Bundeswettbewerb Mathematik 2019 Runde 2

Josua Kugler

9. August 2019

1 Aufgabe

Der Pirat, dessen Goldmünzen bei der n-ten Kontrolle umverteilt werden, sei der n-Pirat. Angenommen, der Vorgang endet nicht nach endlich vielen Kontrollen. Dann muss es für alle $n \in \mathbb{N}$ einen n-Piraten geben. Der 1-Pirat muss vor der ersten Kontrolle mindestens 15 Goldmünzen haben. Da jeder Pirat bei jeder Umverteilung nur eine Goldmünze erhalten kann, muss i.A. der k-Pirat vor der ersten Kontrolle mindestens $\max(0, 16-k)$ Goldmünzen besitzen. In Summe benötigt man also mindestens $\sum_{k=1}^{\infty} \max(0, 16-k) = 120$ Münzen. Es gibt allerdings nur 119 Münzen. Damit ist die Annahme ad absurdum geführt und der Vorgang endet nach endlich vielen Kontrollen.

q.e.d.
s.d.g.

2 Aufgabe

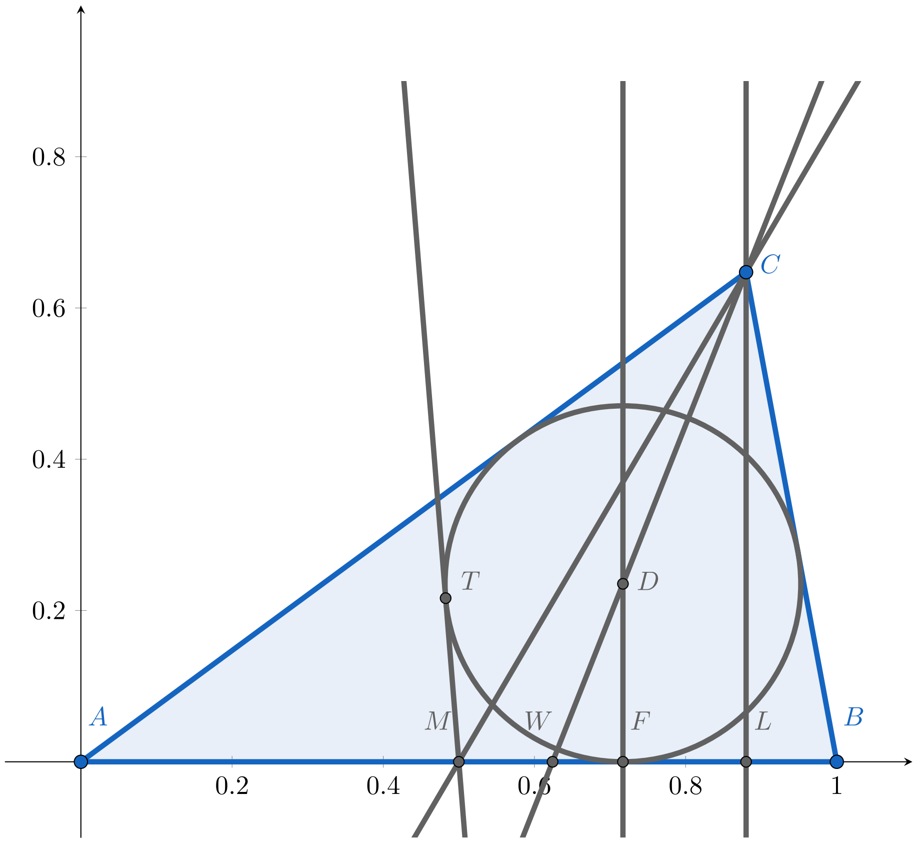
Es gilt: $a, b, c > 0$, sodass alle folgenden Operationen zulässig sind.

$$\begin{aligned}
(a^2b^2 - b^2c^2)^2 + (b^2c^2 - c^2a^2)^2 + (a^2c^2 - a^2b^2)^2 &\geq 0 \\
(a^2b^2)^2 + (b^2c^2)^2 + (c^2a^2)^2 &\geq a^2b^4c^2 + a^2b^2c^4 + a^4b^2c^2 \\
\frac{(a^2b^2)^2 + (b^2c^2)^2 + (c^2a^2)^2}{a^2b^2c^2} &\geq c^2 + b^2 + a^2 \\
\frac{(a^2b^2)^2 + (b^2c^2)^2 + (c^2a^2)^2}{a^2b^2c^2} &\geq 1 \\
\frac{(a^2b^2)^2 + (b^2c^2)^2 + (c^2a^2)^2 + 2\left(a^2b^4c^2 + a^2b^2c^4 + a^4b^2c^2\right)}{a^2b^2c^2} &\geq 3 \\
\frac{\left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\right)^2}{a^2b^2c^2} &\geq 3 \\
\frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{abc} &\geq \sqrt{3} \\
\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a} &\geq \sqrt{3}
\end{aligned}$$

Für $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ist $\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a} = \sqrt{3}$.

q.e.d.
s.d.g.

3 Aufgabe



Definition 1. *O.B.d.A. legen wir die Eckpunkte des Dreiecks auf folgende Koordinaten fest:* $A(0|0)$, $B(1|0)$ *und* $C(x_c|y_c)$.

Daraus folgen unmittelbar $L(x_c|0)$ und $M(0,5|0)$. Die Koordinaten von M und L kennen wir bereits. Daher müssen wir nur noch die Koordinaten von $W(x_w|0)$ und $F(x_f|0)$ bestimmen. Aus dem Winkelhalbierendensatz folgt, dass W die Strecke c im Verhältnis $\frac{x_w}{1-x_w} = \frac{a}{b}$ teilt. Es ist also $W = \frac{a}{a+b}A + \frac{b}{a+b}B = (0|0) + \frac{a}{a+b} * (1|0)$ und damit $x_w = \frac{a}{a+b}$. Für F benötigen wir noch die Koordinaten von Punkt D. Punkt $D(x_d|y_d)$ ist der Inkreismittelpunkt.

Satz 1. *Für den Inkreismittelpunkt* $I(x_I|y_I)$ *eines Dreiecks mit den Eckpunkten* $A(x_A|y_A)$, $B(x_B|y_B)$, $C(x_C|y_C)$ *und den Seitenlängen* a, b, c *gilt* $x_I = \frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a+b+c}$ *und* $y_I = \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a+b+c}$.

Beweis. siehe Anhang □

Es ist also $D\left(\frac{b+x_c}{a+b+1}\middle|\frac{y_c}{a+b+1}\right)$ mit $a = \sqrt{y_c^2 + (1-x_c)^2}$ und $b = \sqrt{y_c^2 + x_c^2}$. Damit erhält man $F\left(\frac{b+x_c}{a+b+1}|0\right)$.

Lemma 1.

$$\frac{|\overline{MW}|}{|\overline{MF}|} = \frac{|\overline{MF}|}{|\overline{ML}|}$$

Beweis.

$$
\begin{aligned}
\left|\overline{MW}\right| &= \frac{\left|\overline{MF}\right|^2}{\left|\overline{ML}\right|} \\
x_w - x_m &= \frac{(x_f - x_m)^2}{x_l - x_m} \\
\frac{b}{a+b} - \frac{1}{2} &= \frac{\left(\frac{b + x_c}{a+b+1} - \frac{1}{2}\right)^2}{x_c - \frac{1}{2}} \\
\frac{\sqrt{y_c^2 + x_c^2}}{\sqrt{y_c^2 + (1-x_c)^2} + \sqrt{y_c^2 + x_c^2}} - \frac{1}{2} &= \frac{\left(\frac{\sqrt{y_c^2 + x_c^2} + x_c}{\sqrt{y_c^2 + (1-x_c)^2} + \sqrt{y_c^2 + x_c^2} + 1} - \frac{1}{2}\right)^2}{x_c - \frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

Bringt man $-\frac{1}{2}$ auf denselben Nenner wie die Brüche, so kann man auf im Zähler direkt $\frac{1}{2}\sqrt{y_c^2 + x_c^2}$ abziehen und dann $\frac{1}{2}$ ausklammern.

$$
\begin{aligned}
\frac{\frac{1}{2}\left(\sqrt{y_c^2 + x_c^2} - \sqrt{y_c^2 + (1-x_c)^2}\right)}{\sqrt{y_c^2 + (1-x_c)^2} + \sqrt{y_c^2 + x_c^2}} &= \frac{\left(\frac{\frac{1}{2}\left(2x_c + \sqrt{y_c^2 + x_c^2} - \sqrt{y_c^2 + (1-x_c)^2} - 1\right)}{\sqrt{y_c^2 + (1-x_c)^2} + \sqrt{y_c^2 + x_c^2} + 1}\right)^2}{\frac{1}{2}(2x_c - 1)} \\
\frac{\sqrt{y_c^2 + x_c^2} - \sqrt{y_c^2 + (1-x_c)^2}}{\sqrt{y_c^2 + (1-x_c)^2} + \sqrt{y_c^2 + x_c^2}} &= \frac{\left(\frac{2x_c + \sqrt{y_c^2 + x_c^2} - \sqrt{y_c^2 + (1-x_c)^2} - 1}{\sqrt{y_c^2 + (1-x_c)^2} + \sqrt{y_c^2 + x_c^2} + 1}\right)^2}{2x_c - 1} \\
\frac{-\left(\sqrt{y_c^2 + x_c^2} - \sqrt{y_c^2 + (1-x_c)^2}\right)^2}{y_c^2 + (1-x_c)^2 - y_c^2 - x_c^2}(2x_c - 1) &= \left(\frac{2x_c + \sqrt{y_c^2 + x_c^2} - \sqrt{y_c^2 + (1-x_c)^2} - 1}{\sqrt{y_c^2 + (1-x_c)^2} + \sqrt{y_c^2 + x_c^2} + 1}\right)^2 \\
\frac{\left(\sqrt{y_c^2 + x_c^2} - \sqrt{y_c^2 + (1-x_c)^2}\right)^2}{1 - 2x_c}(1 - 2x_c) &= \left(\frac{2x_c + \sqrt{y_c^2 + x_c^2} - \sqrt{y_c^2 + (1-x_c)^2} - 1}{\sqrt{y_c^2 + (1-x_c)^2} + \sqrt{y_c^2 + x_c^2} + 1}\right)^2 \\
\sqrt{y_c^2 + x_c^2} - \sqrt{y_c^2 + (1-x_c)^2} &= \frac{2x_c + \sqrt{y_c^2 + x_c^2} - \sqrt{y_c^2 + (1-x_c)^2} - 1}{\sqrt{y_c^2 + (1-x_c)^2} + \sqrt{y_c^2 + x_c^2} + 1}
\end{aligned}
$$

Multipliziert man den rechten Nenner auf die linke Seite, so kann man direkt die 1 ausmultiplizieren und $\sqrt{y_c^2 + x_c^2} - \sqrt{y_c^2 + (1-x_c)^2}$ abziehen.

$$
\begin{aligned}
\left(\sqrt{y_c^2 + x_c^2} - \sqrt{y_c^2 + (1-x_c)^2}\right)\left(\sqrt{y_c^2 + (1-x_c)^2} + \sqrt{y_c^2 + x_c^2}\right) &= 2x_c - 1 \\
y_c^2 + x_c^2 - \left(y_c^2 + (1-x_c)^2\right) &= 2x_c - 1 \\
x_c^2 - (1 - 2x_c + x_c^2)^2 &= 2x_c - 1 \\
2x_c - 1 &= 2x_c - 1
\end{aligned}
$$

$\square$

Es gilt $\angle MTD = \angle DFM = 90°$ und $\left|\overline{TD}\right| = \left|\overline{DF}\right|$. Die Dreiecke MDT und MFD stimmen also in zwei Seitenlängen und dem Winkel, welcher der längeren von beiden Seitenlängen gegenüberliegt, überein. Daher sind sie kongruent und somit sind auch $\left|\overline{TM}\right| = \left|\overline{MF}\right|$. Mit Lemma 1 erhält man folgende Gleichung.

$$\frac{\left|\overline{MW}\right|}{\left|\overline{MF}\right|} = \frac{\left|\overline{MF}\right|}{\left|\overline{ML}\right|}$$

Aus Ähnlichkeitsgründen gilt

$$\angle MTW = \angle TLM$$

q.e.d.
s.d.g.

i	j	durch 3 oder 7, aber nicht durch 2 oder 5 teilbar	n
0	0	3, 7, 9, 21, 27, 33, 39, 49, 51, 57, 63, 69, 77, 81, 87, 91, 93, 99	78
0	1	3, 9, 13, 21, 27, 33, 39, 41, 51, 57, 63, 69, 81, 83, 87, 93, 97, 99	78
0	2	3, 9, 19, 21, 27, 33, 39, 47, 51, 57, 61, 63, 69, 81, 87, 89, 93, 99	78
0	3	3, 9, 11, 21, 27, 33, 39, 51, 53, 57, 63, 67, 69, 81, 87, 93, 99	77
0	4	3, 9, 17, 21, 27, 31, 33, 39, 51, 57, 59, 63, 69, 73, 81, 87, 93, 99	78
0	5	3, 9, 21, 23, 27, 33, 37, 39, 51, 57, 63, 69, 79, 81, 87, 93, 99	77
0	6	1, 3, 9, 21, 27, 29, 33, 39, 43, 51, 57, 63, 69, 71, 81, 87, 93, 99	78
1	0	7, 11, 17, 21, 23, 29, 41, 47, 49, 53, 59, 63, 71, 77, 83, 89, 91	77
1	1	11, 13, 17, 23, 27, 29, 41, 47, 53, 59, 69, 71, 77, 83, 89, 97	76
1	2	11, 17, 19, 23, 29, 33, 41, 47, 53, 59, 61, 71, 77, 83, 89	75
1	3	11, 17, 23, 29, 39, 41, 47, 53, 59, 67, 71, 77, 81, 83, 89	75
1	4	3, 11, 17, 23, 29, 31, 41, 47, 53, 59, 71, 73, 77, 83, 87, 89	76
1	5	9, 11, 17, 23, 29, 37, 41, 47, 51, 53, 59, 71, 77, 79, 83, 89, 93	77
1	6	1, 11, 17, 23, 29, 41, 43, 47, 53, 57, 59, 71, 77, 83, 89, 99	76
2	0	1, 7, 13, 19, 21, 31, 37, 43, 49, 61, 63, 67, 73, 77, 79, 91, 97	77
2	1	1, 7, 13, 19, 27, 31, 37, 41, 43, 49, 61, 67, 69, 73, 79, 83, 91, 97	78
2	2	1, 7, 13, 19, 31, 33, 37, 43, 47, 49, 61, 67, 73, 79, 89, 91, 97	77
2	3	1, 7, 11, 13, 19, 31, 37, 39, 43, 49, 53, 61, 67, 73, 79, 81, 91, 97	78
2	4	1, 3, 7, 13, 17, 19, 31, 37, 43, 49, 59, 61, 67, 73, 79, 87, 91, 97	78
2	5	1, 7, 9, 13, 19, 23, 31, 37, 43, 49, 51, 61, 67, 73, 79, 91, 93, 97	78
2	6	1, 7, 13, 19, 29, 31, 37, 43, 49, 57, 61, 67, 71, 73, 79, 91, 97, 99	78

Tabelle 1: n ist die Anzahl der durch 2, 3, 5 oder 7 teilbaren Zahlen. Rot markiert sind alle Fälle, für die es mehr als 23 Zahlen gibt, die durch keine dieser 4 Zahlen teilbar sind

4 Aufgabe

Wir werden im folgenden die Menge der Zahlen von $10k$ bis $10k + 100$ betrachten. Wir wissen, dass alle geraden oder durch 5 teilbaren Zahlen keine Primzahlen sind. Da $10k \equiv 0 \mod 2, 5$ wissen wir, dass es exakt 60 Zahlen gibt, die wir demzufolge stets als nicht prim identifizieren können (nämlich 50 gerade Zahlen und 10 Zahlen, die auf eine 5 enden). Sei $i := 10k \mod 3$ und $j := 10k \mod 7$. In der folgenden Tabelle betrachten wir für alle möglichen Kombinationen von i, j, welche der Zahlen wir zusätzlich als nicht prim identifizieren können. Der Einfachkeit halber schreiben wir in den folgenden 3 Tabellen einfach $1, 2, \ldots, 100$ anstatt $10k + 1, 10k + 2, \ldots, 10k + 100$. Zusätzlich sei für Aufgabe 4 durchweg n die Anzahl der Zahlen, von denen wir wissen, dass sie keine Primzahlen sind.

Durch diese Tabelle ist für alle außer 5 Fälle gezeigt, dass es höchstens 23 Primzahlen im Intervall von $10k$ bis $10k+100$ geben kann. Wir betrachten jeden dieser 5 Fälle modulo 11, sodass wir insgesamt 55 Fälle erhalten. $l := 10k \mod 11$ Aus der Tabelle ist ersichtlich, dass für alle diese Fälle $i = 1$ gilt. Daher müssen wir die Kongruenz modulo 3 nicht weiter betrachten und in den folgenden Tabellen ist $i = 1$.

j	l	durch 11 teilbar[a]	n
1	0	33, 99	78
1	1	21, 43, 87	79
1	2	9, 31	78
1	3	19, 63	78
1	4	7, 51, 73	79
1	5	39, 61	78
1	6	49, 93	78
1	7	37, 81	78
1	8	3, 91	78
1	9	57, 79	78
1	10	1, 67	78
2	0	99	76
2	1	21, 43, 87	78
2	2	9, 31, 97	78
2	3	63	76
2	4	7, 51, 73	78
2	5	39	76
2	6	27, 49, 93	78
2	7	37, 81	77
2	8	3, 69, 91	78
2	9	13, 57, 79	78
2	10	1, 67	77
3	0	33, 99	77
3	1	21, 43, 87	78
3	2	9, 31, 97	78
3	3	19, 63	77
3	4	7, 51, 73	78
3	5	61	76

j	l	durch 11 teilbar[a]	n
3	6	27, 49, 93	78
3	7	37	76
3	8	3, 69, 91	78
3	9	13, 57, 79	78
3	10	1	76
4	0	33, 99	78
4	1	21, 43	78
4	2	9, 97	78
4	3	19, 63	78
4	4	7, 51	78
4	5	39, 61	78
4	6	27, 49, 93	79
4	7	37, 81	78
4	8	69, 91	78
4	9	13, 57, 79	79
4	10	1, 67	78
6	0	33	77
6	1	21, 87	78
6	2	9, 31, 97	79
6	3	19, 63	78
6	4	7, 51, 73	79
6	5	39, 61	78
6	6	27, 49, 93	79
6	7	37, 81	78
6	8	3, 69, 91	79
6	9	13, 79	78
6	10	67	77

[a] aber nicht durch 2,3,5, oder 7 teilbar

Es bleiben immer noch 6 Fälle übrig, für die nocht nicht gezeigt ist, dass es höchstens 23 Primzahlen im Intervall von $10k$ bis $10k + 100$ geben kann. Nun betrachten wir jeden dieser 6 Fälle modulo 13, sodass wir insgesamt 78 Fälle erhalten. Dabei sei $m := 10k \mod 13$.

j	l	m	durch 13 teilbar[a]	n
2	0	0	13, 39, 91	79
2	0	1	51	77
2	0	2	37, 63	78
2	0	3	49	77
2	0	4	9, 87	78
2	0	5	21, 73	78
2	0	6	7	77
2	0	7	97	77
2	0	8	31, 57	78
2	0	9	43, 69	78
2	0	10	3, 81	78
2	0	11	67, 93	78
2	0	12	1, 27, 79	79
2	3	0	13, 39, 91	79
2	3	1	51	77
2	3	2	37	77
2	3	3	49	77
2	3	4	9, 87	78
2	3	5	21, 73, 99	79
2	3	6	7	77
2	3	7	97	77
2	3	8	31, 57	78
2	3	9	43, 69	78
2	3	10	3, 81	78
2	3	11	67, 93	78
2	3	12	1, 27, 79	79
2	5	0	13, 91	78
2	5	1	51	77
2	5	2	37, 63	78
2	5	3	49	77
2	5	4	9, 87	78
2	5	5	21, 73, 99	79
2	5	6	7	77
2	5	7	97	77
2	5	8	31, 57	78
2	5	9	43, 69	78
2	5	10	3, 81	78
2	5	11	67, 93	78
2	5	12	1, 27, 79	79

j	m	m	durch 13 teilbar[a]	n
3	5	0	13, 91	78
3	5	1	51	77
3	5	2	37, 63	78
3	5	3	49	77
3	5	4	9, 87	78
3	5	5	21, 73, 99	79
3	5	6	7, 33	78
3	5	7	19, 97	78
3	5	8	31, 57	78
3	5	9	43, 69	78
3	5	10	3	77
3	5	11	93	77
3	5	12	1, 27, 79	79
3	7	0	13, 91	78
3	7	1	51	77
3	7	2	63	77
3	7	3	49	77
3	7	4	9, 61, 87	79
3	7	5	21, 73, 99	79
3	7	6	7, 33	78
3	7	7	19, 97	78
3	7	8	31, 57	78
3	7	9	43, 69	78
3	7	10	3	77
3	7	11	93	77
3	7	12	1, 27, 79	79
3	10	0	13, 91	78
3	10	1	51	77
3	10	2	37, 63	78
3	10	3	49	77
3	10	4	9, 61, 87	79
3	10	5	21, 73, 99	79
3	10	6	7, 33	78
3	10	7	19, 97	78
3	10	8	31, 57	78
3	10	9	43, 69	78
3	10	10	3	77
3	10	11	93	77
3	10	12	27, 79	78

[a] aber nicht durch 2,3,5,7, oder 11 teilbar

Aus der Tabelle ist ersichtlich, dass es für jeden der verbleibenden 78 Fälle höchstens 23 Primzahlen im Intervall von $10k$ bis $10k + 100$ geben kann.

q.e.d.
s.d.g.

5 Anhang

Wir beweisen Satz 1 (siehe Aufgabe 3).

Beweis. A' sei der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von $\angle BAC$ mit der Seite a. Analog sei B' der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von $\angle CBA$ mit der Seite a. Der Winkelhalbierendensatz besagt, dass A' die Seite a im Verhältnis $\frac{A'B}{A'C} = \frac{c}{b}$. Daraus folgt $A' = \frac{b}{b+c}B + \frac{c}{b+c}C$. Analog erhält man $B' = \frac{a}{a+c}A + \frac{c}{a+c}C$. Der Inkreismittelpunkt I liegt auf der Strecke AA' und lässt sich daher folgendermaßen darstellen:

$$\begin{aligned} I &= (1-p)A + tA' && |p \in [0,1] \\ &= (1-p)A + \frac{pb}{b+c}B + \frac{pc}{b+c}C \end{aligned}$$

I liegt aber auch auf der Strecke BB'.

$$\begin{aligned} I &= (1-q)B + tB' && |q \in [0,1] \\ &= (1-q)B + \frac{qa}{a+c}A + \frac{qc}{a+c}C \end{aligned}$$

Wir suchen also ein Tupel (p, q), sodass beide Darstellungen von I übereinstimmen. Dafür können wir einfach die Gewichte der einzelnen Punkte vergleichen. Für A erhält man $(1-p) = \frac{qa}{c+a}$, für B $(1-q) = \frac{pb}{b+c}$ und für C $\frac{pc}{b+c} = \frac{qc}{a+c}$. Für $p = \frac{b+c}{a+b+c}$ und $q = \frac{a+c}{a+b+c}$ sind alle drei Gleichungen erfüllt:

- $\left(1 - \frac{b+c}{a+b+c}\right) = \frac{a}{a+b+c} = \frac{\frac{a+c}{a+b+c}a}{c+a}$
- $\left(1 - \frac{a+c}{a+b+c}\right) = \frac{b}{a+b+c} = \frac{\frac{b+c}{a+b+c}b}{b+c}$
- $\frac{\frac{b+c}{a+b+c}c}{b+c} = \frac{c}{a+b+c} = \frac{\frac{a+c}{a+b+c}c}{a+c}$

Daher erhalten wir

$$I = \left(1 - \frac{b+c}{a+b+c}\right)A + \frac{\frac{b+c}{a+b+c}b}{b+c}B + \frac{\frac{b+c}{a+b+c}c}{b+c}C = \frac{a}{a+b+c}A + \frac{b}{a+b+c}B + \frac{c}{a+b+c}C$$

Daraus folgt sofort $x_I = \frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a+b+c}$ und $y_I = \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a+b+c}$. □