b_2)(a_2 - c_1)$$

$$A_\Delta = \frac{1}{2}|(a_1 - b_1)(a_2 - c_2) - (a_1 - b_2)(a_2 - c_1)|$$