Escuela Politécnica Nacional

Matemática avanzada

Nombre: Paula Sobando
Fecha: 24-10-2025
Curso: 2A

Deber 3

- Hacer los ejercicios de la sección 12.5

Obtenga las ecuaciones paramétricas de los ejercicios

(2) La recta que pasa por $P(1,2,-1)$ y $Q(-1,0,1)$

(1) $\overrightarrow{PQ} = (-1-1),(0-2),(1+1)$

$\overrightarrow{PQ} = (-2,-2,2) \rightarrow$ vector en dirección de la recta.

(2) $P + t\overrightarrow{PQ} = (1,2,-1) + t(-2,-2,2)$

donde $x = 1-2t$
$y = 2-2t$
$z = -1+2t$

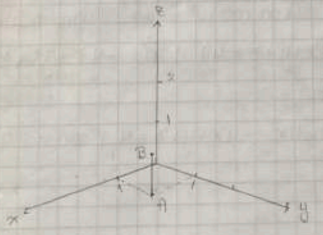
Obtenga las parametrizaciones de los segmentos de recta que unen los puntos dados. Dibuje los ejes de coordenadas y trace cada segmento, indicando la parametrización seleccionada.

(16) $A(1,1,0)$ $B=(1,1,1)$

$\overrightarrow{AB} = (1-1),(1-1),(1-0)$
$\overrightarrow{AB} = (0,0,1)$

$A + t\overrightarrow{AB} = (1,1,0) + t(0,0,1)$

$x = 1$
$y = 1$ cuando $z=0 \Rightarrow A$ $0 \leq t \leq 1$
$z = t$ cuando $z=1 \Rightarrow B$



Obtenga el plano determinado por las rectas que se intersecan.

(30) $L_1: x = t \; ; \; y = 3 - 3t \; ; \; z = -2 - t \; ; \; -\infty < t < \infty$

$L_2: x = 1 + s \; ; \; y = 4 + s \; ; \; z = -1 + s \; ; \; -\infty < s < \infty$

① Para L_1

Punto $P_1(0, 3, -2)$; Vector director $v_1 = (1, -3, -1)$

porque $r(t) = (0, 3, -2) + t(1, -3, -1)$

Para L_2

Punto $P_2(1, 4, -1)$; Vector director $v_2 = (1, 1, 1)$

porque $r(t) = (1, 4, -1) + t(1, 1, 1)$

② Encontrar t y s tales que [illegible]

$t = 1 + s$

$4 + s = 3 - 3t$
$s = 3 - 3(1+s) - 4$
$s = 3 - 3 - 3s - 4$
$4s = -4$
$s = -1$

$t = 1 + s$
$t = 1 - 1$
$t = 0$

③ Tomamos $t = 0$ en L_1 $(0, 3, -2) \rightarrow$ Punto de intersección

④ Vector normal al plano

$$v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-3+1)\vec{i} - (1+1)\vec{j} + (1+3)\vec{k}$$

$v_1 \times v_2 = -2\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$

⑤ Ecuación general del plano

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$-2(x - 0) + (-2)(y - 3) + 4(z + 2) = 0$$

$$-2x + 0 - 2y + 6 + 4z + 8 = 0$$

$$-2x - 2y + 4z = -12$$

Obtenga la distancia del punto al plano

(44) $(1, 0, -1)$, $-4x + y + z = 4$

vector normal al plano

$S = (1, 0, -1)$; Ec. del plano $= (-4x + y + z = 4)$; $\vec{n} = -4\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

① Encontrar un punto en el plano P

para que P esté en el plano debe cumplir $-4x + y + z = 4$; con $z = 0$ y $y = 0$

$-4x + 0 + 0 = 4$ $\qquad P = (-1, 0, 0)$

$x = -1$

② Distancia de P a S

$\vec{PS} = (1 - (-1)), (0 - 0), (-1 - 0) = (2, 0, -1)$

③ distancia del punto S al plano

$d = \frac{\vec{PS} \cdot \vec{n}}{|n|} = \frac{(2-(-1)) + (0-1) + (-1-1)}{3\sqrt{2}} = \frac{|-7|}{3\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$|n| = \sqrt{(-4)^2 + (1)^2 + (1)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

58 Obtenga las parametrizaciones para las rectas en las cuales los planos se intersecan.

① $3x - 6y - 2z = 3$, ② $2x + y - 2z =$

$n_1 = 3\vec{i} - 6\vec{j} - 2\vec{k}$ $\quad n_2 = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$

① Encontrar un vector $\vec{v}$ perpendicular a los vectores normales

$\vec{v} = n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -6 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (12+2)\vec{i} - (-6+4)\vec{j} + (3+12)\vec{k}$

$\vec{v} = 14\vec{i} + 2\vec{j} + 15\vec{k}$

② Buscar un punto en común a ambos planos con $z = 0$ $\boxed{\text{podemos usar cualquier valor a componente}}$

$\begin{cases} 3x - 6y = 3 & (-2) \\ 2x + y = 2 & (3) \end{cases}$ $\quad$ $\begin{aligned} -6x + 12y &= -6 \\ 6x + 3y &= 6 \\ 15y &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$ $\quad$ $\begin{aligned} 3x - 6(0) &= 3 \\ x &= 1 \end{aligned}$

$P(1, 0, 0)$

③ Ecuaciones paramétricas de la recta $\vec{P} + t\vec{v}$

$\begin{cases} x = 1 + 14t \\ y = 2t \\ z = 15t \end{cases}$

72 Suponga que L_1 y L_2 son rectas no paralelas disjuntas (que no se cortan) ¿Es posible que un vector no nulo sea perpendicular a ambas?

Si es posible que este vector exista ya que este estaría determinado por el producto cruz de los vectores directores de las rectas

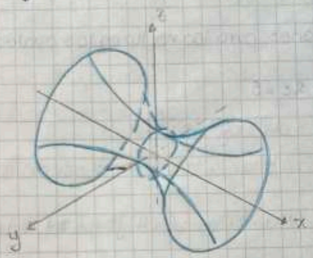
$\vec{v} = d_1 \times d_2$.

- Ejercicios de la sección 12.6. (63)

Forme un par con cada ecuación y la superficie que ésta define. También identifique cada superficie por su tipo (paraboloide, elipsoide, etcétera)

(2) $z^2 + 4y^2 - 4x^2 = 4$

i.



Superficie: hiperboloide de una hoja

La variable con el signo negativo (x) indica el eje asociado a la hoja

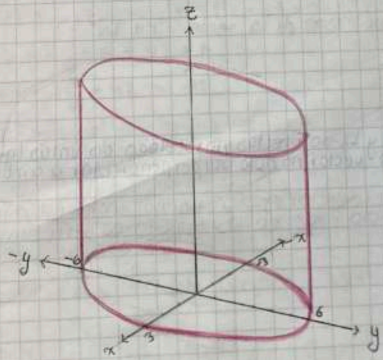
La hiperboloide está a lo largo del eje x.

Corresponde a la figura i.

Trace las superficies

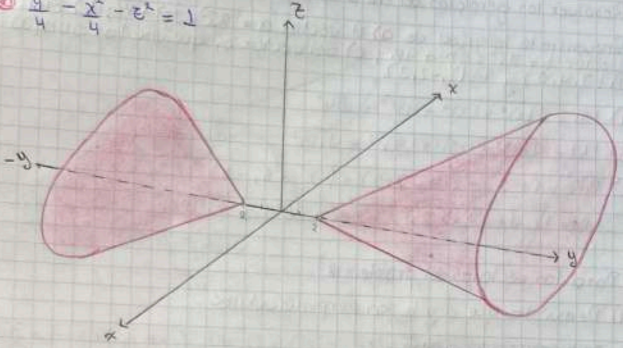
Cilindros

(16) $4x^2 + y^2 = 36$



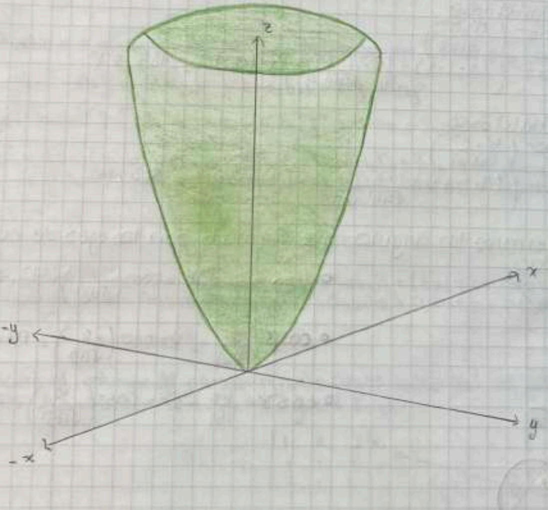
Hiperboloides

(30) $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{4} - z^2 = 1$



Diversas

(44) $x^2 + y^2 = z$



- Resolver los ejercicios del 18 al 42 del libro de Ayres cap. 30.

(18) Encuentre la longitud de a) el vector $a = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$; b) del vector $b = 3\vec{i} - 5\vec{j} + 9\vec{k}$; c) del vector c, que une los puntos $P_1(3,4,5)$ y $P_2(1,-2,3)$.

a) $|a| = \sqrt{(2)^2 + (3)^2 + (1)^2} = \sqrt{14}$

b) $|b| = \sqrt{(3)^2 + (-5)^2 + (9)^2} = \sqrt{115}$

c) $\overrightarrow{P_1P_2} = (1-3,\ -2-4,\ 3-5) = (-2,\ -6,\ -2)$

$|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$

(19) Para los vectores del problema 18

a) Demuestre que a y b son perpendiculares

Si $a \perp b$ entonces $a \cdot b = 0$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (2 \cdot 3) + (3 \cdot (-5)) + (1 \cdot 9) = 6 - 15 + 9 = 0$

b) Halle el ángulo más pequeño entre a y c, y entre b y c

- $\vec{a} \cdot \vec{c} = |a||c| \cos\theta$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|a||c|}\right)$

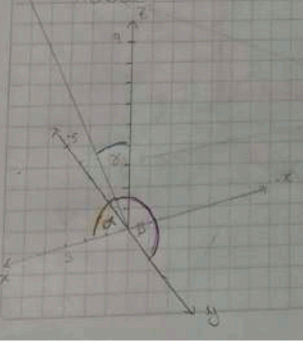
$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{(2 \cdot (-2)) + (3 \cdot (-6)) + (1 \cdot (-2))}{\sqrt{14}\sqrt{44}}\right) = 165{,}24°$

- $\vec{b} \cdot \vec{c} = |b||c| \cos\theta$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|b||c|}\right)$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{(3 \cdot (-2)) + (-5 \cdot (-6)) + (9 \cdot (-2))}{\sqrt{44}\sqrt{115}}\right) = 83{,}16°$

c) Determine los ángulos que forma b con los ejes de coordenadas

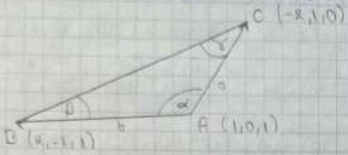


- $\cos\alpha = \frac{b_1}{|b|} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{115}}\right) = 73{,}75°$

- $\cos\beta = \frac{b_2}{|b|} \Rightarrow \beta = \cos^{-1}\left(\frac{-5}{\sqrt{115}}\right) = 117{,}79°$

- $\cos\gamma = \frac{b_3}{|b|} \Rightarrow \gamma = \cos^{-1}\left(\frac{9}{\sqrt{115}}\right) = 32{,}94°$

㉔ Halle los ángulos interiores β y γ del triángulo



$\vec{CA} = (1+2),(0-1),(1-0) = (3,-1,1)$ $\quad |\vec{CA}| = \sqrt{(3)^2+(-1)^2+(1)^2} = \sqrt{11}$

$\vec{CB} = (2+2),(-1-1),(1-0) = (4,-2,1)$ $\quad |\vec{CB}| = \sqrt{(4)^2+(-2)^2+(1)^2} = \sqrt{21}$

$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = |\vec{CA}||\vec{CB}| \cos\gamma$

$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{(3\cdot 4)+(-1\cdot(-2))+(1\cdot 1)}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{21}}\right) = 9{,}27°$

$\vec{BC} = (-2-2),(1+1),(0-1) = (-4,2,-1)$ $\quad |\vec{BC}| = \sqrt{(-4)^2+(2)^2+(-1)^2} = \sqrt{21}$

$\vec{BA} = (1-2),(0+1),(1-1) = (-1,1,0)$ $\quad |\vec{BA}| = \sqrt{(1)^2+(1)^2+(0)^2} = \sqrt{2}$

$\vec{BC} \cdot \vec{BA} = |\vec{BC}||\vec{BA}| \cos\beta$

$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{(-4\cdot(-1))+(2\cdot 1)+(-1\cdot 0)}{\sqrt{21}\,\sqrt{2}}\right) = 22{,}20°$

㉕ Pruebe que el vector de (6o.u) es perpendicular tanto a a como a b.

$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ $\qquad \vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$

$\vec{c} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\vec{j} + (a_1b_2 - b_1a_2)\vec{k}$

$\vec{a}\cdot\vec{c} = (a_1\cdot(a_2b_3 - a_3b_2)) + (a_2\cdot(-a_1b_3 + a_3b_1)) + (a_3(a_1b_2 - b_1a_2))$

$= \cancel{a_1a_2b_3} - \cancel{a_1a_3b_2} - \cancel{a_1a_2b_3} + \cancel{a_2a_3b_1} + \cancel{a_1a_3b_2} - \cancel{a_2a_3b_1}$

$= 0$

si $\vec{a}\cdot\vec{c} = 0$ entonces $a \perp c$

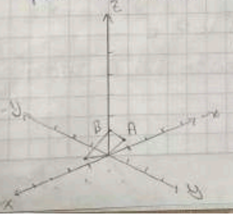
$\vec{b}\cdot\vec{c} = (b_1\cdot(a_2b_3 - a_3b_2)) + (b_2(-a_1b_3 + a_3b_1)) + (b_3(a_1b_2 - b_1a_2))$

$= (\cancel{a_2b_1b_3} - \cancel{a_3b_1b_2} - \cancel{a_1b_2b_3} + \cancel{a_3b_1b_2} + \cancel{a_1b_2b_3} - \cancel{a_2b_1b_3})$

$= 0$

si $\vec{b}\cdot\vec{c} = 0$ entonces $b \perp c$

㉘ Calcule el volumen del paralelepípedo cuyos lados son OA, OB y OC para A (1,2,3), B (1,1,2) y C (2,1,1)



$|A\times B|\cdot C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$

$= [(1)(1-2)] - [(2)(1-4)] + [3(1-2)]$

$= -1 + 6 - 3$

$= 2$

(3) Encuentre el menor ángulo de la intersección de los planos $5x-14y+2z-8=0$ y $10x-11y+2z+15=0$

Plano 1: $5x-14y+2z=8$ Plano 2: $10x-11y+2z=-15$

$\vec{n_1}=5\vec{i}-14\vec{j}+2\vec{k}$ $\vec{n_2}=10\vec{i}-11\vec{j}+2\vec{k}$

$|\vec{n_1}|=\sqrt{(5)^2+(-14)^2+(2)^2}=15$ $|\vec{n_2}|=\sqrt{(10)^2+(-11)^2+(2)^2}=15$

$\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=|n_1||n_2|\cos\theta$

$\theta=\cos^{-1}\left(\dfrac{(5\cdot10)+(-14\cdot-11)+(2\cdot2)}{225}\right)=22{,}41^\circ$

(34) Defina una recta que pasa por $P_0(x_0,y_0,z_0)$ como el lugar de todos los puntos $P(x,y,z)$ tales $\vec{P_0P}$ y $\vec{OP_0}$ son perpendiculares. Pruebe que su ecuación vectorial $(r-r_0)\times r_0=0$

Queremos demostrar que $P(x,y,z)$ que cumplen $(r-r_0)\times r_0=0$ forman una recta que pasa por $P_0(x_0,y_0,z_0)$

$(r-r_0)\times r_0=0$ significa que son paralelos, ser paralelos significa que uno es múltiplo de otro

$r-r_0=t\,r_0$ donde $t\in\mathbb{R}$

$\to r=t\,r_0+r_0$

$r=r_0(t+1)$ eso muestra que r es múltipo de r_0

Es decir, el punto P está en la misma línea que el origen O y el punto P_0

$(r-r_0)\times r_0=0$ representa la recta que pasa por O y P_0.

(37) Si $r_0=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $r_1=2\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$ y $r_2=3\vec{i}+5\vec{j}+7\vec{k}$ son tres vectores de posición, muestre que $r_0\times r_1+r_1\times r_2+r_2\times r_0=0$ ¿Qué puede decir de los puntos terminales de estos vectores?

(1) $r_0\times r_1=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&1&1\\2&3&4\end{vmatrix}=(4-3)\vec{i}-(4-2)\vec{j}+(3-2)\vec{k}=\vec{i}-2\vec{j}+1\vec{k}$

(2) $r_1\times r_2=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&3&4\\3&5&7\end{vmatrix}=(21-20)\vec{i}-(14-12)\vec{j}+(10-9)=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$

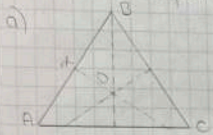
(3) $r_2\times r_0=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&5&7\\1&1&1\end{vmatrix}=(5-7)\vec{i}-(3-7)\vec{j}+(3-5)\vec{k}=-2\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}$

(4) $(\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k})+(\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k})+(-2\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k})=0$ ▫

Los tres vectores de posición tienen sus puntos en P_0, P_1, P_2 en una misma recta que pasa por el origen.

40 Pruebe: a) Las perpendiculares levantadas en los puntos medios de los lados de un triángulo se cortan en un punto. b) Las perpendiculares bajadas desde los vértices hasta los lados opuestos (prolongados si es necesario) de un triángulo se cortan en un punto.

a)



$m_{AB} = \frac{a+b}{2}$, la bisectriz que pasa por AB es la recta que pasa por m_{AB} y está a igual distancia de A y B, se escribe:

$$\|x-a\| = \|x-b\|$$
$$(x-a)^2 = (x-b)^2$$
$$\cancel{x^2} - 2ax + a^2 = x^2 - 2bx + b^2$$
$$-2ax + 2bx = -a^2 + b^2$$
$$x(b-a) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$
$$m_{AB}(b-a) = \frac{1}{2}(b+a)(b-a) = \frac{1}{2}(b\cdot b - a\cdot a)$$

Haciendo lo mismo con los puntos AC y BC obtenemos ecuaciones lineales independientes que intersecan en un punto O, lo que satisface

$\|O-a\| = \|O-b\| = \|O-c\|$, está a la misma distancia de los vértices, siendo el circuncentro.

b)

$(x-a)\cdot(b-c) = 0$ pues el vector director de A es perpendicular a BC

$(x-b)\cdot(c-a) = 0$

Tomamos estas dos ecuaciones:

$$xb - xc - ab + ac = 0$$
$$x(b-c) = ab - ac$$
$$x(b-c) = a(b-c) \quad ①$$

$$xc - xa - bc + ba = 0$$
$$x(c-a) = bc - ba$$
$$x(c-a) = b(c-a) \quad ②$$

Sumamos ① y ②

$$xb - xc - ab + ac + xc - xa - bc + ba = 0$$
$$xb - xa = bc - ac$$
$$x(b-a) = c(b-a)$$
$$(x-c)(b-a) = 0$$

Las perpendiculares concurren en el ortocentro