Escuela politécnica Nacional
Matemática Avanzada

Nombre: Paula Sabando
Fecha: 10 - 11 - 2025
Curso: A2

Deber 4

- Resolver los ejercicios del 1 al 40 del libro de cálculo de varias variables, cap 13, ejercicios de la sección 13.1

④ $r(t)$ es la posición de una partícula en el plano xy en el instante t. Obtenga una ecuación en x y en y cuya gráfica sea la trayectoria de la partícula. Luego, determine los vectores velocidad y aceleración para el valor dado de t.

$$r(t) = (\cos 2t)\vec{i} + (3\,\text{sen}\,2t)\vec{j}\,, \quad t = 0$$

① Ecuaciones paramétricas:

$$x = \cos 2t \qquad y = 3\,\text{sen}\,2t$$

② Para hallar la ecuación en términos de x y y vamos a despejar sen 2t

$$\text{sen}\,2t = \frac{y}{3}$$

③ Usamos $\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1$ con $\theta = 2t$

$$\cos^2(2t) + \text{sen}^2(2t) = 1$$

$$x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$$ La trayectoria es una elipse

④ Vector velocidad

$$\frac{dr}{dt} = v(t) = -2\,\text{sen}\,2t\,\vec{i} + 6\cos 2t\,\vec{j}$$

$$v(0) = -2\,\text{sen}\,2(0)\,\vec{i} + 6\cos 2(0)\,\vec{j} = 6\vec{j}$$

⑤ Vector aceleración

$$\frac{d^2r}{dt^2} = a(t) = -4\cos 2t\,\vec{i} - 12\,\text{sen}\,2t\,\vec{j}$$

$$a(0) = -4\cos 2(0)\,\vec{i} - 12\,\text{sen}\,(0)2\,\vec{j} = -4\vec{i}$$

$r(t)$ es la posición de una partícula en el espacio en el instante t. Determine los vectores velocidad y aceleración de la partícula. Luego obtenga la rapidez y la dirección del movimiento de la partícula en el valor dado de t. Escriba la velocidad de la partícula en ese instante como el producto de su rapidez y dirección.

(a) $r(t) = (2\ln(t+1))\vec{i} + t^2\vec{j} + \frac{t^2}{2}\vec{k}$, $t=1$

① Vector velocidad

$$\frac{dr}{dt} = v(t) = \left(2 \cdot \frac{1}{t+1} \cdot 1\right)\vec{i} + 2t\vec{j} + t\vec{k}$$

$$v(t) = \frac{2}{t+1}\vec{i} + 2t\vec{j} + t\vec{k}$$

$$v(1) = 1\vec{i} + 2\vec{j} + 1\vec{k}$$

② Vector aceleración

$$\frac{d^2r}{dt^2} = a(t) = -\frac{2}{(t+1)^2}\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$$

$$a(1) = -\frac{1}{2}\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$$

③ Rapidez

$$|v(1)| = \sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (1)^2} = \sqrt{6}$$

④ Dirección del movimiento

$$u(1) = \frac{v(1)}{|v(1)|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{k}$$

⑤ Vector velocidad como producto de $|v|$ y u

$$\vec{v} = \sqrt{6} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{k}\right)$$

Movimiento a lo largo de un círculo. Cada una de las siguientes ecuaciones en los incisos (a) a (e) describen el movimiento de una partícula con la misma trayectoria, a saber, la circunferencia unitaria $x^2+y^2=1$. Si bien la trayectoria de todas las partículas de los incisos (a) a (e) es la misma, el comportamiento, o "dinámica", de cada partícula es diferente. Para cada partícula, conteste las preguntas.

a) $r(t) = \cos t\,\vec{i} + \operatorname{sen} t\,\vec{j}$
b) $r(t) = \cos(2t)\,\vec{i} + \operatorname{sen}(2t)\,\vec{j}$
c) $r(t) = \cos(t-\pi/2)\,\vec{i} + \operatorname{sen}(t-\pi/2)\,\vec{j}$
d) $r(t) = \cos t\,\vec{i} - \operatorname{sen} t\,\vec{j}$
e) $r(t) = \cos t^2\,\vec{i} + \operatorname{sen}(t^2)\,\vec{j}$

i) ¿Tiene la partícula rapidez constante? Si es así, ¿cuál es?

a) $v(t) = \frac{dr}{dt} = -\operatorname{sen} t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j}$

$|v(t)| = \sqrt{(-\operatorname{sen} t)^2 + (\cos t)^2} = 1$ ✓

b) $v(t) = \frac{dr}{dt} = -2\operatorname{sen}(2t)\vec{i} + 2\cos(2t)\vec{j}$

$|v(t)| = \sqrt{(-2\operatorname{sen}(2t))^2 + (2\cos(2t))^2} = 2$ ✓

c) Por identidad trigonométrica $\cos(t-\pi/2) = \operatorname{sen}(t)$ y $\operatorname{sen}(t-\pi/2) = -\cos(t)$

$v(t) = \frac{dr}{dt} = \cos(t)\vec{i} + \operatorname{sen}(t)\vec{j}$

$|v(t)| = \sqrt{(\cos t)^2 + (\operatorname{sen}(t))^2} = 1$ ✓

d) $v(t) = -\operatorname{sen} t\,\vec{i} - \cos t\,\vec{j}$

$|v(t)| = \sqrt{(-\operatorname{sen} t)^2 + (-\cos t)^2} = 1$ ✓

e) $v(t) = -2t\operatorname{sen}(t^2)\vec{i} + 2t\cos(t^2)\vec{j}$

$|v(t)| = \sqrt{(-2t\operatorname{sen}(t^2))^2 + (2t\cos(t^2))^2} = 2t$ X

Depende de t ∴ no es cte

iii) ¿Siempre es ortogonal el vector de aceleración de la partícula al vector de velocidad?

a) $v(t) = -\text{sen}\,t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j}$ $\qquad a(t) = -\cos t\,\vec{i} - \text{sen}\,t\,\vec{j}$

$v(t)\cdot a(t) = [(-\text{sen}\,t)(-\cos t)] + (\cos t)(-\text{sen}\,t)$
$= \text{sen}(t)\cos(t) - \text{sen}(t)\cos(t)$
$= 0$ ✓

b) $v(t) = -2\,\text{sen}(2t)\,\vec{i} + 2\cos(2t)$ $\qquad a(t) = -4\cos(2t) - 4\,\text{sen}(2t)$

$v(t)\cdot a(t) = [(-2\,\text{sen}(2t))(-4\cos(2t))] + [(2\cos(2t))(-4\,\text{sen}(2t))]$
$= 8\cos(2t)\,\text{sen}(2t) - 8\cos(2t)\,\text{sen}(2t)$
$= 0$ ✓

c) $v(t) = \cos(t)\,\vec{i} + \text{sen}(t)\,\vec{j}$ $\qquad a(t) = -\text{sen}(t) + \cos(t)$

$v(t)\cdot a(t) = [\cos(t)\cdot(-\text{sen}(t))] + [\text{sen}(t)\cdot\cos(t)]$
$= -\cos(t)\,\text{sen}(t) + \cos(t)\,\text{sen}(t)$
$= 0$ ✓

d) $v(t) = -\text{sen}(t)\,\vec{i} - \cos(t)\,\vec{j}$ $\qquad a(t) = -\cos(t)\,\vec{i} + \text{sen}(t)\,\vec{j}$

$v(t)\cdot a(t) = [(-\text{sen}(t))(-\cos(t))] + [(-\cos(t))(\text{sen}(t))]$
$= \text{sen}(t)\cos(t) - \cos(t)\,\text{sen}(t)$
$= 0$ ✓

e) $v(t) = -2t\,\text{sen}(t^2)\,\vec{i} + 2t\cos(t^2)\,\vec{j}$

$a(t) = [(-2)(\text{sen}(t^2)) + (-2t)(2t\cos(t^2))]\,\vec{i} +$
$[(2)(\cos(t^2)) + (2t)(-2t\,\text{sen}(t^2))]\,\vec{j}$

$a(t) = [-2\,\text{sen}(t^2) - 4t\cos(t^2)]\,\vec{i} + [2\cos(t^2) - 4t\,\text{sen}(t^2)]\,\vec{j}$

$v(t)\cdot a(t) = 4t\,\text{sen}^2(t^2) + \cancel{8t\,\text{sen}(t^2)\cos(t^2)} + 4t\cos^2(t^2) - \cancel{8t\cos(t^2)\,\text{sen}(t^2)}$
$= 4t\,\text{sen}^2(t^2) + 4t\cos^2(t^2)$
$= 4t\,(\text{sen}^2(t^2) + \cos^2(t^2))$
$= 4t$ ✗

iii) ¿La partícula se mueve en la circunferencia en sentido de las manecillas del reloj o en sentido contrario?

Después de $t=0$ podemos observar la componente y

Componente y para $t>0$	Sentido del movimiento
a) $y(t) = sen\,t\,\vec{j}$ cuadrante I	Antihorario
b) $y(t) = sen(2t)\vec{j}$ cuadrante I	Antihorario
c) $y(t) = -cos(t)\vec{j}$ empieza en $(0,-1)$ y se mueve hacia $(1,0)$.	Antihorario
d) $y(t) = -sen(t)\vec{j}$ cuadrante IV	Horario
e) $y(t) = sen(t^2)\vec{j}$ cuadrante I	Antihorario

iv) ¿La partícula inicia en el punto $(1,0)$?

para $t=0$

a) $r(t) = cos(0)\vec{i} + sen(0)\vec{j} = (1,0)$ ✓

b) $r(t) = cos(2\cdot0)\vec{i} + sen(2\cdot0)\vec{j} = (1,0)$ ✓

c) $r(t) = sen(0)\vec{i} - cos(0)\vec{j} = (0,-1)$ X

d) $r(t) = cos(0)\vec{i} - sen(0)\vec{j} = (1,0)$ ✓

e) $r(t) = cos(0^2)\vec{i} + sen(0^2)\vec{j} = (1,0)$ ✓

(33) Las funciones vectorriales derivables son continuas. Demuestre que si $r(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$ es derivable en $t=t_0$, entonces también es continua en t_0

$\lim_{t\to t_0} r(t) = r(t_0)$ para que $r(t)$ sea continua

$$\boxed{\lim_{t\to t_0} r(t) - r(t_0) = 0}$$

$$r'(t_0) = \lim_{t\to t_0}\left(\frac{r(t)-r(t_0)}{t-t_0}\right)$$

$$r(t) - r(t_0) = \frac{r(t)-r(t_0)}{t-t_0}\cdot t-t_0$$

$$\lim_{t\to t_0}(r(t)-r(t_0)) = \lim_{t\to t_0}\left(\frac{r(t)-r(t_0)}{t-t_0}\right)\cdot \underbrace{\lim_{t\to t_0} t-t_0}_{0}$$

$$\lim_{t\to t_0}(r(t)-r(t_0)) = 0$$

(9) Use algún sistema algebraico computacional para ejecutar los siguientes pasos.

a) Grafique la curva espacial trazada por el vector de posición r.

$$r(t) = (\text{sen}(2t))\vec{i} + \ln(1+t)\vec{j} + t\vec{k} \qquad 0 \le t \le 4\pi \;,\; t_0 = \pi/4$$

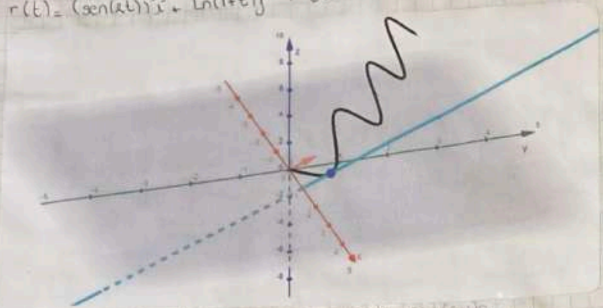

Figura 1: Gráfica de la trayectoria de la partícula

- Recta tangente
- Curva espacial
- Vector velocidad

b) Obtenga las componentes del vector velocidad

$$\frac{\partial r}{dt} = v(t) = 2\cos(2t)\vec{i} + \frac{1}{(1+t)}\vec{j} + \vec{k}$$

c) Calcule dr/dt en el punto t_0 y determine la ecuación para la recta tangente en la curva $r(t_0)$

$$\frac{dr}{dt} = v(t_0) = 2\left(\cancel{\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right)}^{0}\right)\vec{i} + \frac{1}{1+\frac{\pi}{4}}\vec{j} + 1\vec{k} = \frac{4}{4+\pi}\vec{j} + \vec{k}$$

$$r(t_0) = \left(\text{sen}\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right)\vec{i} + \ln\left(1+\frac{\pi}{4}\right)\vec{j} + \frac{\pi}{4}\vec{k} = \vec{i} + \ln\left(1+\frac{\pi}{4}\right)\vec{j} + \frac{\pi}{4}\vec{k}$$

Ecuación paramétrica de la recta tangente (parámetro S)

$$L(S) = r(t_0) + S\,v(t_0) = \left[\vec{i} + \ln\left(1+\frac{\pi}{4}\right)\vec{j} + \frac{\pi}{4}\vec{k}\right] + (S)\left[\frac{4}{4+\pi}\vec{j} + \vec{k}\right]$$

$$x = 1 \qquad y = \ln\left(1+\frac{\pi}{4}\right) + S\left(\frac{4}{4+\pi}\right) \qquad z = \frac{\pi}{4} + S$$

d) Grafique la recta tangente junto con la curva en el intervalo dado.

Figura 1.

• Resolver los ejercicios del libro de cálculo de varias variables cap 13, ejercicios de la sección 13.2.

Calcule las integrales.

(4) $\int_0^{\pi/3} [(\sec t \tan t)\vec{i} + \tan t\vec{j} + 2\,\text{sen}\,t\cos t\,\vec{k}]\,dt$

$\int_0^{\pi/3} \sec(t)\tan(t)\,dt\,\vec{i} + \int_0^{\pi/3} \tan t\,dt\,\vec{j} + \int_0^{\pi/3} 2\,\text{sen}\,t\cos t\,dt\,\vec{k}$

$[\sec(\pi/3) + \sec(0)]\vec{i} + [\ln|\sec(\pi/3)| - \ln|\sec(0)|]\vec{j} + \int_0^{\pi/3} \text{sen}\,2t\,dt\,\vec{k}$

$[2-1]\vec{i} + [\ln|2| - \ln|1|]\vec{j} - \left[\frac{1}{2}\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}\cos(0\cdot 2)\right]$

$\vec{i} + \ln|2|\vec{j} - \left[\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} - 1\right)\right]\vec{k}$

$\vec{i} + \ln|2|\vec{j} + \frac{3}{4}\vec{k}$

Resuelva los problemas con valores iniciales que se indican en el ejercicio para r como una función vectorial de t.

(13) $\frac{dr}{dt} = \frac{3}{2}(t+1)^{1/2}\vec{i} + e^{-t}\vec{j} + \frac{1}{t+1}\vec{k}$ $\qquad r(0) = \vec{k}$

① Componente x

$x = \int \frac{3}{2}(t+1)^{1/2}dt = \frac{3}{2}\left[\frac{2}{3}(t+1)^{3/2} + C\right] = (t+1)^{3/2} + C_1,\ C_1 \in \mathbb{R}$

$r(0) = \vec{k}$ (componente $x = 0$ $t = 0$)

$(0+1)^{3/2} + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = -1$

$x = (t+1)^{3/2} - 1$

② Componente y

$y = \int e^{-t}dt = -e^{-t} + C_2$, con $C_2 \in \mathbb{R}$

$r(0) = \vec{k}$ (componente $y = 0$ $t = 0$)

$0 = -e^{-0} + C_2 \Rightarrow 0 = -1 + C_2 \Rightarrow C_2 = 1$

$y = -e^{-t} + 1$

③ Componente z

$$z = \int \frac{1}{t+1}\,dt = \ln(t+1) + C_3, \quad C_3 \in \mathbb{R}$$

$$r(0) = \vec{k} \quad (z = 1 \quad t = 0)$$

$$\ln(0+1) + C_3 = 1 \rightarrow C_3 = 1$$

$$z = \ln(t+1) + 1$$

④ $\int \frac{dr}{dt} = r(t)$

$$r(t) = [(t+1)^{3/2} + 1]\vec{i} + [1 - e^{t}]\vec{j} + [\ln(t+1) + 1]\vec{k}$$

㊽ Lanzamiento de pelotas de golf: una máquina que lanza pelotas de golf, dispara al nivel del suelo una pelota con un ángulo de 45°. La pelota toca tierra a 10 m de distancia.

a) ¿Cuál fue la rapidez inicial de la pelota?

· Alcance máximo $\rightarrow R = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}(2\theta)}{g}$

$$v_0^2 = \frac{R \cdot g}{\operatorname{sen}(2\theta)} \qquad v_0^2 = \frac{(10)(9,8)}{\operatorname{sen}(2 \cdot 45)} = 98\,\frac{m^2}{s^2} \qquad v_0 = 7\sqrt{2}\,\frac{m}{s}$$

b) Para la misma [illegible] inicial, [illegible] ángulos de lanzamiento para los cuales el alcance [illegible] de 6 m

$$6 = \frac{98 \operatorname{sen}(2\theta)}{9,8} \qquad 2\theta = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{6 \cdot 9,8}{98}\right) = 36,8695° \qquad \theta_1 = 18,4349°$$

$$\boxed{\sin 2\theta = \sin 2(90 - \theta) = \sin(180 - 2\theta)} \qquad \boxed{\sin(\theta) = \sin(180 - \theta)}$$

$$180 - 36,8698 = 143,1602° \qquad \theta_2 = \frac{143,1602}{2} = 71,5801°$$

㊾ Voleibol: un balón de voleibol es golpeado cuando está a 4 ft sobre el suelo y a 12 ft de una red de 6 ft de altura. El balón deja el punto de impacto con una rapidez inicial de 35 ft/seg a un ángulo de 27° y pasa para el equipo contrario sin ser tocado.

a) Obtenga la ecuación vectorial para la trayectoria del balón

$$r = (x_0 + (v_0 \cos\alpha)t)\vec{i} + (y_0 + (v_0 \operatorname{sen}\alpha)t - \tfrac{1}{2}gt^2)\vec{j}$$

$$r = \left[0 + \left(35\tfrac{ft}{s} \cdot \cos(27) \cdot t(s)\right)\right]\vec{i} + \left[4ft + \left(35\tfrac{ft}{s} \cdot \operatorname{sen}(27) \cdot t(s)\right) - \tfrac{1}{2}(32)t^2\right]\vec{j}$$

$$r = 31,19t\,\vec{i} + [4 + 15,89t - 16t^2]\vec{j}$$

b) ¿Qué altura alcanza el balón y cuándo alcanza su altura máxima?

- $v_f = v_{0y} - gt \Rightarrow 0 = 35\,sen(27) - 32t \Rightarrow t = \frac{-35\,sen(27)}{-32} = 0{,}4965s$

- $y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow y = 4 + 35\,sin(27)(0{,}4965) - \frac{1}{2}(32)(0{,}4966)^2$

  $y_{max} = 7{,}94\ ft$

c) Obtenga su alcance y su tiempo de vuelo.

- $y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 0 = 4 + 35\,sen(27)t - 16t^2$

  $t_1 = 1{,}20$ ✓ $t_2 = -0{,}20$

- $R = v_{0x} \cdot t = 35\cos(27) \cdot 1{,}20 = 37{,}42\ ft$

d) ¿Cuándo está a 7ft sobre el suelo? ¿A qué distancia horizontal se encuentra el balón del punto donde toca el suelo?

- $y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 0 = -7{,}14 + 35\,sen(27)t - \frac{1}{2}(32)t^2$

  $t_1 = 0{,}74s$ $t_2 = 0{,}25s$

  ↳ momento en que pasa la red

- $R = 35\cos(27) \cdot 0{,}74 = 23{,}08\ ft$

distancia del punto final $37{,}42 - 23{,}08 = 14{,}34\ ft$

e) Suponga que la red se eleva a 8ft ¿Eso cambia las cosas? explique.

① $t = \frac{12ft}{35\cos(27)} = 0{,}38s$

② $y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow y = 4 + 35\,sen(27)(0{,}38) - 16(0{,}38)^2$

  $y = 7{,}74ft$ no pasa de la red

③ El balón choca contra la red y no alcanza su altura máxima.

23) Bateo una pelota de béisbol con arrastre lineal bajo una ráfaga de viento
Considere otra vez el problema de la pelota de béisbol del ejemplo 5. Esta vez suponga un coeficiente de arrastre de 0,08 y una ráfaga instantánea de viento que agrega un componente $-17{,}6\,\vec{i}$ (ft/seg) a la rapidez inicial en el momento que la pelota es golpeada.

Una pelota de béisbol es bateada cuando está a 3ft sobre el suelo. Abandona el bate con una velocidad inicial de 152ft/s, formando un ángulo de 20° con la horizontal. ~~En el instante en que la bola es bateada sale con una rapidez inicial de 8,8ft/s.~~

a) Obtenga una ecuación vectorial para la trayectoria de la pelota

$\boxed{\text{la ecuación vectorial con arrastre es: } r''(t) = -c\,r'(t) - g\,\vec{j}}$

$v(t) = v_0 \cos\alpha\, t\, \vec{i} + v_0 \operatorname{sen}\alpha\, t\, \vec{j}$

$v(t) = 132\cos(20)\, t\, \vec{i} + 152 \operatorname{sen}(20)\, \vec{j} - 17{,}6\, \vec{i}$

$v(t) = 125{,}23\, \vec{i} + 51{,}98\, \vec{j}$

Ecuaciones paramétricas de la posición

- Posición horizontal

La solución general para $x'(t)$ y $x(t)$ con arrastre lineal $r''(t) = -c\,r'(t) - g\,\vec{j}$ y $c = 0{,}08$ es:

$x(t) = x_0 + \frac{v_{0x}}{c}(1 - e^{-ct})$

$x(t) = 0 + \frac{125{,}23}{0{,}08}(1 - e^{-0{,}08t})$

$x(t) = 1565{,}42\,(1 - e^{-0{,}08t})$

- Posición vertical

$y(t) = y_0 + \frac{1}{c}\left(v_{0y} + \frac{g}{c}\right)(1 - e^{-ct}) - \frac{g}{c}t$

$y(t) = 3 + \frac{1}{0{,}08}\left(51{,}98 + \frac{32}{0{,}08}\right)(1 - e^{-0{,}08t}) - \frac{32}{0{,}08}t$

$y(t) = 3 + 5649{,}75\,(1 - e^{-0{,}08t}) - 400t$

- Ecuación vectorial

$r(t) = [1565{,}42\,(1 - e^{-0{,}08t})]\,\vec{i} + [3 + 5649{,}75\,(1 - e^{-0{,}08t}) - 400t]$

b) ¿Qué altura alcanza la pelota y cuándo alcanza su máxima altura?

$\vec{v}_y(t) = v_{0y}e^{-ct} - \frac{g}{c}(1 - e^{-ct})$ componente vertical de la velocidad

$0 = 51{,}98\,e^{-0{,}08t} - \frac{32}{0{,}08} + \frac{32}{0{,}08}e^{-0{,}08t}$

$400 = 451{,}98\,e^{-0{,}08t}$

$e^{-0{,}08t} = \frac{400}{451{,}98}$ Ln

$-0{,}08t = \ln\left(\frac{400}{451{,}98}\right)$

$-0{,}08t = -0{,}12$

$t = 1{,}52\,s$

$y(t)$ en $t = 1{,}52\,s$

y max:

$3 + 5649{,}75(1 - e^{-0{,}08(1{,}52)}) - 400(1{,}52)$

y max $= 41{,}88\,ft$

c) Calcule el alcance y tiempo de vuelo de la pelota

- Tiempo donde $y = 0$

$0 = 3 + 5649{,}75(1 - e^{-0{,}08t}) - 400t$

$t_v = 3{,}64\,s$

- t_v en $x(t)$

$R = 1565{,}42(1 - e^{-0{,}08(3{,}64)})$

$R = 395{,}48\ ft$

d) ¿Cuándo está la pelota a 35 ft de altura? ¿A qué distancia se encuentra la pelota del home a esa altura?

- $y = 35ft$

$35 = 3 + 5649{,}75(1 - e^{-0{,}08t}) - 400t$

Como $y_{máx} = 41{,}55\ ft$, 35 ft se alcanza dos veces

$t_1 = 0{,}99\,s$ y $t_2 = 2{,}33\,s$

- Sustituimos $t_2 = 2{,}33$

$x(2{,}33) = 1565{,}42(1 - e^{-0{,}08(2{,}33)})$

$x = 266{,}21\ ft$

e) Una barda de 20 ft de alto está a 380 ft del home en la dirección del vuelo de la pelota. ¿El bateador hace un jonrón? Si la respuesta es afirmativa, ¿qué cambio en el componente horizontal de la velocidad inicial de la pelota hubiera mantenido la pelota dentro del parque? En caso negativo ¿qué le hubiera permitido ser un jonrón?

① Tiempo que tarda la bola en llegar a la baya

$x(t) = 1565{,}42(1 - e^{-0{,}08t})$ | $\ln e^{-0{,}08t} = -0{,}24 + 1\ \ln$

$1 - e^{-0{,}08t} = \dfrac{380}{1565{,}42}$ | $-0{,}08t = \ln(0{,}75)$

$t = 3{,}47\,s$

② Altura de la bola en ese tiempo

$y = 3 + 5649{,}75(1 - e^{-0{,}08(3{,}47)}) - 400(3{,}47)$

$y = -15{,}49\ ft$

La pelota toca el suelo antes de la baya y no es un jonrón, para que sea: $y_{baya} \geq 20ft$ cuando $x = 380ft$. Esto requiere aumentar la velocidad en x para mayor alcance

$20 = 3 + 5649,75(1 - e^{-0,08 t_{caída}}) - 400 t_{caída}$

$17 = 5640,75(1 - e^{-0,08 t_{caída}}) - 400 t_{caída}$

$t = 3,045$

Ahora la velocidad con $t = 3,045$ y $x = 380 ft$

$$x(t) = \frac{V_{0x}}{c}(1 - e^{-0,05t})$$

$$380 = \frac{V_{0x}}{0,05}(1 - e^{-0,05(3,045)})$$

$V_{0x} = 140,81\ ft/s$

Velocidad actual 125,43 ft/s, la que se necesita 140,81 ft/s con una diferencia de 15,38 ft/s

- Resolver los ejercicios del libro de cálculo de varias variables cap 13, ejercicios de la sección 13.3

⑥ Determine el punto en la curva $r(t) = (12 sen t)\vec{i} - (12 cos t)\vec{j} + 5t\vec{k}$ que se encuentra a una distancia de 13π unidades a lo largo de la curva desde el punto $(0, -12, 0)$ en la dirección opuesta a la dirección en que crece la longitud del arco.

① Vector tangente unitario

$r'(t) = v(t) = 12 cos t\,\vec{i} + 12 sen t\,\vec{j} + 5\vec{k}$

$|v(t)| = \sqrt{(12 cos t)^2 + (12 sen t)^2 + (5)^2} = \sqrt{169} = 13$

② Cuando $r(0)$ tenemos el punto $(0, -12, 0)$, parámetro $t_0 = 0$

③ Uso de la longitud para encontrar el nuevo parámetro

Queremos encontrar un punto $r(t_1)$ / esté a una distancia de 13π. El arco crece a $t > 0$, se nos pide ir a la dirección opuesta, 13π debe ser considerada negativa.

Sea la distancia a lo largo de la curva. La longitud de arco desde $t_0 = 0$ hasta un parámetro t_1 es:

$$s(t_1) = \int_0^{t_1} |r'(t)|\,dt \Rightarrow -13\pi = \int_0^{t_1} 13\,dt \Rightarrow -13\pi = [13t_1 - 0]$$

$-13\pi = 13t_1 \Rightarrow t_1 = -\pi$

④ Determinar el punto final $r(t_1)$

$r(-\pi) = 12 sen(-\pi)\,\vec{i} - 12 cos(-\pi)\,\vec{j} + 5(-\pi)\,\vec{k} \Rightarrow (0, 12, -5\pi)$

Obtenga el parámetro de longitud de arco a lo largo de la curva desde el punto donde $t=0$, calculando la integral.

$$s = \int_0^t |v(\tau)|\, d\tau$$

De la ecuación 3. Luego calcule la longitud de la parte indicada de la curva.

(11) $r(t) = (4\cos t)\vec{i} + (4\operatorname{sen} t)\vec{j} + 3t\vec{k}$ $\quad 0 \le t \le \pi/2$

(1) $r'(t) = v(t) = -4\operatorname{sen} t\,\vec{i} + 4\cos t\,\vec{j} + 3\vec{k}$

$|r'(t)| = \sqrt{(-4\operatorname{sen} t)^2 + (4\cos t)^2 + (3)^2} = \sqrt{25} = 5$

(2) $s = \int_0^t 5\, d\tau = 5[t-0] = 5t$

$0 \le t \le \pi/2$

(3) $L = \int_0^{\pi/2} 5\, dt = \frac{5\pi}{2}$

(12) $r(t) = (\cos t + t\operatorname{sen} t)\vec{i} + (\operatorname{sen} t - t\cos t)\vec{j}$ $\quad \pi/2 \le t \le \pi$

(1) $r'(t) = v(t) = [-\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} t + t\cos t)\vec{i} + [\cos t - \cos t + t\operatorname{sen} t]\vec{j}$

$v(t) = t\cos t\,\vec{i} + t\operatorname{sen} t\,\vec{j}$

$|v(t)| = \sqrt{(t\cos t)^2 + (t\operatorname{sen} t)^2} = t$

(2) $s = \int_0^t \tau\, d\tau = \frac{\tau^2}{2}\Big|_0^t = \frac{t^2}{2}$

(3) $\pi/2 \le t \le \pi$

$L = \int_{\pi/2}^{\pi} t\, dt = \frac{t^2}{2}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{8} = \frac{4\pi^2 - \pi^2}{8} = \frac{3\pi^2}{8}$

(13) $r(t) = (e^t\cos t)\vec{i} + (e^t\operatorname{sen} t)\vec{j} + e^t\vec{k}$ $\quad -\ln 4 \le t \le 0$

(1) $r'(t) = v(t) = [e^t\cos t - e^t\operatorname{sen} t]\vec{i} + [e^t\operatorname{sen} t + e^t\cos t]\vec{j} + e^t\vec{k}$

$v(t) = e^t(\cos t - \operatorname{sen} t)\vec{i} + e^t(\operatorname{sen} t + \cos t)\vec{j} + e^t\vec{k}$

(2) $|v(t)| = \sqrt{(e^t(\cos t - \operatorname{sen} t))^2 + (e^t(\operatorname{sen} t + \cos t))^2 + (e^t)^2}$

$|v(t)| = \sqrt{3e^{2t}} = e^t\sqrt{3}$

(3) $s(t) = \int_0^t e^\tau\sqrt{3}\, d\tau = \sqrt{3}(e^t - e^0) = \sqrt{3}(e^t - 1)$

(4) $L = \int_{-\ln 4}^{0} e^t\sqrt{3}\, dt = \sqrt{3}(e^0 - e^{-\ln 4}) = \sqrt{3}(1 - \frac{1}{4}) = \frac{\sqrt{3}\,3}{4}$

14 $r(t) = (1+2t)\vec{i} + (1+3t)\vec{j} + (6-6t)\vec{k}$ $\quad -1 \leq t \leq 0$

1 $r'(t) = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k}$

$|v| = \sqrt{(2)^2 + (3)^2 + (-6)^2} = \sqrt{49} = 7$

2 $s(t) = \int_0^t 7\, d\tau = 7t - 0 = 7t$

3 $-1 \leq t \leq 0$

$L = \int_{-1}^{0} 7\, dt = 7(0) - 7(-1) = 7$