Bundeswettbewerb Mathematik

Josua Kugler

February 25, 2018

1 Aufgaben

1. Welches ist die größte natürliche Zahl mit der Eigenschaft, dass jede ihrer Ziffern außer der ersten und der letzten kleiner sind als das arithmetische Mittel ihrer beiden Nachbarziffern?

2. Bestimme alle reellen Zahlen x, für die $\left\lfloor \frac{20}{x+18} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+18}{20} \right\rfloor = 1$ gilt.

3. Im spitzwinkligen Dreieck ABC wird der Höhenschnittpunkt mit H bezeichnet. Die Höhe von A schneide die Seite BC im Punkt H_a und die Parallele zu BC durch H schneide den Kreis mit Durchmesser AH_a in den Punkten P_a und Q_a. Entsprechend seien die Punkte P_b und Q_b sowie P_c und Q_c festgelegt. Beweise, dass die sechs Punkte P_a,Q_a,P_b,Q_b,P_c,Q_c auf einem gemeinsamen Kreis liegen.

4. Im Raum sind sechs Punkte gegeben, die paarweise verschiedene Entfernungen voneinander haben und von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Wir betrachten alle Dreiecke mit Ecken in diesen Punkten. Beweise, dass es unter diesen Dreiecken eines gibt, dessen längste Seite zugleich kürzeste Seite in einem anderen dieser Dreiecke ist.

2 Lösungen

2.1

n_a sei die Ziffer, die an der a-ten Stelle von n steht.
$dn_a = n_{a+1} - n_a$

2.1.1 Teil I.

- Behauptung:
  $dn_{a+1} > dn_a$
  $n_{a+2} - n_{a+1} > n_{a+1} - n_a$
- Beweis:
  Das arithmetische Mittel aus den Zahlen n_a und n_{a+2} ist:
  $\frac{n_a+n_{a+2}}{2} = \frac{n_a+n_a+dn_a+dn_{a+1}}{2}$
  n_{a+1} muss laut Aufgabenstellung kleiner als das arithmetische Mittel aus n_a und n_{a+2} sein:
  $n_{a+1} < \frac{n_a+n_a+dn_a+dn_{a+1}}{2}$
  $n_a + dn_a < \frac{n_a+n_a+dn_a+dn_{a+1}}{2}$
  $2 * n_a + 2 * dn_a < n_a + n_a + dn_a + dn_{a+1}$
  $dn_a < dn_{a+1}$

2.1.2 Teil II.

- Behauptung:
  Die maximale Anzahl an Stellen, die eine natürliche Zahl haben kann, wenn sie die Bedingungen der Aufgabe erfüllt, ist acht.
- Beweis:
  Wir nehmen an, es gäbe eine Zahl mit neun Stellen, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Dann müsste es eine Reihe von mindestens neun Ziffern geben, deren Differenz stets zunimmt.
  Bsp. 1: $dn_1 = -4$,$dn_2 = -3$,$dn_3 = -2$,$dn_4 = -1$,$dn_5 = 0$,$dn_6 = 1$,$dn_7 = 2$,$dn_8 = 3$
  Da es sich allerdings um eine natürliche Zahl handelt, darf es keinen Wert n_a kleiner null und keinen größer neun geben. Der Startwert n_1 kann also maximal neun annehmen. Alle negativen Differenzen dn_a addiert dürfen also minimal minus neun ergeben. Entsprechend dürfen alle positiven Differenzen zusammenaddiert maximal neun ergeben. Da die null keinen Unterschied macht und es bei einer n-stelligen Zahl $n - 1$ Differenzen gibt, muss man sich die verbleibenden relevanten Differenzen anschauen, wobei hier noch mindestens 7 relevante Differenzen "übrigbleiben"($9 - 1 = 8$, die Null ist irrelevant). Es gibt also entweder mehr als drei positive oder mehr als drei negative Differenzen.
  Fall 1: mehr als drei negative Differenzen (siehe Bsp. 1)

In diesem Fall ergibt sich höchstens (man betrachte die vier größten negativen Zahlen) $-1 + -2 + -3 + -4 = -10$. Das ist aber kleiner als die geforderten minus neun.
Fall 2: mehr als drei positive Differenzen
Analog zu Fall 1: $1 + 2 + 3 + 4 = 10 > 9$. Sollte man eine Zahl mit mehr als 9 Ziffern wählen, würden evtl. sogar beide Fälle oder ein Fall mit mehr als vier Differenzen etc. zutreffen. Es ist also nicht möglich, mehr als acht Differenzen so zu wählen, dass keine Stelle größer neun ist. Unsere Annahme ist also falsch. Jetzt müssen wir noch zeigen, dass es möglich ist, eine den Bedingungen der Aufgabe entsprechende Zahl mit acht Stellen zu konstruieren. Dafür reicht ein einfaches Beispiel:
Die Zahl $n = 96433469$ hat folgende Differenzen: $dn_1 = -3$,$dn_2 = -2$,$dn_3 = -1$,$dn_4 = 0$,$dn_5 = 1$,$dn_6 = 2$,$dn_7 = 3$. Außerdem ist jede Stelle größer null und kleiner neun. n erfüllt also die Bedingungen der Aufgabe.

2.1.3 Teil III.

- Behauptung:
  Die Zahl $n = 96433469$ ist die größte Zahl, welche die Bedingungen der Aufgabe efüllt.

- Beweis:
  Annahme: Es gibt eine größere Zahl, welche die Bedingungen der Aufgabe efüllt.
  Dafür betrachten wir zuerst die Differenzen zwischen den Stellen der Zahl n:
  $dn_1 = -3$,$dn_2 = -2$,$dn_3 = -1$,$dn_4 = 0$,$dn_5 = 1$,$dn_6 = 2$,$dn_7 = 3$
  Eine größere Zahl müsste mindestens an einer Stelle eine größere Differenz dn_a haben. Dies würde jedoch letztendlich zu einem höheren dn_7 führen, da es keine Möglichkeit gibt, diese Erhöhung wieder auszugleichen: Die Differenz steigt immer um genau eins an. Das entspricht bereits dem absoluten Minimum. Jegliche Verringerung an beliebiger Stelle würde gegen die Regeln verstoßen. Ein höheres dn_7 ist allerdings nicht möglich, da $dn_7 = 9$.
  Demnach kann es also keine größere natürliche Zahl geben, die den Forderungen der Aufgabe entspricht.

q.e.d.
s.d.g.

2.2

Die in der Aufgabe genannte Funktion sei f.
Diese werde ich nun in zwei Teilfunktionen $g(x) = \left\lfloor \frac{20}{x+18} \right\rfloor$ und $h(x) = \left\lfloor \frac{x+18}{20} \right\rfloor$ unterteilen.
Ich werde im folgenden verschiedene Teilintervalle einzeln betrachten.

2.2.1 Intervall $x < -18$

- Für $g(x)$ gilt:
  $(18 + x) < 0$ impliziert $\frac{20}{18+x} < 0$ impliziert $\left\lfloor \frac{20}{x+18} \right\rfloor < 0$
- Für $h(x)$ gilt:
  $(18 + x) < 0$ impliziert $\frac{18+x}{20} < 0$ impliziert $\left\lfloor \frac{x+18}{20} \right\rfloor < 0$

Aus $g(x) < 0$ und $h(x) < 0$ folgt $f(x) = g(x) + h(x) < 0$
Alle $x < -18$ kommen also für die Lösung nicht infrage.

2.2.2 $x = -18$

$g(-18) = \left\lfloor \frac{20}{x+18} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{20}{0} \right\rfloor$
Da man nicht durch 0 teilen darf, ist $g(-18)$ nicht definiert.

2.2.3 Intervall $-18 < x < 2$

- Für $h(x)$ gilt:
  $0 < 18 + x < 20$ impliziert $0 < \frac{18+x}{20} < 1$ impliziert $\left\lfloor \frac{18+x}{20} \right\rfloor = 0$

Um $f(x) = 1$ zu erfüllen, müssen wir also im Intervall $-18 < x < 2$ alle x bestimmen, für die gilt: $g(x) = 1$

- Es muss also gelten:
  $g(x) = 1$
  $\left\lfloor \frac{20}{x+18} \right\rfloor = 1$
  $1 \leq \frac{20}{x+18} < 2$
  Ich teile diese Gleichung der Einfachheit halber auf:
  I. $1 \leq \frac{20}{x+18}$, II. $\frac{20}{x+18} < 2$
  Aus $x > -18$ folgt: $x + 18 > 0$, deshalb darf man ohne weitere Veränderungen mit $x + 18$ multiplizieren:
  I. $x + 18 \leq 20$, II. $20 < 2x + 36$
  I. $x \leq 2$, allerdings untersuchen wir im Moment nur alle $x < 2$, daher gilt:
  I. $x < 2$
  II. $-16 < 2x$
  II. $x > -8$
  Aus I. und II. folgt: $-8 < x < 2$
  Im Intervall $-8 < x < 2$ gilt also: $g(x) = 1$

Für alle $-18 < x < -8$ gilt: $0 < x + 18 < 10$ impliziert $g(x) = \left\lfloor \frac{20}{x+18} \right\rfloor > 1$, $h(x) = 0$ und damit $f(x) = g(x) + h(x) = g(x) > 1$ Im Intervall $-8 < x < 2$ hingegen gilt:
$g(x) = 1$,$h(x) = 0$ und damit $f(x) = g(x) + h(x) = h(x) = 1$

2.2.4 $x = 2$

- Für $g(x)$ gilt:
  $g(2) = \left\lfloor \frac{20}{2+18} \right\rfloor = 1$
- Für $h(x)$ gilt:
  $h(x) = \left\lfloor \frac{2+18}{20} \right\rfloor = 1$

Daraus folgt: $f(2) = 2$

2.2.5 Intervall $x > 2$

- Für $g(x)$ gilt:
  $(18 + x) > 20$ impliziert $0 < \frac{20}{18+x} < 1$ impliziert $\left\lfloor \frac{20}{x+18} \right\rfloor = 0$

Um $f(x) = 1$ zu erfüllen, müssen wir also im Intervall $x > 2$ alle x bestimmen für die gilt: $h(x) = 1$

- Es muss also gelten:
  $h(x) = 1$
  $\left\lfloor \frac{x+18}{20} \right\rfloor = 1$
  $1 \leq \frac{x+18}{20} < 2$
  $20 \leq x + 18 < 40$
  $2 \leq x < 22$, allerdings untersuchen wir im Moment nur alle $x > 2$, daher gilt:
  $2 < x < 22$
  Im Intervall $2 < x < 22$ gilt also: $h(x) = 1$

Für alle $x > 22$ gilt: $h(x) > 1$, $g(x) = 0$ und damit $f(x) = g(x) + h(x) = h(x) > 1$ Im Intervall $2 < x < 22$ hingegen gilt:
$h(x) = 1$,$g(x) = 0$ und damit $f(x) = g(x) + h(x) = h(x) = 1$

Insgesamt gibt es also nur zwei Intervalle, in denen die Aufgabenstellung erfüllt ist:
$-8 < x < 2$ und $2 < x < 22$
q.e.d.
s.d.g.

2.3

h_a sei die Höhe von A. h_{a_1} sei der Höhenabschnitt HH_a. h_{a_2} sei der Höhenabschnitt HA. Entsprechend gilt das auch für h_b, h_{b_1} und h_{b_2} sowie für h_c, h_{c_1} und h_{c_2}

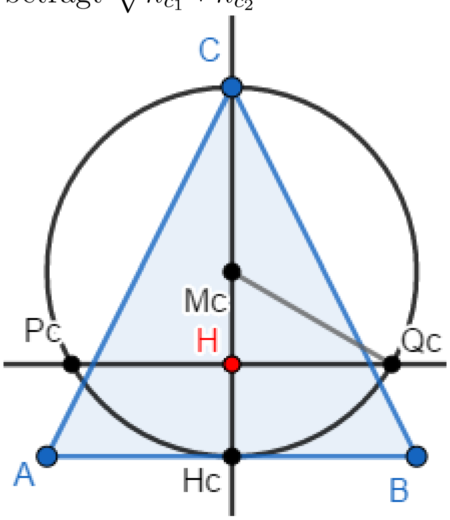
2.3.1 Teil I.

- Behauptung:
  Wenn es einen Kreis gibt, auf dem die Punkte P_a, Q_a, P_b, Q_b, P_c und Q_c liegen, dann ist der Mittelpunkt dieses Kreises der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC.

- Beweis:
  Der Mittelpunkt eines Kreises hat zu jedem Punkt auf dem Kreis den gleichen Abstand. Der geometrische Ort aller Punkte, die den gleichen Abstand von P_a und Q_a haben, ist die Mittelsenkrechte m_a dieser Punkte. Die Mittelsenkrechte m_a von P_a und Q_a ist senkrecht zu P_aQ_a und damit per Aufgabenkonstruktion auch senkrecht zur Seite BC. Außerdem kennen wir schon einen anderen Kreis durch P_a und Q_a. Laut Aufgabe hat er den Durchmesser AH_a. Demzufolge liegt sein Mittelpunkt auf der Höhe h_a. Die einzige Gerade, die durch einen Punkt auf der Höhe h_a geht und senkrecht zur Seite BC steht, ist die Höhe h_a. Daraus folgt: $m_a = h_a$. Entsprechend gilt: $m_b = h_b$ und $m_c = h_c$. Der einzige Punkt, der demnach als Mittelpunkt M für einen Kreis durch alle sechs Punkte in Frage kommt, muss also sowohl auf m_a, als auch auf m_b als auch auf m_c liegen. Aus $m_a = h_a$, $m_b = h_b$ und $m_c = h_c$ folgt daher, dass der gesuchte Punkt M der Höhenschnittpunkt sein muss.

2.3.2 Teil II.

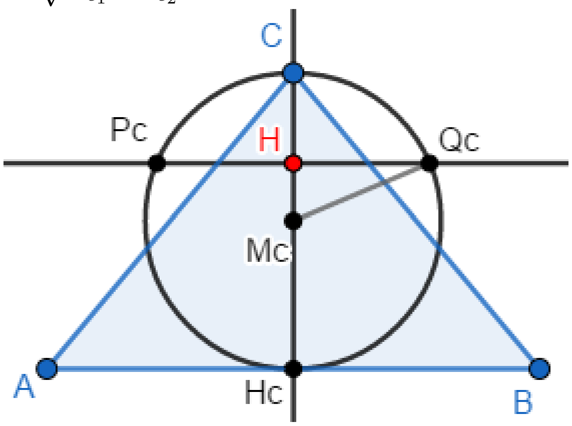
- Behauptung:
  Die Entfernung von P_c zum Höhenschnittpunkt ist gleich der Entfernung von Q_c und beträgt $\sqrt{h_{c_1} * h_{c_2}}$



Fall 1: H befindet sich unter M_c

- Beweis:
  M_c sei der Mittelpunkt der Höhe h_c. Da M_c daher auch der Mittelpunkt des Kreises

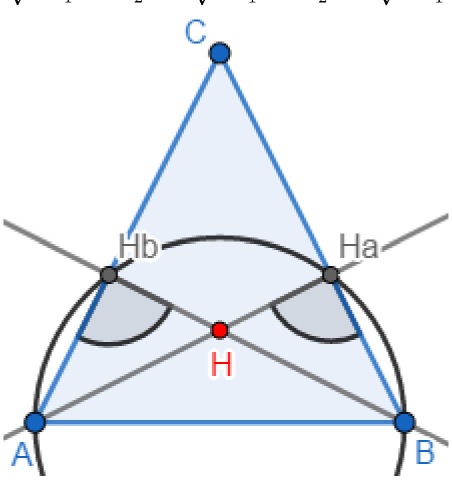
mit dem Durchmesser CH_c ist,
gilt: $M_cC = M_cQ_c = M_cH_c = M_cP_c = \frac{CH_c}{2} = \frac{h_c}{2}$
Aus dieser Gleichung folgt erstens, dass es zwischen M_cQ_c und M_cP_c vom Betrag her keinen Unterschied gibt. Zweitens gilt nun nach dem Satz des Pythagoras für Fall 1:
$M_cQ_c = \sqrt{\left(\frac{h_c}{2}\right)^2 - \left(\frac{h_c}{2} - h_{c_1}\right)^2} = \sqrt{\frac{{h_c}^2}{4} - \left(\frac{{h_c}^2}{4} - h_c h_{c_1} + h_{c_1}^2\right)}$
$= \sqrt{h_c h_{c_1} - h_{c_1}^2} = \sqrt{h_{c_1} * (h_c - h_{c_1})}$
$= \sqrt{h_{c_1} * h_{c_2}}$



Fall2: H befindet sich über M_c
Für Fall 2 gelten die Gleichungen ebenfalls, hier müssen allerdings h_{c_1} und h_{c_2} vertauscht werden. Das ändert am Ergebnis $M_cQ_c = \sqrt{h_{c_1} * h_{c_2}}$ aber nichts.
Da wir hier nur Voraussetzungen genutzt haben, die laut Aufgabenstellung sowohl für C als auch für A als auch für B gelten, lässt sich alles andere analog folgern.

2.3.3 Teil III.

- Behauptung:
  Nun bleibt nur noch zu beweisen, dass
  $\sqrt{h_{c_1} * h_{c_2}} = \sqrt{h_{b_1} * h_{b_2}} = \sqrt{h_{a_1} * h_{a_2}}$



- Beweis:
  Da der Winkel HH_aB ein rechter Winkel ist, lässt sich nach dem Satz des Thales ein Halbkreis durch H_a mit Durchmesser AB konstruieren. Analog lässt sich ein

Thaleskreis durch H_b konstruieren. Da die beiden Kreise den gleichen Durchmesser AB haben, müssen H_a und H_b auf dem gleichen Kreis liegen.
Das Viereck ABH_aH_b ist also ein Sehnenviereck. Entsprechend lässt sich zeigen, dass BCH_bH_c und CAH_cH_a Sehnenvierecke sind. Nach dem Sehnensatz folgt:
$AH*HH_a = BH*HH_b = CH*HH_c$. Das ist äquivalent zu $h_{c_1}*h_{c_2} = h_{b_1}*h_{b_2} = h_{a_1}*h_{a_2}$
$\rightarrow \sqrt{h_{c_1} * h_{c_2}} = \sqrt{h_{b_1} * h_{b_2}} = \sqrt{h_{a_1} * h_{a_2}}$

q.e.d.
s.d.g.

2.4

2.4.1 Allgemeine Aussagen und Nomenklatur

- I. Es gibt 15 verschiedene Strecken und 20 verschiedene Dreiecke

- Beweis I.:
  Die Anzahl der Strecken entspricht der Anzahl aller verschiedenen Zweiertupel aus der Menge der sechs Punkte: $\binom{6}{2} = 15$. Die Anzahl der Dreiecke entspricht der Anzahl aller verschiedenen Tripel aus der Menge der 6 Punkte: $\binom{6}{3} = 20$

- II. Jede Strecke ist Teil von 4 Dreiecken

- Beweis II.:
  Eine Strecke verbindet zwei Punkte. Da laut Aufgabenstellung keine drei Punkte auf einer Geraden liegen, kommen für den dritten Punkt eines Dreiecks mit dieser Strecke genau die vier anderen Punkte in Frage. Jede Strecke ist also Teil von 4 verschiedenen Dreiecken.

- Diese vier Dreiecke, in denen eine beliebige Strecke XY Seite ist, seien die Streckendreiecke von XY

- III. Jede Strecke außer XY, die Seite eines Streckendreiecks XYZ von XY ist, verbindet entweder X oder Y mit dem dritten Punkt Z des entsprechenden Streckendreiecks XYZ.

- Beweis III.:
  Da ein solches Streckendreieck XYZ nur aus den drei Strecken XY, YZ und ZX besteht, die Strecke XY aber ausgeschlossen wurde, verbindet jede der beiden verbleibenden Strecken XZ und YZ entweder X oder Y mit Z.

- Aus einer Menge von sechs beliebig gewählten Punkten bestimme man alle diejenigen Strecken, die kürzeste Seite in mindestens einem der 20 Dreiecke sind. Die Anzahl dieser Strecken ist endlich, da es insgesamt nur 15 Strecken gibt und diese Teilmenge daher auch nur eine endliche Anzahl Elemente enthalten kann. Laut Aufgabenstellung gibt es keine zwei Strecken, deren Länge gleich ist. Daher ist die längste der Strecken, die kürzeste Seite in mindestens einem der 20 Dreiecke sind, eindeutig bestimmbar. Sie verbinde die Punkte A und B. Die Punkte A und B sind also vertauschbar.

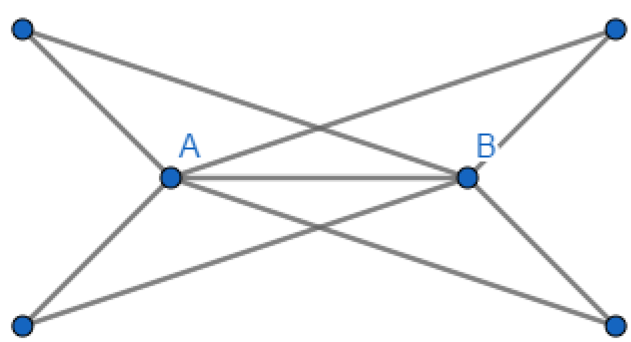


Bild 1: Schematische Darstellung von Strecke AB und ihren vier Streckendreiecken.

2.4.2 Fallunterscheidung

- Fall 1:
  Die Strecke AB ist längste Seite in mindestens einem Dreieck.

- Beweis Fall 1:
  Da AB per definitionem kürzeste Seite in mindestens einem Dreieck ist, erfüllt sie somit die Bedingung zugleich kürzeste Seite in einem Dreieck und längste in einem anderen Dreieck zu sein.

- Fall 2:
  Die Strecke AB ist in keinem Dreieck längste Seite.

- Beweis Fall 2: Die Strecke AB ist nach (II.) Teil von vier Dreiecken. Da AB in keinem dieser vier Dreiecke längste Strecke ist, gibt es mindestens 4 Strecken, die länger als AB und Teil von einem dieser vier Dreiecke sind. Da AB per definitionem in mindestens einem dieser vier Dreiecke kürzeste Seite ist, gibt es sogar mindestens fünf Strecken, die länger als die Strecke AB und Teil ihrer vier Streckendreiecke sind.
  Aus III. folgt, dass jede Strecke (außer AB), die Seite eines Streckendreiecke von AB ist, entweder mit A oder mit B verbunden ist. Da insgesamt mindestens fünf Strecken, die länger als AB sind, mit A oder B verbunden sind, folgt nach dem Schubfachprinzip, dass mindestens einer der Punkte A oder B Teil von mindestens drei Strecken ist, die länger als AB sind. Falls es mehr als drei Seiten geben sollte, die alle mit einem Punkt A oder B vebunden sind oder mindestens drei Strecken, die länger als AB sind, mit beiden Punkten verbunden sind, suchen wir uns drei Strecken heraus, die alle mit dem gleichen Punkt A oder B verbunden sind.

  - Möglichkeit I.: Die drei oben beschriebenen Strecken sind mit Punkt B verbunden.
  - Möglichkeit II.: Die drei oben beschriebenen Strecken sind mit Punkt A verbunden.

  Da Punkt A und Punkt B vertauschbar sind, gilt der Beweis für Möglichkeit I. analog auch für Möglichkeit II. , indem man B durch A und A durch B ersetzt. Im folgenden werde ich also auf Möglichkeit I. eingehen:
  Die jeweils zweiten Punkte dieser drei Strecken nennen wir C, D und E. BC, BD und BE sind also länger als AB (siehe Bild 2).

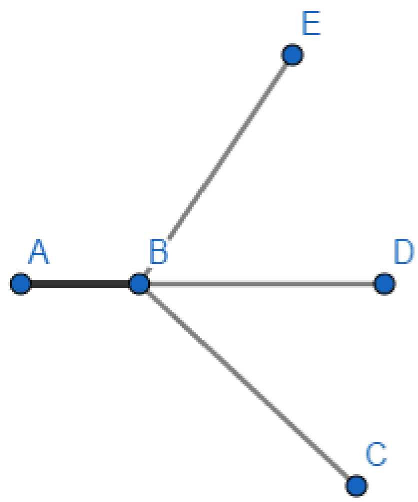


Bild 2: Schematische Darstellung von Fall 2

Die Strecke AB ist per definitionem die längste aller Strecken, welche kürzeste Seite in mindestens einem Dreieck sind.

Daher können alle Strecken, die länger als AB sind, nicht kürzeste Seite in einem Dreieck sein. Im Dreieck BDE sind sowohl BD als auch BE länger als AB und damit auf keinen Fall kürzeste Seite in diesem Dreieck. Also muss die verbleibende Seite DE die kürzeste Seite in diesem Dreieck sein. Analog folgt für BCE, dass CE die kürzeste Seite in diesem Dreieck sein muss und für BCD, dass CD die kürzeste Seite in diesem Dreieck sein muss. Es entsteht das Dreieck CDE, in dem jede Seite kürzeste Seite eines anderen Dreiecks ist. Für Möglichkeit II. gilt analog, dass DE die kürzeste Seite von ADE, CE die kürzeste Seite von ACE und CD die kürzeste Seite von ACD sein muss. Auch hier entsteht das Dreieck CDE, in dem jede Seite kürzeste Seite eines anderen Dreiecks ist. Eine der drei Seiten von CDE muss aber längste Seite von CDE sein. Daher gibt es für Fall 2 immer eine Strecke, die zugleich kürzeste Seite eines Dreiecks und längste Seite eines anderen Dreiecks ist.

q.e.d.
s.d.g.