DEBER 5-INDIVIDUAL-

NOMBRE: Jostin Sánchez

Obtenga **T**, **N** y κ para las curvas planas de los ejercicios 1 a 4.

1. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (\ln \cos t)\mathbf{j}, \quad -\pi/2 < t < \pi/2$

6. Fórmula para la curvatura de una curva plana parametrizada

a. Demuestre que la curvatura de una curva suave $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$ definida mediante las funciones dos veces derivables $x = f(t)$ y $y = g(t)$ está dada por la fórmula

$$\kappa = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}.$$

Los puntos en la fórmula denotan diferenciación con respecto a t, una derivada por cada punto. Aplique la fórmula para determinar las curvaturas de las siguientes curvas.

b. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (\ln \operatorname{sen} t)\mathbf{j}, \quad 0 < t < \pi$

c. $\mathbf{r}(t) = [\tan^{-1}(\operatorname{senh} t)]\mathbf{i} + (\ln \cosh t)\mathbf{j}.$

Curvas espaciales

Obtenga **T**, **N** y κ para las curvas en el espacio de los ejercicios 9 a 16.

11. $\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t)\mathbf{i} + (e^t \operatorname{sen} t)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

16. $\mathbf{r}(t) = (\cosh t)\mathbf{i} - (\operatorname{senh} t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

21. Obtenga la ecuación para el círculo de curvatura que corresponde a la curva $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t)\mathbf{j}$, en el punto $(\pi/2, 1)$. (La curva parametriza la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ en el plano xy).

T La fórmula

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{\left[1 + (f'(x))^2\right]^{3/2}},$$

obtenida en el ejercicio 5 expresa la curvatura $\kappa(x)$ de una curva plana dos veces diferenciable $y = f(x)$ como función de x. Obtenga la función de curvatura de cada una de las curvas de los ejercicios 23 a 26. Luego grafique $f(x)$ junto con $\kappa(x)$ sobre el intervalo dado. Encontrará algunas sorpresas.

26. $y = e^x, \quad -1 \leq x \leq 2$

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

En los ejercicios 29 a 34 use un SAC para explorar el círculo osculador en un punto P de una curva plana donde $\kappa \neq 0$. Use dicho software para ejecutar los siguientes pasos:

a. Grafique la curva plana dada en forma paramétrica o como una función en el intervalo dado para ver su apariencia.

b. Calcule la curvatura κ de la curva en t_0 usando la fórmula apropiada de los ejercicios 5 o 6. Use la parametrización $x = t$ y $y = f(t)$ si la curva está dada como una función $y = f(x)$.

c. Obtenga el vector normal unitario $\mathbf{N}$ en t_0. Observe que los signos de los componentes de $\mathbf{N}$ dependen de si el vector tangente unitario $\mathbf{T}$, en $t = t_0$, gira en el sentido de las manecillas del reloj o en sentido contrario. (Véase el ejercicio 7).

d. Si $\mathbf{C} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ es el vector que va del origen al centro (a, b) del círculo osculador, determine el centro $\mathbf{C}$ a partir de la ecuación vectorial

$$\mathbf{C} = \mathbf{r}(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)}\mathbf{N}(t_0).$$

El punto $P(x_0, y_0)$ en la curva está dado por el vector de posición $\mathbf{r}(t_0)$.

e. Grafique implícitamente la ecuación $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 1/\kappa^2$ del círculo osculador. Luego trace juntos la curva y el círculo osculador. Podría ser necesario experimentar con el tamaño de la ventana de la gráfica, pero asegúrese de que sea cuadrada.

31. $\mathbf{r}(t) = (2t - \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (2 - 2\cos t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 3\pi, \quad t_0 = 3\pi/2$

Obtención de los componentes tangencial y normal

En los ejercicios 1 y 2, escriba $\mathbf{a}$ en la forma $\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N}$ sin obtener ni $\mathbf{T}$ ni $\mathbf{N}$.

1. $\mathbf{r}(t) = (a\cos t)\mathbf{i} + (a\,\mathrm{sen}\,t)\mathbf{j} + bt\mathbf{k}$

En los ejercicios 3 a 6, escriba $\mathbf{a}$ en la forma $\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N}$ para el valor dado de t sin calcular ni $\mathbf{T}$ ni $\mathbf{N}$.

6. $\mathbf{r}(t) = (e^t\cos t)\mathbf{i} + (e^t\,\mathrm{sen}\,t)\mathbf{j} + \sqrt{2}e^t\mathbf{k}, \quad t = 0$

En los ejercicios 9 a 16 de la sección 13.4, obtuvo $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ y κ. Ahora, en los ejercicios 9 a 16, obtenga $\mathbf{B}$ y τ para esas curvas en el espacio.

11. $\mathbf{r}(t) = (e^t\cos t)\mathbf{i} + (e^t\,\mathrm{sen}\,t)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

16. $\mathbf{r}(t) = (\cosh t)\mathbf{i} - (\mathrm{senh}\,t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

Teoría y ejemplos

21. Fórmula vectorial para la curvatura Para una curva suave, utilice la ecuación (1) para deducir la fórmula de curvatura

$$\kappa = \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}{|\mathbf{v}|^3}.$$

$$\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N}, \qquad (1)$$

26. Torsión de una hélice Demuestre que la torsión de la hélice

$$\mathbf{r}(t) = (a\cos t)\mathbf{i} + (a\,\mathrm{sen}\,t)\mathbf{j} + bt\mathbf{k}, \quad a, b \geq 0$$

es $\tau = b/(a^2 + b^2)$. ¿Cuál es el valor máximo que τ puede tener para un valor dado de a? Justifique su respuesta.

En los ejercicios 1 a 5, obtenga los vectores de velocidad y aceleración en términos de $\mathbf{u}_r$ y $\mathbf{u}_\theta$.

1. $r = a(1 - \cos\theta)$ y $\dfrac{d\theta}{dt} = 3$

2. $r = a\,\mathrm{sen}\,2\theta$ y $\dfrac{d\theta}{dt} = 2t$

3. $r = e^{a\theta}$ y $\dfrac{d\theta}{dt} = 2$

4. $r = a(1 + \mathrm{sen}\,t)$ y $\theta = 1 - e^{-t}$

5. $r = 2\cos 4t$ y $\theta = 2t$

6. Tipo de órbita ¿Para cuáles valores de v_0 en la ecuación (5) la órbita de la ecuación (6) es una circunferencia? ¿Una elipse? ¿Una parábola? ¿Una hipérbola?

7. Órbitas circulares Demuestre que un planeta con una órbita circular se mueve a velocidad constante. (*Sugerencia:* Considere que esto es una consecuencia de una de las leyes de Kepler).

8. Suponga que $\mathbf{r}$ es el vector de posición de una partícula que se mueve a lo largo de una curva plana y dA/dt es la razón a la cual el vector barre el área. Sin usar coordenadas y suponiendo que existen las derivadas necesarias, dé un argumento geométrico con base en incrementos y límites para demostrar la validez de la ecuación

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}|\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}|.$$

9. Tercera ley de Kepler Complete la deducción de la tercera ley de Kepler [la parte que sigue de la ecuación (10)].

10. Obtenga la longitud del eje mayor de la órbita de la Tierra con base en la tercera ley de Kepler y en el hecho de que el periodo de la órbita de la Tierra es de 365.256 días.

1. $r(t) = t\,i + (\ln \cos t)\,j$, $\boxed{-\pi/2 < t < \pi/2}$ intervalo positivo

$\dfrac{dr_t}{dt} = \vec{i} + \dfrac{(-\operatorname{sen} t)}{\cos t}\,\vec{j} = v(t)$ $\left|\dfrac{dr}{dt}\right| = \sqrt{1+\tan^2 t} = \sec t = |v(t)|$

$\boxed{T(t)} = \dfrac{v(t)}{|v(t)|} = \boxed{\cos t\,\vec{i} - \operatorname{sen} t\,\vec{j}}$

$\boxed{N} = \dfrac{T'(t)}{|T'(t)|} = \boxed{-\operatorname{sen} t\,\vec{i} - \cos t\,\vec{j}}$

$T'(t) = -\operatorname{sen} t\,\vec{i} - \cos t\,\vec{j}$

$|T'(t)| = 1$

---

6. (a) demostrar $K = \dfrac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}$ $\boxed{K = \dfrac{|v(t) \times a(t)|}{|v(t)|^3}}$ componente $\boxed{\vec{K} = 0}$ nula

$r(t) = f(t)\,i + g(t)\,j$

$x = f(t)$

$y = g(t)$

$v(t) \times a(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \\ \ddot{x} & \ddot{y} & 0 \end{vmatrix} = \dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}$

$v(t) = \dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j}$ $\boxed{|v(t)| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$

$a(t) = \ddot{x}\,\vec{i} + \ddot{y}\,\vec{j}$

$K = \dfrac{|v(t) \times a(t)|}{|v(t)|^3} = \boxed{\dfrac{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}}$ Demostrado.

(b). $r(t) = t\,\vec{i} + \ln \operatorname{sen} t\,j$, $0 < t < \pi$ (intervalo positivo)

$\dot{x} = 1$ $\dot{y} = \dfrac{\cos t}{\operatorname{sen} t} = \cot(t)$

$\ddot{x} = 0$

$\ddot{y} = -\csc^2 t$

$\boxed{K} = \dfrac{|(1)(-\csc^2 t) - (0)(\cot(t))|}{((1)^2 + (\cot^2 t))^{3/2}} = \dfrac{\csc^2 t}{(\csc^2 t)^{3/2}} = \boxed{\operatorname{Sen} t}$

$\boxed{K = \operatorname{sen} t}$

(c)

$r(t) = [\tan^{-1}(\operatorname{senh} t)]\,\vec{i} + (\ln \cosh t)\,j$

$\dot{x} = \dfrac{\cosh t}{1 + \operatorname{senh}^2 t} = \dfrac{\cosh t}{\cosh^2 t} = \operatorname{sech} t$ $\dot{y} = \tanh t$

$\ddot{x} = -\operatorname{sech} t \tanh t$ $\ddot{y} = \operatorname{sech}^2 t$

$K = \dfrac{|(\operatorname{sech} t)(\operatorname{sech}^2 t) - (-\operatorname{sech} t)(\tanh t)(\tanh t)|}{(\underbrace{\operatorname{sech}^2 t + \tanh^2 t}_{1})^{3/2}} = \dfrac{\operatorname{sech} t\,(\operatorname{sech}^2 t - \tanh^2 t)}{1} =$

$\boxed{K = \operatorname{sech} t\,(\operatorname{sech}^2 t - \tanh^2 t)}$

11. $r(t) = (e^t \cos t)\vec{i} + (e^t \operatorname{sen} t)\vec{j} + 2k$

$K = \dfrac{|T'(t)|}{|V|}$

$v(t) = e^t(\cos t - \operatorname{sen} t)\vec{i} + e^t(\operatorname{sen} t + \cos t)\vec{j} + 0k$

$|T'(t)| = 1$

$|v(t)| = \sqrt{2e^{2t}} = e^t\sqrt{2}$

$\boxed{K_{(t)} = \dfrac{\sqrt{2}}{2e^t}}$

$\boxed{\vec{T} = \dfrac{v(t)}{|v(t)|} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos t - \operatorname{sen} t)\vec{i} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\operatorname{sen} t + \cos t)\vec{j}}$

$N = \dfrac{T'(t)}{|T'(t)|}$

$T'(t) = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}(\operatorname{sen} t + \cos t)\vec{i} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos t - \operatorname{sen} t)\vec{j}$

$|T(t)| = 1$

$\boxed{N = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}(\operatorname{sen} t + \cos t)\vec{i} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos t - \operatorname{sen} t)\vec{j}}$

---

16. $r(t) = \cosh t\,\vec{i} - \operatorname{senh} t\,\vec{j} + tk$

$\boxed{K = \dfrac{\operatorname{Sech}^2 t}{2}}$

$v(t) = \operatorname{senh} t\,\vec{i} - \cosh t + K$

$|v(t)| = \sqrt{2}\cosh t$

$\vec{T}_{(t)} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\tanh t\,\vec{i} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sech}(t)\vec{k}$

$T'(t) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sech}^2 t\,\vec{i} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sech} t \tanh(t)\,\vec{k}$

$|T'(t)| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sech} t$

$\boxed{N = \operatorname{sech}^2 t\,\vec{i} - \tanh t\,\vec{j}}$

$r(t) = t\vec{i} + \operatorname{sen} t\,\vec{j}$ $\quad P\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ $\quad R = \dfrac{1}{K}$ $\quad f(x) = \operatorname{sen} x$ $\quad x = \dfrac{\pi}{2}$

Ec. circulo

$f'(x) = \cos x = 0$

$C = (h, k)$

$f''(x) = -\operatorname{sen} x = -1$

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = R^2 \rightarrow \boxed{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + y^2 = 1}$

$r\left(\frac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}\vec{i} + \vec{j}$

$K\left(\frac{\pi}{2}\right) = \dfrac{|-1|}{|1|^{3/2}} = \boxed{1}$ $\quad K\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \therefore R = 1$

$C = r(t_0) + R \cdot N(t_0) \rightarrow C = \left(\frac{\pi}{2}\vec{i} + \vec{j}\right) + (1)(-\vec{j})$

$v(t) = \vec{i} + \cos t\,\vec{j}$

$\boxed{C = \left(\underset{h}{\frac{\pi}{2}}, \underset{k}{0}\right)}$

$|v(t)| = \sqrt{1 + \cos^2 t}$

$T = \dfrac{\sqrt{1+\cos^2 t}}{1 + \cos^2 t}\vec{i} + \dfrac{\cos t}{\sqrt{1+\cos^2 t}}\vec{j}$

$K = \dfrac{|T'(t)|}{|V|}$

$T'(t) = \dfrac{\cos t \operatorname{sen} t}{(1+\cos^2 t)^{3/2}}\vec{i} + \dfrac{-\operatorname{sen} t\left((1+\cos^2 t)^{3/2} + \cos^2 t\right)}{(1+\cos^2 t)^{3/2}}\vec{j}$

$|T'(t)| = (1)(\sqrt{1+\cos^2 t})\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$T'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\vec{j}$

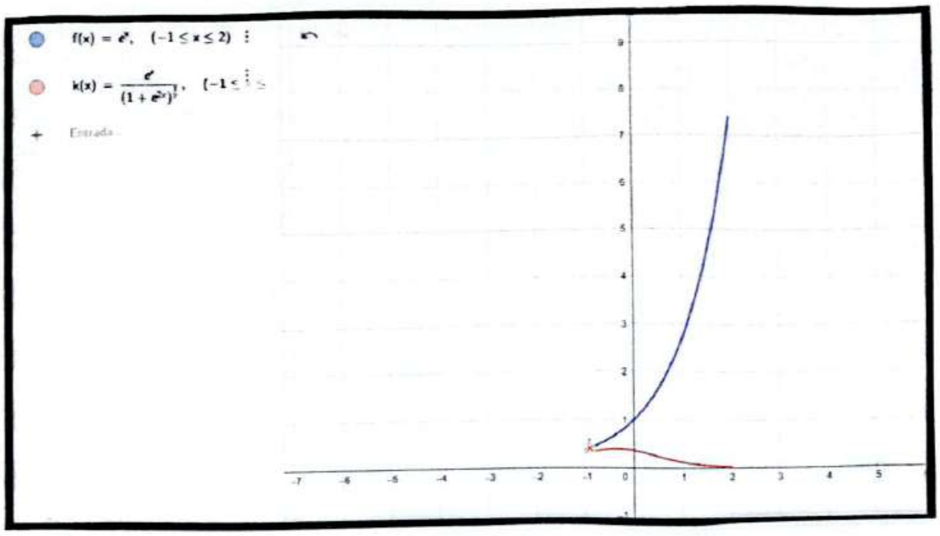
$\boxed{|T'(t)| = 1}$

$N = \dfrac{T'(t)}{|T'(t)|} = \dfrac{-\vec{j}}{1} = -\vec{j}$

26. $\boxed{y = e^x, \quad -1 \leq x \leq 2}$

$$K(x) = \frac{|f''(x)|}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}} \qquad f(x) = e^x \quad f'(x) = e^x \quad f''(x) = e^x$$

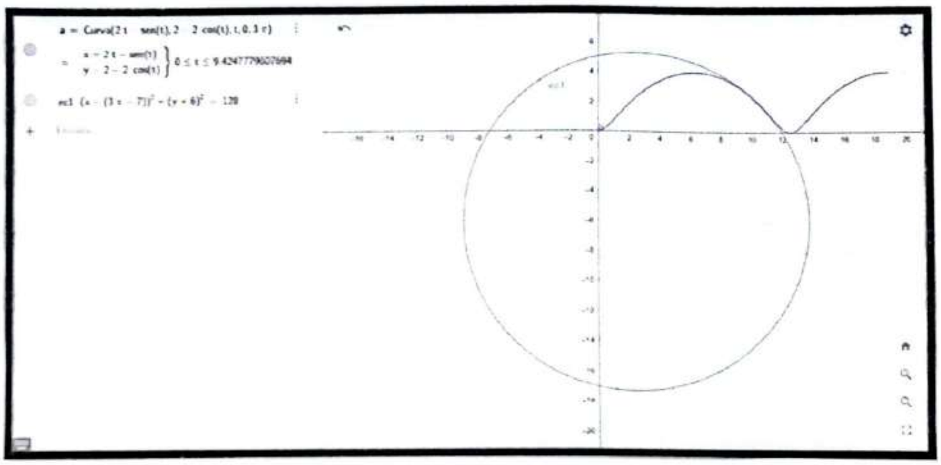
$$K = \frac{e^x}{(1 + e^{2x})^{3/2}}$$



---

31. $r(t) = (2t - \operatorname{sen} t)\vec{i} + (2 - 2\cos t)\vec{j}, \quad 0 \leq t \leq 3\pi, \quad t_0 = \frac{3\pi}{2}$

(a)



(b)

$\dot{x}(t) = 2 - \cos t \qquad \dot{y} = 2\sin t \qquad \left(\frac{3\pi}{2}\right) \quad \dot{x} = 2 \qquad \dot{y} = -2$

$\ddot{x} = \sin t \qquad \ddot{y} = 2\cos t \qquad \ddot{x} = -1 \qquad \ddot{y} = 0$

$$K = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{2}{(8)^{3/2}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{16}}$$

(c) $a = a_T T + a_N N$

$v(t) = 2\vec{i} - 2\vec{j} \qquad T = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$

$|v(t)| = 2\sqrt{2}$

$a(t) = -\vec{i} + 0$

$(a \cdot T) = (-1\vec{i})\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}$

$\boxed{a_T = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right) = -\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}}$

$\boxed{a_N = -\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} = -\frac{1}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}}$

$N(t_0) = \frac{a_N}{|a_N|} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$

(d) $R = \frac{1}{K} = 8\sqrt{2}$

$r(t_0) = (3\pi + 1)\vec{i} + 2\vec{j}$

$C = [(3\pi + 1)\vec{i} + 2\vec{j}] + (8\sqrt{2})\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right)$

$C = [(3\pi + 1)\vec{i} + 2\vec{j}] + (-8\vec{i} - 8\vec{j})$

$\boxed{C = (3\pi - 7, -6)}$

$\boxed{(x - (3\pi - 7))^2 + (y + 6)^2 = 128}$

1. $r(t) = (a\cos t)\vec{i} + (a\,\text{sen}\,t)\vec{j} + bt\vec{k}$

$a = a_T T + a_N N$

$a_T = \frac{d|v(t)|}{dt}$ $\quad a_N = \sqrt{|a(t)|^2 - (a_T)^2}$

$v(t) = -a\,\text{sen}\,t\,\vec{i} + a\cos t\,\vec{j} + bk$

$|v(t)| = +\sqrt{a^2 + b^2}$

$\boxed{a_T = 0}$

$a(t) = -a\cos t\,\vec{i} - a\,\text{sen}\,t\,\vec{j}$

$|a(t)| = a$

$a_N = \sqrt{a^2} = a$

$\boxed{a_N = a}$

6. $r(t) = (e^t\cos t)\vec{i} + (e^t\,\text{sen}\,t)\vec{j} + \sqrt{2}e^t k \;, t = 0$

$v(t) = e^t(\cos t - \text{sen}\,t)\vec{i} + e^t(\text{sen}\,t + \cos t)\vec{j} + \sqrt{2}e^t \;, t = 0$

$v(0) = \vec{i} + \vec{j} + \sqrt{2}k$

$|v(0)| = \sqrt{4} = 2$

$a(t) = -2e^t\,\text{sen}\,t\,\vec{i} + 2e^t\cos t\,\vec{j} + \sqrt{2}e^t\vec{k}$

$|a(0)| = 0\vec{i} + 2\vec{j} + \sqrt{2}k$

$|a(0)| = \sqrt{6}$

$a_T = \frac{v(0)\odot a(0)}{|v(0)|} = \frac{4}{2} = 2$ $\quad a_N = \sqrt{6 - (2)^2} = \sqrt{2}$

$\boxed{a_T = 2}$ $\quad \boxed{a_N = \sqrt{2}}$

11. B (vector binormal) $\quad \tau$ (Torsión)

$T(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t - \text{sen}\,t)\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}(\text{sen}\,t + \cos t)\vec{j}$

$r(t) = (e^t\cos t)\vec{i} + (e^t\,\text{sen}\,t)\vec{j} + 2\vec{k}$

$N(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\text{sen}\,t - \cos t)\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t - \text{sen}\,t)\vec{j}$

$$B = T \times N = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\cos t - \text{sen}\,t}{\sqrt{2}} & \frac{\text{sen}\,t + \cos t}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-\text{sen}\,t - \cos t}{\sqrt{2}} & \frac{\cos t - \text{sen}\,t}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\left[(\cos t - \text{sen}\,t)(\cos t - \text{sen}\,t) - (\text{sen}\,t + \cos t)(-\text{sen}\,t - \cos t)\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{(\cos t - \text{sen}\,t)^2 + (\text{sen}\,t + \cos t)^2}{2}\right]$$

$\boxed{B_{(t)} = \vec{k}}$

$B'(t) = 0$

$B'(t) = -\tau(t)\,|v(t)|\,N(t) \neq 0$

0

$\boxed{\tau(t) = 0}$

16. $r(t) = \cosh t\,\vec{i} - \text{senh}\,\vec{j} + tK$

$T(t) = \frac{\tanh t}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j} + \frac{\text{sech}\,t}{\sqrt{2}}\vec{k}$

$N(t) = \text{sech}(t)\vec{i} - \tanh(t)\vec{k}$

$$B = T \times N = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\tanh t}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\text{sech}\,t}{\sqrt{2}} \\ \text{sech}\,t & 0 & -\tanh t \end{vmatrix} = \frac{\tanh t}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} + \frac{\text{sech}\,t}{\sqrt{2}}\vec{k}$$

$\tau = \frac{(v \times a)\cdot a'}{|v \times a|^2}$

- $v(t) = \text{senh}\, t\, \vec{i} - \cosh t\, \vec{j} + \vec{k}$
- $a(t) = \cosh t\, \vec{i} - \sinh t\, \vec{j}$
- $a'(t) = \text{senh}\, t\, \vec{i} - \cosh t\, \vec{j}$

$$v \times a = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \sinh t & -\cosh t & 1 \\ \cosh t & -\sinh t & 0 \end{vmatrix} = \sinh t\, \vec{i} + \cosh t + \vec{k}$$

$(\sinh t\, \vec{i} + \cosh t + k) \odot (\text{senh}\, t\, \vec{i} - \cosh t\, \vec{j}) = \text{senh}^2 t\, \vec{i} - \cosh^2 t\, \vec{j} = \boxed{-1}$

$|v \times a|^2 = \sinh^2 t + \cosh^2 t + 1 = \boxed{2\cosh^2 t}$

$$\tau(t) = \frac{-1}{2\cosh^2 t} = \boxed{\frac{-\text{sech}^2 t}{2}}$$

---

21. El vector v es la rapidez $|v|$ en la dirección del unitario tangencial T

$v = |v| T$

El vector aceleración es

$a = a_T T + a_N N$

$v \times a = (|v| T) \times (a_T T + a_N N)$

$= (|v| T \times a_T T + |v| T \times a_N N)$

$= |v| a_T \cancel{(T \times T)}^{0} + |v| a_N (T \times N)^{B}$

$v \times a = |v| a_N B \qquad |B| = 1$

$|v \times a| = \big| |v| a_N B \big|$

(1) $|v \times a| = |v| a_N \qquad a_N = \dfrac{|v \times a|}{|v|}$

(2) $a_N = K |v|^2$

(1) en (2)

$\dfrac{|v \times a|}{|v|} = K |v|^2$

$\boxed{K = \dfrac{|v \times a|}{|v|^3}}$ Demostrado.

Torsión de una hélice

Demostración

$\boxed{\tau = \dfrac{(v \times a) \cdot a'}{|v \times a|^2}}$

$r(t) = a\cos t\, \vec{i} + (a\,\text{sen}\, t)\, \vec{j} + bt\, \vec{k} \qquad a, b \geq 0$

$v(t) = -a\,\text{sen}\, t\, \vec{i} + a\cos t\, \vec{j} + bk$

$a(t) = -a\cos t\, \vec{i} - a\,\text{sen}\, t\, \vec{j}$

$a'(t) = -a\,\text{sen}\, t\, \vec{i} - a\cos t\, \vec{j}$

Triple producto

$$v \times a = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -a\,\text{sen}\, t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\,\text{sen}\, t & 0 \end{vmatrix} = ab\,\text{sen}\, t\, \vec{i} + ab\cos t\, \vec{j} + a^2 k$$

$|v \times a|^2 = a^2(b^2 + a^2)$

$(v \times a) \odot a' = (ab\,\text{sen}\, t\, \vec{i} + ab\cos t\, \vec{j} + a^2 k) \odot (-a\,\text{sen}\, t\, \vec{i} - a\cos t\, \vec{j})$

$= a^2 b$

$$\tau = \frac{a^2 b}{a^2(b^2 + a^2)} = \boxed{\frac{b}{b^2 + a^2}}$$

$b = a \qquad \tau_{max} = \dfrac{a}{a^2 + a^2} = \boxed{\dfrac{1}{2a}}$ torsión máxima

$$\frac{d\tau}{db} = \frac{b^2 + a^2 - b(2b)}{(b^2 + a^2)^2} = \boxed{\frac{a^2 - b^2}{(b^2 + a^2)^2} = 0}$$

Para encontrar los puntos críticos

$\boxed{a = b}$

Si $b^2 < a^2$ la derivada es positi(va) (C

Si $b^2 > a^2$ la derivada es negati(va) Dec

Coordenadas polares $v = \dot{r}\mu_r + r\dot{\theta}\mu_\theta$ $a = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mu_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mu_\theta$

1. $r = a(1-\cos\theta)$ y $\frac{d\theta}{dt} = 3$ $\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$

$\dot{r} = 3a\sin\theta$

$\ddot{r} = 9a\cos\theta$

$\boxed{v = 3a\,\text{sen}\,\theta\,\mu_r + 3a(1-\cos\theta)\,\mu_\theta}$

$\boxed{a = 9a\cos\theta\,\mu_r + 18a\sin\theta\,\mu_\theta}$

---

2. $r = a\,\text{sen}\,2\theta$ y $\frac{d\theta}{dt} = 2t$ $\frac{d^2\theta}{dt^2} = 2$

$\dot{r} = 4at\cos 2\theta$

$\ddot{r} = 4a\cos(2\theta) - 16at^2\,\text{sen}(2\theta)$

8 $\boxed{v = 4at\cos(2\theta)\mu_r + (2at\,\text{sen}(2\theta))\mu_\theta}$ $\boxed{a = [4a\cos(2\theta) - 20at^2\,\text{sen}(2\theta)]\mu_r + [2a\,\text{sen}\,2\theta + 16at^2\cos(2\theta)]\mu_\theta}$

---

3. $r = e^{a\theta}$ y $\frac{d\theta}{dt} = 2$; $\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$

$\dot{r} = 2ae^{a\theta}$

$\ddot{r} = 4a^2 e^{a\theta}$

$\boxed{v = 2e^{a\theta}(a\mu_r + \mu_\theta)}$ $\boxed{a = [4e^{a\theta}(a^2-1)]\mu_r + 8ae^{a\theta}\mu_\theta}$

---

9. 4. $r = a(1+\text{sen}\,t)$ y $\theta = 1 - e^{-t}$

$\dot{r} = a\cos t$ $\dot{\theta} = e^{-t}$

$\ddot{r} = -a\,\text{sen}\,t$ $\ddot{\theta} = -e^{-t}$

$\boxed{v = (a\cos t)\mu_r + [ae^{-t}(1+\text{sen}\,t)]\mu_\theta}$ $\boxed{a = [-a\,\text{sen}\,t - ae^{-2t}(1+\text{sen}\,t)]\mu_r + [ae^{-t}(-1-\text{sen}\,t + 2\cos t)]\mu_\theta}$

---

5. $r = 2\cos 4t$ y $\theta = 2t$

$\dot{r} = -8\,\text{sen}(4t)$ $\dot{\theta} = 2$

$\ddot{r} = -32\cos(4t)$ $\ddot{\theta} = 0$

$\boxed{v = (-8\,\text{sen}(4t))\mu_r + 4\cos(4t)\mu_\theta}$ $\boxed{a = (-40\cos(4t))\mu_r - (32\,\text{sen}(4t))\mu_\theta}$

---

6. $e = \frac{r_0 v_0^2}{GM} - 1$

10. Circunferencia $e = 0$ | Elipse $0 < e < 1$ | Parábola $e = 1$ | Hipérbola $e > 1$

$0 = \frac{r_0 v_0^2}{GM} - 1$ $\sqrt{\frac{GM}{r_0}} < v_0 < \sqrt{\frac{2GM}{r_0}}$ $v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}}$ $v_0 > \sqrt{\frac{2GM}{r_0}}$

$v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}$

c

a

7. Órbitas circulares

$$e = 0$$

① $r = \dfrac{(1+e)\, r_0}{1 + e\cos\theta}$; $\boxed{r = r_0}$ radio es constante

② $\dfrac{dA}{dt} = \underbrace{\dfrac{1}{2} r^2 \dot\theta}_{\text{polares}}$ (Un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales)

Como ① y ② son constantes $\therefore \dot\theta$ es constante (el cambio de ángulo conforme al tiempo)

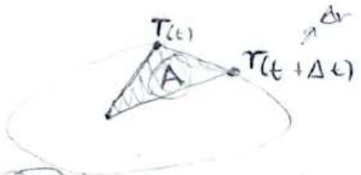
$v = \underbrace{\dot r}_{=0}\, \mu_r + r\dot\theta\, \mu_\theta$

$v = r\dot\theta\, \mu_\theta$ $\boxed{|v| = \sqrt{(r_0\dot\theta)^2} = r_0\dot\theta \rightarrow \text{rapidez constante}}$

---

8. Demostrar

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}|r \times \dot r|$$



$\boxed{\Delta A \approx \frac{1}{2}|r(t) \times \Delta r|}$ Area de un triángulo

tasa de cambio $\rightarrow \dfrac{\Delta A}{\Delta t} \approx \dfrac{1}{2}\left|r(t) \times \dfrac{\Delta r}{\Delta t}\right|$ $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta r}{\Delta t} = \boxed{\dot r = v}$ Por definición

$\lim\limits_{\Delta t \to 0}$

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}|r \times \dot r|}$$ Demostrado

---

9. $\boxed{T = \dfrac{2\pi a^2}{r_0 v_0}\sqrt{1-e^2} \;(9)}$ $e = \dfrac{r_0 v_0^2}{GM} - 1 \;(5)$ $a = \dfrac{r_0}{1-e} \;(10)$

Ecuación ⑨ $e+1 = \dfrac{r_0 v_0^2}{GM} \;(5)$ $(1-e) = \dfrac{r_0}{a} \;(10)$

Ecuación ⑤ y ⑩ en ⑨

$$\frac{T^2}{a^4} = \frac{4\pi^2}{r_0^2 v_0^2}(1-e^2)$$

$$\frac{T^2}{a^4} = \frac{4\pi^2}{r_0^2 v_0^2}(1-e)(1+e)$$

$$\frac{T^2}{a^4} = \frac{4\pi^2}{\cancel{r_0^2 v_0^2}}\left(\frac{r_0}{a}\right)\left(\frac{\cancel{r_0 v_0^2}}{GM}\right)$$

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}}$$

El tiempo T que tarda un planeta en dar una vuelta alrededor de su sol es el periodo orbital del planeta. La tercera ley de Kepler, queda demostrado

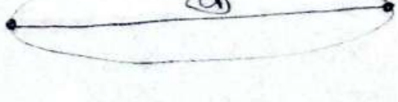
---

10. $T = 365{,}256 \text{ días} \times 24 \dfrac{h}{\text{día}} \times 3600 \dfrac{s}{h} \approx 3{,}1558 \times 10^{7}\,[s]$

$G = 6{,}674 \times 10^{-11}\,[Nm^2/Kg^2]$ (Constante universal)

$M = 1{,}99 \times 10^{30}\,Kg$ (Masa del sol)

$$a^3 = \frac{T^2\, G \cdot M}{4\pi^2}$$



$$a = \sqrt[3]{\frac{T^2\, G \cdot M}{4\pi^2}} = \boxed{1{,}496 \times 10^{11}\,[m]}$$