Escuela Politécnica Nacional

Matemática avanzada

Nombre: Paula Jabando

Fecha: 15-11-2025

Curso: A2

Deber 5

- Resolver los ejercicios del libro de cálculo de varias variables, cap 13, ejercicios de la sección 13.4

④ Obtenga T, N y K para las curvas planas

$r(t) = (\cos t + t\,\text{sen}\,t)\vec{i} + (\text{sen}\,t - t\cos t)\vec{j} \quad t>0$

$T = \frac{v}{|v|}$

① $r'(t) = v(t) = (-\text{sen}\,t + \text{sen}\,t + t\cos t)\vec{i} + (\cos t - \cos t + t\,\text{sen}\,t)\vec{j}$

$v(t) = t\cos t\,\vec{i} + t\,\text{sen}\,t\,\vec{j}$

$|v| = \sqrt{t^2(\cos t + \text{sen}\,t)^2} = t$

$T = \frac{t\cos t}{t}\vec{i} + \frac{t\,\text{sen}\,t}{t}\vec{j} = \cos t\,\vec{i} + \text{sen}\,t\,\vec{j}$

② $N = \frac{dT/dt}{|dT/dt|}$

$\frac{dT}{dt} = -\text{sen}\,t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j} \quad \left|\frac{dT}{dt}\right| = \sqrt{(-\text{sen}\,t)^2 + (\cos t)^2} = 1$

$N = -\text{sen}\,t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j}$

③ K

$K = \frac{1}{|v|} \cdot \left|\frac{dT}{dt}\right|$

$K = \frac{1}{t} \cdot 1 = \frac{1}{t}$

Obtenga T, N y K para las curvas en el espacio

④ $r(t) = (3\,\text{sen}\,t)\vec{i} + (3\cos t)\vec{j} + 4t\,\vec{k}$

① $T = \frac{v}{|v|}$

$V(t) = 3\cos t\,\vec{i} - 3\,\text{sen}\,t\,\vec{j} + 4\vec{k}$

$|V| = \sqrt{(3(\cos t)^2 + (-3\,\text{sen}\,t)^2 + (4)^2} = \sqrt{25} = 5$

$T = \dfrac{3\cos t}{5}\vec{i} - \dfrac{3\,\text{sen}\,t}{5}\vec{j} + \dfrac{4}{5}\vec{k}$

② $N = \dfrac{dT/dt}{|dT/dt|}$

$\dfrac{dT}{dt} = -\dfrac{3\,\text{sen}\,t}{5}\vec{i} - \dfrac{3\cos t}{5}\vec{j}$ $\quad\left|\dfrac{dT}{dt}\right| = \dfrac{3}{5}$

$N = -\text{sen}\,t\,\vec{i} - \cos t\,\vec{j}$

③ $K = \dfrac{1}{|V|}\cdot\left|\dfrac{dT}{dt}\right|$

$K = \dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{3}{5} = \dfrac{3}{25}$

⑭ $r(t) = \cos^3 t\,\vec{i} + \text{sen}^3 t\,\vec{j}$ $\qquad 0 < t < \pi/2$

① $T = \dfrac{V}{|V|}$

$V = -3\cos^2 t\,\text{sen}\,t\,\vec{i} + 3\,\text{sen}^2 t\cos t\,\vec{j}$

$|V| = \sqrt{(-3\cos^2 t\,\text{sen}\,t)^2 + (3\,\text{sen}^2 t\cos t)^2} = 3\,\text{sen}\,t\cos t$

$T = \dfrac{V}{|V|} = \dfrac{-3\cos^2 t\,\text{sen}\,t}{3\,\text{sen}\,t\cos t}\vec{i} + \dfrac{3\,\text{sen}^2 t\cos t}{3\,\text{sen}\,t\cos t} = -\cos t\,\vec{i} + \text{sen}\,t\,\vec{j}$

② $N = \dfrac{dT/dt}{|dT/dt|}$

$\dfrac{dT}{dt} = \text{sen}\,t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j}$ $\quad\left|\dfrac{dT}{dt}\right| = \sqrt{(\text{sen}\,t)^2 + (\cos t)^2} = 1$

$N = \text{sen}\,t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j}$

③ $K = \dfrac{1}{|V|}\cdot\left|\dfrac{dT}{dt}\right|$

$K = \dfrac{1}{3\,\text{sen}\,t\cos t}$

(19) Maximización de la curva de una hélice. En el ejemplo 5 encontramos que la curvatura de la hélice $r(t) = (a\cos t)\vec{i} + (a\,\text{sen}\, t)\vec{j} + bk$ $(a, b \geq 0)$ es $\kappa = a/(a^2 + b^2)$. ¿Cuál es el máximo valor que κ puede tener para un valor dado de b?

Queremos maximizar κ, para ello usamos el criterio de la primera derivada para determinar puntos críticos

$$\frac{d\kappa}{da} = \frac{(1)(a^2+b^2) - (a)(2a)}{(a^2+b^2)^2} = \frac{a^2+b^2-2a^2}{(a^2+b^2)^2} = \frac{b^2-a^2}{(a^2+b^2)^2}$$

$$\frac{b^2-a^2}{(a^2+b^2)^2} = 0 \qquad b^2 - a^2 = 0 \qquad a^2 = b^2 \qquad a = b$$

Determinación del máximo: para confirmar que $a = b$ es un máximo, analizamos el signo de $\kappa'(a)$ alrededor de $a = b$

▷ $a = \frac{b}{2}$ $\quad \left.\frac{b^2 - \left(\frac{b^2}{4}\right)}{\left(b^2 + \left(\frac{b^2}{4}\right)\right)^2}\right\}$ El denominador siempre > 0; como $b^2 > \frac{b^2}{4}$ numerador igual > 0 ∴ Creciente

▷ $a = 2b$ $\quad \left.\frac{b^2 - 2b^2}{(b^2 + 2b^2)^2}\right\}$ Denominador siempre > 0, como $2b^2 > b^2$ el numerador es negativo. ∴ Decreciente

$a = b$ es un máximo ✓

Encontremos el valor máximo para κ

$$\kappa_{máx} = \left.\frac{a}{a^2+b^2}\right|_{a=b} \qquad \kappa_{máx} = \frac{b}{b^2+b^2} = \frac{b}{2b^2} = \frac{1}{2b}$$

La curvatura máxima para un valor fijo de b es:

$\kappa_{máx} = \frac{1}{2b}$ esto se logra cuando el radio de la hélice, a, es igual al parámetro de avance.

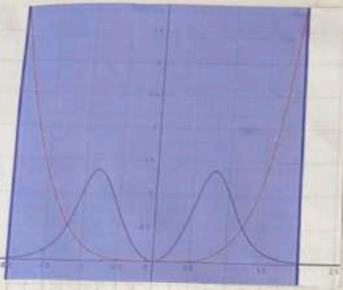
La fórmula $K(x) = \frac{|f''(x)|}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}}$, obtenida en el ejercicio 5 expresa la curvatura $\kappa(x)$ de una curva plana dos veces diferenciable $y = f(x)$ como función de x. Obtenga la función de curvatura de cada una de las curvas. Luego grafique $f(x)$ junto con $\kappa(x)$ sobre el intervalo.

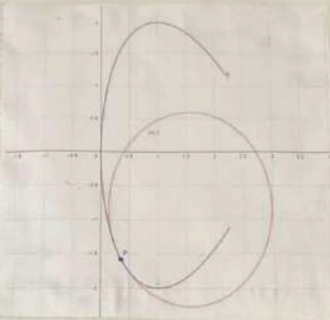
(24) $y = x^4/4 \qquad -2 \leq x \leq 2$

$y' = x^3 \qquad y'' = 3x^2$

$$K(x) = \frac{3x^2}{[1 + (x^3)^2]^{3/2}}$$

La función $y = x^4/4$ se dobla más en los puntos intermedios $(x \approx \pm 0{,}8)$ que en su punto más plano o en sus puntos verticales $(x \approx \pm 2)$.





(29) Grafique implícitamente la ecuación $(x-a)^2+(y-b)^2 = 1/K^2$ del círculo osculador. Luego trace juntos la curva y el círculo osculador. Podría ser necesario experimentar con el tamaño de la ventana de la gráfica, pero asegúrese de que sea cuadrada.

$r(t) = t^2\vec{i} + (t^3-3t)\vec{j}$ $\quad -4 \leq t \leq 4, \quad t_0 = 3/5$

① $v(t) = 2t\vec{i} + 3t^2-3\vec{j}$ $\quad |v| = \sqrt{(2t)^2+(3t^2-3)^2} = \sqrt{9t^4-14t^2+9}$

$a(t) = 2\vec{i} + 6t\vec{j}$ $\quad |a| = \sqrt{(2)^2+(6t)^2} = \sqrt{4+36t^2}$

② Curvatura $\quad K = \dfrac{|v \times a|}{|v|^3}$

$v \times a = (2t)(6t) - (3t^2-3)(2) = 12t^2 - 6t^2 + 6 = 6t^2+6 = 6(t^2+1)$

$K = \dfrac{6(t^2+1)}{(9t^4-14t^2+9)^{3/2}}$ evaluar en $t_0 = 3/5$

$K = \dfrac{8,16}{(2,264)^3} = 0,7030$

• Radio $= \dfrac{1}{K} = 1,4224$ $\quad$ • Centro $r(t_0) + RN(t_0)$

$C = 1,566\vec{i} - 0,831\vec{j}$

T se obtiene evaluando $t=0$ y N girando 90° en sentido antih. a T porque K es +.

$N(t_0) = -T_y\vec{i} + T_x\vec{j}$

$(x-1,566)^2 + (y+0,831)^2 = 2,023$

(34) $Y = x(1-x)^{2/5}$, $-1 \leq x \leq 2$, $x_0 = 1/2$

① $K = \dfrac{|f''(x)|}{[1+f'(x)^2]^{3/2}}$

i) $f'(x) = (1-x)^{2/5} + \dfrac{(x)\,2\,(1-x)^{-\frac{3}{5}}(-1)}{5} = (1-x)^{\frac{2}{5}} - \dfrac{2x}{5(1-x)^{\frac{3}{5}}}$

$= \dfrac{5(1-x)-2x}{5(1-x)^{3/5}} = \dfrac{5-7x}{5(1-x)^{3/5}}$

$\frac{2}{5} - \frac{5}{5} = \frac{-3}{5}$

ii) $f''(x) = \dfrac{(-7)(5(1-x)^{3/5}) - (5-7x)[3(1-x)^{-2/5}(-1)]}{[5(1-x)^{3/5}]^2}$

$f''(x) = \dfrac{-35(1-x)^{3/5} - (5-7x)(-3(1-x)^{-2/5})}{[5(1-x)^{3/5}]^2}$

$f''(x) = \dfrac{-35(1-x) - (5-7x)(-3)}{[5(1-x)^{3/5}]^2(1-x)^{2/5}} = \dfrac{-35+35x+15-21x}{[5(1-x)^{3/5}]^2(1-x)^{2/5}}$

$f''(x) = \dfrac{14x-20}{25(1-x)^{8/5}}$

$K = \dfrac{\left|\dfrac{14x-20}{25(1-x)^{8/5}}\right|}{\left[1+\left(\dfrac{5-7x}{5(1-x)^{3/5}}\right)^2\right]^{3/2}}$

$f'(1/2) = 0{,}4547$

$f''(1/2) = -1{,}5764$

$K(1/2) = \dfrac{|-1{,}5764|}{1{,}3256} = 1{,}1891$

② $R = \dfrac{1}{K} = 0{,}8409$

③ $T(0{,}5) = r(0{,}5) + NR(0{,}5)$

i) $x = \frac{1}{2}$, $y = 0{,}3789$ $\Rightarrow$ $r(1/2) = \frac{1}{2}\vec{i} + 0{,}3789\vec{j}$

ii) $r'(1/2) = \vec{i} + 0{,}4547\vec{j}$ $|r'(1/2)| = 1{,}0985$

$T(0{,}5) = \dfrac{1}{1{,}0985}\vec{i} + \dfrac{0{,}4547}{1{,}0985}\vec{j}$

$T(0{,}5) = 0{,}9103\vec{i} + 0{,}4139\vec{j}$

Para sacar N se obtiene rotando T y ajustando el signo por concavidad
Dado que $f''(1/2) < 0$ (cóncavo hacia abajo), N apunta hacia abajo

$N(0{,}5) = 0{,}4139\vec{i} - 0{,}9103\vec{j}$

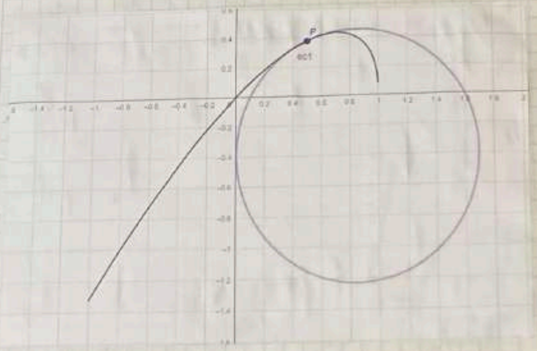
④ Centro $C = r(1/2) + N R(1/2)$

$C = [0{,}5\vec{i} + 0{,}3789\vec{j}] + [0{,}3409](0{,}4139\vec{i} - 0{,}9103\vec{j})$

$C = 0{,}8480\vec{i} - 0{,}3865\vec{j}$

⑤ Ecuación del círculo osculador

$(x - 0{,}8480)^2 + (y + 0{,}3865)^2 = 0{,}7071$



- Resolver los ejercicios del libro cálculo de varias variables, cap 13, ejercicios de la sección 13.5

Escriba a en la forma $a = a_T T + a_N N$ para el valor de t sin calcular ni T ni N.

ⓐ $r(t) = (t\cos t)\vec{i} + (t\,\text{sen}\,t)\vec{j} + t^2\vec{k}$, $t = 0$

① $a_T = \frac{d}{dt}|v|$

i) $r'(t) = [\cos t - t\,\text{sen}\,t]\vec{i} + (\text{sen}\,t + t\cos t)\vec{j} + 2t\vec{k}$

$r'(0) = 1\vec{i}$

ii) $|r'(0)| = \sqrt{(1)^2} = 1$

iii) $a_T = \frac{d}{dt}\,1 = 0$

② $a = a_T + a_N \Rightarrow a_N = a - a_T$

i) $r''(t) = [-\text{sen}\,t - \text{sen}\,t - t\cos t]\vec{i} + [\cos t + \cos t - t\,\text{sen}\,t]\vec{j} + 2\vec{k}$

$r''(t) = [-2\,\text{sen}\,t - t\cos t]\vec{i} + [2\cos t - t\,\text{sen}\,t]\vec{j} + 2\vec{k}$

$r''(0) = 2\vec{j} + 2\vec{k}$

$|r''(0)| = \sqrt{(2)^2 + (2)^2} = 2\sqrt{2}$

ii) $a_N^2 = 8 - 0$

$a_N = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

③ $a = 2\sqrt{2}\,N$

Obtenga B y τ para las curvas en el espacio

ⓐ $r(t) = 3\,\text{sen}\,t\,\vec{i} + 3\cos t\,\vec{j} + 4t\vec{k}$

$T = \frac{3\cos t}{5}\vec{i} - \frac{3\,\text{sen}\,t}{5}\vec{j} + \frac{4}{5}\vec{k}$ $\qquad N = -\text{sen}\,t\,\vec{i} - \cos t\,\vec{j}$

① $B = T \times N$

$$B = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{3\cos t}{5} & -\frac{3\,\text{sen}\,t}{5} & \frac{4}{5} \\ -\text{sen}\,t & -\cos t & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{4}{5}\cos t\right)\vec{i} - \left(\frac{4}{5}\,\text{sen}\,t\right)\vec{j} - \frac{3}{5}\cos^2 t - \frac{3\,\text{sen}^2 t}{5}\vec{k}$$

$B = \frac{4}{5}\cos t\,\vec{i} - \frac{4}{5}\,\text{sen}\,t\,\vec{j} - \frac{3}{5}\vec{k}$

② $\tau = -\frac{dB}{ds} \cdot N \Rightarrow \tau = \frac{-1}{|v|}\left(\frac{dB}{dt} \cdot N\right)$

$\tau = -\left[-\frac{4}{5}\operatorname{sen}t\,\vec{i} - \frac{4}{5}\cos t\,\vec{j}\right] \cdot -\operatorname{sen}t\,\vec{i} - \cos t\,\vec{j} \quad \left(\frac{1}{|v|}\right)$

$\tau = \frac{4}{5}\operatorname{sen}t\,\vec{i} \cdot (-\operatorname{sen}t\,\vec{i}) + \frac{4}{5}\cos t\,\vec{j} \cdot \cos t\,\vec{j} \quad \left(\frac{1}{|v|}\right)$

$\tau = -\frac{4}{5}\operatorname{sen}^2 t - \frac{4}{5}\cos^2 t \cdot \left(\frac{1}{5}\right)$

$\tau = -\frac{4}{5}(\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t)\,\frac{1}{5} = -\frac{4}{25}$

⑭ $r(t) = (\cos^3 t)\vec{i} + (\operatorname{sen}^3 t)\vec{j} \qquad 0 < t < \pi/2$

① $B = T \times N$

$$B = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\cos t & \operatorname{sen}t & 0 \\ \operatorname{sen}t & \cos t & 0 \end{vmatrix} = 0\vec{i} - 0\vec{j} + (-\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t)\vec{k}$$

$B = (-1)(\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t)\,\vec{k} = -\vec{k}$

$B = -\vec{k}$

② $\tau = \frac{-1}{|v|}\left(\frac{dB}{dt} \cdot N\right)$

$\tau = -\left(\frac{1}{3\operatorname{sen}t\cos t}\right)\left(0 \cdot \operatorname{sen}t\,\vec{i} + \cos\vec{j}\right)$

$\tau = 0$

⑲ ¿Puede decirse algo acerca de la rapidez de una partícula cuya aceleración siempre es ortogonal a su velocidad? Justifique su respuesta.

En este caso, podemos concluir que la rapidez de la partícula es cte, esto se debe a que la componente tangencial de la aceleración es la que se encarga de cambiar la rapidez. Si una partícula tiene $a \times v = 0$ significa que su aceleración solo consta de su componente normal, ya que, esta está siempre ortogonal a la a_T, la cual tiene la misma dirección que la velocidad. Entonces $a_N = a$ y $a \times v = 0$ entonces $|v| = \text{cte}$.

(24) Demuestre que κ y τ son ambos cero para la recta

$$r(t) = (x_0 + At)\vec{i} + (y_0 + Bt)\vec{j} + (z_0 + Ct)\vec{k}$$

$$r'(t) = t\vec{i} + t\vec{j} + t\vec{K}$$

$$|r'(t)| = \sqrt{3t^2} = t\sqrt{3}$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{K}$$

$\frac{dT}{dt} = 0$ Como $K = \left|\frac{dT}{dt}\right| \cdot \frac{1}{|v|}$ $\therefore K = 0$

para $\tau = -\frac{dB}{ds} \cdot N$ y $N = \frac{\overset{\to 0}{dT/dt}}{|dT/dt|}$ $\therefore \tau = 0$

(28) Redondee las respuestas a cuatro decimales. Use un SAC para determinar v y a, la rapidez, T, N, B, K, τ y las componentes tangencial y normal para las curvas dadas. para valores dados de t.

$$r(t) = t\cos t\,\vec{i} + t\,\text{sen}\,t\,\vec{j} + tK, \quad t = \sqrt{3} = 1{,}7321$$

① $r'(t) = v(t) = [\underset{-0{,}1608}{\cos t} - \underset{2{,}7046}{t\,\text{sen}\,t}]\vec{i} + [\underset{0{,}9870}{\text{sen}\,t} + \underset{-0{,}2787}{t\cos t}]\vec{j} + \vec{K}$

$$v(\sqrt{3}) = -1{,}8702\,\vec{i} + 0{,}7088\,\vec{j} + \vec{K} \qquad |v| = \sqrt{2+t^2}$$

$$|v(\sqrt{3})| = \sqrt{(-1{,}8702)^2 + (0{,}7088)^2 + (1)^2} = 2{,}2361$$

② $r''(t) = a(t) = [-\text{sen}\,t - \text{sen}\,t - t\cos t]\vec{i} + [\cos t + \cos t - t\,\text{sen}\,t]\vec{j}$

$$a(t) = [-2\,\text{sen}\,t - t\cos t]\vec{i} + [2\cos t - t\,\text{sen}\,t]\vec{j}$$

$$a(\sqrt{3}) = -1{,}6959\,\vec{i} - 2{,}0308\,\vec{j} + 0$$

$$|a\sqrt{3}| = \sqrt{(-1{,}6959)^2 + (-2{,}0308)^2} = 2{,}6458$$

③ $T = \frac{v}{|v|} = -0{,}8364\,\vec{i} + 0{,}3170\,\vec{j} + 0{,}4472\,\vec{K}$

④ $a_T = \frac{d}{dt}\sqrt{2+t^2} = \frac{2t}{2\sqrt{2+t^2}} = \frac{t}{\sqrt{2+t^2}} = \frac{1{,}7321}{\sqrt{2+3}} = 0{,}7746$

⑤ $\vec{a} = a_T^2 + a_N^2 \Rightarrow a_N^2 = a^2 - a_T^2 \qquad a_N = 2{,}5298$

multiplicar $a_T \cdot T$ luego eso restar a $\vec{a}$ y dividir para a_N

⑥ $N = -0{,}4143\,\vec{i} - 0{,}8998\,\vec{j} - 0{,}1369\,\vec{K}$

⑦
$$K = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{K} \\ -1{,}8702 & 0{,}7088 & 1 \\ -1{,}6959 & -2{,}0308 & 0 \end{vmatrix} = (2{,}0308)\vec{i} - (1{,}6959)\vec{j} + 5\vec{K} = \underset{\text{magnitud}}{5{,}6569}$$

$$K = \frac{|v \times a|}{|v|^3} = \frac{5{,}6569}{(2{,}2361)^3} = 0{,}5060$$

⑧ $B = T \times N = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -0,7364 & 0,3170 & 0,4472 \\ -0,4443 & -0,8990 & -0,1369 \end{vmatrix}$

$B = 0,3589\vec{i} + 0,1998\vec{j} + 0,8839\vec{k}$

⑨ $\tau = \dfrac{(v \times a) \cdot r'''(t)}{|v \times a|^2} = \dfrac{9,0000}{(5,6569)^2} = 0,2812$

$r''(t) = (-2\cos t - \cos t + t\,\mathrm{sen}\,t)\vec{i} + [-2\,\mathrm{sen}\,t - \mathrm{sen}\,t - t\cos t]\vec{j}$

$r'''(t) = (-3\cos t + t\,\mathrm{sen}\,t)\vec{i} + [-3\,\mathrm{sen}\,t - t\cos t]\vec{j}$

$r'''(\sqrt{3}) = 2,1914\vec{i} - 2,6828\vec{j}$

- Resolver los ejercicios del 1 al 10 del libro cálculo de varios variables, cap 13, ejercicios de la sección 13.6.

En los ejercicios del 1 al 5, obtenga los vectores de velocidad y aceleración en términos de u_r y u_θ.

① $r = a(1 - \cos\theta)$ y $\dfrac{d\theta}{dt} = 3 = \dot{\theta}$

$v = \dot{r}\,u_r + r\dot{\theta}\,u_\theta$

- $\dot{r} = \dfrac{dr}{d\theta} \cdot \dfrac{d\theta}{dt} = a\,\mathrm{sen}\,\theta \cdot 3 = 3a\,\mathrm{sen}\,\theta$

$v = 3a\,\mathrm{sen}\,\theta\,u_r + 3a(1 - \cos\theta)\,u_\theta$

$a = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,u_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,u_\theta$

- $\ddot{r} = \dfrac{d^2r}{d\theta^2} \cdot \dfrac{d\theta}{dt} = 3a\cos\theta \cdot 3 = 9a\cos\theta$

- $\ddot{\theta} = 0$

$a = (9a\cos\theta - a(1 - \cos\theta)(3)^2)\,u_r + (0 + 2(3a\,\mathrm{sen}\,\theta)(3))\,u_\theta$

$a = (-9a + 18a\cos\theta)\,u_r + (18a\,\mathrm{sen}\,\theta)\,u_\theta$

② $r = a\,sen\,2\theta$ y $\frac{d\theta}{dt} = 2t$

$\dot{r} = 2a\cos 2\theta$ $\dot{\theta} = 2t$ $\ddot{r} = -4a\,sen\,2\theta$ $\ddot{\theta} = 2$

$\boxed{v = \dot{r}\,u_r + r\dot{\theta}\,u_\theta}$

$\dot{r} = 2a\cos 2\theta \cdot 2t = (4t)(a\cos 2\theta)$

$\boxed{v = (4t)(a\cos 2\theta)\,u_r + (2t)(a\,sen\,2\theta)\,u_\theta}$

$\boxed{a = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,u_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,u_\theta}$

para derivar $g(t) = \cos 2\theta$ términos de t usamos regla de la cadena $\frac{d}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt}$

$\dot{r} = \underbrace{(4at)}_{f(x)}\underbrace{(\cos 2\theta)}_{g(x)} \overset{\text{regla del producto}}{\Rightarrow} \ddot{r} = 4a(\cos 2\theta) - 8at(sen\,2\theta)(2t)$

$a = [4a(\cos 2\theta) - 16at^2(sen\,2\theta) - 4at^2(sen\,2\theta)]\,u_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,u_\theta$

$a = [4a(\cos 2\theta - 5t^2(sen\,2\theta)]\,u_r + [2a\,sen\,2\theta + 16t^2(a\cos 2\theta)]\,u_\theta$

③ $r = e^{a\theta}$ y $\frac{d\theta}{dt} = 2$ $\ddot{\theta} = 0$

① $\dot{r} = \frac{d}{d\theta}(e^{a\theta}) \cdot \frac{d\theta}{dt} = 2ae^{a\theta}$

② $\ddot{r} = \frac{d}{d\theta}(2ae^{a\theta}) \cdot \frac{d\theta}{dt} = 4a^2e^{a\theta}$

③ $V = \dot{r}\,u_r + r\dot{\theta}\,u_\theta$

$V = 2ae^{a\theta}\,u_r + 2e^{a\theta}\,u_\theta$

④ $a = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,u_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,u_\theta$

$a = [4a^2e^{a\theta} - 4e^{a\theta}]\,u_r + (8ae^{a\theta})\,u_\theta$

④ $r = a(1 + sen\,t)$ y $\theta = 1 - e^{-t}$

como r está en términos de t derivamos normal

① $\dot{r} = a\cos t$

② $\frac{d\theta}{dt} = e^{-t}$ $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -e^{-t}$

③ $V = \dot{r}\,u_r + r\dot{\theta}\,u_\theta$

$V = a\cos t\,u_r + ae^{-t}(1 + sen\,t)\,u_\theta$

④ $\ddot{r} = -a\,sen\,t$

⑤ $a = (-a\,sen\,t - [+e^{-2t}a(1 + sen\,t)])\,u_r + ([-e^{-t} - e^{-t}a(sen\,t)] + 2e^{-t}a(\cos t)$

⑤ $r = 2\cos 4t$ y $\theta = 2t$

① $\dot{r} = -8\operatorname{sen} 4t$ $\qquad \dot{\theta} = 2$ $\qquad \ddot{\theta} = 0$

② $\ddot{r} = -32\cos 4t$

③ $V = \dot{r}\, u_r + r\dot{\theta}\, u_\theta$

$V = -8\operatorname{sen} 4t\ u_r + 4\cos 4t\ u_\theta$

④ $a = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\, u_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\, u_\theta$

$a = (-32\cos 4t - 8\cos 4t)\, u_r + (8\cos 4t)\, u_\theta$

$a = -40\cos 4t\ u_r + 8\cos 4t\ u_\theta$

⑥ Tipo de órbita ¿Para cuáles valores de v_0 en la ecuación (5) la órbita de la ecuación (6) es una circunferencia? ¿Una elipse? ¿Una parábola? ¿Una hipérbola?

- Circunferencia $e = 0$ $\qquad 0 = \frac{r_0 v_0^2}{GM} - 1$ $\qquad v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}$
- elipse $0 < e < 1$ $\qquad \sqrt{\frac{GM}{r_0}} < v_0 < \sqrt{\frac{2GM}{r_0}}$
- Parábola $e = 1$ $\qquad v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}}$
- Hipérbola $e > 1$ $\qquad v_0 > \sqrt{\frac{2GM}{r_0}}$

⑦ Órbitas circulares demuestre que un planeta con órbita circular se mueve a velocidad constante (Sugerencia: Considere que esto es una consecuencia de una de las leyes de Kepler).

$r = \frac{(1+e)r_0}{1+e\cos\theta}$ ① con $e = 0$ para que la trayectoria sea un círculo $r = r_0$ el radio es constante

② $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$ (un planeta tiene áreas iguales en tiempos iguales.

Como ① y ② son constantes, entonces $\dot{\theta}$ es constante

$V = \dot{r}\, u_r + \dot{\theta} r\, u_\theta$

$V = r\dot{\theta}\, u_\theta$ $\qquad |V| = \sqrt{(r\dot{\theta})^2} = r\dot{\theta} \rightarrow$ rapidez constante

⑧ Suponga que r es el vector posición de una partícula que se mueve a lo largo de una curva plana y dA/dt es la razón a la cual el vector barre el área. Sin usar coordenadas y suponiendo que existen las derivadas necesarias, dé un argumento geométrico con base en incrementos y límites para demostrar la validez de la ecuación.

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}|r \times \dot{r}|$$

$$\Delta A \approx \frac{1}{2}|r \times \Delta r| \Rightarrow \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left|r \times \frac{\Delta r}{\Delta t}\right|$$

$\Delta t \to 0$. Como $\frac{\Delta r}{\Delta t} \to \dot{r}$, se obtiene

$$\frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2}|r \times \dot{r}|$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}(r \times \dot{r}) \cdot k$$

⑨ Tercera ley de Kepler complete la deducción de la tercera ley de Kepler.

$$T = \frac{2\pi a^2}{r_0 v_0}\sqrt{1-e^2} \quad (9)$$

$$e = \frac{r_0 v_0^2}{GM} - 1 \quad (5)$$

$$a = \frac{r_0}{1-e} \quad (10)$$

$$e+1 = \frac{r_0 v_0^2}{GM} \quad (5)$$

$$(1-e) = \frac{r_0}{a} \quad (10)$$

Ecuación (9)

$$\frac{T^2}{a^4} = \frac{4\pi^2}{r_0^2 v_0^2}(1-e^2)$$

$$\frac{T^2}{a^4} = \frac{4\pi^2}{r_0^2 v_0^2}(1-e)(1+e)$$

Al elevar al cuadrado ambos lados de la ec (9) y sustituir (5) y (10) obtenemos la tercera ley de Kepler

$$\frac{T^2}{a^4} = \frac{4\pi^2}{r_0^2 v_0^2}\left(\frac{r_0}{a}\right)\left(\frac{r_0 v_0^2}{GM}\right) \Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

El tiempo T que tarda un planeta en dar vuelta alrededor del sol es el periodo orbital del planeta. La tercera ley de Kepler está demostrada.

10. Obtenga la longitud del eje mayor de la órbita de la Tierra con base en la tercera ley de Kepler y en el hecho de que el periodo de la órbita de la Tierra es de 365 256 días.

$$T = 365{,}256 \text{ días} \left| \frac{24 \text{ h}}{1 \text{ día}} \right| \frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ h}} \approx 3{,}1558 \times 10^{10} \text{ s}$$

$G = 6.674 \times 10^{-11} \, [Nm^2 / Kg^2]$ constante universal

$M = 1{,}99 \times 10^{30} \, Kg$ (Masa del sol)

$$a^3 = \frac{T^2 G M}{4\pi^2}$$

$$a = \sqrt{\frac{T^2 GM}{4\pi^2}} = 1{,}4963 \times 10^{10}$$