Escuela Politécnica Nacional

Matemática avanzada

Nombre: Paulo Sabando
Fecha: 22/10/2025
Paralelo: 2A

Deber 2

- Resolver los ejercicios de la sección 12.3

Determine

a) $v \cdot u$, $|v|$, $|u|$
b) El coseno entre v y u
c) el componente escalar de u en la dirección de v.
d) El vector $\text{proy}_v u$.

3) $v = 10\vec{i} + 11\vec{j} - 2\vec{k}$, $u = 3\vec{j} + 4\vec{k}$

a) $v \cdot u$

- $|v| = \sqrt{(10)^2 + (11)^2 + (-2)^2} = 15$
- $|u| = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = 5$

$v \cdot u = (10 \cdot 0) + (11 \cdot 3) + (-2 \cdot 4)$
$v \cdot u = 33 - 8 = 25$

b) $v \cdot u = |v||u| \cos\theta$

$$\cos\theta = \frac{v \cdot u}{|v||u|} = \frac{\cancel{25}^{\,5}}{\cancel{5}_1 \cdot \cancel{15}_3} = \frac{1}{3}$$

c) $v \cdot u = |v||u| \cos\theta$

$$|u|\cos\theta = \frac{v \cdot u}{|v|} = \frac{25}{15} = \frac{5}{3}$$

d) El vector $\text{proy}_v u$

$$\text{proy}_v u = \left(\frac{u \cdot v}{|v|^2}\right) v = \left(\frac{25}{15^2}\right)(10\vec{i} + 11\vec{j} - 2\vec{k}) = \frac{10}{9}\vec{i} + \frac{11}{9}\vec{j} - \frac{2}{9}\vec{k}$$

Calcule los ángulos entre los vectores con una aproximación de centésimas de radián.

11) $u = \vec{i} + \sqrt{2}\,\vec{j} - \sqrt{2}\,\vec{k}$, $v = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

- $|u| = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{5}$
- $|v| = \sqrt{3}$

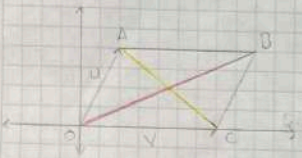
- $u \cdot v = (1 \cdot (-1)) + (\cancel{\sqrt{2}} \cdot 1) + (\cancel{-\sqrt{2}} \cdot 1)$
  $u \cdot v = -1$
- $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}\sqrt{5}}\right) = 1{,}83$ radianes

② Cuando los paralelogramos son rectángulos: demuestre que un paralelogramo es rectángulo si y solo si sus diagonales tienen la misma longitud.

Un paralelogramo en el plano, donde:

$OA = u$; $OC = v$; $d_1 = OB = u + v$

$d_2 = AC = u - v$



① Si el paralelogramo es rectángulo, los lados adyacentes son perpendiculares $\therefore u \cdot v = 0$ y sus longitudes deben ser las mismas.

$$|u+v|^2 = |u-v|^2$$

$$|u|^2 + 2\cancel{|u \cdot v|}^{0} + |v|^2 = |u|^2 - 2\cancel{|u \cdot v|}^{0} + |v|^2$$

$$|u|^2 + |v|^2 = |u|^2 + |v|^2$$ $\therefore$ Las diagonales tienen la misma magnitud

② Si el paralelogramo tiene sus diagonales con la misma magnitud, es rectángulo.

$$|u+v|^2 = |u-v|^2$$

$$\cancel{|u|^2} + 2|u \cdot v| + \cancel{|v|^2} = \cancel{|u|^2} - 2|u \cdot v| + \cancel{|v|^2}$$

$$2|u \cdot v| = -2|u \cdot v|$$

$$4|u \cdot v| = 0$$

$$|u \cdot v| = 0$$ $\therefore$ u y v son perpendiculares.

③ Una fuerza $F = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ es aplicada a una nave espacial cuya velocidad es el vector $v = 3\vec{i} - \vec{j}$. Exprese F como una suma del vector paralelo a v y un vector ortogonal a v.

$F = F_1 + F_2$ donde F_1 es paralelo a F y F_2 es ortogonal

① $$\text{proy}_v F = \left(\frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2}\right)\vec{v} = \left(\frac{5}{\sqrt{10}^2}\right)(3\vec{i} - \vec{j}) = \boxed{\left(\frac{3}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}\right)} = F_1$$

- $\vec{v} \cdot \vec{F} = (2 \cdot 3) + (1 \cdot -1) + (-3 \cdot 0) = 5$
- $|\vec{v}| = \sqrt{(3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$

② $$F - F_1 = F_2 = \left(2 - \frac{3}{2}\right)\vec{i} + \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)\vec{j} + (-3 - 0)\vec{k}$$

$$F_2 = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j} - 3\vec{k}$$

$$F = \left(\frac{3}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}\right) + \left(\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j} - 3\vec{k}\right)$$

En los siguientes ejercicios use el resultado del ejercicio 32 para obtener una ecuación para la recta que pasa por P paralela a v. Luego dibuje la recta. Incluya a v en su bosquejo como un vector que parte del origen.

㉜ **Recta paralela a un vector** demuestre que el vector $v = a\vec{i} + b\vec{j}$ es paralelo a la recta $bx - ay = c$ estableciendo que la pendiente del segmento de recta representa v es igual a la pendiente de la recta dada.

① El vector v va desde el origen hasta el punto (a, b)

$$m_1 = \frac{b-0}{a-0} = \frac{b}{a}$$

② La pendiente de la recta $bx - ay = c$

$$-ay = c - bx$$

$$y = \frac{bx}{a} - \frac{c}{a} \qquad m_2 = \frac{b}{a}$$

③ $m_1 = m_2$ por lo tanto, el vector v es paralelo a la recta (si $a = 0$ el vector es vertical y para que se mantengan paralelos $bx = c$)

㊳ $P(1, 2)$ $\quad v = -1\vec{i} - 2\vec{j}$

① Para el vector $a = -1$ y $b = -2$

$$\therefore m_1 = \frac{-2}{-1} = 2$$

② Encontrar la ecuación de la recta que pasa por $P = (1, 2)$

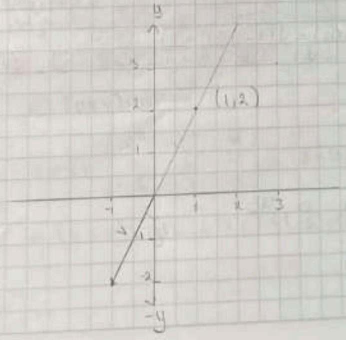
$$y - y_0 = (x - x_0)m$$

$$y - 2 = (x - 1)2$$

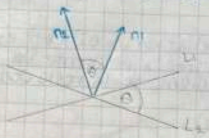
$$y - 2 = 2x - 2$$

$$y = 2x$$

Al usar $m = 2$, el vector v y la recta $y = 2x$ deben ser paralelas



El ángulo agudo entre rectas que no se cortan en un ángulo recto es el mismo que el ángulo determinado por los vectores normales a las rectas o por vectores paralelos a las mismas.



Con base en este hecho, determine los ángulos agudos entre las líneas tomando en cuenta los resultados del ejercicio 31 y 32

31 Recta perpendicular a un vector demuestre que el vector $v = a\vec{i} + b\vec{j}$ es perpendi a la recta $ax + by = c$ estableciendo que la pendiente del vector v es el recíproco negativo de la pendiente de la recta dada.

① $v = a\vec{i} + b\vec{j}$

$m_1 = \frac{b-0}{a-0} = \frac{b}{a}$

② $ax + by = c$

$y = \frac{c - ax}{b}$

$y = -\frac{ax}{b} + \frac{c}{b}$

$m_2 = -\frac{a}{b}$

m_1 es el recíproco negativo de m_2

38 $x + \sqrt{3}y = 1$, $(1-\sqrt{3})x + (1+\sqrt{3})y = 8$

$\hookrightarrow a = 1 \quad b = \sqrt{3}$ $\quad \hookrightarrow a = (1-\sqrt{3}) \quad b = (1+\sqrt{3})$

$n_1 = \vec{i} + \sqrt{3}\vec{j}$ $\qquad n_2 = (1-\sqrt{3})\vec{i} + (1+\sqrt{3})\vec{j}$

Producto punto

∘ $n_1 \cdot n_2 = [(1-\sqrt{3})\cdot(1)] + [(\sqrt{3})(1+\sqrt{3})]$
$= 1 - \cancel{\sqrt{3}} + \cancel{\sqrt{3}} + 3$
$= 4$

∘ $|n_1| = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ $\qquad$ ∘ $|n_2| = \sqrt{(1-\sqrt{3})^2 + (1+\sqrt{3})^2}$
$= \sqrt{1 - \cancel{2\sqrt{3}} + 3 + 1 + \cancel{2\sqrt{3}} + 3} = \sqrt{8}$

$n_1 \cdot n_2 = |n_1||n_2| \cos\theta$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1||n_2|}\right)$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{4}{2\sqrt{8}}\right) = \frac{1}{4}\pi$ rad ó $45°$

○ Ejercicios de la sección 12.4 (49-50)

Obtenga la magnitud y dirección (cuando esté definida) de $u \times v$ y $v \times u$

③ $u = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$ $\quad v = -\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$

$$\circ\ u \times v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (4-4)\vec{i} - (-4+4)\vec{j} + (2-2)\vec{k} = 0$$

Sin dirección

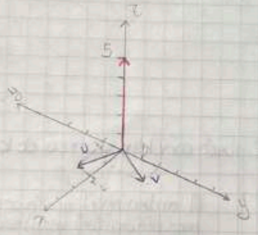
$$\circ\ v \times u = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = (4-4)\vec{i} - (-4+4)\vec{j} + (2-2)\vec{k} = 0$$

Sin dirección

Dibuje los ejes coordenados y luego incluya los vectores u, v y u×v como vectores que parten del origen.

⑫ $u = 2\vec{i} - \vec{j}$; $v = \vec{i} + 2\vec{j}$

$$u \times v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (2 \cdot 2) - (1 \cdot (-1)) = 4 + 1 = 5\vec{k}$$



Verifique que $(u \times v) \cdot w = (v \times w) \cdot u = (w \times u) \cdot v$ y obtenga el volumen del paralelepípedo determinado por u, v y w.

㉑ $u = 2\vec{i} + \vec{j}$; $v = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$; $w = \vec{i} + 2\vec{k}$

a) $(u \times v) \cdot w$

$$\circ\ u \times v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1-0)\vec{i} - (2-0)\vec{j} + (-2-2)\vec{k} = \vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k}$$

$$\circ\ (u \times v) \cdot w = (1 \cdot 1) + (-2 \cdot 0) + (-4 \cdot 2) = 1 + 0 - 8 = -7$$

b) $(v \times w) \cdot u$

$$v \times w = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-2-0)\vec{i} - (4-1)\vec{j} + (0+1)\vec{k} = -2\vec{i} - 3\vec{j} + 1\vec{k}$$

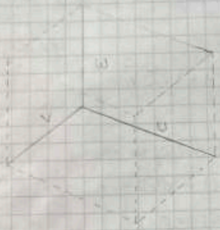
- $(v \times w) \cdot u = (-2 \cdot 2) + (-3 \cdot 1) + (1 \cdot 0) = -4 - 3 + 0 = -7$

c) $(w \times u) \cdot v$

$$w \times u = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0-2)\vec{i} - (0-4)\vec{j} + (1-0)\vec{k} = -2\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$$

- $(w \times u) \cdot v = (-2 \cdot 2) + (4 \cdot (-1)) + (1 \cdot 1) = -4 - 4 + 1 = -7$

d) Área del paralelepípedo



$V = |(u \times v) \cdot w|$

$V = |-7|$

$V = 7$

38 Calcule $(\vec{i} \times \vec{j}) \times \vec{j}$ y $\vec{i} \times (\vec{j} \times \vec{j})$ ¿Qué puede concluir acerca de la asociatividad del producto cruz?

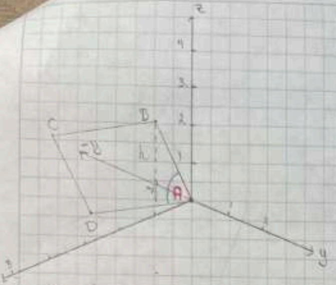
- $(\vec{i} \times \vec{j}) \times \vec{j}$
  $\vec{k} \times \vec{j}$
  $-\vec{i}$

- $\vec{i} \times (\vec{j} \times \vec{j})$
  $\vec{i} \times 0$
  0

El orden en el que operamos afectará el resultado, especialmente en la dirección. La no asociatividad es crucial en el producto cruz.

Determine las áreas de los paralelogramos cuyas vértices se indican a continuación.

39 $A(0,0,0)$; $B(3,2,4)$; $C(5,1,4)$; $D(2,-1,0)$



$$\text{Área} = b \cdot h$$
$$= |\vec{AD}| \cdot |\vec{AB}| \sin\theta$$
$$= |\vec{AD} \times \vec{AB}|$$

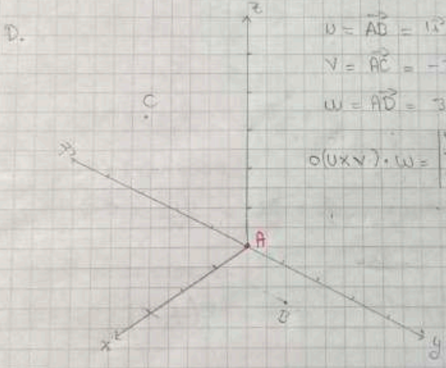
- $\vec{AB} = (2-0)\vec{i} + (-1-0)\vec{j} + (0-0)\vec{k}$
  $\vec{AB} = 2\vec{i} - \vec{j}$
- $\vec{AD} = (3-0)\vec{i} + (2-0)\vec{j} + (4-0)\vec{k}$
  $\vec{AD} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$
- $\vec{AD} \times \vec{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

$\vec{AD} \times \vec{AB} = (-4-0)\vec{i} - (8-0)\vec{j} + (4+3)\vec{k}$
$\vec{AD} \times \vec{AB} = -4\vec{i} - 8\vec{j} + 7\vec{k}$

- $|\vec{AD} \times \vec{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + (-8)^2 + (7)^2} = \sqrt{129}$

48 Obtenga el volumen de un paralelepípedo si cuatro de sus ocho vértices son

A $(0,0,0)$; B $(1,2,0)$; C $(0,-3,2)$ y D $(3,-4,5)$



$u = \vec{AB} = 1\vec{i} + 2\vec{j}$

$v = \vec{AC} = -3\vec{j} + 2\vec{k}$

$w = \vec{AD} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$

- $(u \times v) \cdot w = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \end{vmatrix}$

$$(u \times v) \cdot w = 1 \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} - 0 + 3 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= [1(-15+8)] + [3(4-0)]$$
$$= 1(-7) + 3(4)$$
$$= -7 + 12 = 5$$