58. Matheolympiade
1. Runde
Klassen 11 und 12

Josua Kugler

24. Oktober 2018

1 Aufgabe 581211

Man bestimme die kleinstmögliche Quersumme einer durch 37 teilbaren positiven ganzen Zahl.

Beweis. Offensichtlich gibt es durch 37 teilbare Zahlen mit der Quersumme drei, z.B. 111. Gesucht ist also eine durch 37 teilbare Zahl, die eine Quersumme kleiner als drei besitzt.

1.1 Annahme: Es gibt eine durch 37 teilbare Zahl mit der Quersumme eins

Eine Zahl mit der Quersumme eins besteht aus einer eins und ansonsten nur Nullen. Nullen, die links von der eins stehen, werden sowieso nicht berücksichtigt. Da Nullen, die rechts von der eins stehen, entfernt werden können, indem durch zehn geteilt wird und die Teilung durch zehn keinen Einfluss auf die Teilbarkeit durch 37 hat, müssen diese ebenfalls nicht berücksichtigt werden. Übrig bleibt eine eins, die trivialerweise nicht durch 37 teilbar ist. Damit ist unsere Annahme ad absurdum geführt.

1.2 Annahme: Es gibt eine durch 37 teilbare Zahl mit der Quersumme zwei

Hierfür gibt es zwei Möglichkeiten:

Die Zahl besteht aus einer zwei und ansonsten Nullen Analog zu Annahme 1.1 lässt sich eine solche Zahl ohne Veränderung der Teilbarkeit durch 37 auf eine zwei reduzieren, die nicht durch 37 teilbar ist.

Die Zahl besteht also aus zwei Einsen und ansonsten Nullen Analog zu 1.1 können wir alle Nullen links der linken Eins sowie alle Nullen rechts der rechten Eins streichen, ohne damit die Teilbarkeit durch 37 zu beeinflussen. Wir erhalten also eine Zahl der Form $10^a + 1$.

Lemma 1. *Für jede Zahl der Form* $10^n + 1$ *gilt mit* $n, k \in \mathbb{N}$ *und* $n - 3 * k \geq 0$*:*

$$10^n + 1 \equiv 10^{n-3*k} + 1$$

Beweis. Es gilt:

$$37 \mid 111 \;\rightarrow\; 37 \mid 111 * m$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
10^n + 1 &\equiv 10^n + 1 - 111 * 10^{n-2} + 111 * 10^{n-3} && \mod 37\\
&\equiv 10^n + 1 - \left(100 * 10^{n-2} + 10 * 10^{n-2} + 1 * 10^{n-2}\right) + \left(100 * 10^{n-3} + 10 * 10^{n-3} + 1 * 10^{n-3}\right) && \mod 37\\
&\equiv 10^n + 1 - \left(10^n + 10^{n-1} + 10^{n-2}\right) + \left(10^{n-1} + 10^{n-2} + 10^{n-3}\right) && \mod 37\\
&\equiv 10^n + 1 - 10^n - 10^{n-1} - 10^{n-2} + 10^{n-1} + 10^{n-2} + 10^{n-3} && \mod 37\\
&\equiv 10^n - 10^n - 10^{n-1} + 10^{n-1} - 10^{n-2} + 10^{n-2} + 10^{n-3} + 1 && \mod 37\\
10^n + 1 &\equiv 10^{n-3} + 1 && \mod 37
\end{aligned}$$

Diese Kongruenz gilt natürlich nur für $n-3 \geq 0 \;\rightarrow\; n \geq 3$. Wendet man sie k mal auf eine Zahl 10^n+1 an, so erhält man

$$10^n + 1 \equiv 10^{n-3*k} + 1$$

□

Nun benutze man Lemma 1 so oft für eine Zahl 10^n+1, bis gilt: $n < 3$. Auf jede Zahl 10^n+1 mit $n \geq 3$ kann man das Lemma noch mindestens einmal anwenden. ($10^{3+a}+1 \equiv 10^a+1 \mod 37$ mit $a \geq 0$)
Wir müssen also nur noch alle Zahlen 10^n+1 mit $n<3$ betrachten, also 10^2+1, 10^1+1 und 10^0+1.

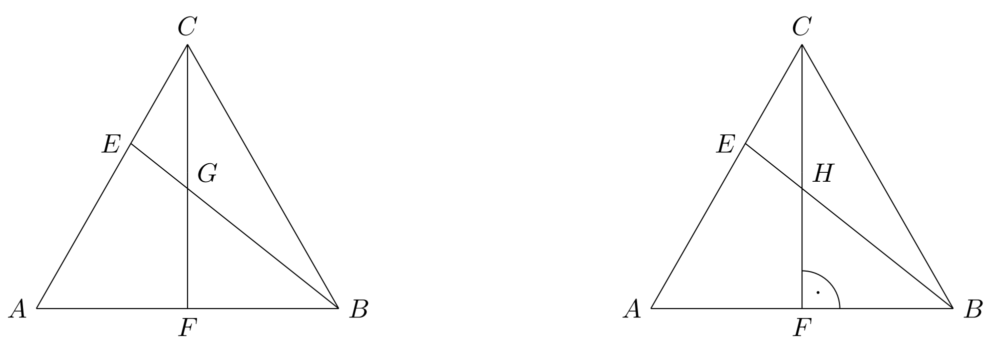
$$10^2+1 = 101 \equiv 27 \not\equiv 0 \mod 37$$
$$10^1+1 = 11 \equiv 11 \not\equiv 0 \mod 37$$
$$10^0+1 = 2 \equiv 2 \not\equiv 0 \mod 37$$

Damit ist auch Annahme 1.2 ad absurdum geführt. Es gibt also weder durch 37 teilbare Zahlen mit der Quersumme eins noch mit der Quersumme zwei. Zahlen mit kleinerer Quersumme werden laut Aufgabenstellung (bzw. per Definition der Quersumme) nicht gesucht. Damit ist die kleinste Quersumme einer durch 37 teilbaren positiven Zahl drei. Dass es Zahlen mit dieser Quersumme gibt, beweist das Beispiel 111.

□

2 Aufgabe 581212

Ein Dreieck ABC sei spitzwinklig und gleichschenklig mit $|BC| = |CA|$. Die Fußpunkte der Höhen von B und C auf die jeweils gegenüberliegenden Dreiecksseiten CA und AB werden mit E beziehungsweise F bezeichnet. Der Schnittpunkt der Höhen CF und BE sei H, vgl. Abbildung 1a. Wie groß ist der Flächeninhalt des Vierecks $HEAF$, wenn die Längen $|CE| = 5$ und $|EA| = 8$ bekannt sind? Da das Dreieck



(a) Dreieck wie in der Aufgabenstellung

(b) Dreieck mit Hilfslinien und -winkeln

Abbildung 1: Zwei Dreiecke

ABC gleichseitig ist, gilt mit $|CE| = 5$ und $|EA| = 8$:

$$|CB| = |AC| = |CE| + |EA| = 5+8 = 13$$

Das Dreieck DBC besitzt einen rechten Winkel bei D. Mit dem Satz des Pythagoras gilt also:

$$|DB| = \sqrt{|CB|^2 - |EC|^2} = \sqrt{13^2-5^2} = \sqrt{144} = 12$$

Daraus folgt:

$$|AB| = \sqrt{|AE|^2 + |EB|^2} = \sqrt{8^2+12^2} = \sqrt{208} = 4\sqrt{13}$$

Der Lotfußpunkt von E auf AB sei G. Dann gilt:

$$A_{ABE} = |AE| * |EB| = |EG| * |AB|$$

Mit Umformen ergibt sich:

$$|EG| \;=\; \frac{|AE| * |EB|}{|AB|} \;=\; \frac{96}{4 * \sqrt{13}}$$

Da die Dreiecke AGE und AFC ähnlich sind, gilt mit Strahlensätzen:

$$\frac{|AG|}{|AF|} \;=\; \frac{|AE|}{|AC|}$$

Daraus folgt für $|AG|$:

$$|AG| \;=\; \frac{|AE| * |AF|}{|AC|} \;=\; \frac{8}{13}\frac{|AB|}{2} \;=\; \frac{16\sqrt{13}}{13}$$

Die Dreiecke GBE und FBH sind ebenfalls ähnlich. Mit Strahlensätzen und Multiplikation mit $|FB|$ erfolgt:

$$|FH| \;=\; \frac{|EG|}{|GB|}|FB| \;=\; \frac{|EG|}{|AB| - |AG|}\frac{|AB|}{2} \;=\; \frac{\frac{96}{4*\sqrt{13}}}{4\sqrt{13} - \frac{16\sqrt{13}}{13}} * 2\sqrt{13} \;=\; \frac{48}{\frac{52\sqrt{13}-16\sqrt{13}}{13}} \;=\; \frac{48 * 13}{36 * \sqrt{13}} \;=\; \frac{4}{3}\sqrt{13}$$

Für den gesuchten Flächeninhalt des Vierecks $HEAF$ gilt:

$$A_{HEAF} \;=\; A_{ABE} - A_{FBH} \;=\; |AE| * |EB| - |BF| * |HB| \;=\; 96 - \frac{4}{3}\sqrt{13} * \frac{4\sqrt{13}}{2} \;=\; 96 - \frac{8 * 13}{3} \;=\; \frac{104}{3}$$

Die Lösung lautet:

$$A_{HEAF} \;=\; \frac{104}{3}$$

3 Aufgabe 581213

Auf einem Schachbrett mit 8×8 Feldern bedroht ein Turm alle Schachfiguren, die in der gleichen Zeile oder der gleichen Spalte stehen wie er selbst, unabhängig davon, ob ein weiterer Turm dazwischen steht oder nicht.
Wie viele Türme können auf dem Schachbrett maximal so platziert werden, dass jeder Turm höchstens zwei weitere Türme bedroht?

In einer Reihe bzw. einer Spalte können stets höchstens drei Türme stehen, da bei vier Türmen jeder Turm dieser Reihe oder Spalte drei andere Türme bedrohen würde.

Es können maximal 16 Türme mit den genannten Bedingungen positioniert werden.

Beweis. □

4 Aufgabe 581214

Gesucht sind alle Paare (x, y) reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem erfüllen:

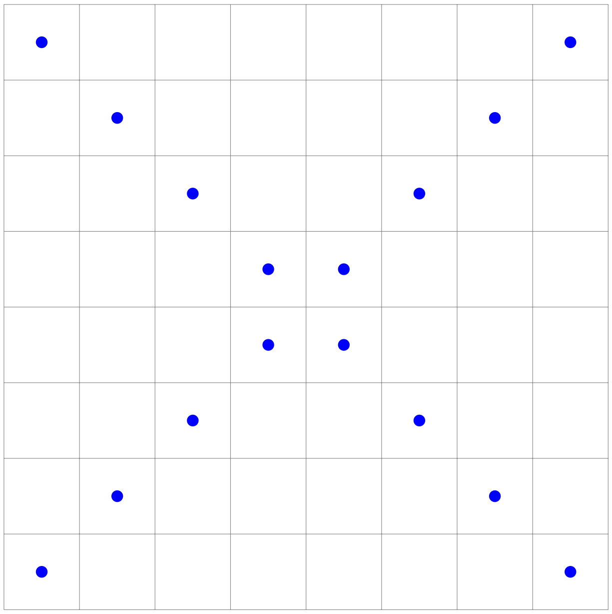
$$x^2 + ay = a, \tag{1}$$
$$x + a^2y^2 = a. \tag{2}$$

a) Für a = 1 bestimme man alle Lösungspaare (x, y).

b) Man bestimme für jede beliebige reelle Zahl a die Anzahl der verschiedenen Lösungspaare und gebe diese an.

a)

$$\mathbb{L} = (0, 1), (1, 0), (\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}), (1, 2)$$



a). Für $a = 1$ gilt Folgendes:

$$\begin{aligned}
x^2 + y &= 1 && \Big| -x^2 \\
y &= 1 - x^2 && \Big| \text{Einsetzen in } x + y^2 = 1 \\
x + \left(1 - x^2\right)^2 &= 1 && |\text{Bei diesem Schritt wird quadriert, die Lösungen müssen also nachher überprüft werden} \\
x + 1 - 2x^2 + x^4 - 1 &= 0 \\
x^4 - 2x^2 + x &= 0
\end{aligned}$$

Aus diesem Term folgt für die erste Nullstelle $x_1 = 0$. Wir teilen den gesamten Term durch x und erhalten $x^3 - 2x^1 + 1 = 0$. Durch Ausprobieren erhält man für die zweite Nullstelle: $x_2 = 1$. Wir führen Polynomdivision durch:

$$\begin{aligned}
x^3 + 0x^2 - 2x + 1 / (x - 1) &= x^2 + x - 1 \\
-(x^3 - 1x^2) \\
x^2 - 2x \\
-(x^2 - x) \\
-x + 1 \\
-(x - 1)
\end{aligned}$$

Wir wenden nun die p-q-Formel an:

$$\begin{aligned}
x_{3,4} &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} \\
&= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \\
x_3 &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\
x_4 &= \frac{1 - \sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

Nun setzen wir die einzelnen Lösungen in die Gleichung ein. Dabei erhalten wir:

$\square$