DEBER 4-INDIVIDUAL-

NOMBRE: Jostin Sánchez

Movimiento en el plano

En los ejercicios 1 a 4, $\mathbf{r}(t)$ es la posición de una partícula en el plano xy en el instante t. Obtenga una ecuación en x y en y cuya gráfica sea la trayectoria de la partícula. Luego, determine los vectores velocidad y aceleración de la partícula en el valor dado de t.

1. $\mathbf{r}(t) = (t + 1)\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j}, \quad t = 1$

En los ejercicios 5 a 8 se proporcionan los vectores posición de partículas que se mueven a lo largo de varias curvas en el plano xy. En cada caso, determine los vectores velocidad y aceleración de la partícula en los tiempos indicados y grafíquelos como vectores en la curva.

6. Movimiento en la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$

$$\mathbf{r}(t) = \left(4\cos\frac{t}{2}\right)\mathbf{i} + \left(4\,\mathrm{sen}\,\frac{t}{2}\right)\mathbf{j}; \quad t = \pi \text{ y } 3\pi/2$$

En los ejercicios 15 a 18, $\mathbf{r}(t)$ es la posición de una partícula en el espacio en el instante t. Obtenga el ángulo entre los vectores de velocidad y de aceleración en el instante $t = 0$.

15. $\mathbf{r}(t) = (3t + 1)\mathbf{i} + \sqrt{3}t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$

25. Movimiento a lo largo de una parábola Una partícula se mueve a lo largo de la parte superior de la parábola $y^2 = 2x$ de izquierda a derecha con rapidez constante de 5 unidades por segundo. Obtenga la velocidad de la partícula cuando pasa por el punto $(2, 2)$.

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

Use algún sistema algebraico computacional (SAC) para ejecutar los siguientes pasos en los ejercicios 35 a 38.

a. Grafique la curva espacial trazada por el vector de posición $\mathbf{r}$.

b. Obtenga los componentes del vector velocidad $d\mathbf{r}/dt$.

c. Calcule $d\mathbf{r}/dt$ en el punto t_0 dado y determine la ecuación para la recta tangente a la curva en $\mathbf{r}(t_0)$.

d. Grafique la recta tangente junto con la curva en el intervalo dado.

35. $\mathbf{r}(t) = (\mathrm{sen}\,t - t\cos t)\mathbf{i} + (\cos t + t\,\mathrm{sen}\,t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$,
$0 \leq t \leq 6\pi, \quad t_0 = 3\pi/2$

5. $\int_1^4 \left[\frac{1}{t}\mathbf{i} + \frac{1}{5-t}\mathbf{j} + \frac{1}{2t}\mathbf{k}\right] dt$

6. $\int_0^1 \left[\frac{2}{\sqrt{1-t^2}}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{1+t^2}\mathbf{k}\right] dt$

Problemas con valores iniciales

Resuelva los problemas con valores iniciales que se indican en los ejercicios 11 a 16 para **r** como una función vectorial de t.

15. Ecuación diferencial: $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -32\mathbf{k}$

Condición inicial: $\mathbf{r}(0) = 100\mathbf{k}$ y

$$\left.\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|_{t=0} = 8\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$$

Movimiento de proyectiles

Los proyectiles de los siguientes ejercicios deben considerarse ideales, a menos que se indique lo contrario. Se supone que los ángulos de lanzamiento se miden con respecto a y a partir de la horizontal. Se supone que todos los proyectiles se lanzan desde el origen y sobre una superficie horizontal a menos que se especifique de otra forma.

25. Ángulos de disparo de igual alcance ¿Cuáles son los dos ángulos de elevación que harán que un proyectil alcance un objetivo a 16 km de distancia al mismo nivel del arma si la velocidad inicial del proyectil es de 400 m/seg?

35. Tren miniatura La siguiente fotografía multiflash muestra un tren miniatura que se desplaza con una rapidez constante en una vía horizontal recta. Conforme la máquina se desplaza, una canica se lanza hacia el aire mediante un resorte en la chimenea de la locomotora. La canica continúa moviéndose con la misma rapidez hacia delante que la máquina, y regresa a ésta un segundo después del lanzamiento. Mida el ángulo que forma la trayectoria de la canica con la horizontal y use la información para determinar la altura máxima de la canica y la rapidez de la locomotora.

Obtención de vectores tangentes y longitudes

En los ejercicios 1 a 8, obtenga el vector tangente unitario a la curva. También, calcule la longitud de la parte indicada de la curva.

4. $\mathbf{r}(t) = (2 + t)\mathbf{i} - (t + 1)\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 3$

5. $\mathbf{r}(t) = (\cos^3 t)\mathbf{j} + (\operatorname{sen}^3 t)\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq \pi/2$

6. $\mathbf{r}(t) = 6t^3\mathbf{i} - 2t^3\mathbf{j} - 3t^3\mathbf{k}, \quad 1 \leq t \leq 2$

17. Elipse

a. Demuestre que la curva $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t)\mathbf{j} + (1 - \cos t)\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ es una elipse, mostrando que es la intersección de un cilindro circular recto y un plano. Obtenga las ecuaciones del cilindro y del plano.

b. Grafique la elipse en el cilindro. Agregue a su gráfica los vectores tangentes unitarios en $t = 0, \pi/2, \pi$, y $3\pi/2$.

c. Demuestre que el vector de aceleración siempre es paralelo al plano (ortogonal a un vector normal al plano). Por lo tanto, si dibuja la aceleración como un vector unido a la elipse, estará en el plano de la elipse. Agregue a su dibujo los vectores de aceleración para $t = 0, \pi/2, \pi$, y $3\pi/2$.

d. Escriba una integral para la longitud de la elipse. No trate de calcular la integral, pues no es integrable en términos elementales.

T **e. Integrador numérico** Calcule la longitud de la elipse con precisión de dos cifras decimales.

18. La longitud es independiente de la parametrización Para ilustrar el hecho de que la longitud de una curva suave en el espacio no depende de la parametrización que use para calcularla, calcule la longitud de una vuelta de la hélice del ejemplo 1 con las siguientes parametrizaciones.

a. $\mathbf{r}(t) = (\cos 4t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} 4t)\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq \pi/2$

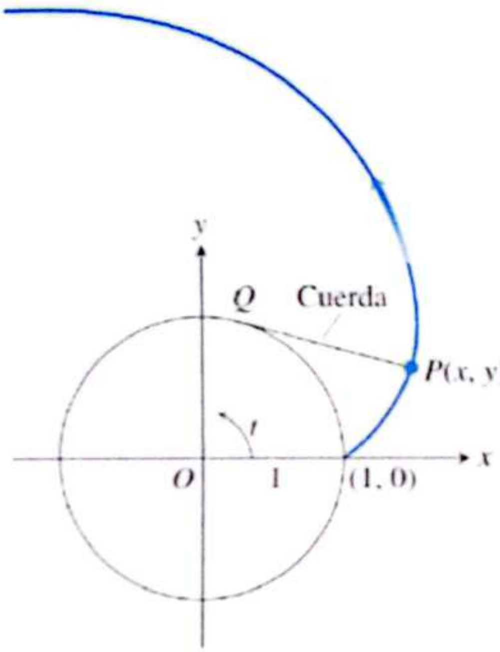
b. $\mathbf{r}(t) = [\cos(t/2)]\mathbf{i} + [\operatorname{sen}(t/2)]\mathbf{j} + (t/2)\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 4\pi$

c. $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} - (\operatorname{sen} t)\mathbf{j} - t\mathbf{k}, \quad -2\pi \leq t \leq 0$

19. La involuta de una circunferencia Si una cuerda enrollada alrededor de una circunferencia fija se desenrolla manteniéndola tensa y en el plano de la circunferencia, su extremo P traza una *involuta* de la circunferencia. En la figura, se muestra la circunferencia en cuestión, la cual está dada por $x^2 + y^2 = 1$, y el punto que traza la curva comienza en $(1, 0)$. La parte no desenrollada de la cuerda es tangente a la circunferencia en Q, y t es la medida en radianes del ángulo del eje x positivo al segmento OQ. Deduzca las ecuaciones paramétricas

$$x = \cos t + t \operatorname{sen} t, \quad y = \operatorname{sen} t - t \cos t, \quad t > 0$$

del punto $P(x, y)$ de la involuta.



1. ① $x = t+1$
② $y = t^2 - 1$ } Ecuaciones paramétricas ③ $t = x-1$

DATOS

$r_{(t)} = (t+1)i + (t^2-1)j \; , \; t=1$

CALCULAR

Ecuación de la trayectoria

Vector velocid. $t=1$

Vector acelerac. $t=1$

Ecuación ③ en ②

$$y = (x-1)^2 - 1$$

$$y = x^2 - 2x \quad \text{La trayectoria de la partícula}$$

$$\boxed{v_{(t)} = i + (2t)j} = \frac{dr}{dt} \; ; \; t=1 = \boxed{v_{(1)} = i + 2j}$$

$$\boxed{a_{(t)} = 2j} = \frac{d^2r}{d^2t} = \frac{dv}{dt} \; ; \; t=1 \; \boxed{a_{(1)} = 2j \text{ constan.}}$$

6.

DATOS

$r_{(t)} = \left(4\cos\frac{t}{2}\right)i + \left(4\,\text{sen}\,\frac{t}{2}\right)j \; ; \; t = \pi \text{ y } \frac{3\pi}{2}$

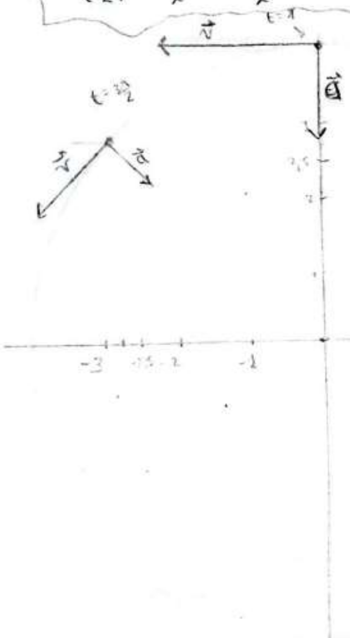
Curva $= x^2 + y^2 = 16$

$$v(t) = -2\,\text{sen}\left(\frac{t}{2}\right)i + 2\cos\left(\frac{t}{2}\right)j$$

$$a(t) = -\cos\left(\frac{t}{2}\right)i - \text{sen}\left(\frac{t}{2}\right)j$$

$r(\pi) = 4\vec{j}$ • Punto $(0,4)$
$v(\pi) = -2\vec{i}$ • Punto $(-2,0)$
$a(\pi) = -\vec{j}$ • Punto $(0,-1)$

$r\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2\sqrt{2}\,i + 2\sqrt{2}\,j$ • Punto $(-2{,}83,\ 2{,}83)$
$v\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\sqrt{2}\,i - \sqrt{2}\,j$ • Punto $(-\sqrt{2}\,;-\sqrt{2})$
$a\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}i - \frac{\sqrt{2}}{2}j$ • Punto $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$



$t = \pi$

15.

Datos

$r_{(t)} = (3t+1)i + \sqrt{3}\,t\,j + t^2 k \; ; \; t=0$

∡ Entre $v_{(t)}$ y $a_{(t)}$

$V(t) = 3\vec{i} + \sqrt{3}\,\vec{j} + 2t\,\vec{k}$; $t=0$ $\quad v_{(0)} = 3\vec{i} + \sqrt{3}\,j \quad |V| = 2\sqrt{3}$

$a_{(t)} = 2\vec{k}$; $t=0 \quad a_{(0)} = 2k \quad |a| = 2$

$\vec{\mu}_v = \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2}j \qquad \vec{\mu}_a = \vec{k}$

$\vec{\mu}_v \odot \vec{\mu}_a = \cos\theta \quad \rightarrow \theta = \arccos(0) = 90$

$\boxed{\theta = 90°}$

25.

Datos

Parábola $y^2 = 2x$

Rapidez $|V| = 5$ m/s

Izq → d

Punto $P(2,2)$

$\mu_v = \frac{v}{|v|} \qquad \mu_v = \frac{v}{5} \qquad v = 5\cdot\mu_v$

Debemos encontrar el vector μ_v que es siempre tangente a la trayectoria entonces $\frac{dy}{dx}$ en el punto dado sera nuestro μ_v

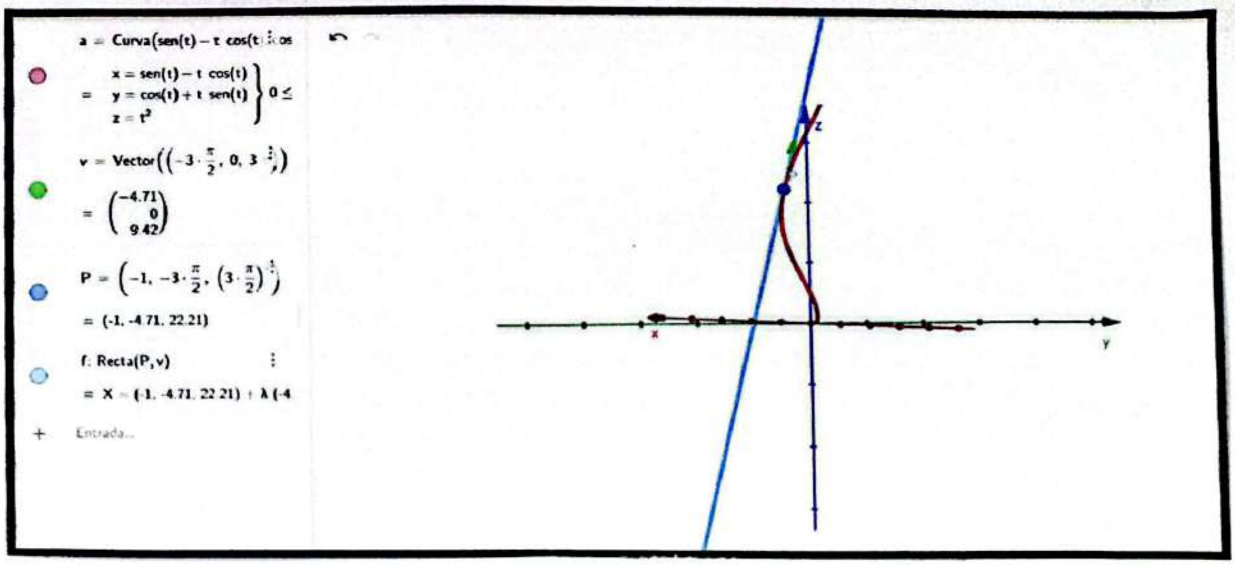
$\frac{d}{dx}[y^2] = \frac{d[2x]}{dx} \qquad \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}} \qquad P(2,2) \qquad \boxed{V = 2\sqrt{5}\,\vec{i} + \sqrt{5}\,\vec{j}}$

$2y\frac{dy}{dx} = 2$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \rightarrow T = 2i + j$

$|T| = \sqrt{5}$

$\boxed{\mu_v = \frac{2\sqrt{5}}{5}i + \frac{\sqrt{5}}{5}j}$



5. $\int_1^4 \left[\frac{1}{t} i + \frac{1}{5-t} j + \frac{1}{2t} \vec{K}\right] dt$

$\left[\ln|t| i + \ln|5-t| j + \ln|t|^{1/2}\right]\Big|_1^4$

$(\ln|4| - \ln(1))\vec{i} + (\ln(5-4) - \ln(5-1)) j + (\ln\sqrt{4} - \ln\sqrt{1})\vec{K}$

$\boxed{\ln 4 \vec{i} - \ln|4| \vec{j} + \ln 2 \vec{K}}$

6. $\int_0^1 \left[\frac{2}{\sqrt{1-t^2}} i + \frac{\sqrt{3}}{1+t^2} K\right] dt$

$\left[2 \operatorname{arcosen}(t)\vec{i} + \sqrt{3} \operatorname{arctan}(t)\vec{K}\right]\Big|_0^1$

$\boxed{\pi\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{4}\vec{K}}$

15. $\frac{d^2r}{dt^2} = -32K$ $\quad v(t) = 8\vec{i} + 8\vec{j} + 32t K$

$\int \frac{d^2r}{dt^2} dt \quad \int_0^t [-32K] dt \quad \int \frac{dr}{dt} dt = \int_0^1 (8\vec{i} + 8\vec{j} + 32tK) dt$

$\frac{dr}{dt} = [-32t\vec{K}] \quad r(t) = 8t\vec{i} + 8t\vec{j} + 16t^2 K\, dt$

$\frac{dr}{dt} = 8\vec{i} + 8\vec{j}$

$100K$

$K = \hat{0}$

25.

$R = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g} \rightarrow \sin(2\alpha) = \frac{Rg}{v_0^2}$

$2\alpha = \operatorname{arcosen}\left(\frac{Rg}{v_0^2}\right)$

$2\alpha = \operatorname{arosen}\left(\frac{(16000)(9,8)}{(400)^2}\right) = 78,52°$

$\alpha_1 = \frac{78,52°}{2} = 39,26°$

$\theta = 90 - 39,26 = 50,74°$

$\alpha_1 = 39,26°$
$\theta = 50,74°$
Ángulos de elevación

Datos
Alcance = 1600m = R
$g = 9,8 \frac{m}{s^2}$
$v = 400 \frac{m}{s}$

35. $t = 1$ [s]

$v_{fy} = v_{0y} - gt$ $\quad \boxed{-v_{fy} = v_{0y}}$ → Vuelve al mismo pun

$g = 9,8$

$-2v_{fy} = -gt$

$v_{fy} = \frac{(-9,8)(1)}{-2} = 4,9 \frac{m}{s}$; $\boxed{v_{0y} = 4,9 \frac{m}{s}}$

$v_{f(max\,y)}^2 = v_0^2 + 2gh$; h = altura máxima

$h = \frac{(-(4,9))^2}{2(-9,8)} = \frac{49}{40}$ [m] ≈ 1,225 [m]

$\boxed{h = 1,225 \text{ [m]}}$

$\boxed{x = 2h}$ → del gráfico

$x = 2(1,225) = \frac{49}{20} = 2,45$ [m]

$x = v_x(1)$

$\boxed{v_x = 2,45 \frac{m}{s}}$ Velocidad de la locomotora

$\tan\theta = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}$

$\boxed{\theta = \operatorname{arcotan}\left(\frac{4,9}{2,45}\right) = 63,45°}$

4. $r(t) = (2+t)\vec{i} - (t+1)\vec{j} + t\vec{k}$, $0 \leq t \leq 3$

$\frac{dr(t)}{dt} = \boxed{\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}} \rightarrow \boxed{0 \leq t \leq 3}$ $\left|\frac{dr(t)}{dt}\right| = \sqrt{3}$ $\boxed{\vec{u}_t = \frac{\sqrt{3}}{3}\vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{3}\vec{j} + \frac{\sqrt{3}}{3}\vec{k}}$

Unitario tangencial a la trayectoria

$\int_0^3 \sqrt{3}\, dt = \left[\sqrt{3}t\right]_0^3 = \boxed{3\sqrt{3}}$ Longitud de la curva

5. $r(t) = (\cos^3 t)\vec{j} + (\operatorname{sen}^3 t)\vec{k}$; $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

$L = \int_0^{\pi/2} 3\cos t \operatorname{sen} t\, dt = \left[\frac{3\operatorname{sen}^2 t}{2}\right]\Big|_0^{\pi/2} = \boxed{\frac{3}{2}}$ Longitud de la curva

$\frac{dr}{dt} = (-3\cos^2 t \operatorname{sen} t)\vec{i} + (3\operatorname{sen}^2 t \cos t)\vec{k}$

$\left|\frac{dr}{dt}\right| = \sqrt{3^2\cos^4 t \operatorname{sen}^2 t + 3^2 \operatorname{sen}^4 t \cos^2 t} = 3\sqrt{\cos^2 t \operatorname{sen}^2 t(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t)} = \boxed{3\cos t \operatorname{sen} t}$

$\boxed{\vec{u}_t = -\cos t\,\vec{i} + \operatorname{sen} t\,\vec{k}}$ Unitario tangencial a la trayectoria

6. $r(t) = 6t^3\vec{i} - 2t^3\vec{j} - 3t^3\vec{k}$, $1 \leq t \leq 2$

$\int_1^2 21t^2 = \left[7t^3\right]\Big|_1^2 = 56 - 7 = \boxed{49}$ Longitud de la curva

$\frac{dr}{dt} = 18t^2\vec{i} - 6t^2\vec{j} - 9t^2\vec{k}$

$\boxed{\vec{u}_t = \frac{6}{7}\vec{i} - \frac{2}{7}\vec{j} - \frac{3}{7}\vec{k}}$ Unitario tangencial a la trayectoria

$\left|\frac{dr}{dt}\right| = t^2\sqrt{18^2 + 6^2 + 9^2} = 21t^2$

17. a) $x = \cos t$
$y = \operatorname{sen} t$
$z = 1 - \cos t$

$x^2 + y^2 = (\cos^2 t) + \operatorname{sen}^2 t) = 1$
cilindro circular recto $r = 1$

$\boxed{z = 1 - (x)}$ Plano inclin.

La curva $r(t)$ es la intersección del cilindro $x^2+y^2=1$ y el plano $z+x=1$. La intersección de un cilindro con un plano inclinado es una ELIPSE

b) $\frac{dr}{dt} = -\operatorname{sen} t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + \operatorname{sen} t\,\vec{k}$ $\left|\frac{dr}{dt}\right| = \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 t}$

$\vec{u}_{(t)} = \frac{-\operatorname{sen} t}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 t}}\vec{i} + \frac{\cos t}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 t}}\vec{j} + \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 t}}\vec{k}$

$\boxed{\vec{u}_{(0)} = \vec{j}}$; $\boxed{\vec{u}_{(\frac{\pi}{2})} = \frac{-1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}}$; $\boxed{\vec{u}_{(\pi)} = -\vec{j}}$; $\boxed{\vec{u}_{(\frac{3\pi}{2})} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}}$

c) $\frac{dv}{dt} = -\cos t\,\vec{i} - \operatorname{sen} t\,\vec{j} + \cos t\,\vec{k}$

$a(t) \cdot (\vec{n}) = \boxed{0} \rightarrow$ perpendicular $\qquad \vec{n} = \langle 1, 0, 1 \rangle$ Ecuación del plano

$(-\cos t\,\vec{i} - \operatorname{sen} t\,\vec{j} + \cos t\,k) \odot (\vec{i} + \vec{k})$

$\boxed{-\cos t + \cos t} = \boxed{0}$ ✓ Se cumple ∴ la $\vec{a}$ es siempre perpendicular al plano

(d) $L = \int_a^b |V(t)|\, dt$

$L = \int \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 t}\, dt$ | Esta integral se resuelve por una sustitución polar.

(e)

$\boxed{L = 7{,}64}$

---

18. El objetivo es demostrar que la longitud de una curva es una propiedad geométrica intrínseca, sin importar cómo la recorras (la parametrización)

$$L = \int_a^b |V(t)|\, dt$$

a. $\frac{dr}{dt} = -4\operatorname{sen}(4t)\vec{i} + 4\cos t + 4K \quad , \; 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

$\left|\frac{dr}{dt}\right| = 4\sqrt{2}$

$L_a = \int_0^{\pi/2} 4\sqrt{2}\, dt = \boxed{2\pi\sqrt{2}}$

b. $\frac{dr}{dt} = \frac{-\operatorname{sen}(t/2)}{2}\vec{i} + \frac{\cos(t/2)}{2}\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{K} \quad , \; 0 \leq t \leq 4\pi$

$\left|\frac{dr}{dt}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$L_b = \int_0^{4\pi} \frac{\sqrt{2}}{2}\, dt = \boxed{2\pi\sqrt{2}}$

c. $\frac{dr}{dt} = -\operatorname{sen} t\,\vec{i} - \cos t\,\vec{j} - \vec{K} \quad , \; -2\pi \leq t \leq 0$

$\left|\frac{dr}{dt}\right| = \sqrt{2}$

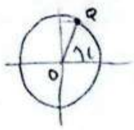
$L_c = \int_{-2\pi}^{0} \sqrt{2}\, dt = \boxed{2\pi\sqrt{2}}$

$L_a = L_b = L_c = 2\pi\sqrt{2}$ Hemos demostrado que, aunque las tres parametrizaciones recorren la hélice a diferentes velocidades y en diferentes intervalos, la longitud total de la curva es la misma

19. El objetivo es encontrar $P(x,y)$

Datos $\begin{cases} x = \cos t + t \operatorname{sen} t \quad y = \operatorname{sen} t - t\cos t, \quad t > 0 \quad P_t(1,0) \\ x^2 + y^2 = 1 \quad \text{(Plano)} \end{cases}$

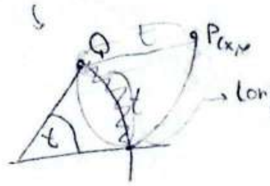
1. OQ $(r=1)$ $\longrightarrow$



$\boxed{\begin{aligned} \cos(t) &= x \\ \operatorname{sen}(t) &= y \end{aligned}}$

$\boxed{OQ = \cos t\,\vec{i} + \operatorname{sen} t\,\vec{j}}$

2. $|OP| = t$



longitud de arco $\boxed{t}$

$\vec{u}_{OP}$

$t \operatorname{sen} t = x$

$-t\cos t = y$

$OP = OQ + QP$

$OP = (\cos t\,\vec{i} + \operatorname{sen} t\,\vec{j}) + (t \operatorname{sen} t\,\vec{i} - t\cos t\,\vec{j})$

Ecuacion paramétrica

$\boxed{\begin{aligned} x &= \cos t + t \operatorname{sen} t \\ y &= \operatorname{sen} t - t\cos t \end{aligned}}$

Grafica ejercicio 17. ELIPSE