TAREA-EJERCICIOS DE THOMAS

NOMBRE: Jostin Sánchez

Cálculo de varias variables - Ejercicios sección 12.1 (2, 11, 20, 29, 38, 47, 56, 65

▶ Proporcione descripciones geométricas del conjunto de puntos en el espacio cuyas coordenadas satisfacen los pares de ecuaciones que se indican.

**2.** $x = -1, \ z = 0$

R: Es una recta formada por todos los puntos $(-1, y, 0)$ con $y$ que puede tomar cualquier valor real, geométricamente la representamos con una recta paralela al eje $y$, es decir, paralela a la dirección $(0,1,0)$ que corta con el plano $xy$ en el punto $(-1,0,0)$

**11.** $x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 25, \ z=0$

El ejercicio nos proporciona dos ecuaciones que se pueden interpretar de la siguiente forma.

1. En la primera ecuación tenemos una esfera de radio 5 que podemos deducir gracias a la ecuación de la esfera:

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = a^2$$

en donde $a^2 = 25$ y representa el radio de la esfera, además sabemos que en el eje z existe el plano $xy$ paralelo situado en $\boxed{-3}$.

2. La segunda ecuación nos dice que en $z=0$ existe un nuevo plano $xy$ situado en el origen, pero no sabemos si ese plano va a cortar a nuestra esfera, así que remplazamos $z=0$ en la ecuación de la esfera.

$$x^2 + y^2 + (0+3)^2 = 25$$

$$x^2 + y^2 = 25 - 9$$

$$\boxed{x^2 + y^2 = 16} \rightarrow \text{Ec. de una circunferencia de radio 4 centrada en } z=0$$

R: El conjunto de puntos que satisfacen las ecuaciones consta de una circunferencia de radio 4, situada en el plano $z=0$ (plano $xy$) centrado en el origen.

▶ Describa el conjunto de puntos en el espacio cuyas coordenadas satisfacen las desigualdades o combinaciones de ecuaciones y desigualdades que se indican.

**20.** a. $x^2 + y^2 \leq 1, \ z=0$

La ecuación que tenemos aquí es algo común y conocida, ya que es una circunferencia pero existe una desigualdad que nos indica que mas que una circunferencia es un círculo en donde toma todos los puntos de radio menor o igual a 1, y sabemos que está centrada en el origen ya que $z=0$ nos dice que el plano $xy$ (círculo) se encuentra en la coordenada $z=0$.

Escaneado con CamScanner

b. $x^2+y^2 \leq 1$, $z=3$
El conjunto de puntos que satisfacen la desigualdad y la igualdad, son todos los puntos que forman un círculo que se encuentra ubicado en $z=3$, es decir más arriba de $(0,0,0)$.

c. $x^2+y^2 \leq 1$, sin restricción para $z$

El conjunto de puntos que satisface la desigualdad y la condición equivale a un círculo que puede moverse en todo el eje $z$, obviamente el círculo estando en el plano $xy$.

- Describa el conjunto dado con una ecuación o con un par de ecuaciones.

29. La circunferencia de radio 2 con centro en $(0,2,0)$ y que está en
a. el plano $xy$ b. el plano $yz$ c. el plano $y=2$

a. $x^2+(y-2)^2=4, z=0$ b. $(y-2)^2+z^2=4, x=0$ c. $x^2+z^2=4, y=2$

- Escriba las desigualdades que determinan a los conjuntos de puntos dados.

38. El hemisferio superior de la esfera de radio 1 con centro en el origen.

Lo que buscamos es encontrar desigualdades que cumplan, primero una esfera y que tome en cuenta exclusivamente el hemisferio superior por lo tanto, definimos las siguientes desigualdades.

$x^2+y^2+z^2=1$ y $z \geq 0$, estas son las ecuaciones que cumplen ya que definimos una esfera centrada en el origen con radio $=1$ y al intersecar con el plano $xy$ con $z \geq 0$ obtenemos todos los puntos que conforman la figura requerida.

- Determine los centros y los radios de esferas

47. $(x+2)^2+y^2+(z-2)^2=8$

a. $y^2+(z-2)^2=8$, $\boxed{x=-2}$
b. $(x+2)^2+(z-2)^2=8$, $\boxed{y=0}$
c. $(x+2)^2+y^2=8$ $\boxed{z=2}$

Centros de la esfera:
$x=-2$, $y=0$, $z=0$
Radios de la esfera
$r=2\sqrt{2}$

$(x+2)^2+y^2+(z-2)^2=8$
$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=a^2$ $\rightarrow$ $a^2=8$
$|a|=\sqrt{8}$ $\rightarrow$ $a=2\sqrt{2}$

radio de la esfera

56. $x^2+y^2+z^2-6y+8z=0$ agrupando los terminos semejantes.
Reescribimos la ecuación

$$x^2+(y^2-6y)+(z^2+8z)=0$$

Queremos llegar a formar la ecuación genera de una esfera para así poder encontrar su centro y radio,

$$x^2+(y^2-6y)+(z^2+8z)=0$$

$\boxed{1.\ y^2-6y}$ → completamos el cuadrado

$$y^2-6y+\left(\frac{-6}{2}\right)^2-\left(\frac{-6}{2}\right)^2 \equiv y^2-6y+9-9$$
$$\equiv \boxed{(y-3)^2-9}$$

2. $z^2+8z$

$$z^2+8z+\left(\frac{8}{2}\right)^2-\left(\frac{8}{2}\right)^2 \equiv z^2+8z+16-16$$
$$\equiv (z+4)^2-16$$

Reescribimos nuestra ecuación con los datos hallados

$$x^2+(y-3)^2-9+(z+4)^2-16=0$$

$$x^2+(y-3)^2+(z+4)^2=25$$ (Listo, hemos encontrado algo muy similar a la fórmula de una esfera)

Por lo tanto: Centro $(0,3,-4)$ con Radio $=5$

65. Encuentre el punto en la esfera $x^2+(y-3)^2+(z+5)^2=4$ más cercano
a. al plano $xy$
b. al punto $(0,7,-5)$

Determinamos nuestro centro y radio para poder encontrar los puntos mas cercana a la esfera.
Centro $=(0,3,-5)$ Radio $=2$

a. El plano $xy$ nos dice que está ubicado en $z=0$, por lo que desde el centro de la esfera para que encontrar el punto más cercano de la esfera al plano es ubicar el punto máximo en la esfera en el eje $z$ que esta determinado por el radio, por lo tanto

Punto $:(0,3,-3)$

b. Si tenemos un punto en $(0,7,-5)$; lo comparamos con el centro de la esfera y nos damos cuenta que el punto mas cercano de la esfera interviene el eje $y$, por lo tanto
Punto $:(0,5,-5)$

Ejercicios sección 12.2 (2, 11, 20, 29, 38, 47, 56)

$u = \langle 3, -2 \rangle$ y $v = \langle -2, 5 \rangle$. Determine (a) los componentes y (b) la magnitud (longitud) del vector indicado

**2.** $-2v$

$v = \langle -2, 5 \rangle$

$-2v = -2\langle -2, 5 \rangle$

$-2v = \langle 4, -10 \rangle$

$|-2v| = \sqrt{(4)^2 + (-10)^2} = \sqrt{116} = \sqrt{29 \cdot 4} = 2\sqrt{29}$

$-2v = \langle 4, -10 \rangle$

$|-2v| = 2\sqrt{29}$

**11.** obtenga las componentes del vector $A = (2, 3)$ al origen, $O = (0,0)$

$\vec{AO} = O - A = (0,0) - (2,3)$

$\vec{AO} = (-2, -3)$ $\quad \vec{AO} = (-2, 3)$

Exprese cada vector en la forma $v = v_1\vec{i} + v_2 j + v_3 K$

**20.** $\vec{AB}$ si A es el punto $(1, 0, 3)$ y B es el punto $(-1, 4, 5)$

$\vec{AB} = B - A = \langle -1, 4, 5 \rangle - \langle 1, 0, 3 \rangle$

$\vec{AB} = \langle -2, 4, 2 \rangle = \langle -2, 0, 0 \rangle + \langle 0, 4, 0 \rangle + \langle 0, 0, 2 \rangle$

$= -2\langle 1, 0, 0 \rangle + 4\langle 0, 1, 0 \rangle + 2\langle 0, 0, 1 \rangle$

$= -2i + 4j + 2K$

$\vec{AB} = -2i + 4j + 2K$

Exprese cada vector como producto de su longitud y dirección

**29.** $\frac{1}{\sqrt{6}} i - \frac{1}{\sqrt{6}} j - \frac{1}{\sqrt{6}} K$

$\vec{A} = \frac{1}{\sqrt{6}} i - \frac{1}{\sqrt{6}} j - \frac{1}{\sqrt{6}} K$

$|A| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2} = \sqrt{3\left(\frac{1}{6}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\vec{u}_A = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{6}} i - \frac{1}{\sqrt{6}} j - \frac{1}{\sqrt{6}} k}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{2\sqrt{3}} i - \frac{2}{2\sqrt{3}} j - \frac{2}{2\sqrt{3}} k$

$= \frac{\sqrt{3}}{3} i - \frac{\sqrt{3}}{3} j - \frac{\sqrt{3}}{3} K$

$\vec{A} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{3} i - \frac{\sqrt{3}}{3} j - \frac{\sqrt{3}}{3} K\right)$

$\vec{A} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}} i - \frac{1}{\sqrt{3}} j - \frac{1}{\sqrt{3}} K\right)$

- Determine a. La dirección de $\overrightarrow{P_1P_2}$ y b. El punto medio del segmento de recta $P_1P_2$

**38.** $P_1(0,0,0)$ $P_2(2,3,4)$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (2,3,4) - (0,0,0)$$
$$= (2,3,4)$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (2,3,4)$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \langle 2,3,4 \rangle$$

Punto medio del segmento de recta $P_1P_2$

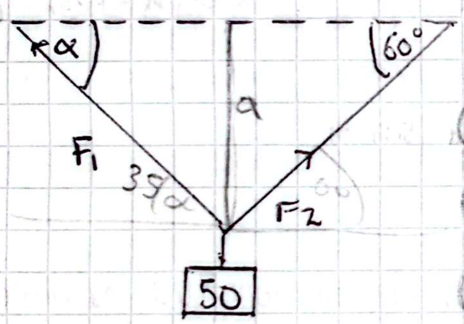
$P_1 = \langle 0,0,0 \rangle$ $P_2 = \langle 2,3,4 \rangle$

$$M = \left( \frac{2+0}{2}, \frac{3+0}{2}, \frac{4+0}{2} \right)$$

$$M = \langle 1, 3/2, 2 \rangle$$
$$M = \langle 1, 3/2, 2 \rangle$$

- Considere un peso de 50 N suspendido de dos alambres, como se muestra en la figura. Si la magnitud del vector $F_1$ es de 35 N, obtenga el ángulo $\alpha$ y la magnitud del vector $F_2$.

**46.**




$F_1 \operatorname{Sen}(\alpha) + F_2 \operatorname{Sen}(60) = 50$

① $35 \operatorname{Sen}(\alpha) + F_2 \operatorname{Sen}(60) = 50$

② $35 \operatorname{Cos}(\alpha) = F_2 \cos(60)$

③ $35 \operatorname{sen}(\alpha) = F_2 \operatorname{sen}(60)$

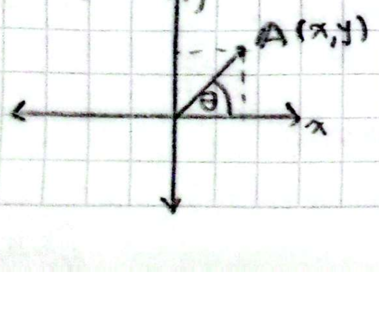
③ = ② por $F_2$

$$70 \cos(\alpha) = 70 \operatorname{sen}(\alpha)$$
$$\tan(\alpha) = 1 \quad \boxed{\alpha = 45}$$

$\alpha = 45$ $\quad F_2 = 35\sqrt{2}$

56. Vectores unitarios en el plano Demuestre que un vector unitario en el plano se puede expresar como $\mu = \cos\theta\, i + \operatorname{sen}\theta\, j$, obtenido al hacer girar el vector i un ángulo $\theta$ en dirección contraria a las manecillas del reloj. Explique por qué cualquier vector unitario en el plano puede expresarse en esta forma

Supongamos es el siguiente punto A en un plano xy, con ángulo $\theta$ $\vec{A} = \langle x, y \rangle$.




Ahora si $\vec{A}$ se desplaza cada vez más aumentando $\theta$ en la dirección propuesta, encontraremos un patrón.

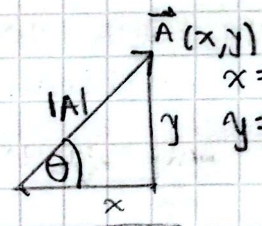
Escaneado con CamScanner

Antes de llegar a nuestro solución tenemos que determinar la dirección que tomara, nuestro vector $\vec{A}$, por definición sabemos que la dirección de nuestro vector será igual a su unitario:

$$\vec{u}_A = \frac{\vec{A}}{|A|}$$

Ahora, cuales son las componentes de nuestro unitario, para esto, recordemos que:

$$\vec{A} = \langle x, y \rangle = \langle x, 0 \rangle + \langle 0, y \rangle$$
$$= x \langle 1, 0 \rangle + y \langle 0, 1 \rangle$$
$$= x i + y j$$




$x = |A| \cos\theta$

$y = |A| \operatorname{sen}\theta$

$$\vec{A} = |A| \cos\theta \, i + A \operatorname{sen}\theta \, j \qquad |A| = \sqrt{(A\cos\theta)^2 + (A\operatorname{sen}\theta)^2} = A$$
$$\vec{A} = |A| (\cos\theta \, i + \operatorname{sen}\theta \, j)$$
$$\vec{A} = A (\cos\theta \, i + \operatorname{sen}\theta \, j)$$

$$\vec{u}_A = \frac{A(\cos\theta \, i + \operatorname{sen}\theta \, j)}{A} = \vec{u}_A = \cos\theta \, i + \operatorname{sen}\theta \, j$$

Lo que hemos encontrado es la dirección del vector $\vec{A}$ para todo ángulo $\theta$, por lo cual, se ha demostrado que podemos calcular la dirección de cualquier vector, si el vector depende de un factor $\theta$

$$u = \cos\theta \, i + \operatorname{sen}\theta \, j$$

Escaneado con CamScanner