Physik LK Rieseberg J1

Patrick Müller, Josua Kugler

3. September 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Elektrische Ladung und elektrisches Feld

2 Das Magnetfeld und Teilchen in Feldern

3 Induktion

3.1 Bewegung eines Leiters im Magnetfeld - Berechnung der Induktionsspannung

Bewegt sich eine Leiterschleife mit der Geschwindigkeit v_s senkrecht zum Magnetfeld, wirkt auf jedes Elektron im Leiter die Lorentzkraft F_L.

$$F_L = e * v * B \tag{3.1}$$

Sie verschiebt die Elektronen im Leiter. Dadurch wird das eine Ende des Leiters negativ geladen, das andere Ende positiv. Diese Ladungsverteilung erzeugt eine elektrische Feldstärke E im Leiter, die solange anwächst, bis Gleichgewicht zwischen der Lorentzkraft und der elektrischen Kraft besteht.

$$\begin{aligned} F_L &= F_e l \\ q * v * B &= E * q \\ v * B &= \frac{U_{ind}}{d} \end{aligned}$$

Merke:

$$U_{ind} = v_s * B * d \tag{3.2}$$

mit

$$\begin{aligned} v_s &= \text{Geschwindigkeit senkrecht zum Magnetfeld} \\ B &= \text{Magnetfeld} \\ d &= \text{Länge des Leiterstücks im Magnetfeld} \end{aligned}$$

3.2 Induktion durch Änderung der senkrecht vom Magnetfeld durchsetzten Fläche

Die Spule werde mit konstanter Geschwindigkeit v_s in das Magnetfeld hineinbewegt.

Merke: Die induzierte Spannung U_{ind} ist desto größer, je größer die Änderungsrate $\dfrac{\Delta A_s}{\Delta t}$ der senkrecht vom Magnetfeld durchsetzten Spulenfläche ist. Es gilt:

$$\begin{aligned} U_{ind} &= n * B * \frac{\Delta A_s}{\Delta t} \\ &= n * B * \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A_s}{\Delta t} \\ &= n * B * \frac{\mathrm{d}A_s}{\mathrm{d}t} \\ &= n * B * \dot{A}_s \end{aligned} \tag{3.3a}$$

3.3 Rotation einer Spule im Magnetfeld

Die senkrecht vom B-Feld durchsetzte Fläche ist bei einer rotierenden Spule gegeben durch:

$$A(t) = \hat{A} * cos(\omega t + \varphi_0) \tag{3.4}$$

mit

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \text{Amplitude(max. Wert der Fläche } A_s) \\ \varphi_0 &= \text{Anfangswinkel} \end{aligned}$$

und der Winkelgeschwindigkeit

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{2\pi}{T} \\ [\omega] &= \frac{1}{s} = 1\ \text{Hz} \end{aligned}$$

Damit erhält man:

$$\dot{A}_{(t)} = -\hat{A} * \omega * sin(\omega t + \varphi_0)$$

Dadurch ergibt sich für die induzierte Spannung bei der Rotation einer Spule mit n Windungen im Magnetfeld B:

$$\begin{aligned} U_{ind}(t) &= n * B * \dot{A}(t) \\ &= -n * B * \hat{A} * \omega * sin(\omega t + \varphi_0) \\ &= -\hat{U} * sin(\omega t * \varphi_0) \end{aligned} \tag{3.5}$$

3.4 Magnetfeldänderung

Induktionsspannung aufgrund der Änderung des Magnetfeldes, welches die Querschnittsfläche einer Spule A_s senkrecht durchsetzt:

$$U_{ind} = n * A_s * \dot{B} \tag{3.6}$$

3.5 Der magnetische Fluss

Der magnetische Fluss ist ein Maß für die Anzahl der Feldlinien, die eine Fläche A durchsetzen.
Der magnetische Fluss ist definiert als Produkt vo magnetischer Flussdichte B und dem Flächeninhalt A_s der Projektion der Fläche A <u>senkrecht</u> zu den Feldlinien.

$$\Phi = B * A_s \tag{3.7}$$
$$[\Phi] = T * m^2 = V * s = 1\text{Wb(nach Wilhelm Weber)}$$

3.6 Allgemeine mathematische Formulierung des Induktionsgesetzes

Wenn sich der magnetische Fluss Φ durch eine Leiterschleife so ändert, dass er die Ableitung nach der Zeit $\hat{\Phi}(t)$ hat, entsteht die Induktionsspannung

$$U_{ind} = -n * \hat{\Phi}_{(t)} \tag{3.8}$$

mit

$$-n = \text{Anzahl der Spulenwindungen}$$
$$\dot{\Phi}_{(t)} = \text{Änderungsrate des Flusses nach der Zeit}$$

Erste Formulierung von Michael Faraday
Wie ergeben sich daraus die betrachteten Spezialfälle:

$$\begin{aligned} U_{ind} &= -n * \dot{\Phi}_{(t)} \\ &= -n * (A_s \dot{*} B)(t) \\ &= -n * (\dot{A}_s * B + A_s * \dot{B})_{(t)} \end{aligned}$$

3.7 Lenz´sche Regel- eine andere Formulierung des Energieerhaltungssatzes

Ein induzierter Strom I_{ind} ist so gerichtet, dass das von ihm erzeugte Magnetfeld der Änderung des magnetischen Flusses entgegenwirkt, die den Strom hervorruft.
Anwendung der Lenz´schen Regel:
Grafik aus Ordner
Die Elektronen fließen bei Annäherung des äußeren Magnetfeldes in der Leiterschleife in diese Richtung, da B_{ind} die Zunahme des äußeren Magnetfeldes entgegengesetzt sein muss.

Beweis der Gültigkeit des Energieerhaltungssatzes bei Induktionsvorgängen Um den Stab mit gleichbleibender Geschwindigkeit $\vec{v}$ gegen die bremsende Lorentzkraft F_L zu bewegen, muss eine Zugkraft F_{Zug} aufgebracht werden, die betragsmäßig gleich, aber entgegengerichtet ist. Bei der Verschiebung des Stabes um Δs nach rechts wird folgende Arbeit verrichtet:

$$\begin{aligned} \Delta W_{mech} &= F_{Zug} * \Delta s \\ &= I * B * d * \Delta s \\ &= \frac{U_{ind}}{R} * d * B * \Delta s \\ &= \frac{B * v * d}{R} * d * B * \Delta s \\ &= \frac{B^2 * d^2 * v}{R} * \Delta s \end{aligned}$$

$$\Delta W_{mech} = \frac{B^2 * d^2 * v^2}{R} * \Delta t \tag{3.9}$$

Am Widerstand R, der z.B. ein elektrisches Gerät sein kann, wird in Δt elektrische Energie umgewandelt.

$$\begin{aligned}
\Delta W_{el} &= \underbrace{U_{ind} * I_{ind}}_{P_{el}} * \Delta t \\
&= B * v * d * \frac{B * v * d}{R} * \Delta t \\
\Delta W_{el} &= \frac{B^2 * v^2 * d^2}{R} * \Delta t
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Aus 3.9 und 3.10 folgt, dass bei Induktionsvorgängen der Energieerhaltungssatz erfüllt.
Die Lenz´sche Regel ist so betrachtet nur eine andere Formulierung des Energieerhaltungssatzes.

3.8 Selbstinduktion

Eine Stromänderung in einer Spule ändert den magnetischen Fluss dieser Spule, wodurch in der Spule selbst wieder eine Spannung induziert wird. Nach der Lenz´schen Regel ist die Induktionsspannung der Stromänderung entgegengerichtet. Der Vorgang heißt Selbstinduktion.
Def.: Selbstinduktion/Eigeninduktion
Magnetische Rückwirkung eines sich ändernden elektrischen Stroms auf den eigenen Leiterkreis.
Grafik aus Ordner

Induktivität

$$\begin{aligned}
U_{ind(t)} &= -n * A_s * \hat{B}_{(t)} \\
&= -n * A * \mu_0 * \mu_r * \frac{n}{l} * {}_{(t)} \\
&= \underbrace{-n^2 * A * \mu_0 * \mu_r * l^{-1}}_{L} * \dot{I}_{(t)}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

$L = \mu_0 * \mu_r * \frac{n^2}{l} * A$ heißt Induktivität der Spule

$$[L] = \frac{V * s}{A} = \frac{\Omega}{s} = 1 \;\; H \;\; \text{(Henry)} \tag{3.12}$$

Einschaltvorgang

$$U_{(t)} = U_1 - U_{ind} = U_1 - L * \dot{I}_{(t)}$$

$$I_{(t)} * R = U_1 - L * \dot{I}_{(t)} \tag{3.13a}$$

$$I_{(t)} = \frac{U_1}{R} - \frac{L}{R} * \dot{I}_{(t)} \tag{3.13b}$$

$$\dot{I}_{(t)} = \frac{U_1 - I_{(t)} * R}{L} \tag{3.13c}$$

Aus diesem Differentialgleichungssystem folgt:

$$\dot{I}_{(t)} = \frac{R}{L} * \left(\frac{U_1}{R} - I(t)\right)$$

$$\rightarrow I_{(t)} = \frac{U_1}{R} * \left(1 - e^{-\frac{R}{L} * t}\right) \tag{3.13d}$$

Zum Zeitpunkt $t = 0s$ gilt $I_{(0s)} = 0A$

$$\rightarrow \dot{I}_{(0s)} = \frac{U_1}{L} \tag{3.13e}$$

Mit der Zunahme von $I_{(t)}$ wird $\dot{I}_{(t)}$ kleiner

$$\rightarrow \dot{I}_{\infty} = 0\frac{A}{s} \tag{3.13f}$$

$$\rightarrow I_{\infty} = \frac{U_1}{R} \tag{3.13g}$$

Merke:

1. Bestimmung von R aus dem Schaubild:

$$R = \frac{U_1}{I_{\infty}} \tag{3.14}$$

2. Bestimmung von L aus dem Schaubild:

   $\dot{I}_{0s}$ bestimmen;

$$L = \frac{U_1}{\dot{I}_{0s}} \tag{3.15}$$

3. für größeres L (z.B. Eisenkern):
   verzögerter Anstieg,
   Schranke bleibt gleich
   $\rightarrow$ "wird flacher"

4. für größeres R:
   Schranke wird niedriger
   schnellerer Anstieg
   $\dot{I}_{0s}$ ist gleich

Ausschaltvorgang Beim Ausschaltvorgang verhindert die Spule ein sofortiges Zusammenbrechen des Stroms.

aus 3.13a folgt:

$$\begin{aligned} I_{(t)} * R &= 0 - L * \dot{I}_{(t)} \\ \dot{I}_{(t)} &= -\frac{R}{L} * I_{(t)} \end{aligned} \tag{3.16}$$

Lösungsfunktion:

$$\begin{aligned} I_{(t)} &= I_{\infty} * e^{-\frac{R}{L}*t} \\ &= \frac{U_1}{R} * e^{-\frac{R}{L}*t} \end{aligned} \tag{3.17}$$

Verzweigter Stromkreis Grafiken im Ordner

3.9 Leistung und Energie im Magnetfeld

Nach Abschalten der äußeren Spannung U_1 rührt der Strom $I_{(t)} = I_{ind(t)}$ ausschließlich von der Spannung $U_{ind(t)}$ her. Daraus ergibt sich für die Leistung:

$$P_{(t)} = U_{(t)} * I_{(t)}$$

hier:

$$\begin{aligned} &= U_{ind(t)} * I_{ind(t)} \\ &= -L * \dot{I}_{(t)} * I_{(t)} \end{aligned} \tag{3.18}$$

Die Gesamtenergie, die in der Spule gespeichert ist, ist das Integral der Funktion $W_{mag} = \int_{t_0}^{\infty} P\mathrm{d}t$

$$\begin{aligned} W_{mag} &= \int_{t_0}^{\infty} -L * \dot{I}_{(t)} * I_{(t)} \mathrm{d}t \\ &= 0 + \frac{1}{2} * L * I_{(0)}^2 \end{aligned}$$

Die Energie, die im Feld einer stromdurchflossenen Spule gespeichert ist, berechnet sich allgemein aus:

$$W_{mag} = -\frac{1}{2} * L * I^2 \tag{3.19}$$

Die Energiedichte im magnetischen Feld ρ_{mag} berechnet sich demnach aus:

$$\begin{aligned} \rho_{mag} &= \frac{W_{mag}}{V} \\ &= \frac{\frac{1}{2} * \mu_0 * \mu_r * \frac{n^2}{l} * A * I^2}{V} \\ &= \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0 * \mu_r} \end{aligned} \tag{3.20}$$

3.10 Die Maxwell´schen Gleichungen

Elektrische Ladungen sind die Quellen und Senken der elektrischen Feldlinien

$$\oint E\mathrm{d}A = \frac{Q}{\epsilon_0} \tag{3.21a}$$

Der gesamte magnetische Fluss durch jede beliebige geschlossene Fläche ist 0.

$$\oint B\mathrm{d}A = 0 \tag{3.21b}$$

Die Änderung der magnetischen Flussdichte, die eine Fläche durchsetzt, erzeugt ein elektrisches Wirbelfeld um diese Fläche herum

$$\oint E\mathrm{d}l = -\frac{d}{dt}\oint BdA \tag{3.21c}$$

Ein stromdurchflossener Leiter erzeugt um den Leiter herum ein magnetisches Wirbelfeld. Eine zeitliche Änderung des elektrischen Feldes, das eine Fläche durchsetzt, erzeugt um die Fläche herum ein magnetisches Wirbelfeld

$$\oint B\mathrm{d}l = \mu_0 * I + \mu_0\epsilon_0\frac{d}{dl}\oint EdA \tag{3.21d}$$

4 Schwingungen

4.1 Schwingungsvorgänge und Schwingungsgrößen

Merkmale einer Schwingung

1. Die Bewegung verläuft periodisch

2. Die Bewegung verläuft zwischen 2 Umkehrpunkten und durch einen ausgezeichneten Punkt, die Ruhelage oder Gleichgewichtslage des Oszillators

Entstehung einer Schwingung

1. Auslenkung des Oszillators aus der Ruhelage (Energiezufuhr)

2. Das Vorhandensein einer zur Gleichgewichtslage zurücktreibenden Kraft F_R (Rückstellkraft)

3. Die Trägheit des Oszillators aufgrund derer er sich über die Gleichgewichtslage hinausbewegt

Schwingungsgrößen

1. Periodendauer T
$$T = \frac{t}{n}$$
(t Zeit für n Schwingungen)

2. Frequenz f
$$f = \frac{1}{T}$$
$[f] = 1Hz$

3. Auslenkung aus der Ruhelage Elongation $s(t)$

4. Die Amplitude ist die größte Elongation $\hat{s}$

4.2 harmonische und nichtharmonische Schwingungen

Eine Schwingung, deren Zeit-Weg-Diagramm eine Sinuskurve ergibt, heißt harmonische Schwingung.

Bewegungsgleichung einer harmonischen Schwingung

$$s(t) = \hat{s} * sin(\omega t + \varphi_0)$$
$$v(t) = \dot{s}(t) = \hat{s} * \omega * cos(\omega t + \varphi_0)$$
$$a(t) = \dot{v}(t) = -\hat{s} * \omega^2 * sin(\omega t + \varphi_0)$$

4.3 Zusammenhang zwischen Kraft und Auslenkung: Wiederholung des Hookeschen Gesetzes

Federpendel Die stets zur Ruhelage hin wirkende resultierende Kraft heißt rücktreibende KraftF_R.
Beim Federpendel gilt das lineare Kraftgesetz:

$$F_R = -D * s$$

Der horizontale Federschwinger Aus dem Versuch folgt das allgemeine lineare Kraftgesetz:
$$F_R = -(D_1 + D_2) * s$$

4.4 Das Kraftgesetz der harmonischen Schwingung

Von der Bewegungsgleichung der harmonischen Schwingung zum linearen Kraftgesetz

$$s(t) = \hat{s} * sin(\omega t + \varphi_0) \tag{4.1}$$

Außerdem gilt:

$$F = m * a(t) = m * \ddot{s}(t) \tag{4.2}$$

Aus Gleichung 4.1 und 4.2 folgt:

$$\begin{aligned} F(t) &= m * (-\hat{s} * \omega^2 * sin(\omega t + \varphi_0)) && \text{(4.3a)} \\ &= -m * \omega^2 * \hat{s} * sin(\omega t + \varphi_0) && \text{(4.3b)} \\ &= -m * \omega^2 * s(t) && \text{(4.3c)} \\ &= -D * s(t) && \text{(4.3d)} \end{aligned}$$

Gleichung 4.3a ist also gleichbedeutend mit folgender Implikation:
Schwingung verläuft harmonisch $\rightarrow$ die zugrunde liegende Kraft muss dem linearen Kraftgesetz gehorchen.

Vom linearen Kraftgesetz zur Bewegungsgleichung der harmonischen Schwingung

$$\begin{aligned} F(t) &= -D * s(t) && \text{(4.4a)} \\ m * a(t) &= -D * s(t) && \text{(4.4b)} \\ m * \ddot{s}(t) &= -D * s(t) && \text{(4.4c)} \end{aligned}$$

Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\ddot{s}(t) = -\frac{D}{m} * s(t) \tag{4.4d}$$

Die Lösungsfunktion, die diese Differentialgleichung löst, lautet:

$$\begin{aligned} s(t) &= \hat{s} * sin(\sqrt{\frac{D}{m}} * t + \varphi_0) && \text{(4.4e)} \\ &= \hat{s} * sin(\omega * t + \varphi_0) && \text{(4.4f)} \end{aligned}$$

Es gilt: $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$

$$\dot{s}(t) = \hat{s} * \sqrt{\frac{D}{m}} * cos(\sqrt{\frac{D}{m}} * t + \varphi_0) \tag{4.4g}$$

$$\ddot{s}(t) = -\hat{s} * \frac{D}{m} * sin(\sqrt{\frac{D}{m}} * t + \varphi_0) \tag{4.4h}$$

$$= \underbrace{-\omega^2 * \hat{s}}_{a} * sin(\omega t + \varphi_0) \tag{4.4i}$$

$$= -\frac{D}{m} * s(t) \tag{4.4j}$$

Gleichungssystem 4.4 ist also gleichbedeutend mit folgender Implikation:
Ein lineares Kraftgesetz gilt $\rightarrow$ Die Schwingung verläuft harmonisch

Merke: Damit s(t) Lösungsfunktion der Differentialgleichung 4.4d ist, muss gelten:

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \tag{4.5a}$$

$$= \frac{2\pi}{T} \tag{4.5b}$$

$$= 2 * \pi * f \tag{4.5c}$$

$$\hat{v} = \hat{s} * \omega \tag{4.5d}$$

$$\hat{a} = \hat{s} * \omega^2 \tag{4.5e}$$

Lineares Kraftgesetz $\leftrightarrow$ Die Schwingung ist harmonisch

4.5 Das Fadenpendel

$$\frac{F_R}{F_G} = sin(\varphi)$$

$$F_R = F_G * sin(\varphi)$$

$$= F_G * sin(\frac{s}{l})$$

$$= m * g * sin(\frac{s}{l})$$

Mit Taylorreihennäherung dürfen wir für $-30° \leq \varphi \leq 30°$ annehmen:

$$\begin{aligned} F_R &= m * g * \frac{s}{l} \\ &= \underbrace{\frac{m * g}{l}}_{D} * s \end{aligned} \tag{4.6}$$

Dann hätten wir eine harmonische Schwingung mit dem Zeit-Elongations-Gesetz $s(t) = \hat{s} * sin(\omega t + \varphi_0)$ mit:

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{\frac{m * g}{l}}{m}} = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$T = s * \pi * \sqrt{\frac{m}{D}} = 2 * \pi * \sqrt{\frac{g}{l}}$$

4.6 Energie der harmonischen Schwingung

$$\begin{aligned} W_{pot} &= \int F \mathrm{d}s \\ W_{pot(s)} &= \frac{1}{2} * D * s^2 \\ W_{pot(s)} &= \frac{1}{2} * D * \hat{s}^2 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Die potenzielle Energie W_{pot} errechnet sich aus der Energie, die beim Verschieben des Schwingers aus der Gleichgewichtslage bis zur augenblicklichen Auslenkung s gegen die rücktreibende Kraft $F_R = -D * s$ zuzuführen ist:
$W_{pot} = \frac{1}{2} * D * s^2$ Die kinetische Energie des harmonischen Oszillators zu einem beliebigen Zeitpunkt t ergibt sich aus $W_{kin} = \frac{1}{2} * m * v^2$.
Für $s(t) = \hat{s} * sin(\omega t)$ ergibt sich für W_{pot}:

$$\begin{aligned} W_{pot} &= \frac{1}{2} * D * s_{(t)} \\ &= \frac{1}{2} * D * \hat{s}^2 * sin^2(\omega t) \end{aligned} \tag{4.8a}$$

und für W_{kin}:

$$W_{kin} = \frac{1}{2} * m * (\hat{s}^2 * \omega^2) * cos^2(\omega t)$$

mit

$$\omega^2 = \frac{D}{m}$$

Dies lässt sich vereinfachen zu:

$$W_{kin} = \frac{1}{2} * D * \hat{s}^2 * cos^2(\omega t) \tag{4.8b}$$

Aus 4.8a und 4.8b folgt:

$$\begin{aligned} W_{ges} &= \frac{1}{2} * D * \hat{s}^2 * sin^2(\omega t) + \frac{1}{2} * D * \hat{s}^2 * cos^2(\omega t) \\ &= \frac{1}{2} * D * \hat{s}^2 * (sin^2(\omega t) + cos^2(\omega t)) \end{aligned}$$

$$W_{Ges} = \frac{1}{2} * D * \hat{s}^2 \tag{4.8c}$$

4.7 Die gedämpfte harmonische Schwingung

Jede freie Schwingung ist gedämpft, da der Oszillator Energie an die Umgebung abgibt.

Dämpfung bei konstanter Kraft gedämpfte Sinuskurve(Heft)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} * D * \hat{s}_0^2 - \frac{1}{2} * D * \hat{s}_1^2 &= F_{reib} * (\hat{s}_0 + \hat{s}_1) \\ \frac{1}{2} * D(\hat{s}_0^2 - \hat{s}_1^2) &= F_{reib} * (\hat{s}_0 + \hat{s}_1) \\ \frac{1}{2} * D * (\hat{s}_0 - \hat{s}_1) * (\hat{s}_0 + \hat{s}_1) &= F_{reib} * (\hat{s}_0 + \hat{s}_1) \\ \frac{1}{2} * D * (\hat{s}_0 - \hat{s}_1) &= F_{reib} \\ \hat{s}_0 - \hat{s}_1 &= \frac{2 * F_{reib}}{D} \qquad (4.9)\end{aligned}$$

Bei der konstanten Reibungskraft F_{reib} nehmen die Amplituden linear ab, d.h. die Amplituden verringern sich von Umkehrpunkt zu Umkehrpunkt stets um den selben Betrag.
Es gilt:

$$m * \ddot{s}_{(t)} = -D * s - F_{reib} \qquad (4.10)$$

Dämpfung durch eine zur Geschwindigkeit proportionale Kraft

$$m * \ddot{s}_{(t)} = -D * s_{(t)} - k * \dot{s}_{(t)} \qquad (4.11)$$

Bei der Lösungsfunktion gilt, dass $\frac{\hat{s}_0}{\hat{s}_1} = \frac{\hat{s}_1}{\hat{s}_2} = \frac{\hat{s}_2}{\hat{s}_3} = const.$

Aufgabe: Lösung der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} m * \ddot{s}_{(t)} &= -D * s_{(t)} - k * \dot{s}_{(t)} \\ m * \ddot{s}_{(t)} + k * \dot{s}_{(t)} + D * s_{(t)} &= 0 \qquad (4.12)\end{aligned}$$

Annahme: $s_{(t)} = e^{xt}$

$$\begin{aligned} m * x^2 * e^{xt} + k * x * e^{xt} + D * e^{xt} &= 0 \\ \left(m * x^2 + k * x + D\right) * e^{xt} &= 0 \\ \rightarrow m * x^2 + k * x + D &= 0 \qquad (4.13)\end{aligned}$$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen:

$$x_1 = \frac{-k + \sqrt{k^2 - 4 * m * D}}{2m}$$
$$x_2 = \frac{-k - \sqrt{k^2 - 4 * m * D}}{2m}$$

Für die Lösungsfunktion der Differentialgleichung folgt also:

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{m * \ddot{s}_{(t)} + k * \dot{s}_{(t)}}{-D} \\ &= \frac{m * (e^{xt}) + k * (e^{xt})}{-D} \end{aligned}$$

Möglichkeit 1:

$$= \frac{m * e^{\frac{-k+\sqrt{k^2-4*m*D}}{2m}t} + k * e^{\frac{-k+\sqrt{k^2-4*m*D}}{2m}t}}{-D} \tag{4.14}$$

Möglichkeit 2:

$$= \frac{m * e^{\frac{-k-\sqrt{k^2-4*m*D}}{2m}t} + k * e^{\frac{-k-\sqrt{k^2-4*m*D}}{2m}t}}{-D} \tag{4.15}$$

Dämpfung durch den Luftwiderstand

$$m * \ddot{s}_{(t)} = -D * s_{(t)} - b * \dot{s}_{(t)}^2 \tag{4.16}$$

4.7.1 Einschub: Tacoma Bridge

- Datum: 7. November 1940
- Name: Tacoma Narrows Bridge
- Spannweite: 853 m
- Zwei in 37 m tiefem Wasser stehende Pylone
- Windgeschwindigkeit: 68 km/h
- Amplitude: 0.6 m

4.8 Erzwungene Schwingungen

Überlässt man einen Oszillator nach dem Anstoßen sich selbst, so schwingt er mit der Eigenfrequenz f_0 (bzw. $\omega_0 = s\pi * f_0$)
Wenn auf einen Schwinger periodisch eine Kraft $F_1 = \hat{F}_1 * sin(\omega_{Err} * t)$ ausgeübt wird, führt er eine erzwungene Schwingung aus. Er schwingt dann mit der Frequenz des Erregers f_{Err}.
<u>Resonanz</u> tritt auf, wenn $f_{Err} = f_0$.
Die Differentialgleichung der Schwingung lautet hier:

$$m * \ddot{s}_{(t)} = -D * s_{(t)} - k * \dot{s}_{(t)} + \hat{F}_1 * sin(\omega_{Err} * t) \tag{4.17}$$

Im Resonanzfall beträgt die Phasendifferenz zwischen Erreger und Oszillator $\frac{\pi}{2}$!
Der Oszillator nimmt besonders viel Energie auf!

5 Wellen

5.1 Definition

Beispiele: Elektromagnetische Wellen (Radio, Licht,...) Schallwellen, Wasserwellen, Erdbebenwelle...

Welle: Ein sich räumlich fortpflanzender Bewegungszustand, der <u>Energie</u> aber keine <u>Materie</u> transportiert

Wellenausbreitung im Medium: Jeder Oszillator ist an seine Nachbarn gekoppelt und wird zu einer erzwungenen Schwingung angeregt. Das 3. Teilchen beschleunigt das 4. Teilchen und erfährt die reactio. Die Ausbreitung erfolgt umso schneller, je größer D und je kleiner m ist ($a = \frac{F}{m}$)

5.2 Wichtige physikalische Größen

Während ein einzelner Oszillator eine Schwingung (mit der Periodendauer T) ausführt, ist die Welle gerade eine Wellenlänge λ weiter vorgerückt.

Also beträgt die Ausbreitungsgeschwindigkeit c der Welle:

$$c = \frac{\lambda}{T} = \lambda * f \tag{5.1}$$

Die Geschwindigkeit jedes einzelnen Oszillators v bei der erzwungenen Schwingung wird -zur Unterscheidung von der Ausbreitungsgeschwindigkeit c- Schnelle v bezeichnet.

Transversalwelle: Bei einer Transversalwelle steht der Schwingungsvektor senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Wellenberge und Wellentäler laufen über den Wellenträger.

Bsp.: elektromagnetische Wellen, S-Wellen beim Erdbeben
Mechanische Transversalwellen können nur entstehen, wenn zwischen den Oszillatoren elastische Querkräfte wirksam sind (also nur im Festkörper)

Longitudinalwelle: Bei einer Longitudinalwelle steht der Schwingungsvektor parallel zur Ausbreitungsrichtung. Verdichtungen und Verdünnungen laufen über den Wellenträger.

Bsp.: Schallwellen
Longitudinalwellen können dann entstehen, wenn zwischen den Oszillatoren Kräfte wirksam sind, die der Volumenänderung entgegenwirken. Mechanische Longitudinalwellen sind "Druckwellen"(existieren in Festkörper, Flüssigkeiten und Gasen)

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit c wird auch Phasengeschwindigkeit (v_{ph}) genannt, weil sie die Geschwindigkeit, mit der sich eine bestimmte Phasenlage der Oszillatoren über den Wellenträger ausbreitet.

5.3 Zeitliche und räumliche Darstellung einer Welle

Beim zeitlichen Durchblick ist der zeitliche Verlauf der erzwungenen Schwingung an einem Ort dargestellt.

Beim räumlichen Durchblick zu einem Zeitpunkt t stellt sich die Welle dar wie man sie zu diesem Zeitpunkt im Raum sieht.(Fotografie) Der Oszillator am Kopf der Welle beginnt gerade zu diesem Zeitpunkt seine Schwingung, sein Nachbaroszillator schwingt bereits einen kurzen Moment, dessen Nachbaroszillator schwingt noch einen Moment länger etc. Man sieht alle Phasenzustände nebeneinandergelegt.

Beim diagonalen Durchblick verfolgt man eine bestimmte Schwingungsphase (z.B. den Kopf der Welle oder den ersten Wellenberg) bei seiner Wanderung über den Wellenträger.

5.4 Die Bewegungsgleichung einer Welle

- Oszillator am Punkt $x = 0$, der zum Zeitpunkt $t = 0s$ von der Welle erfasst wird:

$$s_{(0\ cm;t)} = \hat{s} * sin(\omega t) \tag{5.2}$$

- Oszillator am Punkt x, der zum Zeitpunkt t von der Welle erfasst wird:

$$s_{(x,t)} = \hat{s} * sin(\omega(t - \frac{x}{c})) \tag{5.3}$$
$$= \hat{s} * sin(\omega t - \omega\frac{x}{c}) \tag{5.4}$$
$$= \hat{s} * sin(\omega t - \frac{2\pi}{T}\frac{x}{c}) \tag{5.5}$$
$$(= \hat{s} * sin(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x)) \tag{5.6}$$

Differentialgleichung Die Bewegungsgleichung ist die Lösungsfunktion der Differentialgleichung der Welle:

$$F_{(x,t)} = m * \ddot{s}_{(x,t)} \tag{5.7}$$

Die Kraft auf einen Oszillator ist proportional zur Krümmung der Kurve $s_{(x,t)}$

$$F_{(x,t)} = D * s''(x,t) \tag{5.8}$$
$$D * s''_{(x,t)} = m * \ddot{s}_{(x,t)} \tag{5.9}$$

Kontrolle: Einsetzen von $s_{x,t} = \hat{s} * sin(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x)$

$$D\left(-\hat{s} * \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 * sin(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} * x)\right) = m\left(-\hat{s} * \omega^2 * sin(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} * x)\right)$$

$$D * \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = m * \omega^2 \tag{5.10}$$

$$D * \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = m * \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \tag{5.11}$$

$$D * \frac{1}{\lambda^2} = m * \frac{1}{T^2} \tag{5.12}$$

$$\frac{D}{m} = \frac{\lambda^2}{T^2} = c^2 \tag{5.13}$$

$$c = \sqrt{\frac{D}{m}} \tag{5.14}$$

Zeigerdarstellung Jedem Oszillator am Ort x kann ein Zeiger zugeordnet werden, der gegen den Uhrzeigersinn rotiert und dessen y-Komponente die momentane Elongation $s_{(x,t)}$ angibt.

5.5 Einschub: Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen an einem Ort

Die Zeiger von s_1 und s_2 rotieren mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit ω gegen den Uhrzeigersinn. Ihre relative Lage zueinander bleibt dabei immer gleich. Das Zeigerdiagramm ermöglicht es uns, durch die vektorielle Addition der Zeiger von s_1 und s_2 den resultierenden Zeiger zu bestimmen. Die Länge des resultierenden Zeigers entspricht $\hat{s}_{res}$, die Phasendifferenz $\delta\varphi$ bezüglich s_1 gibt an, um welche Phase der Schwingung s gegenüber s_1 vorauseilt. Zudem erhält man die aktuelle Phasenlage des Zeigers für den Zeitpunkt, den das Zeigerdiagramm darstellt.

5.6 Überlagerung von Wellen-allgemeines Prinzip

Prinzip der ungestörten Überlagerung von Wellen Treffen an einer Stelle eines Wellenträgers mehrere Wellen aufeinander, so addieren sich dort die Elongationen und Schnellen der Schwingungen. Nach dem Zusammentreffen laufen die Wellen ungestört weiter.

Die ungestörte Überlagerung mehrerer Wellen von gleicher Frequenz(und damit gleicher Wellenlänge) wird als Interferenz bezeichnet

5.7 Interferenz

5.7.1 Überlagerung gleichlaufender Wellen

Bei Interferenz zweier Wellen gleicher Frequenz ergibt sich

- konstruktive Interferenz: maximale Verstärkung bei einer Phasendifferenz von $\Delta\varphi = k * 2\pi$, entsprechend einem Gangunterschied von $\delta = k * \lambda$ mit $k \in \mathbb{N}$

- destruktive Interferenz: maximale Abschwächung bei einer Phasendifferenz von $\Delta\varphi = (2k-1)\pi$, entsprechend einem Gangunterschied von $\delta = (2k-1) * \frac{\lambda}{2}$ mit $k \in \mathbb{N}$

5.7.2 Überlagerung gegenlaufender Wellen

Bei der Überlagerung gleicher, gegenlaufender Wellen ergeben sich <u>stehende</u> Wellen:

- Es gibt Stellen, an denen die Amplitude stets 0 ist. Sie heißen Schwingungsknoten

- Es gibt Stellen mit stets maximaler Amplitude($\hat{s}_{res} = \hat{s}_1 + \hat{s}_2$). Sie heißen Schwingungsbäuche

- Die Oszillatoren schwingen zwischen zwei Knoten phasengleich, aber mit unterschiedlicher Amplitude. Vor und nach einem Knoten schwingen sie gegenphasig.

- Die Entfernung zwischen benachbarten Knoten beträgt $\frac{\lambda}{2}$, ebenso zwischen benachbarten Bäuchen.

Zum Zeitpunkt, an dem alle Oszillatoren die Ruhelage passieren, erreichen sie ihre maximale Schnelle. Diese ist unterschiedlich. Die Gesamtenergie liegt also als kinetische Energie vor.

$(W_{ges} = \frac{1}{2} * m * \hat{v}^2)$
Zum Zeitpunkt, an dem alle Oszillatoren ihre maximale Elongation erreichen, sind alle Oszillatoren in Ruhe. Ihre Beschleunigung ist maximal. Die Gesamtenergie liegt als potenzielle Energie vor.
$(W_{ges} = \frac{1}{2} D\hat{s}^2)$.
Allgemein: Die stehende Welle transportiert keine Energie An den Knoten besitzen die Oszillatoren keine Energie, an den Bäuchen besitzen die Oszillatoren maximale Energie.

Überlagerung auf der Verbindungsgerade zweier Wellenzentren

Zwei Wellenzentren an den Positionen $+d$ und $-d$ auf der x-Achse
$d = 7$ cm; $\lambda = 6$ cm
Betrachtung des Gangunterschieds δ an der Stelle x
$\delta = |(x + d) - (d - x)| = 2 * |x|$

- Für die Schwingungsbäuche $\delta = k * \lambda$; $k \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} 2 * x &= k * \lambda \\ x &= k * \frac{\lambda}{2} \end{aligned}$$

- Für die Schwingungsknoten $\delta = (2k - 1) * \frac{\lambda}{2}$; $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} 2 * x &= (2k - 1) * \frac{1}{2} \\ x &= (2k - 1) * \frac{\lambda}{4} \end{aligned}$$

5.8 Reflexion mechanischer Wellen

Am festen Ende werden aufgrund von Actio-Reactio Elongation und Schnelle umgekehrt.(Phasensprung um π)
Am losen Ende werden Elongation und Schnelle ohne Phasensprung reflektiert.

Bei Longitudinalwellen gelten die selben Gesetzmäßigkeiten bei der Reflexion wie bei Transversalwellen:
Am festen Ende werden Elongation und Schnelle umgekehrt (Phasensprung um π), am losen Ende behalten sie ihre Richtung bei.

5.9 Eigenschwingungen auf begrenztem Wellenträger

Auf einem begrenzten Wellenträger können sich nun bei bestimmten Anregungsfrequenzen, den sogenannten Eigenfrequenzen des Wellenträgers, stehende Wellen ausbilden. Er zeigt dann ein typisches Resonanzverhalten (das heißt, die Schwingungsamplitude kann ein Vielfaches der Erregerschwingungsamplitude betragen). Die Eigenschwingungen heißen k-te harmonische ($k \in \mathbb{N}$).

Randbedingungen:

- Zwei gleiche Enden:

$$\lambda_k = \frac{2 * l}{k} = \frac{\lambda_1}{k}$$
$$f_k = k * \frac{c}{2 * l} = k * \frac{c}{\lambda_1} = k * f_1$$

- zwei ungleiche Enden:

$$\lambda_k = \frac{4 * l}{2k - 1} = \frac{1}{2k - 1} * \lambda_1$$
$$f_k = (2k - 1) * \frac{c}{4 * l} = (2k - 1) * f_1$$

6 Interferenzphänomene

6.1 Interferenz mit zwei Quellen

a) Wichtige Voraussetzungen für Interferenzphänomene: 2 Sender mit gleicher Frequenz und konstanter Phasendifferenz nennt man Kohärenz. Kohärenz ist eine unabdingbare Voraussetzung für die Entstehung eines über längere Zeit beobachtbaren Interferenzphänomens.

b) Ein beliebiger Oszillator im Wellenfeld wird immer von zwei Wellen erfasst und von beiden zu erzwungenen Schwingungen derselben Frequenz angeregt. Entscheidend für das Ergebnis der Überlagerung in einem Punkt ist die dortige Phasendifferenz $\Delta\varphi$ der resultierenden Schwingungen. Diese ergibt sich aus dem Gangunterschied δ

konstruktive Interferenz:

$$\delta = k * \lambda \qquad (k \in \mathbb{N})$$
$$\Delta\varphi = k * 2 * \pi$$

destruktive Interferenz:

$$\delta = (2k-1) * \frac{\lambda}{2} \qquad (k \in \mathbb{N})$$
$$\Delta\varphi = (2k-1) * \pi$$

6.1.1 Interferenzkurven

Zwei kohärente Kreiswellen erzeugen durch Interferenz ein symmetrisches Wellenfeld aus konfokalen Interferenzhyperbeln konstruktiver und destruktiver Interferenz. Die Punkte mit Gangunterschied $\delta = k * \lambda \wedge k \in \mathbb{N}$ liegen auf Hyperbeln konstruktiver Interferenz, die Punkte mit Gangunterschied $\delta = (2k-1) * \frac{\lambda}{2} \wedge k \in \mathbb{N}$ auf Interferenzhyperbeln destruktiver Interferenz.

6.1.2 Energieverteilung

Die Energie an einem Ort ist proportional zu $\hat{s}^2$. An Orten maximaler Amplitude ist W proportional zu $(2*\hat{s})^2 = 4*\hat{s}^2$. An Orten destruktiver Interferenz ist $W_{ges} = 0$. Im Mittel ergibt sich also: $W_{ges} \sim 2 * \hat{s}^2$. Dies ist das selbe Ergebnis, das man durch die Addition der Schwingung zweier fortschreitender Wellen erhält.

Durch Interferenz wird die Energieverteilung im Feld geändert, die Energiesumme bleibt jedoch erhalten.

6.2 Berechnung der Lage der Maxima und Minima im Interferenzfeld mithilfe trigonometrischer Berechnung

Die Wellenstrahlen s_1 und s_2 verlaufen fast parallel unter dem Winkel α zur Mittelsenkrechten (optische Achse) und treffen sich im Punkt P des optischen Schirms im Abstand d vom der Mitte (des Schirms)

Es gilt:

$$tan(\alpha) = \frac{d}{a}$$
$$sin(\alpha) = \frac{\delta}{g}$$

6.3 Das Huygens'sche Prinzip (nach Christiaan Huygens 1629-1695)

Jeder Punkt einer Wellenfront kann als Ausgangspunkt von Elementarwellen angesehen werden.
(Mit gleichem $\Delta\varphi$ und f wie die ursprüngliche Welle) Die Einhüllende aller Elementarwellen ergibt die neue Wellenfront

a) Bild 1 Elementarwelle trifft auf Kaimauer

b) Bild 2 parallele Wellenfronten treffen auf Kaimauer

c) Bild 3 parallele Wellenfronten setzen sich zusammen aus Elementarwellen, Einführung der Wellennormale

d) Bild 4 punktförmiger Erreger erzeugt Wellen, die sich aus Elementarwellen zusammensetzen