Escuela Politécnica Nacional

Matemática avanzada

Nombre: Paula Jabando
Fecha: 25-11-2025

Deber 6

- Resolver los ejercicios del 1 al 80 del libro de Cálculo de varias variables de Thomas, cap 14, sección 14.1.

Obtenga los valores específicos de la función.

3. $f(x, y, z) = \dfrac{x-y}{y^2+z^2}$

a) $f(3, -1, 2)$

$$f(3,-1,2) = \frac{(3)-(-1)}{(-1)^2+(2)^2} = \frac{3+1}{1+4} = \frac{4}{5}$$

b) $f\left(1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$

$$f\left(1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right) = \frac{1-\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{4+1}{16}} = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$$

c) $f\left(0, -\frac{1}{3}, 0\right)$

$$f\left(0, -\frac{1}{3}, 0\right) = \frac{0-\left(-\frac{1}{3}\right)}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2+(0)^2} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{9}} = 3$$

d) $f(2, 2, 100)$

$$f(2,2,100) = \frac{(2)-(2)}{(2)^2+(100)^2} = 0$$

Obtenga y grafique el dominio de cada función

(12) $f(x,y) = \dfrac{1}{\ln(4-x^2-y^2)}$

$\ln(4-x^2-y^2) \neq 0$ cuando $\ln(1) = 0$

entonces $4-x^2-y^2 \neq 1$

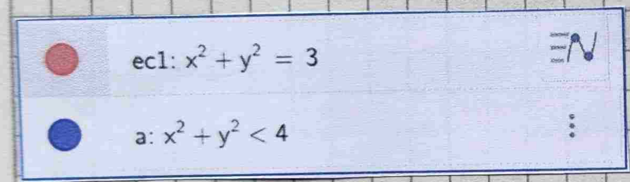
o $4-x^2-y^2 = 1$ o $4-x^2-y^2 > 0$

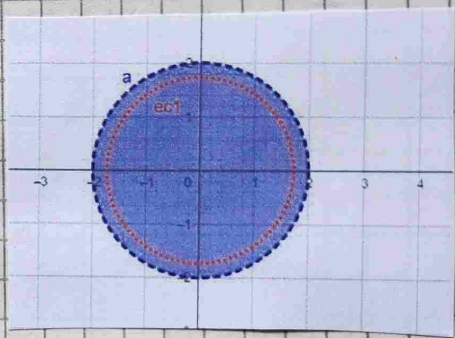
$-x^2-y^2 = -3$ $-x^2-y^2 > -4$

$x^2+y^2 \neq 3$ $x^2+y^2 < 4$

Dom: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 4 \text{ y } x^2+y^2 \neq 3\}$

Las líneas entrecortadas son excluidas del dom que es la zona sombreada





En los ejercicios 21 y 30 obtenga

a) el dominio de la función

b) Determine el rango de la función

c) Describa las curvas de nivel de la función

d) Encuentre la frontera del dom

e) Determine si el dom es una región abierta, cerrada o ninguna

f) Decida si el dominio está o no acotado

21) $f(x,y) = xy$

a) Dom: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\}$

b) Rango: $\mathbb{R}$ valores de $z = f(x,y)$ que la función puede tomar

c) Las curvas de nivel son las curvas en el plano xy donde la función toma un valor constante $z = k$

$f(x,y) = K$

$xy = K$

∘ CASO 1 $K \neq 0$

$y = \frac{K}{x}$ Esta es la ecuación de una hipérbola con un eje como asíntota.

El valor de K determina qué tan lejos del origen se encuentran las ramas de la hipérbola.

∘ CASO 2 $K = 0$

$xy = 0$

Esto si $x = 0$ o $y = 0$. Esta curva de nivel consiste en los dos ejes.

d) La frontera del dominio D es el conjunto de puntos que son límite tanto de puntos dentro de D como puntos fuera de D

el dominio $D = \mathbb{R}^2$. Fuera de D no hay ningún punto

Frontera: $\emptyset$

e) Una región es: abierta y cerrada al mismo tiempo

abierta: si todos sus puntos son puntos interiores (no contiene frontera)
cerrada: si contiene todos sus puntos frontera

Para el dom $f(x,y) = xy$, que es todo el plano $\mathbb{R}^2$

- Frontera: no hay borde $\emptyset$
- Abierto: sí porque no tiene frontera
- Cerrado: sí, porque incluye toda su frontera (que no existe).

f) El dominio no está acotado

Una región está acotada si puede ser cerrada completamente dentro de alguna bola. En el dom, no importa qué tan grande sea el disco que dibujemos, siempre habrá $\mathbb{R}^2$ fuera de él.

(30) $f(x,y) = \ln(9 - x^2 - y^2)$

a) Dom: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 9\}$

El argumento de un logaritmo no puede ser menor a cero:

$$9 - x^2 - y^2 > 0$$
$$-x^2 - y^2 > -9$$
$$x^2 + y^2 < 9$$

b) Rango

Valores que puede tomar $f(x,y) = z$

El argumento del logaritmo $u = 9 - x^2 - y^2$

① El valor máximo de u ocurre cuando $x^2 + y^2 = 0$
entonces el valor máximo de f es $f(0,0) = \ln(9)$
A medida que u se acerca a cero, $\ln(u)$ tiende a $-\infty$

$R = (-\infty, \ln(9))$

c) Curvas de nivel de la función

Las curvas de nivel son las curvas en xy cuando $f(x,y) = K$

$$e^{\ln(9 - x^2 - y^2)} = e^{K}$$
$$9 - x^2 - y^2 = e^K$$
$$x^2 + y^2 = 9 - e^K$$

para que esto represente un círculo real $9 - e^K > 0$ (porque es r^2)

$$\ln 9 > \ln e^K \Rightarrow K < \ln(9)$$

Las curvas de nivel son círculos concéntricos en el origen $(0,0)$ con un radio $r = \sqrt{9 - e^K}$ siempre y cuando $K < \ln(9)$ a medida que K aumenta a $\ln(9)$, el r se reduce.

d) Frontera de dom

$D = x^2 + y^2 < 9$ La frontera es la orilla de esta región, incluyendo al círculo

Frontera: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 9\}$

e) La región del dominio

El dom es una desigualdad ESTRICTA por lo que al no incluir la frontera $x^2+y^2=9$, es una región abierta

f) El dom está acotado

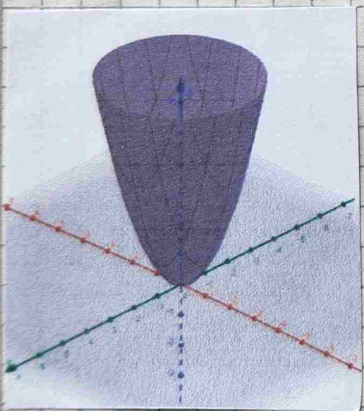
Una región acotada se puede encerrar completamente dentro de un círculo de radio finito.

El dom = interior de un círculo de $r=3$. Podemos encerrar esta región dentro de cualquier círculo de $R>3$

Muestre los valores de las funciones de los ejercicios 39 y 48 de dos maneras: a) graficando la superficie $z=f(x,y)$ y b) dibujando varias curvas de nivel en la superficie. Marque cada curva de nivel con el valor de su función

39) $f(x,y) = x^2+y^2$ Dom = $\mathbb{R}^2$ Rango: $[0,+\infty)$

a) Gráfica



a: $z = x^2+y^2$

Z1: $x^2+y^2 = 1$

Z4: $x^2+y^2 = 4$

Z6: $x^2+y^2 = 6$

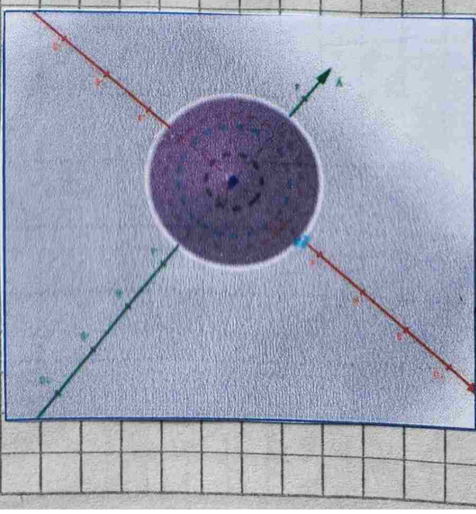
b) Curvas de nivel

$K = x^2+y^2$

$1 = x^2+y^2$

$4 = x^2+y^2$

$6 = x^2+y^2$



(48) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-4}$

$x^2+y^2-4 \geq 0$

$x^2+y^2 \geq 4$

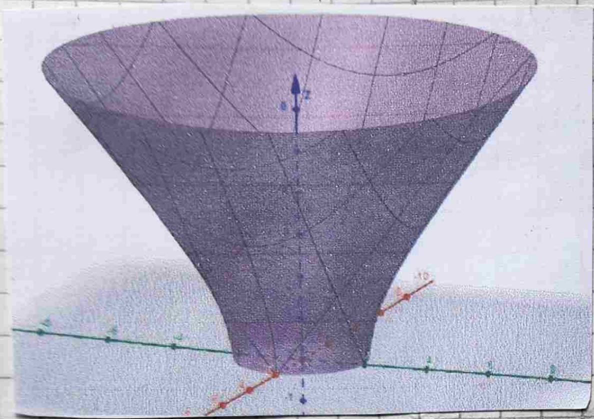
a) Gráfica

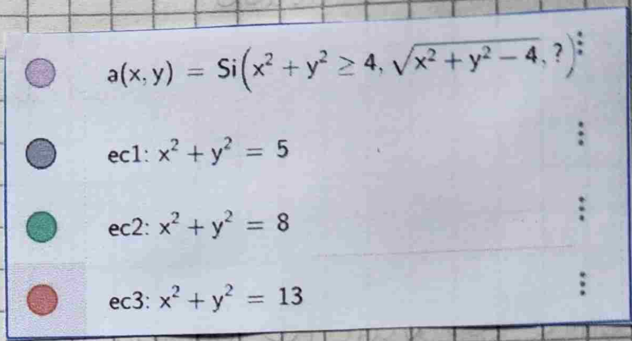
dom : $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \geq 4\}$

rango $\sqrt{x^2+y^2-4} \geq \sqrt{4-4}$

$f(x,y) \geq 0$

$R = [0, +\infty)$





b) Curvas de nivel

$K = \sqrt{x^2+y^2-4}$

$K^2 = x^2+y^2-4$

$x^2+y^2 = K^2+4$

las curvas de nivel son circunferencias con $r>0 \Rightarrow K^2+4>0$

- $K=1$

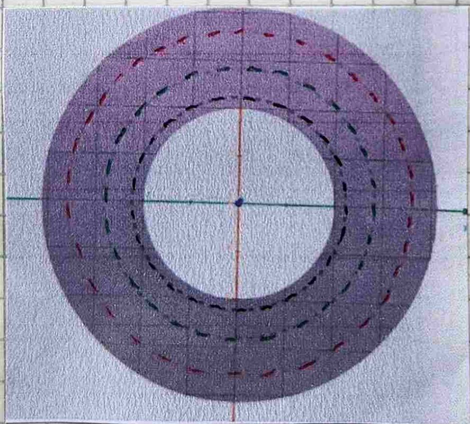
  $x^2+y^2 = 5$

- $K=2$

  $x^2+y^2 = 8$

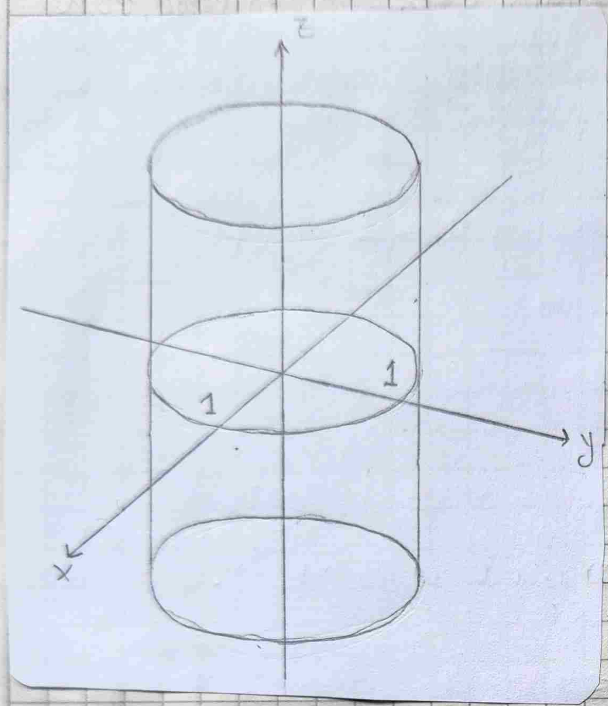
- $K=3$

  $x^2+y^2 = 13$



Dibuje la superficie de nivel típica para la función.

57) $f(x,y,z) = x^2 + y^2$



En este espacio tridimensional xyz la característica definitoria de un cilindro es que una de las variables está ausente de la ecuación, en este caso, la variable z está ausente.

La superficie de nivel es general al tomar el círculo $x^2 + y^2 = 1$ en el plano xy y extenderlo paralelamente al eje z infinitamente en ambas direcciones.

Determine y grafique el dominio de f. Luego obtenga la ecuación para la curva o superficie de nivel de la función que pasa por el punto dado.

66) $g(x,y,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!\,z^n}$, $(\ln 4, \ln 9, 2)$

La función está dada como una serie, la cual se asemeja a la serie de Maclaurin para la función exponencial e^u, que es:

$e^u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}$ podemos reescribir la función $g(x,y,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{x+y}{z}\right)^n$

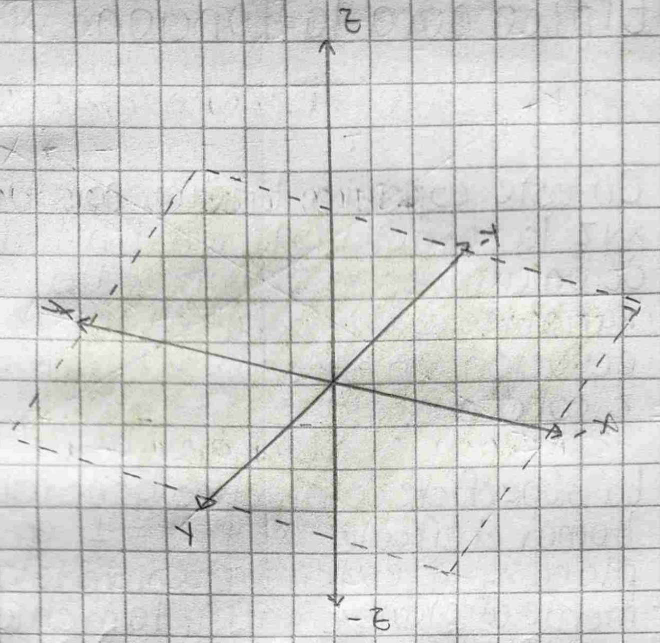
Esta es la serie de Taylor para la función exponencial con $u = \frac{x+y}{z}$,

por lo tanto la función puede expresarse como

$g(x,y,z) = e^{\frac{x+y}{z}}$ El dominio de la función e^A es $\mathbb{R}^3$ siempre que A esté definido

$A = \frac{x+y}{z}$ donde $z \neq 0$

Dominio dom: $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \neq 0\}$



La frontera excluida es el plano z=0. Simplemente este plano se excluye de todo el plano tridimensional que es nuestro dominio

La superficie de nivel o curva que pasa por el punto $P(\ln 4, \ln 9, 2)$ se define como el conjunto de puntos (x, y, z) donde la función toma el mismo valor que en el punto P.

① Calcular el valor de K

$$K = g(\ln 4, \ln 9, 2) = e^{\frac{\ln 4 + \ln 9}{2}}$$

$$K = e^{\frac{\ln(36)}{2}} \Rightarrow K = e^{\frac{1}{2}\ln(36)} \Rightarrow K = e^{\ln(36^{1/2})}$$

$$K = \sqrt{36} = 6$$

② Obtener la ecuación de la superficie de nivel

La ecuación de superficie es $g(x, y, z) = K$

$$\ln e^{\frac{x+y}{z}} = \ln 6$$

$$\frac{x+y}{z} = \ln(6) \Rightarrow z = \frac{x+y}{\ln(6)}$$

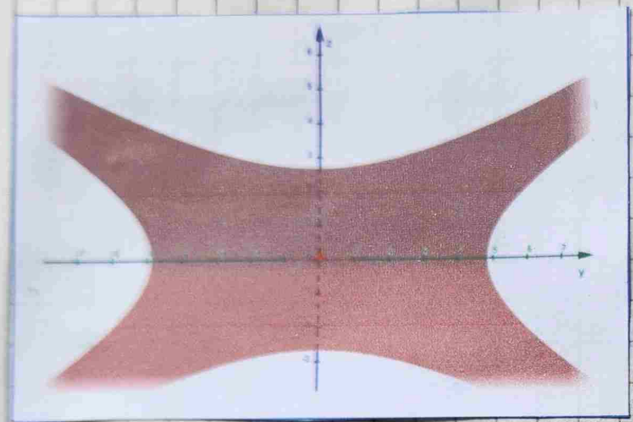
(75) Tratar las superficies de nivel implícitamente definidas

$x + y^2 - 3z^2 = 1$ -> Paraboloide hiperbólico (silla de montar)

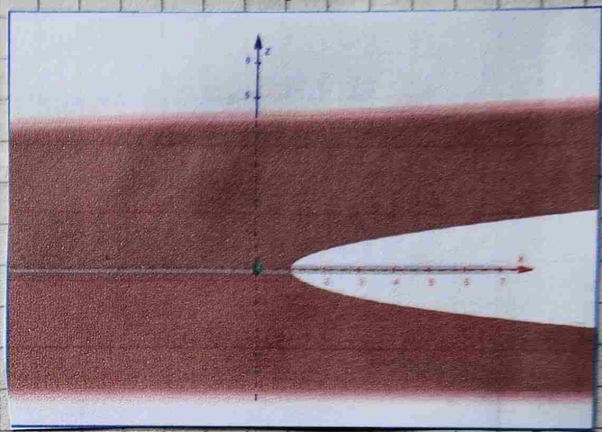
Podemos reescribir la ecuación despejando la variable lineal para un formato más estándar

$x - 1 = 3z^2 - y^2$ esta forma nos indica

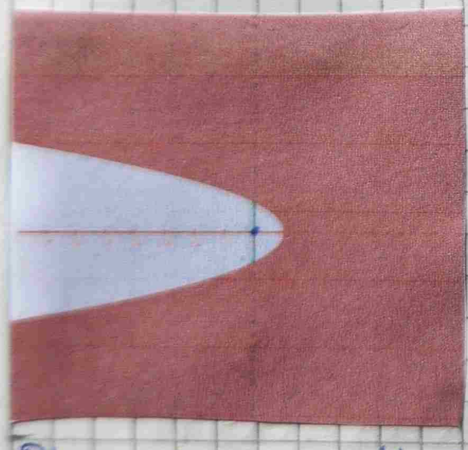
- Centro $(1, 0, 0)$
- El eje de paraboloide hiperbólico se extiende a lo largo del eje x



Plano $x = K$ hipérbolas



Plano $y = 0$ Parábola $(+x)$



Plano $z = 0$ parábola $(-x)$

DD MM AA

- Resolver los ejercicios del 1 al 80 del libro cálculo de varias variables de Thomas, cap 14, sección 14.2.

Obtenga los límites

(6) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos \frac{x^2+y^3}{x+y+1}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos\left(\frac{0+0}{0+0+1}\right) = \cos(0) = 1$$

Calcule los límites replanteando primero las fracciones.

(15) $$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\ x\neq 1}} \frac{xy-y-2x+2}{x-1}$$

Agrupamos los términos del numerador

$$\frac{(xy-y)+(-2x+2)}{x-1} = \frac{y(x-1)-2(x-1)}{x-1} = \frac{(y-2)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}}$$

$$= y-2$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} y-2 = (1)-2 = -1$$

(24) $$\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x-y}{x^4-y^4}$$

$$\frac{x-y}{(x^2+y^2)(x^2-y^2)} = \frac{\cancel{x-y}}{(x^2+y^2)(x+y)\cancel{(x-y)}} = \frac{1}{(x^2+y^2)(x+y)}$$

$$\lim_{(x,y)\to(2,2)} \left[\frac{1}{(x^2+y^2)(x+y)}\right] = \frac{1}{(2^2+2^2)(2+2)} = \frac{1}{32}$$

¿En cuáles puntos (x,y) del plano, las funciones son continuas?

33 a) $f(x,y) = \operatorname{sen} \frac{1}{xy}$

Es continua en todos los puntos del plano menos donde $x=0$ o $y=0$

b) $f(x,y) = \frac{1}{x^2-y}$

Es continua en todos los puntos del plano xy.

Inexistencia del límite en un punto considerando diferentes trayectorias, demuestre que la función no tiene límite cuando $(x,y) \to (0,0)$

48 $f(x,y) = \frac{x^4}{x^4+y^2}$

Para que el límite exista, la función debe aproximarse al mismo valor L a lo largo de cualquier camino o trayectoria que se acerque al punto $(0,0)$. Si encontramos dos caminos distintos que dan como resultado límites diferentes, concluimos que el límite no existe.

① trayectoria a lo largo del eje x $(y=0)$

$$L_1 = \lim_{(x,0)\to(0,0)} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4} = 1$$

② trayectoria a lo largo del eje y $(x=0)$

$$L_2 = \lim_{(0,y)\to(0,0)} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{(0)}{(0)+y^2} = \frac{0}{y^2} = 0$$

$L_1 \neq L_2$ dado que los límites a lo largo de la trayectoria son diferentes, concluimos que el límite no existe.

Demuestre que los límites no existen

51 Sea $f(x,y) = \begin{cases} 1 & y \geq x^4 \\ 1 & y \leq 0 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$

Obtenga cada uno de los siguientes límites o explique por qué el límite no existe.

a) $\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y)$ el punto (0,1) cae en la frontera $x=0 \quad 1 \geq (0)^4$

$\lim_{(x,y)\to(0,1)} = 1$

b) $\lim_{(x,y)\to(2,3)} f(x,y)$ $x=2 \quad 3 \geq (2)^4$ falso
no cumple con la región 1 ni la 2.

$\lim_{(x,y)\to(2,3)} = 0$

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ En el origen (0,0) es un punto donde convergen las tres regiones.

- Acercamiento que da $L=1$ (región 1 o 2)

① Acercarse a (0,0) a lo largo del eje y positivo $(y>0, x=0)$ región 1, entonces $L_1=1$

② Acercarse por el eje x donde $y=0$ o por un $y<0$ ambos en la región 2, entonces $L_2 = 1$

③ de otra forma, necesitamos que esté dentro de la curva $0<y<x^4$

$y = \frac{1}{2}x^4$ elegimos $\frac{1}{2}$ solo porque es fácil entre 0 y 1

La trayectoria $y = \frac{1}{2}x^4$ si funciona porque mantiene la misma potencia de la frontera $y = x^4$

$0 < \frac{1}{2}x^4 < x^4$

como $y = \frac{1}{2}x^4$ no cumple con la región 1 ni 2, entonces

L_3:
$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

Por lo que no existe L en (0,0) porque $L_1 = L_2$ pero son diferentes de L_3

68 Cambio a coordenadas Defina $f(0,0)$ de manera que su extensión sea continua en el origen.

$$f(x,y) = xy \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

Usamos coordenadas polares donde:

$x = r\cos\theta$ y $y = r\operatorname{sen}\theta$ $\quad x^2+y^2 = r^2$

① Sustitución en la función

$$f(r,\theta) = r\cos\theta \, r\operatorname{sen}\theta \frac{(r\cos\theta)^2-(r\operatorname{sen}\theta)^2}{\cancel{r^2}}$$

$$f(r,\theta) = r^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta\,(\cos 2\theta)$$

② Evaluación del límite en $r \to 0$

$$\lim_{r\to 0} r^2 \underbrace{\cos\theta\operatorname{sen}\theta\,(\cos 2\theta)}_{\text{Factor acotado entre } -1 \text{ y } 1}$$

Dado que el factor trigonométrico es acotado $L = 0$.

Definición de $f(0,0)$ para continuidad

1. $f(0,0)$ existe
2. $\lim_{(x,y)\to(0,0)}$ existe
3. Los dos anteriores son iguales

Ya determinamos que el límite existe $L=0$, necesitamos que la función sea continua en el origen, se logra redefiniendo

$f(0,0) = 0$

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right), & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

El ejercicio representa una función $f(x,y)$ y un número positivo ϵ. Demuestre que existe una $\delta > 0$ tal que para todas las (x,y)

$$\sqrt{x^2+y^2} < \delta \rightarrow |f(x,y) - f(0,0)| < \epsilon$$

69 $f(x,y) = x^2+y^2$, $\epsilon = 0{,}01$

La definición de límite en este contexto es:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) \leftrightarrow \forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tal que}$$

$$\sqrt{x^2+y^2} < \delta \rightarrow |f(x,y) - f(0,0)| < \epsilon$$

① Determinamos el valor del límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2+y^2 = 0^2 + 0^2 = 0$$

② Establecer la desigualdad del límite

$$|f(x,y) - f(0,0)| < \epsilon$$

$$|(x^2+y^2) - 0| < \epsilon$$

$$x^2+y^2 < \epsilon$$

③ Conectar con la condición de la distancia

$\sqrt{x^2+y^2} < \delta$ Esta es la condición de distancia al origen

$$x^2+y^2 < \delta^2$$

Ahora comparamos la desigualdad requerida ② con la desigualdad de ③

$$x^2+y^2 < \epsilon \quad y \quad x^2+y^2 < \delta^2$$

para que la condición $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$ implique $|f(x,y) - f(0,0)| < \epsilon$ necesitamos que

$$\delta^2 \leq \epsilon \rightarrow \delta \leq \sqrt{\epsilon}$$

$$\delta \leq \sqrt{0{,}01} \rightarrow \delta \leq 0{,}1$$

Si $\sqrt{x^2+y^2} < 0{,}1$, entonces

① Elevamos al cuadrado $x^2+y^2 < 0{,}01$
② Desigualdad del límite $|f(x,y) - f(0,0)| = x^2+y^2$
③ Por positividad tenemos $|f(x,y) - f(0,0)| < \epsilon$

Demuestre que existe un $\delta > 0$, tal que para toda (x, y, z)

$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < \delta \implies |f(x, y, z) - f(0,0,0)| < \epsilon$

78 $f(x, y, z) = \tan^2 x + \tan^2 y + \tan^2 z$, $\epsilon = 0{,}03$

① Determinar el límite L

$f(0,0,0) = \tan^2(0) + \tan^2(0) + \tan^2(0) = 0$

② Establecer la desigualdad del límite

$|f(x, y, z) - f(0,0,0)| < \epsilon$

$\tan^2 x - \tan^2 y - \tan^2 z < \epsilon$ (*)

③ Conectar la condición de distancia y acotamiento

$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Para relacionar esta distancia con la desigualdad (*), debemos usar la propiedad del límite $\lim_{u \to 0} \frac{\tan u}{u} = 1$, lo que significa que para los valores cercanos a 0, $\tan u = u$

Para simplificar la búsqueda de δ, usamos la desigualdad conocida y válida para valores pequeños de u

$\tan^2 u \geq u^2$ para u cercano a 0

- Si $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < \delta$, entonces $|x| < d$, $|y| \delta$, $|z| < \delta$

$x^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 < \delta^2$
$y^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 < \delta^2$
$z^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 < \delta^2$

Ahora usamos $\tan^2 u \approx u^2$ para $u \in \{x, y, z\}$, existe vecindad alrededor de cero $(|u| < \delta_0)$ donde $\tan^2 u < 2u^2$

- Elegimos δ tal que δ garantice que cada término $\tan^2 < \epsilon/3$

$\tan^2 x < \frac{\epsilon}{3} \rightarrow |\tan x| < \sqrt{\frac{\epsilon}{3}}$ $\quad |x| < \tan^{-}\left(\sqrt{\frac{\epsilon}{3}}\right)$

y así para y y z. Si $K = \arctan\left(\sqrt{\frac{\epsilon}{3}}\right)$ y elegimos $\delta = K$

Si $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < K$, entonces $|x| < K$, $|y| < K$, $|z| < K$

$\tan^2 x + \tan^2 y + \tan^2 z < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$

DD MM AA

(4) Cálculo del δ para $e = 0{,}03$

$$\delta = \arctan\left(\sqrt{\frac{0{,}03}{3}}\right) \Rightarrow \delta = \tan^{-}(\sqrt{0{,}01}) \Rightarrow \delta = \tan^{-}(0{,}1)$$

Si se elige esta δ si $\sqrt{x^2+y^2+z^2} < \delta$ entonces $|x| < \tan^{-}(0{,}1)$, lo que implica $\tan^2 x < 0{,}01$ y de manera similar para y y z sumando $\tan^2 x + \tan^2 y + \tan^2 z < 0{,}01 + 0{,}01 + 0{,}01 = 0{,}03 = e$

- Resolver los problemas del 20 al 25 del libro de cálculo de Ayres, cap 48.

(20)
$$\lim_{(x,y)\to(-1,2)} \frac{x-2y}{x^2+y} = \frac{(-1)-2(2)}{(-1)^2+(2)} = \frac{-1-4}{1+2} = -\frac{5}{3}$$

(21)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x^2+y^2} = \quad y = mx$$

$$f(x,mx) = \frac{x-mx}{x^2+(mx)^2} = \frac{x(1-m)}{x^2(1+m^2)} = \frac{1-m}{x(1+m^2)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-m}{x(1+m^2)}$$

- caso $m=0$ (Eje x ; $y=0$)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-0}{x(1+0^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x_{\to 0, \pm\infty}} = \pm\infty$$

- caso $m=2$ (recta $y=2x$)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-2}{x(1+(2)^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{5x_{\to 0, \pm\infty}} = \pm\infty$$

Dado que el límite a lo largo de cualquier recta (menos $m=1$) tiende a infinito, el límite no existe

(22)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy}{2x^2+y^2} = \quad x = r\cos\theta \quad y = r\,\text{sen}\,\theta \quad r^2 = x^2+y^2$$

$$f(r,\theta) = \frac{3\cancel{r}\,\text{sen}\,\theta\,\cancel{r}\cos\theta}{2(r^2\cos^2\theta)+(r^2\,\text{sen}^2\theta)} = \frac{3\,\text{sen}\,\theta\cos\theta}{2\cos^2\theta+\text{sen}^2\theta}$$

El límite no existe si, después de simplificar y eliminar r, la función resultante depende de la variable angular

(23) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} \qquad y = mx$$

$$f(x, mx) = \frac{x\, m^2x^2}{x^2 + m^4x^4} = \frac{x\, m^2 \cancel{x^2}}{\cancel{x^2}(1 + m^4x^2)} = \frac{x\, m^2}{(1 + m^4x^2)}$$

• CASO 1 : $y = mx$

$$\lim_{x\to 0} = \frac{m^2(0)}{1 + m^4(0)^2} = \frac{0}{1} = 0$$

El límite es 0 a lo largo de las rectas ($y = mx$), pero no lo prueba

• CASO 2 : $x = y^2$ para igualar las potencias

$$f(y^2, y) = \frac{y^4}{y^4 + y^4} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Dado que los límites a lo largo de diferentes trayectorias son distintos el límite no existe

(24) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2} \qquad u = x^2+y^2$$

$$f(u) = \frac{u}{\sqrt{u+4}-2} \cdot \frac{\sqrt{u+4}+2}{\sqrt{u+4}+2} = \frac{u(\sqrt{u+4}+2)}{u+4-4} = \frac{\cancel{u}(\sqrt{u+4}+2)}{\cancel{u}}$$

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+4} + 2$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2+4}+2 = \sqrt{0+0+4} + 2 = 2+2 = 4$$

(25) Determine si cada una de las funciones puede definirse en (0,0) de manera que sean continuas

a) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2} \qquad y = \sin\theta \cdot r \qquad x = \cos\theta \cdot r$

$$f(r,\theta) = \frac{\cancel{r^2}\sin^2\theta}{\cancel{r^2}(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} = \sin^2\theta$$

El límite no existe, por lo que la función no puede definirse para ser continua.

b) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ $\quad y = mx$

$f(x, xm) = \dfrac{x - xm}{x + xm} = \dfrac{\cancel{x}(1-m)}{\cancel{x}(1+m)} = \dfrac{1-m}{1+m}$

Como el resultado depende de m, el límite va a ser diferente para cada valor de m ∴ el límite no existe y no se puede definir a la función como continua.

c) $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ $\quad x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta \quad r^2 = x^2+y^2$

$f(r,\theta) = \dfrac{r^{\cancel{3}}(\cos^3\theta + \sin^3\theta)}{\cancel{r^2}} = r(\cos^3\theta + \sin^3\theta)$

$\lim_{r \to 0} r(\cos^3\theta + \sin^3\theta) = 0$ (porque $\cos^3\theta + \sin^3\theta$ está acotado)

Como el límite existe, se puede extender la función con $f(0,0) = 0$ para que sea continua.

d) $\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$ $\quad x = r\cos\theta \quad y = r\operatorname{sen}\theta \quad r^2 = x^2+y^2$

$f(r,\theta) = \dfrac{\cancel{r}(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)}{r^{\cancel{2}}} = \dfrac{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}{r}$

Si nos encargamos del numerador con $\theta = 0$, eso nos da $1/0$ y ese límite se va a $\pm\infty$.