



BUNDESWETTBEWERB  
MATHEMATIK  
Bildung & Begabung

# 2019

## Die Aufgaben für die 1. Runde des Bundeswettbewerbs Mathematik 2019

### Aufgabe 1

Ein  $8 \times 8$ -Schachbrett wird mit 32 Dominosteinen der Größe  $1 \times 2$  vollständig und überschneidungsfrei bedeckt.

Beweise: Es gibt stets zwei Dominosteine, die ein  $2 \times 2$ -Quadrat bilden.

### Aufgabe 2

Die Buchstaben  $A, C, F, H, L$  und  $S$  stehen für sechs nicht notwendigerweise verschiedene Ziffern im Dezimalsystem, wobei  $A \neq 0$  und  $F \neq 0$  ist. Aus ihnen werden die sechsstelligen Dezimaldarstellungen  $SCHLAF$  und  $FLACHS$  zweier Zahlen gebildet.

Beweise: Die Differenz dieser beiden Zahlen ist genau dann durch 271 teilbar, wenn  $C = L$  und  $H = A$  gilt.

### Aufgabe 3

Im Quadrat  $ABCD$  werden auf der Seite  $BC$  der Punkt  $E$  und auf der Seite  $CD$  der Punkt  $F$  so gewählt, dass  $\angle EAF = 45^\circ$  gilt und weder  $E$  noch  $F$  Eckpunkte des Quadrates sind. Die Geraden  $AE$  und  $AF$  schneiden den Umkreis des Quadrates außer im Punkt  $A$  noch in den Punkten  $G$  bzw.  $H$ .

Beweise, dass die Geraden  $EF$  und  $GH$  parallel sind.

### Aufgabe 4

In der Dezimaldarstellung von  $\sqrt{2} = 1,4142\dots$  findet Isabelle eine Folge von  $k$  aufeinander folgenden Nullen, dabei ist  $k$  eine positive ganze Zahl.

Beweise: Die erste Null dieser Folge steht frühestens an der  $k$ -ten Stelle nach dem Komma.

**Einsendeschluss: 4. März 2019**

**Adresscoupons 2019** (Bitte in Druckbuchstaben ausfüllen und auf den Umschlag außen aufkleben)

ABSENDER																					
Name																					
Strße / Nr.	Vorname	Plz / Ort																			
Derzeitige Klassenstufe	<input type="checkbox"/> Gruppenarbeit * <input type="checkbox"/> Die eingerichtete Arbeit umfasst _____ Seiten <input type="checkbox"/> Aufgabe 1 * <input type="checkbox"/> Aufgabe 2 * <input type="checkbox"/> Aufgabe 3 * <input type="checkbox"/> Aufgabe 4 *   * Zutreffendes bitte ankreuzen!																				
Bearbeitete Aufgaben																					
ANSCHRIFT DER SCHULE																					
Schulname																					
Plz / Ort	Bundesland																				
 <b>TEILNEHMER</b> 2019 (Bitte in Druckbuchstaben ausfüllen und der Arbeit beilegen)																					
<table border="1"> <tr> <td>Name</td> <td>Vorname</td> <td>Plz / Ort</td> </tr> <tr> <td>Strße / Nr.</td> <td>E-Mail</td> <td></td> </tr> <tr> <td>Telefon</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Bundesland</td> <td colspan="2">Geburtsdatum</td> </tr> <tr> <td>Derzeitige Klassenstufe</td> <td colspan="2"> <input type="checkbox"/> Männlich *   <input type="checkbox"/> Weiblich *  <input type="checkbox"/> Die eingerichtete Arbeit umfasst _____ Seiten  <input type="checkbox"/> Gruppenarbeit *  <input type="checkbox"/> Aufgabe 1 *   <input type="checkbox"/> Aufgabe 2 *   <input type="checkbox"/> Aufgabe 3 *   <input type="checkbox"/> Aufgabe 4 *         </td> </tr> <tr> <td>Bearbeitete Aufgaben</td> <td colspan="2"></td> </tr> </table>				Name	Vorname	Plz / Ort	Strße / Nr.	E-Mail		Telefon			Bundesland	Geburtsdatum		Derzeitige Klassenstufe	<input type="checkbox"/> Männlich * <input type="checkbox"/> Weiblich * <input type="checkbox"/> Die eingerichtete Arbeit umfasst _____ Seiten <input type="checkbox"/> Gruppenarbeit * <input type="checkbox"/> Aufgabe 1 * <input type="checkbox"/> Aufgabe 2 * <input type="checkbox"/> Aufgabe 3 * <input type="checkbox"/> Aufgabe 4 *		Bearbeitete Aufgaben		
Name	Vorname	Plz / Ort																			
Strße / Nr.	E-Mail																				
Telefon																					
Bundesland	Geburtsdatum																				
Derzeitige Klassenstufe	<input type="checkbox"/> Männlich * <input type="checkbox"/> Weiblich * <input type="checkbox"/> Die eingerichtete Arbeit umfasst _____ Seiten <input type="checkbox"/> Gruppenarbeit * <input type="checkbox"/> Aufgabe 1 * <input type="checkbox"/> Aufgabe 2 * <input type="checkbox"/> Aufgabe 3 * <input type="checkbox"/> Aufgabe 4 *																				
Bearbeitete Aufgaben																					
<p><b>Selbstständigkeitserklärung:</b> Ich versichere, dass ich/die Gruppe alle beigefügten Lösungen selbstständig gefunden und ausgearbeitet habe/hat.</p> <p>Ich stimme den Teilnahmebedingungen zu.</p>																					
Datum	Unterschrift																				
ANSCHRIFT DER SCHULE																					
Schulname																					
Strße / Nr.	Bundesland																				
Plz / Ort																					

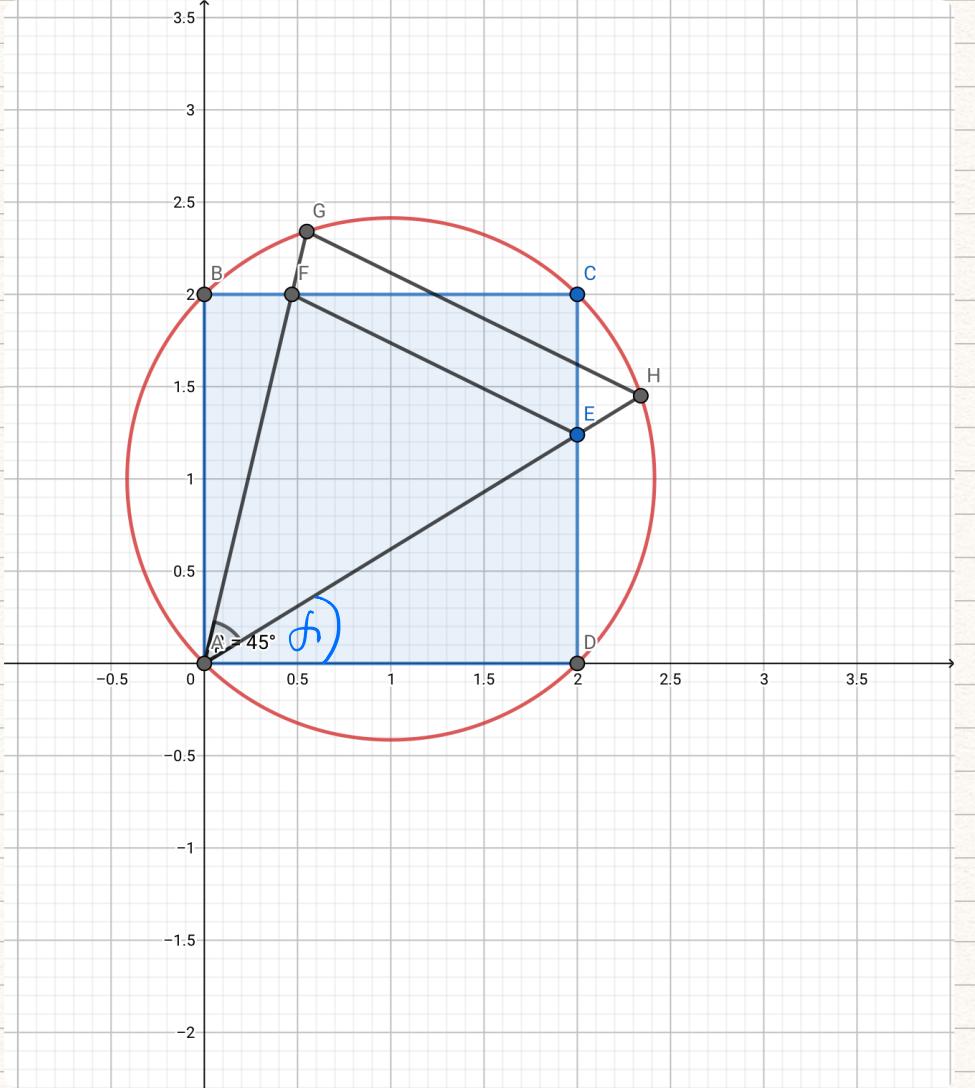
**Bitte die Teilnahmebedingungen und die wichtigen Hinweise auf der Rückseite beachten!**

3)

$$\overline{FE} \parallel \overline{HG}$$

$$\begin{aligned} A & (0 | 0) \\ B & (2 | 0) \\ C & (2 | 2) \\ D & (0 | 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E & (2 | 2 \tan \alpha) \\ F & \left( \frac{2}{\tan(\alpha + 45^\circ)} | 2 \right) \end{aligned}$$



Kreisbedingung:

$$2 = (x-1)^2 + (y-1)^2$$

$$2 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1$$

$$0 = x^2 - 2x + y^2 - 2y$$

Gerade durch AH:

$$y = \tan \alpha \cdot x$$

Gerade durch AG:

$$y = \tan(\alpha + 45^\circ) \cdot x$$

→ Gerade durch AB in die Kreisbedingung eingesetzt:

$$0 = x^2 - 2x + y^2 - 2y$$

$$0 = x^2 - 2x + (\tan \alpha)^2 \cdot x^2 - 2 \tan \alpha \cdot x \quad | :x$$

$$0 = x - 2 + (\tan \alpha)^2 \cdot x - 2 \tan \alpha$$

$$2 + 2 \tan \alpha = x(1 + (\tan \alpha)^2)$$

$$x_2 = \frac{2 + 2 \tan \alpha}{1 + (\tan \alpha)^2}$$

⇒ x-Koordinate  
für H

$$= \frac{2 + 2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}$$

$$= \frac{2 \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = 2 \cos \alpha (\cos \alpha + \sin \alpha)$$

⇒ 1

→ Gerade durch AG in die Kreisbedingung eingesetzt:

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = \frac{2 + 2 \tan(\alpha + 45^\circ)}{1 + \tan(\alpha + 45^\circ)} = 2 \cos(\alpha + 45^\circ) (\cos(45^\circ) + \sin(45^\circ))$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

$$= 2 \left( \cos(\alpha) \cdot \cos(45^\circ) - \sin(\alpha) \cdot \sin(45^\circ) \right)$$

$$\left( \cos(\alpha) \cdot \cos(45^\circ) - \cancel{\sin(\alpha) \cdot \sin(45^\circ)} + \cancel{\sin(\alpha) \cdot \cos(45^\circ)} + \cos(\alpha) \cdot \sin(45^\circ) \right)$$

$$= 2 \left( \cos(\alpha) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin(\alpha) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cdot 2 \cos(\alpha) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2 \cos^2(\alpha) - 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) = 2 \cos(\alpha) (\cos(\alpha) - \sin(\alpha))$$

$$H \left( 2 \cos \alpha (\cos \alpha + \sin \alpha) \right) \quad 2 \sin \alpha (\cos \alpha + \sin \alpha)$$

$$G \left( 2 \cos \alpha (\cos(\alpha) - \sin(\alpha)) \right) \left( 2 \cos \alpha (\cos(\alpha) - \sin(\alpha)) \cdot \tan(\alpha + 45^\circ) \right)$$

$$\tan(\alpha + 45^\circ) = \frac{\sin(\alpha + 45^\circ)}{\cos(\alpha + 45^\circ)} = \frac{\sin(\alpha) \cos(45^\circ) + \cos(\alpha) \sin(45^\circ)}{\cos(\alpha) \cos(45^\circ) - \sin(\alpha) \sin(45^\circ)}$$

$$= \frac{\sin(\alpha) + \cos(\alpha)}{\cos(\alpha) - \sin(\alpha)}$$

$$G \left( 2 \cos \alpha (\cos(\alpha) - \sin(\alpha)) \right) \parallel 2 \cos \alpha (\sin(\alpha) + \cos(\alpha))$$

$$f \left( 2 \cos \varphi (\cos \vartheta + \sin \vartheta) \right) \quad \left. \quad 2 \sin \varphi (\cos \vartheta + \sin \vartheta) \right)$$

$$g \left( 2 \cos \varphi (\cos \vartheta - \sin \vartheta) \right) \parallel 2 \cos \vartheta (\sin \vartheta + \cos \vartheta)$$

$$E(2 | 2 \tan \vartheta) = \left( 2 | 2 \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} \right)$$

$$F \left( \frac{2}{\tan(\alpha + 45^\circ)} | 2 \right) = \left( 2 \cdot \frac{\cos(\vartheta) - \sin(\vartheta)}{\sin(\vartheta) + \cos(\vartheta)} \mid 2 \right)$$

$$\frac{y_E - y_F}{x_E - x_F} = \frac{y_H - y_G}{x_H - x_G}$$

zu blau eisern

$$\frac{2 \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} - 2}{2 - 2 \cdot \frac{\cos(\vartheta) - \sin(\vartheta)}{\sin(\vartheta) + \cos(\vartheta)}} = \frac{(\sin \vartheta - \cos \vartheta)(\sin \vartheta + \cos \vartheta)}{\cos \vartheta \cdot (\sin \vartheta + \cos \vartheta) - ((\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta) \cdot (\cos \vartheta))}$$

$$= \frac{\sin^2 \vartheta - \cos^2 \vartheta}{2(\cos \vartheta \cdot \sin \vartheta)}$$

$$\cancel{2\sin\alpha(\cos\alpha + \sin\alpha)} = \cancel{2\cos\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha)}$$

$$\cancel{2\cos\alpha(\cos\alpha + \sin\alpha)} = \cancel{2\cos\alpha(\cos\alpha - \sin\alpha)}$$

$$\frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{2\cos\alpha \sin\alpha}$$

St. Eigengesetze sind gleich

q.e.d.