Die Türme von Hanoi mit variabler Platzanzahl

Heidelberger Schülersymposium 2019

13.05.2019

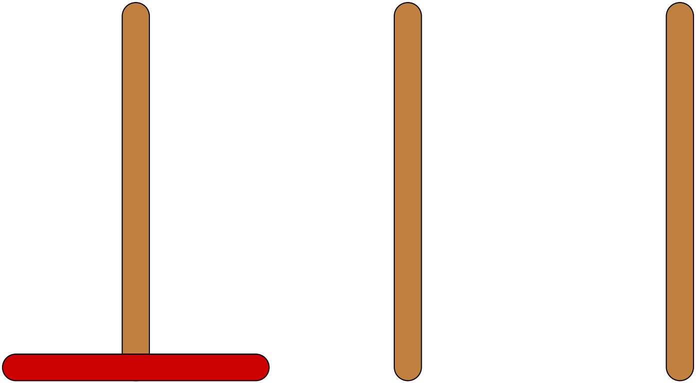
Einleitung

Türme von Hanoi

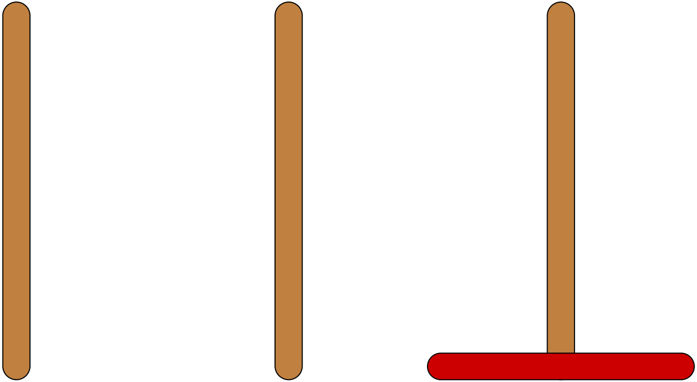
Es gibt n Scheiben und k Plätze, wobei zu Beginn alle Scheiben auf dem ersten Platz liegen.
Ziel des Spieles ist es, alle Scheiben auf den letzte Platz zu stapeln.

- In jedem Zug wird die oberste Scheibe eines Platzes bewegt
- Es darf nie eine größere Scheibe auf eine kleinere Scheibe gelegt werden

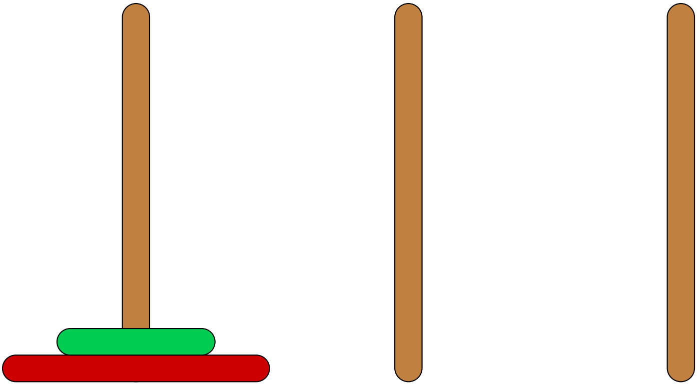
Anfangskonfiguration



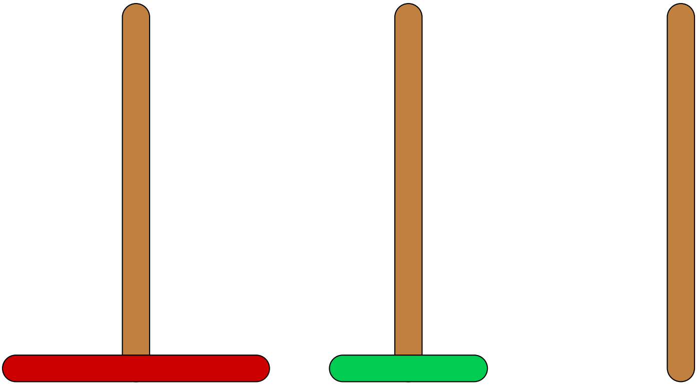
Nach Zug 1 - Endkonfiguration



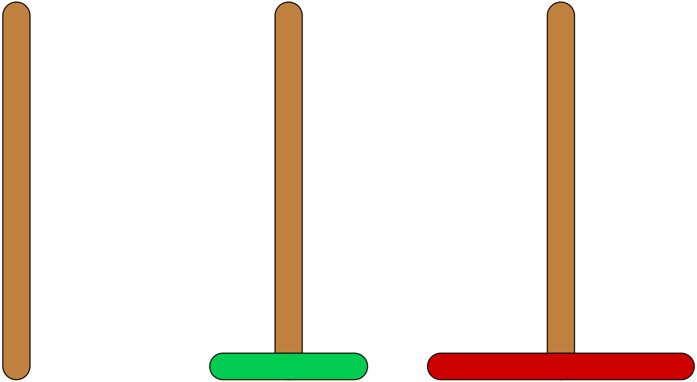
Anfangskonfiguration



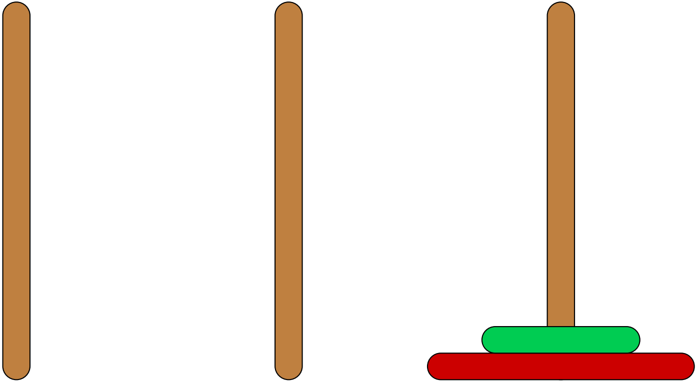
Nach Zug 1



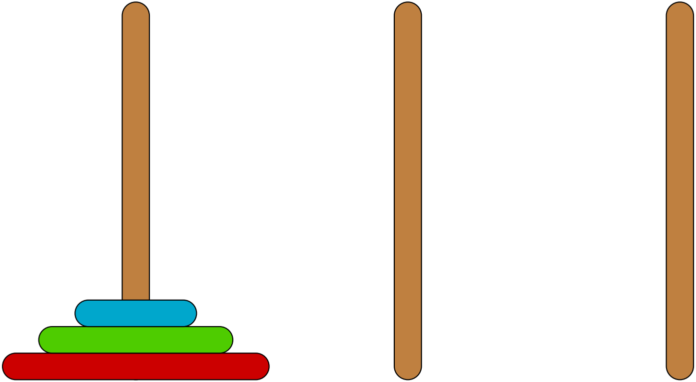
Nach Zug 2 - Zwischenturmkonfiguration



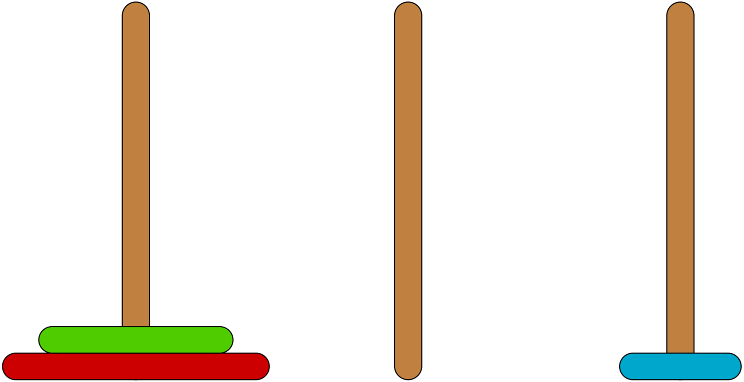
Nach Zug 3 - Endkonfiguration



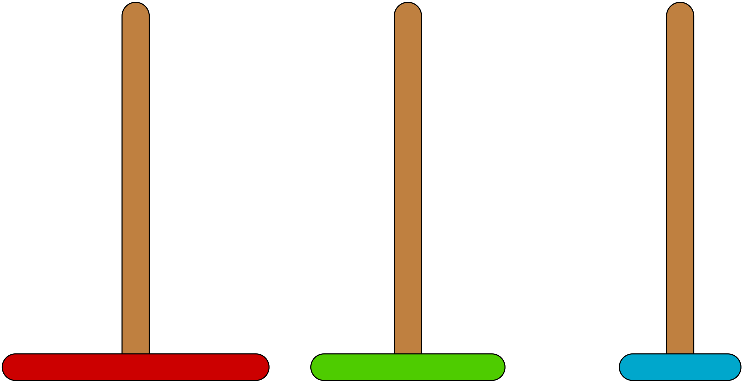
Anfangskonfiguration



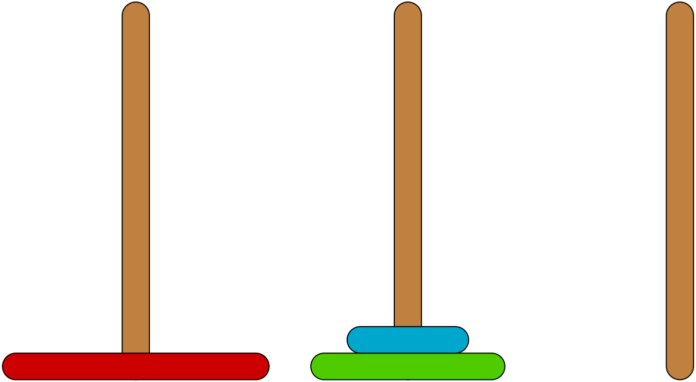
Nach Zug 1



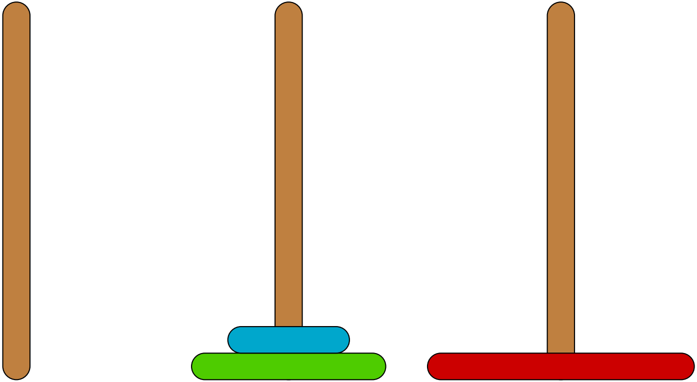
Nach Zug 2



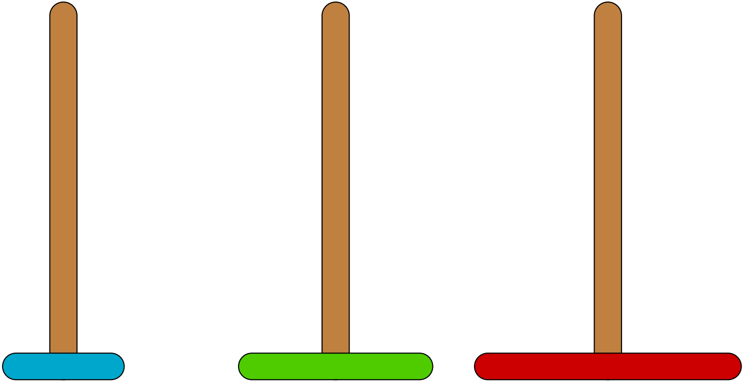
Nach Zug 3



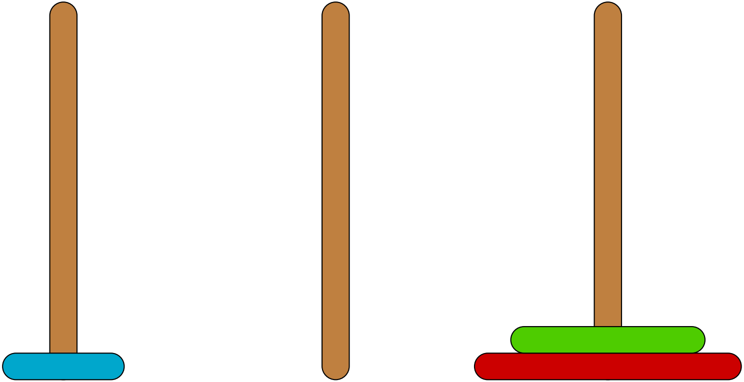
Nach Zug 4 - Zwischenturmkonfiguration



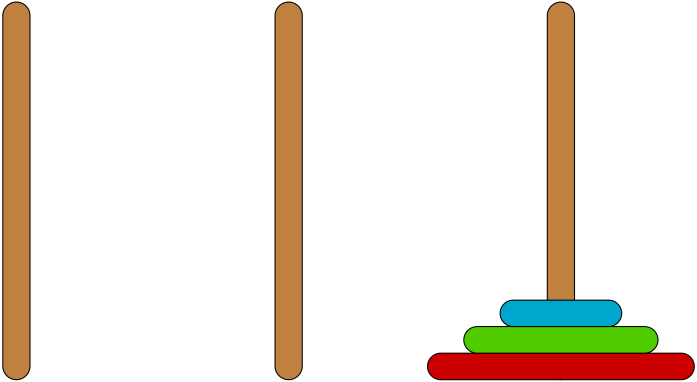
Nach Zug 5



Nach Zug 6



Nach Zug 7 - Endkonfiguration



Gesetzmäßigkeit

Definition

$M(n,k) :=$ minimale Zugzahl bei n Scheiben und k Plätzen

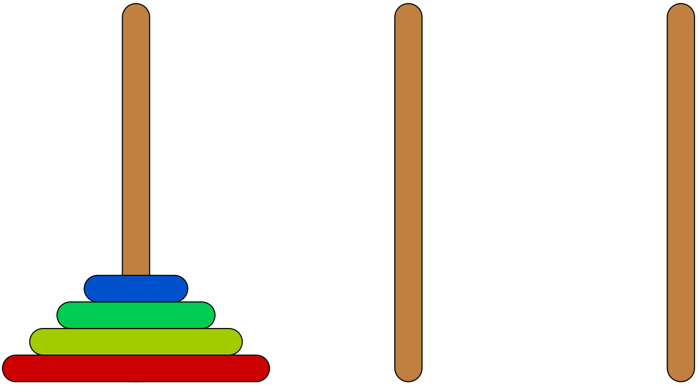
Scheiben	Benötigte Züge
1	1
2	3
3	7

Tabelle: Zugzahl bei 3 Plätzen

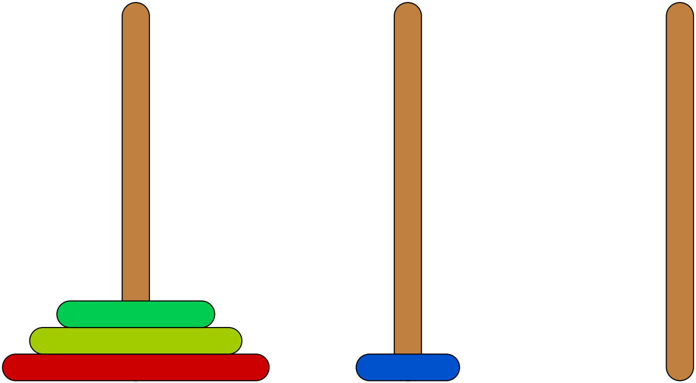
Vermutung:

$$M(n,3) = 2^n - 1$$

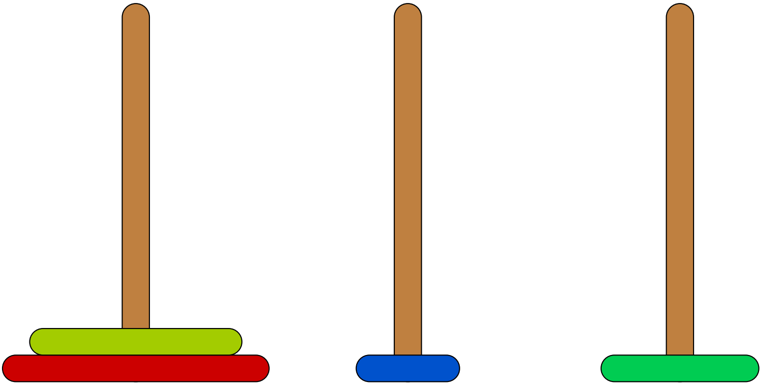
Anfangskonfiguration



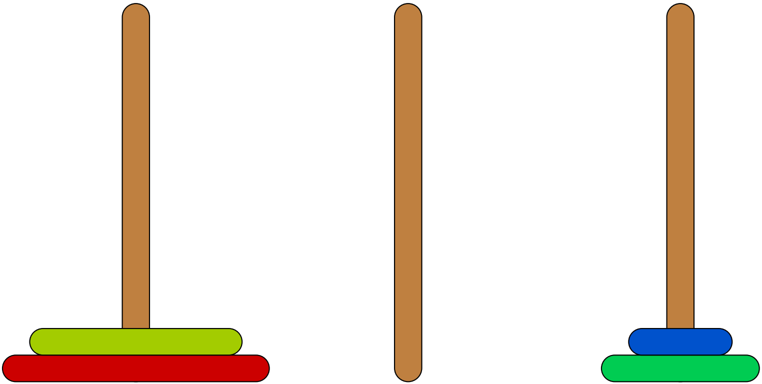
Nach Zug 1



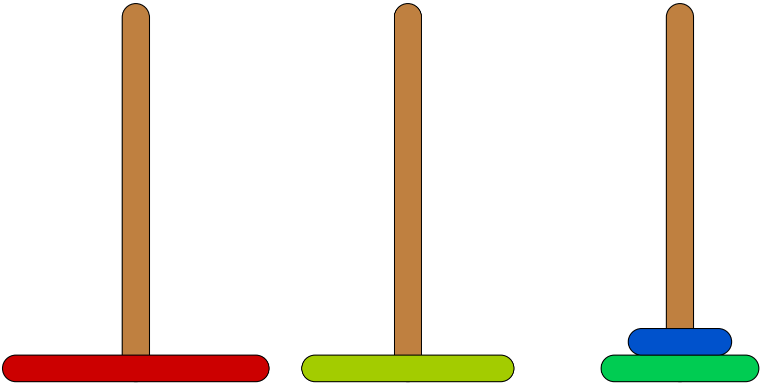
Nach Zug 2



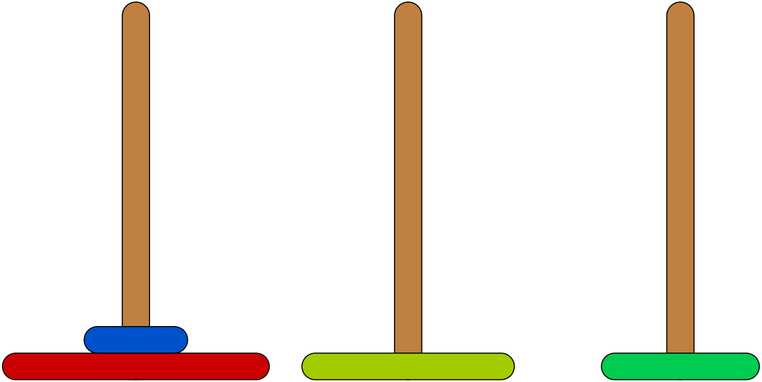
Nach Zug 3



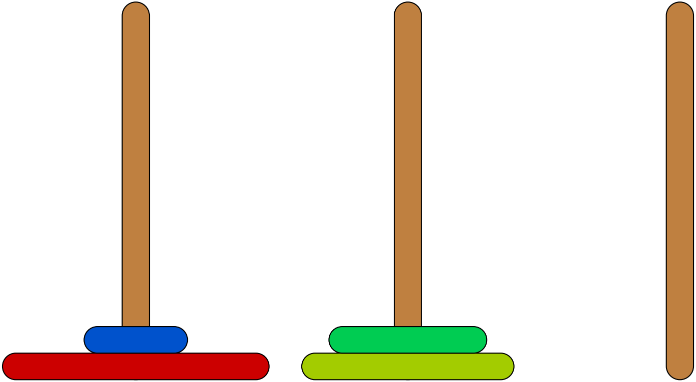
Nach Zug 4



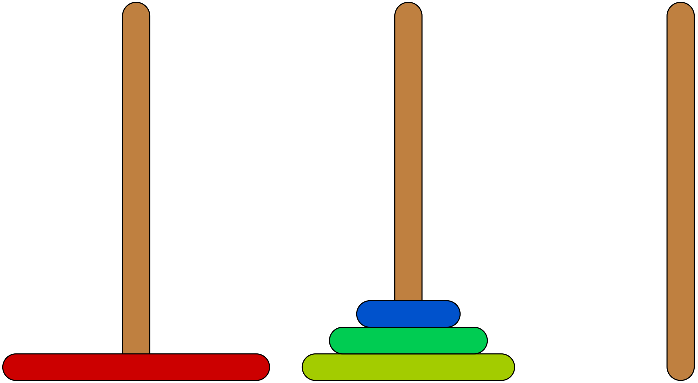
Nach Zug 5



Nach Zug 6



Nach Zug 7



Was haben wir bisher gemacht?

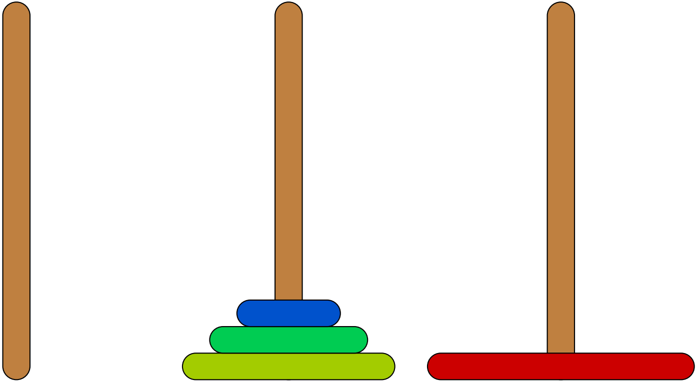
- 3 Scheiben vom ersten auf den zweiten Platz bewegt
- Benötigte Züge: 7

Interessant!

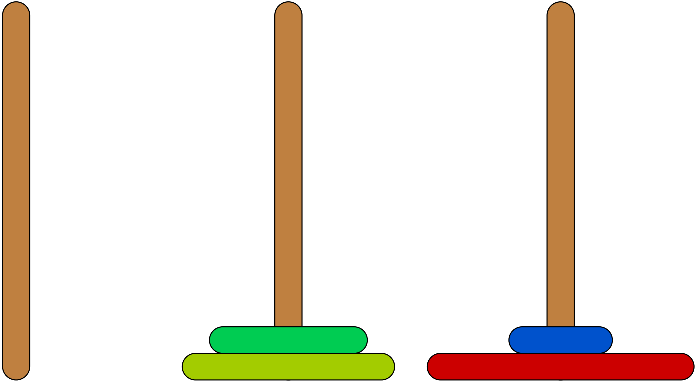
Im Prinzip ist das genau das, was wir bei 3 Scheiben gemacht haben:

- 3 Scheiben von einem Platz auf einen anderen bewegt
- Benötigte Züge: 7

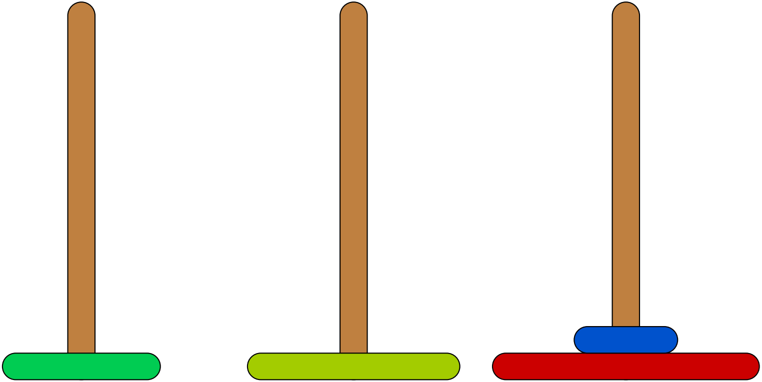
Nach Zug 8 - Zwischenturmkonfiguration



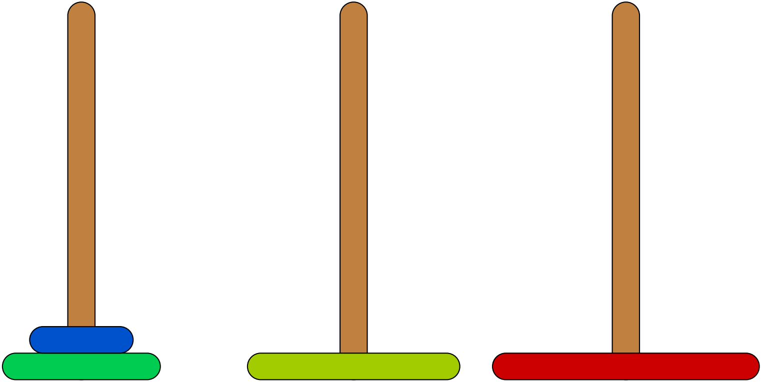
Nach Zug 9



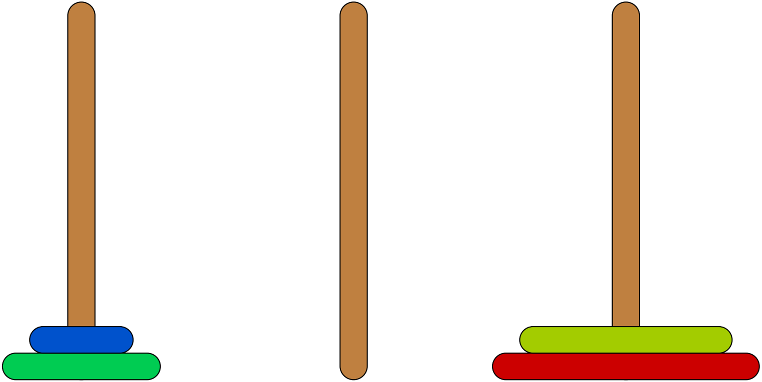
Nach Zug 10



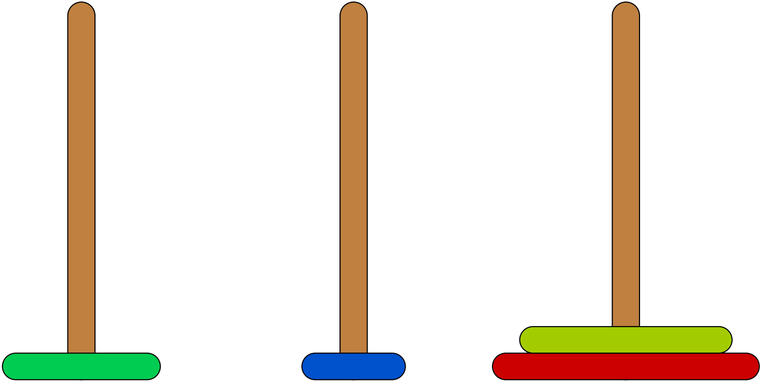
Nach Zug 11



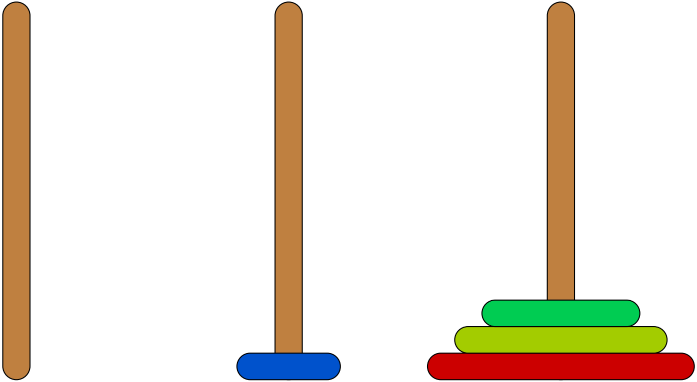
Nach Zug 12



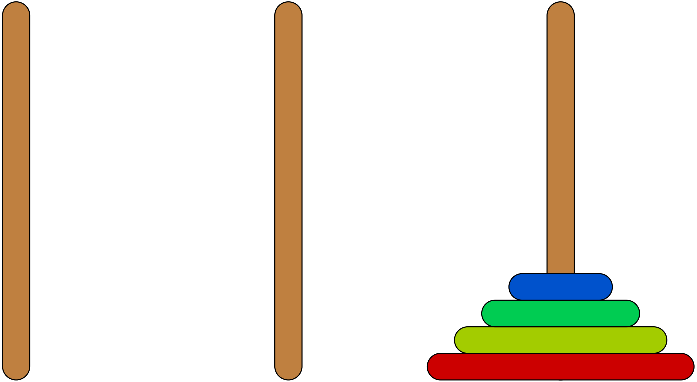
Nach Zug 13



Nach Zug 14



Nach Zug 15 - Endkonfiguration



Warum ist das so?

Beweis.

Induktionsanfang: **(**$n = 1$**)** $M(1,3) = 2^1 - 1 = 1$
Induktionsannahme: **(**$n = k$**)** $M(k,3) = 2^k - 1$
Induktionsschritt: **(**$n = k + 1$**)**

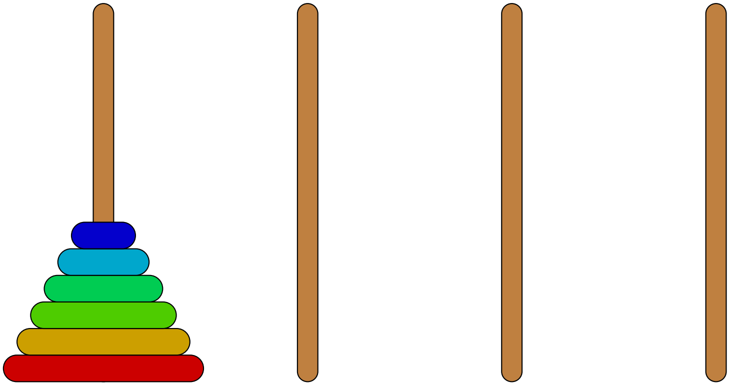
- Bewege k Scheiben von Platz 1 auf Platz 2
- Bewege die größte Scheibe von Platz 1 auf Platz 3
- Bewege k Scheiben von Platz 2 auf Platz 3

Das benötigt insgesamt $M(k,3) + 1 + M(k,3)$ Züge. Wir können aufgrund der Induktionsannahme $M(k,3) = 2^k - 1$ annehmen.

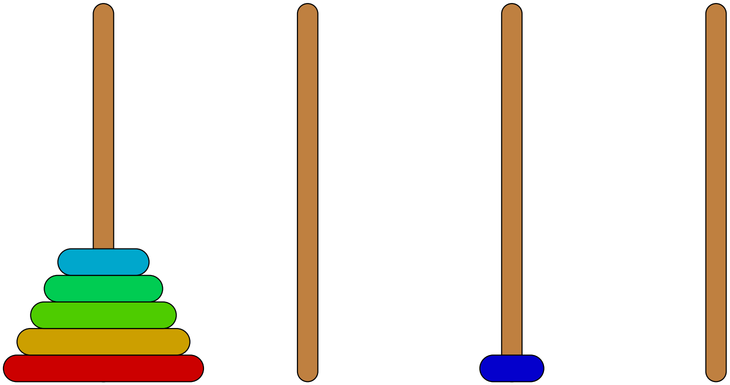
$$M(k+1,3) = 2 * M(k,3) + 1 = 2 * (2^k - 1) + 1 = 2^{k+1} - 1$$

□

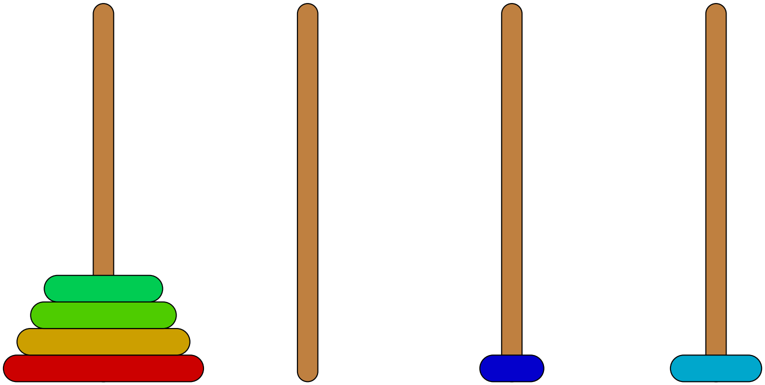
Anfangskonfiguration



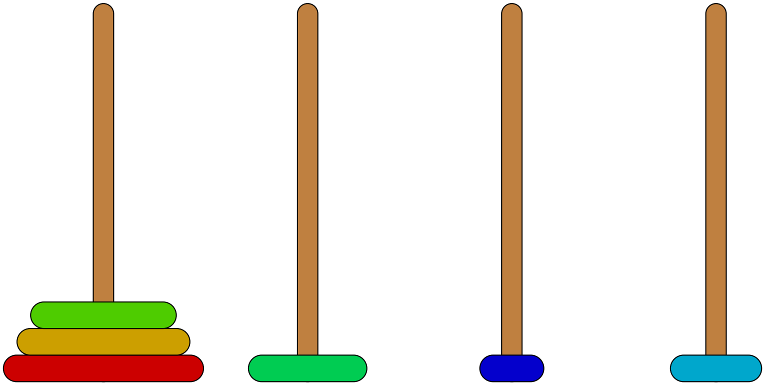
Nach Zug 1



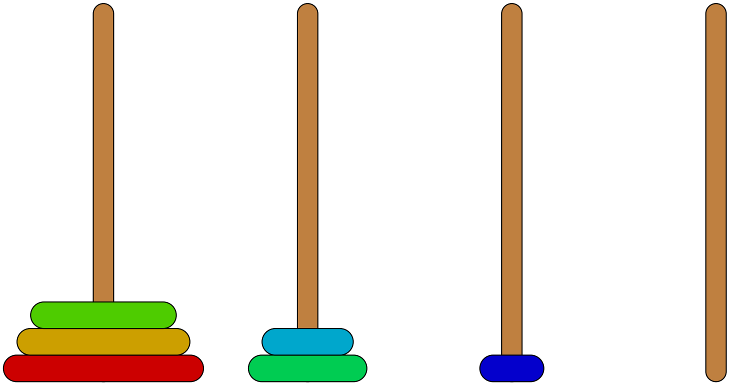
Nach Zug 2



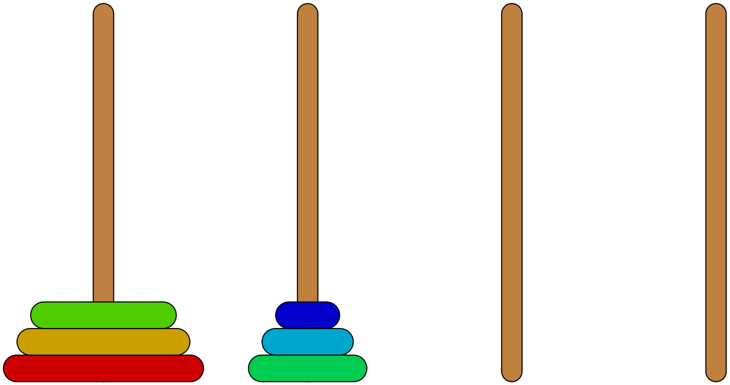
Nach Zug 3



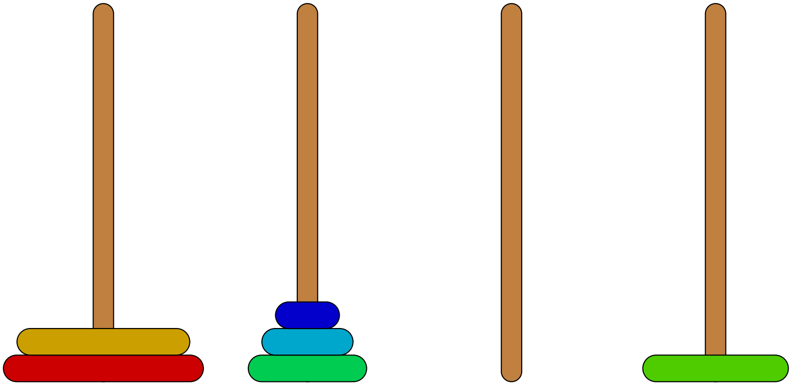
Nach Zug 4



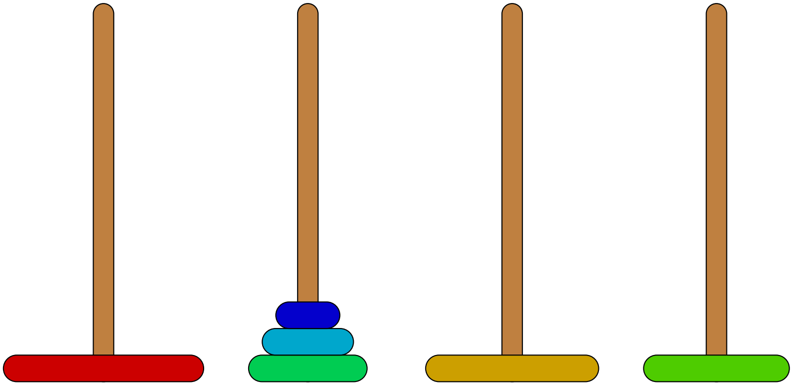
Nach Zug 5



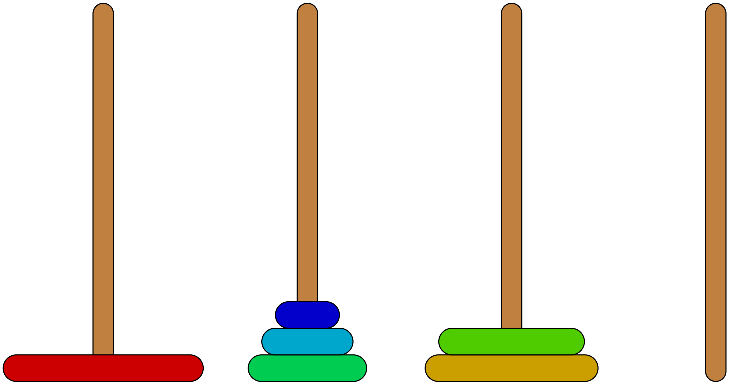
Nach Zug 6



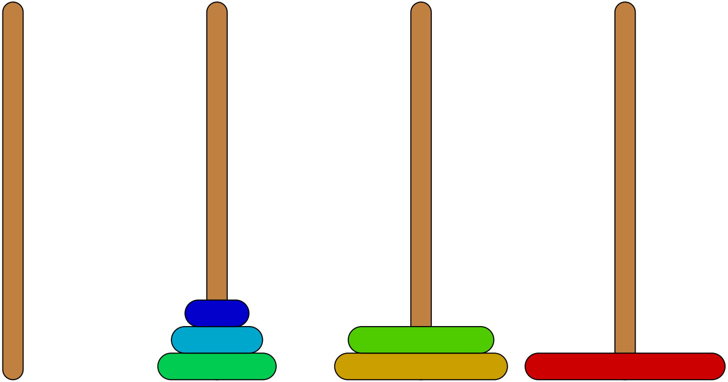
Nach Zug 7



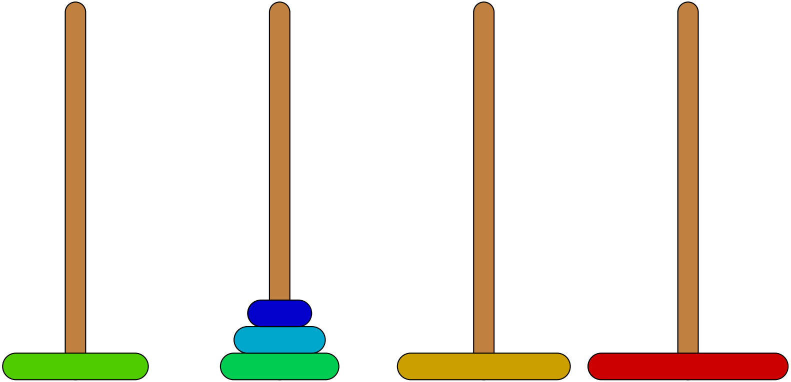
Nach Zug 8



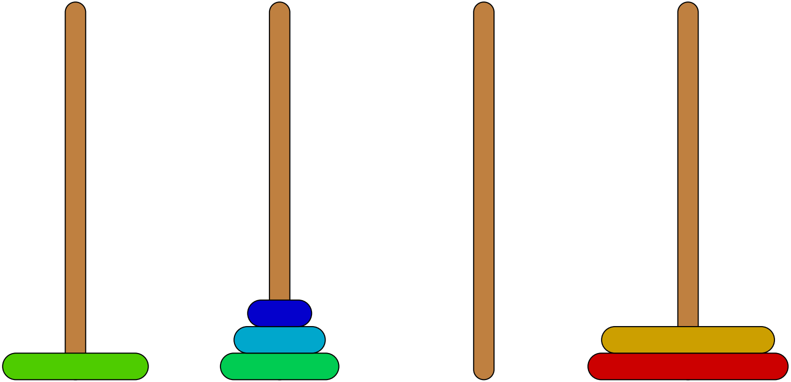
Nach Zug 9 - Zwischenturmkonfiguration



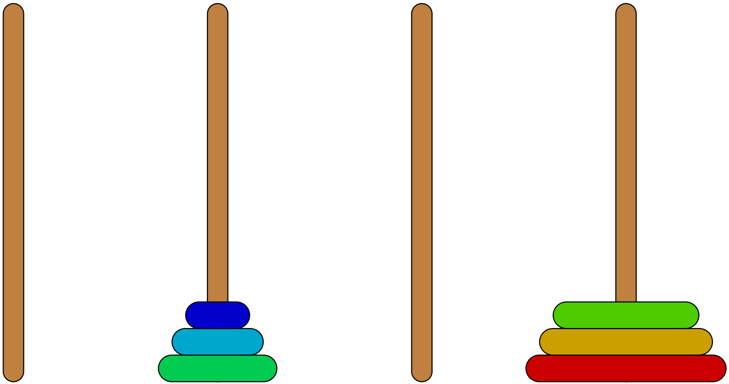
Nach Zug 10



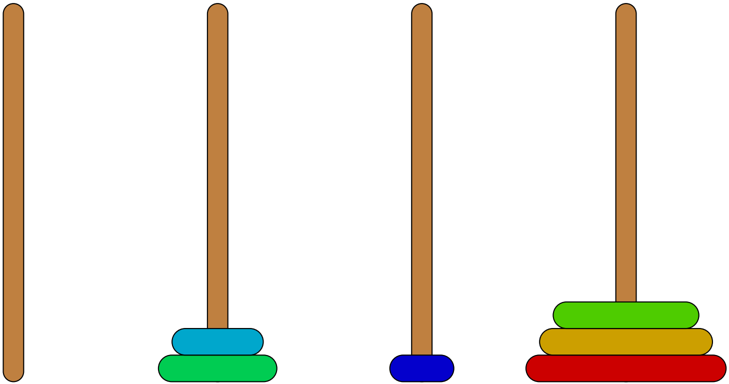
Nach Zug 11



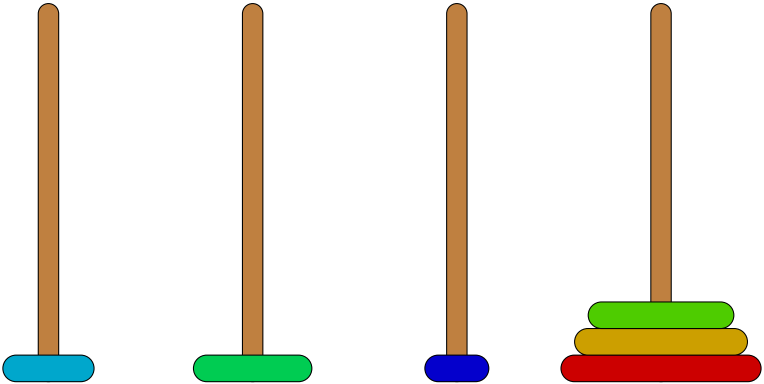
Nach Zug 12



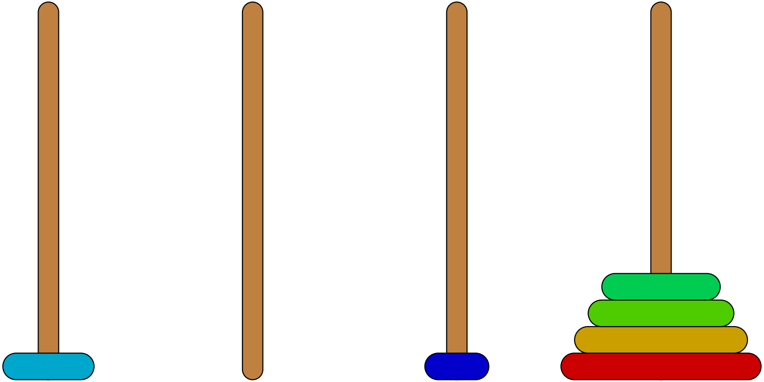
Nach Zug 13



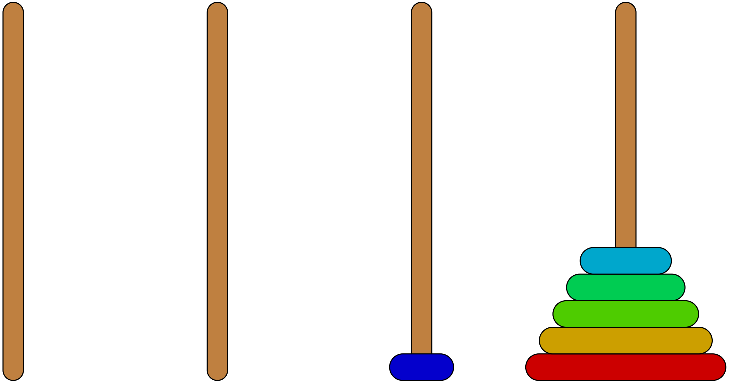
Nach Zug 14



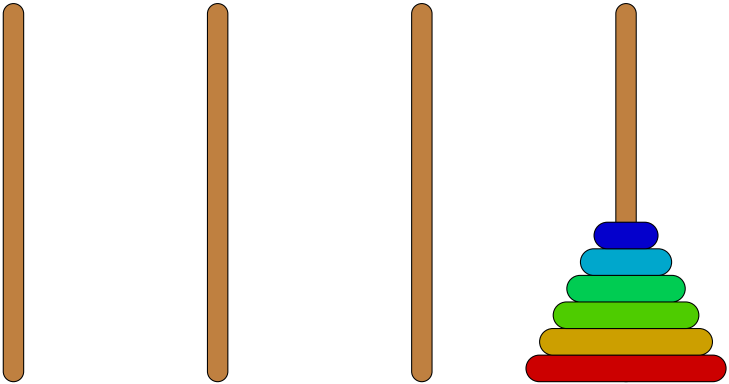
Nach Zug 15



Nach Zug 16



Nach Zug 17 - Endkonfiguration



Strategie

Wie gehen wir nun bei 4 oder mehr Plätzen vor?

- Wir stapeln einige Scheiben von Platz 1 auf Platz 2.
- Wir stapeln einige Scheiben von Platz 1 auf Platz 3.
- ...
- Wir stapeln einige Scheiben von Platz 1 auf Platz $k-1$.
- Wir stapeln die größte Scheibe um.
- Wir stapeln die Scheiben von Platz $k-1$ auf Platz k.
- ...
- Wir stapeln die Scheiben von Platz 3 auf Platz k.
- Wir stapeln die Scheiben von Platz 2 auf Platz k.

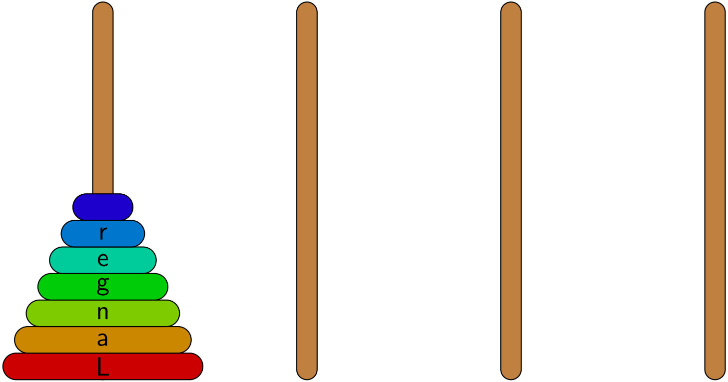
Kryptographie

- Wir verschlüsseln den Text „Langer Text "
- Dazu wählen wir 4 Parameter: n, k, $step$ und $movecount$

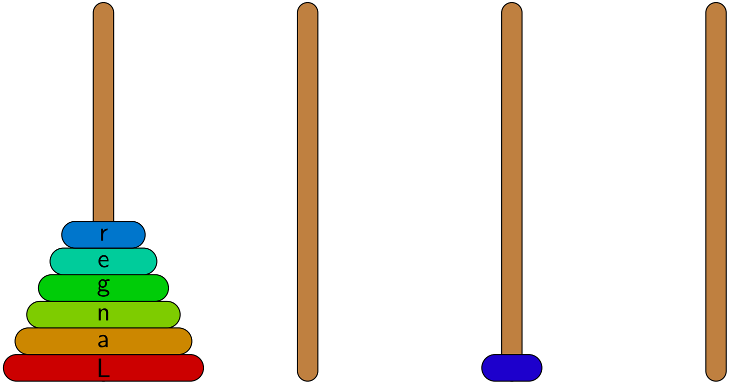
Beispiel

$n = 7,\ k = 4,\ step = 4,\ movecount = 15$

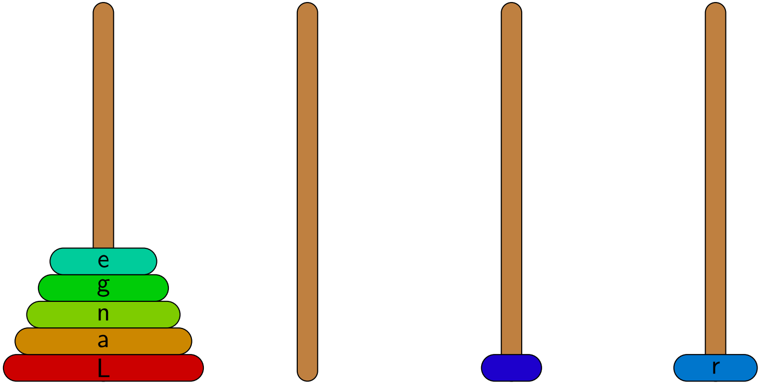
Anfangskonfiguration



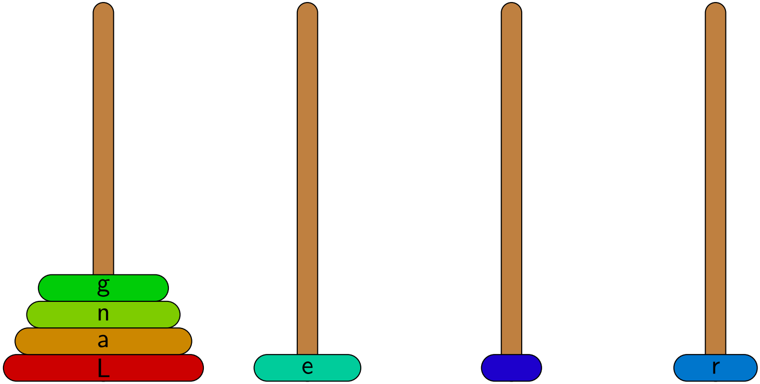
Nach Zug 1



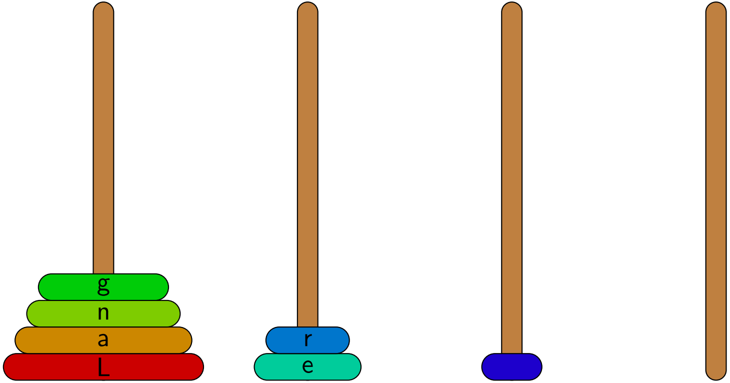
Nach Zug 2



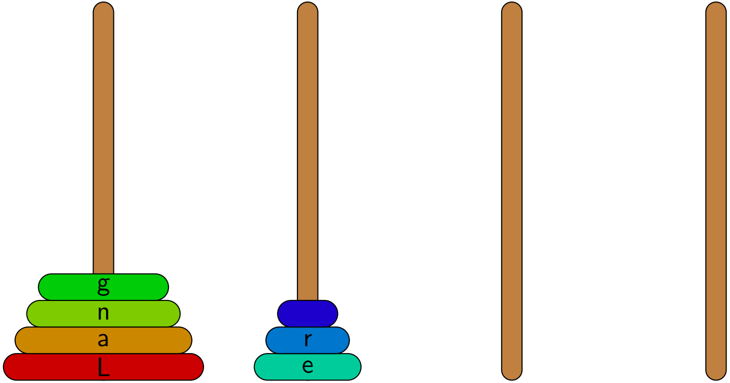
Nach Zug 3



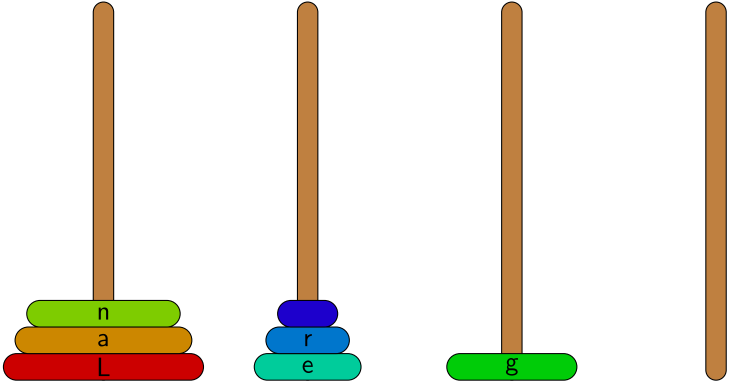
Nach Zug 4



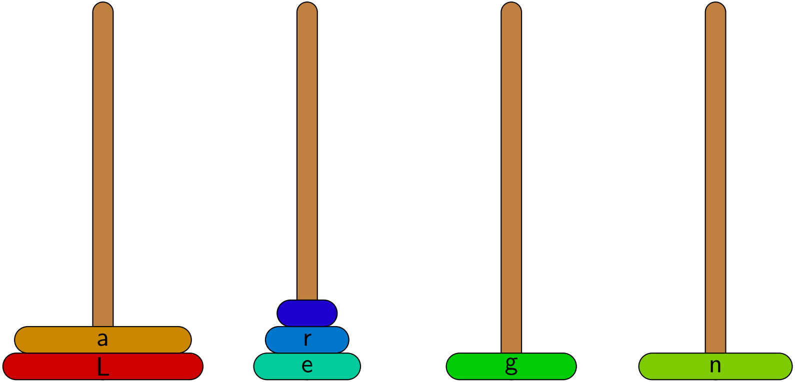
Nach Zug 5



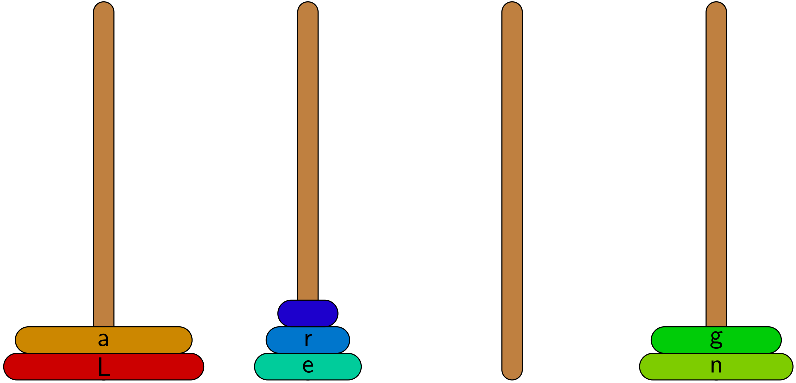
Nach Zug 6



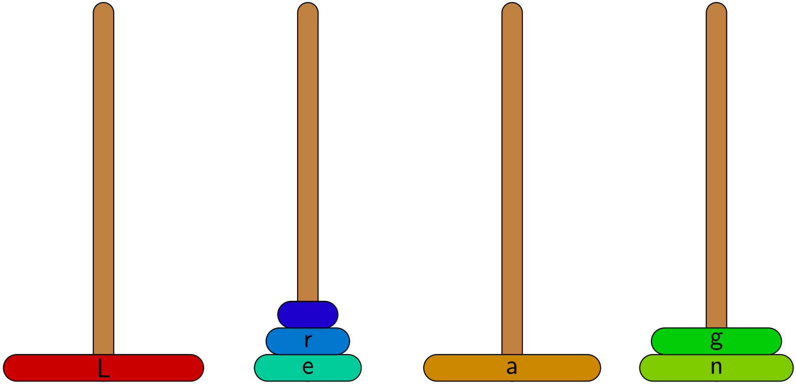
Nach Zug 7



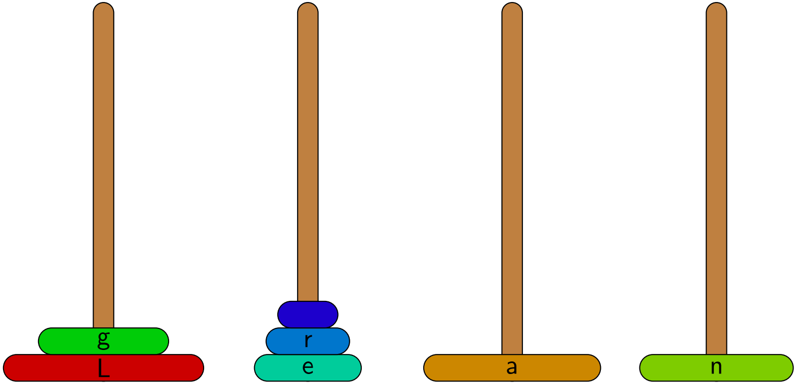
Nach Zug 8



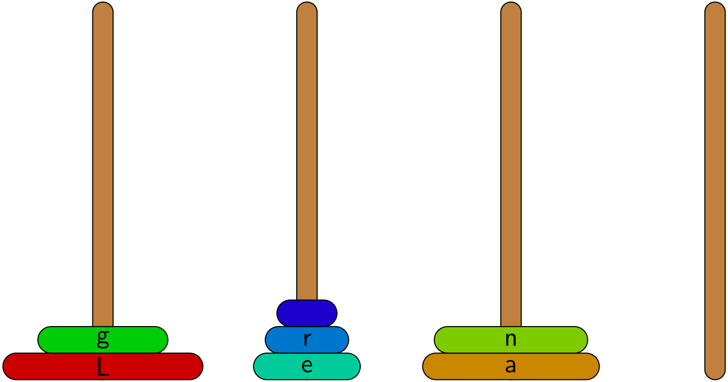
Nach Zug 9



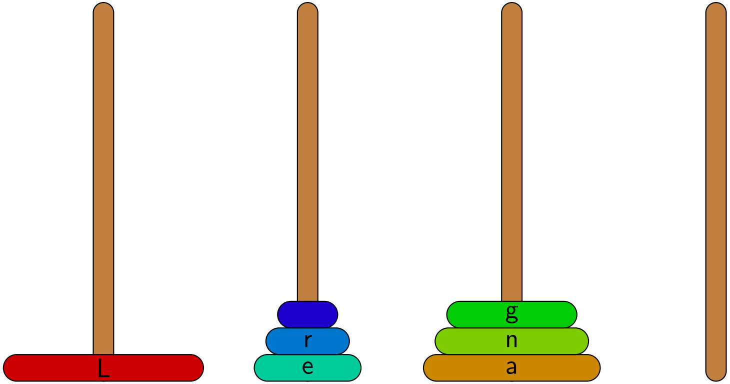
Nach Zug 10



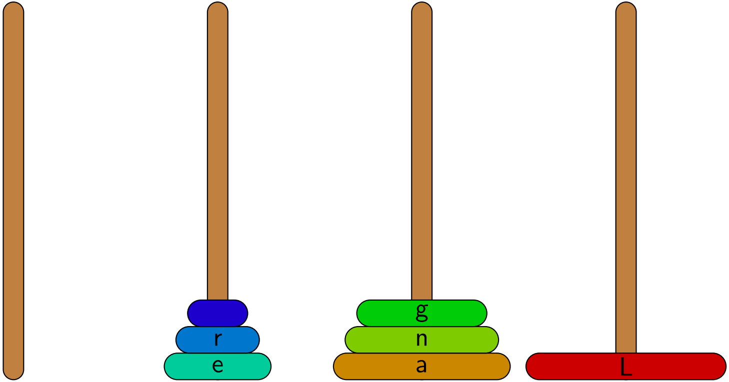
Nach Zug 11



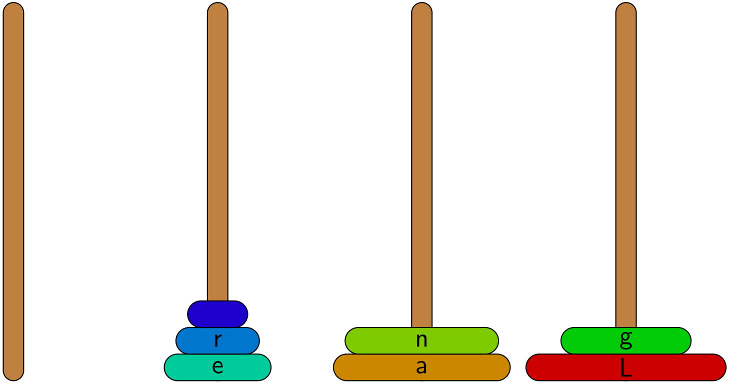
Nach Zug 12



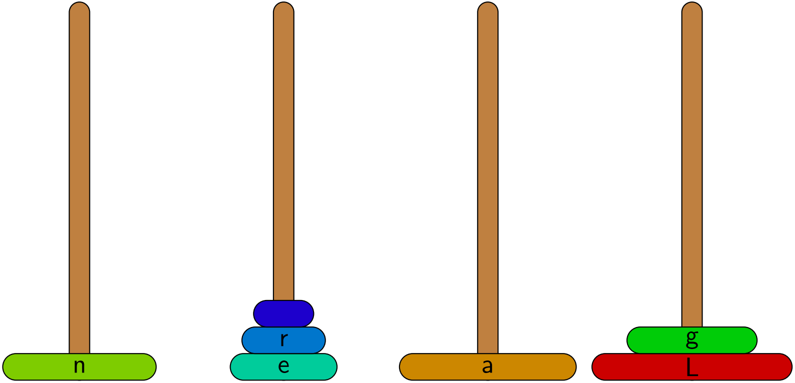
Nach Zug 13 - Zwischenturmkonfiguration



Nach Zug 14



Nach Zug 15

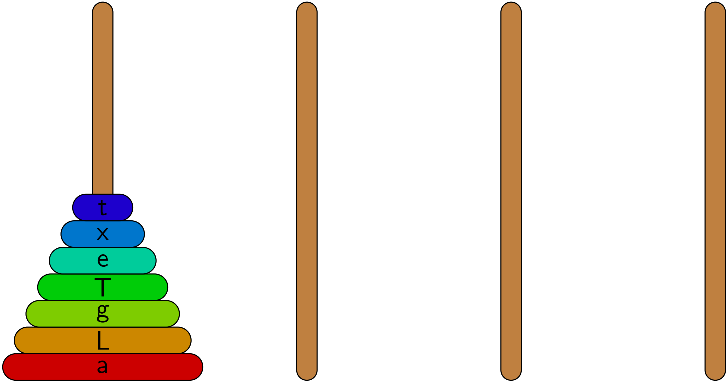


- Wir verschlüsseln den Text „Langer Text“
- Dazu wählen wir 4 Parameter: n, k, *step* und *movecount*
- Dann verschlüsseln wir die ersten n Zeichen, indem wir eine Konfiguration mit k Plätzen *movecount* Züge weit lösen

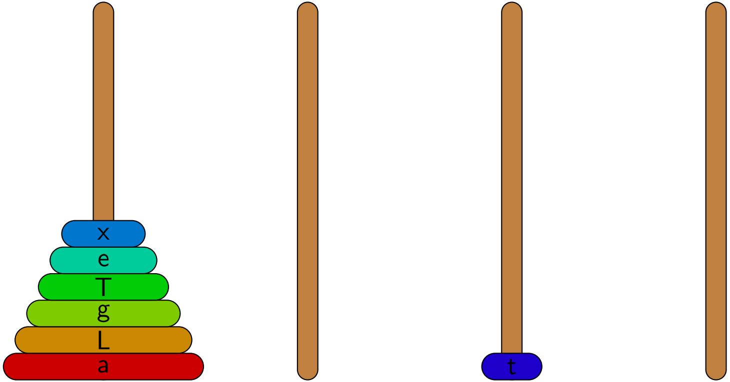
Beispiel

- $n = 7$, $k = 4$, *step* $= 4$, *movecount* $= 15$
- *Nach der ersten Runde erhalten wir folgenden Text:* *„ner aLg“+ „Text“= „ner aLgText“*
- *Nun gehen wir in diesem Text step nach rechts und führen die gleiche Prozedur wieder durch: „ner aLgText“*

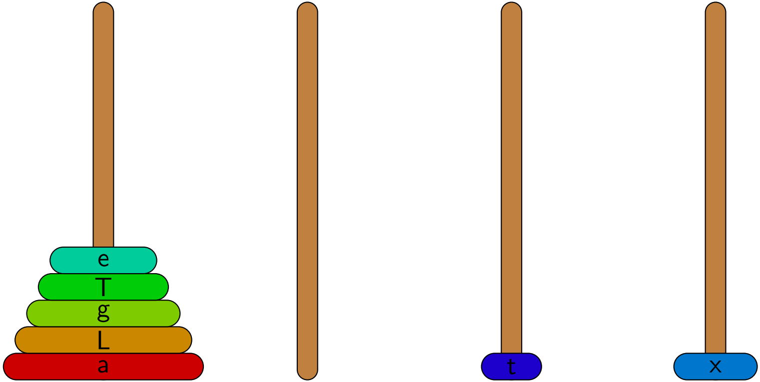
Anfangskonfiguration



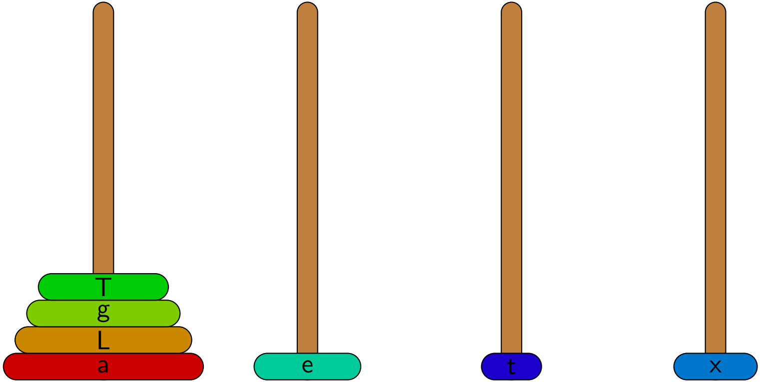
Nach Zug 1



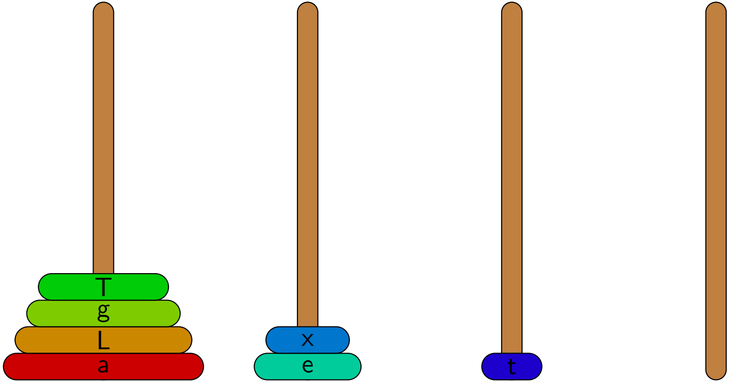
Nach Zug 2



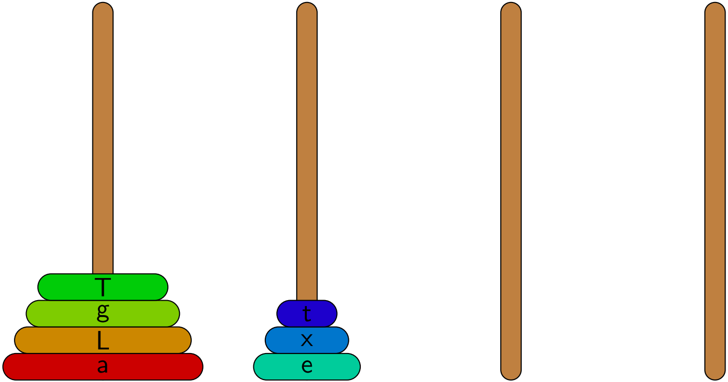
Nach Zug 3



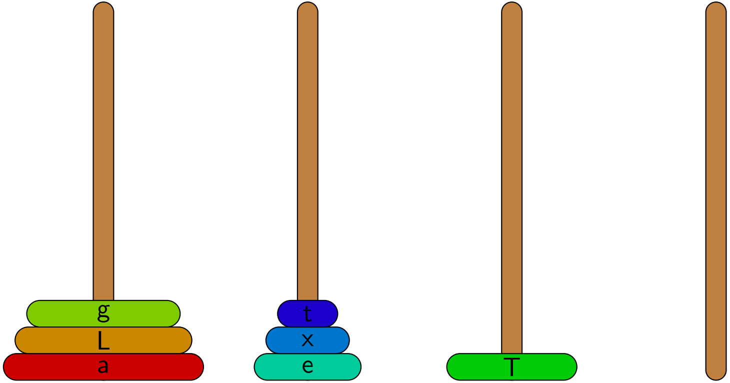
Nach Zug 4



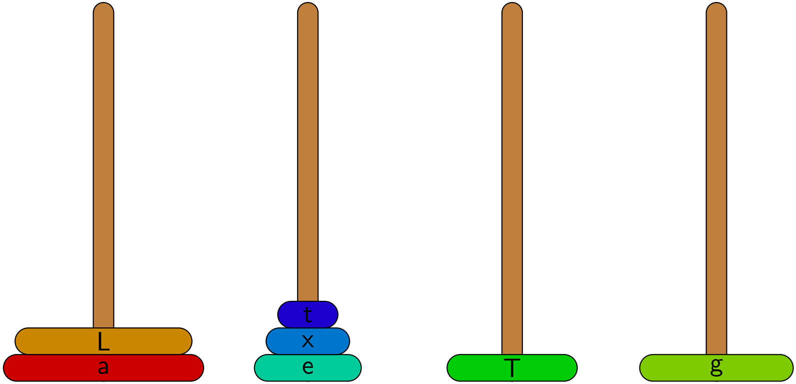
Nach Zug 5



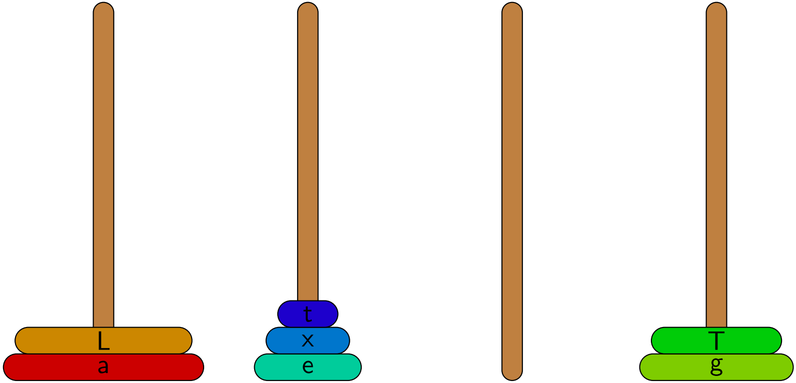
Nach Zug 6



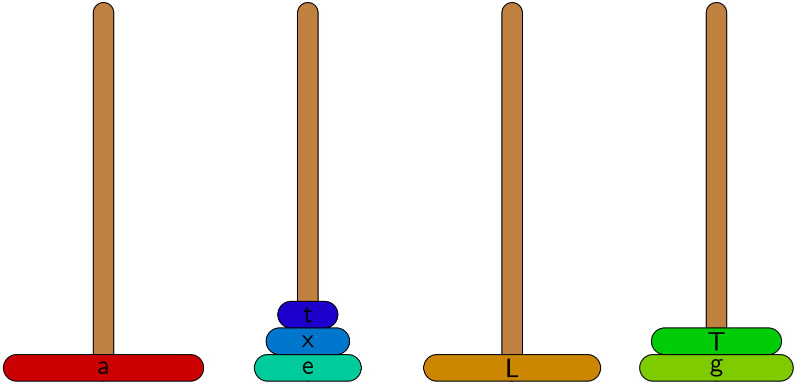
Nach Zug 7



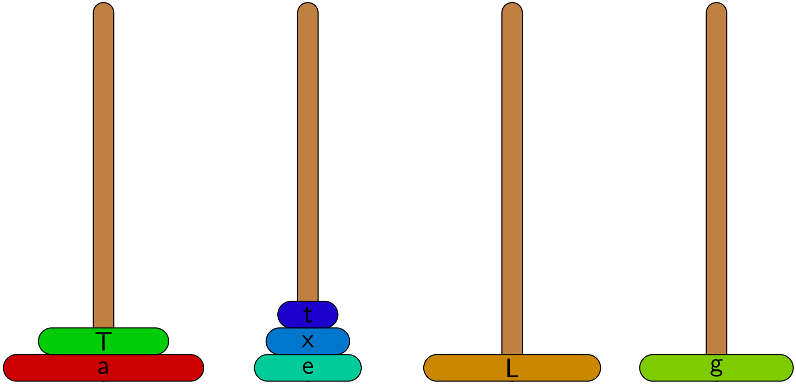
Nach Zug 8



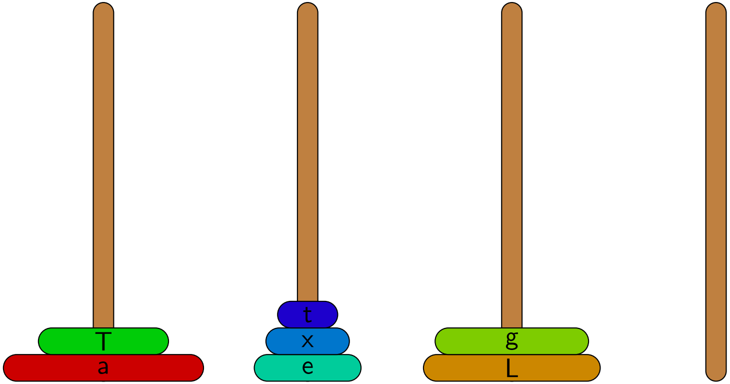
Nach Zug 9



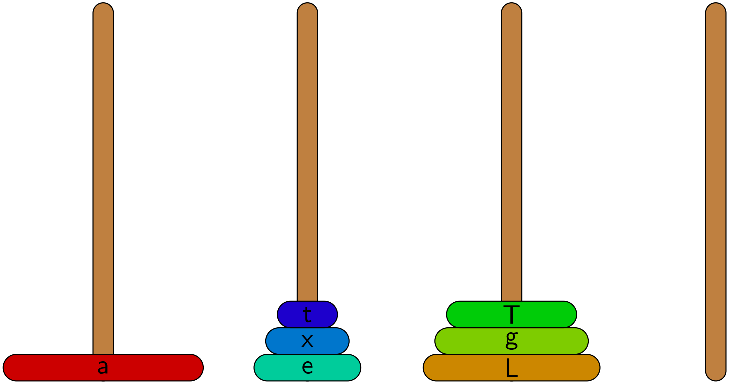
Nach Zug 10



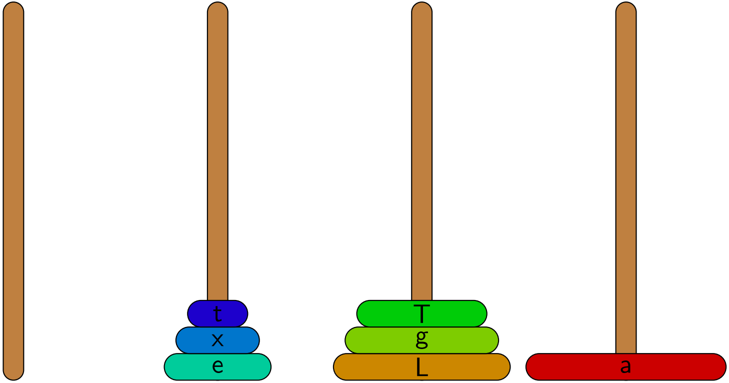
Nach Zug 11



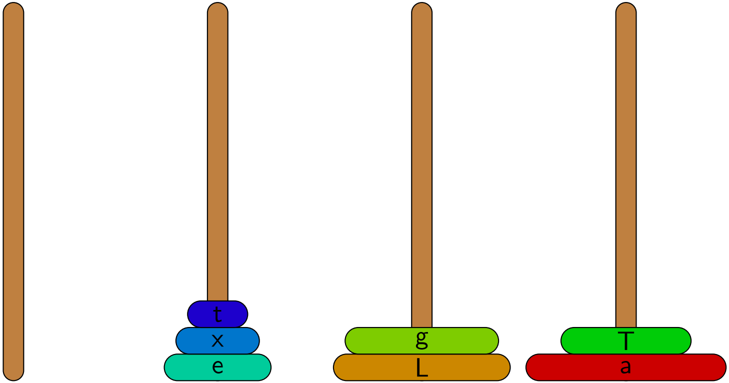
Nach Zug 12



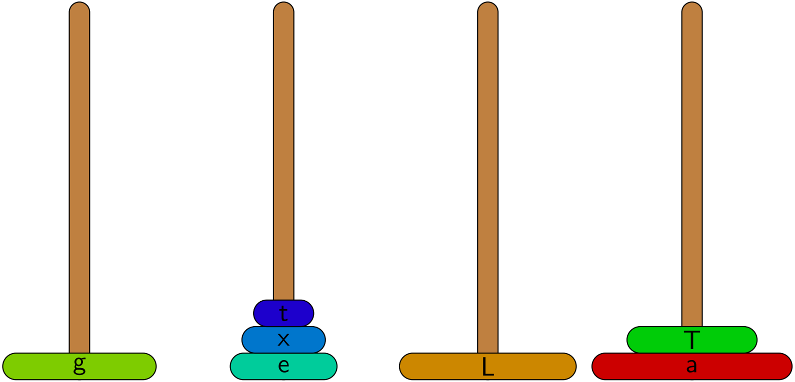
Nach Zug 13 - Zwischenturmkonfiguration



Nach Zug 14



Nach Zug 15



- Wir verschlüsseln den Text „Langer Text“
- Dazu wählen wir 4 Parameter: n, k, *step* und *movecount*
- Dann verschlüsseln wir die ersten n Zeichen, indem wir eine Konfiguration mit k Plätzen *movecount* Züge weit lösen
- Nun nehmen wir ab dem *step*+1-ten Zeichen wieder n Zeichen und lösen eine Konfiguration mit k Plätzen *movecount* Züge weit

Beispiel

- $n = 7$, $k = 4$, *step* $= 4$, *movecount* $= 15$
- *Nach der zweiten Runde erhalten wir folgenden Text: „ner “+ „gextLaT“= „ner gextLaT“*

Vielen Dank für ihre Aufmerksamkeit